СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 10, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1299–1315

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ШУМАМИ

© 2022 г. Е. С. Паламарчук

Анализируется поведение решений линейных стохастических дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, содержащих коррелированные аддитивные и мультипликативные возмущения, а также внешние воздействия в форме случайного процесса. Находится вид функций с вероятностью, равной единице, и в среднем квадратичном, мажорирующих решения при возрастании параметра времени. Полученные результаты применяются при изучении проблемы моделирования субдиффузий, если решение линейного стохастического дифференциального уравнения задаёт процесс скорости.

DOI: 10.31857/S0374064122100016, EDN: KPUCXV

Введение. Проведём анализ поведения решений линейных неоднородных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) при коррелированных шумах в уравнении динамики и стремлении параметра времени к бесконечности.

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ задан скалярный процесс X_t, $t\geqslant 0$, являющийся решением линейного СДУ вида

$$dX_t = a_t X_t\,dt + f_t\,dt + G_t\,dW_t + \sigma_t X_t\,dw_t \tag{1}$$

с неслучайным начальным условием $X_0 = x$; a_t, G_t, σ_t – кусочно-непрерывные детерминированные функции времени; f_t, $t\geqslant 0$, – измеримый $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс со свойством $E\int_0^t f_s^2\,ds < \infty$, $t\geqslant 0$; W_t, w_t, $t\geqslant 0$, – коррелированные одномерные $\mathcal{F}_t$-согласованные винеровские процессы, т.е. $dW_t\,dw_t = \rho\,dt$, где ρ – константа, такая что $-1\leqslant\rho\leqslant 1$. При этом под решением уравнения (1) понимается $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс X_t, $t\geqslant 0$, имеющий почти наверное (п.н.) непрерывные траектории, для которого при любом $t\geqslant 0$ с вероятностью, равной единице, выполняются соотношения $\int_0^t(|a_sX_s| + |f_s| + \sigma_s^2X_s^2)\,ds < \infty$ и $X_t = x + \int_0^t a_sX_s\,ds + \int_0^t f_s\,ds + \int_0^t G_s\,dW_s + \int_0^t \sigma_sX_s\,dw_s$ (см. [1, определение 6.15, с. 48]), $|\cdot|$ – знак модуля. Очевидно, что здесь идет речь о так называемом сильном решении СДУ, существование и единственность которого в потраекторном смысле обсуждаются далее.

Уравнение (1) является уравнением с переменными коэффициентами, предположения о которых формулируются ниже. Здесь отметим, что допускаются ситуации как неограниченности, так и сингулярности параметров при $t\to\infty$. Уравнения такого вида широко применяются при моделировании в различных областях приложений (см. [2–4] и ссылки в работе [5]). В частности, X_t может выступать в качестве процесса скорости, и тогда на его основе возникают модели аномальных диффузий (см. [4, 6, 7]) для частных случаев уравнения (1), что также будет обсуждаться в рамках данной статьи. Кроме того, важно отметить, что (1) может получаться из ряда нелинейных уравнений при замене переменной, например, в области популяционной динамики [8] или экономических моделях [9]. Введённое предположение о наличии корреляции между винеровскими процессами, задающими аддитивные и мультипликативные возмущения, также мотивировано учётом различных факторов, влияющих на эволюцию реальных процессов (в инженерии см. работу [10], в экономике – [11]). Внешние воздействия f_t, имеющие случайный характер, тоже могут играть существенную роль при описании динамики, например, в теории стохастического управления (см. [12, раздел 1.2, с. 8]) с отдельным выделением систем среднего поля [12, раздел 3.6, с. 106], а также в конкретных моделях (см.

[3] и [13]). Ниже формулируются основные предположения относительно коэффициентов уравнения (1).

Предположение А. Существует монотонная детерминированная функция $\delta_t > 0,\ t \geqslant 0$, такая, что

$$\int\limits_0^t \delta_v\, dv \to \infty, \quad t \to \infty, \quad \limsup_{t\to\infty}\{(G_t^2 + \sigma_t^2)/\delta_t\} < \infty, \tag{2}$$

и при этом для функции $\bar{\Phi}(t,s) = \exp\left(\int_s^t a_v\, dv\right)$ выполняются неравенства

$$\kappa_2 \exp\left(-2\bar{\kappa}\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right) \leqslant \bar{\Phi}^2(t,s) \leqslant \kappa_1 \exp\left(-2\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right), \quad s \leqslant t, \tag{3}$$

$$\bar{\Phi}^2(t,s)\exp\left(\int\limits_s^t \sigma_v^2\, dv\right) \leqslant \kappa_3 \exp\left(-2\kappa\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right), \quad s \leqslant t, \tag{4}$$

при некоторых константах $\kappa_i,\ \kappa_i > 0\ \ (i = 1,2,3),\ \bar{\kappa}$ и κ таких, что $\bar{\kappa} \geqslant 1,\ 0 < \kappa \leqslant 1.$

Условие (2) и правое неравенство в (3) дают асимптотическую сходимость к нулю с темпом δ_t для решения детерминированной версии уравнения (1) $(G_t = f_t = \sigma_t \equiv 0)$. Если $f_t \equiv 0$, то в стохастическом случае наличие условий (4) и (2) обеспечивает ограниченность EX_t^2, $t \geqslant 0$. Также отметим, что левое неравенство в (3) является аналогом оценки Ляпунова (см. [14, с. 132]).

Очевидно, что одним из важных вопросов при изучении уравнения (1) становится исследование его решений при возрастании параметра времени, в частности, интересует возможность стремления X_t к нулю. В данной работе такой анализ проводится при помощи построения верхних оценок в том или ином вероятностном смысле как функций от параметров в (1). Точнее, ставится задача поиска неотрицательных функций h_t и $\bar{h}_t,\ t \geqslant 0$, таких, что с вероятностью, равной единице

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{EX_t^2}{\bar{h}_t} < \infty \quad \text{и} \quad \limsup_{t\to\infty}\frac{X_t^2}{h_t} < \infty.$$

Тогда, если известен вид h_t и $\bar{h}_t$, можно выявить условия на коэффициенты, при которых $EX_t^2 \to 0$, т.е. возникает сходимость в среднем квадратичном, или же с вероятностью, равной единице, справедливо соотношение $X_t^2 \to 0$, означающее стремление процесса к нулевому состоянию п.н. при $t \to \infty$. Ранее задача поиска функций h_t и $\bar{h}_t$ исследовалась для частных случаев уравнения (1). Так, в работе [15] рассматривались постоянные $a_t,\ \sigma_t$, коэффициент $G_t \equiv 0$ и неотрицательная детерминированная функция f_t с ограничением на рост. В [16] при $a_t \equiv a,\ \sigma_t \equiv \sigma,\ W_t = w_t$ и неслучайной f_t было найдено условие сходимости $X_t \to 0$ п.н. при $t \to \infty$. При суперэкспоненциальном затухании коэффициента $G_t,\ f_t \equiv 0$ и $W_t = w_t$ в [5] были получены суперэкспоненциально убывающие функции h_t и $\bar{h}_t$. Случаи наличия только одного из типов возмущений и без внешних воздействий в (1), т.е. если $f_t \equiv 0$ и при этом G_t или σ_t – тождественный нуль, изучались в статье [17] для аддитивного шума, в [18, раздел 4.2, с. 117] – для мультипликативного шума.

Далее статья организована следующим образом: в п. 1 приводятся основные результаты о виде функций h_t и $\bar{h}_t$ в рамках предположения А, а также ряд вспомогательных результатов и примеры; п. 2 посвящён вопросу моделирования при помощи уравнения (1) процессов субдиффузий, являющихся одним из классов аномальных диффузий.

1. Основные результаты. Сначала приведём ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет единственное сильное решение, при этом*

$$X_t = \Phi(t,0)x + \Phi(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0) f_s\, ds +$$

$$+\,\Phi(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)G_s\,dW_s - \rho\Phi(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)\sigma_s G_s\,ds, \tag{5}$$

где

$$\Phi(t,s)=\exp\bigg(\int\limits_s^t a_v\,dv-\frac12\int\limits_s^t \sigma_v^2\,dv+\int\limits_s^t \sigma_v\,dw_v\bigg) \tag{6}$$

и

$$\Phi^{-1}(s,0)=\exp\bigg(-\int\limits_0^s a_v\,dv+\frac12\int\limits_0^s \sigma_v^2\,dv-\int\limits_0^s \sigma_v\,dw_v\bigg).$$

Доказательство. При сделанных предположениях существование единственного сильного решения линейного СДУ вида (1) следует из известных результатов (см., например, [19, лемма 7.1]), при этом интегралы Лебега в формуле (5) и стохастические интегралы Ито определены в силу введённых условий на коэффициенты уравнения (1), в частности, при $E\int_0^t f_s^2\,ds<<\infty,\ t\geqslant 0$. Также (см. [20]) почти все траектории X_t являются непрерывными функциями времени и $EX_t^2<\infty,\ t\geqslant 0$. Далее находится стохастический дифференциал для функции (5). Здесь применяется формула $d(\xi_t\eta_t)=\eta_t\,d\xi_t+\xi_t\,d\eta_t+\,d\xi_t\,d\eta_t$ (см. [21, с. 168]) и учитываются соотношения $d\Phi(t,0)=a_t\Phi(t,0)\,dt+\sigma_t\Phi(t,0)\,dw_t,\ \ d\Phi(t,0)\,dW_t=\rho\sigma_t\Phi(t,0)\,dt$. Таким образом, можно заметить, что $dX_t=a_tX_t\,dt+f_t\,dt+G_t\,dW_t+\sigma_tX_t\,dw_t+\rho\sigma_tG_t\,dt-\rho\sigma_tG_t\,dt$ при $X_0=x$, что совпадает с (1). Утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть выполнено предположение A. Тогда справедлива оценка*

$$\limsup_{t\to\infty}\{EX_t^2/\bar h_t\}<\infty, \tag{7}$$

где функция $\bar h_t$ задаётся в виде

$$\bar h_t=\exp\bigg\{-2\kappa(1-\lambda)\int\limits_0^t\delta_v\,dv\bigg\}x^2+\int\limits_0^t\exp\bigg\{-2\kappa(1-\lambda)\int\limits_s^t\delta_v\,dv\bigg\}\bigg(G_s^2+\frac{Ef_s^2}{\delta_s}\bigg)\,ds \tag{8}$$

для любой константы $\lambda,\ \ 0<\lambda<1$, при этом постоянная $\kappa,\ \ 0<\kappa\leqslant 1$, берётся из условия (4).

Доказательство. Для процесса $X_t,\ t\geqslant 0$, справедливо представление

$$X_t=\bar\Phi(t,0)x+\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)f_s\,ds+\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)G_s\,dW_s+\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)\sigma_sX_s\,dw_s, \tag{9}$$

где $\bar\Phi(t,s)=\exp\big(\int_s^t a_v\,dv\big)$, а соответствующие интегралы в (9) определены в силу того, что $E\int_0^t f_s^2\,ds<\infty$ и $EX_t^2<\infty,\ t\geqslant 0$. После возведения равенства (9) в квадрат, нахождения математического ожидания от обеих частей по правилам стохастического исчисления, в частности, с учётом формулы $E(\int_0^t\bar\Phi(t,s)G_s\,dW_s\int_0^t\bar\Phi(t,s)\sigma_sX_s\,dw_s)=\int_0^t\bar\Phi^2(t,s)\rho\sigma_sG_sEX_s\,ds$, получим соотношение

$$EX_t^2=\bar\Phi^2(t,0)x^2+E\bigg(\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)f_s\,ds\bigg)^2+\int\limits_0^t\bar\Phi^2(t,s)G_s^2\,ds+\int\limits_0^t\bar\Phi^2(t,s)\sigma_s^2EX_s^2\,ds+I_0(t),$$

где

$$I_0(t)=2\bar\Phi(t,0)xE\bigg(\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)f_s\,ds\bigg)+2E\bigg(\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)f_s\,ds\int\limits_0^t\bar\Phi(t,s)G_s\,dW_s\bigg)+$$

$$+\,2\int\limits_0^t \bar\Phi^2(t,s)\rho\sigma_s G_s EX_s\,ds + 2E\biggl(\int\limits_0^t \bar\Phi(t,s) f_s\,ds \int\limits_0^t \bar\Phi(t,s)\sigma_s X_s\,dw_s\biggr).$$

Далее, применив элементарное неравенство вида $AB\leqslant A^2/c+cB^2$, справедливое для любых действительных чисел A, B и $c>0$, к слагаемым в формуле для $I_0(t)$, а также неравенство Коши–Буняковского для выражения $(\int_0^t \bar\Phi(t,s)f_s\,ds)^2$, после приведения подобных членов будем иметь оценку

$$EX_t^2 \leqslant c_x\bar\Phi^2(t,0)x^2 + c_f\int\limits_0^t \delta_s\bar\Phi^{2\tilde\varepsilon}(t,s)\,ds \int\limits_0^t \bar\Phi^{2-2\tilde\varepsilon}(t,s)\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds\,+$$

$$+\,c_G\int\limits_0^t \bar\Phi^2(t,s)G_s^2\,ds + c_\sigma\int\limits_0^t \bar\Phi^2(t,s)\sigma_s^2 EX_s^2\,ds,$$

где $c_x=1+\varepsilon_{xf}^{-1}$, $c_f=1+\varepsilon_{xf}+\varepsilon_{fG}^{-1}+\varepsilon_{f\sigma}^{-1}$ $c_G=1+\varepsilon_{fG}+\varepsilon_{f\sigma}^{-1}$, $c_\sigma=1+\varepsilon_{f\sigma}+\varepsilon_{G\sigma}$ при некоторых сколь угодно малых положительных константах ε_{xf}, ε_{fG}, $\varepsilon_{f\sigma}$, $\varepsilon_{G\sigma}$ и $0<\tilde\varepsilon<1$. Заметим, что $I_0(t)\equiv 0$ при $f_t\equiv 0$ и $\rho=0$, и тогда можно положить $c_\sigma=1$. Введём переменную $y_t=\bar\Phi^2(0,t)EX_t^2$ и перейдём к неравенству

$$y_t\leqslant c_x x^2 + c_f l_t^{(1)} + c_G l_t^{(2)} + \int\limits_0^t c_\sigma\sigma_s^2 y_s\,ds,$$

где функции $l_t^{(1)}=\int_0^t \delta_s\bar\Phi^{2\tilde\varepsilon}(0,s)\,ds\int_0^t\bar\Phi^{2-2\tilde\varepsilon}(0,s)\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds$, $l_t^{(2)}=\int_0^t\bar\Phi^2(0,s)G_s^2\,ds$, откуда при помощи неравенства Гронуолла–Беллмана в интегральной форме (см. [22, лемма 2.7, с. 42]) получим оценку

$$y_t\leqslant c_x\exp\biggl(\int\limits_0^t c_\sigma\sigma_v^2\,dv\biggr)x^2 + c_f\int\limits_0^t \exp\biggl(c_\sigma\int\limits_s^t \sigma_v^2\,dv\biggr)dl_s^{(1)} + c_G\int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^t c_\sigma\sigma_v^2\,dv\biggr)dl_s^{(2)}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, можно записать

$$EX_t^2\leqslant c_x\tilde\Phi^2(t,0)x^2\exp\biggl(\int\limits_0^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr) + c_G\int\limits_0^t \tilde\Phi^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr)G_s^2\,ds + I_1(t)+I_2(t),$$

где $\varepsilon_0>0$ – сколь угодно малое число,

$$\tilde\Phi^2(t,s)=\bar\Phi^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \sigma_v^2\,dv\biggr),$$

$$I_1(t)=c_f\int\limits_0^t \tilde\Phi^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr)\bar\Phi^{2\tilde\varepsilon}(s,0)\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds\int\limits_0^s \delta_\tau\bar\Phi^{2\tilde\varepsilon}(0,\tau)\,d\tau\,ds,$$

$$I_2(t)=c_f\int\limits_0^t \tilde\Phi^2(t,s)\exp\biggl(\int\limits_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\biggr)\delta_s\bar\Phi^{2-2\tilde\varepsilon}(s,0)\int\limits_0^s \bar\Phi^{2-2\tilde\varepsilon}(0,\tau)\delta_\tau^{-1}Ef_\tau^2\,d\tau\,ds.$$

Заметим, что следствием условия $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}<\infty$ является неравенство вида

$$\exp\left(\int_s^t \varepsilon_0\sigma_v^2\,dv\right)\leqslant\hat\kappa\exp\left(\int_s^t\tilde\varepsilon_0\delta_v^2\,dv\right),$$

справедливое при сколь угодно малом числе $\tilde\varepsilon_0>0$ и некоторой константе $\hat\kappa>0.$ Тогда с учётом свойств (3) и (4) предположения A для слагаемых $I_1(t)$ и $I_2(t)$ при некоторой константе $\tilde c_f>0$ справедливы неравенства

$$I_1(t)\leqslant\tilde c_f\int_0^t\exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int_s^t\delta_v\,dv\right\}\int_0^s\delta_\tau\exp\left\{-2\tilde\varepsilon\int_\tau^s\delta_v\,dv\right\}d\tau\,\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds,$$

$$I_2(t)\leqslant\tilde c_f\int_0^t\exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int_s^t\delta_v\,dv\right\}\delta_s\int_0^s\exp\left\{-(2-2\tilde\varepsilon)\int_\tau^s\delta_v\,dv\right\}\delta_\tau^{-1}Ef_\tau^2\,d\tau\,ds,$$

где $0<\lambda<1.$ Далее, выбрав величину $\tilde\varepsilon$ такой, что $2-2\tilde\varepsilon>2(1-\lambda)\kappa,$ после интегрирования по частям можно перейти к оценке

$$I_1(t)+I_2(t)\leqslant\hat c_f\int_0^t\exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int_s^t\delta_v\,dv\right\}\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds$$

с некоторой константой $\hat c_f>0.$ Объединяя полученные результаты, приходим к окончательному соотношению вида

$$EX_t^2\leqslant\hat c_x\exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\textstyle\int_0^t\delta_v\,dv\right\}x^2+\hat c_G\displaystyle\int_0^t\exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int_s^t\delta_v\,dv\right\}G_s^2\,ds+$$

$$+\hat c_f\int_0^t\exp\left\{-2(1-\lambda)\kappa\int_s^t\delta_v\,dv\right\}\delta_s^{-1}Ef_s^2\,ds,$$

где $\hat c_x,$ $\hat c_G$ – некоторые положительные константы, что и влечёт за собой справедливость оценки (2). Лемма доказана.

Возникновение константы $\lambda,$ уменьшающей показатель экспоненциальной функции в (8), вызвано наличием ненулевой корреляции $\rho\neq0$ между винеровскими процессами, задающими аддитивные и мультипликативные возмущения в (1), а также включением внешних воздействий f_t в динамику (1). Нетрудно заметить (см. доказательство леммы 2), что при $\rho=0$ и $f_t\equiv0$ оценка (2) остаётся справедливой и при $\lambda=0.$

Как упоминалось ранее, при потраекторном анализе поведения $X_t,$ $t\to\infty,$ актуальной задачей становится получение условий на коэффициенты, гарантирующих сходимость X_t к нулю с вероятностью, равной единице. Результат леммы 2 также может быть использован для проблем такого рода. Заметим, что для процесса $X_t,$ $t\geqslant0,$ являющегося решением уравнения (1), с вероятностью, равной единице, также справедливо представление

$$X_t=\exp\left(\int_0^t a_v\,dv\right)x+\int_0^t\exp\left(\int_s^t a_v\,dv\right)G_s\,dW_s+$$

$$+\int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t a_v\,dv\right) f_s\,ds + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t a_v\,dv\right)\sigma_s X_s\,dw_s,$$

при этом интегралы Лебега и стохастические интегралы Ито определены в силу введённых условий на коэффициенты уравнения (1) и того, что $EX_t^2 < \infty$, $t \geqslant 0$ (см. доказательство леммы 1). Тогда, определяя $Y_t^{(0)} = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a_v\,dv\right)\sigma_s X_s\,dw_s$, $X_t^{(0)} = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a_v\,dv\right) G_s\,dW_s$ и $\xi_t = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a_v\,dv\right) f_s\,ds$, приходим к представлению

$$X_t = Y_t^{(0)} + X_t^{(0)} + \xi_t + \exp\left(\int\limits_0^t a_v\,dv\right)x, \tag{10}$$

где процессы $Y_t^{(0)}$, $X_t^{(0)}$ и ξ_t, $t \geqslant 0$, допускают стохастические дифференциалы

$$dY_t^{(0)} = a_t Y_t^{(0)}\,dt + \sigma_t X_t\,dw_t, \tag{11}$$

$$dX_t^{(0)} = a_t X_t^{(0)}\,dt + G_t\,dW_t, \tag{12}$$

$$d\xi_t = a_t \xi_t\,dt + f_t\,dt \tag{13}$$

при нулевых начальных условиях $Y_0^{(0)} = X_0^{(0)} = \xi_0 = 0$. В следующем утверждении приводится условие, позволяющее перейти от анализа сходимости процесса X_t при $t \to \infty$ к анализу поведения процессов $X_t^{(0)}$ и ξ_t, динамика которых не содержит мультипликативных возмущений.

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение A и* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|a_t|/\delta_t\} < \infty$. *Если* $\int_0^\infty \sigma_t^2 \bar h_t\,dt < \infty$, *где функция* $\bar h_t$ *определена в (8), то в (10) процесс* $Y_t^{(0)} \to 0$ *п.н. при* $t \to \infty$. *Тогда процесс* $X_t \to 0$, $t \to \infty$, *с вероятностью, равной единице, если процессы* $X_t^{(0)} \to 0$ *и* $\xi_t \to 0$ *п.н.,* $t \to \infty$. *При этом процессы* $Y_0^{(0)}$, $X_0^{(0)}$ *и* ξ_t, $t \geqslant 0$, *заданы в формулах (11)–(13).*

Доказательство. Соответствующее равенству (11) интегральное представление имеет вид $Y_t^{(0)} = I_t + M_t$, где $I_t = \int_0^t a_s Y_s^{(0)}\,ds$, $M_t = \int_0^t \sigma_s X_s\,dw_s$. Слагаемое $M_t \to M_\infty$, $t \to \infty$, п.н. и в среднем квадратичном, здесь M_∞ – случайная величина (с.в.), так как выполнены условие $\limsup\limits_{t\to\infty}\{EM_t^2\} < \infty$, следующее из (2), оценки $EM_t^2 = \int_0^t \sigma_s^2 EX_s^2\,ds \leqslant c\int_0^t \sigma_t^2 \bar h_t$ и предположения в утверждении доказываемой леммы (здесь и далее $c > 0$ – некоторая константа, конкретное значение которой не играет роли). Для слагаемого I_t известно, что $I_t \to I_\infty$, $t \to \infty$, в среднем квадратичном и п.н. (I_∞ – с.в.), если $EI_\infty^2 < \infty$ (см. [23, с. 97]), где $EI_t^2 = \int_0^t\int_0^t a_s a_\tau E(Y_s^{(0)} Y_\tau^{(0)})\,ds\,d\tau$. Ковариация $E(Y_s^{(0)} Y_\tau^{(0)})$ находится как $E(Y_s^{(0)} Y_\tau^{(0)}) = \exp\left(\int_\tau^s a_v\,dv\right)[E(Y_\tau^{(0)})^2]$, $\tau \leqslant s$, и $E(Y_s^{(0)} Y_\tau^{(0)}) = \exp\left(\int_s^\tau a_v\,dv\right)[E(Y_s^{(0)})^2]$, $\tau > s$. Из уравнения

$$dE[Y_t^{(0)}]^2 = 2a_t E[Y_t^{(0)}]^2\,dt + \sigma_t^2 EX_t^2\,dt$$

с начальным условием $E[Y_0^{(0)}]^2 = 0$ определяется функция $E[Y_t^{(0)}]^2 = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a_v\,dv\right)\sigma_s^2 EX_s^2\,ds$. С учётом вида $E[Y_t^{(0)}]^2$, предположения $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|a_t|/\delta_t\} < \infty$ и неравенств (3) при оценивании приведённого выше выражения для EI_t^2 получаем, что

$$EI_t^2 \leqslant 2c\int\limits_0^t \delta_t \int\limits_0^s \delta_s \exp\left(-\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right) E[Y_s^{(0)}]^2\,ds\,dt \leqslant 2c\int\limits_0^t \delta_s E[Y_s^{(0)}]^2\,ds \leqslant 2\tilde c\int\limits_0^t \sigma_s^2 EX_s^2\,ds$$

(здесь и далее $\tilde c > 0$ – некоторая константа). Таким образом, $EI_\infty^2 < \infty$ и $I_t \to I_\infty$, $t \to \infty$, п.н. и в среднем квадратичном. Следовательно, $Y_t^{(0)} \to Y_\infty^{(0)}$, $t \to \infty$, $Y_\infty^{(0)}$ – некоторая с.в., с вероятностью, равной единице, При этом условие $\int_0^\infty \sigma_s^2 E X_s^2\, ds < \infty$ влечёт за собой $E[Y_t^{(0)}]^2 \to 0,\ \ t \to \infty,$ т.е. $Y_t^{(0)} \to 0$ в среднем квадратичном. Из работы [22, с. 49] известно, что тогда предельные случайные величины п.н. совпадают, т.е. $Y_\infty^{(0)} = 0.$ Соответственно, из представления (10) следует, что для соотношения $X_t \to 0$ п.н. достаточно потребовать, чтобы с вероятностью, равной единице, выполнялось условие $X_t^{(0)} \to 0,$ а также $\xi_t \to 0,\ \ t \to \infty.$ Утверждение доказано.

Обращаясь к утверждению леммы 3, отметим, что (12) и (13) являются линейными уравнениями, поэтому при исследовании асимптотического поведения их решений можно воспользоваться известными результатами. В [17] приведён вид детерминированной функции $h_t^{(0)}$ такой, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{X_t^{(0)}/h_t^{(0)}\} < \infty$ и, очевидно, что ситуация $h_t^{(0)} \to 0$ также влечёт за собой и сходимость $X_t^{(0)} \to 0$ п.н., $t \to \infty.$ Кроме того, если известна неслучайная функция $h_t^{(f)},$ для которой с единичной вероятностью справедливо неравенство $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|f_t|/h_t^{(f)}\} < \infty,$ то для проверки сходимости п.н. $\xi_t \to 0,\ \ t \to \infty,$ переходят к исследованию при $t \to \infty$ функции $d_t = \int_0^t \exp\big(-\int_s^t \delta_v\, dv\big) h_s^{(f)}\, ds.$

Замечание 1. Из предположения А и оценки (2) следует, что условие в утверждении леммы 3 справедливо при неравенствах $\int_0^\infty \sigma_t^2\, dt < \infty$ и $\int_0^\infty (E f_t^2/\delta_t^2)\, dt < \infty,$ для выполнения которых достаточно условий $\int_0^\infty G_t^2\, dt < \infty$ и $\int_0^\infty (E f_t^2/\delta_t)\, dt < \infty.$ Более того, условие $\int_0^\infty G_t^2\, dt < \infty$ влечёт за собой соотношение $X_t^{(0)} \to 0$ п.н., $t \to \infty.$ Если дополнительно известно, что $\int_0^\infty (E f_t^2/\delta_t)\, dt < \infty$ или $\int_0^\infty \sqrt{E f_t^2}\, dt < \infty,$ то $\xi_t \to 0$ п.н., а значит, и $X_t \to 0,$ $t \to \infty,$ с вероятностью, равной единице.

Полученные в лемме 3 условия позволяют выяснить, имеет ли место асимптотическая потраекторная сходимость процесса X_t к нулю, однако это не даёт ответа на вопрос о скорости такой сходимости. Соответствующее утверждение является одним из основных результатов работы и формулируется ниже.

Пусть $\varepsilon > 0$ – действительное число. Положим

$$\mathcal{N}_t(\varepsilon) = \int_0^t \exp\bigg\{2\bar\kappa \int_0^s \delta_v\, dv + (1+\varepsilon)\int_0^s \sigma_v^2\, dv\bigg\} G_s^2\, ds, \tag{14}$$

где $\bar\kappa \geqslant 1$ – константа из условия (3).

Также определим величину $\alpha > 0$ следующим образом:

$$\alpha = \frac{2}{1 + (1 - \kappa/\bar\kappa)^{-1}} + \beta, \tag{15}$$

где $\beta > 0$ – сколь угодно малое число, константы $\bar\kappa$ и κ взяты из (3) и (4) предположения А.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение А. Тогда* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{X_t^2/h_t\} < \infty$ *п.н. для функции* $h_t,$ *задаваемой в виде*

$$h_t = h_t^{(0)} + \int_0^t \exp\bigg\{-2(1-\lambda_2)\int_s^t \delta_v\, dv\bigg\}\bigg(G_s^2 + \frac{f_s^2}{\delta_s}\bigg)\, ds\bigg(\int_0^t \sigma_v^2\, dv\bigg)^{\alpha}, \tag{16}$$

где функция $h_t^{(0)}$ *определяется по формуле*

$$h_t^{(0)} = \exp\bigg\{-2\int_0^t \delta_v\, dv - 2(1-\lambda_0)\int_0^t \sigma_v^2\, dv\bigg\} x^2 +$$

$$+\int\limits_0^t \exp\biggl\{-2(1-\lambda_1)\int\limits_0^t \delta_v\,dv\biggr\}G_s^2\,ds\biggl(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr)^{\alpha}\ln\biggl(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\biggr),$$

если при любом $\varepsilon > 0$ *выполняется условие* $\mathcal{N}_t(\varepsilon)\to\infty,\ t\to\infty,$ *и*

$$h_t^{(0)} = \exp\biggl\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv - 2(1-\lambda_0)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr\}(1+x^2),$$

если для некоторого $\varepsilon>0$ *функция* $\mathcal{N}_\infty(\varepsilon)<\infty$.

При этом функция $\mathcal{N}_t(\varepsilon)$ *задаётся в (14),* λ_i *– произвольные константы,* $0<\lambda_i<1$, $i=0,1,2$. *Для случая* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}>0$ *величина* α *определена в (15), и* $\alpha>0$ *– сколь угодно малое число при* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}=0$. *Кроме того, в случае* $\int_0^\infty \sigma_t^2\,dt<\infty$ *можно положить* $\lambda_1=0$.

Доказательство. Рассмотрим представление (5) и запишем оценку

$$X_t^2 \leqslant 2(I_t + J_t^{(1)} + J_t^{(2)}) + 2\Phi^2(t,0)x^2, \tag{17}$$

где

$$I_t = \Phi^2(t,0)M_t^2 \quad \text{при} \quad M_t = \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)G_s\,dW_s, \tag{18}$$

$$J_t^{(1)} = \Phi^2(t,0)\biggl(\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)f_s\,ds\biggr)^2, \quad J_t^{(2)} = \rho^2\Phi^2(t,0)\biggl(\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s,0)\sigma_s G_s\,ds\biggr)^2.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского и условия $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\}<\infty$ слагаемые $J_t^{(1)}$ и $J_t^{(2)}$ оцениваются следующим образом:

$$J_t^{(1)} + J_t^{(2)} \leqslant c\Phi^2(t,0)(\bar\Phi(t,0))^{-2\varepsilon}\int\limits_0^t \Phi^{-2}(s,0)(\bar\Phi^{-1}(s,0))^{2\varepsilon}\biggl(\frac{f_s^2}{\delta_s}+\rho^2 G_s^2\biggr)ds, \tag{19}$$

здесь $\bar\Phi(t,s)=\exp\bigl(\int_0^t a_v\,dv\bigr)$, $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число. Далее анализируются две ситуации в зависимости от поведения $\int_0^t \sigma_v^2\,dv$, $t\to\infty$.

I. Рассмотрим слагаемое $I_t=\Phi^2(t,0)M_t^2$ из (17). Так как M_t – мартингал (см. (18)), то при функции $\mathcal{N}_t(\varepsilon)$, определённой в (14), выполнения при некотором $\varepsilon>0$ условия $\mathcal{N}_\infty(\varepsilon)<\infty$ будет достаточно для существования M_∞ в силу соотношения $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\langle M_t\rangle/\mathcal{N}_t(\varepsilon)\}<\infty$, здесь $\langle M_t\rangle=\int_0^t \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds$ – квадратическая характеристика M_t. При этом из закона повторного логарифма и формулы (6) следует, что с единичной вероятностью справедлива оценка

$$\Phi^2(t,0)\leqslant c\exp\biggl\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv - (1-\varepsilon)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr\}, \quad t>t_0(\omega), \quad \omega\in\Omega,$$

$\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число, $t_0(\omega)$ – п.н. конечный момент.

Следовательно, $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|I_t|/h_t^{(0)}\}<\infty$ п.н. для функции $h_t^{(0)}=\exp\{-2\int_0^t \delta_v\,dv-(1-\varepsilon)\times$ $\times\int_0^t \sigma_v^2\,dv\}$. Пусть теперь при любом $\varepsilon>0$ имеет место $\mathcal{N}_t(\varepsilon)\to\infty$, $t\to\infty$. Применим к процессу M_t в (18) закон повторного логарифма для мартингалов (см. [24]), получив оценку

$M_t^2 \leqslant c\langle M_t\rangle \ln\ln\langle M_t\rangle$ п.н. при $t > t_0(\omega)$. Вследствие предположения A и формулы (6) имеем, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\ln\ln\langle M_t\rangle/\ln(\int_0^t \delta_v\,dv)\} < \infty$. Тогда с вероятностью, равной единице, справедлива оценка

$$I_t^2 \leqslant c\tilde{J}_t \ln\biggl(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\biggr), \quad t > t_0(\omega), \tag{20}$$

где

$$\tilde{J}_t = \Phi^2(t,0)\int\limits_0^t \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds. \tag{21}$$

Далее, пусть $\int_0^t \sigma_v^2\,dv \to \infty$, $t\to\infty$, и при фиксированном $\omega\in\Omega$ для оценки $\Phi^2(t,s)$ используются законы повторного логарифма для приращений винеровского процесса [25, 26]. Сделаем замену переменной времени $\tilde{t} = \int_0^t \sigma_v^2\,dv$, получив процесс $\hat{w}_{\tilde{t}} = \int_0^t \sigma_v\,dw_v$, $\hat{w}$ – некоторый винеровский процесс. Тогда для малого $\varepsilon > 0$ с единичной вероятностью выполняются неравенства

$$|\hat{w}_{\tilde{t}} - \hat{w}_{\tilde{s}}| \leqslant \sqrt{2(1+\varepsilon)}\sqrt{\tilde{t}-\tilde{s}}\sqrt{\ln\frac{\tilde{t}}{\tilde{t}-\tilde{s}} + \ln\ln\{(\tilde{t}-\tilde{s})\vee e\}} \tag{22}$$

при $\tilde{t} > \tilde{t}_0(\omega)$, $0 \leqslant \tilde{s} \leqslant \tilde{t} - (1/e-\varepsilon)$,

$$|\hat{w}_{\tilde{t}} - \hat{w}_{\tilde{s}}| \leqslant \sqrt{2}N(\omega)\sqrt{\tilde{t}-\tilde{s}}\sqrt{\ln\ln\frac{1}{(\tilde{t}-\tilde{s})}}, \quad 0 \leqslant \tilde{t}-\tilde{s} \leqslant 1/e-\varepsilon, \tag{23}$$

где $\tilde{t}_0(\omega)$ – п.н. конечный момент времени, $N(\omega)$ – п.н. конечная с.в., запись $A\vee B$ означает $\max\{A,B\}$. В результате для функции (21) имеем оценку

$$\tilde{J}_t \leqslant \tilde{J}_t^{(1)} + \tilde{J}_t^{(2)} + \tilde{J}_t^{(3)}, \quad t > \hat{t}_0 = \max(t_0,t_1), \quad t_1 = \inf\biggl\{s : \int\limits_0^s \sigma_v^2\,dv > \tilde{t}_0\biggr\}.$$

При этом $\tilde{J}_t^{(1)} = c\exp\left(-2\int_0^t \delta_v\,dv - (1-\varepsilon)\int_0^t \sigma_v^2\,dv\right)\chi_{\hat{t}_0}$, где $\chi_{\hat{t}_0}$ – п.н. конечная с.в.; остальные интегралы

$$\tilde{J}_t^{(2)} = \Phi^2(t,0)\int\limits_{\hat{t}_0}^{t-\hat{t}_1} \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds, \quad \tilde{J}_t^{(3)} = \Phi^2(t,0)\int\limits_{t-\hat{t}_1}^{t} \Phi^{-2}(s,0)G_s^2\,ds,$$

где момент времени $\hat{t}_1 = t - \inf\{t : \int_0^t \sigma_v^2\,dv > \tilde{t} - (1/e-\varepsilon)\}$.

При оценивании $\tilde{J}_t^{(2)}$ сверху при помощи (22) замечаем, что максимальное значение функции $g(y) = -b_0 y + \sqrt{y}\sqrt{b - b_1 y + b_1\ln\ln(y\vee e)}$, где $1/e-\varepsilon \leqslant y \leqslant e^b$, $b \gg b_0, b_1$ ($\gg$ – знак много больше), не превышает величины $b/(4b_0)$. С использованием (3) и (4) предположения A записывается оценка

$$\exp\biggl\{2\lambda_1\int\limits_0^t a_v\,dv\biggr\} \leqslant \hat{\kappa}_0\exp\biggl\{-\lambda_1(1-\kappa/\bar{\kappa})^{-1}\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr\}$$

при произвольной постоянной λ_1, $0<\lambda_1<1$, где $\hat{\kappa}_0 > 0$ – некоторая константа. Полагая $b = 8(1+\varepsilon)\ln\tilde{t}$, $b_1 = 8(1+\varepsilon)$ и $b_0 = 1+\lambda_1(1-\kappa/\bar{\kappa})^{-1}$, получаем неравенство

$$\Phi^2(t,s) \leqslant c\exp\biggl\{2(1-\lambda_1)\int\limits_s^t a_v\,dv\biggr\}\biggl(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr)^{\alpha}$$

для $\hat{t}_0 \leqslant s \leqslant t - \hat{t}_1$, показатель $\alpha > 0$ определён в (15). Отметим, что в случае $\limsup_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} = 0$ отношение $\kappa/\bar{\kappa}$ можно заменить на число, близкое к единице, и тогда величина α окажется сколь угодно малой.

Для определения асимптотической верхней границы интеграла $\tilde{J}_t^{(3)}$ учитывается (23) и тот факт, что функция $g_1(y) = -y + \sqrt{2}N(\omega)\sqrt{y\ln\ln(1/y)}$ при $0 \leqslant y \leqslant 1/e - \varepsilon$ п.н. ограничена, точнее $g_1(y) \leqslant \tilde{c}N(\omega)$. Тогда $\Phi^2(t,s) \leqslant c\exp\{-2\int_s^t \delta_v\,dv + \tilde{c}N(\omega)\}$ и при интегрировании соответствующее выражение будет мажорироваться верхней оценкой для $\tilde{J}_t^{(2)}$ в силу предположения $\int_0^t \sigma_v^2\,dv \to \infty$, $t \to \infty$.

Учитывая полученные выше оценки, можно записать вид верхней функции для $\tilde{J}_t$ из (21):

$$\tilde{J}_t \leqslant c\int_0^t \exp\biggl\{-2(1-\lambda_1)\int_s^t \delta_v\,dv\biggr\}G_s^2\,ds\biggl(\int_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr)^{\alpha},$$

где $0 < \alpha < 2$ и при этом α определяется в (15), если $\limsup_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} > 0$, в противном случае α – произвольное положительное число.

Проведённые выше рассуждения также используются при построении оценки для $J_t^{(1)} + J_t^{(2)}$ из (19) с заменой λ_1 на λ_2. Возвращаясь к (17) и (20), будем иметь неравенство

$$X_t^2 \leqslant ch_t^{(0)} + c\int_0^t \exp\biggl\{-2(1-\lambda_2)\int_s^t \delta_v\,dv\biggr\}\biggl(\rho^2 G_s^2 + \frac{f_s^2}{\delta_s}\biggr)\,ds\biggl(\int_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr)^{\alpha}, \tag{24}$$

где $t > \max\{t_0(\omega), \hat{t}_0(\omega)\}$,

$$h_t^{(0)} = \int_0^t \exp\biggl\{-2(1-\lambda_1)\int_s^t \delta_v\,dv\biggr\}G_s^2\,ds\biggl(\int_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr)^{\alpha}\ln\biggl(\int_0^t \delta_v\,dv\biggr) +$$

$$+ \exp\biggl\{-2\int_0^t \delta_v\,dv - 2(1-\lambda_0)\int_0^t \sigma_v^2\,dv\biggr\}x^2$$

при выбранных константах λ_0, λ_1 и λ_2 таких, что $0 < \lambda_0 < 1$, $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1$.

II. В случае $\int_0^\infty \sigma_v^2\,dv < \infty$ нетрудно заметить, что с вероятностью, равной единице, имеет место сходимость $\int_0^t \sigma_v\,dw_v \to \chi_\infty$, где $\chi_\infty = \int_0^\infty \sigma_v\,dw_v$ – п.н. конечная с.в. Следовательно, $|\int_s^\infty \sigma_v\,dw_v| < \varepsilon$ п.н. при $s \geqslant \hat{t}_0(\omega)$, $\hat{t}_0(\omega)$ – п.н. конечный момент. Тогда для функции $\Phi(t,s)$ при $t \geqslant s > \hat{t}_0(\omega)$ справедлива оценка

$$\Phi^2(t,s) \leqslant \kappa_1\exp\biggl\{-2\int_s^t \delta_v\,dv\biggr\}\exp(2\varepsilon) \leqslant \hat{\kappa}_1\exp\biggl\{-2\int_s^t \delta_v\,dv\biggr\} \quad \text{п.н.},$$

где $\hat{\kappa}_1 = \kappa_1\exp(2\varepsilon)$. Соответственно, переходя к оцениванию I_t в (20), получаем, что при $t > \max\{t_0(\omega), \hat{t}_0(\omega)\}$ с единичной вероятностью выполняется неравенство

$$I_t \leqslant c\int_0^t \exp\biggl\{-2\int_s^t \delta_v\,dv\biggr\}G_s^2\,ds\ln\biggl(\int_0^t \delta_v\,dv\biggr),$$

а при оценке сверху суммы $J_t^{(1)}+J_t^{(2)}$ из (19) приходим к соотношению

$$J_t^{(1)}+J_t^{(2)} \leqslant c\int\limits_0^t \exp\biggl\{-2(1-\lambda_2)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\biggr\}\biggl(G_s^2+\frac{f_s^2}{\delta_s}\biggr)\,ds \quad \text{п.н.}$$

Объединяя все оценки, получаем аналог формулы (24) со значениями $\lambda_1=0$ и $\alpha=0$. Далее положив $h_t^{(0)}=\exp\{-2\int_0^t\delta_v\,dv-2(1-\lambda_0)\int_0^t\sigma_v^2\,dv\}(x^2+1)$ для случая $\mathcal{N}_\infty(\varepsilon)<\infty$, имеем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Сравнивая полученный в теореме 1 результат с оценкой в работе [17] только для аддитивных возмущений, можно заметить, что новые факторы, включённые в динамику уравнения (1), нашли своё отражение в виде соответствующей оценки (16). Наличие мультипликативных шумов увеличивает верхнюю границу пропорционально значению $(\int_0^t\sigma_v^2\,dv)^\alpha$, наряду с предположением о корреляции $\rho\neq 0$ и случайных внешних воздействиях f_t. При этом уменьшить показатель α можно путём привлечения свойства (4) предположения A, а также в случае $\sigma_t^2/\delta_t\to 0$, $t\to\infty$. Более того, стоит отметить (см. доказательство теоремы 1), что оценка вида (16) остаётся верной и при $\kappa<0$ в (4), требуется лишь корректировка в выражении для α. В частности, при $a_t\equiv a<0$, $\sigma_t\equiv\sigma\neq 0$, константа $\kappa=1+\sigma^2/(2a)$. Тогда $\alpha=2(1-2a/\sigma^2)^{-1}+\beta$, т.е. $\alpha<1$ при $2|a|>\sigma^2$, когда $\kappa>0$ в (4), и $1<\alpha<2$ для $2|a|\leqslant\sigma^2$, $\kappa\leqslant 0$ в (4). Таким образом, из (16) следует результат, ранее полученный в статье [15], где предполагалось $G_t\equiv 0$, $f_t>0$ – детерминированная функция, $\dot f_t/f_t\to 0$, $t\to\infty$ ($\dot{}$ – производная функции по времени). Вместе с тем неравенство (4) играло важную роль в работе [16], где также рассматривались постоянные функции $a_t\equiv a$ и $\sigma_t\equiv\sigma$ при $\rho=1$ и неслучайной f_t. Приведённое в [16] интегральное условие для сходимости п.н. к нулю процесса X_t, имевшее вид

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^t \exp\{-\gamma(t-s)m\}[(\sup_{s\leqslant v\leqslant t}|G_v|)^m+(\sup_{s\leqslant v\leqslant t}|f_v-\sigma^2G_v|)^m]\,ds\,dt<\infty,$$

при некоторых константах γ, m таких, что $0<\gamma<\kappa$, $0<m<1+2|a|\sigma^{-2}$, можно отнести к аналогам требования $\int_0^\infty(G_t^2+f_t^2)\,dt<\infty$ в замечании 1.

В следующих примерах рассматривается применение утверждения теоремы 1, а также лемм 2 и 3 при анализе сходимости к нулю решений конкретных линейных СДУ. Далее запись $g_t\sim\tilde g_t$ для двух скалярных функций $g_t,\tilde g_t\geqslant 0$ означает, что $0<\lim\limits_{t\to\infty}(g_t/\tilde g_t)<\infty$.

Пример 1. Пусть в уравнении (1) отсутствуют внешние воздействия, т.е. $f_t\equiv 0$, и рассматривается степенное семейство коэффициентов в (1), т.е. $\delta_t\sim kt^p$, $G_t\sim t^\mu$, $\sigma_t\sim t^\gamma$, p, μ, γ – действительные числа, константа $k>0$. По предположению A $2\mu\leqslant p$ и $2\gamma\leqslant p$, при этом $p\geqslant -1$. Из утверждения леммы 2 следует, что если $\bar h_t\to 0$, $t\to\infty$, то и $EX_t^2\to 0$, функция $\bar h_t$ задаётся формулой (8). Замечаем, что при $p>-1$ функция $\bar h_t\sim t^{2\mu-p}$. Для случая $p=-1$ имеем $\bar h_t\sim t^{2\mu+1}$ при $2k(1-\lambda)\kappa+2\mu>-1$, $\bar h_t\sim t^{-2k(1-\lambda)\kappa}\ln t$, если $2k(1-\lambda)\kappa+2\mu=-1$ и $\bar h_t\sim t^{-2k(1-\lambda)\kappa}$ при $2k(1-\lambda)\kappa+2\mu<-1$. Таким образом, условие $2\mu<p$ обеспечивает $\bar h_t\to 0$, а значит, и сходимость к нулю в среднем квадратичном для процесса X_t при $t\to\infty$. При исследовании сходимости с единичной вероятностью используются оценки из теоремы 1 и леммы 3. При $2\gamma<p$ получаем из (16), что $h_t\leqslant\bar c t^{2\mu-p}t^\alpha\ln t$, здесь $\alpha>0$ – сколь угодно малое число, $\bar c>0$ – некоторая константа. Следовательно, при $2\mu<p$ также гарантируется, что $X_t^2\to 0$ п.н. при $t\to\infty$. Пусть далее $2\gamma=p$. В случае $p=-1$ множитель $(\int_0^t\sigma_v^2\,dv)^\alpha\sim\ln^\alpha t$ и требование $2\mu<p$ сохраняется, если нужно обеспечить $X_t^2\to 0$ п.н., $t\to\infty$. Если $p>-1$, то $h_t\sim t^{(2\mu-p)}t^{(p+1)\alpha}\ln t$, где показатель α определяется в (15). Соответственно, при $2\mu<p-(p+1)\alpha$ имеем сходимость $X_t^2\to 0$ с вероятностью, равной единице, $t\to\infty$. Вместе с тем условие $\int_0^\infty\sigma_t^2\bar h_t\,dt<\infty$ в лемме 3 выполнено при $2\mu<-1$ и тогда $X_t^2\to 0$ п.н. Таким образом, при $p>-1$ формулируется общее условие вида $2\mu<\max\{-1,p-(p+1)\alpha\}$, дающее при $t\to\infty$ сходимость $X_t^2\to 0$ п.н. Это требование также совпадает с условием из примера в статье [16], где рассмотрен случай $p=\gamma=0$ и проведён анализ сходимости $X_t\to 0$ с единичной вероятностью.

Пример 2. В [13] рассматривалась фармакокинетическая модель концентрации химического вещества в виде случайного процесса с двумя компонентами $(\tilde{Y}_t,\hat{Y}_t)$, $t\geqslant 0$. При этом процессы $\tilde{Y}_t$, $\hat{Y}_t$, $t\geqslant 0$, представляли собой отклонения текущих концентраций от плановых значений и уравнения динамики имели вид

$$d\tilde{Y}_t=-k_0\tilde{Y}_t\,dt+\tilde{\sigma}d\tilde{Y}_t d\tilde{w}_t, \tag{25}$$

$$d\hat{Y}_t=k_0\tilde{Y}_t\,dt-k_1\hat{Y}_t\,dt+\hat{\sigma}\hat{Y}_t d\hat{w}_t \tag{26}$$

с неслучайными начальными условиями $\tilde{Y}_0=\tilde{y}$, $\hat{Y}_0=\hat{y}$; $k_0,k_1>0$ – темпы абсорбции (в (26) постоянная k_0 также задавала темп поступления вещества); $(\tilde{w}_t,\hat{w}_t)$, $t\geqslant 0$, – двумерный винеровский процесс; $\tilde{\sigma},\hat{\sigma}>0$ – константы, характеризующие степень влияния случайных факторов. Процесс $(\tilde{Y}_t,\hat{Y}_t)$, $t\geqslant 0$, получался после воздействия выбранной авторами работы [13] стратегии управлении, и возникал вопрос, насколько это способствует достижению системой нулевого состояния в долгосрочном периоде. Нетрудно заметить, что процесс в уравнении (25) – геометрическое броуновское движение, а (26) задаёт так называемое неоднородное геометрическое броуновское движение. Таким образом, $\tilde{Y}_t=\tilde{y}\exp\{-k_0t-(1/2)\tilde{\sigma}^2t+\tilde{\sigma}\tilde{w}_t\}$ и, очевидно, $\tilde{Y}_t\to 0$ п.н. $t\to\infty$. Для исследования сходимости $\hat{Y}_t$ используется утверждение теоремы 1. Полагая $X_t=\hat{Y}_t$, $x=\hat{y}$, $f_t=k_0\tilde{Y}_t$, $a_t\equiv -k_1$, $\sigma_t\equiv\hat{\sigma}$, получаем вид уравнения (1). При этом условия (2) и (3) из предположения A выполняются для $\delta_t=-k_1$. Так как в [13] не делается предположений о соотношении k_1 и $\tilde{\sigma}^2$, то в условии (4) $\kappa=1-\hat{\sigma}^2/(2k_1)$. Из (16) имеем

$$h_t\sim\exp\{-2k_1t-(1-\lambda_0)\hat{\sigma}^2t\}\hat{y}^2+t^{\alpha}k_0^2\tilde{y}^2\int\limits_0^t\exp\{-2k_1(1-\lambda_1)(t-s)\}\exp\{-2k_0s-\tilde{\sigma}^2s+2\tilde{\sigma}\tilde{w}_s\}\,ds,$$

где λ_0, λ_1 – константы, $0<\lambda_0<1$, $0<\lambda_1<1$; $\alpha=2+\beta$, $\beta>0$ – сколь угодно малое число. При $2k_1-2k_0-\tilde{\sigma}^2<0$ существует с.в.

$$\chi_\infty=\int\limits_0^\infty\exp\{2k_1(1-\lambda_1)s\}\exp\{-2k_0s-\tilde{\sigma}^2s+2\tilde{\sigma}\tilde{w}_s\}\,ds$$

(см. [27]), и тогда выполняется оценка $\limsup\limits_{t\to\infty}\{h_t/\hat{h}_t\}<\infty$, где $\hat{h}_t=\exp\{-2k_1(1-\lambda)t\}$, при любой константе λ, $0<\lambda<1$. Если же $2k_1-2k_0-\tilde{\sigma}^2\geqslant 0$, то из закона повторного логарифма имеем, что $\limsup\limits_{t\to\infty}\{h_t/\hat{h}_t\}<\infty$ для $\hat{h}_t=\exp\{-2k_0t-(1-\lambda)\tilde{\sigma}^2t\}$ при любой константе λ, $0<\lambda<1$. Таким образом, $\hat{Y}_t\to 0$ с единичной вероятностью при $t\to\infty$, и при этом $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\hat{Y}_t^2/\exp(-\gamma t)\}<\infty$, величина $\gamma=\min\{2k_1(1-\lambda),2k_0+(1-\lambda)\tilde{\sigma}^2\}$ для любой константы $0<\lambda<1$.

2. Приложение к моделированию аномальных диффузий. Физические процессы, получившие название аномальных диффузий, часто наблюдаются в реальном мире. Термин "аномальная" принят вследствие того, что ряд известных свойств этих процессов существенно отличается от "нормальных" диффузий, моделируемых броуновским движением. Базовой характеристикой, приписываемой любой диффузии, является среднеквадратичное перемещение (MSD, mean-square displacement). Тогда аномальная диффузия определяется как процесс с нелинейным ростом во времени среднеквадратичного перемещения.

Определение 1. Пусть X_t, $t\geqslant 0$, задаёт процесс скорости и $T>0$ – длина горизонта наблюдения. Тогда $Y_T=\int_0^T X_t\,dt$ – соответствующий процесс перемещения при начальном условии $Y_0=0$. Среднеквадратичное перемещение определяется по формуле

$$D_T = EY_T^2 = E\Big(\int\limits_0^T X_t\,dt\Big)^2 = \int\limits_0^T\int\limits_0^T E(X_tX_s)\,ds\,dt.$$

Отметим, что если X_t – процесс "белого шума", то $Y_T = B_T$, где B_t, $t \geqslant 0$, – броуновское движение, $D_T = T$.

Определение 2 [6]. Пусть $\hat d_1 = \liminf\limits_{T\to\infty}(D_T/T)$ и $\hat d_2 = \limsup\limits_{T\to\infty}(D_T/T)$. Тогда при $0 < d_1 \leqslant d_2 < \infty$ диффузия называется нормальной, в противном случае – аномальной (для $d_2 = 0$ – субдиффузией), при $d_1 = \infty$ – супердиффузией.

Среднеквадратичное перемещение относится к важным статистическим характеристикам, однако не даёт ответа на вопрос о возможных колебаниях отдельной траектории случайного процесса Y_T при $T\to\infty$. Как известно, этой цели служит понятие верхней функции процесса, когда соотношение $\limsup\limits_{T\to\infty}\{Z_T/\tilde h_T\} < \infty$ выполняется п.н. для случайного процесса $Z_T \geqslant 0$, $T \geqslant 0$, и функции $\tilde h_T \geqslant 0$, которая обычно выбирается детерминированной. В частности, из закона повторного логарифма следует, что $\tilde h_T = \sqrt{T\ln\ln T}$ для $Z_T = |B_T|$. Следующее ниже определение основано на идее сравнения процессов Y_T с функцией $\sqrt{T\ln\ln T}$ при $T\to\infty$.

Определение 3. Если $\limsup\limits_{T\to\infty}\{|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T}\} = 0$, то процесс называется субдиффузией по отношению к верхней функции.

Отметим, что если $Y_T \to Y_\infty$ п.н., $T\to\infty$, где Y_∞ – с.в., то имеет место "вырожденный" случай субдиффузии, который также является следствием ограниченности D_T, $T \geqslant 0$.

Уравнение вида (1) обобщает ранее известные описания диффузий, допуская зависящие от времени коэффициенты, коррелированные шумы разных типов, а также случайные внешние воздействия. В данной части работы результаты п. 1 используются для выявления субдиффузий. На основе результатов леммы 2 и теоремы 1 формулируется следующее

Утверждение. *Пусть выполнено предположение А. Тогда:*

а) если для функции $\bar h_t$ из (8) выполняется $\bar h_t t \to 0$, $t\to\infty$, то процесс X_t задаёт субдиффузию в среднем квадратичном;

б) если для функции h_t из (16) выполняется $\{\bar h_t(t/\ln\ln t)\} \to 0$, $t\to\infty$, то процесс X_t описывает субдиффузию по отношению к верхней функции.

Доказательство. Из оценки $D_T = \int_0^T\int_0^T E(X_tX_s)\,ds\,dt \leqslant (\int_0^T \sqrt{EX_t^2}\,dt)^2$ и результата леммы 2 следует, что выполнение условия $\bar h_t t \to 0$, $t\to\infty$, гарантирует и соотношение $D_T/T \to 0$, $T\to\infty$, т.е. утверждение а). В б) используется вид h_t, полученный в теореме 1, оценка $|X_t| \leqslant c\sqrt{h_t}$ п.н. при $t > t_0(\omega)$, $t_0(\omega)$ – п.н. конечный момент, и также нетрудно установить, что наличие условия $\{h_t(t/\ln\ln t)\} \to 0$, $t\to\infty$, влечёт за собой при $T\to\infty$ сходимость $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ с единичной вероятностью. Утверждение доказано.

В следующем ниже примере показывается, что условия в утверждении можно ослабить.

Пример 3. Пусть в уравнении (1) коэффициенты $a_t \equiv -1$, $f_t \equiv 0$, начальное условие $X_0 = 0$, и предположим также, что выполнено неравенство (4). Тогда (1) принимает вид

$$dX_t = -X_t\,dt + G_t\,dW_t + \sigma_t X_t\,dw_t,$$

откуда процесс перемещения определяется по формуле $Y_T = M_T^{(1)} + M_T^{(2)} - X_T$, где $M_T^{(1)} = \int_0^T G_t\,dW_t$, $M_T^{(2)} = \int_0^T \sigma_t X_t\,dw_t$. При этом $D_T \leqslant 2(E[M_T^{(1)}]^2 + E[M_T^{(2)}]^2 + EX_T^2)$, где $E[M_T^{(1)}]^2 = \int_0^T G_s^2\,ds$, $E[M_T^{(2)}]^2 = \int_0^T \sigma_s^2 EX_s^2\,ds$, оценка для EX_t^2 приведена в (2). Замечаем, что условие $\int_0^\infty G_t^2\,dt < \infty$ влечёт за собой при $T\to\infty$ сходимости $EX_T^2 \to 0$, $E[M_T^{(1)}]^2 + E[M_T^{(1)}]^2 \to E[M_\infty^{(1)}]^2 + E[M_\infty^{(1)}]^2$ и ограниченность D_T, т.е. субдиффузию. Если же $G_t \to 0$, $t\to\infty$, то также $EX_T^2 \to 0$, $\{E[M_T^{(1)}]^2 + E[M_T^{(1)}]^2\}/T \to 0$ при $T\to\infty$, и вновь имеем случай субдиффузии в среднем квадратичном. Переходя к потраекторному анализу процесса перемещения

Y_T, $T\to\infty$, рассмотрим две ситуации. При $\int_0^\infty G_t^2\,dt<\infty$ наблюдаются сходимости $M_T^{(1)}\to\to M_\infty^{(1)}$, $M_T^{(2)}\to M_\infty^{(2)}$, $T\to\infty$. Помимо этого, согласно лемме 3, $X_T\to 0$ п.н., и тогда $Y_T\to Y_\infty$ с вероятностью, равной единице, $T\to\infty$, и получается "вырожденный" случай субдиффузии. Пусть теперь $\int_0^T G_t^2\,dt\to\infty$, $T\to\infty$. По закону повторного логарифма для мартингалов с единичной вероятностью выполняются соотношения

$$\limsup_{T\to\infty}\left\{M_T^{(i)}/\sqrt{\langle M_T^{(i)}\rangle\ln\ln\langle M_T^{(i)}\rangle}\right\}<\infty,\quad i=1,2,$$

здесь квадратические характеристики $\langle M_T^{(1)}\rangle=\int_0^T G_t^2\,dt$, $\langle M_T^{(2)}\rangle=\int_0^T\sigma_t^2X_t^2\,dt$. Предположим, что $X_t\to 0$ и $G_t\to 0$, $t\to\infty$, тогда для $i=1,2$ $\langle M_T^{(i)}\rangle/T\to 0$, $T\to\infty$, а значит, и $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T}\to 0$ с вероятностью, равной единице, при $T\to\infty$. Воспользовавшись теоремой 1 и ограниченностью σ_t^2, находим, что выполнение условия $\hat h_t=G_t^2\ln t(\int_0^t\sigma_v^2\,dv)^\alpha\to 0$, $t\to\infty$, влечёт за собой сходимость $X_t\to 0$ п.н., $t\to\infty$, при этом константа α задаётся в (15). Таким образом, требование $\hat h_t\to 0$ будет достаточным для выявления субдиффузии в случае $\int_0^T G_t^2\,dt\to\infty$, $T\to\infty$.

Предположение D. Темп устойчивости δ_t является монотонной дифференцируемой функцией, $t\geqslant 0$, и для функции $\phi_t=\dot\delta_t/\delta_t^2$ ($\dot{}$ – знак производной по времени) выполняется по меньшей мере одно из двух соотношений:

$$\lim_{t\to\infty}\phi_t=\hat\kappa_1,\quad \lim_{t\to\infty}(1/\phi_t)=\hat\kappa_2, \tag{27}$$

где $\hat\kappa_1$, $\hat\kappa_2$ – неположительные константы.

Предположение D ранее вводилось в работе [28] при исследовании перемещения Y_T, задаваемого процессом Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами, т.е. при $\sigma_t\equiv 0$, $f_t\equiv 0$ в уравнении (1). Следует отметить, что случаи $\hat\kappa_1,\hat\kappa_2>0$ соответствуют $\delta_t<0$, что не удовлетворяет предположению A, поэтому они здесь не рассматриваются. Основным результатом данного пункта является следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения A и D со значением $\hat\kappa_1>-2$. Тогда, если для функции $\bar h_t$, определённой в (8), и коэффициентов уравнения (1) выполняется:*

а) $\dfrac{G_t^2+\sigma_t^2\bar h_t+tEf_t^2}{\delta_t^2}\to 0$, $t\to\infty$, *то процесс X_t задаёт субдиффузию в среднем квадратичном;*

б) функция $\dfrac{G_t^2+\sigma_t^2\bar h_t}{\delta_t^2}\sqrt{\dfrac{t}{\ln\ln t}}$ *ограничена при $t\to\infty$, а также имеет место одно из двух условий:*

$$\frac{|f_t|}{\delta_t}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}}\to 0\ \ \textit{п.н.},\quad t\to\infty,$$

или же ограничено выражение

$$t\frac{Ef_t^2}{\delta_t^2}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}},\quad t\to\infty,$$

то процесс X_t задаёт субдиффузию по отношению к верхней функции.

Доказательство. Используется представление (10), при помощи которого находится оценка

$$D_T\leqslant 2E[I_T^{(1)}]^2+2E[I_T^{(2)}]^2+2E[I_T^{(3)}]^2+2c\int\limits_0^T\exp\left\{-2\int\limits_0^t\delta_v\,dv\right\}dtx^2,$$

где $E[I_T^{(1)}]^2 = \int_0^T \int_0^T E(Y_t^{(0)} Y_s^{(0)})\,ds\,dt,$ и при этом

$$E[I_T^{(1)}]^2 \leqslant 2c \int\limits_0^T \int\limits_0^t \exp\Big\{ -\int\limits_s^t \delta_v\,dv \Big\} \sigma_s^2 E X_s^2\,ds\,dt,$$

см. доказательство леммы 3. Также (см. [6]) $E[I_T^{(2)}]^2 = \int_0^T \int_0^T E(X_t^{(0)} X_s^{(0)})\,ds\,dt$ и $E[I_T^{(2)}]^2 \leqslant 2c\int_0^T \int_0^t \exp\{-\int_s^t \delta_v\,dv\} G_s^2\,ds\,dt.$ Для $I_T^{(3)} = \int_0^T \xi_t\,dt$ в силу неизвестности ковариационной функции $E(f_t f_s),$ входящей в $E(\xi_t \xi_s),$ используется неравенство

$$E[I_T^{(3)}]^2 \leqslant \Big(\int\limits_0^T \int\limits_0^t \exp\Big\{ -\int\limits_s^t \delta_v\,dv \Big\} \sqrt{E f_s^2}\,ds\,dt \Big)^2.$$

Далее, при $\hat\kappa_1 > -2$ выполняется неравенство $(\dot\delta_t/\delta_t^2) + 2 > \tilde\varepsilon,$ где $\tilde\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $t > t_0(\tilde\varepsilon),$ откуда при условии а), что $G_t^2 + \sigma_t^2 E X_t^2 < \varepsilon \delta_t^2 (\dot\delta_t/\delta_t^2 + 2),$ $\varepsilon > 0$ также сколь угодно малое число, $t > t_1(\varepsilon).$ Умножая это неравенство на $\exp\{-2\int_0^t \delta_v\,dv\},$ при интегрировании получаем, что

$$E[Y_t^{(0)}]^2 + E[X_t^{(0)}]^2 \leqslant c \exp\Big\{ -2\int_0^t \delta_v\,dv \Big\} \int\limits_0^t \exp\Big\{ 2\int\limits_0^s \delta_v\,dv \Big\} (G_s^2 + \sigma_s^2 E X_s^2)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \delta_t + c_0 \exp\Big\{ -2\int\limits_0^t \delta_v\,dv \Big\}\,ds$$

при некоторой константе $c_0 > 0.$ Дальнейшие операции умножения и интегрирования приводят к соотношению

$$E[I_T^{(1)}]^2 + E[I_T^{(2)}]^2 \leqslant \varepsilon T + (c_0/2) \Big(\int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\,dv \Big\}\,dt \Big)^2 + c_1 \int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\,dv \Big\}\,dt + c_2,$$

где $c_1, c_2 > 0$ – некоторые константы, $T > T_0(\varepsilon, \tilde\varepsilon).$ Тогда, очевидно, $\{E[I_T^{(1)}]^2 + E[I_T^{(2)}]^2\}/T \to \to 0,$ $T \to \infty.$ Для приведённой выше оценки $E[I_T^{(3)}]^2$ аналогичным образом показывается, что ввиду наличия требования $\hat\kappa_1 > -2$ условие $\{(E f_t^2/\delta_t^2)t\} \to 0,$ $t \to \infty,$ влечёт за собой сходимость $E[I_T^{(3)}]^2/T \to 0.$ Также при $\hat\kappa_1 > -2$ выражение $\{\int_0^T \exp\{-2\int_0^t \delta_v\,dv\}\,dt x^2/T\} \to 0,$ $T \to \infty.$ Таким образом, приходим к выводу, что $D_T/T \to 0,$ $T \to \infty,$ и получаем субдиффузию в среднем квадратичном.

Для доказательства утверждения б) требуется рассмотреть отношение $|Y_T|/\sqrt{T \ln\ln T}.$ Используется оценка

$$|Y_T| \leqslant I_T^{(1)} + I_T^{(2)} + I_T^{(3)} + \int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\,dv \Big\}\,dt|x|,$$

где $I_T^{(1)} = \int_0^T Y_t^{(0)}\,dt,$ $I_T^{(2)} = \int_0^T X_t^{(0)}\,dt,$ $I_T^{(3)} = \int_0^T \xi_t\,dt.$ Сначала отметим, что

$$\int\limits_0^T \exp\Big\{ -\int\limits_0^t \delta_v\,dv \Big\}\,dt|x|/\sqrt{T \ln\ln T} \to 0, \quad T \to \infty,$$

если $\hat{\kappa}_1 > -2$. Затем для каждого из интегралов $I_T^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, применяется достаточное условие сходимости при $T \to \infty$ с единичной вероятностью отношения $I_T^{(i)}/\Gamma_T \to 0$, где $\Gamma_T = \sqrt{T \ln\ln T}$. Это условие (см. [29]) имеет вид $E[I_T^{(i)}]^2 \leqslant \tilde{c}\Gamma_T$. Из приведённых выше оценок для $E[I_T^{(i)}]^2$ и условия б), проведя аналогичные а) рассуждения, получаем, что требование ограниченности $\{(G_t^2 + \sigma_t^2 \bar{h}_t)/\delta_t^2\}\sqrt{t/\ln\ln t} + (tEf_t^2/\delta_t^2)\sqrt{t/\ln\ln t}$ влечёт за собой также и ограниченность $D_T/\sqrt{T\ln\ln T}$, т.е. $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ п.н. при $T \to \infty$. Если вместо условия для Ef_t^2 из б) п.н. выполняется $(|f_t|/\delta_t)\sqrt{t/\ln\ln t} \to 0$, $t \to \infty$, то из оценки $I_T^{(3)} \leqslant F_T$ п.н., где

$$F_T = \int\limits_0^T \exp\biggl\{-\int\limits_0^t \delta_v\,dv\biggr\} \int\limits_0^t \exp\biggl\{\int\limits_0^s \delta_v\,dv\biggr\}|f_s|\,ds\,dt,$$

будет следовать, что $\{I_T^{(3)}/\sqrt{T\ln\ln T}\} \to 0$ п.н. при $T \to \infty$. Действительно, если $F_\infty < \infty$, то искомое соотношение очевидно. В противном случае, для нахождения $\lim\limits_{T\to\infty}\{F_T/\sqrt{T\ln\ln T}\}$ дважды применяется правило Лопиталя. Следовательно, $I_T^{(3)}/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ п.н., и тогда также $|Y_T|/\sqrt{T\ln\ln T} \to 0$ с единичной вероятностью при $T \to \infty$. Утверждение доказано.

Замечание 2. При $\hat{\kappa}_1/\bar{\kappa} \leqslant -2$, $\hat{\kappa}_1$ и $\bar{\kappa}$ – константы из (27) предположения D и неравенства (3) соответственно, даже в самой простой ситуации детерминированного уравнения (1) с нетривиальным начальным условием, не равным нулю, будет выполняется $D_T/T \geqslant \bar{c} > 0$, $T \to \infty$, $\bar{c} > 0$ – некоторая константа. Таким образом, в данном случае субдиффузия не наблюдается. Действительно, здесь $D_T \geqslant x^2\kappa_2^2(\int_0^T \exp\{\int_0^t -\bar{\kappa}\delta_v\,dv\}\,dt)^2$. При этом в силу условия $\hat{\kappa}_1/\bar{\kappa} \leqslant -2$ для некоторой константы $\hat{c} > 0$ выполняется оценка

$$\exp\biggl\{\int\limits_0^t -\bar{\kappa}\delta_v\,dv\biggr\}\sqrt{t} \geqslant \hat{c} > 0, \quad t \to \infty,$$

и, следовательно, D_T/T отделено от нуля при $T \to \infty$.

Заключение. В данной работе проведено исследование асимптотического поведения решений X_t, $t \geqslant 0$, линейных неоднородных СДУ (1) (вид процессов X_t определён в лемме 1). Соответствующее уравнение динамики (1) с переменными коэффициентами содержит коррелированные аддитивные и мультипликативные возмущения, а также внешние случайные воздействия f_t. Найдены верхние оценки $\bar{h}_t$ и h_t для X_t^2 при $t \to \infty$ как функции от параметров уравнения (1) (см. лемму 2 и теорему 1). Обращаясь к (8) и (16), можно выделить очевидную зависимость $\bar{h}_t$ и h_t от указанных выше факторов, влияющих на эволюцию X_t во времени. В частности, наличие мультипликативных возмущений увеличивает h_t пропорционально $(E\mathcal{Z}_t^2)^\alpha = (\int_0^t \sigma_s^2\,ds)^\alpha$, т.е. дисперсии процесса $\mathcal{Z}_t = \int_0^t \sigma_s\,dw_s$ при её возведении в степень α. Полученные результаты использованы для выявления условий на коэффициенты в (1), при которых X_t задаёт процесс субдиффузии (см. утверждение 1, пример 3 и теорему 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yong J., Zhou X.Y.* Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. New York, 1999.
2. *Merahi F., Bibi A.* Evolutionary transfer functions solution for continuous-time bilinear stochastic processes with time-varying coefficients // Commun. in Stat. Theory and Methods. 2020. V. 22. P. 5189–5214.
3. *Grimberg P., Schuss Z.* Stochastic model of a pension plan // arXiv preprint arXiv:1407.0517. 2014.
4. *Fa K.S.* Linear Langevin equation with time-dependent drift and multiplicative noise term: exact study // Chem. Phys. 2003. V. 287. № 1–2. P. 1–5.

5. *Паламарчук Е.С.* Об оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решений линейных стохастических дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2021. № 3. С. 98–111.
6. *Паламарчук Е.С.* Аналитическое исследование процесса Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами при моделировании аномальных диффузий // Автоматика и телемеханика. 2018. № 2. С. 109–121.
7. *Cherstvy A.G., Vinod D., Aghion E., Sokolov I.M., Metzler R.* Scaled geometric Brownian motion features sub-or superexponential ensemble-averaged, but linear time-averaged mean-squared displacements // Phys. Rev. E. 2021. V. 103. № 6. P. 062127.
8. *Petroni N.C., De Martino S., De Siena S.* Logistic and θ-logistic models in population dynamics: general analysis and exact results // J. of Phys. A. Math. and Theor. 2020. V. 53. № 44. P. 445005.
9. *Cui Z., Nguyen D.* First hitting time of integral diffusions and applications // Stoch. Models. 2017. V. 33. № 3. P. 376–391.
10. *Gora P.F.* Linear transmitter with correlated noises // Phys. A. Stat. Mech. and its Appl. 2005. V. 354. P. 153–170.
11. *Turnovsky S.J.* Optimal stabilization policies for stochastic linear systems: the case of correlated multiplicative and additive disturbances // The Rev. of Econ. Stud. 1976. V. 43. № 1. P. 191–194.
12. *Sun J., Yong J.* Stochastic Linear-Quadratic Optimal Control Theory: Differential Games and Mean-Field Problems. New York, 2020.
13. *Liu Q., Shan Q.* A stochastic analysis of the one compartment pharmacokinetic model considering optimal controls // IEEE Access. 2020. № 8. P. 181825–181834.
14. *Адрианова Л.Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб., 1992.
15. *Appleby J.A.D., Rodkina A.* Rates of decay and growth of solutions to linear stochastic differential equations with state-independent perturbations // Stoch. an Int. J. of Probab. and Stoch. Processes. 2005. V. 77. № 3. P. 271–295.
16. *Il'chenko O.* On the asymptotic degeneration of systems of linear inhomogeneous stochastic differential equations // Theory of Probab. and Math. Stat. 2008. V. 76. P. 41–48.
17. *Паламарчук Е.С.* Об обобщении логарифмической верхней функции для решения линейного стохастического дифференциального уравнения с неэкспоненциально устойчивой матрицей // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 195–201.
18. *Mao X.* Stochastic Differential Equations And Applications. Philadelphia, 2007.
19. *Tang S.* General linear quadratic optimal stochastic control problems with random coefficients: linear stochastic Hamilton systems and backward stochastic Riccati equations // SIAM J. on Control and Optimiz. 2003. V. 42. № 1. P. 53–75.
20. *Kohlmann M., Tang S.* Minimization of risk and linear quadratic optimal control theory // SIAM J. on Control and Optimiz. 2003. V. 42. № 3. P. 1118–1142.
21. *Shreve S.E.* Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Berlin, 2004.
22. *Teschi G.* Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. Providence, 2012.
23. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., 1969.
24. *Wang J.* A law of the iterated logarithm for stochastic integrals // Stoch. Process. and Their Appl. 1993. V. 47. № 2. P. 215–228.
25. *Guijing C., Fanchao K., Zhengyan L.* Answers to some questions about increments of a Wiener process // The Annals of Probab. 1986. V. 14. № 4. P. 1252–1261.
26. *Chen B., Csorgo M.* A functional modulus of continuity for a Wiener process // Stat. & Prob. Lett. 2001. V. 51. № 3. P. 215–223.
27. *Dufresne D.* The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding // Scand. Actuar. J. 1990. V. 1990. № 1. P. 39–79.
28. *Паламарчук Е.С.* О верхних функциях для аномальных диффузий, моделируемых процессом Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами // Теория вероятностей и её применения. 2019. Т. 64. № 2. С. 258–282.
29. *Паламарчук Е.С.* Асимптотическое поведение решения линейного стохастического дифференциального уравнения и оптимальность “почти наверное” для управляемого случайного процесса // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 89–103.

Центральный экономико-математический
институт РАН, г. Москва,
Математический институт имени В.А. Стеклова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
После доработки 13.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1316–1323

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ВИДЕ НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

© 2022 г. Л. П. Петрова, И. Н. Прядко

С расширенным понятием нормального конуса для некоторого класса не обязательно выпуклых множеств n-мерного евклидова пространства обобщено понятие системы с диодными нелинейностями, для которой доказана теорема существования решения начальной задачи. Приведён пример задачи, показывающий, что единственность её решения не выполняется.

DOI: 10.31857/S0374064122100028, EDN: KPYXIC

Введение. Системы с диодными нелинейностями (СДН) являются моделью процессов, ограниченных рамками заданного множества n-мерного пространства, поведение которых внутри ограничивающего множества описывается системой дифференциальных уравнений. Поскольку ограничивающие множества могут быть, вообще говоря, невыпуклыми (например, при движении под действием течения в речном или морском бассейне), представляют интерес обобщения модели СДН на более широкий, по сравнению с выпуклыми, класс множеств. Данная статья посвящена расширению на некоторый класс не обязательно выпуклых множеств понятия СДН, которое подробно рассмотрено в работах [1, 2] для выпуклых множеств. Накладываемые на невыпуклые множества ограничения носят вполне естественный характер. Для расширенного понятия нормального конуса точек невыпуклого множества установлены некоторые свойства, а также исследованы свойства оператора проектирования в окрестности множества. Изучена связь нормального конуса и оператора проектирования. Далее, так же как в [1, с. 32], даны два вида определения СДН и определение их решений, доказана эквивалентность двух представлений СДН. Доказана локальная теорема существования решения начальной задачи для расширенного понятия СДН. Приведён пример отсутствия единственности решения задачи для невыпуклого множества.

1. Расширение понятия СДН на множества, удовлетворяющие специальному ограничению. Будем полагать, что $Q\subset\mathbb{R}^n$ – непустое замкнутое множество. Кроме того, ограничимся рассмотрением множеств Q, имеющих некоторую ε-окрестность $Q^\varepsilon=\{y:\min\limits_{x\in Q}\|y-x\|\leqslant\varepsilon\}$ (число $\varepsilon>0$), обладающую следующими свойствами:

1) для любой точки $y\in Q^\varepsilon$ можно единственным образом указать ближайшую к ней точку из множества Q, которую будем называть *проекцией* y на Q и обозначать $P_Q(y)$;

2) если $x=P_Q(y)$ (P_Q – оператор проектирования) для внутренней точки $y\in Q^\varepsilon\setminus Q$, то для любого числа δ такого, что $1<\delta\leqslant\varepsilon/\|y-x\|$, справедливо равенство $x=P_Q(x+\delta(y-x))$ (выполнение равенства при $0<\delta\leqslant 1$ очевидно).

Замечание 1. Под обозначением $\|\cdot\|$ нужно понимать евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 1. *Оператор проектирования P_Q непрерывен на множестве Q^ε.*

Доказательство. Предположим противное: оператор P_Q имеет разрыв в некоторой точке $\bar y\in Q^\varepsilon$. Это означает, что найдётся последовательность $\{y_k\}\in Q^\varepsilon$, $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=\bar y$, для которой последовательность значений $\{x_k\}\equiv\{P_Q(y_k)\}$ либо не имеет предела, либо $x\equiv\lim\limits_{k\to\infty}x_k\ne\bar x\equiv P_Q(\bar y)$. Без ограничения общности можно считать, что имеет место второй случай, так как, очевидно, начиная с некоторого номера $\bar k$, все элементы x_k содержатся в замкнутом шаре $B[\bar y,2\varepsilon]$ с центром в точке $\bar y$ радиуса 2ε. Номер $\bar k$ нужно выбрать так, чтобы, начиная с него, выполнялось неравенство $\|y_k - \bar{y}\| \leqslant \varepsilon$, а неравенство $\|x_k - y_k\| \leqslant \varepsilon$ следует из определений Q^ε и $\{x_k\}$. В силу компактности $B[\bar{y}, 2\varepsilon]$ из последовательности x_k можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Заметим, что точка x вместе с элементами x_k принадлежит множеству Q в силу его замкнутости, поэтому $\|x - \bar{y}\| > \|\bar{x} - \bar{y}\|$. Но тогда найдётся такой номер $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\|x_{k_0} - y_{k_0}\| > \|\bar{x} - y_{k_0}\|$, что противоречит тому, что $x_{k_0} = P_Q(y_{k_0})$.

Утверждение 2. *Для точки $y \in Q^\varepsilon$ равенство $x = P_Q(y)$ справедливо тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) $x \in Q$, $\|y - x\| \leqslant \varepsilon$;

(ii) для любого $\delta > 0$ найдётся число $\sigma > 0$ такое, что если для $z \in Q \backslash \{x\}$ верно $\|z - x\| < \sigma$, то справедливо неравенство

$$\left\langle \frac{z - x}{\|z - x\|}, y - x \right\rangle \leqslant \delta. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $x = P_Q(y)$ и предположим противное: найдутся такая последовательность $\{z_k\} \subset Q \backslash \{x\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$, и число $\delta > 0$, для которых при всех k выполнено неравенство $\langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y - x\rangle > \delta$. Это означает, что угол между отрезками, соединяющими x с y и с z_k, остаётся не превосходящим некоторого острого угла γ, а поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$, то, начиная с некоторого номера, сумма угла γ с углом φ_k между отрезками, соединяющими y с x и с z_k, будет меньше $\pi/2$, а, следовательно, угол при вершине z_k в треугольнике с вершинами y, x и z_k будет тупым. Это противоречит тому, что $x = P_Q(y)$, так как отрезки $[y, z_k]$ короче отрезка $[y, x]$.

Теперь предположим, что для $y \in Q^\varepsilon$ и x выполнены условия (i) и (ii). И если предположить, что $x \neq P_Q(y)$, то x не может быть проекцией для элементов полуотрезка $[y, x)$ в силу свойства 2). Отметим также, что в некоторой окрестности x часть $[y, x)$ расположена в области $Q^\varepsilon \backslash Q$, иначе условия (i) и (ii) не выполнены. Выберем последовательность $\{y_k\}$ из точек этой части полуотрезка $[y, x)$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x$. Тогда для $z_k \equiv P_Q(y_k)$ имеем $z_k \in Q \backslash \{x\}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$ в силу свойства непрерывности проекции (см. утверждение 1), причём имеет место неравенство $\langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y_k - x\rangle > 0$, а вместе с ним и $\langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y - x\rangle > 0$, так как $y_k = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 < \alpha < 1$. С учётом неравенства (1) получаем, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \langle (z_k - x)/\|z_k - x\|, y - x\rangle = 0.$$

Другими словами, значения углов при вершине x треугольников с вершинами x, z_k и y_k стремятся к $\pi/2$ при $k \to \infty$, а в силу того, что углы при вершинах $z_k = P_Q(y_k)$ больше угла при x, они тоже стремятся к $\pi/2$ при $k \to \infty$. Поэтому углы при вершинах y_k стремятся к нулю. Обозначим через v_k точку множества $Q^\varepsilon \backslash Q$, расположенную на расстоянии ε от z_k и находящуюся на продолжении отрезка $[z_k, y_k]$ со стороны y_k. Последовательность $\{v_k\}$, очевидно, находится в замкнутом шаре с центром в точке x и радиусом 2ε, в силу компактности которого из $\{v_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\{v_k\}$ сходится к некоторому элементу $v \in Q^\varepsilon \backslash Q$, для которого имеем равенство $x = P_Q(v)$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$ и $z_k = P_Q(v_k)$ по свойству 2). Причём, как уже показано, острый угол пересечения отрезков $[z_k, v_k]$ и $[x, y]$ стремится к нулю с увеличением k. Отсюда получаем, что

$$v = x + \frac{\varepsilon}{\|y - x\|}(y - x),$$

что противоречит нашему предположению, что $x \neq P_Q(y)$.

Определение 1. *Нормальным конусом* к множеству Q, построенному в точке $x \in Q$, назовём множество $N_Q(x)$, состоящее из точек $y \in \mathbb{R}^n$, для которых $x + y$ удовлетворяет условию (ii).

Замечание 2. Определение 1 в случае выпуклого множества Q эквивалентно определению

$$N_Q(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, z-x\rangle \leqslant 0 \ \text{ для любой точки } \ z \in Q\}$$

из работы [1, с. 16], а определение для множеств, удовлетворяющих свойствам 1), 2), фактически совпадает с определением из статьи [3, с. 4].

Утверждение 3. *Множество* $N_Q(x)$ *является выпуклым замкнутым конусом.*

Доказательство. Действительно, коническая комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ принадлежит $N_Q(x)$ вместе с точками y_1, y_2 при $\alpha, \beta \geqslant 0$, так как

$$\left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, \alpha y_1 + \beta y_2 \right\rangle = \alpha \left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_1 \right\rangle + \beta \left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_2 \right\rangle \leqslant \delta$$

для всех $z \in Q \backslash \{x\}$, $\|z-x\| \leqslant \sigma$, если $\sigma > 0$ выбрать таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_1 \right\rangle \leqslant \frac{\delta}{2\alpha} \ \text{ и } \ \left\langle \frac{z-x}{\|z-x\|}, y_2 \right\rangle \leqslant \frac{\delta}{2\beta}.$$

Замкнутость $N_Q(x)$ следует из сохранения нестрогого неравенства в пределе. Заметим, что $N_Q(x) \neq \varnothing$, поскольку нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$, очевидно, в нём содержится.

Утверждение 4. Нормальный выпуклый замкнутый конус есть множество

$$N_Q(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : x = P_Q\left(x + \frac{\varepsilon}{\|y\|+1} y \right) \right\}.$$

Доказательство очевидным образом следует из определения 1 и утверждений 2, 3.

Определение 2. *Касательным конусом* к множеству Q, построенным в точке $x \in Q$, назовём сопряжённый к $N_Q(x)$ конус

$$T_Q(x) \equiv (N_Q(x))^* = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle y, z\rangle \leqslant 0 \ \text{ для любых } \ (y \in N_Q(x))\}.$$

Утверждение 5. *a) Если существует правосторонняя производная* $x'_+(\bar t)$ *и* $x(\bar t + s) \in Q$ *при* $0 \leqslant s < \delta$, *то* $x'_+(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

b) Если существует левосторонняя производная $x'_-(\bar t)$ *и* $x(\bar t + s) \in Q$ *при* $-\delta < s \leqslant 0$, *то* $-x'_-(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

Доказательство. Пусть существует правосторонняя производная $x'_+(\bar t)$, равная нулю, тогда утверждение a) выполнено, так как нуль содержится в любом конусе. Если $x'_+(\bar t) \neq 0$, то в некоторой правой окрестности $\bar t$ выполнено $x(\bar t + s) \neq x(\bar t)$. Отметим, что функция $x(t)$ непрерывна справа в $\bar t$, и для произвольного вектора $u \in N_Q(x(\bar t))$ справедливо неравенство

$$\left\langle \frac{x(\bar t + s) - x(\bar t)}{\|x(\bar t + s) - x(\bar t)\|}, u \right\rangle \leqslant \delta$$

для сколь угодно малого δ и соответствующих ему достаточно малых значений s. Поскольку в скалярном произведении $\langle x(\bar t + s) - x(\bar t)/\|x(\bar t + s) - x(\bar t)\|, u\rangle$ длины векторов не зависят от изменения величины s, из последнего неравенства следует, что нижнее ограничение на угол между вектором приращения $x(\bar t + s) - x(\bar t)$ и вектором u с уменьшением s приближается к $\pi/2$. Деление вектора приращения функции на положительное значение s не меняет его направления. Из этого следует, что $x'_+(\bar t)$ принадлежит полупространству, для которого u служит внешней нормалью. Известен факт о том, что сопряжённый конус равен пересечению множества полупространств с внешними нормалями, пробегающими исходный конус (см. [1, с. 19] и [4, гл. 2, § 5]). Поскольку u пробегает конус $N_Q(x(\bar t))$, то $x'_+(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

В доказательстве утверждения b), чтобы не изменить направление вектора отрицательным значением s, поделим приращение функции на $-s$. Поэтому получим в результате включение $-x'_-(\bar t) \in T_Q(x(\bar t))$.

Определение 3. Для вектора $y \in \mathbb{R}^n$ введём обозначения его проекций $v_x y \equiv P_{N_Q(x)}(y)$, $\tau_x y \equiv P_{T_Q(x)}(y)$ на взаимно сопряжённые конусы $N_Q(x)$ и $T_Q(x)$ соответственно.

Замечание 3. Поскольку $N_Q(x)$ и $T_Q(x)$ – выпуклые замкнутые множества, то в них единственным образом определяются ближайшие элементы к любому $y \in \mathbb{R}^n$.

Для функции $f(t,x) : J \times Q \to \mathbb{R}^n$ (где $J \subset \mathbb{R}$ – некоторый невырожденный промежуток) уравнение

$$\dot{x} = \tau_x f(t,x) \tag{2}$$

и включение

$$\dot{x} \in f(t,x) - N_Q(x), \tag{3}$$

как и в случае выпуклого множества (см. [1, с. 16]), будем называть *системой с диодными нелинейностями* (СДН).

Определение 4. *Решением* дифференциального уравнения (2) (с разрывной по x правой частью) называется определённая на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (2) почти всюду.

Определение 5. *Решением* дифференциального включения (3) называется определённая на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (3) почти всюду.

Утверждение 6. *Дифференциальное уравнение (2) эквивалентно дифференциальному включению (3) в том смысле, что они имеют одно и то же множество решений.*

Доказательство.

1. Покажем, что любое решение уравнения (2) является решением включения (3). Предположим, что абсолютно непрерывная на некотором промежутке J функция x является решением дифференциального уравнения (2), т.е. для п.в. $t \in J$ выполнено равенство $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t,x(t))$. Известно, что любой вектор пространства $\mathbb{R}^n$ единственным образом раскладывается на сумму ортогональных слагаемых, одно из которых принадлежит одному из взаимно сопряжённых конусов, а второе – другому, причём эти слагаемые совпадают с проекциями вектора на эти конусы (см. [1, с. 19–20]). Отсюда $\tau_{x(t)} f(t,x(t)) = f(t,x(t)) - v_{x(t)} f(t,x(t)) \in f(t,x(t)) - N_Q(x(t))$, поэтому выполнено дифференциальное включение (3).

2. Теперь покажем, что любое решение (3) является решением (2). Пусть функция x есть решение дифференциального включения (3), т.е. для п.в. $t \in J$ выполнено включение $\dot{x}(t) \in f(t,x(t)) - N_Q(x(t))$. Для таких t найдётся вектор $u \in N_Q(x(t))$ такой, что $\dot{x}(t) = f(t,x(t)) - u$ и имеет место равенство $\dot{x}(t) = x'_-(t) = x'_+(t)$. Из утверждения 5 имеем, что $\dot{x}(t) \in T_Q(x(t))$ и $\langle \dot{x}(t), u \rangle \leqslant 0$, кроме того, $-\dot{x}(t) \in T_Q(x(t))$ и $\langle \dot{x}(t), u \rangle \geqslant 0$. Следовательно, $\langle \dot{x}(t), u \rangle = 0$, что означает ортогональность векторов $\dot{x}(t)$ и u. С учётом фактов $f(t,x(t)) = \dot{x}(t) + u$, $u \in N_Q(x(t))$, $\dot{x}(t) \in T_Q(x(t))$, $\dot{x}(t) \perp u$ и упомянутого выше утверждения о единственности разложения на ортогональные слагаемые из сопряжённых конусов имеем равенство $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t,x(t))$, что и требовалось доказать.

2. Теорема о существовании решения начальной задачи для расширенного представления СДН. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = \tau_x f(t,x), \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0 \in Q, \tag{5}$$

где функция $f : [t_0, t_0 + H] \times Q \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по первому аргументу и удовлетворяет локальному условию Липшица по второму: $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|$ (константа L для некоторой окрестности любой точки своя).

Здесь множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям 1), 2) и условию Липшица для оператора проектирования: для любых $x, \widetilde{x} \in Q^\varepsilon$ справедливо неравенство $\|P_Q(x) - P_Q(\widetilde{x})\| \leqslant \widetilde{L}\|x - \widetilde{x}\|$.

Теорема. *Задача (4), (5) имеет решение на некотором отрезке* $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$.

Основная идея и план доказательства почти совпадают с изложенным доказательством в работе [1, с. 32–41] для аналогичной теоремы с выпуклым множеством. Однако само доказательство усложняется новым определением нормального конуса.

Итак, план доказательства теоремы будет состоять из следующих пунктов:

a) доопределение функции $f(t,x)$ на множестве Q^ε;

b) построение “цилиндра” – множества, в котором будут лежать графики приближённых решений рассматриваемой задачи;

c) переход к дифференциальному включению;

d) построение приближённых решений – “ломаных Эйлера” – и доказательство их относительной компактности;

e) предельный переход – доказательство того, что предел ломаных Эйлера есть решение данной задачи (в множестве Q^ε);

f) доказательство того, что построенное решение не выходит из Q.

Доказательство. a) Для $x\in Q^\varepsilon$ обозначим $\overline{x}=P_Q(x)$ и определим вектор

$$e_x\equiv\begin{cases}\dfrac{x-\overline{x}}{\|x-\overline{x}\|}, & \text{если } x\in Q^\varepsilon\backslash Q,\\ 0, & \text{если } x\in Q,\end{cases}\qquad \widetilde{f}(t,x)\equiv f(t,\overline{x})-(\|x-\overline{x}\|+\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+)e_x,$$

здесь $\langle a,b\rangle_+=\max\{0,\langle a,b\rangle\}$. Для $x\in Q$ выполнено равенство $\widetilde{f}(t,x)=f(t,x)$, а для $x\in Q^\varepsilon\backslash Q$ вектор $\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+e_x$ является проекцией $f(t,\overline{x})$ на луч $\{\lambda(x-\overline{x}):\lambda\geqslant 0\}$ с направляющим вектором e_x, который содержится в конусе $N_Q(\overline{x})$ (см. утверждение 4). Однозначная функция $\widetilde{f}$ непрерывна на $\operatorname{int}Q$ и $Q^\varepsilon\backslash Q$, а на границе Q, возможно, имеет разрывы.

b) Для $x_0\in Q$ обозначим $M\equiv\max\{\|f(t,x)\|: t\in[t_0,t_0+H],\ \ x\in Q\bigcap B[x_0,\widetilde{L}a]\}$, где $a>0$ – произвольное число. Заметим, что поскольку оператор проектирования на Q удовлетворяет условию Липшица в области Q^ε, расстояние между $\overline{x}=P_Q(x)$ и $x_0=P_Q(x_0)$ не превышает $\widetilde{L}\|x-x_0\|$, поэтому $\overline{x}\in B[x_0,\widetilde{L}a]$, если $x\in B[x_0,a]$. С учётом этого факта для $t\in[t_0,t_0+H]$, $x\in Q^\varepsilon\bigcap B[x_0,a]$ получим оценку

$$\|\widetilde{f}(t,x)\|\leqslant M+b,\quad \text{где}\quad b\equiv\min\{\varepsilon,(1+\widetilde{L})a\}. \tag{6}$$

Действительно,

$$\|\widetilde{f}(t,x)\|=\|f(t,\overline{x})-(\|x-\overline{x}\|+\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+)e_x\|\leqslant$$
$$\leqslant\|f(t,\overline{x})-\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+e_x\|+\|x-\overline{x}\|.$$

Как отмечено выше, $\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+e_x$ – есть проекция $f(t,\overline{x})$ на луч $\{\lambda(x-\overline{x}):\lambda\geqslant 0\}$, тогда $f(t,\overline{x})-\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+e_x$ – проекция $f(t,\overline{x})$ на ортогональное лучу подпространство, поэтому имеет место неравенство

$$\|f(t,\overline{x})-\langle f(t,\overline{x}),e_x\rangle_+e_x\|\leqslant\|f(t,\overline{x})\|,$$

а поскольку $\overline{x}\in B[x_0,\widetilde{L}a]$, то получаем $\|f(t,\overline{x})\|\leqslant M$. Осталось отметить, что расстояние от точки x до её проекции $\overline{x}$ на множество Q не может, с одной стороны, превосходить ε, а с другой – $\|x-\overline{x}\|\leqslant\|x-x_0\|+\|x_0-\overline{x}\|\leqslant(1+\widetilde{L})a$.

Построим цилиндр $Z=[t_0,t_0+h]\times(B[x_0,a]\bigcap Q^\varepsilon)$ с высотой $h=\min\{H,a/(M+b)\}$.

c) Для значения $r\geqslant M+b$ определим множество

$$\widetilde{N}_Q(x)=B[0,r]\bigcap N_Q(x)$$

и рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(t,x), \tag{7}$$

где

$$F(t,x)=\begin{cases}f(t,x)-\widetilde{N}_Q(x), & \text{если } x\in Q,\\ \widetilde{f}(t,x), & \text{если } x\in Q^\varepsilon\backslash Q.\end{cases}$$

Утверждение 7. *Многозначная функция F имеет замкнутый график на Z.*

Доказательство. Пусть для последовательности $\{(t_k, x_k)\}_{k=1,2,\ldots}$ из Z выполнены условия $t_k \to t$, $x_k \to x$ при $k \to \infty$, а последовательность $y_k \in F(t_k, x_k)$ сходится к y при $k \to \infty$. Требуется показать, что точка $((t,x), y)$ принадлежит графику F. Очевидно, что точка (t, x) содержится в компакте Z, а для доказательства $y \in F(t,x)$ достаточно рассмотреть следующие три случая:

1) $\{x_k\} \subset Q$, $x \in Q$;
2) $\{x_k\} \subset Q^\varepsilon \backslash Q$, $x \in Q$;
3) $\{x_k\} \subset Q^\varepsilon \backslash Q$, $x \in Q^\varepsilon \backslash Q$.

В первом случае из условия $y_k \in F(t_k, x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ следует, что $u_k \equiv f(t_k, x_k) - y_k \in \widetilde{N}_Q(x_k) \subset N_Q(x_k)$, причём $u_k \to u \equiv f(t,x) - y$. Покажем, что $u \in \widetilde{N}_Q(x)$. Как было показано в утверждении 4, принадлежность u_k множеству $N_Q(x_k)$ эквивалентна равенству

$$x_k = P_Q\biggl(x_k + \frac{\varepsilon}{\|u_k\| + 1} u_k\biggr).$$

При этом очевидна сходимость

$$\biggl(x_k + \frac{\varepsilon}{\|u_k\| + 1} u_k\biggr) \to \biggl(x + \frac{\varepsilon}{\|u\| + 1} u\biggr)$$

при $k \to \infty$, из чего в силу непрерывности оператора проектирования (см. утверждение 1) следует, что $x = P_Q(x + \varepsilon u/(\|u\| + 1))$. Последнее, как уже было отмечено, эквивалентно принадлежности $u \in N_Q(x)$. Осталось вспомнить, что $u_k \in B[0, r]$, поэтому и $u \in B[0, r]$. Таким образом, показано, что $u \in \widetilde{N}_Q(x)$, а $y = f(t,x) - u \in F(t,x)$.

Во втором случае $y_k = f(t_k, \overline{x}_k) - (\|x_k - \overline{x}_k\| + \langle f(t_k, \overline{x}_k), e_{x_k}\rangle_+) e_{x_k} \to y$, причём $f(t_k, \overline{x}_k) \to f(t, \overline{x}) = f(t,x)$ и $\|x_k - \overline{x}_k\| \to 0$. Следовательно, $\langle f(t_k, \overline{x}_k), e_{x_k}\rangle_+ e_{x_k} \to f(t,x) - y$. Из ранее сделанного нами замечания о том, что $u_k \equiv \langle f(t_k, \overline{x}_k), e_{x_k}\rangle_+ e_{x_k}$ есть проекция $f(t_k, \overline{x}_k)$ на луч $\{\lambda(x_k - \overline{x_k}) : \lambda \geqslant 0\} \subset N_Q(\overline{x}_k)$, следует, что $u_k \in N_Q(\overline{x}_k)$. А так как $\|u_k\| \leqslant M$, то $u_k \in \widetilde{N}_Q(\overline{x}_k)$. Отсюда, как и в первом случае, получаем, что $f(t,x) - y \in \widetilde{N}_Q(x)$, т.е. $y \in F(t,x)$.

Наконец, в третьем случае доказываемое утверждение вытекает из непрерывности функции $\widetilde{f}$.

d) Разобьём промежуток $[t_0, t_0 + h]$ на k равных частей, $k \in \mathbb{N}$, точками $t_{k,i}$, $i = \overline{0, k}$: $h_k \equiv h/k$, $t_{k,0} = t_0$, $t_{k,i} = t_{k,i-1} + h_k$, $i = \overline{1, k}$. Построим ломаную Эйлера $x_k(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, положив $x_k(t_0) = x_0$. В предположении, что ломаная уже построена на промежутке $[t_{k,0}, t_{k,i-1}]$, продолжим её построение на очередном отрезке, определив для $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ значение

$$x_k(t) = x_k(t_{k,i-1}) + \widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))(t - t_{k,i-1}). \tag{8}$$

Построенная таким образом функция обладает следующими свойствами:

(I) $\dot{x}_k(t) = \widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))$ для $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$;
(II) $\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leqslant (M + b)|t' - t''|$ для $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_0 + h$;
(III) $x_k(t) \in B[x_0, a]$ при $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Первое свойство непосредственно следует из формулы (8), второе – из теоремы Лагранжа, свойства (I) и неравенства (6). Для $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_0 + h$ имеем

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leqslant \|\dot{x}_k(\xi)\||t' - t''| = \|\widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))\||t' - t''| \leqslant (M + b)|t' - t''|,$$

здесь $\xi \in [t', t'']$ и $\xi \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ при некотором i. Наконец, третье свойство следует из второго:

$$\|x_0 - x_k(t)\| = \|x_k(t_0) - x_k(t)\| \leqslant (M + b)|t - t_0| \leqslant (M + b)\frac{a}{M + b} = a.$$

Из этих свойств вытекает, что последовательность $\{x_k(t)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена, следовательно, из неё по теореме Арцела можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $x(t)$ (см. [5, с. 125; 6, с. 110]).

e) Перенумеровав, если требуется, члены сходящейся подпоследовательности, будем считать, что $x_k(t) \to x(t)$ при $k \to \infty$ равномерно на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Нетрудно видеть, что предельная функция $x(t)$, как и ломаные Эйлера, удовлетворяет условию Липшица с константой $M + b$ (и, следовательно, абсолютно непрерывна). Покажем, что эта функция удовлетворяет включению (7) почти всюду на отрезке $[t_0, t_0 + h]$.

Сначала отметим, что если многозначная функция F, определённая на замкнутом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ с содержащимися в $\mathbb{R}^n$ значениями, ограничена в окрестности каждой точки $p \in D$, то для полунепрерывности сверху функции F необходимо и достаточно замкнутости её графика. Напомним, что функция F называется *полунепрерывной сверху* в точке p области определения, если для любого $\sigma > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что $F(\widetilde{p}) \subset F^\sigma(p)$ для всех $\widetilde{p} \in p^\delta$ из области определения F (см. [4, с. 53]). В нашем случае $F(t, x)$ ограничена на Z (по крайней мере числом $M + r$) и имеет замкнутый график, т.е. является полунепрерывной сверху на Z.

Пусть в точке $\widetilde{t} \in [t_0, t_0 + h]$ существует $\dot{x}(\widetilde{t})$. Докажем, что $\dot{x}(\widetilde{t}) \in F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t}))$ для любого $\sigma > 0$. Тогда предельный переход при $\sigma \to 0$ даёт включение (7). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы из неравенств $|t-\widetilde{t}| < \delta$, $\|x-x(\widetilde{t})\| < (M+b+1)\delta$ в силу полунепрерывности сверху F вытекало включение $F(t, x) \subset F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t}))$. Пусть число K таково, что при $k \geqslant K$ выполняются условия $h_k < \delta/2$ и $\|x_k(t) - x(t)\| < \delta$ для любого $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Если $|t - \widetilde{t}| < \delta/2$ и $k \geqslant K$, то ближайший к t слева узел $t_{k,i-1}$ ломаной $x_k(t)$ лежит в открытой δ-окрестности точки $\widetilde{t}$. Поэтому

$$\|x_k(t_{k,i-1}) - x(\widetilde{t})\| \leqslant \|x_k(t_{k,i-1}) - x_k(\widetilde{t})\| + \|x_k(\widetilde{t}) - x(\widetilde{t})\| \leqslant (M + b + 1)\delta,$$

$$\dot{x}_k(t) = \widetilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1})) \in F(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1})) \subset F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})).$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{x_k(t) - x_k(\widetilde{t})}{t - \widetilde{t}} = \frac{1}{t - \widetilde{t}} \int\limits_{\widetilde{t}}^{t} \dot{x}_k(s)ds.$$

Стоящее в правой части интегральное среднее принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества значений подынтегральной функции (см. [4, с. 51]), откуда имеем

$$\frac{x_k(t) - x_k(\widetilde{t})}{t - \widetilde{t}} \in F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})).$$

Переходя к пределу сначала при $k \to \infty$, а затем при $t \to \widetilde{t}$, получаем требуемое включение

$$\dot{x}(\widetilde{t}) \in F^\sigma(\widetilde{t}, x(\widetilde{t})).$$

f) Итак, функция $x(t)$, полученная как предел ломаных Эйлера, является решением задачи (7), (5) в Q^ε. Докажем, что её значения лежат в Q. Это будет означать, что найдено решение задачи (4), (5).

Пусть $x(t) \notin Q$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset [t_0, t_0 + h]$. Обозначим $r(t) \equiv \|x(t) - P_Q(x(t))\| = \|x(t) - \overline{x}(t)\|$ и покажем, что $r(t + \triangle t) < r(t)$, если $t \in (\alpha, \beta)$ и $\triangle t > 0$ достаточно мало. Действительно,

$$r^2(t+\triangle t) = \|x(t+\triangle t) - \overline{x}(t+\triangle t)\|^2 \leqslant \|x(t+\triangle t) - \overline{x}(t)\|^2 = \langle x(t+\triangle t) - \overline{x}(t), x(t+\triangle t) - \overline{x}(t)\rangle =$$
$$= \langle x(t+\triangle t) - x(t) + x(t) - \overline{x}(t), x(t+\triangle t) - x(t) + x(t) - \overline{x}(t)\rangle = \|x(t+\triangle t) - x(t)\|^2 + \|x(t) - \overline{x}(t)\|^2 +$$
$$+ 2\langle x(t + \triangle t) - x(t), x(t) - \overline{x}(t)\rangle = o(\triangle t) + r^2(t) + 2\langle \widetilde{f}(t, x(t))\triangle t, x(t) - \overline{x}(t)\rangle =$$
$$= o(\triangle t) + r^2(t) + 2\langle f(t, \overline{x}(t)) - \langle f(t, \overline{x}(t)), e_x\rangle_+ e_x - r(t)e_x, r(t)e_x\rangle \triangle t.$$

Напомним, что векторы $(\langle f(t,\overline{x}(t)),e_x\rangle_+e_x - r(t)e_x)$ и $x(t)-x(\overline{t})$ ортогональны. Следовательно,

$$r^2(t+\triangle t) \leqslant r^2(t)(1-2\triangle t)+o(\triangle t) < r^2(t).$$

Итак, всюду вне множества Q функция $r(t)$ является невозрастающей, а значит, значения $x(t)$ не могут выйти из Q. Тем самым доказано существование решения рассматриваемой задачи (4), (5) на отрезке $[t_0, t_0+h]$. Аналогично доказывается существование решения на некотором отрезке $[t_0-h, t_0]$ для функции $f:[t_0-H,t_0]\times Q\to\mathbb{R}^n$ при выполнении условий теоремы.

Замечание 4. Отметим, что условие Липшица, наложенное на множество Q в постановке задачи (4), (5), не следует из свойств 1) и 2), как это показывает следующий пример. Построим множество Q, взяв за основу любую полуплоскость в $\mathbb{R}^2$. С внешней стороны от полуплоскости изобразим последовательность непересекающихся равнобедренных трапеций с большим основанием, равным некоторому числу $a>0$ и лежащим на ограничивающей полуплоскость прямой, с боковыми сторонами, равными произвольному числу $\varepsilon > a/2$. Меньшее основание первой трапеции положим равным $a/2$, второй – $a/2^2$, n-й – $a/2^n$ и т.д. до бесконечности. Для каждой трапеции, считая точку пересечения её боковых сторон центром окружности, проведём дугу, соединяющую вершины большего основания трапеции. После этого удалим из полуплоскости сегменты, расположенные между дугами и большими основаниями трапеций. Для таким образом построенного множества Q ε-окрестность, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2), но оператор проектирования P_Q не удовлетворяет условию Липшица на Q^ε, так как вершины большего основания каждой трапеции являются проекциями соответствующих вершин меньшего основания. Длины больших оснований не меняются, а длины меньших оснований стремятся к нулю с ростом номера трапеции.

3. Пример отсутствия единственности решения. Для случая выпуклого множества Q в работе [1] доказана единственность решения начальной задачи. Если выпуклость Q отсутствует, то, как показывает следующий пример, единственность решения может нарушаться.

Рассмотрим СДН $\dot{x}=\tau_x f(t,x)$ на множестве $Q=\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)$, представляющем собой трёхмерное пространство, из которого удалён открытый шар единичного радиуса с центром в нуле. В качестве функции правой части системы возьмём постоянную функцию $f(t,x) = (1,0,0)$. Для начальных значений x_0, расположенных в Q на оси Ox слева от шара, существует бесконечно много различных решений системы, которые на некотором начальном промежутке времени двигаются вправо по оси Ox до сферы шара. Затем одно из решений принимает постоянное значение – левую точку пересечения оси Ox со сферой (неустойчивое положение равновесия), остальные продолжают путь сначала по четверти любой центральной окружности, проходящей через эту точку равновесия, а затем по касательной к этой окружности параллельно оси Ox.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell J., Nguyen Thi Hien, Petrova L., Pryadko I.* Systems with Non-Smooth Inputs. Berlin; Boston, 2021.
2. *Лобанова О.А., Садовский Б.Н.* О двумерных динамических системах с ограничением // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 4. С. 449–456.
3. *Mehlitz P., Wachsmuth G.* The limiting normal cone to pointwise defintd sets in Lebesgue spaces // Set-Valued and Variat. Anal. 2018. V. 26. № 3. P. 449–467.
4. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.01.2022 г.
После доработки 22.01.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1324–1332

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ ВОЛН

© 2022 г. А. И. Аристов, А. А. Холомеева

Построены семейства точных решений нелинейного уравнения из теории спиновых волн, описывающего нестационарный процесс в магнитной среде с пространственной дисперсией. Исследованы групповые свойства этого уравнения и соответствующего ему стационарного уравнения. Доказана теорема о неединственности классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения.

DOI: 10.31857/S037406412210003X, EDN: KQAELG

Введение. Рассмотрим в области $\{(\overline{x},t)=(x,y,z,t)\colon\ \overline{x}\in\mathbb{R}^3,\ \ t>0\}$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u+D[u]=0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$D[u]=\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Предполагается, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, причём $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$. Уравнение (1) получено в книге [1, гл. 3, § 7] для описания нестационарного процесса в магнитной среде с пространственной дисперсией. В данной работе будут найдены различные точные решения уравнения (1) с использованием методов из работы [2]. Похожий подход уже применялся для нахождения точных решений неклассических уравнений в статьях [3, 4].

1. Решения типа неполной бегущей волны. Под решениями типа *неполной бегущей волны* подразумеваем точные решения вида $u(x,y,z,t)=f(\xi,t)$, где $f(\cdot)$ – пока произвольная функция двух аргументов, $\xi=a_1x+a_2y+a_3z$, $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ – постоянный единичный вектор. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}a_2\frac{\partial f}{\partial \xi}a_3\right)=a_1a_2a_3\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2\right).$$

Аналогично вычислив другие слагаемые, убедимся, что для рассматриваемого класса решений $D[u]=0$. Значит, уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial \xi^2}=0.$$

Последовательно интегрируя его, получаем

$$f(\xi,t)=p(t)\xi+q(t)+\theta(\xi),$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента. Таким образом, решения определяются по формуле

$$u(\overline{x},t)=p(t)(\overline{a},\overline{x})+q(t)+\theta((\overline{a},\overline{x})).$$

2. Решения специального вида. Случай 1. Построим решения вида $u(x,y,z,t) = f(\rho,t)$, где $\rho = xyz$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что, во-первых, имеет место равенство

$$D[u] = 2(\alpha+\beta+\gamma)\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}\right) = 0,$$

во-вторых,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = \frac{\partial^3 f}{\partial t\partial\rho^2}((yz)^2 + (xz)^2 + (xy)^2).$$

Значит, для выполнения соотношения (1) достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial\rho^2} = 0,$$

откуда легко получить

$$f(\rho,t) = p(t)\rho + q(t) + \theta(\rho),$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ – произвольные функции. Таким образом, решения имеют вид

$$u(\overline{x},t) = p(t)xyz + q(t) + \theta(xyz).$$

Случай 2. Построим решения вида $u(x,y,z,t) = f(\rho,t)$, где $\rho = x^2+y^2+z^2$. Непосредственным вычислением получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 8xyz\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2\right),$$

а следовательно, $D[u] = 0$. Кроме того, справедливо равенство

$$\Delta u = 4\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + 6\frac{\partial f}{\partial\rho}.$$

Таким образом, уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(4\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + 6\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) = 0, \quad \text{или} \quad 2\rho\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + 3\frac{\partial f}{\partial\rho} = k(\rho),$$

где $k(\cdot)$ – произвольная функция одного аргумента. Приведём последнее уравнение к виду

$$\rho^{3/2}\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{3}{2}\rho^{1/2}\frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{\rho^{1/2}k(\rho)}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{3/2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) = \frac{\rho^{1/2}k(\rho)}{2},$$

откуда несложно выразить функцию f:

$$f = \int\frac{\int\rho^{1/2}k(\rho)d\rho}{2\rho^{3/2}}d\rho + \frac{\rho^{-1/2}}{-1/2}p(t) + q(t),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ – произвольные функции. Обозначив первое слагаемое снова как $k(\rho)$, а $(-2p(t))$ как $p(t)$, получим

$$f(\rho,t) = k(\rho) + \frac{p(t)}{\sqrt{\rho}} + q(t).$$

3. Решения – обобщённые многочлены от x. Построим решения, представляющие собой многочлены от переменной x. Если решение является многочленом степени n, то линейная часть уравнения будет многочленом степени n, а $D[u]$ – многочленом степени $(2n-1)$. Эти степени будут равны при $n=1$. Значит, решение u следует искать в виде

$$u(\overline{x},t) = xf(y,z,t) + g(y,z,t),$$

где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции трёх переменных, подлежащие определению. Вычислив нужные производные, получим равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u = x\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+x\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial z^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2},$$

$$D[u] = 2x\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\beta x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)+$$

$$+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right)+\gamma x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)+\gamma\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right).$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде $A(y,z,t)x+B(y,z,t)=0$, что должно выполняться тождественно, а следовательно, $A=B=0$. Значит,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial z^2}+2\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)+\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}+\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right)+\gamma\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\right)=0.$$

С учётом того, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, получим

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial z^2}+\alpha\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}-\alpha f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}-\gamma\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\beta\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}-\alpha f\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0.$$

Построим два семейства решений этой системы.

1. Рассмотрим решения типа бегущей волны: пусть $f(y,z,t)=F(\theta)$, $g(y,z,t)=G(\theta)$, $\theta = t+\lambda y+\mu z$, λ, μ – произвольные постоянные. Подставив эти выражения в систему, получим

$$F'''(\theta)+l({F'}^2(\theta)-F(\theta)F''(\theta))=0,\quad G'''(\theta)+l(F'(\theta)G'(\theta)-F(\theta)G''(\theta))=0,$$

где $l=\alpha\lambda\mu/(\lambda^2+\mu^2)$. Подберём решения первого уравнения вида $F=A\theta^p$. Все члены уравнения будут пропорциональны одной степени функции F при $p=-1$. Сократив уравнение и выразив A, получим $A=-6/l$. Значит, $F=-6\theta^{-1}/l$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим линейное уравнение для функции $G(\theta)$, у которого несложно найти общее решение

$$G=c_1\theta^{-2}+c_2\theta^{-1}+c_3.$$

Собирая полученные выражения, приходим к следующему семейству решений:

$$u=-6(\lambda^2+\mu^2)\theta^{-1}x/(\alpha\lambda\mu)+c_1\theta^{-2}+c_2\theta^{-1}+c_3,$$

где c_1, c_2 и c_3 – произвольные константы.

2. Рассмотрим решения с разделёнными переменными: $f(y,z,t)=At^{m_1}y^{n_1}z^{k_1}$, $g(y,z,t) = Bt^{m_2}y^{n_2}z^{k_2}$, m_i, n_i, k_i, $i=1,2$, – вещественные числа. Подставив эти выражения в систему, заметим, что в первом уравнении все члены пропорциональны или t^{m_1-1}, или t^{2m_1}. Для его тождественного выполнения надо потребовать $m_1-1=2m_1$ или $m_1=-1$. Во втором уравнении все члены пропорциональны или t^{m_2-1}, или $t^{m_1+m_2}$, что не накладывает ограничений на m_2 при $m_1=-1$. Сократив систему, запишем её в виде

$$n_1(n_1-1)z^2+k_1(k_1-1)y^2=0,$$

$$m_2n_2(n_2-1)y^{n_2-2}z^{k_2}+m_2k_2(k_2-1)y^{n_2}z^{k_2-2}-Ay^{n_1+n_2-1}z^{k_1+k_2-1}(\gamma n_1k_2+\beta k_1n_2+\alpha n_2k_2)=0.$$

Система должна выполняться тождественно, следовательно, все коэффициенты равны нулю:

$$n_1(n_1-1)=0,\ \ k_1(k_1-1)=0,\ \ m_2n_2(n_2-1)=0,\ \ m_2k_2(k_2-1)=0,\ \ \gamma n_1k_2+\beta k_1n_2+\alpha n_2k_2=0.$$

Рассмотрим отдельно случаи $m_2=0$ и $m_2\neq 0$. В первом случае n_1 и k_1 – произвольные числа из множества $\{0,1\}$, а n_2 и k_2 – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\gamma n_1k_2+\beta k_1n_2+\alpha n_2k_2=0. \tag{2}$$

Во втором случае n_1, k_1, n_2, k_2 – произвольные числа из множества $\{0,1\}$, удовлетворяющие условию (2). Таким образом, решения имеют вид $u=At^{-1}xy^{n_1}z^{k_1}+Bt^{m_2}y^{n_2}z^{k_2}$, где A, B, m_2 – произвольные действительные постоянные, n_1 и k_1 – произвольные числа из множества $\{0,1\}$, а n_2 и k_2 – произвольные числа из множеств $\mathbb{R}$ или $\{0,1\}$ при $m_2=0$ или $m_2\neq 0$ соответственно.

4. Решения – обобщённые многочлены от t^{-1}. Если решение является многочленом степени n, то линейная часть уравнения будет многочленом степени $n+1$, а $D[u]$ – многочленом степени $2n$. Эти степени будут равны при $n=1$. Значит, решение u следует искать в виде

$$u(\overline{x},t)=t^{-1}f(\overline{x})+g(\overline{x}),$$

где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции пространственных переменных. Вычисляя нужные производные, приведём уравнение к виду

$$-t^{-2}\Delta f+\alpha t^{-2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\alpha t^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+$$
$$+\beta t^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\beta t^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+$$
$$+\gamma t^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\gamma t^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0.$$

Это равенство, имеющее вид $t^{-2}A+t^{-1}B+C=0$, должно выполняться тождественно, следовательно, $A=B=C=0$:

$$-\Delta f+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0,$$
$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)=0,$$
$$\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0. \tag{3}$$

Несложно убедиться в том, что третьему уравнению системы (3) удовлетворяет функция $g(x,y,z)=\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z)$, где $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, $\chi(\cdot)$ – произвольные функции. Тогда, учитывая, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, можем второе уравнение привести к виду

$$\gamma\chi'(z)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\beta\psi'(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+\alpha\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0, \tag{4}$$

а первое записать как

$$\Delta f=D[f]. \tag{5}$$

Пусть $f(x,y,z)=F(\theta)$, где $\theta=c_1x+c_2y+c_3z$, $\overline{c}=(c_1,c_2,c_3)$ – произвольный постоянный вектор. Тогда левая часть соотношения (5) равна $F''(\theta)$, а правая – нулю. Что касается уравнения (4), то несложно привести его к виду

$$F''(\theta)(c_1c_2\gamma\chi'(z)+c_1c_3\beta\psi'(y)+c_2c_3\gamma\varphi'(x))=0,$$

что выполняется при $F''(\theta)=0$. Значит, $F(\cdot)$ – произвольная линейная функция.

Таким образом, имеем семейство решений

$$u=\frac{c_1x+c_2y+c_3z+c}{t}+\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z).$$

5. Метод разделения переменных. Случай 1. Построим решения $u=f(x)+g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции одной и трёх переменных соответственно. Вычислив нужные производные, приведём уравнение к виду

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}-\alpha f'(x)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0. \tag{6}$$

Разберём случаи, когда функция $f'(x)$ является или не является постоянной.

1. Пусть $f'(x)=c_1$. Тогда приходим к линейному уравнению, определяющему функцию $g(\cdot)$:

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}-\alpha c_1\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0.$$

Несложно убедиться в том, что, например, оно имеет решения вида

$$g=c_2e^{c_1\alpha\lambda\mu\theta/(\lambda^2+\mu^2)}+c_3\theta+c_4,$$

где $\theta=t+\lambda y+\mu z$, λ, μ – произвольные постоянные. Следовательно,

$$u=c_1x+c_2e^{c_1\alpha\lambda\mu\theta/(\lambda^2+\mu^2)}+c_3\theta+c_4.$$

2. Пусть $f'(x)$ не является постоянной. Тогда для тождественного выполнения равенства (6) потребуем, чтобы коэффициент при $f'(x)$ и член, не зависящий от x, были равны нулю:

$$\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}=0.$$

Пусть $\alpha\neq 0$. Общее решение первого уравнения этой системы имеет вид $g=k(y,t)+{}$ $+\,l(z,t)$, где $k(\cdot)$ и $l(\cdot)$ – произвольные функции. С учётом этой формулы второе уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^3 k}{\partial t\partial y^2}=-\frac{\partial^3 l}{\partial t\partial z^2}.$$

Здесь правая часть не зависит от z, а левая – от y, следовательно, они равны произвольной функции только от переменной t, которую выберем в виде $2p'(t)$. Интегрируя выражения для производных $k(\cdot)$ и $l(\cdot)$ и складывая, получаем

$$g=p(t)(y^2-z^2)+q(y)+r(z)+p_1(t)y+p_2(t)z+p_3(t),$$

где $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $r(\cdot)$, $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$, $p_3(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента. Значит, решения определяются по формуле

$$u=f(x)+p(t)(y^2-z^2)+q(y)+r(z)+p_1(t)y+p_2(t)z+p_3(t)$$

с произвольной функцией $f(\cdot)$.

Пока не рассмотрен случай $\alpha=0$. Здесь решения следует искать в виде $u=f(x)+g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ – произвольная функция одного аргумента, а $g(\cdot)$ – произвольное решение линейного уравнения

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2}=0.$$

Случай 2. Построим решения $u = f(x,t) + g(y,z)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции двух переменных. Вычисляя нужные производные и учитывая, что $\beta + \gamma = -\alpha$, приведём уравнение к виду

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} = -\alpha \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}.$$

Потребуем, чтобы смешанная производная от функции g была равна постоянной:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = c_1 \quad \text{или} \quad g = c_1 yz + p(y) + q(z),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ – произвольные функции. Тогда для $f(\cdot)$ получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} + \alpha c_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

и в результате приходим к семейству решений

$$u = f(x,t) + c_1 yz + p(y) + q(z).$$

Случай 3. Построим решения следующего вида: $u = f(x) g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции одной и трёх переменных соответственно. Вычисляя нужные производные и учитывая, что $\beta + \gamma = -\alpha$, приведём уравнение к виду

$$f''(x) \frac{\partial g}{\partial t} + f \left(\frac{\partial^3 g}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial z^2} \right) + \alpha f(x) f'(x) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - g \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) = 0. \tag{7}$$

Потребуем выполнения условия

$$f''(x) = c_1 f(x) f'(x) + c_2 f(x).$$

Понизим порядок, положив $f'(x) = \omega(f)$, откуда $f''(x) = \omega d\omega / df$:

$$\omega d\omega / df = c_1 f \omega + c_2 f. \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно случаи $c_1 \neq 0$ и $c_1 = 0$.

1. Пусть $c_1 \neq 0$. Уравнение (8) приведём к виду

$$\frac{\omega d\omega}{\omega + c_2/c_1} = c_1 f df,$$

откуда, проинтегрировав, получим неявную формулу для функции $\omega \equiv f'(x)$:

$$f' - \frac{c_2}{c_1} \ln \left| f' + \frac{c_2}{c_1} \right| = \frac{c_1 f^2}{2} + c_3. \tag{9}$$

Вернёмся к уравнению (7), которое можно записать как

$$c_1 f(x) f'(x) \frac{\partial g}{\partial t} + c_2 f(x) \frac{\partial g}{\partial t} + f \left(\frac{\partial^3 g}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial z^2} \right) + \alpha f(x) f'(x) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - g \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) = 0.$$

Для тождественного выполнения этого равенства надо потребовать, чтобы суммы коэффициентов при $f(x) f'(x)$ и при $f(x)$ были равны нулю. Тогда получим систему

$$c_1 \frac{\partial g}{\partial t} + \alpha \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - g \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \right) = 0, \quad c_2 \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t \partial z^2} = 0.$$

Будем искать решения этой системы типа бегущей волны: $g = g(\theta)$, $\theta = \lambda y + \mu z + t$, λ и μ – произвольные постоянные:

$$c_1 g'(\theta) + \alpha\lambda\mu\left(g'^2(\theta) - g(\theta)g''(\theta)\right) = 0, \quad c_2 g'(\theta) + (\lambda^2 + \mu^2)g'''(\theta) = 0.$$

Запишем первое уравнение системы в виде

$$c_1\frac{g'}{g^2} = \alpha\lambda\mu\frac{gg'' - g'^2}{g^2}, \quad \text{или} \quad -c_1\frac{d}{d\theta}\frac{1}{g} = \alpha\lambda\mu\frac{d}{d\theta}\frac{g'}{g},$$

откуда, проинтегрировав, получим уравнение

$$\alpha\lambda\mu g' + c_1 + c_4 g = 0,$$

общее решение которого определяется по формуле

$$g = \begin{cases} c_5 e^{-c_4\theta/(\alpha\lambda\mu)} - \dfrac{c_1}{c_4}, & c_4 \neq 0, \\ -\dfrac{c_1\theta}{\alpha\lambda\mu} + c_5, & c_4 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В результате получим семейство решений $u = f(x)g(\lambda y + \mu z + t)$, где $f(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (9), а функция $g(\cdot)$ находится по формуле (10).

2. Пусть теперь $c_1 = 0$. Интегрирование уравнения (8) даёт равенство $f'^2 = c_2 f^2 + c_3$, откуда можно выразить $f(\cdot)$ через элементарные функции.

Вернёмся к уравнению (7). Рассуждая по аналогии с предыдущим случаем, придём к системе

$$\alpha\lambda\mu(g'^2(\theta) - g(\theta)g''(\theta)) = 0, \quad c_2 g'(\theta) + (\lambda^2 + \mu^2)g'''(\theta) = 0.$$

Несложно убедиться в том, что первое уравнение системы имеет общее решение $g = c_4 e^{c_5\theta}$. Подставив это выражение во второе уравнение системы, получим условие непротиворечивости: $c_2 = -c_5^2(\lambda^2 + \mu^2)$.

В результате имеем семейство решений $u = c_4 f(x)e^{c_5(\lambda y + \mu z + t)}$, где $f(\cdot)$ определяется уравнением $f'^2 = c_2 f^2 + c_3$.

Случай 4. Построим решения вида $u = f(x,t) + g(y,z,t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции двух и трёх переменных соответственно. Вычисляя нужные производные и учитывая, что $\beta + \gamma = -\alpha$, приведём уравнение к виду

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2} - \alpha\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = p(t), \quad \text{или} \quad f = xp(t) + q(t),$$

где $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента. Тогда (11) примет вид

$$\frac{\partial^3 g}{\partial t\partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial t\partial z^2} - \alpha p(t)\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} = 0. \tag{12}$$

Таким образом, получаем семейство решений

$$u = xp(t) + q(t) + g(y,z,t),$$

где функция $g(\cdot)$ определяется линейным уравнением (12).

2. В противном случае продифференцируем (11) по x и поделим на $\partial^2 f/\partial x^2$:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{-1}\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3}=\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}.$$

Здесь левая часть равенства зависит от x и t, а правая – от y, z и t. Значит, обе части равны произвольной функции только от t, которую выберем в виде $\alpha p(t)$. Таким образом,

$$\alpha\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}=\alpha p(t)\quad\text{или}\quad g=p(t)yz+q(y,t)+r(z,t), \tag{13}$$

где $q(\cdot)$ и $r(\cdot)$ – произвольные функции двух аргументов. Подставим предварительную форму (13) в (11):

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2}-\alpha p(t)\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial^3 q}{\partial t\partial y^2}+\frac{\partial^3 r}{\partial t\partial z^2}=0.$$

Здесь первое слагаемое (взятое в скобки) зависит только от переменных x и t, второе – от y и t, третье – только от z и t. Следовательно, три указанных выражения являются функциями только от t.

Пусть

$$\frac{\partial^3 q}{\partial t\partial y^2}=2\sigma'(t),\quad \frac{\partial^3 r}{\partial t\partial z^2}=2\rho'(t), \tag{14}$$

где $\sigma(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ – пока произвольные функции. Тогда для $f(\cdot)$ получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2}-\alpha p(t)\frac{\partial f}{\partial x}=-2(\sigma'(t)+\rho'(t)). \tag{15}$$

Интегрируя равенства (14) и возвращаясь к переменной u, получаем

$$u=f(x,t)+p(t)yz+\sigma(t)y^2+\rho(t)z^2+k_1(z)+k_2(t)z+k_3(t)+k_4(y)+k_5(t)y,$$

где $k_i(\cdot)$, $i=\overline{1,5}$, – произвольные функции одного аргумента, а $f(\cdot)$ определяется линейным уравнением (15).

6. О симметриях. Интересно отметить следующие групповые свойства уравнения (1) и соответствующего ему стационарного уравнения.

Во-первых, легко убедиться в том, что если $u=u_0(x,y,z,t)$ – решение (1), $k(\cdot)$ – произвольная функция одного аргумента, то $u=u_0(x,y,z,t)+k(t)$ – тоже решение (1). Следовательно, если дано решение уравнения

$$D[u]=0, \tag{16}$$

то, прибавив к нему произвольную функцию времени, получим решение (1). Поэтому представляет интерес исследование и стационарного уравнения (16). Кроме того, из этого следует

Теорема. *Классическое решение задачи Коши для уравнения (1) не единственно.*

Во-вторых, укажем способ добавления произвольной функции в решение уравнения (16). Пусть дано некоторое решение $u=\theta(x,y,z)$. Рассмотрим его решения вида $u=f(\theta(x,y,z))$, где $f(\cdot)$ – некоторая функция одного аргумента. Вычислив нужные производные, получим, что $D[u]=0$. Значит, $u=f(\theta(x,y,z))$ с произвольной $f(\cdot)$ – тоже решение (16).

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции вида

$$u(x,y,z)=f(x)g(y)h(z)\quad\text{и}\quad u(x,y,z)=f(x)+g(y)+h(z),$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ – произвольные функции одного аргумента, являются решениями (16).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00449).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., 2005.
3. *Аристов А.И.* О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2015. Т. 55. № 11. С. 1870–1875.
4. *Аристов А.И.* Точные решения неклассического уравнения с нелинейностью под знаком лапласиана // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1360–1370.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.07.2022 г.
После доработки 22.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1333–1343

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ПОТЕНЦИАЛ ПУАССОНА В ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров

Рассмотрена первая начально-краевая задача для параболической системы в полуограниченной области на плоскости с негладкой боковой границей, допускающей "клювы". Исследован характер непрерывности следа потенциала Пуассона на такой границе, и доказана теорема о существовании классического решения рассматриваемой задачи в случае неоднородной параболической системы и ненулевого начального условия.

DOI: 10.31857/S0374064122100041, EDN: KQCLFN

Введение. Теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем с гёльдеровскими коэффициентами общего вида в пространствах $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, в областях Ω с гладкими боковыми границами построена в статье [1] (см. также [2, с. 706]).

В настоящей работе рассматривается первая начально-краевая задача для одномерной по пространственной переменной x параболической по Петровскому (см. [3]) системы второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области с негладкой, вообще говоря, боковой границей из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. Здесь ω обозначает некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. п. 1).

В случае одного параболического уравнения в статьях [4–6] установлена однозначная разрешимость такой задачи в пространстве $H^{1,\hat{\omega}}(\overline{\Omega})$, где $\hat{\omega}$ – некоторый модуль непрерывности, при более сильных, по сравнению с настоящей работой, требованиях на характер непрерывности коэффициентов этого уравнения и боковой границы области. При этом предполагалось, что начальная функция ограничена вместе со своей первой производной и эта производная Дини-непрерывна.

В работах [7–9] доказаны теоремы об однозначной классической разрешимости в пространстве $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для однородной параболической системы с нулевым начальным условием при выполнении рассматриваемых в настоящей работе условий на коэффициенты этой системы и на негладкую боковую границу области.

Естественно возникает вопрос об исследовании разрешимости в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ такой задачи для неоднородной параболической системы при минимальных условиях на характер непрерывности начальной функции h. В настоящей работе изучается поведение следа потенциала Пуассона на негладкой кривой, а затем методом граничных интегральных уравнений строится классическое решение рассматриваемой задачи, при этом предполагается, что h является лишь непрерывной и ограниченной, вместе со своей первой производной, функцией. В п. 1 приводятся необходимые определения и формулируется основная теорема, в п. 2 исследуется характер непрерывности следа потенциала Пуассона на негладкой кривой, в п. 3 доказывается теорема существования для первой начально-краевой задачи.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Функция $\nu(z)$, $z \geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$, $z_1 \geqslant z_2 \geqslant 0$. Следуя [10, с. 150], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ такую, что

$\omega(0)=0$. Если (вектор)-функция h непрерывна на отрезке $[x_1,x_2]$, то её модуль непрерывности на этом отрезке

$$\omega_h(z)=\sup_{\substack{x,x+\Delta x\in[x_1,x_2]\\ 0\leqslant|\Delta x|\leqslant z}}|\Delta_x h(x)|,\quad z\geqslant 0,$$

обладает перечисленными выше свойствами.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Из известных свойств модуля непрерывности отметим неравенства

$$\omega(\lambda z)\leqslant(\lambda+1)\omega(z),\quad \lambda\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,$$

и

$$\frac{\omega(z_1)}{z_1}\leqslant 2\frac{\omega(z_2)}{z_2},\quad z_1\geqslant z_2>0$$

(т.е. функция $z^{-1}\omega(z)$ почти убывает). Кроме того (см. [11]), справедливо неравенство

$$\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\}\leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,$$

для некоторых постоянных $C,c>0$.

Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z)=\int\limits_0^z\omega(\xi)\xi^{-1}\,d\xi<+\infty,\quad z>0. \tag{1}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1). Если $\omega\in\mathcal{D}$, то и $\widetilde{\omega}$ является модулем непрерывности, причём $\omega(z)\leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z\geqslant 0$. Кроме того, функция $\omega^*(z)=\omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом если $\omega\in\mathcal{D}$, то $\omega^*\in\mathcal{D}$ и имеет место равенство

$$\widetilde{\omega}^*(z)=2\widetilde{\omega}(z^{1/2}),\quad z\geqslant 0.$$

Обозначим через $C^1(\mathbb{R})$ пространство (вектор)-функций $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой производной h', с нормой

$$\|h;\mathbb{R}\|^1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|h'(x)|.$$

Пусть фиксировано число $T>0$. Через $C[0,T]$ обозначим пространство непрерывных (вектор)-функций $\psi:[0,T]\to\mathbb{R}^m$, $m\in\mathbb{N}$, с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0=\max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$. Положим $\underset{0}{C}[0,T]=\{\psi\in C[0,T]:\psi(0)=0\}$. Через $C^1(0,T]$ обозначим пространство (вектор)-функций, имеющих непрерывную на промежутке $(0,T]$ первую производную.

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Положим

$$H^{1+\omega}(\mathbb{R})=\left\{h\in C^1(\mathbb{R}):\|h;\mathbb{R}\|^{1+\omega}=\|h;\mathbb{R}\|^1+\sup_{\substack{x,x+\Delta x\in\mathbb{R}\\ \Delta x\neq 0}}\left\{\frac{|\Delta_x h'(x)|}{\omega(|\Delta x|)}\right\}<\infty\right\},$$

$$H^{q+\omega}[0,T]=\left\{\psi\in C[0,T]:\|\psi;[0,T]\|^{q+\omega}=\|\psi;[0,T]\|^0+\right.$$
$$\left.+\sup_{\substack{t,t+\Delta t\in(0,T)\\ \Delta t\neq 0}}\left\{\frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^q\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\}<\infty\right\},\quad q=0,1/2,$$

$$\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T] = \{\psi \in H^{1/2+\omega}[0,T] : \psi(0) = 0\}.$$

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя работам [12, 13], введём пространство

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T] : \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T], \quad \|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < \infty\}.$$

Замечание 1. Для произвольной функции $\psi \in C^{1/2}[0,T]$ имеет место равенство $\psi(0) = 0$, которое следует из представления

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\partial^{1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Замечание 2. Если $\psi \in \underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, то $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ (см. [11]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [13]).

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T)\}$ рассмотрим произвольную область Ω. Обозначим через $C^{2,1}(\Omega)$ пространство (вектор)-функций $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, непрерывных вместе со своими производными $\partial_t u$, $\partial_x^l u$, $l = 1, 2$, в Ω. Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных (вектор)-функций $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |u(x,t)|$.

Положим

$$C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \|u;\Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^{1} \|\partial_x^l u;\Omega\|^0 < \infty\right\},$$

$$\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x,0) = 0, \quad l = 0,1\},$$

$$H^\omega(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \|u;\Omega\|^\omega = \|u;\Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega \\ (\Delta x)^2+|\Delta t|\neq 0}} \left\{\frac{|\Delta_{x,t}u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty\right\},$$

где ω – некоторый модуль непрерывности. Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u, \quad u = (u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$, $l = 0,1,2,$ – $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]\}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) собственные числа μ_r, $r = \overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для всех $(x,t) \in \overline{D}$ и некоторого $\delta > 0$;

(b) $a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\overline{D})$, где ω_0 – модуль непрерывности, такой что

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\,dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $z^{-\varepsilon_0}\omega_0(z)$, $z>0$, почти убывает.

Положим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D} : t>\tau\}$. Матрицу $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, называем *фундаментальной матрицей решений* (ф.м.р.) системы $Lu=0$, если её элементы Γ_{ij}, $i,j=\overline{1,m}$, являются непрерывными функциями в своей области определения, и для любой финитной и непрерывной (вектор)-функции $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, $h=(h_1,\ldots,h_m)^{\text{т}}$, и любого $\tau_0\in[0,T)$ (вектор)-функция (потенциал Пуассона)

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau_0)h(\xi)\,d\xi,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in[\tau_0,T],$$

является классическим ограниченным решением задачи Коши

$$Lu=0\quad \text{в}\quad \mathbb{R}\times(\tau_0,T], u(x,\tau_0)=h(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

удовлетворяющим (в случае $m\geqslant 2$) при любом $\varepsilon\in(0,T-\tau_0]$ условиям

$$|\partial_x^l u(x,t)|\leqslant C(\varepsilon),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[\tau_0+\varepsilon,T],\quad l=1,2, \tag{2}$$

для некоторой постоянной $C(\varepsilon)$.

Из результатов работы [14] о единственности решения задачи Коши для параболических систем следует единственность ф.м.р. системы $Lu=0$, если $m\geqslant 2$. В случае $m=1$ требование (2) можно опустить и воспользоваться теоремой о единственности решения задачи Коши для одного уравнения (см. [2, с. 29]).

Пусть

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sigma x}\exp(-\sigma^2A_2(\xi,\tau)t)\,d\sigma,\quad (x,t)\in D,\quad (\xi,\tau)\in\overline{D}.$$

Имеют место следующие оценки (см. [15, с. 298]):

$$|\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant C(k,l)t^{-(2k+l+1)/2}\exp(-cx^2/t), \tag{3}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))|\leqslant C(k,l)\{\omega_0(|\Delta\xi|)+\omega_0(|\Delta\tau|^{1/2})\}t^{-(2k+l+1)/2}\exp(-cx^2/t), \tag{4}$$

где $(x,t)\in D$, $(\xi,\tau),(\xi+\Delta\xi,\tau+\Delta\tau)\in\overline{D}$, $k,l\geqslant 0$.

Известно (см. [16], если $m=1$, и [17], если $m\geqslant 2$), что при выполнении условий (a) и (b) у системы $Lu=0$ существует ф.м.р. $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$. При этом столбцы матрицы $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ при любых фиксированных $(\xi,\tau)\in\mathbb{R}\times[0,T)$ удовлетворяют по переменным (x,t) системе $Lu=0$ в полосе $\mathbb{R}\times(\tau,T]$ и справедливы оценки

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\},\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,\quad 2k+l\leqslant 2.$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m, коэффициентов оператора L и модуля непрерывности ω_1, введённого ниже (см. (12)). Кроме того, для разности

$$W(x,t;\xi,\tau)\equiv\Gamma(x,t;\xi,\tau)-Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau)),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*,$$

имеют место неравенства

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),\quad 2k+l\leqslant 2, \tag{5}$$

$$|\Delta_t \partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}(t-\tau)^{-3/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \quad l=0,1, \tag{6}$$

где $x,\xi\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T, \quad \Delta t\leqslant t-\tau$.

В частности, для оператора

$$L_1u=\partial_t u - A_2(x,t)\partial_x^2 u - A_1(x,t)\partial_x u$$

ф.м.р. $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$ системы $L_1u=0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)=Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau))+W_1(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*, \tag{7}$$

где для слагаемого W_1 выполнены оценки (5), (6). Отметим равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_1(x,t;\xi,0)\,d\xi=E, \quad (x,t)\in\overline{D}, \tag{8}$$

где E – единичная матрица.

Для ф.м.р. $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ в дальнейшем будут полезны представление

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)+W_2(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*, \tag{9}$$

где

$$W_2(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;y,\eta)A_0(y,\eta)\Gamma_1(y,\eta;\xi,\tau)\,dy,$$

и оценки

$$|\partial_x^l W_2(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{(1-l)/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \quad l=0,1, \tag{10}$$

$$|\Delta_t W_2(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C\Delta t\biggl|\ln\biggl(\frac{\Delta t}{T}\biggr)\biggr|(t-\tau)^{-1/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{11}$$

где $x,\xi\in\mathbb{R}, \ 0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T, \ \Delta t<t-\tau$.

В полосе D рассматриваем полуограниченную область $\Omega=\{(x,t)\in D: x>g(t), \ t\in\in(0,T)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma=\{(x,t)\in D: x=g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию

$$g\in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \quad \omega_1\in\mathcal{D}. \tag{12}$$

В области Ω рассмотрим первую начально-краевую задачу

$$Lu=f, \quad (x,t)\in\Omega; \quad u(x,0)=h(x), \quad x\geqslant g(0); \quad u(g(t),t)=\psi(t), \quad t\in[0,T]. \tag{13}$$

Основное содержание настоящей работы составляет

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (a), (b) и (12). Предположим, что $f\in C^0(\overline{D})$ и существует модуль непрерывности $\omega\in\mathcal{D}$ такой, что*

$$\sup_{\substack{(x+\Delta x,t),(x,t)\in D\\ \Delta x\neq 0}}\frac{|\Delta_x f(x,t)|}{\omega(|\Delta x|)}<\infty.$$

Тогда для любых функций $h\in C^1(\mathbb{R})$ и $\psi:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ с условием $\psi-h(g(0))\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ существует (единственное) решение $u\in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ задачи (13), которое имеет вид суммы (векторных) параболических потенциалов

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi+\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_{0}^{t}\Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv Ph(x,t) + Vf(x,t) + U\varphi(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{14}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ *– единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры первого рода*

$$\int\limits_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(t) - Ph(g(t),t) - Vf(g(t),t), \quad t \in [0,T]; \tag{15}$$

и справедлива оценка

$$\|u;\Omega\|^{1,0} \leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1 + \|f;D\|^0 + \|\psi - h(g(0));[0,T]\|^{1/2}\}. \tag{16}$$

Замечание 3. Единственность решения задачи (13) следует из работы [9].

Замечание 4. Если $h \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi \in H^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, и $\psi(0) = h(g(0))$, то условия теоремы 1 для (вектор)-функций h и ψ выполнены, причём имеет место оценка

$$\|\psi - h(g(0));[0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^{1/2+\omega}.$$

Замечание 5. В случае $f \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $h \equiv 0$ на $\mathbb{R}$ теорема 1 доказана в статье [8].

Замечание 6. Если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T]$, причём модуль непрерывности ω_1 не удовлетворяет условию (1), то решение задачи (13) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ может не существовать. В самом деле, пусть $T \in (0,1)$ и

$$g(t) = (T-t)^{1/2}\omega_1((T-t)^{1/2}), \quad t \in [0,T],$$

$$\omega_1(z) = (\ln(1/z))^{-1}, \quad 0 < z \leqslant T^{1/2}, \quad \omega_1(0) = 0.$$

Пусть $u \in C(\overline{\Omega})$ – классическое решение начально-краевой задачи

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \quad (x,t) \in \Omega; \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0); \quad u|_\Sigma = \psi(t),$$

где $\psi \in C[0,T]$ – строго убывающая функция, причём $\psi(T) < 0$. Тогда в силу теоремы 2 из [18]

$$\lim_{x\to 0+} \partial_x u(x,T) = +\infty.$$

Замечание 7. Для любых (вектор)-функций f и h, удовлетворяющих условиям теоремы 1, сумма (векторных) параболических потенциалов (см. (14))

$$u(x,t) = Ph(x,t) + Vf(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D},$$

является классическим решением задачи Коши

$$Lu = f, \quad (x,t) \in D; \quad u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При этом $u \in C^{1,0}(\overline{D})$, справедливо равенство

$$\partial_x Ph(x,0) = h'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и имеет место оценка

$$\|u;D\|^{1,0} \leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1 + \|f;D\|^0\}.$$

2. След потенциала Пуассона на кривой Σ.

Лемма 1. *Пусть* $\psi \in \underset{0}{C}[0,T] \bigcap C^1(0,T]$, *причём*

$$|\psi'(t)| \leqslant t^{-1/2}\omega(t^{1/2}), \quad t \in (0,T],$$

где ω *– некоторый модуль непрерывности. Тогда* $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{17}$$

Фиксируем произвольное значение $t_0 \in (0,T]$. Достаточно доказать справедливость формулы (17) для $t \in [t_0,T]$.

Пусть $t \in [t_0,T]$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $1/n < t_0/2$ положим

$$I_n(t) = \int\limits_{1/n}^{t-1/n} \tau^{-1/2}\psi(t-\tau)\,d\tau.$$

Справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} I_n(t) = \int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t \in [t_0,T], \tag{18}$$

и

$$I_n'(t) = (t-1/n)^{-1/2}\psi(1/n) + \int\limits_{1/n}^{t-1/n} \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau \equiv (t-1/n)^{-1/2}\psi(1/n) + \Psi_n(t),$$

причём в силу условий на функцию ψ

$$(t-1/n)^{-1/2}\psi(1/n) \to 0, \quad n\to\infty,$$

равномерно по $t \in [t_0,T]$. Кроме того, $\Psi_n \in C[t_0,T]$, $n \in \mathbb{N}$, $1/n < t_0/2$, и последовательность $\Psi_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [t_0,T]$ к интегралу

$$\int\limits_0^t \tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau$$

в силу неравенства

$$\left|\left(\int\limits_0^{1/n} + \int\limits_{t-1/n}^t\right)\tau^{-1/2}\psi'(t-\tau)\,d\tau\right| \leqslant C(t_0)\omega(\sqrt{1/n}), \quad t \in [t_0,T].$$

Отсюда и из (18) следует формула (17) и включение

$$\partial^{1/2}\psi \in C(0,T].$$

Равенство $\partial^{1/2}\psi(0) = 0$ получаем после этого из (17). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $h \in C^1(\mathbb{R})$. *Тогда для функции* $Ph(g(t),t)$, $t \in [0,T]$, *имеют место представление*

$$Ph(g(t),t) = h(g(0)) + \hat{h}(t), \quad t \in [0,T],$$

где $\hat{h} \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, *и оценка*

$$\|\hat{h};[0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|h;\mathbb{R}\|^1.$$

Доказательство. Воспользовавшись равенствами (7)–(9), запишем функцию $Ph(g(t),t)$ в виде

$$Ph(g(t),t) = h(g(0)) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(g(t),t;\xi,0)[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_2(g(t),t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi =$$

$$= h(g(0)) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [Z(g(0)-\xi,t;A_2(\xi,0)) - Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))][h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [Z(g(t)-\xi,t;A_2(\xi,0)) - Z(g(0)-\xi,t;A_2(\xi,0))][h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_1(g(t),t;\xi,0)[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_2(g(t),t;\xi,0)h(\xi)\,d\xi \equiv h(g(0)) + \sum_{i=1}^{5} P_i(t).$$

Докажем, что $P_i \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, $i=\overline{1,5}$.

Рассмотрим слагаемое P_1, для которого выполнены условия леммы 1. В самом деле, из условий на функцию h следует, что $P_1 \in \underset{0}{C}[0,T] \bigcap C^1(0,T]$. Далее имеем

$$P_1'(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_t Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))[h(\xi)-h(g(0))]\,d\xi =$$

$$= \biggl(\int\limits_{|\xi-g(0)|\leqslant 1} + \int\limits_{|\xi-g(0)|\geqslant 1}\biggr) A_2(g(0),0)\partial_x Z(g(0)-\xi,t;A_2(g(0),0))[h'(\xi)-h'(g(0))]\,d\xi, \quad t>0.$$

Отсюда, в силу условий на функцию h, следует оценка

$$|P_1'(t)| \leqslant C_h \biggl\{ \int\limits_{|\xi-g(0)|\leqslant 1} t^{-1}\omega_{h'}(|g(0)-\xi|)\exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_{|\xi-g(0)|\geqslant 1} t^{-1}\exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\,d\xi \biggr\} \leqslant C_h[t^{-1/2}\omega_{h'}(t^{1/2})+1] \leqslant C_h t^{-1/2}\omega_{h'}(t^{1/2}), \quad t>0,$$

где $\omega_{h'}$ – модуль непрерывности функции h' на отрезке $[g(0)-1, g(0)+1]$. Здесь и далее $C_h = C\|h;\mathbb{R}\|^1$. Таким образом, в силу леммы 1 $P_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$.

Далее докажем, что $P_i \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, $i=\overline{2,5}$. Для этого достаточно установить, что $P_i \in \underset{0}{H}^{1/2+\omega_i}[0,T]$, где $\omega_i \in \mathcal{D}$, $i=\overline{2,5}$, – некоторые модули непрерывности.

Рассмотрим P_2. В силу условий на h и оценок (4) имеем

$$|P_2(t)| \leqslant C_h \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2}|g(0)-\xi|\omega_0(|g(0)-\xi|)\exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\,d\xi \leqslant C_h t^{1/2}\omega_0(t^{1/2}); \qquad (19)$$

$$|\Delta_t P_2(t)| \leqslant C_h \Delta t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} |g(0)-\xi| \omega_0(|g(0)-\xi|) \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_h (\Delta t)^{1/2} \omega_0((\Delta t)^{1/2}), \quad 0 < \Delta t < t < t+\Delta t \leqslant T. \tag{20}$$

Из оценок (19) и (20) следует, что $P_2 \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_0}[0,T]$.

Рассмотрим слагаемое P_3. Здесь и далее пользуемся неравенством $(a-b)^2 \geqslant a^2/2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$. В силу условий на h и соотношений (3), (12) имеем

$$|P_3(t)| \leqslant C_h t^{1/2} \omega_1(t^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1} |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \leqslant C_h t^{1/2} \omega_1(t^{1/2}); \tag{21}$$

$$|\Delta_t P_3(t)| \leqslant C_h \biggl[(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1} |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi +$$

$$+ \Delta t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} \omega_1(t^{1/2}) |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi\biggr] \leqslant$$

$$\leqslant C_h (\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}), \quad 0 < \Delta t < t < t+\Delta t \leqslant T. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что $P_3 \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_1}[0,T]$.

Рассмотрим теперь P_4. Из условий на функцию h и соотношений (5), (6), (12) следуют неравенства

$$|P_4(t)| \leqslant C_h t^{1/2} \widetilde{\omega}_0(t^{1/2}); \tag{23}$$

$$|\Delta_t P_4(t)| \leqslant C_h \biggl\{(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1} |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi +$$

$$+ \Delta t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} \widetilde{\omega}_0(t^{1/2}) |g(0)-\xi| \exp\biggl(-c\frac{(g(0)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi\biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant C_h (\Delta t)^{1/2} \{\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2})\}, \quad 0 < \Delta t < t < t+\Delta t \leqslant T. \tag{24}$$

Из оценок (23) и (24) следует, что $P_4 \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega_4}[0,T]$, $\omega_4 = \omega_1 + \widetilde{\omega}_0$.

Наконец, рассмотрим слагаемое P_5. В силу условий на h и соотношений (10)–(12) имеем

$$|P_5(t)| \leqslant C_h t^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-c\frac{(g(t)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi \leqslant C_h t; \tag{25}$$

$$|\Delta_t P_5(t)| \leqslant C_h \biggl\{(\Delta t)^{1/2} \omega_1((\Delta t)^{1/2}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl(-c\frac{(g(t)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi +$$

$$+ \Delta t \biggl|\ln\biggl(\frac{\Delta t}{T}\biggr)\biggr| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{-1/2} \exp\biggl(-c\frac{(g(t)-\xi)^2}{t}\biggr)\, d\xi\biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant C_h(\Delta t)^{1/2}\{\omega_1((\Delta t)^{1/2})+(\Delta t)^{1/4}\},\quad 0<\Delta t<t<t+\Delta t\leqslant T. \tag{26}$$

Из оценок (25) и (26) следует, что $P_5 \in \underset{0}{H}^{1/2+\omega_5}[0,T]$, $\omega_5(z)=\omega_1(z)+z^{1/2}$, $z\geqslant 0$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1.

Лемма 2 (см. [19]). *Пусть для оператора L выполнены условия (a), (b). Тогда для любой функции $f\in C^0(\overline{D})$ объёмный потенциал Vf (см. (14)) удовлетворяет оценкам*

$$|\partial_x^l Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0 t^{1-l/2},\quad l=0,1,$$

$$|\Delta_t Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0|\Delta t|(1+|\ln|\Delta t||),$$

$$|\Delta_t\partial_x Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0|\Delta t|^{1/2},$$

$$|\Delta_x\partial_x Vf(x,t)|\leqslant C\|f;D\|^0|\Delta x|(1+|\ln|\Delta x||),\quad (x,t),(x+\Delta x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{D}.$$

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 2 и $\hat f(t)=Vf(g(t),t)$, $t\in[0,T]$. Тогда*

$$\hat f\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T] \tag{27}$$

и справедлива оценка

$$\|\hat f;[0,T]\|^{1/2}\leqslant C\|f;D\|^0. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 1. Решение u задачи (13) будем искать в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+Ph(x,t)+Vf(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}. \tag{29}$$

Положим

$$\hat\psi(t)=\psi(t)-Ph(g(t),t)-Vf(g(t),t),\quad t\in[0,T].$$

В силу условий на функцию ψ, леммы 2, соотношений (27), (28) и теоремы 2 имеем

$$\hat\psi\in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T], \tag{30}$$

$$\|\hat\psi;[0,T]\|^{1/2}\leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1+\|f;D\|^0+\|\psi-h(g(0));[0,T]\|^{1/2}\}.$$

Замена (29) в силу включения (30) сводит задачу (13) к поиску (вектор)-функции v такой, что

$$Lv=0,\quad (x,t)\in\Omega;\quad v(x,0)=0,\quad x\geqslant g(0);\quad v(g(t),t)=\hat\psi(t),\quad t\in[0,T]. \tag{31}$$

Из работ [7, 8] следует, что существует решение задачи (31) из пространства $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$, причём оно имеет вид потенциала простого слоя

$$v(x,t)=\int\limits_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Omega},$$

где $\varphi\in \underset{0}{C}[0,T]$ – единственное в $C[0,T]$ решение системы граничного интегрального уравнения (15), и справедлива оценка

$$\|v;\Omega\|^{1,0}\leqslant C\{\|h;\mathbb{R}\|^1+\|f;D\|^0+\|\psi-h(g(0));[0,T]\|^{1/2}\}.$$

Отсюда следует (см. замечание 7), что задача (13) имеет решение u из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$, и для него справедливы представление (14) и оценка (16). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
4. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
5. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
6. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
8. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
9. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2. С. 26–29.
10. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
11. *Камынин Л.И.* О гладкости тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
12. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
13. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
14. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
16. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
17. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
18. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
19. *Тверитинов В.А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений // Деп. ВИНИТИ АН СССР. 15.11.89. № 6906–В89.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 05.06.2022 г.
После доработки 05.06.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1344–1352

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6+517.929

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

© 2022 г. А. Н. Зарубин

Исследуется задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе в главной части с параллельными линиями изменения типа в неограниченной области. Доказаны теоремы единственности и существования дважды непрерывно дифференцируемого решения.

DOI: 10.31857/S0374064122100053, EDN: KQDVAB

Введение. Известный метод решения задачи Трикоми, основанный на её редукции к сингулярному интегральному уравнению (см. [1, с. 79]), может быть применён и к некоторым уравнениям смешанного типа с запаздывающими аргументами, когда найдены их общие решения [2].

Предлагаемая работа изучает задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с сосредоточенным некарлемановским сдвигом по пространственной переменной вида

$$(\operatorname{sgn} y(h-y))U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=H(x-\tau)[U_x(x-\tau,y)+U(x-\tau,y)], \tag{1}$$

$0<\tau\equiv\mathrm{const}$; $H(\zeta)$ – функция Хевисайда; в области $D=D^+\bigcup D_1^-\bigcup D_2^-\bigcup I$, где $D^+\{(x,y):$ $0<x<+\infty,\ \ 0<y<h\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}D_k^+(0<h\equiv\mathrm{const})$; $D_i^-=\{(x,y):x>0,\ \ -x-(i-1)h<$ $<(-1)^{i+1}y<(1-i)h\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}D_{ik}^-\bigcup(D_i^-\setminus\bigcup_{k=0}^{+\infty}D_{ik}^-)$, $i=1,2$, – эллиптическая и гиперболическая части области D, причём

$$D_k^+=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,0<y<h\},\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$D_{ik}^-=\{(x,y):k\tau+(-1)^iy+(1-i)h<x<(k+1)\tau+(-1)^{i+1}y+(i-1)h,$$
$$(1-i)h+(-1)^{2i-1}\tau/2<(-1)^{i+1}y<(1-i)h\},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad i=1,2,$$

а

$$I=I_1\bigcup I_2,\quad I_i=\{(x,y):x>0,\ \ y=(i-1)h\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}I_{ik},$$
$$I_{ik}=\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,\ \ y=(i-1)h\},\quad i=1,2.$$

1. Постановка задачи. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовём функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap C^2(D)$, имеющую непрерывные производные в D, кроме, быть может, точек $(0,0)$, $(0,h)$, в которых производные $U_x(x,y)$, $U_y(x,y)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы.

Задача *T*. Найти регулярное в области D решение $U(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}U(x,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{3}$$

$$U(x,y)|_{y=(-1)^ix+(i-1)h}=\psi_i(x),\quad x\geqslant 0,\quad i=1,2,\quad \psi_i(0)=\psi_i(+\infty)=0, \tag{4}$$

$$U(x,(i-1)h-)=U(x,(i-1)h+)=\omega_i(x), \quad x\geqslant 0, \quad i=1,2, \tag{5}$$

$$U_y(x,(i-1)h-)=U_y(x,(i-1)h+)=\nu_i(x), \quad x>0, \quad i=1,2, \tag{6}$$

где $\psi_i(x)$, $i=1,2$, – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega_i(x)$, $\nu_i(x)$, $i=1,2$, – неизвестные функции, подлежащие определению в процессе решения задачи.

2. Однозначная разрешимость задачи T.

Теорема. *Если функции $\psi_i(x)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$ абсолютно интегрируемы на промежутке $(0,+\infty)$ и $\psi_i(0)=\psi_i(+\infty)=0$, то существует единственное регулярное решение задачи T.*

Доказательство. Единственность решения задачи T основана на установлении знакоопределённости интеграла $\beta=\beta_1-\beta_2$, $\beta_i=\int_0^{+\infty}\omega_i(x)\nu_i(x)\,dx$, $i=1,2$.

Лемма 1. *Если $U(x,y)$ – решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C(\overline{D}^+)\bigcap C^2(D^+)$, обращающееся в нуль при $x=0$, $x\to+\infty$, $0\leqslant y\leqslant h$, то*

$$\beta\leqslant 0 \tag{7}$$

и

$$\beta+\iint\limits_{D^+}\bigg\{U_y^2(x,y)+H(x-\tau)\Big[U_x(x-\tau,y)+\frac{1}{2}U(x,y)\Big]^2+\frac{1}{4}[2-H(x-\tau)]U^2(x,y)+$$
$$+\frac{1}{2}H(x-\tau)\bigg[\bigg(\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2-\bigg(\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2\bigg]\bigg\}\,dx\,dy=0. \tag{8}$$

Доказательство следует из тождества

$$U(x,y)[U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)-H(x-\tau)U_x(x-\tau,y)-H(x-\tau)U(x-\tau,y)]=$$
$$=(U(x,y)U_x(x,y))_x-U_x^2(x,y)+(U(x,y)U_y(x,y))_y-U_y^2(x,y)-$$
$$-H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y)-H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)=0,$$

интегрируя которое по области $D_{\varepsilon\rho}^+=\{(x,y):\varepsilon<x<\rho,\ 0<y<h\}$, $0<\varepsilon<\rho\equiv\mathrm{const}$, применяя формулу Грина [3, с. 541] и условия леммы, в пределе при $\varepsilon\to 0$, $\rho\to+\infty$ в силу (5), (6) и равенств

$$\iint\limits_{D^+}[U_x^2(x,y)+H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y)]\,dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_{D^+}\bigg\{U_x^2(x,y)-H(x-\tau)U_x^2(x-\tau,y)+H(x-\tau)\Big[U_x(x-\tau,y)+\frac{1}{2}U(x,y)\Big]^2-$$
$$-\frac{1}{4}H(x-\tau)U^2(x,y)\bigg\}\,dx\,dy=\iint\limits_{D^+}H(x-\tau)\bigg\{\Big[U_x(x-\tau,y)+\frac{1}{2}U(x,y)\Big]^2-\frac{1}{4}U^2(x,y)\bigg\}\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{D^+}H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D^+}H(x-\tau)U^2(x-\tau,y)\,dx\,dy+$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^+}H(x-\tau)\{U^2(x,y)-[U(x,y)-U(x-\tau,y)]^2\}\,dx\,dy=$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D^+} U^2(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\bigg[\bigg(\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2 - \bigg(\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2\bigg]\,dx\,dy$$

получим (8).

Так как

$$\iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\bigg[\bigg(\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2 - \bigg(\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2\bigg]\,dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{D^+} H(x-\tau)\bigg[\bigg(\int\limits_0^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\bigg)^2 - \bigg(\int\limits_{x-\tau}^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\bigg)^2\bigg]\,dx\,dy \geqslant 0,$$

то из (8) следует неравенство (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $U(x,y)\in C(\overline{D}_i^-)\bigcap C^2(D_i^-)$ *– решение уравнения (1) в области* D_i^-, *обращающееся в нуль на характеристике* $y=(-1)^i x+(i-1)h$, $x>0$, $i=1,2$, *то*

$$\beta \geqslant 0. \tag{9}$$

Доказательство следует из тождества

$$U(x,y)[-U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)-H(x-\tau)U_x(x-\tau,y)-H(x-\tau)U(x-\tau,y)] =$$

$$= -(U(x,y)U_x(x,y))_x + U_x^2(x,y) + (U(x,y)U_y(x,y))_y - U_y^2(x,y) -$$

$$- H(x-\tau)U_x(x-\tau,y)U(x,y) - H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y) = 0,$$

интегрируя которое по области

$$D_{i\varepsilon}^- = \{(x,y): x>\varepsilon,\ \ -x-(i-1)h < (-1)^{i+1}y < -\varepsilon-(i-1)h\},\quad 0<\varepsilon\equiv\mathrm{const},\quad i=1,2,$$

с применением формулы Грина [3, с. 541] и условий леммы, в пределе при $\varepsilon\to 0$ в силу (5) и (6) имеем

$$(-1)^{i+1}\int\limits_0^{+\infty}\omega_i(x)\nu_i(x)\,dx = \iint\limits_{D_i^-}[U_y^2(x,y)-U_x^2(x,y)+$$

$$+ H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y) + H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)]\,dx\,dy,\quad i=1,2. \tag{10}$$

Так как

$$\iint\limits_{D_i^-} H(x-\tau)U_x^2(x-\tau,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_i^-} U_x^2(x,y)\,dx\,dy,$$

а $U_x(x-\tau,y)\sim (U(x,y)-U(x-\tau,y))/\tau$ при $x\to x-\tau$ (см. [4, с. 100]), т.е. $U_x(x-\tau,y) = \alpha(x)(U(x,y)-U(x-\tau,y))/\tau$, $\lim\limits_{x\to x-\tau}\alpha(x)=1$, $\alpha(x)>0$ (см. [3, с. 130]), причём

$$\bigg(\frac{1}{2}U(x,y)-U_x(x-\tau,y)\bigg)^2 = \bigg(\frac{1}{2}U(x,y)-\frac{\alpha(x)}{\tau}(U(x,y)-U(x-\tau,y))\bigg)^2 =$$

$$= \bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta - \frac{\alpha(x)}{\tau}\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2 = \bigg(\bigg(\frac{1}{2}-\frac{\alpha(x)}{\tau}\bigg)\int\limits_{x-\tau}^x U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x-\tau} U_\zeta(\zeta,y)\,d\zeta\bigg)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{x-\tau}^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x-\tau}|U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\bigg)^2 = \bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^x |U_\zeta(\zeta,y)|\,d\zeta\bigg)^2 = \frac{1}{4}U^2(x,y),$$

то

$$\iint\limits_{D_i^-}[-U_x^2(x,y)+H(x-\tau)U(x,y)U_x(x-\tau,y)]\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D_i^-}\Big[-U_x^2(x,y)+\frac{1}{4}H(x-\tau)U(x,y)U^2(x,y)+H(x-\tau)U_x^2(x-\tau,y)-$$

$$-H(x-\tau)\bigg(\frac{1}{2}U(x,y)-U_x(x-\tau,y)\bigg)^2\bigg]\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D_i^-}H(x-\tau)\bigg[\frac{1}{4}U^2(x,y)-\bigg(\frac{1}{2}U(x,y)-U_x(x-\tau,y)\bigg)^2\bigg]\,dx\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\iint\limits_{D_i^-}H(x-\tau)\bigg[\frac{1}{4}U^2(x,y)-\frac{1}{4}U^2(x,y)\bigg]\,dx\,dy=0. \tag{11}$$

Кроме того, аналогично лемме 1 имеет место неравенство

$$\iint\limits_{D_i^-}H(x-\tau)U(x,y)U(x-\tau,y)\,dx\,dy\geqslant 0. \tag{12}$$

Поэтому в силу (11), (12) из равенств (10) имеем $(-1)^{i+1}\int_0^{+\infty}\omega_i(x)\nu_i(x)\,dx=(-1)^{i+1}\beta_i\geqslant 0$, $i=1,2,$ т.е. $\beta=\beta_1-\beta_2\geqslant 0$. Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству единственности решения задачи T. Из неравенств (7), (9) следует, что $\beta=0$, а потому из (8) получим положительно определённый двойной интеграл, равный нулю, и значит, $U_x(x,y)\equiv 0$, $U_y(x,y)\equiv 0$, т.е. $U(x,y)\equiv\mathrm{const}$ в D^+.

Однородность граничных условий в области D^+ и $U(x,y)\in C(\overline{D}^+)$ позволяет утверждать, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}^+$ и, в частности, $U(x,(i-1)h)=\omega_i(x)=0$, $x\geqslant 0$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (4) обеспечивает тривиальность решения $U(x,y)\equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D_i^-}$, $i=1,2$. Значит, в силу того, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}^+$ и в $\overline{D_i^-}$, $i=1,2$, следует, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}=\overline{D^+\bigcup D_1^-\bigcup D_2^-}$. Поэтому единственность решения задачи T для уравнения (1) с граничными условиями (2)–(6) в области $\overline{D}$ доказана.

Существование решения. Вопрос существования решения задачи T связан с разрешимостью системы функциональных соотношений относительно функций (5), (6), т.е. $\omega_i(x)$ и $\nu_i(x)$, $i=1,2$, привнесённых специальным образом на линии изменения типа $I_i=\{(x,y):x>0,\ y=(i-1)h\}$, $i=1,2$, из области D^+ и D_i^- решениями:

1) в эллиптической области D^+ задачи Дирихле (1)–(3), (5) для уравнения (1);

2) в гиперболической области D_i^-, $i=1,2$, задачи Коши (1), (5), (6) для уравнения (1).

Решения задач Дирихле и Коши будем искать по аналогии с работой [2] с помощью непосредственно проверяемого общего решения уравнения (1) вида

$$U^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(x,y)=\bigg\{U^{\pm}_{\left\{\substack{k\\ ik}\right\}}(x,y):(x,y)\in\overline{D}^{\pm}_{\left\{\substack{k\\ ik}\right\}},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad i=1,2\bigg\}, \tag{13}$$

здесь $(x,y)\in D^{\pm}$, $D^-=D_1^-\bigcup D_2^-$,

$$U^{\pm}_{\left\{\substack{k\\ ik}\right\}}(x,y)=\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}\Phi^{\pm}_{\left\{\substack{0\\ i}\right\}}(x,y), \tag{14}$$

где

$$\Phi^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(x,y) = g^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}\left(x - y\sqrt{-\operatorname{sgn} y(h-y)}\right) + f^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}\left(x + y\sqrt{-\operatorname{sgn} y(h-y)}\right), \tag{15}$$

а

$$I^m_{0,x-m\tau;\alpha}\Phi^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(x,y) = \frac{2}{\Gamma(m)}\int\limits_0^{x-m\tau} \eta((x-m\tau+\alpha)^2 - (\eta+\alpha)^2)^{m-1}\Phi^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(\eta,y)d\eta \tag{16}$$

– интеграл Эрдейи–Кобера [5, с. 246], причём $I^0_{0,x;0}\Phi^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(x,y) = \Phi^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(x,y)$ – тождественный оператор Эрдейи–Кобера; $\gamma_{mj} = (j!(m-j)!2^{2m})^{-1}$; $\Gamma(t)$ – гамма-функция [6, с. 246]; $g^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(t)$, $f^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(t)$, $i = 1,2$, – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Для определения функций $g^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(t)$, $f^{\pm}_{\left\{ {0 \atop i} \right\}}(t)$, $i = 1,2$, в формуле (15) для задачи Дирихле и задачи Коши воспользуемся соответственно условиями (5) и (5), (6).

В результате из (13) и (14) получим интегро-разностное уравнение

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}Z^{\Theta}(x) = \Theta(x), \tag{17}$$

где $\Theta(x) = \omega_1(x), \omega_2(x)$ для задачи Дирихле, причём

$$Z^{\omega_1}(x) = \Phi^+_0(x,0) = g^+_0(x) + f^+_0(x), \tag{18}$$

$$Z^{\omega_2}(x) = \Phi^+_0(x,h) = g^+_0(x-ih) + f^+_0(x+ih), \quad i = \sqrt{-1}; \tag{19}$$

или $\Theta(x) = \omega_j(x), \nu_j(x)$, $j = 1,2$, для задач Коши, когда

$$Z^{\omega_j}(x) = \Phi^-_j(x,(j-1)h) = g^-_j(x-(j-1)h) + f^-_j(x+(j-1)h), \tag{20}$$

$$Z^{\nu_j}(x) = \Phi^-_{jy}(x,(j-1)h) = -g^{-\prime}_j(x-(j-1)h) + f^{-\prime}_j(x+(j-1)h), \quad j = 1,2, \tag{21}$$

а

$$Z^{\Theta}(x) = \{Z^{\Theta}_k(x) : k\tau \leqslant x \leqslant (k+1)\tau, \quad k = 0,1,2,\ldots\}. \tag{22}$$

Интегро-разностное уравнение (17) после обращения (см. [2]) приводит к решению вида (22), в котором

$$Z^{\Theta}_k(x) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}(-1)^m\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}Z^{\Theta}(x). \tag{23}$$

Лемма 3. Если выполняются условия $\omega_j(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\omega_j(0) = \omega_j(+\infty) = 0$, $j = 1,2$, то решение $U^+_0(x,y)$ задачи Дирихле (1)–(3), (5) для уравнения (1) в области D^+ существует, причём $U^+_0(x,y) \in C(\overline{D}^+)\bigcap C^2(D^+)$.

Доказательство. Из системы (18), (19) получим разностное уравнение

$$f^+_0(x) = R^{2ih}_x f^+_0(x) + \beta(x),$$

где $\beta(x) = R^{ih}_x Z^{\omega_2}(x) - R^{2ih}_x Z^{\omega_1}(x)$, R^{τ}_x – оператор сдвига, действующий по переменной x : $R^{\tau}_x q(x) = q(x-\tau)$, единственное решение которого, найденное в статье [7] методом последовательных приближений, имеет вид

$$f^+_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^{2ihn}_x\beta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^{ih(2n+1)}_x Z^{\omega_2}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} R^{2ih(n+1)}_x Z^{\omega_1}(x).$$

Тогда, согласно равенствам (18),

$$f_0^+(x) = Z^{\omega_1}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{ih(2n+1)} Z^{\omega_2}(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} R_x^{2ih(n+1)} Z^{\omega_1}(x).$$

Значит, в силу формулы (15) будем иметь

$$\Phi_0^+(x,y) = g_0^+(x-iy) + f_0^+(x+iy) = \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]}\} Z^{\omega_2}(x) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-(h-y)]} - R_x^{i[h(2n+1)+(h-y)]}\} Z^{\omega_1}(x), \quad i = \sqrt{-1}. \tag{24}$$

Можно показать, что при выполнении условий леммы на функции $\omega_j(x)$, $j = 1, 2$, ряды в (24) равномерно сходятся на промежутке $[0, +\infty)$, и их возможно почленно дифференцировать по x и y дважды. Выражение (13) с функциями (14) для $U_0^+(x,y), (x,y) \in D^+$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), (5), так как функции $z^{\omega_j}(x) \in C[0,+\infty) \bigcap C^2(0,+\infty)$ абсолютно интегрируемы на $[0,+\infty)$, $z^{\omega_j}(0) = Z^{\omega_j}(+\infty) = 0$, $j = 1, 2$, и операторы Эрдейи–Кобера (16) этих функций ограничены (см. [5, с. 246]).

Интегральное представление решения (13) с функциями (14) и (24) задачи Дирихле в области D^+ найдём исходя из того, что любая непрерывная на луче $[0, +\infty)$ функция имеет вид (см. [8, с. 254])

$$r(x) = (r(\zeta), \delta(\zeta - x) - \delta(\zeta + x)) = \int_0^{+\infty} r(\zeta)[\delta(\zeta - x) - \delta(\zeta + x)]\, d\zeta, \tag{25}$$

где

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\lambda z)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z}\, d\lambda \tag{26}$$

– дельта-функция Дирака.

Действительно, для первого ряда выражения (24) в силу (25), (26) и формул (5.4.12.4), (2.5.46.8) из [9] имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \{R_x^{i[h(2n+1)-y]} - R_x^{i[h(2n+1)+y]}\} Z^{\omega_2}(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_2}(\zeta)\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda(\zeta - x)} - e^{-i\lambda(\zeta + x)}) \mathrm{sh}\,(\lambda y) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda h(2n+1)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_2}(\zeta)\, d\zeta \int_0^{+\infty} (\cos \lambda(\zeta - x) - \cos \lambda(\zeta + x)) \frac{\mathrm{sh}\,(\lambda y)}{\mathrm{sh}\,(\lambda h)}\, d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(y\pi/h)}{2h} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_2}(\zeta) \left[\frac{1}{\mathrm{ch}\,((\zeta - x)\pi/h) + \cos(y\pi/h)} - \frac{1}{\mathrm{ch}\,((\zeta + x)\pi/h) + \cos(y\pi/h)}\right] d\zeta.$$

Аналогичные преобразования второго ряда из (24) приводят к искомому интегральному представлению

$$\Phi_0^+(x,y) = \frac{\sin(y\pi/h)}{2h} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{+\infty} Z^{\omega_j}(\zeta) \left[\frac{1}{\mathrm{ch}\,((\zeta - x)\pi/h) + (-1)^j \cos(y\pi/h)} - \right.$$

$$-\frac{1}{\operatorname{ch}\left(((\zeta+x)\pi/h)+(-1)^j\cos(y\pi/h)\right)}\Bigg]\,d\zeta, \tag{27}$$

а само решение U_0^+ задачи Дирихле (1)–(3), (5) в области D^+ в интегральной форме будет определяться равенствами (13), (14), (27). Лемма доказана.

Функциональное соотношение между функциями $Z^{\nu_j}(x)$ и $Z^{\omega_j}(x)$, привнесённое из области D^+ на линию $y=(j-1)h$, $0\leqslant x<+\infty$, $j=1,2$, найдём, воспользовавшись условием (6) в формулах (13), (14), (27), из интегро-дифференциально-разностного уравнения типа (17):

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}({\Phi^+_{0y}}'(x,y)|_{y=(n-1)h})=\nu_n(x),\quad n=1,2,$$

решение которого (см. [2]) имеет вид

$${\Phi^+_{0y}}'(x,y)|_{y=(n-1)h}=Z^{\nu_n}(x),\quad 0<x<+\infty,\quad n=1,2, \tag{28}$$

где функция $Z^{\nu_n}(x)$ определяется аналогично решению (22), в котором следует заменить $\Theta(x)$ на $\nu_n(x)$, $n=1,2$,

Дифференцируя выражение (27) (предварительно проинтегрировав по частям) по y, полагая $y=(n-1)h$, $n=1,2$, из (28) получим искомое функциональное соотношение

$$(-1)^{n+1}Z^{\nu_n}(x)=\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_n}(\zeta))'\left[\operatorname{cth}\left(\frac{(\zeta-x)\pi}{2h}\right)-\operatorname{cth}\left(\frac{(\zeta+x)\pi}{2h}\right)\right]d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_k}(\zeta))'\left[\operatorname{th}\left(\frac{(\zeta-x)\pi}{2h}\right)-\operatorname{th}\left(\frac{(\zeta+x)\pi}{2h}\right)\right]d\zeta,\quad n,k=1,2,\quad n\neq k,\quad 0<x<+\infty,$$

или

$$(-1)^{n+1}Z^{\nu_n}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x\pi/h)}{h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_n}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\operatorname{ch}(\zeta\pi/h)-\operatorname{ch}(x\pi/h)}+$$

$$+\frac{\operatorname{sh}(x\pi/h)}{h}\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_k}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\operatorname{ch}(\zeta\pi/h)+\operatorname{ch}(x\pi/h)},\quad n,k=1,2,\quad n\neq k,\quad 0<x<+\infty. \tag{29}$$

Лемма 4. *Если выполняются условия* $\omega_j(x)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\nu_j(x)\in C^1(0,+\infty)$, $\omega_j(0)=\omega_j(+\infty)=0$, *то решение* $U_j^-(x,y)$, $j=1,2$, *задачи Коши (1), (5), (6) для уравнения (1) в области* D_j^- *существует, причём* $U_j^-(x,y)\in C(\overline{D_j^-})\bigcap C^2(D_j^-)$, $j=1,2$.

Доказательство. Для построения решения задачи Коши (1), (5), (6) в области D_j^- найдём $g_j^-(x)$, $f_j^-(x)$ из системы (20), (21) в виде

$$g_j^-(x)=\frac12 Z^{\omega_j}(x+(j-1)h)-\frac12\int\limits_0^{x+(j-1)h}Z^{\nu_j}(\zeta)\,d\zeta+\frac{C}{2},$$

$$f_j^-(x)=\frac12 Z^{\omega_j}(x-(j-1)h)+\frac12\int\limits_0^{x-(j-1)h}Z^{\nu_j}(\zeta)\,d\zeta-\frac{C}{2}, \tag{30}$$

где $C\equiv\mathrm{const}$, $j=1,2$.

Подставив значения (30) в формулу (15), получим

$$\Phi_j^-(x,y) = g_j^-(x-y) + f_j^-(x+y) =$$

$$= \frac{1}{2}[Z^{\omega_j}(x-y+(j-1)h) + Z^{\omega_j}(x+y-(j-1)h)] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y+(j-1)h}^{x+y-(j-1)h} Z^{\nu_j}(\zeta)\,d\zeta, \tag{31}$$

где $\Theta(x) = \omega_j(x), \nu_j(x)$, $j=1,2$, $Z^{\Theta}(t)$ определяется равенством типа (22) с функциями (23).

Таким образом, решение задачи Коши (1), (5), (6) определяется выражениями (13), (14), (31). При этом $U_j^-(x,y) \in C(\overline{D}_j^-)\bigcap C^2(D_j^-)$, так как $\omega_j(x) \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\nu_j(x) \in \in C^1(0,+\infty)$, $\omega_j(0) = \omega_j(+\infty) = 0$, абсолютно интегрируемы на $(0,+\infty)$; функции $Z^{\omega_j}(x) \in \in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $Z^{\nu_j}(x) \in C^1(0,+\infty)$, $Z^{\omega_j}(0) = Z^{\omega_j}(+\infty) = 0$, $j=1,2$, абсолютно интегрируемы на промежутке $(0,+\infty)$ и операторы Эрдейи–Кобера этих функций ограничены. Лемма доказана.

Функциональные соотношения между $Z^{\nu_j}(x)$ и $Z^{\omega_j}(x)$, привнесённые из областей D_j^- на линии $y=(j-1)h$, $0 \leqslant x < +\infty$, $j=1,2$, найдём, воспользовавшись условиями (4) в (13), (14), (31), из интегро-дифференциально-разностного уравнения типа (17):

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m}\gamma_{mj}H(x-m\tau)\frac{d^j}{dx^j}I^m_{0,x-m\tau,0}(\Phi_n^-(x,y)|_{y=(-1)^n x+(n-1)h}) = \psi_n(x), \quad n=1,2, \quad 0<x<+\infty,$$

решение которого (см. [2]) имеет вид

$$\Phi_n^-(x,y)|_{y=(-1)^n x+(n-1)h} = Z^{\psi_n}(x), \quad 0<x<+\infty, \tag{32}$$

где $Z^{\psi_n}(x)$ определяется аналогично (22), если там заменить $\Theta(x)$ на $\psi_n(x)$, $n=1,2$.

С учётом в (32) выражения (31) после замены x на $x/2$ и дифференцирования получим искомое функциональное соотношение

$$(Z^{\omega_n}(x))' + (-1)^n Z^{\nu_n}(x) = Z\frac{d}{dx}(Z^{\psi_n}(x/2)), \quad x>0, \quad n=1,2. \tag{33}$$

Вопрос существования решения $U(x,y)$ задачи T для уравнения (1) в области D связан с разрешимостью системы функциональных соотношений (29), (33) между $Z^{\omega_n(x)}$ и $Z^{\nu_n(x)}$, $n=1,2$, привнесённых на линии $y=(n-1)h$, $x>0$, $n=1,2$, решениями задачи Дирихле (13), (14), (27) и задачи Коши (13), (14), (31), т.е. к сингулярной интегральной системе уравнений

$$(Z^{\omega_n}(x))' - \frac{1}{h}\mathrm{sh}\,(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_n}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\mathrm{ch}\,(\zeta\pi/h) - \mathrm{ch}\,(x\pi/h)} -$$

$$- \frac{1}{h}\mathrm{sh}\,(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_k}(\zeta))'\frac{d\zeta}{\mathrm{ch}\,(\zeta\pi/h) + \mathrm{ch}\,(x\pi/h)} = \beta_n(x), \quad x>0, \tag{34}$$

где $\beta_n(x) = 2\dfrac{d}{dx}(Z^{\psi_n}(x))$, $n,k=1,2$, $n\ne k$, $\beta_n(x) \in C^1(0,+\infty)$.

Складывая и вычитая уравнения системы (34), после преобразований получаем систему

$$(Z^{\omega_1}(x) - (-1)^n Z^{\omega_2}(x))' - \frac{2}{h}\mathrm{sh}\,(x\pi/h)\int\limits_0^{+\infty}(Z^{\omega_1}(\zeta) - (-1)^n Z^{\omega_2}(\zeta))'\frac{\mathrm{ch}\,\{[(n-1)x + (2-n)\zeta]/h\}}{\mathrm{sh}^2(\zeta\pi/h) - \mathrm{sh}^2(x\pi/h)}\,d\zeta =$$

$$= \beta_1(x) - (-1)^n\beta_2(x), \quad x>0, \quad n=1,2, \tag{35}$$

которая после замены переменных и функций по формулам

$$(Z^{\omega_1}(x) - (-1)^n Z^{\omega_2}(x))' = \operatorname{sh}(nx\pi/h)\, r_n(y), \quad y = \operatorname{sh}(x\pi/h),$$
$$\beta_1(x) - (-1)^n \beta_2(x) = \operatorname{sh}(nx\pi/h)\, q_n(y), \quad t = \operatorname{sh}(\zeta\pi/h), \quad n = 1, 2, \tag{36}$$

примет вид

$$r_n(y) - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} r_n(t) \frac{t\,dt}{t^2 - y^2} = q_n(y), \quad y > 0, \quad n = 1, 2. \tag{37}$$

Операция преобразования системы (35) в систему (37) законна ввиду однозначности и монотонности функции $\operatorname{sh}(\pi x/h)$, $0 < x < +\infty$, и условия $q_n(y) \in C^1(0, +\infty)$.

Обращение сингулярной интегральной системы (37) в классе функций $r_n(y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера, проведено в работе [2] и имеет вид

$$r_n(y) = \frac{1}{2}\left[q_n(y) + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{y}} q_n(t) \frac{t\,dt}{t^2 - y^2}\right], \quad y > 0, \quad n = 1, 2,$$

а возврат к старым переменным и функциям по формулам (36) приводит к решению системы уравнений (34), (35)

$$(Z^{\omega_1}(x) - (-1)^n Z^{\omega_2}(x))' = \frac{1}{2}\left[(\beta_1(x) - (-1)^n \beta_2(x)) + \frac{2}{h} \operatorname{sh}(x\pi/h) \int\limits_0^{+\infty} (\beta_1(\zeta) - (-1)^n \beta_2(\zeta)) \times \right.$$
$$\left. \times \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/h)}{\operatorname{sh}(\pi x/h)}} \frac{\operatorname{ch}\{[(n-1)x + (2-n)\zeta]/h\}\, d\zeta}{\operatorname{sh}^2(\pi\zeta/h) - \operatorname{sh}^2(\pi x/h)}\right], \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \tag{38}$$

где $\beta_n(x)$, $n = 1, 2$, – правая часть системы (34).

Из (38) найдём $Z^{\omega_n}(x)$, а из соотношения (33) с помощью (38) получим $Z^{\nu_n}(x)$, $n = 1, 2$.

Подставив в (13), (14), (27) и (13), (14), (31) найденные выражения для $Z^{\omega_n}(x)$ и $Z^{\nu_n}(x)$, $n = 1, 2$, получим окончательный вид соответственно искомых решений задачи Дирихле в области D^+ и задачи Коши в области D_n^-, $n = 1, 2$, а значит, и решение задачи T в области D. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. *Зарубин А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орел, 1999.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. М., 1988.
4. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М., 1999.
5. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.
7. *Зарубин А.Н.* Краевые задачи для функционально-дифференциальных канонических уравнений смешанного типа // Докл. РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 133–137.
8. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М., 1978.
9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.

Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 08.04.2022 г.
После доработки 08.04.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1353–1359

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. В. И. Корзюк, И. И. Столярчук

Рассмотрена первая смешанная задача для волнового уравнения в цилиндрической области. С помощью метода характеристик получена явная формула классического решения данной задачи, а также найдены условия согласования на исходные функции, гарантирующие достаточную гладкость решения во всей области.

DOI: 10.31857/S0374064122100065, EDN: KQGELA

Введение. Смешанные задачи для гиперболических уравнений используются в различных прикладных сферах современной науки. Много работ посвящено исследованию корректной постановки задач для двумерных гиперболических уравнений. Для этих задач доказаны критерии корректности или получены достаточные условия для существования единственного классического решения (см. [1–5]). Однако для уравнений с большим числом независимых переменных таких исследований проведено мало. Например, для задачи Коши для трёхмерного и четырёхмерного волновых уравнений получены формулы Кирхгофа и Пуассона. В книге [6, с. 65–70] выведены формулы для решения задачи Коши в случае произвольной размерности n. В работе [7] с помощью метода Фурье исследована первая смешанная задача для волнового уравнения, при этом вопрос об условиях согласования не изучен.

Возникает вопрос, можно ли получить достаточные условия существования единственного классического решения смешанных задач в случае пространств высоких размерностей и вывести явную формулу данного решения? В данной статье для простейшего случая первой смешанной задачи для четырёхмерного волнового уравнения найдена явная формула решения и выведены необходимые и достаточные условия согласования на значения этих функций и их производных до третьего порядка включительно для существования единственного классического решения поставленной задачи при заданной гладкости исходных функций. Стоит отметить, что в случае четырёх независимых переменных для гладкости решения поставленной задачи требуется более высокая гладкость на исходные функции, чем для первой смешанной задачи для уравнения колебания струны.

1. Постановка задачи. Задача рассматривается на множестве четырёх независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

В области $Q = \{\boldsymbol{x} = (x_0, \boldsymbol{x}') : x_0 \in (0, +\infty), \ \ \boldsymbol{x}' \in \Omega\}$, где $\Omega = \{\boldsymbol{x}' : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \subset \mathbb{R}^3$ – трёхмерный шар в четырёхмерном пространстве, относительно неизвестной функции $u : \mathbb{R}^4 \supset Q \to u(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$ задаётся волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \Delta_{\boldsymbol{x}'} u = 0, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\Delta_{\boldsymbol{x}'} = \sum_{j=1}^{3} \partial^2/\partial {x_j}^2$ – оператор Лапласа.

К уравнению (1) добавляются условия Коши

$$u|_{x_0=0} = \varphi(\boldsymbol{x}'), \quad \partial_{x_0} u|_{x_0=0} = \psi(\boldsymbol{x}'), \tag{2}$$

где $\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \varphi(\boldsymbol{x}') \subset \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \to \psi(\boldsymbol{x}') \subset \mathbb{R}$ – заданные функции. На боковой поверхности $\Gamma = (0; +\infty) \times \partial\Omega$ задаётся граничное условие Дирихле

$$u|_{\Gamma} = \mu(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

здесь $\mu : \mathbb{R}^4 \supset \Gamma \to \mu(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}$ – заданная функция.

2. Операторы осреднения. Для задачи Коши (1), (2) в области $\{(x_0, \boldsymbol{x}') : x_0 \in (0, +\infty),$ $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3\}$ с помощью операторов осреднения доказана теорема о существовании единственного классического решения $u(\boldsymbol{x})$ при достаточной гладкости исходных данных и выведена формула под принятым названием *формула Кирхгофа*, которая даёт аналитическое выражение полученного решения [8, с. 155–157]. Этот же подход применим для первой смешанной задачи (1)–(3).

Рассмотрим оператор

$$J_u(\boldsymbol{x}, r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\boldsymbol{y}|=r} u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=r} u(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}. \tag{4}$$

Оператор J обладает следующими очевидными свойствами, которые фактически задают непрерывность оператора при $r = 0$:

J-1) $J_u(\boldsymbol{x}, 0) = u(\boldsymbol{x})$;

J-2) $\lim\limits_{r\to 0} J_u(\boldsymbol{x}, r) = u(\boldsymbol{x})$.

Наряду с оператором (4) введём оператор $M_r u(\boldsymbol{x}) = r J_u(\boldsymbol{x}, r)$, для которого справедливы следующие свойства:

M-1) $\lim\limits_{r\to 0} M_r u(\boldsymbol{x}) = 0$;

M-2) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{M_r u(\boldsymbol{x})}{r} = u(\boldsymbol{x})$;

M-3) $\dfrac{\partial}{\partial r} M_r u(\boldsymbol{x})\Big|_{r=0} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{M_r u(\boldsymbol{x})}{r} = u(\boldsymbol{x})$.

Утверждение 1. *Функция $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна на множестве своего задания тогда и только тогда, когда существует такая окрестность нуля U_0, что для любого параметра $r \in U_0$ функция $M_r u(\boldsymbol{x})$ непрерывна по переменным r, $\boldsymbol{x}$ и непрерывно-дифференцируема по r.*

Доказательство. Необходимость. Непрерывность функции $u(\boldsymbol{x})$ гарантирует непрерывность функции $M_r u(\boldsymbol{x})$ по переменным $\boldsymbol{x}$. Непрерывность функции $M_r u(\boldsymbol{x})$ по переменной r следует из свойств J-1), J-2), M-2).

Непрерывная дифференцируемость функции $M_r u(\boldsymbol{x})$ по переменной r в U_0 следует из свойства M-3).

Достаточность. Доказательство достаточности следует из свойства M-3). Утверждение доказано.

Также введём оператор осреднения $\tilde{J}$ по сектору сферы $S(\boldsymbol{x}, r)$ – части поверхности сферы, высекаемой телесным углом с величиной $4\pi r/R$, где R – радиус трёхмерного шара Ω, а $|S(\boldsymbol{x}, r)| = 4\pi r R$ – площадь части сферы.

Оператор $\tilde{J}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{J}_u(\boldsymbol{x}, r) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x},1)} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi r R} \int\limits_{\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi r R} \int\limits_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},r)} u(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}.$$

Заметим, что оператор $\tilde{J}$ удовлетворяет свойствам J-1), J-2), а также сохраняет гладкость функции.

3. Решение вспомогательной задачи для уравнения колебания струны. Рассмотрим точку $N(x_0, \boldsymbol{x}')$ с фиксированными пространственными координатами $\boldsymbol{x}'$. Применим к задаче (1)–(3) в точке N оператор M_r по переменным $\boldsymbol{x}'$. В результате задача (1)–(3) сведётся к задаче для уравнения

$$\partial_{x_0}^2 M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') - a^2 \partial_r^2 M_r u(x_0, \boldsymbol{x}') = 0 \tag{5}$$

в области $\widetilde{Q} = \{(x_0, r) : x_0 > 0,\ \ r \in (0, r_N]\}$, где $r_N = d(N, \Gamma)$ – расстояние от точки N до границы Γ, с начальными условиями

$$M_r u|_{x0=0} = M_r\varphi(\boldsymbol{x}') = \overline{\varphi}(r), \quad M_r\partial_{x_0}u|_{x0=0} = M_r\psi(\boldsymbol{x}') = \overline{\psi}(r) \tag{6}$$

и граничными условиями

$$M_r u|_{r=r_N} = \overline{\mu}(x_0) = \tilde{J}_\mu(x_0, \boldsymbol{x}', r_N), \quad M_r u|_{r\to 0} = 0. \tag{7}$$

Задача (5)–(7) представляет собой первую смешанную задачу для одномерного волнового уравнения, заданную в полуполосе относительно функции $v(x_0, r; \boldsymbol{x}') = M_r u(\boldsymbol{x})$. При этом искомая функция из задачи (1)–(3) $u(\boldsymbol{x})$ выражается через решение $v(x_0, r; \boldsymbol{x}')$ задачи (5)–(7) по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial r}v(x_0, r; \boldsymbol{x}') = \lim_{r\to 0}\frac{M_r u(\boldsymbol{x})}{r}, \tag{8}$$

откуда и в силу утверждения 1 следует, что решение u будет принадлежать классу $C^2(\overline{Q})$, если решение v задачи (5)–(7) будет из класса $C^3([0, +\infty) \times [0, r_N])$.

Для задачи (5)–(7) в статье [9] уже доказан критерий существования единственного классического решения из класса $C^3([0, +\infty) \times [0, r_N])$.

Утверждение 2. *Классическое решение задачи (5)–(7) существует и единственно в классе $C^3(\widetilde{Q})$ тогда и только тогда, когда $\overline{\varphi}(r) \in C^3([0, r_N])$, $\overline{\psi}(r) \in C^2([0, r_N])$, $\overline{\mu}(x_0) \in C^3([0, +\infty))$, и выполняются условия согласования*

$$\overline{\varphi}(0) = 0, \quad \overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0), \quad \overline{\psi}(0) = 0, \quad \overline{\psi}(r_N) = d\overline{\mu}(0),$$
$$d^2\overline{\varphi}(0) = 0, \quad d^2\overline{\mu}(0) = a^2d^2\overline{\varphi}(r_N), \quad d^2\overline{\psi}(0) = 0, \quad d^3\overline{\mu}(0) = a^2d^2\overline{\psi}(l). \tag{9}$$

Из формулы (8) следует, что для нахождения решения исходной задачи необходимо найти предел решения вспомогательной задачи (5)–(7) при $r \to 0$ для каждой фиксированной точки N. Это означает, что для $x_0 > 0$ в зависимости от его величины при $r \to 0$ для достаточно малых значений параметра r будет выполняться неравенство $(k+1)r_N - ax_0 < r < ax_0 - kr_N$, $k = 0, 1, \ldots$ В работе [1] для решения задачи (5)–(7) в области, описываемой предыдущим неравенством, приведена рекуррентная формула

$$v^{(k)}(x_0, r; \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}(\overline{\varphi^{(k)}}(r + ax_0 - kr_N) - \overline{\varphi^{(k)}}(-r + ax_0 - kr_N)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N}\overline{\psi^{(k)}}(z)\,dz. \tag{10}$$

Выведем явную формулу решения в данной области.

Значения функций $\overline{\varphi^{(k)}}$, $\overline{\psi^{(k)}}$ находятся из решения $v^{(k-1)}(x_0, r; \boldsymbol{x}')$ по следующим формулам (см. [1]):

$$\overline{\varphi^{(k)}}(r) = v^{(k-1)}(kr_N/a, r; \boldsymbol{x}') = p^{(k-1)}(r - kr_N) + g^{(k-1)}(r + kr_N),$$
$$\overline{\psi^{(k)}}(r) = \partial_{x_0}v^{(k-1)}(kr_N/a, r; \boldsymbol{x}') = -adp^{(k-1)}(r - kr_N) + adg^{(k-1)}(r + kr_N),$$

а функции $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ определяются по формулам

$$p^{(k)}(z) = -\frac{1}{2}\overline{\varphi^{(k)}}(-z - kl) - \frac{1}{2a}\int\limits_{r_N}^{-z-kr_N}\overline{\psi^{(k)}}(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2},$$

$$g^{(k)}(y) = \overline{\mu}\left(\frac{y - r_N}{a}\right) - \frac{1}{2}\overline{\varphi^{(k)}}(2r_N - y + kr_N) + \frac{1}{2a}\int\limits_{r_N}^{2r_N-y+2kr_N}\overline{\psi^{(k)}}(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2}.$$

Из последних выражений следует, что

$$\overline{\varphi^{(k)}}(r) = p^{(k-1)}(r - kr_N) + g^{(k-1)}(r + kr_N) = \overline{\mu}\left(\frac{r + (k-1)r_N}{a}\right) - \overline{\varphi^{(k-1)}}(r_N - r) =$$

$$= \overline{\mu}\left(\frac{r + (k-1)r_N}{a}\right) - \overline{\mu}\left(\frac{(k-1)r_N - r}{a}\right) + \overline{\varphi^{(k-2)}}(r).$$

Продолжив далее этот процесс, получим формулу для произвольного k, которая выражается через известную функцию $\overline{\varphi}$:

$$\overline{\varphi^{(k)}}(r) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) + (-1)^k\overline{\varphi}\left((-1)^k r + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right).$$

Аналогично выводится формула для функции $\overline{\psi^{(k)}}$:

$$\overline{\psi^{(k)}}(r) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j d\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) + (-1)^k\overline{\psi}\left((-1)^k r + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right).$$

Таким образом, решение (10) задачи (5)–(7) для $(k+1)r_N - ax_0 < r < ax_0 - kr_N$ представимо в виде

$$v^{(k)}(x_0, r; \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left(\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\right) - \overline{\mu}\left(\frac{(-1)^{j+1} r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\right)\right) +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2}\left(\overline{\varphi}((-1)^k r + \chi^{(k;N)}(x_0)) - \overline{\varphi}((-1)^{(k+1)} r + \chi^{(k;N)}(x_0))\right) +$$

$$+ \frac{1}{2a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N} d\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j\xi + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2a}\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N}\overline{\psi}\left((-1)^k\xi + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right) d\xi, \tag{11}$$

где

$$\tau_j^{(k;N)}(x_0) = (-1)^j x_0 + \frac{1}{a}(r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor) + (-1)^{j+1}kr_N),$$

$$\chi^{(k;N)}(x_0) = (-1)^k(ax_0 - kr_N) + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right| r_N. \tag{12}$$

4. Вывод формулы для решения первой смешанной задачи в цилиндре. Используя формулу (8), найдём из (11) решение исходной задачи для точек $(x_0, \boldsymbol{x}')$ для каждого фиксированного $\boldsymbol{x}'$. Для этого рассмотрим слагаемые с $\overline{\mu}$, $d\overline{\mu}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ по отдельности.

Слагаемые с $\overline{\varphi}$ преобразуются следующим образом:

$$\frac{(-1)^k}{2}(\overline{\varphi}((-1)^k r + \chi^{(k;N)}(x_0)) - \overline{\varphi}((-1)^{(k+1)} r + \chi^{(k;N)}(x_0))) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2}\lim_{r\to 0}\frac{M_{(-1)^k r + \chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}') - M_{(-1)^{(k+1)} r + \chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{r} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2} \lim_{r\to 0} \frac{M_{(-1)^k r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}') - M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{r} +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{2} \lim_{r\to 0} \frac{M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}') - M_{(-1)^{(k+1)} r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{r} =$$

$$= \frac{\partial M_{\chi^{(k;N)}(r/a)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial r}\bigg|_{r=ax_0} = \frac{\partial M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\varphi(\boldsymbol{x}')}{\partial (ax_0)} = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial_{x_0}}\left(\frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)} \varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}\right).$$

Аналогично случаю с $\overline{\varphi}$ преобразуются слагаемые с $\overline{\mu}$:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left(\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\right) - \overline{\mu}\left(\frac{(-1)^{j+1} r}{a} + \tau_j^{(k;N)}(x_0)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial \tilde{M}_{\tau_j^{(k;N)}(x_0)}\mu(\boldsymbol{x})}{\partial x_0} = \frac{1}{4\pi R a}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_j^{(k;N)}(x_0))} \mu(x_0,\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Слагаемые с $\overline{\psi}$ преобразуются с использованием правила Лопиталя для раскрытия неопределённости вида $[0/0]$ следующим образом:

$$\frac{(-1)^k}{2a}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N} \overline{\psi}\left((-1)^k\xi + \left|\sin\frac{\pi k}{2}\right|\right) d\xi =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2a}\lim_{r\to 0} M_{(-1)^k r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{x}') + M_{(-1)^{(k+1)} r+\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{x}') =$$

$$= \frac{1}{a}M_{\chi^{(k;N)}(x_0)}\psi(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{4\pi a\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)} \psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Аналогично получим для слагаемых с $d\overline{\mu}$:

$$\frac{1}{2a}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \int\limits_{-r+ax_0-kr_N}^{r+ax_0-kr_N} d\overline{\mu}\left(\frac{(-1)^j\xi + r_N((k-1) - 2\lfloor j/2\rfloor)}{a}\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial \tilde{M}_{\tau_j^{(k;N)}(x_0)}\mu(\boldsymbol{x})}{\partial x_0} = \frac{1}{4\pi R a}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_j^{(k;N)}(x_0))} \mu(x_0,\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}.$$

Таким образом, решение (11) задачи (5)–(7) преобразуется к решению задачи (1)–(3):

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial_{x_0}}\left(\frac{1}{\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)} \varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}\right) + \frac{1}{4\pi a\chi^{(k;N)}(x_0)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=\chi^{(k;N)}(x_0)} \psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi R a}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_0} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\tau_j^{(k;N)}(x_0))} \mu(x_0,\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}, \tag{13}$$

где функции τ, χ определены по формуле (12).

5. Условия согласования. В утверждении 2 важную роль играет выполнение условий согласования (9). Найдём эквивалентные условия в терминах исходных функций φ, ψ, μ. Заметим, что некоторые из этих условий, а именно $\overline{\varphi}(0) = 0$, $\overline{\psi}(0) = 0$, $d^2\overline{\varphi}(0) = 0$, $d^2\overline{\psi}(0) = 0$, выполняются автоматически в силу определения оператора M_r.

Рассмотрим условие согласования $\overline{\varphi}(r_N) = \overline{\mu}(0)$. Исходя из определения, имеем

$$\overline{\varphi}(r_N) = M_{r_N}\varphi(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{4\pi r_N} \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$\overline{\mu}(0) = \frac{1}{4\pi R r_N} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \mu(x_0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'},$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \mu(x_0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}. \tag{14}$$

Аналогично выводятся остальные условия согласования:

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \partial_{x_0}\mu(x_0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$a^2 \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \Delta\varphi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \partial^2_{x_0}\mu(x_0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'},$$

$$a^2 \int\limits_{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'|=r_N} \Delta\psi(\boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'} = \frac{1}{R} \int\limits_{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}'\in S(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}', r_N)} \partial^3_{x_0}\mu(x_0, \boldsymbol{y}')\, ds_{\boldsymbol{y}'}. \tag{15}$$

Таким образом, в силу утверждения 2, формулы (13) и выведенных выше условий согласования следует теорема о разрешимости первой смешанной задачи для волнового уравнения в цилиндрической области.

Теорема. *Пусть* $\varphi(\boldsymbol{x}') \in C^3(\overline{\Omega})$, $\psi(\boldsymbol{x}') \in C^2(\overline{\Omega})$, $\mu(\boldsymbol{x}) \in C^3(\Gamma)$. *Классическое решение задачи (1)–(3) существует, единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *и может быть найдено в точках* $\boldsymbol{x}$, *у которых* $x_0 \in [kr_N/a, (k+1)r_N/a]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *по формуле (13), где* $r_N = d(N, \Gamma)$ – *расстояние от точки* $\boldsymbol{x}$ *до границы* Γ, *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (14), (15).*

Заключение. В данной работе выведена явная формула для решения первой смешанной задачи для четырёхмерного волнового уравнения в цилиндре и получены необходимые и достаточные условия согласования на исходные данные задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1108–1117.
2. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.

3. *Чернятин В.А.* О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 4. С. 717–720.
4. *Барановская С.Н., Юрчук Н.И.* Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.
5. *Шлапакова Т.С., Юрчук Н.И.* Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с производной в краевом условии, направленной не по характеристике // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2013. № 1. С. 64–69.
6. *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск, 2003.
7. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.
8. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М., 2021.
9. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Произвольной гладкости классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна–Гордона–Фока // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 1. С. 34–47.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 05.06.2022 г.
После доработки 29.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1360–1379

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ НА КОМПАКТЕ БОРА

© 2022 г. Е. Ю. Панов

Дана формулировка пространственно почти периодических (в смысле Безиковича) решений вырождающихся нелинейных параболических уравнений в рамках теории дифференциальных уравнений на компактной группе Бора. Введено понятие обобщённого энтропийного решения задачи Коши, доказано его существование и единственность. Для доказательства единственности развит вариант метода Кружкова удвоения переменных. Данная формулировка полезна для описания новых инвариантных преобразований на множестве энтропийных решений (обобщённых сдвигов).

DOI: 10.31857/S0374064122100077, EDN: KQJPCE

Введение. В полупространстве $\Pi = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+ = (0,+\infty),\ \ x \in \mathbb{R}^n\}$ рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \tag{1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$ лишь непрерывен: $\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R})$, $i = \overline{1,n}$, а матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $i,j = \overline{1,n}$. Также предполагается, что матрица $a(u) \geqslant 0$ (неотрицательно определена). У этой матрицы может быть нетривиальное ядро, так что в общем случае (1) – вырождающееся (гиперболическое-параболическое) уравнение. В частном случае при $a \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \tag{2}$$

Формально уравнение (1) записывается в консервативной форме

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0, \tag{3}$$

где матрица $A(u)$ – первообразная для $a(u)$, т.е. $A'(u) = a(u)$, а оператор D_x^2 (дивергенция второго порядка) определяется как

$$D_x^2 \cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u).$$

Уравнение (1) дополним начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{4}$$

Пусть функция $g(u) \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке из множества $\mathbb{R}$. Нам понадобится ограниченный линейный оператор $T_g : C(\mathbb{R})/C \to C(\mathbb{R})/C$, где C обозначает одномерное подпространство постоянных функций, который задаётся с точностью до аддитивной постоянной соотношением

$$T_g(f)(u) = g(u-)f(u) - \int\limits_c^u f(s)dg(s) \tag{5}$$

(изменение параметра c сводится к добавлению константы и не меняет оператора), где $g(u-) = \lim\limits_{v\to u-} g(v)$ – левосторонний предел функции g в точке u, а интеграл в (5) понимается в соответствии с формулой

$$\int\limits_c^u f(s)dg(s) = \operatorname{sign}(u-c)\int\limits_{J(u)} f(s)dg(s),$$

здесь $\operatorname{sign}(u-c)=1$ и $J(u)$ – интервал $[c,u)$, если $u>c$, и $\operatorname{sign}(u-c)=-1$, $J(u)=[u,c)$ при $u\leqslant c$. Отметим, что функция $T_g(f)(u)$ непрерывна даже при разрывной $g(u)$. Например, если $g(u)=\operatorname{sign}(u-k)$, то $T_g(f)(u)=\operatorname{sign}(u-k)(f(u)-f(k))$. Отметим также, что на подпространстве гладких функций $C^1(\mathbb{R})$ оператор T_g определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной равенством $T_g(f)'(u)=g(u)f'(u)$ (в пространстве обобщённых функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Фиксируем представление матрицы диффузии $a(u)$ в форме

$$a(u) = b^{\mathrm{т}}(u)b(u),$$

где $b(u)=(b_{ij}(u))$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,n}$, – $r\times n$-матричнозначная функция с ограниченными измеримыми компонентами, $b_{ij}\in L^\infty(\mathbb{R})$. При $r=n$ мы можем взять $b(u)=(a(u))^{1/2}$. Представление $a(u)=b^{\mathrm{т}}(u)b(u)$ означает, что для всех $j,k=\overline{1,n}$ справедливо равенство

$$a_{jk}(u) = \sum_{i=1}^r b_{ij}(u)b_{ik}(u). \tag{6}$$

Напомним теперь понятие энтропийного решения (э.р.) задачи Коши (1), (4), введённое в работе [1].

Определение 1. Функция $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением задачи (1), (4), если выполнены следующие условия:

(i) для всех $i=\overline{1,r}$ распределение

$$\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$$

(частичная соболевская регулярность), где векторы $B_i(u)=(B_{i1}(u),\ldots,B_{in}(u))\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ таковы, что $B'_{ij}(u)=b_{ij}(u)$, $j=\overline{1,n}$;

(ii) для любой функции $s(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $i=\overline{1,r}$,

$$\operatorname{div}_x T_s(B_i)(u(t,x)) = s(u(t,x))\operatorname{div}_x B_i(u(t,x)) \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Pi)$$

(цепное правило);

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2\cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(u))^2 \leqslant 0 \ \text{ в } \ \mathcal{D}'(\Pi); \tag{7}$$

(iv) $\operatorname*{ess\,lim}\limits_{t\to 0} u(t,\cdot) = u_0$ в пространстве $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Энтропийное соотношение (7) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Pi \Big[\eta(u)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f - f\eta''(u)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(u))^2\Big]\,dt\,dx \geqslant 0, \tag{8}$$

где $D_x^2 f$ – симметричная матрица производных второго порядка функции f по пространственным переменным x (гессиан), а символ “ $\cdot$ ” обозначает обычное скалярное произведение векторов или матриц (так что в случае матриц имеет место равенство $A\cdot B=\operatorname{Tr} A^{\mathrm{T}}B$).

В изотропном случае, когда матрица $A(u)=g(u)E$ скалярна, понятие э.р. было введено ранее в работе [2], и определение э.р. в этом случае значительно упрощается. Для законов сохранения (2) определение 1 сводится к известному определению обобщённого энтропийного решения в смысле С.Н. Кружкова [3]. Подставив $\eta(u)=\pm u$ в (7), получим, что

$$u_t+\operatorname{div}_x\varphi(u)-D_x^2\cdot A(u)=0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т.е. э.р. $u(t,x)$ является слабым решением уравнения (3).

Известно (см., например, [4, предложение 2.1]), что начальное условие можно включить в интегральное энтропийное неравенство, заменив условия (iii), (iv) на одно, эквивалентное им, соотношение: для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ и любой неотрицательной пробной функции $f(t,x)\in C_0^\infty(\bar\Pi)$, где $\bar\Pi=[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$, выполняется неравенство

$$\int\limits_\Pi\biggl[\eta(u)f_t+T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f+T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f-f\eta''(u)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(u))^2\biggr]\,dt\,dx+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))f(0,x)\,dx\geqslant 0. \tag{9}$$

Как показано в [1], в случае непрерывного по Липшицу вектора потока э.р. задачи (1), (4) всегда существует и единственно. В нашем случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а матрица диффузии может вырождаться на целом интервале, свойство единственности может нарушаться, в случае законов сохранения (2) это было показано в работах [5, 6]. В статье [4] установлено существование единственных наибольшего и наименьшего э.р. задачи (1), (4), откуда легко выводится единственность э.р. в случае периодических начальных данных. В работе [7] исследовался более общий случай почти периодической (в смысле Безиковича) начальной функции.

Напомним (см., например, [8, гл. 5, § 10]), что пространство Безиковича $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant 1$ – это замыкание (по указанной ниже норме N_p) тригонометрических многочленов, т.е. конечных сумм $\sum a_\lambda e^{2\pi i\lambda\cdot x}$, $i^2=-1$, $\lambda\in\mathbb{R}^n$, в фактор-пространстве $B^p(\mathbb{R}^n)/B_0^p(\mathbb{R}^n)$, где

$$B^p(\mathbb{R}^n)=\{u\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n): N_p(u)<+\infty\},\quad B_0^p(\mathbb{R}^n)=\{u\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n): N_p(u)=0\},$$

а

$$N_p(u)=\biggl(\limsup_{R\to\infty}R^{-n}\int\limits_{C_R}|u(x)|^p\,dx\biggr)^{1/p}$$

– средняя “ L^p-норма” функции $u=u(x)$. Здесь $C_R=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|_\infty\doteq\max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i|<R/2\}$ – n-мерный куб со стороной $R>0$. Пространство $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$, снабжённое нормой N_p, является банаховым пространством, которое изоморфно пополнению пространства Бора $AP(\mathbb{R}^n)$ равномерно почти периодических функций по норме N_p.

Известно, что пространства $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n)$ сужаются с ростом $p\geqslant 1$ (так что $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ является самым “большим” среди пространств Безиковича), и что для любой функции $u\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ существуют среднее значение

$$⨍\limits_{\mathbb{R}^n}u(x)\,dx\doteq\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int\limits_{C_R}u(x)\,dx,$$

а также более общие коэффициенты Бора–Фурье

$$a_\lambda = \fint_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i \lambda\cdot x}\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним, что множество

$$\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : a_\lambda \neq 0\}$$

называется *спектром почти периодической функции* $u(x,t)$ и является не более чем счётным множеством в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $G(u)$ наименьшую аддитивную подгруппу пространства $\mathbb{R}^n$, содержащую $\mathrm{Sp}\,(u)$, это также счётное множество (конечно, если оно отлично от нулевой подгруппы). В статье [7] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *– ограниченная почти периодическая начальная функция,* $u(t,x)$ *– э.р. задачи (1), (4). Тогда* $u(t,\cdot\,) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и* $G(u(t,\cdot\,)) \subset \subset G(u_0)$ *для п.в.* $t > 0$.

В [7] также доказана и единственность э.р. (в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n))$. В данной работе докажем единственность э.р. в более общей постановке, когда задача (1), (4) формулируется в рамках теории уравнений на боровском компакте $\mathcal{B}_n$.

1. Компактная группа Бора $\mathcal{B}_n$. Известно (см., например, [9, гл. 1, § 8]), что боровский компакт $\mathcal{B}_n$ – это компактная абелева группа, совпадающая со спектром (пространством максимальных идеалов) алгебры $AP(\mathbb{R}^n)$ равномерно почти периодических функций Бора. Имеется непрерывный групповой мономорфизм $b : \mathbb{R}^n \to \mathcal{B}_n$, задаваемый тождеством $\hat f(b(x)) = f(x)$ для всех $f \in AP(\mathbb{R}^n)$, где $f \to \hat f$ – преобразование Гельфанда (так что $\hat f$ "пробегает" все непрерывные функции на $\mathcal{B}_n$). При этом образ b плотен в $\mathcal{B}_n$. Можно показать, что группа $\mathcal{B}_n$ изоморфна $(\mathcal{B}_1)^n$, где $\mathcal{B}_1$ – стандартный "одномерный" боровский компакт. Обозначим через m меру Хаара на $\mathcal{B}_n$, которая представляет собой функционал среднего значения, т.е. для любой почти периодической функции $v(x) \in AP(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathcal{B}_n} \hat v(x)\, dm(x) = \fint_{\mathbb{R}^n} v(x)\, dx.$$

В частности, для любого $p \geqslant 1$ справедливы равенства

$$\int_{\mathcal{B}_n} |\hat v(x)|^p\, dm(x) = \int_{\mathcal{B}_n} (|v(x)|^p)^\wedge\, dm(x) = \fint_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p\, dx,$$

откуда следует, что преобразование Гельфанда допускает единственное непрерывное продолжение до изоморфизма $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathcal{B}_n, m)$, $p \geqslant 1$. Сохраним как обозначение $u \to \hat u$, так и наименование "преобразование Гельфанда" для этого изоморфизма. Как показано в статье [10, лемма 4.1], при преобразовании Гельфанда пространство $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ переходит в пространство $L^\infty(\mathcal{B}_n, m)$. Для полноты изложения приведём это свойство с доказательством.

Лемма 1. *Функция* $u(x)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* $\hat u(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n, m)$.

Доказательство. По свойствам преобразования Гельфанда $\widehat{h(u)} = h(\hat u)$ при всех $u = = u(x) \in AP(\mathbb{R}^n)$, $h = h(u) \in C(\mathbb{R})$. Если функция $h(u)$ непрерывна по Липшицу, то отображения $u \to h(\widehat u)$, $u \to \widehat{h(u)}$ непрерывны на $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$ и совпадают на плотном подпространстве $AP(\mathbb{R}^n)$. Поэтому эти отображения равны, т.е. $\widehat{h(u)} = h(\widehat u)$ для всех $u = u(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, откуда следует, что

$$\fint_{\mathbb{R}^n} h(u(x))\, dx = \int_{\mathcal{B}_n} \widehat{h(u)}(x)\, dm(x) = \int_{\mathcal{B}_n} h(\widehat u(x))\, dm(x).$$

Подставив в это равенство $h(u)=(|u|-M)^+\doteq\max(0,|u|-M)$, $M\geqslant 0$, получим, что

$$\fint_{\mathbb{R}^n}(|u(x)|-M)^+\,dx=\int_{\mathcal{B}_n}(|\hat u(x)|-M)^+\,dm(x). \tag{10}$$

Если $u(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $M=\|u\|_\infty$, то из (10) следует, что $|\hat u(x)|\leqslant M$ m-п.в. на $\mathcal{B}_n$, а значит, $\hat u\in L^\infty(\mathcal{B}_n,m)$, $\|\hat u\|_\infty\leqslant M$. Обратно, если $\hat u\in L^\infty(\mathcal{B}_n,m)$, $M=\|\hat u\|_\infty$, то $\fint_{\mathbb{R}^n}(|u(x)|-M)^+\,dx=0$.

Рассмотрим функцию $v(x)=\max(-M,\min(M,u(x)))\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что $N_1(u-v)=\fint_{\mathbb{R}^n}(|u(x)|-M)^+\,dx=0$. Поэтому функции u и v совпадают в пространстве $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$. Итак, $u\equiv v\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, что и требовалось доказать.

Из доказательства леммы 1 имеем

$$\|\hat u\|_\infty=\min\{\|v\|_\infty : v\in L^\infty(\mathbb{R}^n),\quad v=u \text{ в } \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Для почти периодических функций Бора $u(x)\in AP(\mathbb{R}^n)$ преобразование Гельфанда $\hat u(x)$ является единственным непрерывным продолжением $u(x)$ на $\mathcal{B}_n$, так что $u(x)=\hat u(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Поэтому мы вправе отождествить функции $u(x)$ и $\hat u(x)$ и будем опускать знак $\hat{}$ преобразования Гельфанда. Для элементов пространств Безиковича их продолжение на группу Бора (как функций) рассматривать бессмысленно, поскольку $\mathbb{R}^n$ является, как нетрудно видеть, множеством нулевой m-меры, так что здесь целесообразно сохранить знак преобразования Гельфанда.

Заметим, что коэффициенты Бора–Фурье функции $u(x)$ совпадают с коэффициентами Фурье $\hat u(x)$ по группе характеров $e^{2\pi i\lambda\cdot x}$, $\lambda\in\mathbb{R}^n$, т.е.

$$a_\lambda=\int_{\mathcal{B}_n}\hat u(x)e^{-2\pi i\lambda\cdot x}\,dm(x).$$

Следующее свойство почти периодических функций также хорошо известно (см., например, [10, лемма 4.2]).

Лемма 2. *Пусть $v(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, $g(y)\in C_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}v(x)g(x/R)\,dx=c_g\int_{\mathcal{B}_n}\hat v(x)\,dm(x),$$

где $c_g=\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\,dy$.

Доказательство. Выберем $k>0$ так, что $\operatorname{supp}g$ содержится в кубе C_k и пусть $M=\|g\|_\infty$. Тогда

$$\left|\limsup_{R\to+\infty}R^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}v(x)g(x/R)\,dx\right|\leqslant Mk^n\limsup_{R\to+\infty}(kR)^{-n}\int_{C_{kR}}|v(x)|\,dx=Mk^n\|v\|_{\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ввиду этой оценки и плотности множества тригонометрических многочленов в пространстве $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)=L^1(\mathcal{B}_n,m)$ утверждение леммы достаточно доказать для функций $v(x)=e^{2\pi i\lambda\cdot x}$, $\lambda\in\mathbb{R}^n$. Сделав замену $y=x/R$, получим

$$R^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}v(x)g(x/R)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi iR\lambda\cdot y}g(y)\,dy\underset{R\to+\infty}{\to}\begin{cases}0, & \lambda\neq 0,\\ c_g, & \lambda=0\end{cases}=c_g\int_{\mathcal{B}_n}\hat v(x)\,dm(x),$$

поскольку $e^{2\pi iR\lambda\cdot y}\underset{R\to+\infty}{\rightharpoonup}0$ $*$-слабо в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda\neq 0$. Лемма доказана.

Пусть $H \subset \mathbb{R}^n$ является счётно-мерным линейным подпространством над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ – его базис. Определим соответствующую Λ последовательность ядер Бохнера–Фейера

$$\Phi_r(x) = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbb{Z}^r \\ |\bar{k}|_\infty<(r+1)!}} \prod_{j=1}^{r}\left(1-\frac{|k_j|}{(r+1)!}\right)\exp\left(\frac{2\pi i}{r!}\sum_{j=1}^{r}k_j\lambda_j\cdot x\right) = \frac{1}{((r+1)!)^r}\prod_{j=1}^{r}\frac{\sin^2(\pi(r+1)\lambda_j\cdot x)}{\sin^2(\pi\lambda_j\cdot x/r!)}.$$

Эти ядра являются тригонометрическими многочленами и допускают непрерывное продолжение на группу $\mathcal{B}_n$. Заметим, что $\Phi_r(x) \geqslant 0$ и $\int_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(x)\,dm(x) = 1$. Следующее свойство также содержится в работе [10], приведём его с доказательством.

Лемма 3. *Пусть* $v(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Sp}\,(v) \subset H$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n}|v(x)-v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен $w(x) = \sum_{\lambda\in S}a_\lambda e^{2\pi i\lambda\cdot x}$ такой, что $S = \mathrm{Sp}\,(w) \subset \mathrm{Sp}\,(v)$ и $\|v-w\|_{L^1(\mathcal{B}_n)} < \varepsilon/2$. Так как, очевидно,

$$\big||v(x)-v(y)|-|w(x)-w(y)|\big| \leqslant |v(x)-w(x)|+|v(y)-w(y)|,$$

то

$$\left|\int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n}|v(x)-v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) - \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n}|w(x)-w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(x)-w(x)|\left(\int\limits_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(x-y)\,dm(y)\right)dm(x) + \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(y)-w(y)|\left(\int\limits_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(x-y)\,dm(x)\right)dm(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(x)-w(x)|\,dm(x) + \int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(y)-w(y)|\,dm(y) = 2\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(x)-w(x)|\,dm(x) < \varepsilon. \tag{12}$$

Заметим далее, что

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(x)-w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(y) \leqslant \sum_{\lambda\in S}|a_\lambda|\int\limits_{\mathcal{B}_n}|e^{2\pi i\lambda\cdot x}-e^{2\pi i\lambda\cdot y}|\Phi_r(x-y)\,dy =$$

$$= \sum_{\lambda\in S}|a_\lambda|\int\limits_{\mathcal{B}_n}|e^{2\pi i\lambda\cdot(x-y)}-1|\Phi_r(x-y)\,dm(y) = \sum_{\lambda\in S}|a_\lambda|\int\limits_{\mathcal{B}_n}|e^{2\pi i\lambda\cdot z}-1|\Phi_r(z)\,dm(z) \doteq I_r. \tag{13}$$

Так как функция $h_\lambda(z) = |e^{2\pi i\lambda\cdot z}-1|$ является равномерно почти периодической функцией Бора и её спектр лежит в H, то последовательность средних Бохнера–Фейера сходится равномерно по x к этой функции, т.е.

$$(h_\lambda)_r(x) = \fint\limits_{\mathbb{R}^n}|e^{2\pi i\lambda\cdot(x-z)}-1|\Phi_r(z)dz = \int\limits_{\mathcal{B}_n}h_\lambda(x-z)\Phi_r(z)\,dm(z) \underset{r\to\infty}{\to} h_\lambda(x).$$

В частности,

$$(h_\lambda)_r(0) = \int\limits_{\mathcal{B}_n}h_\lambda(-z)\Phi_r(z)\,dm(z) = \int\limits_{\mathcal{B}_n}h_\lambda(z)\Phi_r(z)\,dm(z) \underset{r\to\infty}{\to} h_\lambda(0) = 0.$$

Отсюда, с учётом конечности множества S, следует, что $I_r \to 0$ при $r \to \infty$. Ввиду (13) последовательность интегралов

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} |w(x) - w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(y) \underset{r\to\infty}{\to} 0$$

равномерно по $x \in \mathcal{B}_n$, поэтому

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |w(x) - w(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = 0.$$

Из последнего соотношения и (12) вытекает оценка

$$\limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |v(x) - v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) \leqslant \varepsilon,$$

откуда, с учётом произвольности $\varepsilon > 0$, и следует равенство (11). Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\omega(r)$ *– непрерывная функция на промежутке* $[0, +\infty)$, *такая что* $\omega(r) \geqslant \omega(0) = 0$, *а* $v(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n, m)$, $\operatorname{Sp}(v) \subset H$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} \omega(|v(x) - v(y)|)\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $M = \|v\|_\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такая константа $C > 0$, что

$$\omega(r) \leqslant \varepsilon + Cr \quad \text{для любого} \quad r \in [0, 2M]. \tag{15}$$

Действительно, выберем $\delta > 0$ так, что $\omega(r) < \varepsilon$ при $0 \leqslant r < \delta$. Легко проверить, что тогда неравенство (15) выполнено при $C = \delta^{-1} \max\limits_{\delta\leqslant r\leqslant 2M} \omega(r)$. В силу (15) и леммы 3 приходим к соотношению

$$\limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} \omega(|v(x) - v(y)|)\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + C \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n} |v(x) - v(y)|\Phi_r(x-y)\,dm(x)\,dm(y) = \varepsilon,$$

и тогда равенство (14) следует из произвольности $\varepsilon > 0$.

2. Распределения на $\mathcal{B}_n$. Уравнение (1) на боровском компакте. Полезно сформулировать уравнение (1) как уравнение на группе $\mathcal{B}_n$, понимаемое в смысле распределений. Введём сначала частные производные f_t, f_{x_i}, $i = \overline{1,n}$, функции $f(t,x)$ на множестве $Q \doteq \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_n$, задаваемые классическими поточечными предельными соотношениями

$$f_t(t,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}, \quad f_{x_i}(t,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t,x+he_i) - f(t,x)}{h},$$

где $t > 0$, $x \in \mathcal{B}_n$, а e_i, $i = \overline{1,n}$, – стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Индуктивно определяются и производные высших порядков

$$D^\alpha f(t,x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_0} t\,\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ – мультииндекс порядка $|\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i$. Стандартным образом определяются пространства $C^r(Q)$, $C_0^r(Q)$. Из инвариантности мер dt и m относительно сдвигов следует, что имеет место равенство

$$\int\limits_Q f_{x_i} g\,dt\,dm(x) + \int\limits_Q f g_{x_i}\,dt\,dm(x) = \int\limits_Q (fg)_{x_i}\,dt\,dm(x) = 0, \quad i = \overline{0,n}, \tag{16}$$

для любых гладких финитных функций $f, g \in C_0^1(Q)$.

Рассмотрим пространство $C_0^\infty(Q)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на Q. Элементы этого пространства можно определить как функции $f(t,x)\in C^\infty(\Pi)$, носитель которых содержится в множестве вида $I\times\mathbb{R}^n$, где $I\subset\mathbb{R}_+$ – отрезок, и у которых все частные производные являются равномерно почти периодическими функциями по пространственным переменным x. Пространство обобщённых функций $\mathcal{D}'(Q)$ определяется как пространство линейных непрерывных функционалов на локально выпуклом пространстве основных функций $C_0^\infty(Q)$. Как обычно, функции $u(t,x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(Q,\,dt\times m)$ вкладываются в $\mathcal{D}'(Q)$ в соответствии с тождеством

$$\langle u,f\rangle=\int\limits_Q u(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x),\quad f=f(t,x)\in C_0^\infty(Q).$$

Стандартным образом определяются обобщённые производные $\langle D^\alpha u,f\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle u,D^\alpha f\rangle$. В случае $u,v=D^\alpha u\in L^1_{\mathrm{loc}}(Q,\,dt\times m)$ справедливо тождество

$$\int\limits_Q u(t,x)D^\alpha f(t,x)\,dt\,dm(x)=(-1)^{|\alpha|}\int\limits_Q v(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x)$$

для любых функций $f(t,x)\in C_0^\infty(Q)$. Заметим, что для обычных производных это тождество легко следует из равенства (16).

Сформулируем понятие э.р. задачи Коши для уравнения (1)

$$v_t+\mathrm{div}_x(\varphi(v)-a(v)\nabla_x v)=0,\quad v=v(t,x),\quad (t,x)\in Q,\tag{17}$$

рассматриваемого на множестве Q, с начальным условием

$$v(0,x)=v_0(x)\in L^\infty(\mathcal{B}_n,m).\tag{18}$$

Следующее определение фактически повторяет определение 1.

Определение 2. Функция $v=v(t,x)\in L^\infty(Q,\,dt\times m)$ называется э.р. задачи (17), (18), если:

(i) для всех $i=\overline{1,r}$ распределение

$$\mathrm{div}_x B_i(v(t,x))\in L^2_{\mathrm{loc}}(Q);$$

(ii) для любой функции $s(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $i=\overline{1,r}$

$$\mathrm{div}_x T_s(B_i)(v(t,x))=s(v(t,x))\mathrm{div}_x B_i(v(t,x))\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(Q);$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(v)_t+\mathrm{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(v)-D_x^2\cdot T_{\eta'}(A)(v)+\eta''(v)\sum_{i=1}^r(\mathrm{div}_x B_i(v))^2\leqslant 0\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(Q);\tag{19}$$

(iv) $\operatorname*{ess\,lim}\limits_{t\to 0} v(t,\cdot)=v_0$ в $L^1(\mathcal{B}_n,m)$.

Заметим, что энтропийное соотношение (19) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $f=f(t,x)\in C_0^\infty(Q)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_Q\Big[\eta(v)f_t+T_{\eta'}(\varphi)(v)\cdot\nabla_x f+T_{\eta'}(A)(v)\cdot D_x^2 f-f\eta''(v)\sum_{i=1}^r(\mathrm{div}_x B_i(v))^2\Big]\,dt\,dm(x)\geqslant 0.\tag{20}$$

Пространство $L^\infty(Q,\,dt\times m)$ по определению состоит из измеримых функций на множестве Q. На самом деле, это довольно сильное ограничение. Например, при $n=1$ ограниченная аналитическая функция $v(t,x)=\sin tx$ при естественном её продолжении на Q (со свойством непрерывности по x) перестаёт быть даже измеримой (по мере $dt\times m$). Действительно, для любой вещественной функции $g(x)\in L^1(\mathcal{B}_1)$ интеграл $\int_{\mathcal{B}_1} v(t,x)g(x)\,dm(x)=0$ для всех t, за исключением не более чем счётного множества $t\in(2\pi)^{-1}\operatorname{Sp}(g)$. Предположив, что функция $v(t,x)$ измерима на Q, получим, что $\int_Q v(t,x)q(t)g(x)\,dt\,dm(x)=0$ при всех $q(t)\in L^1(\mathbb{R}_+)$, $g(x)\in L^1(\mathcal{B}_1)$. Так как конечные линейные комбинации функций $f(t,x)=q(t)g(x)$ плотны в пространстве $L^1(Q)$, приходим к тождеству $\int_Q v(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x)=0$ при всех $f(t,x)\in$ $\in L^1(Q)$, откуда имеем $v(t,x)=0$ $dt\times m$-п.в., что противоречит равенству

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)|^2\,dm(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}_n}(1-\cos 2tx)\,dm(x)=\frac{1}{2}\quad\text{для любого}\quad t>0.$$

3. Существование энтропийного решения. Докажем сначала существование э.р. задачи (17), (18). Для этого выберем функцию $u_0(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что в соответствии с леммой 1 $v_0=\hat{u}_0(x)$. По теореме 1 существует э.р. $u=u(t,x)\in L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n))\bigcap L^\infty(\Pi)$ задачи (1), (4). Положим $v(t,x)=\widehat{u(t,\cdot)}(x)$. Измеримость функции $v(t,x)$ на множестве Q вытекает из следующего ниже результата о её правосторонней непрерывности по временно́й переменной в метрике $L^1(\mathcal{B}_n)$. Определим множество

$$E_1=\{t\geqslant 0:\ (t,x)\ \text{– точка Лебега функции}\ u(t,x)\ \text{для п.в.}\ x\in\mathbb{R}^n\}.$$

Как показано в работе [10, лемма 1.2], E_1 – множество полной меры в $\mathbb{R}_+$ и $t\in E_1$ является общей точкой Лебега функций $t\to\int_{\mathbb{R}^n}u(t,x)\rho(x)\,dx$, $\rho(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ввиду ограниченности $u(t,x)$ множество E_1 не уменьшится при замене $u(t,x)$ на $\eta(u(t,x))$, где $\eta(u)\in C(\mathbb{R})$. Поэтому точки $t\in E_1$ также будут точками Лебега функций $t\to\int_{\mathbb{R}^n}\eta(u(t,x))\rho(x)\,dx$, $\rho(x)\in$ $\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\eta(u)\in C(\mathbb{R})$. Обозначим через E множество значений $t\in E_1$ со свойствами $u(t,\cdot)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $G(u(t,\cdot))\subset G(u_0)$. По теореме 1 множество E имеет полную меру на промежутке $[0,+\infty)$. При этом, как следует из начального условия (iv) определения 1, $0\in E$.

Предложение 1. *При любом $t_0\in E$ справедливо соотношение*

$$\lim_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-v(t_0,x)|\,dm(x)=0. \tag{21}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из энтропийного условия (7) следует, что для любой выпуклой функции $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\eta(u)_t+\operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u)-D_x^2\cdot T_{\eta'}(A)(u)\leqslant 0\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(\Pi). \tag{22}$$

Пусть функция $\rho(s)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp}\rho(s)\subset[0,1]$, $\rho(s)\geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s)ds=1$. Положим при $\nu\in\mathbb{N}$

$$\delta_\nu(s)=\nu\rho(\nu s),\quad \theta_\nu(t)=\int\limits_0^t\delta_\nu(s)ds=\int\limits_0^{\nu t}\rho(s)ds.$$

Очевидно, что последовательность $\delta_\nu(s)$ сходится при $\nu\to\infty$ к δ-мере Дирака слабо в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а последовательность $\theta_\nu(t)$ – поточечно к функции Хевисайда $\theta(t)$. При $t_1>t_0>0$ положим $\chi_\nu(t)=\theta_\nu(t-t_0)-\theta_\nu(t-t_1)$. Тогда $\chi_\nu(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, $0\leqslant\chi_\nu(t)\leqslant 1$ и последовательность $\chi_\nu(t)$ поточечно сходится при $\nu\to\infty$ к индикаторной функции $\chi(t)$ интервала $(t_0,t_1]$. Применим соотношение (22) к пробной функции $f=\chi_\nu(t)p(x)$, где $p(x)\in$ $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x)\geqslant 0$. После элементарных преобразований получим, что

$$\int\limits_\Pi\eta(u)(\delta_\nu(t-t_0)-\delta_\nu(t-t_1))p(x)\,dt\,dx+\int\limits_\Pi[T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x p(x)+T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2p(x)]\chi_\nu(t)\,dt\,dx\geqslant 0.$$

Если $t_0, t_1 \in E$, то эти точки являются точками Лебега функции $I(t) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t,x))p(x)\,dx$, и из полученного выше соотношения в пределе при $\nu \to \infty$ следует неравенство

$$I(t_1) - I(t_0) \leqslant \int\limits_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n} [T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x p(x) + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 p(x)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(t_1 - t_0)\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\nabla p(x)| + |D_x^2 p(x)|)\,dx \tag{23}$$

(здесь и ниже $|v|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора v), где константа

$$C = \max_{|u|\leqslant M}(|T_{\eta'}(\varphi)(u)| + |T_{\eta'}(A)(u)|), \quad M = \|u\|_\infty.$$

Пусть $g = g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h = h(x) \in C^\infty(\mathcal{B}_n)$ (так что сужение этой функции на $\mathbb{R}^n$ является равномерно почти периодической функцией вместе со всеми её частными производными), $g, h \geqslant 0$. При $R > 0$ подставим $p(x) = R^{-n}g(x/R)h(x)$ в (23). Учитывая, что

$$\nabla p(x) = R^{-n}g(x/R)\nabla h(x) + h(x)R^{-n-1}\nabla_y g(x/R), \quad D^2 g(x) = R^{-n}g(x/R)D_x^2 h(x) +$$

$$+ R^{-n-1}(\nabla_y g(x/R)\bigotimes\nabla h(x) + \nabla h(x)\bigotimes\nabla_y g(x/R)) + R^{-n-2}h(x)D_y^2 g(x/R),$$

получим

$$I_R(t_1) - I_R(t_0) \leqslant C(t_1 - t_0)\biggl(R^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|\nabla h(x)| + |D_x^2 h(x)|)g(x/R)\,dx + C_1/R\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant C(t_1 - t_0)[c_g(\|\nabla h\|_\infty + \|D_x^2 h\|_\infty) + C_1/R], \quad C_1 = \mathrm{const}, \tag{24}$$

где обозначено

$$I_R(t) = R^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t,x))h(x)g(x/R)\,dx.$$

Заметим, что $c_g = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy > 0$ (считаем, что $g \not\equiv 0$). Так как $u(t,x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $t = t_0, t_1$, то также и $\eta(u(t,x))h(x) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. По лемме 2 имеем

$$\lim_{R\to+\infty} I_R(t_i) = c_g\int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t,x))h(x)\,dm(x), \quad i = 0, 1.$$

Поэтому из (24) в пределе при $R \to +\infty$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t_1,x))h(x)\,dm(x) - \int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t_0,x))h(x)\,dm(x) \leqslant C_h(t_1 - t_0),$$

$$C_h = C(\|\nabla h\|_\infty + \|D_x^2 h\|_\infty) = \mathrm{const},$$

из которой следует, что

$$\limsup_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t,x))h(x)\,dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} \eta(v(t_0,x))h(x)\,dm(x). \tag{25}$$

Так как любая выпуклая непрерывная функция может быть равномерно на любом отрезке аппроксимирована выпуклыми функциями $\eta(u)\in C^2(\mathbb{R})$, то оценка (25) верна для всех выпуклых $\eta(u)\in C(\mathbb{R})$. В частности, при $\eta(u)=|u-k|$, $k\in\mathbb{R}$, получим, что

$$\limsup_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-k|h(x)\,dm(x)\leqslant\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t_0,x)-k|h(x)\,dm(x). \tag{26}$$

Так как обе части этого неравенства непрерывно зависят от $h\in C^\infty(\mathcal{B}_n)$ по норме $L^1(\mathcal{B}_n)$, в то время как пространство $C^\infty(\mathcal{B}_n)$ плотно в $L^1(\mathcal{B}_n)$, то неравенство (26) справедливо для всех неотрицательных функций $h(x)\in L^1(\mathcal{B}_n)$ и для всех $k\in\mathbb{R}$. Поскольку $v(t_0,x)\in L^\infty(\mathcal{B}_n)\subset$ $\subset L^1(\mathcal{B}_n)$, то для любого $\varepsilon>0$ найдётся ступенчатая функция

$$w(x)=\sum_{i=1}^m k_i\chi_{A_i}(x),$$

где $\chi_{A_i}(x)$ – индикаторные функции разбивающих $\mathcal{B}_n$ и попарно не пересекающихся измеримых множеств $A_i\subset\mathcal{B}_n$, $i=\overline{1,m}$, такая, что $\|v(t_0,x)-w\|_1<\varepsilon$. Из (26) следует, что

$$\limsup_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-w(x)|\,dm(x)=\limsup_{E\ni t\to t_0+}\sum_{i=1}^m\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-k_i|\chi_{A_i}(x)\,dm(x)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^m\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t_0,x)-k_i|\chi_{A_i}(x)\,dm(x)=\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t_0,x)-w(x)|\,dm(x)<\varepsilon,$$

откуда

$$\limsup_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-v(t_0,x)|\,dm(x)\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-w(x)|\,dm(x)+\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(x)-v(t_0,x)|\,dm(x)<2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$

$$\lim_{E\ni t\to t_0+}\int\limits_{\mathcal{B}_n}|v(t,x)-v(t_0,x)|\,dm(x)=0,$$

что и требовалось доказать.

Из соотношения (21) следует, что найдётся последовательность конечных сумм $\sum v_i(x)\chi_i(t)$ (простых функций), где $v_i\in L^\infty(\mathcal{B}_n)$, а $\chi_i(t)$ – индикаторные функции интервалов, которая почти всюду сходится к функции $v(t,x)$. Так как простые функции измеримы на Q, получаем измеримость и предельной функции $v=v(t,x)$. Таким образом, $v\in L^\infty(Q)$. Проверим теперь условия (i), (ii) определения 2.

Предложение 2. *Функция $v=\widehat{u}(t,\cdot)(x)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 2. При этом для всех $i=\overline{1,r}$ распределения*

$$\operatorname{div}_x B_i(v(t,x))=\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}B_{ij}(v(t,x))\in L^2(Q)$$

и для всех $s(u)\in C(\mathbb{R})$, $s(u)\geqslant 0$, $f=f(t,x)\in C_0(Q)$, $f\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$c_g\int\limits_Q s(v(t,x))(\operatorname{div}_x B_i(v(t,x)))^2 f\,dt\,dm(x)\leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{R\to\infty} R^{-n}\int\limits_{\Pi} s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx, \tag{27}$$

где $g(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g\geqslant 0$ *и* $c_g=\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy$.

Доказательство. Применим соотношение (9) с $\eta(u)=u^2/2$ к пробной функции $f = R^{-n}g(x/R)(1-\theta_\nu(t-T))$, где $g(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g\geqslant 0$, $T\in E$. Перейдём затем к пределу при $\nu\to\infty$ и получим неравенство (в котором $\Pi_T=(0,T)\times\mathbb{R}^n$)

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}\sum_{i=1}^r(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 g(x/R)\,dt\,dx - R^{-n-1}\int\limits_{\Pi_T} T_u(\varphi)(u)\cdot(\nabla_y g)(x/R)\,dt\,dx -$$

$$- R^{-n-2}\int\limits_{\Pi_T} T_u(A)(u)\cdot(D_y^2 g)(x/R)\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R^{-n}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^2 g(x/R)\,dx - \frac{R^{-n}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(T,x))^2 g(x/R)\,dx \leqslant \frac{R^{-n}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^2 g(x/R)\,dx.$$

Далее, перейдём в этом неравенстве к пределу при $R\to+\infty$ (тогда последние два интеграла в левой части исчезнут) и с использованием леммы 2 (напомним, что $c_g=\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy$) получим оценку

$$\limsup_{R\to+\infty} R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}\sum_{i=1}^r(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 g(x/R)\,dt\,dx \leqslant \frac{c_g}{2}\|v_0\|^2_{L^2(\mathcal{B}_n,m)}. \tag{28}$$

Пусть теперь $s(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $f(t,x)\in C_0^\infty(Q)$. Тогда $f(t,x)g(x/R)\in C_0^\infty(\Pi)$ при всех положительных R, и из условий (i), (ii) определения 1 следует соотношение

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx =$$

$$= -R^{-n}\int\limits_{\Pi} s(u)\mathrm{div}_x B_i(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx. \tag{29}$$

В частности, из (29) при $s\equiv 1$ с помощью неравенства Коши–Буняковского вытекает оценка

$$R^{-n}\left|\int\limits_{\Pi} B_i(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 g(x/R)\,dt\,dx\right)^{1/2}\left(R^{-n}\int\limits_{\Pi}(f(t,x))^2 g(x/R)\,dt\,dx\right)^{1/2}, \tag{30}$$

где число $T>0$ таково, что $\mathrm{supp}\, f\subset Q_T\doteq(0,T)\times\mathcal{B}_n$. Заметим, что по лемме 2 и теореме Лебега об ограниченной сходимости под знаком интеграла имеют место соотношения

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx = R^{-n}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot(\nabla_x f(t,x))g(x/R)\,dt\,dx +$$

$$+ R^{-n-1}\int\limits_{\Pi} T_s(B_i)(u(t,x))\cdot(\nabla_y g)(x/R)f(t,x)\,dt\,dx \underset{R\to+\infty}{\to} c_g\int\limits_{Q} T_s(B_i)(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x),$$

$$R^{-n}\int\limits_{\Pi}(f(t,x))^2 g(x/R)\,dt\,dx \underset{R\to+\infty}{\to} c_g\int\limits_{Q}(f(t,x))^2\,dt\,dm(x), \tag{31}$$

с учётом которых и неравенства (28) из (30) в пределе при $R\to+\infty$ следует оценка

$$\left|\int\limits_Q B_i(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x)\right|\leqslant C\|f\|_{L^2(Q,\,dt\times m)},\quad C=\|v_0\|_2/\sqrt{2}.$$

Поэтому линейный функционал $f\to-\int_Q B_i(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x)$ непрерывен в норме гильбертова пространства $L^2(Q,\,dt\times m)$ и по теореме Рисса задаётся скалярным произведением с некоторым элементом $w_i=w_i(t,x)\in L^2(Q,\,dt\times m)$. Таким образом,

$$\int\limits_Q B_i(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x)=-\int\limits_Q w_i(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x)\tag{32}$$

для любой функции $f(t,x)\in C_0^\infty(Q)$. Это означает, что в пространстве $\mathcal{D}'(Q)$

$$\operatorname{div}_x B_i(v(t,x))=w_i(t,x)\in L^2(Q,\,dt\times m),$$

что доказывает условие (i), так как $i=\overline{1,r}$ произвольно. Из соотношений (29), (31) (при $s\equiv1$) и тождества (32) следует, что при всех $f=f(t,x)\in C_0^\infty(Q_T)$

$$\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}\operatorname{div}_x B_i(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx=c_g\int\limits_{Q_T}w_i(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x).\tag{33}$$

С учётом оценки (28) обе части равенства (33) непрерывны по f в норме $L^2(Q_T)$, так что это равенство остаётся справедливым для функций $f\in L^2((0,T),\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n))\Leftrightarrow\widehat{f(t,\cdot)}(x)\in L^2(Q_T)$, т.е. справедливо равенство

$$\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int\limits_{\Pi_T}\operatorname{div}_x B_i(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx=c_g\int\limits_{Q_T}w_i(t,x)\widehat{f(t,\cdot)}(x)\,dt\,dm(x).$$

В частности, мы можем подставить $s(u(t,x))f(t,x)$ вместо функции f, получив для любой $f=f(t,x)\in C_0^\infty(Q_T)$ тождество

$$\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int\limits_{\Pi}s(u(t,x))\operatorname{div}_x B_i(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx=c_g\int\limits_{Q}s(v(t,x))w_i(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x).\tag{34}$$

По условию (ii) определения 1 и соотношений (31) левая часть этого тождества совпадает с выражением

$$-\lim_{R\to+\infty}R^{-n}\int\limits_{\Pi}T_s(B_i)(u(t,x))\cdot\nabla_x(f(t,x)g(x/R))\,dt\,dx=-c_g\int\limits_{Q}T_s(B_i)(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x),$$

тогда из (34) следует, что для всех $f=f(t,x)\in C_0^\infty(Q_T)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{Q}T_s(B_i)(v(t,x))\cdot\nabla_x f(t,x)\,dt\,dm(x)=-\int\limits_{Q}s(v(t,x))w_i(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x).$$

Ввиду произвольности $T>0$ имеем

$$\operatorname{div}_x T_s(B_i)(v(t,x))=s(v(t,x))w_i(t,x)=s(v(t,x))\operatorname{div}_x B_i(v(t,x))\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(Q),$$

что доказывает условие (ii).

Для доказательства неравенства (27) выберем последовательность $p_m \in C_0^\infty(Q)$, $m \in \mathbb{N}$, такую, что $p_m \to w_i$ при $m \to \infty$ в $L^2(Q)$. Из соотношения (34) с пробной функцией fp_m вместо f и неравенства Коши–Буняковского (по мере $R^{-n}s(u(t,x))f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx$) следует, что

$$c_g \int\limits_Q s(v(t,x))w_i(t,x)p_m(t,x)f(t,x)\,dt\,dm(x) =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_\Pi s(u(t,x))\mathrm{div}_x B_i(u(t,x))p_m(t,x)f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{R\to+\infty}\biggl(R^{-n} \int\limits_\Pi s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times \biggl(R^{-n} \int\limits_\Pi s(u(t,x))(p_m(t,x))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\liminf_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_\Pi s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times \biggl(c_g \int\limits_Q s(v(t,x))(p_m(t,x))^2 f(t,x)\,dt\,dm(x)\biggr)^{1/2},$$

где мы также воспользовались леммой 2. Из этого неравенства в пределе при $m \to \infty$ вытекает, что

$$c_g \int\limits_Q s(v(t,x))(w_i(t,x))^2 f(t,x)\,dt\,dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant \biggl(\liminf_{R\to+\infty} R^{-n} \int\limits_\Pi s(u(t,x))(\mathrm{div}_x B_i(u(t,x)))^2 f(t,x)g(x/R)\,dt\,dx\biggr)^{1/2} \times$$

$$\times \biggl(c_g \int\limits_Q s(v(t,x))(w_i(t,x))^2 f(t,x)\,dt\,dm(x)\biggr)^{1/2},$$

что эквивалентно неравенству (27). Предложение доказано.

Докажем теперь существование э.р.

Теорема 2. *Функция $v(t,x)$ – э.р. задачи (17), (18).*

Доказательство. По предложению 1 $v(t,x) \in L^\infty(Q)$, а по предложению 2 эта функция удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 2. Кроме того, при $t_0 = 0$ из свойства (21) следует начальное условие (iv). Таким образом, для завершения доказательства остаётся только проверить энтропийное неравенство (iii). Пусть $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta''(u) \geqslant 0$, $f = f(t,x) \in C_0^\infty(Q)$, $f \geqslant 0$. Из интегрального неравенства (8) с пробной функцией $R^{-n}g(x/R)f(t,x)$, где $g(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(y) \geqslant 0$, вытекает соотношение

$$R^{-n} \int\limits_\Pi \biggl[\eta(u)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u)\cdot\nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u)\cdot D_x^2 f -$$

$$- f\eta''(u)\sum_{i=1}^r (\mathrm{div}_x B_i(u))^2\biggr] g(x/R)\,dt\,dx + J(R) \geqslant 0, \qquad (35)$$

где $J(R) \to 0$ при $R \to \infty$. По лемме 2

$$R^{-n} \int\limits_{\Pi} \Big[\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f\Big] g(x/R)\, dt\, dx \underset{R\to\infty}{\to}$$

$$\underset{R\to\infty}{\to} c_g \int\limits_{Q} \Big[\eta(v) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(v) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(v) \cdot D_x^2 f\Big]\, dt\, dm(x),$$

а по свойству (27) при $s(u) = \eta''(u)$

$$\liminf_{R\to\infty} R^{-n} \int\limits_{\Pi} f\eta''(u) \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{div}_x B_i(u))^2 g(x/R)\, dt\, dx \geqslant c_g \int\limits_{Q} f\eta''(v) \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{div}_x B_i(v))^2\, dt\, dm(x).$$

С учётом этих соотношений из (35) в пределе при $R \to \infty$ следует интегральное энтропийное неравенство (20). Теорема доказана.

4. Единственность энтропийного решения. Выберем функцию $s(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами $s'(\sigma) \geqslant 0$, $s(-\sigma) = -s(\sigma)$, $s(\sigma) = \mathrm{sign}\,\sigma$ при $|\sigma| > 1$ и положим $s_\varepsilon(\sigma) = s(\sigma/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, что $s_\varepsilon(\sigma) \to \mathrm{sign}\,\sigma$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть теперь $v, w \in L^\infty(Q)$ – пара функций, удовлетворяющих условиям (i), (ii) определения 2. Следующее свойство, установленное в случае “классического” уравнения (1) в работе [1, лемма 4.2], играет ключевую роль при обосновании метода удвоения переменных.

Предложение 3. *Для любой функции* $f = f(t, x; \tau, y) \in C_0^\infty(Q \times Q)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{Q\times Q} (s_\varepsilon)'(w - v) \sum_{i=1}^{r} \mathrm{div}_x B_i(w) \mathrm{div}_y B_i(v) f\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y) =$$

$$= -\int\limits_{Q\times Q} \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{sign}\,(w - v)(A_{jk}(w) - A_{jk}(v)) f_{x_j y_k}\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y), \tag{36}$$

где $w = w(t, x)$, $v = v(\tau, y)$.

Доказательство. По цепному свойству (ii) для функции $w = w(t, x)$ при всех $i = \overline{1, r}$

$$(s_\varepsilon)'(w - v) \mathrm{div}_x B_i(w) = \mathrm{div}_x T_{s'_\varepsilon(\cdot - v)}(B_i)(w) = \sum_{j=1}^{n} (\psi_{ij}^\varepsilon)_{x_j} \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q \times Q),$$

где

$$\psi_{ij}^\varepsilon = \psi_{ij}^\varepsilon(w, v) = T_{s'_\varepsilon(\cdot - v)} B_{ij}(w) = \int\limits_{v}^{w} s'_\varepsilon(\alpha - v) b_{ij}(\alpha) d\alpha, \quad w = w(t, x), \quad v = v(\tau, y).$$

Перебросив производные на пробную функцию f, имеем

$$I_\varepsilon \doteq \int\limits_{Q\times Q} (s_\varepsilon)'(w - v) \sum_{i=1}^{r} \mathrm{div}_x B_i(w) \mathrm{div}_y B_i(v) f\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y) =$$

$$= -\int\limits_{Q\times Q} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}^\varepsilon(w, v) \mathrm{div}_y B_i(v) f_{x_j}\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y). \tag{37}$$

Используя теперь цепное свойство (ii) для функции $v = v(\tau, y)$, получим соотношение

$$\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,v)\mathrm{div}_y B_i(v) = \mathrm{div}_y T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_i)(v).$$

Подставив это соотношение в (37) и перебросив производные на функции f_{x_j}, придём к равенству

$$I_\varepsilon = \int\limits_{Q\times Q} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j,k=1}^{n} T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) f_{x_j y_k}\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(Q\times Q), \tag{38}$$

в котором

$$T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) = \int\limits_{w}^{v} \psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\beta) b_{ik}(\beta) d\beta. \tag{39}$$

Заметим далее, что функции $\theta(\pm s)s'_\varepsilon(s)$ слабо в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сходятся при $\varepsilon\to 0$ к δ-функции Дирака (т.е. образуют аппроксимативную единицу). Поэтому

$$\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\beta) = \int\limits_{\beta}^{w} s'_\varepsilon(\alpha-\beta) b_{ij}(\alpha) d\alpha \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathrm{sign}\,(w-\beta) b_{ij}(\beta) \quad \text{для п.в.} \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Ввиду ограниченности $\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\beta)$ можно применить теорему Лебега об ограниченной сходимости и получить из (39) предельное соотношение

$$T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathrm{sign}\,(w-v) \int\limits_{w}^{v} b_{ij}(\beta) b_{ik}(\beta) d\beta.$$

Просуммировав по $i=\overline{1,r}$ и использовав равенства (6), $\sum_{i=1}^{r} b_{ij}(\beta)b_{ik}(\beta) = a_{jk}(\beta)$, получим

$$\sum_{i=1}^{r} T_{\psi_{ij}^{\varepsilon}(w,\cdot)}(B_{ik})(v) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathrm{sign}\,(w-v) \int\limits_{w}^{v} a_{jk}(\beta) d\beta = -\mathrm{sign}\,(w-v)(A_{jk}(w) - A_{jk}(v)).$$

Используя это соотношению и теорему Лебега, перейдём к пределу в равенстве (38) и получим желаемое равенство (36):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\int\limits_{Q\times Q} \sum_{j,k=1}^{n} \mathrm{sign}\,(w-v)(A_{jk}(w) - A_{jk}(v)) f_{x_j y_k}\, dt\, dm(x)\, d\tau\, dm(y).$$

Предложение доказано.

Для доказательства единственности э.р. применим параболический вариант метода Кружкова удвоения переменных, развитый в случае анизотропных уравнений (1) в работе [1]. Обобщение на случай уравнений (17) на боровском компакте наталкивается на определённые трудности, связанные с отсутствием аппроксимационной единицы в $\mathcal{D}'(B_n)$. Однако наличия "частичной" аппроксимационной единицы $\Phi_r(z)$, обладающей свойствами аппроксимационной единицы на основных функциях со спектром из заданного рационального подпространства H (в соответствии с леммой 3), оказывается достаточно для обоснования метода удвоения переменных в случае, когда одно из э.р. является преобразованием Гельфанда "обычного" э.р. и потому обладает свойством стабильности спектра. Для законов сохранения (2) это было продемонстрировано в статье [10].

Перейдём к формулировке утверждений. Пусть $v(t,x) = \widehat{u(t,\cdot)}(x)$ – э.р. задачи (17), (18), полученное из э.р. задачи (1), (4) в соответствии с теоремой 2, а $w = w(t,x) \in L^\infty(Q)$ – некоторое э.р. задачи (17), (18) с начальной функцией $w_0(x) \in L^\infty(\mathcal{B}_n)$.

Теорема 3. *Для п.в. $t>0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t,x)-w(t,x)|\,dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v_0(x)-w_0(x)|\,dm(x). \tag{40}$$

В частности, при $w_0=v_0$ из этого свойства следует, что э.р. задачи (17), (18) единственно.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$, $f=f(t,x;\tau,y)\in C_0^\infty(Q\times Q)$. Рассмотрим энтропийное условие (20) для э.р. $w(t,x)$ с энтропией $\eta_\varepsilon(w,v)=\int_v^w s_\varepsilon(\sigma-v)d\sigma$, $v=v(\tau,y)$, где функция $s_\varepsilon(\sigma)=s(\sigma/\varepsilon)$ была определена выше (см. п. 4). Применив это условие к пробной функции f и проинтегрировав по дополнительным переменным (τ,y), получим

$$\int\limits_{Q\times Q} \Big[\eta_\varepsilon(w,v)f_t + T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(\varphi)(w)\cdot\nabla_x f + T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(A)(w)\cdot D_x^2 f -$$
$$- f s_\varepsilon'(w-v)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_x B_i(w))^2\Big]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0.$$

Аналогично, меняя ролями э.р. $w(t,x)$, $v(\tau,y)$ и переменные (t,x), (τ,y), придём к соотношению

$$\int\limits_{Q\times Q} \Big[\eta_\varepsilon(v,w)f_\tau + T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(\varphi)(v)\cdot\nabla_y f + T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(A)(v)\cdot D_y^2 f -$$
$$- f s_\varepsilon'(w-v)\sum_{i=1}^r(\operatorname{div}_y B_i(v))^2\Big]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0,$$

здесь использована также чётность функции $s_\varepsilon'(\sigma)$. Складывая полученные соотношения, получаем неравенство

$$\int\limits_{Q\times Q}[(\eta_\varepsilon(w,v)f_t+\eta_\varepsilon(v,w)f_\tau)+(T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(\varphi)(w)\cdot\nabla_x f+T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(\varphi)(v)\cdot\nabla_y f)+$$
$$+(T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(A)(w)\cdot D_x^2 f+T_{s_\varepsilon(\cdot-w)}(A)(v)\cdot D_y^2 f)]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{Q\times Q} f s_\varepsilon'(w-v)\sum_{i=1}^r[(\operatorname{div}_x B_i(w))^2+(\operatorname{div}_y B_i(v))^2]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant$$
$$\geqslant 2\int\limits_{Q\times Q} f s_\varepsilon'(w-v)\sum_{i=1}^r \operatorname{div}_x B_i(w)\cdot\operatorname{div}_y B_i(v)\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y), \tag{41}$$

где последнее неравенство является следствием неравенства Коши $a^2+b^2\geqslant 2ab$. Перейдём в (41) к пределу при $\varepsilon\to 0$. Нетрудно проверить, что для любой функции $g(u)\in C(\mathbb{R})$

$$T_{s_\varepsilon(\cdot-v)}(g)(w)=\int\limits_v^w(g(w)-g(\sigma))s_\varepsilon'(\sigma-v)d\sigma \underset{\varepsilon\to0}{\to} \operatorname{sign}(w-v)(g(w)-g(v)).$$

Кроме того, очевидно, что $\eta_\varepsilon(w,v)\underset{\varepsilon\to0}{\to}|w-v|$ (это также следует из предыдущего соотношения при $g(u)=u$). В силу симметричности этих предельных величин относительно (w,v) получим, что левая часть (41) сходится при $\varepsilon\to0$ к интегралу

$$\int\limits_{Q\times Q}[|w-v|(\partial_t+\partial_\tau)f+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f+$$
$$+\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(D_x^2+D_y^2)f]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y).$$

Правая же часть сходится к

$$-2\int\limits_{Q\times Q}\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)$$

по предложению 3. Итак, из (41) в пределе при $\varepsilon\to 0$ вытекает неравенство

$$\int\limits_{Q\times Q}\biggl[|w-v|(\partial_t+\partial_\tau)f+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f+ \\ +\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(D_x^2+D_y^2)f+ \\ +2\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}\biggr]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0. \tag{42}$$

Поскольку с учётом симметричности матрицы A

$$\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(D_x^2+D_y^2)f+2\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))f_{x_jy_k}=$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))(f_{x_jx_k}+f_{y_jy_k}+f_{x_jy_k}+f_{x_ky_j})=$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}\operatorname{sign}(w-v)(A_{jk}(w)-A_{jk}(v))(\partial_{x_j}+\partial_{y_j})(\partial_{x_k}+\partial_{y_k})f=$$

$$=\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)\bigotimes(\nabla_x+\nabla_y)f,$$

то можно записать (42) в виде

$$\int\limits_{Q\times Q}[|w-v|(\partial_t+\partial_\tau)f+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f+ \\ +\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)\bigotimes(\nabla_x+\nabla_y)f]\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0. \tag{43}$$

Пусть $\Phi_r(x)$, $r\in\mathbb{N}$, – последовательность ядер Бохнера–Фейера, построенная по базису $\mathbb{Q}$-линейного пространства H, содержащего $\operatorname{Sp}(v_0)$, а $\delta_\nu(s)$, $\nu\in\mathbb{N}$, – последовательность (аппроксимативная единица), определённая при доказательстве предложения 1. Возьмём в (43) функцию $f=f(t,x;\tau,y)=g(t,x)\delta_\nu(\tau-t)\Phi_r(y-x)$, где $g=g(t,x)\in C_0^\infty(Q)$, $g\geqslant 0$. Учитывая, что

$$(\partial_t+\partial_\tau)\delta_\nu(\tau-t)=0,\quad (\nabla_x+\nabla_y)\Phi_r(y-x)=0,\quad (\nabla_x+\nabla_y)\bigotimes(\nabla_x+\nabla_y)g=D_x^2g,$$

получим

$$\int\limits_{Q\times Q}[|w-v|g_t+\operatorname{sign}(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_xg+ \\ +\operatorname{sign}(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2g]\delta_\nu(\tau-t)\Phi_r(y-x)\,dt\,dm(x)\,d\tau\,dm(y)\geqslant 0. \tag{44}$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу сначала при $\nu\to\infty$. Очевидны следующие оценки:

$$||w-v|-|w-v_1||\leqslant|v-v_1|,$$

$$|\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))-\mathrm{sign}\,(w-v_1)(\varphi(w)-\varphi(v_1)|\leqslant 2\omega_\varphi(|v-v_1|),$$
$$|\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))-\mathrm{sign}\,(w-v_1)(A(w)-A(v_1))|\leqslant 2\omega_A(|v-v_1|), \tag{45}$$

в которых $w=w(t,x)$, $v=v(\tau,y)$, $v_1=v(t,y)$, а

$$\omega_\varphi(r)=\max_{\substack{u,v\in[-M,M]\\ |u-v|\leqslant r}}|\varphi(u)-\varphi(v)|,\quad \omega_A(r)=\max_{\substack{u,v\in[-M,M]\\ |u-v|\leqslant r}}|A(u)-A(v)|$$

– модули непрерывности $\varphi(u)$ и $A(u)$ на отрезке $[-M,M]$, $M=\max(\|w\|_\infty,\|v\|_\infty)$. Далее, из свойства непрерывности в среднем легко вывести соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\omega(|v(t,y)-v(\tau,y)|)h(t)\delta_\nu(\tau-t)\,dt\,d\tau=0\quad \text{для п.в.}\quad y\in\mathcal{B}_n,$$

справедливое для любой непрерывной в нуле функции $\omega(r)$, такой что $0=\omega(0)\leqslant\omega(r)$, и любой неотрицательной функции $h(t)\in C_0(\mathbb{R})$. Это свойство и оценки (45) позволяют перейти к пределу при $\nu\to\infty$ в (44) и получить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n}[|w-v|g_t+\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_x g+$$
$$+\,\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2 g]\Phi_r(y-x)\,dt\,dm(x)\,dm(y)\geqslant 0, \tag{46}$$

где $w=w(t,x)$, $v=v(t,y)$. Снова используя неравенства (45) при $w=w(t,x)$, $v=v(t,y)$, $v_1=v(t,x)$ и лемму 3 вместе с её следствием (заметим, что по теореме 1 $\mathrm{Sp}\,(v(t,\cdot))\subset G(v_0)\subset$ $\subset H$ для п.в. $t>0$), получим, что при замене $v=v(t,y)$ на $v(t,x)$ предел при $r\to\infty$ левой части неравенства (46) не меняется (так как $\int_{\mathcal{B}_n}\Phi_r(y-x)\,dm(y)=1$) равен

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\times\mathcal{B}_n}[|w-v|g_t+\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_x g+\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2 g]\,dt\,dm(x),$$

где $w=w(t,x)$, $v=v(t,x)$. Итак, в пределе при $r\to\infty$ из (46) следует, что для всех $g=g(t,x)\in C_0^\infty(Q)$, $g\geqslant 0$, выполняется неравенство

$$\int\limits_Q[|w-v|g_t+\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))\cdot\nabla_x g+\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))\cdot D_x^2 g]\,dt\,dm(x)\geqslant 0, \tag{47}$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}|w-v|+\mathrm{div}_x[\mathrm{sign}\,(w-v)(\varphi(w)-\varphi(v))]-D_x^2\cdot[\mathrm{sign}\,(w-v)(A(w)-A(v))]\leqslant 0\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(Q).$$

Подставив в (47) пробную функцию $g=g(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $g\geqslant 0$, получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\bigg(\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(t,x)-v(t,x)|\,dm(x)\bigg)g'(t)\,dt\geqslant 0.$$

Это соотношение означает, что $I'(t)\leqslant 0$ в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, где

$$I(t)=\int\limits_{\mathcal{B}_n}|w(t,x)-v(t,x)|\,dm(x).$$

Поэтому для п.в. $t > 0$

$$I(t) \leqslant I(0) \doteq \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} I(t) = \int\limits_{\mathcal{B}_n} |w_0(x) - v_0(x)|\, dm(x), \tag{48}$$

где учтены начальные условия (18) для э.р. w, v. Очевидно, что (48) совпадает с неравенством (40). Теорема доказана.

Как видно из определения 2 и инвариантности меры Хаара m, множество э.р. уравнения (17) инвариантно относительно сдвигов на элементы $h \in \mathcal{B}_n$ (а не только на элементы "физического" пространства $\mathbb{R}^n$). Заметим, что значения характеров $e^{2\pi i\lambda\cdot x}$ в точке h определяют мультипликативный функционал $\mu_h(\lambda)$ на $\mathbb{R}^n$ со значениями в единичной комплексной окружности и сдвиг функции $S_h u(x) = u(x+h)$ сводится к умножению коэффициентов Фурье a_λ функции u на $\mu_h(\lambda)$. Интересно, что при $h \notin \mathbb{R}^n$ функционал μ_h даже не измерим по Лебегу. Из теоремы 3 при $w = v(t, x+h)$ следует, что э.р. $v(t,x)$ удовлетворяет для п.в. $t > 0$ неравенствам

$$\int\limits_{\mathcal{B}_n} |v(t, x+h) - v(t,x)|\, dm(x) \leqslant \int\limits_{\mathcal{B}_n} |v_0(x+h) - v_0(x)|\, dm(x), \quad h \in \mathcal{B}_n.$$

В частности, если начальная функция v_0 инвариантна относительно сдвига на h, т.е. $v_0(x+h) = v_0(x)$ m-п.в. на $\mathcal{B}_n$, то и э.р. v задачи (17), (18) обладает этим же свойством инвариантности: $v(t, x+h) = v(t,x)$ п.в. на Q.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00344).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen G.-Q., Perthame B.* Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20. P. 645–668.
2. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems // Arch. Ration. Mech. Anal. 1999. V. 147. P. 269–361.
3. *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
4. *Panov E.Yu.* On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations // J. Differ. Equat. 2021. V. 275. P. 139–166.
5. *Кружков С.Н., Панов Е.Ю.* Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 79–84.
6. *Kruzhkov S.N., Panov E.Yu.* Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order // Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.). 1994. V. 40. P. 31–54.
7. *Panov E.Yu.* On decay of entropy solutions to nonlinear degenerate parabolic equation with almost periodic initial data // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. № 5. P. 974–988.
8. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
9. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. М., 1973.
10. *Panov E.Yu.* On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: global well-posedness and decay property // J. Hyperbolic Differ. Equat. 2016. V. 13. № 3. P. 633–659.

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород,
ООО "Центр научных исследований и разработок",
г. Великий Новгород,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.
После доработки 22.11.2021 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1380–1399

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ С ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ ЭФФЕКТАМИ

© 2022 г. С. А. Сергеев

Построено асимптотическое решение задачи Коши для многомерного волнового уравнения с учётом малых дисперсионных эффектов и с локализованной начальной функцией. Отдельно рассмотрены трёхмерный случай и построение асимптотики для него. При специальном выборе начальной функции в трёхмерном случае представлена асимптотика в явном виде с помощью функций Эйри и Скорера. В качестве примера, где возникают дисперсионные эффекты, рассмотрено усреднение волнового уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом и построено асимптотическое решение такого уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064122100089, EDN: KQNPGZ

Введение. Во многих задачах математической физики, например, при описании распространения звука в воде [1, гл. 2] или распространения электромагнитных волн в неоднородных средах [2, гл. 4], возникает волновое уравнение в недивергентной форме. Часто в таких задачах в уравнении следует учитывать и дисперсионные эффекты, появляющиеся при распространении волн.

В данной работе строится асимптотика решения задачи Коши с локализованными начальными данными, сформулированной для многомерного волнового уравнения в недивергентной форме с учётом малых дисперсионных эффектов

$$\frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \Delta v(x,t) + \varepsilon^2\Phi(x)\Delta^2 v(x,t) + \varepsilon^2\hat{\mathcal{L}}v(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$v(x,0) = V(x/\mu), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функция $c(x)$ является гладкой и ограниченной, $0 < c_m \leqslant c(x) \leqslant c_M$, где c_m и c_M – некоторые константы; функция $\Phi(x) \geqslant 0$ также является гладкой и ограниченной; функция $V(\xi)$ – достаточно гладкая и убывающая на бесконечности вместе со своими производными. Малый параметр $0 < \mu \ll 1$ отвечает за локализацию начальной функции, а малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ характеризует дисперсионные эффекты, при этом предполагаем, что справедливо соотношение $\varepsilon^2 \leqslant \mu^3$. Оператор $\hat{\mathcal{L}}$ – дифференциальный или псевдодифференциальный, устроенный таким образом, что стоящий в правой части уравнения (1) оператор является симметричным и положительно определённым в подходящем пространстве. Если в (1) отбросить $\hat{\mathcal{L}}$, то получим уравнение, которое, вообще говоря, является некорректным, так как его символ не является положительным при больших значениях производных. Однако с учётом оператора $\hat{\mathcal{L}}$ задача (1), (2) является корректной, а символ оператора в (1) положительный.

В работе [3] для задачи Коши для двумерного волнового уравнения, записанного в дивергентной форме, со слабыми дисперсионными эффектами асимптотика решения была представлена с помощью функций Эйри. В статье [4] изучалась задача Коши для многомерных строго гиперболических систем, в частности, трёхмерное волновое уравнение без учёта дисперсионных эффектов. В данной работе представлена асимптотика решения задачи (1), (2) с помощью функций Эйри и связанных с ними других специальных функций. Полученное представление иллюстрируется на примере построения асимптотики решения задачи Коши для волнового уравнения с быстроосциллирующей скоростью.

В уравнении (1) удобно перейти к оператору $\hat{p} = -i\mu\nabla$, умножив уравнение на $-\mu^2$. Определим следующие функции:

$$L_0(x,p) = c^2(x)|p|^2, \quad L_1(x,p) = i\frac{\varepsilon^2}{\mu^3}c^2(x)\Phi(x)|p|^4.$$

После умножения на $c^2(x)$ уравнение (1) принимает вид

$$-\mu^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \Big(L_0(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}) + i\mu L_1(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}) + i\mu\mathcal{L}^1(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}},\mu)\Big)v(x,t), \tag{3}$$

где цифры показывают порядок действия операторов: сначала оператор дифференцирования $\hat{p}$, а потом – оператор умножения на функцию от x (см. [5, с. 56; 6, с. 279]). Функцию $L_0(x,p)$ будем называть *главным символом* оператора.

Через $\mathcal{L}^1(\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}},\mu)$ в соотношении (3) обозначен результат соответствующих преобразований оператора $\hat{\mathcal{L}}$ из (1). Предполагается, что функция $\mathcal{L}^1(x,p,\mu)$ является гладкой и ограниченной порядка μ. Таким образом, оператор $\hat{\mathcal{L}}^1$ не играет роли при построении асимптотики и его явный вид не является существенным. Асимптотика определяется коэффициентами при вторых и четвёртых производных, т.е. видом функций $L_0(x,p)$ и $L_1(x,p)$.

Отметим, что из вида функции $L_1(x,p)$ и из (3) следует, что при $\varepsilon^2/\mu^2 = O(\mu^{1+\alpha})$, где $\alpha > 0$, асимптотика решения задачи (1), (2) переходит в асимптотику решения волнового уравнения.

Для широкого класса дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с начальными условиями, заданными в виде канонического оператора, имеется общая схема В.П. Маслова [5], позволяющая представить асимптотику решения в виде канонического оператора на лагранжевом многообразии Λ_t (или нескольких многообразиях $\Lambda_{t,j}$), полученном сдвигом за время t вдоль траекторий подходящей гамильтоновой системы (или гамильтоновых систем) начального многообразия Λ_0.

В рассматриваемом случае соответствующие гамильтонианы определяются с помощью главного символа оператора

$$H^\pm(x,p) = \pm\sqrt{L_0(x,p)} = \pm c(x)|p|.$$

Для наших целей локализованную функцию $V(x/\mu)$ удобно представить с помощью преобразования Фурье, что с точностью до множителя совпадает с определением канонического оператора Маслова [7–9]

$$V(x/\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde{V}(p)e^{i\langle x,p\rangle/\mu}\,dp \equiv \mu^{n/2}e^{-i\pi n/4}K^\mu_{\Lambda_0}[\tilde{V}(p)](x), \tag{4}$$

где $\tilde{V}(p)$ – образ фурье-функции $V(\xi)$. В этом случае канонический оператор $K^\mu_{\Lambda_0}$ задаётся на многообразии

$$\Lambda_0 = \{x = 0, p = \alpha \in \mathbb{R}^n\},$$

представляющем собой вертикальную плоскость в фазовом пространстве. Это многообразие проектируется в одну точку $x = 0$ на конфигурационном пространстве, и с точки зрения классической теории канонического оператора (см. [5, с. 153]) состоит из особых точек.

В случае представления начальных условий на многообразии Λ_0 гамильтонианы $H^\pm(x,p)$ оказываются негладкими при $p = 0$, что приводит к появлению негладких так называемых проколотых многообразий $\Lambda_{t,j}$, и общий подход Маслова нуждается в серьёзной модификации. Одна из таких модификаций, основанная на представлении асимптотики решения в виде проинтегрированного по дополнительному параметру канонического оператора, была предложена в статьях [10, 11].

В работе [12] была предложена серьёзная модификация канонического оператора Маслова, которая позволила не только сделать существенно эффективными его интегральные представления в окрестности каустик, но и расширить возможности применения канонического оператора на классы негладких многообразий, в том числе и на “проколотые” многообразия [8, 9, 13, 14]. Использование указанной модификации канонического оператора позволяет прямо применять схему Маслова для решения рассматриваемой задачи Коши, что и продемонстрировано в данной работе.

Асимптотика решения задачи (1), (2) в каждый фиксированный момент времени t локализована в окрестности некоторой поверхности. В случае постоянной функции $c(x)\equiv c_0$ эта поверхность является гладкой и представляет собой фронт волны. В случае переменной функции $c(x)$ на этой поверхности могут возникать точки самопересечения, а сама поверхность может уже быть не гладкой. Тем не менее, будем продолжать называть эту поверхность фронтом волны. С точки зрения теории модифицированного канонического оператора фронт волны является каустикой специального вида [9, 12–14].

В п. 1 приводятся асимптотические формулы для решения задачи (1), (2) в трёхмерном случае. В п. 2 рассматриваются волновое уравнение с быстроосциллирующим коэффициентом и усреднённое уравнение с гладкими коэффициентами, имеющее вид (1). В п. 3 приводятся асимптотические формулы для задачи (1), (2) в многомерном случае, из которых следуют формулы для трёхмерного случая. В п. 4 описана процедура вывода усреднённого уравнения для волнового уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом.

1. Трёхмерный случай. В данном пункте строится асимптотическое при $\mu\to 0$ решение задачи (1), (2) в трёхмерном случае $(x\in\mathbb{R}^3)$. Также рассматривается специальный случай выбора вида начальной функции, когда асимптотику можно представить с помощью функций Эйри и других функций, связанных с ними. Приводятся формулы для асимптотики решения волнового уравнения в бездисперсионном случае.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3) с локализованными начальными данными (2). Этим начальным данным отвечает многообразие Λ_0, на котором удобно перейти к сферическим координатам $p=\rho\boldsymbol{n}(\varphi,\theta)$, где $\rho\geqslant 0$, а вектор $\boldsymbol{n}(\varphi,\theta)=(\cos\varphi\cos\theta,\sin\varphi\cos\theta,\sin\theta)$.

Следуя схеме построения асимптотики решения с помощью модифицированного канонического оператора [8, 12–14], построим для гамильтониана $H(x,p)=c(x)|p|$ решение следующей системы Гамильтона:

$$\dot x=H_p(x,p),\quad \dot p=-H_x(x,p),\quad x|_{t=0}=0,\quad p|_{t=0}=\boldsymbol{n}(\varphi,\theta),\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in[-\pi/2,\pi/2]. \tag{5}$$

Обозначим через $X(\varphi,\theta,t)$ и $P(\varphi,\theta,t)$ решение этой системы.

Замечание 1. Будем рассматривать только положительную ветвь корня $H(x,p)=\sqrt{L_0(x,p)}$, так как канонические операторы, отвечающие положительной и отрицательной ветвям корня, связаны комплексным сопряжением (см. [11, лемма 14]).

Лагранжево многообразие в момент времени t, отвечающее асимптотике, имеет вид

$$\Lambda_t=\{x=X(\varphi,\theta,t),p=\rho P(\varphi,\theta,t)\},\quad \rho\geqslant 0,\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in[-\pi/2,\pi/2].$$

Предельный переход $\rho\to 0+0$ определяет край многообразия

$$\partial\Lambda_t=\{x=X(\varphi,\theta,t),p=0\},\quad \varphi\in[0,2\pi],\quad \theta\in[-\pi/2,\pi/2].$$

Так как якобиан $J=\det\partial X(\varphi,\theta,t)/\partial(\rho,\varphi,\theta)$ проектирования многообразия Λ_t на конфигурационное пространство $x\in\mathbb{R}^3$ равен нулю, то данное многообразие состоит только из особых точек.

Проекция края многообразия (как и всего многообразия Λ_t) на конфигурационное пространство есть поверхность $\gamma_t=\{x=X(\varphi,\theta,t)\}$, которую будем называть *фронтом волны.* Эта поверхность может быть негладкой и иметь точки самопересечения. С точки зрения теории модифицированного канонического оператора эта поверхность является каустикой специального вида.

Далее перейдём к описанию вида асимптотики задачи (1), (2) в трёхмерном случае в окрестности переднего фронта. Более подробное описание алгоритма построения модифицированного канонического оператора Маслова для задачи (1), (2) приведено в п. 3, где рассматривается n-мерный случай.

Многообразие Λ_t можно покрыть счётным числом карт Ω_j. В каждой карте рассмотрим систему относительно $(\varphi, \theta) \in \Omega_j$:

$$\langle X_\varphi(\varphi, \theta, t), x_0 - X(\varphi, \theta, t) \rangle = 0, \quad \langle X_\theta(\varphi, \theta, t), x_0 - X(\varphi, \theta, t) \rangle = 0, \tag{6}$$

где x_0 – некоторая фиксированная точка на фронте, $x_0 \in \gamma_t$.

Определим для каждой карты Ω_j её ранг $k_j = \operatorname{rank} \Omega_j$ как наименьшее значение ранга матрицы системы (6)

$$k_j = \min_{(\varphi,\theta)\in\Omega_j} \operatorname{rank}(X_\varphi X_\theta).$$

Пусть в точке $f = (\rho_f, \varphi_f, \theta_f) \in \Lambda_t$ ранг матрицы $\operatorname{rank}(X_\varphi X_\theta)|_f < 2$, тогда точка f называется *фокальной*. Так как функция $X(\varphi, \theta, t)$ не зависит от ρ, то фокальными точками будут и точки $(\rho, \varphi_f, \theta_f)$ для любого $\rho \geqslant 0$. Таким образом, приходим к определению фокальных точек на крае многообразия.

Определение 1. Точка $(\varphi, \theta) \in \partial\Lambda_t$, в которой $\operatorname{rank}(X_\varphi X_\theta) = 2$, называется *регулярной*. Если же в этой точке $\operatorname{rank}(X_\varphi X_\theta) < 2$, то точка называется *фокальной*.

Предполагаем, что на крае многообразия фокальные точки являются изолированными. Далее будем рассматривать карты многообразия, содержащие точки края этого многообразия, и строить асимптотику, отвечающую именно таким картам.

Определение 2. Выберем некоторую карту Ω. Пусть $\Gamma = (X(\varphi, \theta, \tau), P(\varphi, \theta, \tau))$, $\tau \in [0, t]$, – траектория системы Гамильтона (5) такая, что при $\tau = t$ эта траектория задаёт регулярную точку $r \in \Omega$ с координатами (φ, θ, t). *Индексом Маслова* карты Ω называется число

$$m(\Omega) = \operatorname{ind}\Gamma + \sigma. \tag{7}$$

Здесь $\operatorname{ind}\Gamma$ – индекс Морса траектории Γ, равный числу фокальных точек на траектории при $\tau \in (0, t)$. Число σ определяется в зависимости от ранга карты. При $k = 2$ число $\sigma = 0$, а при $k = 0$ число $\sigma = \operatorname{inerdex}((X_{\varphi,\theta})^{\mathrm{T}} P_{\varphi,\theta})$, где матрица вычислена в точке r. При $k = 1$ определение числа σ будет приведено в утверждении 3.

В зависимости от значения k введём функции

$$U_k(s, \lambda, \varphi, \theta) = \int_0^{+\infty} \rho^{2-k/2} \tilde{V}(\rho \boldsymbol{n}(\varphi, \theta)) e^{i(\rho s + \lambda\rho^3)} d\rho, \quad k = 0, 1, 2.$$

Далее сформулируем утверждения о представлении асимптотики решения задачи (1), (2) в окрестности переднего фронта в зависимости от значения k. Все эти утверждения вытекают из общего n-мерного случая, разобранного в п. 3.

Определим следующие функции:

$$\lambda(\varphi, \theta, t) = \frac{\varepsilon^2}{\mu^3} Q(\varphi, \theta, t), \quad Q(\varphi, \theta, t) = \frac{c(0)}{2} \int_0^t \Phi(X(\varphi, \theta, \tau)) |P(\varphi, \theta, \tau)|^2 \, d\tau. \tag{8}$$

Сформулируем сначала утверждение о виде асимптотики в карте ранга $k = 2$. В этом случае фронт представляет собой гладкую поверхность и вектор $P(\varphi, \theta, t)$ будет совпадать с внешней нормалью к фронту.

В картах ранга $k = 2$ естественным образом определены координаты $(\varphi, \theta) \in \partial\Lambda_t$ в силу системы (6). Это приводит к представлению асимптотики решения в параметрической форме, где ещё одним параметром выступает координата ξ, определённая по нормали к фронту.

С вычислительной точки зрения параметрическое представление асимптотики представляется наиболее эффективным в силу того, что не требуется разрешать систему (6) относительно (φ,θ) для всех точек x_0 в заданной области фронта.

Пусть точка $x_0 \in \gamma_t$ и пусть она принадлежит проекциям карт Ω_j, $j=\overline{1,N}$, ранги которых равны $k=2$. Введём параметр $\xi \in [-d,d]$, определяющий координату по нормали к фронту, причём $\xi=0$ на фронте, $\xi>0$ за пределами фронта и $\xi<0$ в области, ограниченной фронтом. Величина d определяет окрестность фронта по нормали.

Утверждение 1. *В окрестности точки x_0 асимптотика решения задачи (1), (2) представляется в виде суммы*

$$v_{\rm as}(x,t)=\sum_{j=1}^{N} v_j(x,t).$$

Функции $v_j(x,t)$ определяются для каждой карты Ω_j и задаются параметрическим образом $v_j(x,t)=(v_j=W_j(\xi,\varphi,\theta,t), x=\Xi_j(\xi,\varphi,\theta,t))$ с параметрами (ξ,φ,θ), где

$$W_j(\xi,\varphi,\theta,t)=\frac{2\pi\mu\sqrt{|\cos\theta|}}{|\det{(X^m_{(\varphi,\theta)}X_{(\varphi,\theta)})}|^{1/4}}\sqrt{\frac{c(X)}{c(0)}}\,{\rm Re}\, e^{-i\pi(\operatorname{ind}\Gamma+1)/2}U_2\biggl(\xi\frac{|P|}{\mu},\lambda(\varphi,\theta,t),\varphi,\theta\biggr),$$

$$\Xi_j(\xi,\varphi,\theta,t)=\xi\frac{P}{|P|}+X,\quad \xi\in[-d,d],\quad (\varphi,\theta)\in\Omega_j. \tag{9}$$

Здесь для краткости обозначили $X=X(\varphi,\theta,t)$, $P=P(\varphi,\theta,t)$, матрица $X_{(\varphi,\theta)}=(X_\varphi,X_\theta)$, а индекс m – транспонирование. Число $\operatorname{ind}\Gamma$ – индекс Морса соответствующей траектории $(X(\varphi,\theta,\tau),P(\varphi,\theta,\tau))$ системы Гамильтона (5).

Сформулируем теперь утверждение о виде асимптотики, отвечающей карте ранга $k=0$.

Утверждение 2. *Пусть точка $x_0\in\gamma_t$ принадлежит проекции карты Ω ранга $k=0$. В окрестности точки x_0 асимптотика решения задачи (1), (2) имеет вид*

$$v_{\rm as}(x,t)={\rm Re}\, e^{-i\pi m(\Omega)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} g(\varphi,\theta)\sqrt{|\cos\theta|}\sqrt{|\det{(P,P_\varphi,P_\theta)}|}\frac{c(X(\varphi,\theta,t))}{c(0)}\times$$

$$\times U_0\biggl(\frac{\langle P(\varphi,\theta,t),x-X(\varphi,\theta,t)\rangle}{\mu},\lambda(\varphi,\theta,t),\varphi,\theta\biggr)\,d\varphi\,d\theta.$$

Здесь $g(\varphi,\theta)$ – срезающая функция, отвечающая карте Ω, а $m(\Omega)$ – её индекс Маслова.

Теперь опишем асимптотику в окрестности точки $x_0\in\gamma_t$, которая лежит в проекции карты Ω ранга $k=1$. В этой карте существует точка, в которой либо $X_\theta=0$, либо $X_\varphi=0$, или же векторы X_φ и X_θ являются линейно зависимыми. Во всех этих случаях можно определить в Ω локальные координаты (ϕ,η): в первом случае $\phi=\varphi$, $\eta=\theta$, во втором – $\phi=\theta$, $\eta=\varphi$, а в третьем можно выбрать один из двух вариантов, в зависимости от вычислений. Во всех этих случаях вектор X_ϕ отличен от нуля и существует такая область $\widetilde{\Omega}$, что для всех $\eta\in\widetilde{\Omega}$ система (6) определяет в области $(\phi,\eta)\in\Omega$ функцию $\phi=\phi(x_0,t,\eta)$.

Утверждение 3. *Пусть точка $x_0\in\gamma_t$ и содержится в проекциях карт Ω_j, $j=\overline{1,N}$, ранга $k=1$. Обозначим через $\phi_j=\phi_j(x_0,t,\eta)$, $\eta\in\widetilde{\Omega}_j$, решения системы (6), отвечающие картам Ω_j.*

Асимптотика решения задачи (1), (2) в окрестности точки x_0 имеет следующий вид:

$$v_{\rm as}(x,t)=\sqrt{2\pi\mu}\,{\rm Re}\, e^{-i\pi/4}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{\pi}{2}m(\Omega_j)}\int\limits_{\mathbb{R}} g_j(\eta)\sqrt{|\cos\theta|}\sqrt{|\det M|}\frac{c(X(\phi,\eta,t))}{c(0)}\times$$

$$\times U_1\biggl(\frac{\langle P(\phi,\eta,t),x-X(\phi,\eta,t)\rangle}{\mu},\lambda(\phi,\eta,t),\phi,\eta\biggr)\bigg|_{\phi=\phi_j(x_0,t,\eta)}d\eta. \tag{10}$$

Функции $g_j(\eta)$ *– срезающие функции, отвечающие областям* $\widetilde{\Omega}_j$. *Матрица* M *определяется по формуле*

$$M = \left(\frac{X_\phi}{|X_\phi|^2}, P, P_\eta - P_\phi \frac{\langle X_\phi, X_\eta\rangle}{|X_\phi|^2}\right).$$

Индекс Маслова $m(\Omega_j)$ *вычисляется согласно (7), где* $\sigma = 1$, *если* $W < 0$, *и* $\sigma = 0$, *если* $W \geqslant 0$; *число* W *определяется в регулярной точке карты по формуле*

$$W = X_\eta^{\mathrm{т}}\left(E_3 - \frac{1}{|X_\phi|^2} X_\eta X_\phi^{\mathrm{т}}\right)\left(P_\eta - P_\phi \frac{\langle X_\phi, X_\eta\rangle}{|X_\phi|^2}\right).$$

Матрица E_3 *– единичная размера* 3×3.

Замечание 2. В (10) присутствует функция $\cos\theta$ вне зависимости от выбора локальных координат (ϕ,η), и чтобы не усложнять формулу, косинус не выражается через эти координаты. Также у функций X и P вместо аргументов (φ,θ) в (10) записаны (ϕ,η), что, вообще говоря, не является корректным, однако полностью корректная запись сильно усложнит формулы и их восприятие. Отметим, что при $\phi = \theta$ и $\eta = \varphi$ соответствующие аргументы в функциях следует поменять местами.

Далее рассмотрим случай, когда функция $V(\xi)$ имеет специальный вид

$$V(\xi) = A\left(1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2} + \frac{\xi_2^2}{b_2^2} + \frac{\xi_3^2}{b_3^2}\right)^{-2}, \tag{11}$$

где A, b_1, b_2 и b_3 – некоторые параметры. Преобразование Фурье $\tilde V(p)$ такой функции имеет вид [4]

$$\tilde V(p) = A b_1 b_2 b_3 \frac{\sqrt{2\pi}}{4} e^{-\sqrt{p_1^2 b_1^2 + p_2^2 b_2^2 + p_3^2 b_3^2}}.$$

В этом случае функции U_k можно вычислить и представить с помощью специальных функций, связанных с функцией Эйри. Введём обозначения

$$z = \frac{s + i\beta(\varphi,\theta)}{(3\lambda)^{1/3}}, \quad \beta(\varphi,\theta) = \sqrt{b_1^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + b_2^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + b_3^2\sin^2\theta},$$

тогда

$$U_2(s,\lambda,\varphi,\theta) = -A b_1 b_2 b_3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{e^{i\pi/2}}{(3\lambda)^{2/3}}\left(\mathrm{Ai}'(z) + i\,\mathrm{Gi}'(z)\right),$$

$$U_1(s,\lambda,\varphi,\theta) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{e^{-i\pi/4} A b_1 b_2 b_3}{(12\lambda)^{1/3}(3\lambda)^{1/2}} \frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\mathrm{Ai}^2(\zeta) + i\mathrm{Ai}\,(\zeta)\,\mathrm{Bi}\,(\zeta)\right)\Big|_{\zeta = z/4^{1/3}},$$

$$U_0(s,\lambda,\varphi,\theta) = -A b_1 b_2 b_3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{3\lambda}\left(z(\mathrm{Ai}\,(z) + i\,\mathrm{Gi}\,(z)) - \frac{i}{\pi}\right).$$

Здесь $\mathrm{Ai}\,(z)$ и $\mathrm{Bi}\,(z)$ – функции Эйри, а $\mathrm{Gi}\,(z)$ – функция Скорера [15], являющаяся ограниченным решением неоднородного уравнения Эйри $f'' - zf = -1/\pi$, равная

$$\mathrm{Gi}\,(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin\left(zt + \frac{t^3}{3}\right) dt.$$

Отметим, что в двумерном случае профиль волны описывается с помощью функций Эйри, а функция Скорера отсутствует.

Замечание 3. При $k = 2$ асимптотика решения задачи представляется в виде суммы комбинаций производной функции Эйри и производной функции Скорера. При $k = 1$ или $k = 2$ уже требуется интегрирование соответствующих функций.

При вычислении функций $U_{0,2}$ мы воспользовались соотношением

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{i(\rho(s+i\beta)+\lambda\rho^3)}d\rho = \frac{\pi}{(3\lambda)^{1/3}}(\mathrm{Ai}\,(z) + i\,\mathrm{Gi}\,(z))$$

и соотношениями, вытекающими из него после дифференцирования по s. При вычислении функции U_1 использовалось соотношение, справедливое при $\lambda > 0$ (см. [9, 16]):

$$\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\rho}e^{i\rho s}e^{-\rho\beta}e^{i\lambda\rho^3}d\rho = -\frac{\pi}{\sqrt{6\lambda}}\frac{d}{d\zeta}(\mathrm{Ai}^2(\zeta) + i\,\mathrm{Ai}\,(\zeta)\,\mathrm{Bi}\,(\zeta))|_{\zeta=z/4^{1/3}},$$

а также равенства, получающиеся после дифференцирования по s.

Замечание 4. Если $\lambda = 0$, т.е. дисперсионные эффекты отсутствуют, то утверждения 1–3 дают асимптотику решения волнового уравнения [4]. При этом для специального начального условия (11) функции $U_k(\xi, 0, \varphi, \theta)$ становятся рациональными:

$$U_k(s, 0, \varphi, \theta) = Ab_1b_2b_3\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\Gamma\biggl(3 - \frac{k}{2}\biggr)\frac{e^{i\pi(3-k/2)/2}}{(s + i\beta(\varphi, \theta))^{3-k/2}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $\Gamma(\zeta)$ – гамма-функция Эйлера, соответственно асимптотика решения волнового уравнения в данном случае принимает более простой вид.

При $k = 2$ асимптотика решения для волнового уравнения, по аналогии с утверждением 1, представима в виде суммы параметрически заданных функций $v_j(x, t) = (W_j, \Xi_j)|$:

$$W_j(\xi, \varphi, \theta, t) = \frac{\mu}{4}\frac{Ab_1b_2b_3(2\pi)^{3/2}\sqrt{\cos\theta}}{|\det{(X_{(\varphi,\theta)})^{\mathrm{T}}X_{(\varphi,\theta)}}|^{1/4}}\sqrt{\frac{c(X(\varphi,\theta,t))}{c(0)}}\,\mathrm{Re}\,e^{i\pi(1-\mathrm{ind}\,\Gamma)/2}\biggl(\xi\frac{|P|}{\mu} + i\beta(\varphi,\theta)\biggr)^{-2},$$

$$\Xi_j(\xi, \varphi, \theta, t) = \xi\frac{P}{|P|} + X. \tag{12}$$

При $k = 0$ асимптотика решения для волнового уравнения имеет вид

$$v_{\mathrm{as}}(x, t) = Ab_1b_2b_3\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,\mathrm{Re}\,e^{i\pi(3-m(\Omega))/2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} g(\varphi, \theta)\frac{c(X(\varphi, \theta, t))}{c(0)}\times$$

$$\times\sqrt{|\cos\theta|}\sqrt{|\det{(P, P_\varphi, P_\theta)}|}\biggl(\frac{\langle P(\varphi,\theta,t), x - X(\varphi,\theta,t)\rangle}{\mu} + i\beta(\varphi,\theta)\biggr)^{-3}d\varphi\,d\theta.$$

При $k = 1$, по аналогии с утверждением 3, переходим к координатам (ϕ, η), что приводит к следующему виду асимптотики волнового уравнения:

$$v_{\mathrm{as}}(x, t) = -\frac{3\pi\sqrt{\pi}}{8}\sqrt{\mu}Ab_1b_2b_3\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^N e^{i\pi m(\Omega_j)/2}\int\limits_{\mathbb{R}} g_j(\eta)\frac{c(X(\phi,\eta,t))}{c(0)}\times$$

$$\times\sqrt{|\cos\theta|}\sqrt{|\det M|}\biggl(\frac{\langle P(\phi,\eta,t), x - X(\phi,\eta,t)\rangle}{\mu} + i\beta(\phi,\eta)\biggr)^{-5/2}\bigg|_{\phi=\phi_j(x_0,t,\eta)}d\eta. \tag{13}$$

2. Волновое уравнение с быстроосциллирующим коэффициентом. В качестве примера где возникает волновое уравнение с дисперсионными поправками рассмотрим задачу о построении асимптотики решения задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения с быстроосциллирующим коэффициентом и локализованной начальной функцией

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \mathrm{C}^2\biggl(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, x\biggr)\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u|_{t=0} = V(x/\mu), \quad u_t|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Здесь вектор-функция $\Theta(x) = (\theta_1(x), \ldots, \theta_m(x))$, $m \leqslant 3$, где $\theta_k(x)$ – гладкие вещественные функции, и градиенты $\nabla\theta_k(x)$ линейно независимы при всех x. Функция $\mathrm{C}^2(y, x)$, $y \in \mathbb{R}^m$, является 2π-периодической по каждой переменной y_j и гладкой по всем переменным, и справедливо неравенство $0 < c_m \leqslant \mathrm{C}^2(y, x) \leqslant c_M$. Малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ отвечает за скорость быстрых осцилляций, описываемых фазами $\theta_k(x)$, считаем что $\varepsilon \leqslant \mu^{3/2}$.

Поскольку начальная функция является быстроменяющейся, то и главный член асимптотического решения также будет быстроменяющейся функцией. Поэтому прямое применение подходов усреднения, развитых в работах [17–23], приводит, вообще говоря, к неверным результатам, и здесь следует применять подходы, предложенные в [16, 24–27]. Усреднённое уравнение здесь также появляется и в случае гладких решений $(\mu = 1)$ переходит в “обычное” усреднённое уравнение из [17–23].

Согласно статьям [16, 25–27] процесс построения асимптотического решения задачи (14) разумно разбить на две задачи. Первая задача состоит в построении “приближённого” усреднённого уравнения с гладкими коэффициентами, что осуществляется с помощью операторного усреднения (см. [16, 25–27]). Вторая задача – построение асимптотического решения усреднённой задачи с помощью представленных выше формул.

Отметим важный момент, связанный с построением усреднённого уравнения. В случае дивергентной записи волнового уравнения для построения усреднённого уравнения возникает необходимость в решении вспомогательной задачи на ячейке при любом соотношении между ε и μ [25, 26], при этом явно найти решение этой задачи удаётся в редких случаях. Однако при предположении о малости осцилляций, т.е. когда функция $\mathrm{C}^2(y, x)$ имеет вид

$$\mathrm{C}^2(y, x) = \mathrm{C}_0^2(x) + \delta a(y, x), \tag{15}$$

где $\mathrm{C}_0(x)$ – гладкая функция, δ – малый параметр, а функция $a(y, x)$ имеет нулевое среднее по y, решение задачи на ячейке можно построить с необходимой точностью.

Для случая уравнения в недивергентной форме ситуация меняется: необходимость решать задачу на ячейке возникает, в частности, при $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$. Если же $\mu \sim 1$, то в качестве усреднённого уравнения получается волновое, и для определения его коэффициента решать задачу на ячейке уже не требуется.

Отметим, что используемый нами метод построения усреднённого уравнения обобщается и на n-мерный случай.

Метод операторного усреднения для уравнения (14) приводит к задаче с псевдодифференциальным уравнением вида (3):

$$-\mu^2 v_{tt}(x, t) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}; \varepsilon, \mu) v(x, t), \quad v|_{t=0} = V(x/\mu), \quad v_t|_{t=0} = 0. \tag{16}$$

Цифры над операторами показывают их порядок действия: первым действует $\hat{p} = -i\mu\nabla$, а вторым – оператор умножения на функцию от x. Оператор $L(x, \hat{p}; \varepsilon, \mu)$ является симметричным и положительно определённым.

Утверждение 4. *Для символа оператора $L(x, p; \varepsilon, \mu)$ справедливо следующее разложение по степеням ε/μ:*

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L(x, p; \varepsilon, \mu) = L_0(x, p) + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} L_0^4(x, p) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4}\mathcal{L}(x, p, \varepsilon/\mu),$$

$$L_0(x, p) = c^2(x)|p|^2, \quad L_0^4(x, p) = -\Phi(x)c^2(x)|p|^4.$$

Функция $c(x)$ *определяется через среднее по ячейке* $y \in \mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$ *от функции* $1/\mathrm{C}^2(y,x)$:

$$c^2(x) = \left\langle \frac{1}{\mathrm{C}^2(y,x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m}^{-1} = \left(\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \frac{dy}{\mathrm{C}^2(y,x)} \right)^{-1}, \tag{17}$$

где скобки $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{T}^m}$ *обозначают среднее на ячейке.*

Функция $\Phi(x) = \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y,x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m}$, *где* $\psi_2(y,x)$ *является решением задачи на ячейке*

$$(-\Delta_y^\theta)\psi_2 = \frac{c^2(x) - \mathrm{C}^2(y,x)}{\mathrm{C}^2(y,x)}, \quad \langle \psi_2(y,x) \rangle_{\mathbb{T}^m} = 0. \tag{18}$$

Операторы $(-\Delta_y^\theta) = \langle -i\nabla_y^\theta, -i\nabla_y^\theta \rangle$, $\nabla_y^\theta = \nabla\Theta(x)\nabla_y$, *градиент* $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_m)$ *и матрица* $\nabla\Theta(x) = (\nabla\theta_1(x), \ldots, \nabla\theta_m(x))$. *Поправка* $\mathcal{L}$ *содержит производные старшего (по сравнению с* $|p|^4$*) порядка.*

Обоснование этого утверждения приведено в п. 4.

Зная асимптотику решения $v_{\mathrm{as}}(x,t)$ усреднённой задачи (16), можно построить асимптотику задачи (14) в виде действия некоторого оператора $\hat{\chi}$ на функцию $v_{\mathrm{as}}(x,t)$. В общем случае точно вычислить оператор $\hat{\chi}$ не представляется возможным, но его можно вычислить с требуемой точностью.

Определим операторы $\hat{\chi}_3 = \chi_3(y, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})$ и $\hat{\chi}_4 = \chi_4(y, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}})$ следующим образом: пусть их символы являются периодическими по y с нулевым средним решениями следующих задач:

$$(-\Delta_y^\theta)\chi_3(y,x,p) = -2p^2 \langle p, -i\nabla_y^\theta \psi_2(y,x) \rangle, \tag{19}$$

$$(-\Delta_y^\theta)\chi_4(y,x,p) = -2\langle p, -i\nabla_y^\theta \chi_3(y,x;p) \rangle +$$
$$+ p^4 \left(\psi_2(y,x)(-\Delta_y^\theta)\psi_2(y,x) - \langle |\nabla_y^\theta \psi_2(y,x)|^2 \rangle_{\mathbb{T}^m} \frac{c^2(x)}{\mathrm{C}^2(y,x)} \right). \tag{20}$$

Утверждение 5. *Пусть* $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$, *а функция* $v_{\mathrm{as}}(x,t)$ *является асимптотическим решением усреднённой задачи (16). Тогда функция*

$$u_{\mathrm{as}}(x,t) = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \psi_2 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, x \right) \hat{p}^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} \chi_3 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}} \right) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4} \chi_4 \left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon}, \overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}} \right) \right) v_{\mathrm{as}}(x,t), \tag{21}$$

где символы операторов $\chi_{3,4}$ *определены в (19), (20), удовлетворяет волновому уравнению (14) с точностью* $O(\mu^{3/2})$, *а начальным данным – с точностью* $O(\mu)$.

Под выражением $O(\mu^\alpha)$ в формулировке утверждения 5 понимается гладкая и ограниченная функция порядка μ^α.

Определение 3. В рамках утверждения 5 функция $v_{\mathrm{as}}(x,t)$ называется *главной частью* асимптотического решения задачи (14).

Обоснование утверждения 5 приведено в п. 4.

Случай малых осцилляций. Отдельно рассмотрим случай, когда коэффициент уравнения (14) имеет вид (15):

$$\mathrm{C}^2(y,x) = \mathrm{C}_0^2(x) + \delta a(y,x),$$

где $\mathrm{C}_0(x)$ – гладкая функция, а параметр δ является малым. Функция $a(y,x)$ является 2π-периодичной по каждой переменной y_j и имеет нулевое среднее. Для неё справедливо разложение в ряд Фурье

$$a(y,x) = \sum_{|k| \neq 0} a_k(x) e^{i\langle k, y \rangle}. \tag{22}$$

Вычислим функцию $c^2(x)$, определённую в (17). Непосредственным вычислением получаем

$$c^2(x) = \mathrm{C}_0^2(x) - \delta^2 \frac{\langle a^2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m}}{\mathrm{C}_0^2(x)} + O(\delta^3).$$

Из этого равенства следует, что гамильтониан $H(x,p)$ имеет представление

$$H(x,p) = |p|\mathrm{C}_0(x) - \frac{\delta^2}{2}\frac{|p|}{\mathrm{C}_0^3(x)} \sum_{|k|\neq 0} a_k(x)a_{-k}(x) + O(\delta^3). \tag{23}$$

Обозначим через $X(\varphi,\theta,t)$ и $P(\varphi,\theta,t)$ решение системы Гамильтона (5) с гамильтонианом (23). Отметим, что поправку порядка δ^2 к гамильтониану можно учесть и в уравнении переноса, вместо самой системы Гамильтона. В таком случае гамильтониан приобретает вид $H(x,p) = \mathrm{C}_0(x)|p|$, но при этом сдвигается фронт волны и поправляется амплитуда.

Теперь определим коэффициент усреднённого уравнения $\Phi(x)$ при дисперсионных поправках. Для правой части уравнения в задаче на ячейке (18) справедливо равенство

$$\frac{c^2(x) - \mathrm{C}^2(y,x)}{\mathrm{C}^2(y,x)} = -\frac{\delta}{\mathrm{C}_0^2(x)} a(y,x) + O(\delta^2).$$

С учётом (22) решение $\psi_2(y,x)$ задачи на ячейке (18) также ищется в виде ряда Фурье. Непосредственным вычислением действия оператора ∇_y^θ на экспоненту $e^{i\langle k,y\rangle}$ получаем

$$\Phi(x) = \langle|\nabla_y^\theta \psi_2(y,x)|^2\rangle_{\mathbb{T}^m} = \frac{\delta^2}{\mathrm{C}_0^4(x)} \sum_{|k|\neq 0} \frac{a_k(x)a_{-k}(x)}{|\nabla\Theta(x)k|^2} + O(\delta^3).$$

После определения функции $\Phi(x)$ можно определить функцию $Q(\varphi,\theta,t)$ согласно формуле (8). Эта функция описывает профиль волны и дисперсионные эффекты. В случае малых осцилляций мы имеем $Q(\varphi,\theta,t) = \delta^2 F(\varphi,\theta,t) + O(\delta^3)$, где

$$F(\varphi,\theta,t) = \frac{\mathrm{C}_0(0)}{2} \int\limits_0^t \frac{|P|^2}{\mathrm{C}_0^4(X(\varphi,\theta,\tau))} \left(\sum_{|k|\neq 0} \frac{a_k(X(\varphi,\theta,\tau))a_{-k}(X(\varphi,\theta,\tau))}{|\nabla\Theta(X(\varphi,\theta,\tau))k|^2} \right) d\tau. \tag{24}$$

Из (24) и (8) следует, что в случае малых осцилляций параметр λ, определяющий дисперсионные эффекты решения, равен $\lambda = (\varepsilon^2\delta^2/\mu^3)F(\psi,t)$. Это означает, что дисперсионные эффекты начинают оказывать влияние на решение в случае $\varepsilon\delta \sim \mu^{3/2}$, т.е. при наличии малых осцилляций эффективным параметром дисперсии становится произведение $\delta\varepsilon$ вместо ε.

Пример. Приведём пример реализации полученных выше асимптотических формул в случае малых осцилляций и при $\dim y = m = 1$. Выбираем следующий вид коэффициента уравнения (14):

$$\mathrm{C}^2(y,x) = \mathrm{C}_0^2(x) + \delta k(x)\cos y, \quad \mathrm{C}_0(x) = 1 - \frac{1}{2}k(x), \quad k(x) = \exp\left(-\alpha\left(x_1^2 + \frac{(x_2-5)^2}{a} + x_3^2\right)\right).$$

Функция $\Theta(x) = 8x_1^2/7 + 2x_2 + 2x_3^2$, а параметры задачи $\alpha = 0.4$, $a = 2$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.5$. Проводя вычисления, получаем

$$c^2(x) = \mathrm{C}_0^2(x) - \frac{\delta^2}{2}\frac{k^2(x)}{\mathrm{C}_0^2(x)}, \quad \langle|\nabla_y^\theta\psi_2|^2\rangle_{[0,2\pi]} = \frac{\delta^2}{2}\frac{k^2(x)}{\mathrm{C}_0^4(x)}\frac{1}{|\nabla\Theta(x)|^2}.$$

На рис. 1 представлены сечение волнового фронта $\gamma_t = \{X(\varphi,\theta,t)\}$ при $t = 20$ плоскостью $x_3 = 0$ при $\varphi \in [0,\pi]$ и проекции некоторых траекторий системы Гамильтона (5) на конфигурационное пространство при $x_3 = 0$, отмечены проекция фокальной точки F и область быстрых осцилляций коэффициента исходного уравнения.

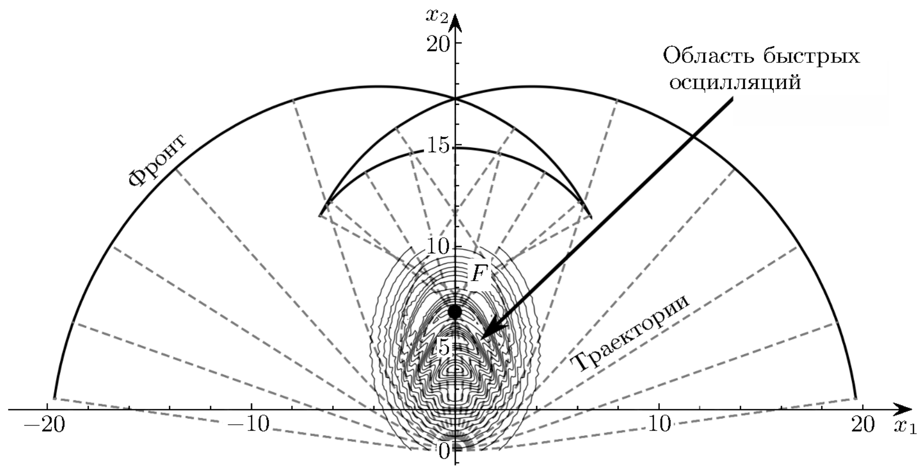

Рис. 1. Сечение волнового фронта γ_t (жирная непрерывная линия) плоскостью $x_3 = 0$ при $\varphi \in [0, \pi]$ и проекции траектории системы Гамильтона (5) (штриховые линии). Контурные линии показывают область быстрых осцилляций коэффициента уравнения.

Начальное возмущение $V(\xi)$ выбирается в специальном виде (11), где $A = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$, параметр локализации начальной функции $\mu = (\delta\varepsilon)^{2/3} \approx 0.135$.

На рис. 2 и 3 представлены профили главной части асимптотического решения задачи (14) вдоль луча, выходящего из начала координат и совпадающего с положительным направлением оси x_2. Для сравнения на обоих рисунках показана асимптотика решения волнового уравнения с коэффициентом $c^2(x)$ без учёта дисперсионной поправки. На рис. 2 показаны профили волны до возникновения фокальной точки. Вначале дисперсионные эффекты не оказывают существенного влияния и главная часть определяется асимптотикой решения волнового уравнения (12). После прохождения области осцилляций дисперсионные эффекты начинают оказывать влияние на амплитуду волны и главная часть асимптотического решения определяется формулой (9).

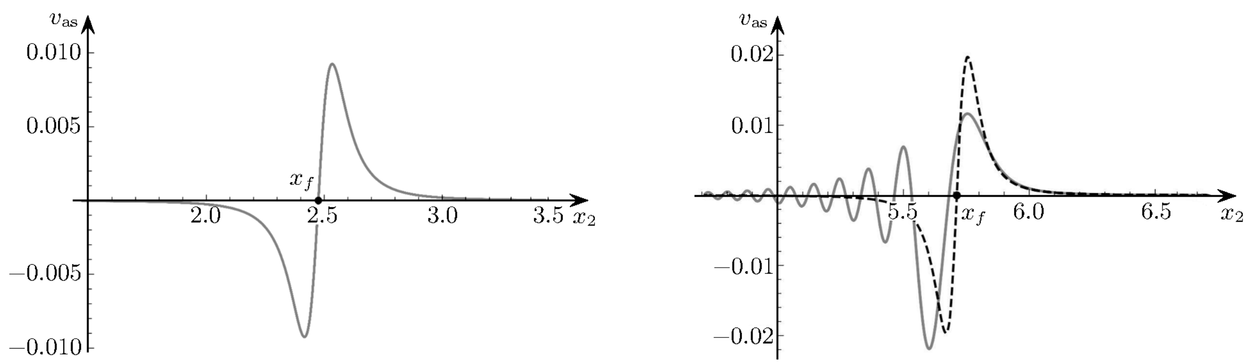

Рис. 2. Графики главной части асимптотического решения до прохождения фокальной точки: слева – в момент времени $t = 3$ до прохождения волной области осцилляций, точка $x_f \approx 2.47$ лежит на фронте; справа – в момент времени $t = 9$ после прохождения зоны осцилляций, точка $x_f \approx 5.71$ лежит на фронте. Штриховой линией показана асимптотика волнового уравнения без учёта дисперсии.

На рис. 3 приведён график главной части асимптотики вдоль указанного луча после возникновения фокальной точки. В этом случае луч пересекает фронт в точках x_{f1} и x_{f2}. Точка x_{f2} является точкой самопересечения фронта, и в её окрестности, в зависимости от значений φ и θ, в нуль обращается либо $|X_\theta|$, либо $|X_\varphi|$. На соответствующих траекториях системы Гамильтона (5) дисперсионные эффекты не играют существенной роли, поэтому главная часть асимптотики в окрестности этой точки представляется суммой функций вида (13), а индекс Маслова в этих случаях равен нулю. Асимптотика решения в окрестности точки x_{f1}

описывается с помощью формулы (9), так как соответствующая траектория системы Гамильтона проходит через область осцилляций. Так как соответствующая траектория прошла через фокальную точку, то её индекс Морса равен единице, и вместо головной волны получается впадина.

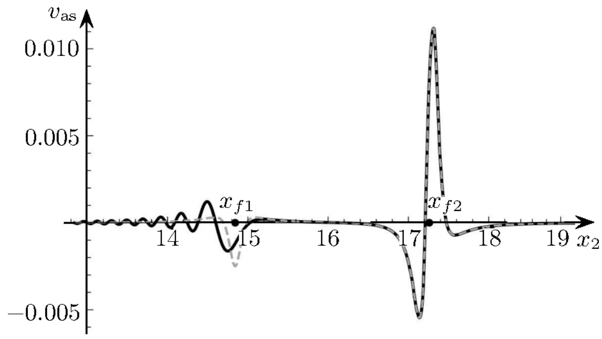

Рис. 3. График главной части асимптотического решения после фокальной точки в момент времени $t = 20$. Точки $x_{f1} \approx 14.8$, $x_{f2} \approx 17.2$ лежат на фронте. Штриховой линией показана асимптотика волнового уравнения без учёта дисперсии.

3. Асимптотика решения многомерного волнового уравнения с дисперсионными эффектами. Приведём формулы для построения асимптотики решения задачи Коши (1), (2) для волнового уравнения с дисперсионными поправками в n-мерном случае.

Перейдём к оператору $\hat{p} = -i\mu\nabla$ в уравнении (1), умножив его на $-\mu^2$. После преобразований получим задачу

$$-\mu^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c^2(x)|\hat{p}|^2 v(x,t) - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}c^2(x)\Phi(x)|\hat{p}|^4 v(x,t), \quad v(x,0) = V(x/\mu), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \quad (25)$$

Начальная функция $V(x/\mu)$ определена формулой (4).

Асимптотика задачи (25) представляется с помощью модифицированного канонического оператора Маслова [8, 12–14]

$$v_{\rm as}(x,t) = \operatorname{Re}\,[\mu^{n/2}e^{-i\pi n/4}K^{\mu}_{\Lambda_t}[\tilde{V}(p)](x,t)].$$

Далее кратко опишем процедуру построения модифицированного канонического оператора Маслова в n-мерном случае.

Перейдём на начальном многообразии Λ_0 к сферическим координатам $\alpha = \rho\boldsymbol{n}(\psi)$, где $\rho \geqslant 0$ и вектор $\boldsymbol{n}(\psi) \in \mathbb{S}^{n-1}$, а $\mathbb{S}^{n-1}$ – единичная сфера размерности $n-1$. Пусть функции $\mathcal{X}(\rho,\psi,t)$ и $\mathcal{P}(\rho,\psi,t)$ являются решением следующей системы Гамильтона:

$$\dot{x} = H_p(x,p), \quad \dot{p} = -H_x(x,p), \quad x|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = \rho\boldsymbol{n}(\psi), \quad \rho \neq 0, \quad (26)$$

где гамильтониан $H(x,p) = c(x)|p|$. Справедливы равенства $\mathcal{X}(\rho,\psi,t) = X(\psi,t)$, $\mathcal{P}(\rho,\psi,t) = \rho P(\psi,t)$, где функции X и P являются решением системы Гамильтона

$$\dot{x} = H_p(x,p), \quad \dot{p} = -H_x(x,p), \quad x|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = \boldsymbol{n}(\psi). \quad (27)$$

Система (26) не определена при $\rho = 0$, однако её решение можно по непрерывности продолжить на $\rho = 0$ (см. [13]), так как функции $X(\psi,t)$ и $P(\psi,t)$ не зависят от ρ. С учётом такого продолжения можно построить многообразие с краем

$$\Lambda_t = \{x = \mathcal{X}(\rho,\psi,t) \equiv X(\psi,t), p = \mathcal{P}(\rho,\psi,t) \equiv \rho P(\psi,t)\}.$$

Краю многообразия в фазовом пространстве соответствуют точки на многообразии, отвечающие значению $\rho = 0$.

Проекция этого многообразия на конфигурационное пространство в каждый момент времени t представляет собой поверхность $\gamma_t = \{x = X(\psi, t)\}$, которую будем называть *фронтом волны*. Асимптотика решения задачи (25) локализована в окрестности этой поверхности.

В любой точке многообразия Λ_t якобиан проектирования $\det \partial\mathcal{X}(\rho, \psi, t)/\partial(\rho, \psi)$ этого многообразия на конфигурационное пространство равен нулю. Это означает, что данное многообразие, с точки зрения классической теории канонического оператора [5], состоит только из особых точек. При этом, в силу построения, край многообразия Λ_t рассматривается как особенность специального вида. В окрестности края канонический оператор Маслова определяется согласно результатам работ [8, 12–14].

Многообразие Λ_t можно покрыть счётным набором карт Ω_j, так что каждый компакт на многообразии покрывается конечным числом карт [5]. Определим ранг $k_j = \operatorname{rank} \Omega_j$ карты Ω_j как наименьшее значение ранга матрицы $\partial\mathcal{X}(\rho, \psi, t)/\partial(\rho, \psi)$ при $(\rho, \psi) \in \Omega_j$. Точки на многообразиях, в которых ранг этой матрицы равен $n-1$ (максимально возможный ранг), называем *регулярными*, остальные точки – *фокальными*.

Обозначим через $g_j(\rho, \psi)$ разбиение единицы, подчинённое покрытию многообразия картами Ω_j. Канонический оператор Маслова, действующий на функцию $\tilde{V}(\rho, \psi)$, заданную на многообразии Λ_t, определяется следующим образом:

$$K^{\mu}_{\Lambda_t}[\tilde{V}(\rho, \psi)](x, t) = \sum_j K_{\Omega_j}[g_j(\rho, \psi)\tilde{V}(\rho, \psi)](x, t).$$

Здесь $K_{\Omega_j}[g_j(\rho, \psi)\tilde{V}(\rho, \psi)]$ – предканонический оператор, записанный в карте Ω_j и определяющий действие канонического оператора на функцию $\tilde{V}(\rho, \psi)$ в этой карте.

Определим предканонический оператор согласно [8, 12–14], учитывая, что карта может содержать точки края многообразия. Пусть ранг карты Ω равен k, тогда в этой карте компоненты вектора ψ можно перенумеровать так, чтобы $\operatorname{rank} \partial X/\partial\phi = k$, где $\phi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$. Оставшиеся компоненты обозначим через $\eta = (\psi_{k+1}, \ldots, \psi_{n-1})$, таким образом $\psi = (\phi, \eta)$. В этой карте определена невырожденная матрица размера $n \times n$

$$M(\psi, t) = (\Pi, P, P_\eta - P_\phi \Pi^{\mathrm{т}} X_\eta), \tag{28}$$

где матрица $\Pi = \Pi(\psi, t)$ имеет размер $n \times k$ и определяется равенством $\Pi^{\mathrm{т}} X_\phi = E_k$, E_k – единичная матрица размера $k \times k$, а верхний индекс т обозначает транспонирование.

Пусть точка x_0 лежит на фронте γ_t, тогда в карте Ω существует решение $\phi = \phi(x_0, t, \eta)$ системы уравнений (см. лемму 6 в [12])

$$\Pi^{\mathrm{т}}(\psi, t)(x_0 - X(\psi, t)) = 0. \tag{29}$$

Определим индекс Маслова карты Ω следующим образом:

$$m(\Omega) = \operatorname{ind} \Gamma(\psi, t) + \sigma.$$

Здесь $\operatorname{ind} \Gamma(\psi, t)$ – приращение индекса Маслова вдоль пути, отвечающего траектории $\Gamma = \{X(\psi, \tau), P(\psi, \tau)\}$ системы Гамильтона (27) при $\tau \in (0, t]$, заканчивающейся в регулярной точке карты Ω. В случае гамильтониана $H(x, p) = c(x)|p|$ величина $\operatorname{ind} \Gamma(\psi, t)$ совпадает с индексом Морса соответствующего пути и равна числу фокальных точек на нём (см. [4; 5, с. 155]).

Число σ при $k \neq n-1$ определяется как число отрицательных собственных чисел матрицы размера $n-k-1 \times n-k-1$

$$W = (X_\eta)^{\mathrm{т}}(E_n - \Pi(X_\phi)^{\mathrm{т}})(P_\eta - P_\phi \Pi^{\mathrm{т}} X_\eta),$$

вычисленной в регулярной точке карты Ω. Если $k = n-1$, то положим $\sigma = 0$.

Введём функции

$$U_k(s,\lambda,\psi)=\int\limits_0^{+\infty}\rho^{n-1-k/2}\tilde V(\rho\boldsymbol{n}(\psi))e^{i(\rho s+\lambda\rho^3)}d\rho,\quad Q(\psi,t)=\frac{c(0)}{2}\int\limits_0^t\Phi(X(\psi,\tau))|P^0(\psi,\tau)|^2\,d\tau.$$

Утверждение 6. *Пусть точка $x_0\in\gamma_t$ и содержится в проекции на конфигурационное пространство карты Ω ранга k. Пусть $\psi=(\phi,\eta)$, а функция $\phi=\phi(x_0,t,\eta)$ – решение системы (29), тогда в окрестности точки x_0 при $\varepsilon\sim\mu^{3/2}$ справедливо равенство*

$$K_\Omega[\tilde V](x,t)=\frac{e^{i\pi(n-k-2m(\Omega))/4}}{(2\pi\mu)^{(n-k)/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k-1}}g(\psi)\frac{c(X(\psi,t))}{c(0)}\sqrt{|\det{(\boldsymbol{n}(\psi),\boldsymbol{n}'(\psi))}||\det M|}U_k(s,\lambda,\psi)\,d\eta,$$

где M – матрица, определённая в (28), а $\boldsymbol{n}'(\psi)$ – матрица производных вектора $\boldsymbol{n}(\psi)$ по координатам ψ. Функция $g(\psi)$ является срезающей функцией, отвечающей карте Ω. Здесь

$$s=s(x,\psi,t)=\frac{\langle P(\psi,t),x-X(\psi,t)\rangle}{\mu},\quad \lambda=\lambda(\psi,t)=\frac{\varepsilon^2}{\mu^3}Q(\psi,t).$$

Из утверждения 6 следуют асимптотические формулы для трёхмерного случая, приведённые в утверждениях 1–3.

4. Вывод усреднённого уравнения. В данном пункте описываются процедура операторного усреднения и вывод усреднённого уравнения, а также приводится обоснование утверждения 5 о малости соответствующей невязки. Мы не будем концентрироваться на вопросах, связанных с корректностью усреднённой задачи и свойствах операторов, возникающих в процессе вывода усреднённого уравнения.

Операторное усреднение. Следуя работам [16, 25–27], воспользуемся операторным усреднением для построения усреднённого уравнения. Решение волнового уравнения (14)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\mathrm{C}^2\left(\frac{\Theta(x)}{\varepsilon},x\right)\Delta u(x,t)$$

ищем в виде $u(x,t)=\Psi(\Theta(x)/\varepsilon,x,t)$, где функция $\Psi(y,x,t)$ 2π-периодична по переменным $y\in\mathbb{R}^m$. Функция $u(x,t)$ будет решением уравнения (14), если функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon^2\Psi_{tt}(y,x,t)=\hat{\mathcal{H}}(x,y,-i\varepsilon\nabla,-i\nabla^\theta_y)\Psi(y,x,t),\tag{30}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(x,y,-i\varepsilon\nabla,-i\nabla^\theta_y)=\mathrm{C}^2(y,x)\langle(-i\varepsilon\nabla-i\nabla^\theta_y),(-i\varepsilon\nabla-i\nabla^\theta_y)\rangle,$$

где $-i\nabla^\theta_y=-i\nabla\Theta(x)\nabla_y$, матрица $\nabla\Theta(x)=(\nabla\theta_1(x),\ldots,\nabla\theta_m(x))$, а $\nabla_y=(\partial/\partial y_1,\ldots,\partial/\partial y_m)$.

Оператор $\hat{\mathcal{H}}$ с областью определения на функциях, периодических и гладких по y на ячейке $\mathbb{T}^m=\{y\in[0,2\pi]^m\}$, а по переменной x из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, является симметричным и положительно определённым в пространстве $L_{2,C}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)$ с весовым скалярным произведением

$$(f(y,x),g(y,x))_{L_{2,C}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\mathbb{T}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\mathrm{C}^2(y,x)}f(y,x)\overline{g(y,x)}\,dy\,dx.$$

Решение уравнения (30) ищется в виде действия псевдодифференциального оператора $\hat\chi$ на функцию v:

$$\Psi(y,x,t)=\hat\chi(\overset{2}{x},-i\overset{1}{\varepsilon\nabla},y)v(x,t),\tag{31}$$

где цифры обозначают порядок действия операторов. При этом предполагается, что функция v не зависит от y и удовлетворяет усреднённому уравнению с гладкими коэффициентами

$$-\varepsilon^2 v_{tt} = \hat{L}v, \quad \hat{L} = L(\overset{2}{x}, -i\overset{1}{\varepsilon\nabla}). \tag{32}$$

Отметим, что операторы $\hat{\chi}$ и $\hat{L}$ зависят от параметра ε, но для краткости записи эта зависимость не указывается.

Подстановка (32) и (31) в уравнение (30) приводит к соотношению между операторами

$$(\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi} - \hat{\chi}\hat{L}) = 0. \tag{33}$$

Если функция $v(x,t)$ – решение уравнения (32), то соотношение (33) является достаточным условием (см. [26]), чтобы функция Ψ была решением уравнения (30). Из этого соотношения определяются операторы $\hat{L}$ и $\hat{\chi}$.

Введём пространство $L_{2,c}(\mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$(w(x), v(x))_{L_{2,c}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2(x)} w(x)\overline{v(x)}\, dx,$$

где функция $c^2(x)$ определена в (17) и равна $c^2(x) = \langle 1/\mathrm{C}^2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m}^{-1}$. Следуя [26], потребуем совпадения нормы функции $\Psi = \hat{\chi}v$ в пространстве $L_{2,C}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ и нормы функции v в пространстве $L_{2,c}(\mathbb{R}^n)$. Это требование приводит к условию нормировки для оператора $\hat{\chi}$:

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \overline{\chi}(p - i\overset{2}{\varepsilon\nabla}, \overset{1}{x}, y) \frac{1}{\mathrm{C}^2(y,x)} \chi(p,x,y)\, dy = \frac{1}{c^2(x)}, \tag{34}$$

с учётом равенства для сопряжённого оператора $\hat{\chi}^* = \overline{\chi}(-i\overset{2}{\varepsilon\nabla}, \overset{1}{x}, y)$.

Отметим, что оператор $\hat{L}$ является симметричным и положительно определённым. Действительно, пусть $\Psi = \hat{\chi}v$, тогда из (33) и (34) вытекает равенство $(\hat{L}v, v)_{L_{2,c}} = (\hat{\mathcal{H}}\Psi, \Psi)_{L_{2,C}}$. Из симметричности и положительной определённости оператора $\hat{\mathcal{H}}$ вытекают аналогичные свойства и для оператора $\hat{L}$.

Доказательство утверждения 4. Напомним, что в утверждении 4 строится символ усреднённого оператора $\hat{L}$.

Перейдём в уравнениях (30) и (32) к оператору $\hat{p} = -i\mu\nabla$:

$$-\mu^2 \Psi_{tt}(y,x,t) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \mathcal{H}\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}, \frac{\varepsilon}{\mu}\overset{1}{\hat{p}}, -i\overset{1}{\nabla}{}_y^\theta\right)\Psi(y,x,t), \tag{35}$$

$$-\mu^2 v_{tt}(x,t) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} L\left(\overset{2}{x}, \frac{\varepsilon}{\mu}\overset{1}{\hat{p}}; \varepsilon\right) v(x,t). \tag{36}$$

Операторнозначный символ оператора $\hat{\mathcal{H}}$ можно представить в виде суммы

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\mathcal{H}\left(x, y, \frac{\varepsilon}{\mu}p, -i\nabla_y^\theta\right) = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\left(\mathcal{H}_0(x, y, \frac{\varepsilon}{\mu}p, -i\nabla_y^\theta) + \varepsilon\mathcal{H}_1(x, y, \nabla_y)\right), \tag{37}$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^0 + \frac{\varepsilon}{\mu}\mathcal{H}_0^1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\mathcal{H}_0^2; \quad \mathcal{H}_1 = -\mathrm{C}^2(y,x)\langle \Delta\Theta(x), \nabla_y\rangle;$$

$$\mathcal{H}_0^0 = \mathrm{C}^2(y,x)(-\Delta_y^\theta); \quad \mathcal{H}_0^1 = 2\mathrm{C}^2(y,x)\langle p, -i\nabla_y^\theta\rangle; \quad \mathcal{H}_0^2 = \mathrm{C}^2(y,x)p^2.$$

Здесь $(-\Delta_y^\theta) = \langle -i\nabla_y^\theta, -i\nabla_y^\theta\rangle$, вектор $\Delta\Theta(x) = (\Delta\theta_1(x), \ldots, \Delta\theta_m(x))$.

Предполагается, что для символа оператора $\hat{\chi}$ справедливо разложение

$$\chi(y,x,\varepsilon p/\mu;\varepsilon)=\chi_0(y,x,\varepsilon p/\mu)+\varepsilon\chi_1(y,x,\varepsilon p/\mu)+\ldots,$$

$$\chi_0(y,x,\varepsilon p/\mu)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m\chi_0^m(y,x,p), \tag{38}$$

где χ_0^m – однородные полиномы по степеням $|p|$. Символ $L(x,p;\varepsilon)$ ищем в виде

$$L(x,\varepsilon p/\mu;\varepsilon)=L_0(x,\varepsilon p/\mu)+\varepsilon L_1(x,\varepsilon p/\mu)+\varepsilon^2L_2(x,\varepsilon p/\mu)+\ldots, \tag{39}$$

$$L_0(x,\varepsilon p/\mu)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m L_0^m(x,p),\quad L_1(x,\varepsilon p/\mu)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^m L_1^m(x,p), \tag{40}$$

где $L_0^m(x,p)$ и $L_1^m(x,p)$ являются однородными полиномами по p степени m.

По аналогии с [16] можно оценить количество членов в (39) и (40), необходимое для того, чтобы асимптотика усреднённой задачи удовлетворяла уравнению с точностью $O(\mu^2)$ при $\varepsilon\sim\mu^{3/2}$. Для этого подставим функцию $v(x,t)=A(x,t)e^{iS(x,t)/\mu}$ в уравнение (36), что приведёт к равенству

$$\left(\mu^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}L(\overset{2}{x},\varepsilon\overset{1}{\hat{p}}/\mu)\right)A(x,t)e^{iS(x,t)/\mu}=e^{iS(x,t)/\mu}\biggl[-S_t^2+i\mu S_{tt}A+i\mu S_tA_t+\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}L_0(x,\varepsilon\nabla S/\mu)A+$$

$$+\frac{\mu^2}{\varepsilon}L_1(x,\varepsilon\nabla S/\mu)A-i\frac{\mu^2}{\varepsilon}\langle\nabla_\xi L_0(x,\varepsilon\nabla S/\mu),\nabla A\rangle-i\frac{\mu}{2}\operatorname{Tr}\left(\frac{\partial^2L_0(x,\varepsilon\nabla S/\mu)}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2S}{\partial x^2}\right)A+\mu^2\hat{G}A\biggr]. \tag{41}$$

Через ξ обозначен второй аргумент символа оператора $L(x,(\varepsilon/\mu)p):$ $\xi=(\varepsilon/\mu)p.$ Оператор $\hat{G}$ такой, что его действие на гладкую функцию A даёт ограниченную функцию. Зависимость оператора $\hat{L}$ от ε и μ для сокращения записи не указывается.

Для того чтобы выражение в правой части равенства (41) было порядка $O(\mu^2),$ достаточно определить члены разложения $L_0^m,$ $m=\overline{0,5},$ L_1^0 и $L_1^1,$ что следует из (40).

Лемма. *Справедливы следующие равенства:*

$$L_0^0(x,p)=L_0^1(x,p)=L_0^3(x,p)=L_0^5(x,p)=0,\quad L_1^0(x,p)=L_1^1(x,p)=0,$$

$$L_0^2(x,p)=c^2(x)|p|^2,\quad L_0^4(x,p)=-c^2(x)\langle|\nabla_y^\theta\psi_2(y,x)|^2\rangle_{\mathbb{T}^m}\hat{p}^4,$$

где функция $c^2(x)=\langle 1/\mathrm{C}^2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m}$ и определена в (17). Функция $\psi_2(y,x)$ является периодическим решением с нулевым средним задачи на ячейке

$$(-\Delta_y^\theta)\psi_2=\frac{c^2(x)-\mathrm{C}^2(y,x)}{\mathrm{C}^2(y,x)},\quad\langle\psi_2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m}=0. \tag{42}$$

Доказательство. Существование гладкого по переменным x и y и 2π-периодичного по y решения задачи (42) следует из работы [26].

С учётом равенств (37)–(39) символы произведений операторов $\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}$ и $\hat{\chi}\hat{L}$ можно представить в виде рядов по степеням ε. Подстановка этих рядов в (33) приводит к уравнениям на $L_0,$ L_1 и $\chi_0,$ $\chi_1:$

$$\mathcal{H}_0\chi_0=\chi_0L_0, \tag{43}$$

$$\mathcal{H}_0\chi_1=\chi_1L_0+\chi_0L_1-\mathcal{H}_1\chi_0+i(\langle\mathcal{H}_{0p},\nabla\rangle-\langle L_{0x},\nabla_p\rangle)\chi_0. \tag{44}$$

Уравнение (43) означает, что функция χ_0 при фиксированных x и малых фиксированных p является собственной функцией оператора $\mathcal{H}_0$ с областью определения на гладких и периодических функциях на ячейке $y \in \mathbb{T}^m$ (см. [26]). Этот оператор при фиксированных x и малых p является симметричным в смысле скалярного произведения

$$(u(x,y,p), v(x,y,p)) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \frac{u(x,y,p)\overline{v(x,y,p)}}{\mathrm{C}^2(y,x)}\, dy. \tag{45}$$

Для $\chi_0(p,x,y)$ из условия нормировки (34), а также из (38) и правил вычисления символа произведения двух операторов, получаем равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} \frac{|\chi_0|^2}{\mathrm{C}^2(y,x)}\, dy = \frac{1}{c^2(x)}. \tag{46}$$

Оператор $\mathcal{H}_0$ при $p = 0$ переходит в оператор $\mathcal{H}_0^0 = \mathrm{C}^2(y,x)(-\Delta_y^\theta)$, поэтому с учётом (46) получаем (см. [26]), что $L_0^0 = 0$ и $\chi_0^0 = 1$.

Из уравнения (43) с помощью (40) определяем следующие члены в разложении символа $L(x,p;\varepsilon)$. Из симметричности оператора $\mathcal{H}_0^0$ следует, что $L_0^1 = 0$ и $\chi_0^1 = 0$. Для L_0^2 и χ_0^2 получаем задачу

$$\mathcal{H}_0^0\chi_0^2 + \mathcal{H}_0^2\chi_0^0 = \chi_0^0 L_0^2.$$

Согласно (45) скалярно умножим это равенство на χ_0^0 и после некоторых вычислений получим $L_0^2 = c^2(x)|p|^2$ и $\chi_0^2 = \psi_2(y,x)|p|^2$, где функция $\psi_2(y,x)$ определена в (42). Аналогичные рассуждения приводят к следующим значениям: $L_0^3 = 0$ и $L_0^4 = -\langle|\nabla_y^\theta\psi_2|^2\rangle_{\mathbb{T}^m} c^2(x)|p|^4$. При этом функция $\chi_0^3(y,x,p)$ является периодическим решением с нулевым средним задачи на ячейке

$$(-\Delta_y^\theta)\chi_0^3(y,x,p) = -2p^2\langle p, -i\nabla_y^\theta\psi_2(y,x)\rangle. \tag{47}$$

При вычислении L_0^4 использовалось равенство

$$c^2(x)\left\langle \frac{\psi_2(y,x)}{\mathrm{C}^2(y,x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m} = \left\langle \psi_2(y,x)\frac{c^2(x) - \mathrm{C}^2(y,x)}{\mathrm{C}^2(y,x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m}, \tag{48}$$

а также факт, что функция $\psi_2(y,x)$ является периодическим решением задачи на ячейке (42). Величина $L_0^5 = 0$, что следует из цепочки равенств

$$L_0^5 = -p^2c^4(x)\left\langle \frac{\chi_0^3(y,x,p)}{\mathrm{C}^2(y,x)} \right\rangle_{\mathbb{T}^m} = -p^2c^2(x)\langle\chi_0^3(y,x,p)(-\Delta_y^\theta)\psi_2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m} =$$
$$= -p^2c^2(x)\langle(-\Delta_y^\theta)\chi_0^3(y,x,p)\psi_2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m} = 2p^4c^2(x)\langle\langle p, -i\nabla_y^\theta\psi_2(y,x)\rangle\psi_2(y,x)\rangle_{\mathbb{T}^m} = 0.$$

Здесь использовалось равенство, аналогичное равенству (48), где вместо ψ_2 стоит χ_0^3. Оператор $(-\Delta_y^\theta)$ мы перенесли на χ_0^3 с помощью интегрирования по частям. Последнее выражение в цепочке равенств равно нулю в силу того, что функция $\psi_2(y,x)$ является периодической с нулевым средним на ячейке $\mathbb{T}^m$, и произведение её самой и производной также будет иметь нулевое среднее.

Функция $\chi_0^4(y,x,p)$ по y является периодическим решением с нулевым средним следующей задачи:

$$(-\Delta_y^\theta)\chi_0^4(y,x,p) = -2\langle p, -i\nabla_y^\theta\chi_0^3(y,x,p)\rangle +$$
$$+ p^4\left(\psi_2(y,x)(-\Delta_y^\theta)\psi_2(y,x) - \langle|\nabla_y^\theta\psi_2(y,x)|^2\rangle_{\mathbb{T}^m}\frac{c^2(x)}{\mathrm{C}^2(y,x)}\right). \tag{49}$$

Перейдём теперь к вычислению символа L_1. Умножим выражение (44) скалярно, согласно (45), на функцию χ_0 и воспользуемся равенством (43) и условием (46), после чего для L_1 получим выражение

$$\frac{1}{c^2(x)}L_1 = (\chi_0, \mathcal{H}_1\chi_0) - i\left(\chi_0, \sum_{j=1}^n \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial p_j}\frac{\partial\chi_0}{\partial x_j} - \frac{\partial L_0}{\partial x_j}\frac{\partial\chi_0}{\partial p_j}\right).$$

Минимальная степень p у выражения справа равна 2, поэтому L_1^0 и L_1^1 равны нулю. Лемма доказана.

На основании леммы доказано утверждение 4.

В процессе доказательства леммы также определяюся члены разложения (38) для оператора χ_0:

$$\chi_0^0 = 1, \quad \chi_0^1 = 0, \quad \chi_0^2 = \psi_2(y,x)|p|^2,$$

где функция $\psi_2(y,x)$ – решение задачи на ячейке (42). Функции $\chi_0^3(y,x,p)$ и $\chi_0^4(y,x,p)$ являются периодическими решениями с нулевым средним задач (47) и (49).

Отметим, что так как не учитывается L_1 из разложения оператора $\hat{L}$, то нас не интересует и вид поправки χ_1 из разложения оператора $\hat{\chi}$.

Если полученные в лемме выражения для $L(x,p;\varepsilon)$ подставить в (41), то в него будут входить только $L_0^2(x,p)$ и $L_0^4(x,p)$. При этом функция $L_0^2(x,p)$ определяет уравнение Гамильтона–Якоби, а поправка $L_0^4(x,p)$ попадает в уравнение переноса, добавляя дисперсионные эффекты к асимптотике решения.

Доказательство утверждения 5. Пусть функция $v_{\mathrm{as}}(x,t)$ является формальным асимптотическим решением уравнения (16) с локализованными начальными данными из (14). Для такой функции справедливо равенство

$$-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_{\mathrm{as}}(x,t) = c^2(x)|\hat{p}|^2 v_{\mathrm{as}}(x,t) - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}c^2(x)\langle|\nabla_y^\theta\psi_2|^2\rangle_{\mathbb{T}^m}|\hat{p}|^4 v_{\mathrm{as}}(x,t) + O(\mu^2).$$

Построим функцию

$$\Psi_{\mathrm{as}}(y,x,t) = \biggl(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\psi_2(y,x)|\hat{p}|^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3}\chi_0^3(y,\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}}) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4}\chi_0^4(y,\overset{2}{x},\overset{1}{\hat{p}})\biggr)v_{\mathrm{as}}(x,t), \tag{50}$$

где $\chi_0^{3,4}(y,x,p)$ определены в (47), (49). Отметим, что в момент времени $t=0$ при $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$ справедливо равенство $\Psi_{\mathrm{as}}(y,x,0) = V(x/\mu) + O(\mu)$.

Покажем, что при подстановке функции (50) в уравнение (35) для невязки выполнена оценка

$$R(y,x,t) = -\mu^2(\Psi_{\mathrm{as}})_{tt} - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\mathcal{H}\biggl(x, y, \frac{\varepsilon}{\mu}\hat{p}, -i\nabla_y^\theta\biggr)\Psi_{\mathrm{as}} = O(\mu^{3/2}),$$

из которой следует, что функция (21), равная $u_{\mathrm{as}}(x,t) = \Psi_{\mathrm{as}}(\Theta(x)/\varepsilon, x, t)$, будет удовлетворять волновому уравнению с быстроосциллирующим коэффициентом (14) с такой же точностью.

Справедливо равенство

$$-\mu^2(\Psi_{\mathrm{as}})_{tt} = \biggl(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\psi_2(y,x)|\hat{p}|^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3}\chi_0^3(y,x,\hat{p}) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4}\chi_0^4(y,x,\hat{p})\biggr)(-\mu^2(v_{\mathrm{as}})_{tt}) =$$

$$= \biggl(c^2(x)|\hat{p}|^2 - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}c^2(x)\langle|\nabla_y^\theta\psi_2|^2\rangle_{\mathbb{T}^m}|\hat{p}|^4 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\psi_2(y,x)|\hat{p}|^2c^2(x)|\hat{p}|^2\biggr)v_{\mathrm{as}}(x,t) + O(\mu^2 + \varepsilon^3/\mu^3).$$

Непосредственное вычисление действия оператора $\hat{\mathcal{H}}$ на функцию $\Psi_{\mathrm{as}}(y,x,t)$ с учётом уравнения на ячейке (42) и формул (47) и (49) приводит к следующему выражению:

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\hat{\mathcal{H}}\Psi_{\mathrm{as}} = \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}(\hat{\mathcal{H}}_0 + \varepsilon\hat{\mathcal{H}}_1)\biggl(1 + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\psi_2(y,x)|\hat{p}|^2 + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3}\chi_0^3(y,x,\hat{p}) + \frac{\varepsilon^4}{\mu^4}\chi_0^4(y,x,\hat{p})\biggr)v_{\mathrm{as}} =$$

$$= c^2(x)|\hat{p}|^2v_{\mathrm{as}} - \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}c^2(x)\langle|\nabla_y^\theta\psi_2|^2\rangle_{\mathbb{T}^m}|\hat{p}|^4v_{\mathrm{as}} + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}c^2(x)\psi_2(y,x)|\hat{p}|^4v_{\mathrm{as}} + O(\varepsilon + \varepsilon^3/\mu^3).$$

Здесь также учитывалось, что действие оператора $\hat{p}$ на гладкие функции аргумента x, в частности на $\psi_2(y,x)$ и $\chi_0^{3,4}(y,x,\hat{p})$, есть $O(\mu)$. Таким образом, для невязки R получаем выражение

$$R(y,x,t) = -\mu^2(\Psi_{\rm as})_{tt} - \frac{\mu^2}{\varepsilon^2}\hat{\mathcal{H}}\Psi_{\rm as} = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\psi_2(y,x)(|\hat{p}|^2c^2(x)|\hat{p}|^2 - c^2(x)|\hat{p}|^4)v_{\rm as} + O\biggl(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{\mu^3} + \mu^2\biggr).$$

В силу того, что функция $c^2(x)$ является гладкой, справедливо равенство $|\hat{p}|^2c^2(x)|\hat{p}|^2v_{\rm as} = c^2(x)|\hat{p}|^4v_{\rm as} + O(\mu)$. В итоге для невязки при условии $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$ получаем нужную оценку $R(y,x,t) = O(\mu^{3/2})$. Утверждение 5 доказано.

Автор выражает благодарность Доброхотову С.Ю., Шафаревичу А.И., Толченникову А.А. и Аникину А.Ю. за ценные советы и указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tolstoy I., Clay C.S.* Ocean Acoustics. Theory and Experiment in Underwater Sound. New York, 1966.
2. *Laufer G.* Introduction to Optics and Lasers in Engineering. New York, 1996.
3. *Dobrokhotov S.Yu., Sergeev S.A., Tirozzi B.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem with localized initial conditions for linearized two-dimensional Boussinesq-type equations with variable coefficients // Rus. J. of Math. Phys. 2013. V. 20. № 2. P. 155–171.
4. *Аллилуева А.И., Доброхотов С.Ю., Сергеев С.А., Шафаревич А.И.* Новые представления канонического оператора Маслова и локализованные асимптотические решения строго гиперболических систем // Докл. РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 261–266.
5. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., 1976.
6. *Маслов В.П.* Операторные методы. М., 1973.
7. *Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., Шафаревич А.И.* Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // Мат. заметки. 2007. Т. 82. № 5. С. 792–796.
8. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Эффективные асимптотики в задачах о распространении волн, порождённых локализованными источниками, в линейных многомерных неоднородных и дисперсионных средах // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 8. С. 107–120.
9. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Проколотые лагранжевы многообразия и асимптотические решения линейных уравнений волн на воде с локализованными начальными условиями // Мат. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 936–943.
10. *Доброхотов С.Ю., Секерж-Зенькович С.Я., Тироцци Б., Тудоровский Т.Я.* Описание распространения волн цунами на основе канонического оператора Маслова // Докл. РАН. 2006. Т. 409. № 2. С. 171–175.
11. *Dobrokhotov S.Yu., Shafarevich A.I., Tirozzi B.* Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Rus. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 192–221.
12. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова // Изв. РАН. Сер. мат. 2017. Т. 81. № 2. С. 53–96.
13. *Dobrokhotov S.Yu., Nazakinskii V.E., Shafarevich A.I.* Canonical operator on punctured Lagrangian manifolds // Rus. J. of Math. Phys. 2021. V. 28. № 1. P. 22–36.
14. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Шафаревич А.И.* Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2021. Т. 76. Вып. 5 (461). С. 3–80.
15. *Scorer R. S.* Numerical evaluation of integrals of the form $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)e^{i\phi(x)}\,dx$ and the tabulation of the function $\mathrm{Gi}\,(z) = (1/\pi)\int_0^\infty \sin(uz + (1/3)u^3)\,du$ // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1950. V. 3. Pt. 1. P. 107–112.
16. *Dobrokhotov S.Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B.* Asymptotic theory of linear water waves in a domain with nonuniform bottom with rapidly oscillating sections // Rus. J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 4. P. 455–474.
17. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.

18. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
19. *Bensousan A., Lions J.L., Papanicolau G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam; New York; Oxford, 1978.
20. *Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. М., 1993.
21. *Marchenko V.A., Khruslov E.Ya.* Homogenization of Partial Differential Equations. Boston, 2006.
22. *Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н.* Об операторных оценках усреднения для эллиптических уравнений с младшими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29. № 5. С. 179–207.
23. *Дородный М.А., Суслина Т.А.* Операторные оценки погрешности при усреднении гиперболических уравнений // Функц. анализ и его прил. 2020. Т. 54. № 1. С. 69–74.
24. *Буслаев В.С.* Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. Вып. 6 (258). С. 77–98.
25. *Грушин В.В., Доброхотов С.Ю., Сергеев С.А.* Осреднение и дисперсионные эффекты в задаче о распространении волн, порожденных локализованным источником // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 170–187.
26. *Брюнинг Й., Грушин В.В., Доброхотов С.Ю.* Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы // Мат. заметки. Т. 92. № 2. С. 163–180.
27. *Brüning J., Grushin V.V., Dobrokhotov S.Yu.* Approximate fromulas for eigenvalues of the Laplace operator on a torus arising in linear problems with oscillaing coefficients // Rus. J. of Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 261–272.

Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 08.04.2022 г.
После доработки 24.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1400–1413

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ГЛАДКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. К. Д. Федоров

Рассмотрена первая начально-краевая задача для однородных параболических систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области Ω на плоскости с криволинейной боковой границей, негладкой при $t=0$. Доказано существование решения этой задачи в классе $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ с помощью метода граничных интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122100090, EDN: KQURND

Введение. Предметом исследования в настоящей работе является первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной параболической системы второго порядка (одномерной по пространственной переменной x) с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области Ω на плоскости с криволинейной боковой границей (см. ниже условие (1)), допускающей наличие "клюва" при $t=0$. Методом граничных интегральных уравнений строится решение поставленной задачи из класса $C^{2,1}(\overline{\Omega})$, которое имеет представление в виде специального параболического потенциала.

Если боковая граница области достаточно гладкая, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0,T]$, где $0<\alpha<1$, и коэффициенты параболической системы из класса Гёльдера, то для любой правой части ψ граничного условия первого рода из класса $\underset{0}{H}^{1+\alpha/2}[0,T]$ согласно [1] (см. также [2, с. 706]) существует единственное решение такой задачи в классе $\underset{0}{H}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$.

Если боковая граница области представляет собой негладкую кривую из класса $H^{1/2+\omega}[0,T]$ (ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини), то для любой ψ, имеющей непрерывную дробную производную порядка $1/2$, равную нулю при $t=0$, согласно [3–5] существует единственное регулярное решение первой начально-краевой задачи в классе $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$.

В настоящей статье рассматривается промежуточный случай условия на правую часть $\psi\in\underset{0}{C}^1[0,T]$ и доказывается, что (несмотря на негладкость при $t=0$ боковой границы области) существует решение поставленной задачи из класса $\underset{0}{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$. Ранее этот результат был получен в [6] для параболической системы с постоянными коэффициентами.

Работа состоит из четырёх пунктов. В п. 1 вводятся основные функциональные пространства, ставится первая начально-краевая задача и формулируется основная теорема 1. В п. 2 исследуется гладкость специального параболического потенциала и доказывается теорема 2, которая имеет самостоятельный интерес, так как может быть использована в других начально-краевых задачах. Доказательству однозначной разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, к которой редуцируется исходная задача, посвящён п. 3. В п. 4 приведено доказательство теоремы 1 о существовании решения поставленной задачи в классе $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Фиксируем числа $T>0$ и $m\in\mathbb{N}$. Введём пространства: $C[0,T]$ – пространство непрерывных (вектор-)

функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|\psi; [0,T]\|^0 := \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi(t)|$; $\underset{0}{C}[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$; $C^1[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi' \in C[0,T]\}$ с нормой $\|\psi; [0,T]\|^1 := \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi(t)| + \max\limits_{t\in[0,T]} |\psi'(t)|$; $\underset{0}{C}{}^1[0,T] = \{\psi \in C^1[0,T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассматриваем полосу

$$D := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leqslant T\}.$$

Пусть Ω – произвольная область из D. Через $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\overline{\Omega}$, с нормой

$$\|u; \Omega\|^{2,1} := \sum_{k=0}^{2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| + \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|.$$

Введём пространство $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}) : \|u; \Omega\|^{(2)} < \infty\}$, где

$$\|u; \Omega\|^{(2)} := \|u; \Omega\|^{2,1} + \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega \\ |\Delta t|\neq 0}} \frac{|\Delta_t u_x(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}},$$

и подпространство

$$\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega}) : u(x,0) = u_x(x,0) = u_{xx}(x,0) = u_t(x,0) = 0\}.$$

Под значениями (вектор-) функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения “изнутри” области.

Под принадлежностью вектор-функции некоторому функциональному пространству понимается тот факт, что все её элементы принадлежат соответствующему пространству.

Для любой матрицы B (или вектора b) под $|B|$ (соответственно $|b|$) понимаем максимум из модулей элементов B (компонент b).

Рассмотрим область Ω вида

$$\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$$

с боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$,

$$g \in C[0,T] \bigcap C^1(0,T], \quad |g'(t)| \leqslant \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Модулем непрерывности, согласно [7, с. 150–151], называем функцию $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, обладающую свойствами: $\omega(0) = 0$; ω не убывает на $[0,+\infty)$; ω непрерывна на $[0,+\infty)$; ω полуаддитивна, а именно $\omega(z_1 + z_2) \leqslant \omega(z_1) + \omega(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in [0,+\infty)$.

Отметим известные свойства модуля непрерывности (см. [7, с. 151–153]): для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $\omega(nz) \leqslant n\omega(z)$, где $z > 0$; функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, а именно $\omega(z_2)/z_2 \leqslant 2\omega(z_1)/z_1$, если $z_2 \geqslant z_1 > 0$. Кроме того (см. [8]), для любого $c > 0$ существует число $C > 0$ такое, что справедлива оценка

$$\omega(|x|) \exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\} \leqslant C\omega(t^{1/2}) \exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{x^2}{t}\right\}$$

для $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [9]) оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=0}^{2} A_k(x,t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m \geqslant 1,$$

где $A_k = \|a_{ijk}\|_{i,j=1}^m$, $k = 0,1,2,$ – $m\times m$-матрицы, элементы которых – вещественнозначные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) для собственных чисел μ_r матрицы A_2 выполнены неравенства $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$, для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$, $r=\overline{1,m}$;

(b) $a_{ijk}\in C^0(\overline{D})$ и справедливы оценки

$$|\Delta_{x,t}a_{ijk}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}), \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad i,j=\overline{1,m}, \quad k=0,1,2,$$

где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1}\,dy \int_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0\in(0,1)$ функция $\nu(z) = \omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает, а именно, существует число $C>0$ такое, что $\nu(z_1)\leqslant C\nu(z_2)$, $z_1\geqslant z_2>0$.

Ставится задача: найти функцию $u\in C(\overline{\Omega})$, являющуюся регулярным решением первой начально-краевой задачи

$$Lu = 0, \quad (x,t)\in\Omega; \quad u|_{t=0} = 0, \quad x\geqslant g(0); \quad u|_\Sigma = \psi(t), \quad t\in[0,T]. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию (см. [10, с. 296–297])

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\exp\{-\sigma^2 A_2(\xi,\tau)t\}\,d\sigma, \quad t>0, \quad 0\leqslant\tau\leqslant T, \quad x,\xi\in\mathbb{R},$$

для которой справедливы следующие неравенства:

$$|\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))| \leqslant Ct^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-cx^2/t\}, \tag{3}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A_2(\xi,\tau))| \leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta\xi| + |\Delta\tau|^{1/2})}{t^{(2k+l+1)/2}}\exp\{-cx^2/t\}, \tag{4}$$

$k,l\geqslant 0$, $x,\xi,\xi+\Delta\xi\in\mathbb{R}$, $\tau,\tau+\Delta\tau\in[0,T]$, $t>0$.

Известно (см. [11], если $m=1$, и [12], если $m\geqslant 2$), что при выполнении условий (a), (b) существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$, системы $Lu=0$ и для неё имеют место оценки

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{5}$$

$2k+l\leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$. Кроме того, для функции

$$W(x,t;\xi,\tau) = \Gamma(x,t;\xi,\tau) - Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau))$$

справедливы неравенства

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \tag{6}$$

$2k+l\leqslant 2$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$, и

$$|\Delta_t\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\exp\{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)\}, \qquad (7)$$

$l=0,1$, $x,\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T$, $\Delta t\leqslant t-\tau$. Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, δ, коэффициентов оператора L и функции ω из условия (1).

Пусть

$$Y(x,t;g(\tau),\tau)=\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(x,t;g(\tau)-r,\tau)\,dr,\quad (x,t)\in\overline{D}. \qquad (8)$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой функции* $\psi\in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$ *решением задачи (2) является (векторный) параболический потенциал*

$$u(x,t)=\int\limits_0^t Y(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \qquad (9)$$

где $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$ *– единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение граничного интегрального уравнения Вольтерры первого рода*

$$\int\limits_0^t Y(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=\psi(t),\quad t\in[0,T]. \qquad (10)$$

При этом $u\in\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)}\leqslant C\|\psi\|^1. \qquad (11)$$

Замечание (см. [6]). Если некоторая функция $v\in\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и $\psi(t)=v(g(t),t)$, то $\psi\in$ $\in\underset{0}{C}{}^1[0,T]$.

2. Специальный параболический потенциал. Заметим, что из (1) следует неравенство

$$\Big|g(t+\Delta t)-g(t)\Big|\leqslant 2|\Delta t|^{1/2}\omega((|\Delta t|)^{1/2}), 0\leqslant t,\quad t+\Delta t\leqslant T. \qquad (12)$$

Пусть

$$Y_j(x,t;g(\tau),\tau)=\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(x,t;g(\tau)+(-1)^j r,\tau)\,dr,\quad (x,t)\in\overline{D},\quad j=1,2.$$

Определим для (вектор-) плотности $\varphi\in C[0,T]$ *параболические потенциалы* $S_j\varphi$, $j=1,2$, формулами

$$S_j\varphi(x,t)=\int\limits_0^t Y_j(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\overline{D},\quad j=1,2.$$

Заметим, что для любой $\varphi\in C[0,T]$ имеют место соотношения

$$S_1\varphi\in C^{2,1}(\Omega),\quad L(S_1\varphi)=0 \ \text{ в } \ \Omega,$$

$$S_2\varphi\in C^{2,1}(D\setminus\overline{\Omega}),\quad L(S_2\varphi)=0 \ \text{ в } \ D\setminus\overline{\Omega}.$$

Докажем, что справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой функции* $\varphi \in C[0,T]$ *справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^k S_j\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1-k/2}, \quad k=0,1, \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad j=1,2; \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in\Omega, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in D\setminus\overline{\Omega};$$

$$\left|\Delta_t\frac{\partial S_1\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{\Omega}, \tag{15}$$

$$\left|\Delta_t\frac{\partial S_2\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t),(x,t+\Delta t)\in\overline{D}\setminus\Omega.$$

Кроме того, если $\varphi(0)=0$, *то*

$$\left|\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\omega_\varphi(t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^2 S_2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\omega_\varphi(t), \quad (x,t)\in D\setminus\overline{\Omega},$$

где ω_φ *– модуль непрерывности функции* φ *на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно доказать для потенциала $S_1\varphi$, для потенциала $S_2\varphi$ доказательство проводится аналогично.

Оценка (13) сразу следует из (5):

$$\left|\frac{\partial^k S_j\varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t (t-\tau)^{-k/2}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1-k/2}, \quad j=1,2, \quad k=0,1.$$

Докажем (14). Представим $S_1\varphi(x,t)$ в виде

$$S_1\varphi(x,t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty} Z(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(t),t))\,dr +$$

$$+\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty}\{(Z(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau)) -$$

$$-Z(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(t),t))) + W(x,t;g(\tau)-r,\tau)\}\,dr \equiv S_1^{(1)}\varphi(x,t)+S_1^{(2)}\varphi(x,t).$$

Для слагаемого $S_1^{(1)}\varphi$ справедлива оценка (см. [6])

$$\left|\frac{\partial^2 S_1^{(1)}\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0, \quad (x,t)\in\Omega.$$

Для слагаемого $S_1^{(2)}\varphi$ из оценок (4), (6) имеем

$$\left|\frac{\partial^2 S_1^{(2)}\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_0^t \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\,d\tau \leqslant C\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(t^{1/2})\|\varphi\|^0.$$

Если, кроме того, $\varphi(0)=0,$ то, используя неравенство

$$|\varphi(\tau)| = |\varphi(\tau)-\varphi(0)| \leqslant \omega_\varphi(\tau) \leqslant \omega_\varphi(t),$$

получим неравенство (16).

Докажем теперь (15). Достаточно рассмотреть $\Delta t>0.$ При $\Delta t \geqslant t$ неравенство (15) следует из оценки (13) для $k=1.$ В случае $0<\Delta t<t$ положим

$$\Delta_t \frac{\partial S_1\varphi}{\partial x}(x,t) = \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x,t+\Delta t; g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \,-$$

$$-\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x,t; g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t-\Delta t} \Delta_t \frac{\partial Y_1}{\partial x}(x,t; g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv J_1(x,t,\Delta t) + J_2(x,t,\Delta t) + J_3(x,t,\Delta t).$$

Оценим слагаемое J_1:

$$|J_1(x,t,\Delta t)| \leqslant \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} |\varphi(\tau)|\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,t+\Delta t; g(\tau)-r,\tau)\right| dr \leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{1}{(t+\Delta t-\tau)^{1/2}}\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Интеграл J_2 оценивается аналогично.

Рассмотрим теперь

$$J_3(x,t,\Delta t) = \int\limits_0^{t-\Delta t} \varphi(\tau)\,d\tau \Biggl(\int\limits_0^{+\infty} \Biggl\{ \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau)+r, t-\tau; A_2(g(\tau)-r,\tau)) \,+$$

$$+\,\Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x,t; g(\tau)-r,\tau) \Biggr\}\,dr \Biggr).$$

Из неравенств (3), (7), (12) и оценки $(a-b)^2 \geqslant a^2/2-b^2,$ $a,b\in\mathbb{R},$ получаем

$$|J_3(x,t,\Delta t)| \leqslant C\|\varphi\|^0 \Biggl(\Delta t \int\limits_0^{t-\Delta t} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau + (\Delta t)^{1/2} \int\limits_0^t \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\,d\tau \Biggr) \leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|^0|\Delta t|^{1/2}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой* $\varphi \in C[0,T]$ *функции*

$$\mathcal{R}_j\varphi(t) := \int\limits_0^t \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t\in[0,T], \quad j=1,2, \tag{17}$$

непрерывны.

Доказательство. Достаточно показать, что функция $\mathcal{R}_1\varphi$ непрерывна, доказательство для функции $\mathcal{R}_2\varphi$ проводится аналогично. Пусть $0<t\leqslant T$. Положим

$$\mathcal{R}_1\varphi(t) = -\int\limits_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t K(g(t),t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

где

$$K(x,t;\tau) = \int\limits_0^{+\infty}\bigg(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau)) - \\ - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(t),t)) + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,t;g(\tau)-r,\tau)\bigg)\,dr. \tag{19}$$

Имеем (см. [6])

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial x}(g(t)-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\right| \leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Кроме того, из оценок (4), (6) получаем

$$\Big|K(x,t;\tau)\Big| \leqslant C\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}. \tag{20}$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\right| \leqslant C\bigg(\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} + \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\bigg), \tag{21}$$

следовательно, интеграл $\mathcal{R}_1\varphi(t)$ сходится и имеет место оценка

$$|\mathcal{R}_1\varphi(t)| \leqslant C\|\varphi\|^0\Big(\omega(t^{1/2}) + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(t^{1/2})\Big).$$

Из последнего неравенства следует, в частности, что

$$\mathcal{R}_1\varphi(0) = \lim_{t\to+0}\mathcal{R}_1\varphi(t) = 0. \tag{22}$$

Докажем непрерывность функции $\mathcal{R}_1\varphi$ на промежутке $(0,T]$. Фиксируем произвольно значение $t_1\in(0,T)$ и рассмотрим последовательность функций

$$\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t) = \int\limits_0^{t-1/n^2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad t\in[t_1,T], \quad n\in\mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n^2 < t_1/2$. Тогда $(\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t))_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность функций, непрерывных на отрезке $[t_1,T]$. Достаточно проверить, что $\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t)\to\mathcal{R}_1\varphi(t)$, $n\to\infty$, равномерно по $t\in[t_1,T]$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t)-\mathcal{R}_1\varphi(t)\to 0$, $n\to\infty$, равномерно по $t\in[t_1,T]$.

Из оценки (21) получаем

$$|\mathcal{R}_{1,n}\varphi(t)-\mathcal{R}_1\varphi(t)|=\left|\int\limits_{t-1/n^2}^{t}\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{t-1/n^2}^{t}\left(\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}+\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\right)|\varphi(\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi\|^0\left(\frac{\omega(t_1^{1/2})}{t_1^{1/2}}\int\limits_{t-1/n^2}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right)\leqslant C(t_1)\|\varphi\|^0\left(\frac{1}{n}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right),$$

откуда следует требуемое равномерное стремление к нулю при $n\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b) и* $\varphi\in C[0,T]$. *Тогда для любого* $t^0\in(0,T]$ *имеют место соотношения (см. (17))*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}}\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)=\frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0)+\mathcal{R}_1\varphi(t^0),\tag{23a}$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in D\setminus\overline{\Omega}}}\frac{\partial^2 S_2\varphi}{\partial x^2}(x,t)=-\frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0)+\mathcal{R}_2\varphi(t^0).\tag{23b}$$

Если, кроме того, $\varphi(0)=0$, *то формулы (23a), (23b) справедливы и для* $t^0=0$.

Доказательство. Достаточно доказать формулу (23a), формула (23b) доказывается аналогично. Фиксируем произвольно $t^0\in(0,T]$ и положим (см. (19)), что

$$\frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t)=-\int\limits_0^t\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t^0),t^0))\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t^0),t^0))-\frac{\partial Z}{\partial x}(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\right)\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t K(x,t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\equiv I_1(x,t)+I_2(x,t)+I_3(x,t),\quad (x,t)\in\Omega.$$

Для слагаемого $I_1(x,t)$ справедливо соотношение (см. [6])

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}}I_1(x,t)=\frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0)-\int\limits_0^{t^0}\frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0)-g(\tau),t^0-\tau;A_2(g(t^0),t^0))\varphi(\tau)\,d\tau.\tag{24}$$

Рассмотрим $I_2(x,t)$. Из представления (см. [13])

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x,t;A_2(\xi,\tau))=-\frac{x}{2t}A_2^{-1}(\xi,\tau)Z(x,t;A_2(\xi,\tau)),\quad x,\xi\in\mathbb{R},\quad t>0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T,$$

оценки (4) и условия (a) на коэффициенты системы получаем неравенство

$$|I_2(x,t)| \leqslant C\Big\{\int\limits_0^t \frac{|x-g(\tau)|}{t-\tau}|Z(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t^0),t^0)) - Z(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))|\,d\tau +$$

$$+\,\omega_0((t-t^0)^{1/2})\int\limits_0^t \frac{|x-g(\tau)|}{t-\tau}|Z(x-g(\tau),t-\tau;A_2(g(t),t))\,d\tau|\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_0((t-t^0)^{1/2})\int\limits_{-\infty}^t \frac{|x-g(\tau)|}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big\{-c\frac{(x-g(\tau))^2}{t-\tau}\Big\}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\omega_0((t-t^0)^{1/2}) \to 0, \quad t\to t^0, \quad (x,t)\in\Omega.$$

Рассмотрим интеграл $I_3(x,t)$. Обозначим $t_1 = t^0/2$. Пусть $\varepsilon > 0$ – фиксированное произвольное число. Для $0 < \delta_1 < t_1$ положим

$$I_3(x,t) - \int\limits_0^{t^0} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t-\delta_1}^t K(x,t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t^0-\delta_1}^{t^0} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \Big(\int\limits_0^{t-\delta_1} K(x,t;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{t^0-\delta_1} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\Big) \equiv$$

$$\equiv J_1(x,t) - J_1(g(t^0),t^0) + (J_2(x,t) - J_2(g(t^0),t^0)).$$

Из оценки (20) следует, что

$$|J_1(x,t)| \leqslant C\int\limits_{t-\delta_1}^t \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}|\varphi(\tau)|\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\delta_1^{1/2}).$$

Аналогично

$$|J_1(g(t^0),t^0)| \leqslant C\int\limits_{t^0-\delta_1}^{t^0} \frac{\widetilde{\omega}_0((t^0-\tau)^{1/2})}{t^0-\tau}|\varphi(\tau)|\,d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\delta_1^{1/2}).$$

Выбрав δ_1 достаточно малым, имеем $|J_1(x,t)| < \varepsilon/4$, $|J_1(g(t^0),t^0)| < \varepsilon/4$.

Для выбранного δ_1 рассмотрим теперь $J_2(x,t)$. В силу непрерывности подынтегральной функции по x, t, τ и непрерывности по t верхнего предела собственного интеграла $J_2(x,t)$ получаем, что существует $\delta_2 > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|J_2(x,t) - J_2(g(t^0),t^0)| < \varepsilon/2,$$

если $|x-g(t^0)| < \delta_2$, $|t-t^0| < \delta_2$.

Таким образом,

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\ (x,t)\in\Omega}} I_3(x,t) = I_3(g(t^0),t^0).$$

Отсюда и из (24) получаем окончательно (см. (18))

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t^0),t^0)\\(x,t)\in\Omega}} \frac{\partial^2 S_1\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0) - \int\limits_0^{t^0} \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0)-g(\tau),t^0-\tau;A_2(g(t^0),t^0))\varphi(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{t^0} K(g(t^0),t^0;\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}A_2^{-1}(g(t^0),t^0)\varphi(t^0) + \mathcal{R}_1\varphi(t^0),$$

и формула (23a) доказана в случае $t^0\in(0,T]$.

Если $t^0=0$ и $\varphi(0)=0$, то (23a) следует из оценки (16) и равенства (22). Лемма доказана.

Из лемм 1–3 следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b) и* $\varphi\in \underset{0}{C}[0,T]$. *Тогда* $S_1\varphi\in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$, $S_2\varphi\in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{D}\setminus\Omega)$ *и имеют место оценки*

$$\|S_1\varphi;\Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\varphi;[0,T]\|^0, \quad \|S_2\varphi;D\setminus\Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\varphi;[0,T]\|^0.$$

3. Граничное интегральное уравнение.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (1), (a), (b). Тогда для любой функции* $\psi\in C^1[0,T]$, $\psi(0)=0$, *интегральное уравнение Вольтерры*

$$\int\limits_0^t Y(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{25}$$

имеет единственное в пространстве $C[0,T]$ *решение* $\varphi\in C[0,T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|^0 \leqslant C\|\psi\|^1. \tag{26}$$

Если, кроме того, $\psi\in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$, *то* $\varphi\in \underset{0}{C}[0,T]$.

Доказательство. Учитывая определение (8), запишем уравнение (25) в виде

$$\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \Gamma(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\,dr = \psi(t), \quad t\in[0,T]. \tag{27}$$

Применим к обеим частям этого соотношения оператор дифференцирования по t:

$$\lim_{\tau\to t-0}\varphi(t)\int\limits_0^{+\infty}\Gamma(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\,dr +$$

$$+\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty}\Big(\Gamma_x(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)g'(t)+\Gamma_t(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\Big)\,dr = \psi'(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} Z(r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z(r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\,dr = \frac{1}{2},$$

и, кроме того, имеем (см. (3), (4), (6) и (12))

$$\Big|\int\limits_0^{+\infty}\Big\{Z(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau))-Z(r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\Big\}+$$

$$+W(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)\,dr\Big|\leqslant C\Big(\omega((t-\tau)^{1/2})+\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})\Big)\to 0,\quad \tau\to t-0.$$

В результате после дифференцирования обеих частей в (27) в силу условия $\psi(0)=0$ получаем эквивалентное (27) уравнение Вольтерры второго рода

$$\varphi(t)+\int\limits_0^t N(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=2\psi'(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{28}$$

где

$$N(t,\tau)=2\int\limits_0^{+\infty}(\Gamma_x(g(t),t;g(\tau)-r,\tau)g'(t)+\Gamma_t(g(t),t;g(\tau)-r,\tau))\,dr\equiv I_1(t,\tau)+I_2(t,\tau).$$

Докажем, что для ядра $N(t,\tau)$ справедлива оценка

$$|N(t,\tau)|\leqslant C\bigg\{\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}+\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\bigg\},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T. \tag{29}$$

Действительно, из условия (1) и оценки (5) для $I_1(t,\tau)$ вытекает неравенство

$$|I_1(t,\tau)|\leqslant C\frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_2(t,\tau)=\int\limits_0^{+\infty}Z_t(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))\,dr+\int\limits_0^{+\infty}(Z_t(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau)-r,\tau))-$$

$$-Z_t(g(t)-g(\tau)+r,t-\tau;A_2(g(\tau),\tau))+W_t(g(t),t;g(\tau)-r,\tau))\,dr\equiv I_{21}(t,\tau)+I_{22}(t,\tau).$$

Для слагаемого $I_{21}(t,\tau)$ справедливо неравенство (см. [6])

$$|I_{21}(t,\tau)|\leqslant C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}.$$

Далее, из оценок (4) и (6) имеем

$$|I_{22}(t,\tau)|\leqslant C\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}.$$

Умножив обе части уравнения (28) на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda>0$ будет выбрано ниже, получим эквивалентное уравнение

$$\varphi^*(t)+\int\limits_0^t N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau=\psi^*(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{30}$$

где
$$\varphi^*(t) := \varphi(t)e^{-\lambda t}, \quad \psi^*(t) := 2\psi'(t)e^{-\lambda t}, \quad N^*(t,\tau) := N(t,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}.$$
Введём обозначение
$$\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t) = \int\limits_0^t N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
и запишем уравнение (30) в операторном виде
$$\varphi^* + \mathcal{B}_\lambda\varphi^* = \psi^*. \tag{31}$$

Заметим, что $\mathcal{B}_\lambda\varphi^* \in C[0,T]$, если $\varphi^* \in C[0,T]$. В самом деле, в силу оценки (29) получаем
$$\lim_{t\to+0} \mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t) = 0.$$

Докажем непрерывность $\mathcal{B}_\lambda\varphi^*$ на $(0,T]$. Фиксируем произвольно $t_1 \in (0,T)$ и рассмотрим последовательность функций
$$\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) = \int\limits_0^{t-1/n^2} N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau, \quad t \in [t_1,T], \quad n \in \mathbb{N}.$$
Не ограничивая общности, считаем, что $1/n^2 < t_1/2$. Тогда $(\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*)_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность функций, непрерывных на отрезке $[t_1,T]$. Докажем, что $\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) \to \mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)$, $n\to\infty$, равномерно по $t \in [t_1,T]$. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) - \mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t) \to 0$, $n\to\infty$, равномерно по $t\in[t_1,T]$.

Из оценки (29) имеем
$$|\mathcal{B}_{\lambda,n}\varphi^*(t) - \mathcal{B}_\lambda\varphi^*| = \left|\int\limits_{t-1/n^2}^t N^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{t-1/n^2}^t \left(\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} + \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\right)|\varphi^*(\tau)|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C\|\varphi^*\|^0\left(\frac{\omega(t_1^{1/2})}{t_1^{1/2}}\int\limits_{t-1/n^2}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right) \leqslant C(t_1)\|\varphi^*\|^0\left(\frac{1}{n} + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(1/n)\right),$$
откуда следует требуемое равномерное стремление к нулю при $n\to\infty$.

Покажем, что оператор $\mathcal{B}_\lambda : C[0,T] \to C[0,T]$ будет сжимающим, если число $\lambda > 0$ выбрать достаточно большим.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Если $0 < t \leqslant \varepsilon^2$, то в силу (29) справедливо неравенство
$$|\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)| \leqslant C(\omega(\varepsilon) + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon))\|\varphi^*\|^0.$$
Если $t > \varepsilon^2$, то
$$|\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)| \leqslant C\|\varphi^*\|^0\left\{\int\limits_0^{\varepsilon^2} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau + \int\limits_{\varepsilon^2}^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau + \right.$$

$$+\int\limits_0^{t-\varepsilon^2}\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\tau+\int\limits_{t-\varepsilon^2}^{t}\frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\,d\tau\biggr\}\leqslant$$

$$\leqslant C\|\varphi^*\|^0\biggl\{\omega(\varepsilon)+\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon}\int\limits_0^t\frac{e^{-\lambda(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon)\biggr\}\leqslant C\|\varphi^*\|^0\biggl\{\omega(\varepsilon)+\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon)\biggr\}.$$

В итоге получаем оценку

$$|\mathcal{B}_\lambda\varphi^*(t)|\leqslant C\|\varphi^*\|^0\biggl\{\omega(\varepsilon)+\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}}+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon)\biggr\},\quad t\in[0,T].$$

Фиксируя сначала $\varepsilon>0$ так, что $C(\omega(\varepsilon)+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(\varepsilon))<1/4$, а затем выбирая $\lambda=\lambda(\varepsilon)$ так, что

$$C\frac{\omega(\varepsilon)+\widetilde{\omega}_0(\varepsilon)}{\varepsilon\lambda^{1/2}}<\frac{1}{4},$$

получаем окончательно $\|\mathcal{B}_\lambda\|<1/2$. Следовательно, уравнение (31) имеет единственное решение $\varphi^*\in C[0,T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi^*\|^0\leqslant C\|\psi^*\|^1.$$

Возвращаясь к первоначальной функции φ, получаем первое утверждение леммы.

Если, кроме того, правая часть $\psi\in \underset{0}{C}{}^1[0,T]$, то из вида уравнения (30) делаем вывод, что $\varphi^*\in\underset{0}{C}[0,T]$ и, следовательно, $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Ищем решение u задачи (2) в виде (векторного) параболического потенциала (9) с плотностью $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$, подлежащей определению. Тогда для любой $\varphi\in C[0,T]$ функция u удовлетворяет уравнению и начальному условию из (2). Подставив (9) в граничное условие из (2), для определения неизвестной плотности $\varphi\in C[0,T]$ имеем интегральное уравнение Вольтерры первого рода (10). Из леммы 4 следует, что это уравнение имеет единственное решение $\varphi\in\underset{0}{C}[0,T]$ и справедлива оценка (26).

Подставив решение φ уравнения (10) в выражение (9) для $u(x,t)$, получим, что определённая таким образом функция u является решением задачи (2). При этом из теоремы 2 и неравенства (26) следует, что $u\in\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и верна оценка (11). Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
4. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coecients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
5. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 503. № 2. С. 26–29.
6. *Федоров К.Д.* О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1623–1634.

7. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
8. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
9. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Московского гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
11. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
12. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. в ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
13. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-В88.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 24.07.2022 г.
После доработки 24.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1414–1430

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2022 г. **В. В. Власов, Н. А. Раутиан**

Рассмотрены вопросы корректной разрешимости начальных задач для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с ядрами интегральных операторов, представимыми интегралами Стилтьеса. Использованный в работе подход связан с применением теории полугрупп операторов.

DOI: 10.31857/S0374064122100107, EDN: KQURSV

Введение. В работе предлагается метод сведения исходной начальной задачи для абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка в сепарабельном гильбертовом пространстве к начальной задаче для системы операторно-дифференциальных уравнений первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. Возникающий при этом линейный оператор в расширенном гильбертовом пространстве является максимально диссипативным и, следовательно, генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы. Полученные результаты базируются на классических результатах теории полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах, изложенных в монографиях [1] и [2]. Устанавливается связь между классическими решениями начальной задачи для операторно-дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве и начальной задачи для исходного абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения.

Упомянутое абстрактное интегро-дифференциальное уравнение может быть реализовано, в частности, как интегро-дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида:

$$u_{tt}(x,t) = \rho^{-1}[\mu\Delta u(x,t) + (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, u(x,t))] -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\rho^{-1}\mu[\Delta u(x,\tau) + \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, u(x,\tau))]\,d\tau - \int\limits_{-\infty}^{t} Q(t-\tau)\rho^{-1}\lambda\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, u(x,\tau))\,d\tau + f(x,t),$$

где $t > 0$, $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ρ, постоянная плотность $\rho > 0$, λ, μ – положительные параметры (коэффициенты Ламе) (см. [3, с. 129–130; 4, с. 54]). Предполагается, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле: $u|_{\partial\Omega} = 0$. Функции ядер интегральных операторов $K(t)$, $Q(t)$ – положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды.

К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. В качестве ядер интегральных операторов могут быть рассмотрены, в частности, суммы убывающих экспонент или суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, имеющие широкое применение в теории вязкоупругости и теории распространения тепла.

Результаты настоящей статьи являются развитием и обобщением результатов, полученных в работах [5–8].

1. Определения, обозначения и постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный оператор $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H, I – тождественный оператор в пространстве H. Пусть

B – самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$ такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$, для любого $x \in D(A)$.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int\limits_l^t K_1(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_l^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad u(t) = \varphi(t), \quad t \in [l, 0], \quad -\infty \leqslant l \leqslant 0, \tag{2}$$

где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1, 2$, имеют представление

$$K_i(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где $d\mu_i$ $(i = 1, 2)$ – положительная мера, порождаемая неубывающей, непрерывной справа функцией μ_i. Интеграл (3) понимается в смысле Стилтьеса. Будем предполагать, что функции μ_i $(i = 1, 2)$ представляют собой суммы абсолютно непрерывных функций и функций скачков (ступенчатых функций), в которых сингулярная компонента отсутствует. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Введём обозначения

$$M_i(t) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau)}{\tau}, \quad t \geqslant 0, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

$$A_0 := \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A + \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)B.$$

Замечание 1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [1, с. 177–179]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в пространстве H, A_0^{-1} – ограниченный оператор.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, вводя на $D(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Определение 1. Назовём вектор-функцию $u(t)$ *классическим* решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабжённые нормами

$$\|u\|_{\Omega_k} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|u(s)\|_H^2\,d\mu_k(s)\right)^{1/2}.$$

Эти пространства являются сепарабельными гильбертовыми (см., например, [9, с. 148]).

Сформулируем теоремы из монографии [1], необходимые для доказательства результатов данной работы.

Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(\mathcal{A})$.

Определение 2 (см. [1, с. 38–39, 58]). Задача Коши

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t), \tag{6}$$

$$Z(0) = Z_0 \tag{7}$$

называется *корректной* (*равномерно корректной*), если

1) для любого $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ существует единственное решение задачи (6), (7);

2) это решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: из того, что $Z_n(0) \to 0$ $(Z_n(0) \in D(\mathcal{A}))$ вытекает, что $Z_n(t) \to 0$ при каждом $t \in [0,T]$ (равномерно по t) на любом конечном интервале $[0,T]$.

Замечание 2. Если задача Коши (6), (7) порождает сжимающую полугруппу в пространстве H, то эта задача равномерно корректна.

Теорема 1.1 (см. [1, с. 41]). *Если задача Коши (6), (7) корректна, то её решение даётся формулой* $Z(t) = S(t)Z_0$ $(Z_0 \in D(\mathcal{A}))$, *где* $S(t)$ *– сильно непрерывная при* $t > 0$ *полугруппа операторов.*

Теорема 6.5 (см. [1, с. 166]). *Если задача Коши (6), (7) равномерно корректна, то формула*

$$Z(t) = S(t)Z_0 + \int\limits_0^t S(t-p)F(p)\,dp \tag{8}$$

даёт решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t)$$

с условием

$$Z(0) = Z_0, \tag{9}$$

где $Z_0 \in D(\mathcal{A})$ *и вектор-функция* $F(t)$ *удовлетворяет одному из условий:*

1) значения функции $F(t) \in D(\mathcal{A})$ *и функция* $\mathcal{A}F(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{H})$;

2) функция $F(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$.

2. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка. Введём новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t,\tau) = \int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds}\,ds, \quad t > 0, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2.$$

Тогда задача (1), (2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \sum_{k=1}^2 \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t,\tau)\,d\mu_k(\tau)\right] = f_1(t), \quad \frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \quad \frac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \tag{10}$$

где $t > 0$, $\tau > 0$,

$$f_1(t) = f(t) - \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau) A + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau) B\right)\varphi(l),$$

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0,$$

$$\xi_k(t,\tau)|_{t=0} = \int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad k = 1,2. \tag{11}$$

Теперь мы должны, во-первых, “превратить” задачу (10), (11) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором она будет корректной, во-вторых, установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (10), (11) и решением исходной задачи (1), (2).

3. Задача Коши в расширенном гильбертовом пространстве. Определим линейный оператор умножения на независимую переменную в пространстве Ω_k, $k = 1,2$.

Определение 3 (см. [2, с. 31]). *Оператор умножения* на независимую переменную $\mathbb{T}_k : \Omega_k \to \Omega_k$, $k = 1,2$, определяется следующим образом:

$$\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau), \quad \xi(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad \tau > 0, \tag{12}$$

где область определения $D(\mathbb{T}_k)$ имеет вид

$$D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}. \tag{13}$$

Введём операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$, $k = 1,2$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad k = 1,2, \quad \tau > 0.$$

Тогда сопряжённые операторы $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$, $k = 1,2$, имеют вид

$$\mathbb{B}_k^*\xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau)\, d\mu_k(\tau), \quad k = 1,2.$$

Действительно, для любых функций $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\left\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} = \int\limits_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau) =$$

$$= \left\langle v, Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau)\, d\mu_k(\tau)\right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^*\xi(\tau)\rangle_H.$$

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$, снабжённое нормой

$$\|(v,\xi_0,\xi_1(\tau),\xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 + \|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством.*

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \Bigg\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},$$

$$\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \quad \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad k = 1, 2\Bigg\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^{\mathrm{т}} = \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\right], A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau)\right)^{\mathrm{т}}, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде произведения операторных матриц

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

В работе [6] показано, что при выполнении условий (4) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ максимально диссипативен и, следовательно, является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Введём четырёхкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad Z_0 = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}$$

и рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \tag{14}$$

$$Z(0) = Z_0. \tag{15}$$

Определение 4. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in D(\mathbb{A})$, $t \in [0, +\infty)$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (14), (15), если она принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}) \bigcap C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$ при любом $\tau > 0$ и удовлетворяет уравнению (14) и начальному условию (15).

4. Теоремы о корректной разрешимости задачи (14), (15). Предположим, что выполнены следующие

Условия ($\boldsymbol{\mathcal{CS}}$):

$$F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0), \quad f_1(t) = f(t) - (M_1(t - l)A + M_2(t - l)B)\varphi(l),$$

где l – заданное число, $-\infty \leqslant l \leqslant 0$; $f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ – заданная вектор-функция; $M_k(\cdot)$, $k = 1, 2$, определяются формулами (5); $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$ – заданные векторы; вектор-функция $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$, где функции $\xi_{0k}(\tau)$, $k = 1, 2$, определяются по формулам

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2;$$

вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in [l, 0]$, $-\infty \leqslant l \leqslant 0$, причём $\varphi(t) \in H_1$, $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in [l, 0]$, $\varphi(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C([l, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$ и, кроме того, $\lim\limits_{t \to l} [A\varphi(t)] = 0$, $-\infty \leqslant l < 0$.

Теорема 1 (о корректной разрешимости (общий случай)). *Пусть выполнены условия (4), $(\mathcal{CS})$ и любое из условий:*

1) вектор-функция $f_1(t)\in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2}f_1(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$;

2) вектор-функция $f_1(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$.

Тогда задача (14), (15) имеет единственное классическое решение

$$Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t):=u'(t)$, $\xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива оценка*

$$E(t):=\frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2+\|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$

$$\leqslant d\biggl[\|\varphi_1\|_H^2+\|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2+\sum_{k=1}^{2}\biggl\|\int\limits_l^0\frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\biggr\|_{\Omega_k}^2+$$

$$+\biggl(\int\limits_0^t\|f(s)-(M_1(s-l)A+M_2(s-l)B)\varphi(l)\|_H\,ds\biggr)^2\biggr],\tag{16}$$

здесь d *– постоянная, не зависящая от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Сформулируем также важные частные случаи теоремы 1.

Теорема 2 (о корректной разрешимости (частный случай $l=0$)). *Пусть выполнено условие (4), данные задачи (14), (15) удовлетворяют условиям*

$$F(t):=(f_1(t),0,0,0),\quad f_1(t)=f(t)-(M_1(t)A+M_2(t)B)\varphi_0,$$

где $f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$ *– заданная вектор-функция,* $M_k(\cdot)$, $k=1,2$, *определяются формулами (5),* $\varphi_0\in H_1$, $\varphi_1\in H_1$ *– заданные векторы, вектор-функция* $Z_0=(\varphi_1,A_0^{1/2}\varphi_0,0,0)\in D(\mathbb{A})$, *и выполнено любое из следующих условий:*

1) вектор-функция $f(t)\in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2}f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$, $\varphi_0\in H_{3/2}$;

2) вектор-функция $f_1(t)\in C^1(\mathbb{R}_+,H)$.

Тогда задача (14), (15) имеет единственное классическое решение

$$Z(t)=(v(t),\xi_0(t),\xi_1(t,\tau),\xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t):=u'(t)$, $\xi_0(t):=A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* $l=0$, $f(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива оценка*

$$E(t):=\frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2+\|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$

$$\leqslant d\biggl[\|\varphi_1\|_H^2+\|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2+\biggl(\int\limits_0^t\|f(s)-(M_1(s)A+M_2(s)B)\varphi_0\|_H\,ds\biggr)^2\biggr],$$

d *– постоянная, не зависящая от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 3 (о корректной разрешимости (частный случай $-\infty\leqslant l<0$)). *Пусть выполнено условие (4), данные задачи (14), (15) удовлетворяют условиям:* $F(t):=(f(t),0,0,0)$, *где* $f(t)\in C(\mathbb{R}_+,H)$ *– заданная вектор-функция,* $M_k(\cdot)$, $k=1,2$, *определяются формулами (5),* $\varphi_0\in H_1$, $\varphi_1\in H_1$ *– заданные векторы, вектор-функция*

$$Z_0=(\varphi_1,A_0^{1/2}\varphi_0,\xi_{01}(\tau),\xi_{02}(\tau))\in D(\mathbb{A}),\tag{17}$$

где функции $\xi_{0k}(\tau)$, $k = 1,2$, *определены формулами*

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1,2,$$

вектор-функция $\varphi(t)$ *задана при* $t \in (l,0]$, *причём* $\varphi(t) \in H_1$, $\varphi'(t) \in H_1$ *при* $t \in (l,0]$, $\varphi(t) \in C((l,0],H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C((l,0],H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, *кроме того,* $\lim\limits_{t\to l}[A\varphi(t)] = 0$, $-\infty \leqslant l < 0$.

Пусть также выполнено любое из следующих условий:

1) вектор-функция $f(t) \in H_{1/2}$ *и* $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$;

2) вектор-функция $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$.

Тогда задача (14), (15) имеет единственное классическое решение

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)),$$

где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ *– классическое решение задачи (1), (2) с соответствующими данными* l, $f(t)$, $\varphi(t)$, φ_0, φ_1, *и справедлива оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant d\Bigg[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \bigg\| \int_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \bigg\|_{\Omega_k}^2 + \bigg(\int_0^t \|f(s)\|_H\, ds\bigg)^2\Bigg],$$

d *– постоянная, не зависящая от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Замечание 2 (достаточные условия корректной разрешимости при $l = -\infty$). Пусть выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau^p} < \infty, \quad k = 1,2, \quad p = 0,1,2, \tag{18}$$

$$\int_{-\infty}^0 \bigg\| A \frac{d\varphi(s)}{ds} \bigg\|^2 ds < \infty. \tag{19}$$

Тогда справедливо условие (17). В частности, если меры $d\mu_k$, $k = 1,2$, имеют компактный носитель, принадлежащий отрезку $[d_0, d_1]$, где $d_0 > 0$, $d_1 < +\infty$, то условия (18) выполнены.

5. Доказательство теоремы 1 о корректной разрешимости задачи (14), (15). Задача (14), (15) является равномерно корректной, поскольку полугруппа $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$, $t > 0$, – сжимающая (см. [6]). Из условий теоремы 1 следует выполнение условий теоремы 1.1 из монографии [1] для задачи (14), (15). Таким образом, для задачи (14), (15) справедлива оценка

$$\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\bigg(\|Z_0\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathbb{H}}\, ds\bigg), \tag{20}$$

где d – постоянная, не зависящая от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1. Оценка (20) следует из формулы (8), применённой к задаче (14), (15), в обозначениях теоремы 1.

Покажем, что $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, где $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2).

Задача Коши (14), (15), записанная покоординатно, имеет вид (10), (11). Рассмотрим последние два уравнения системы (10). Применим к этим уравнениям метод вариации произвольных постоянных. Соответствующие однородные уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi_k(t,\tau)}{dt} = -\mathbb{T}_k\xi_k(t,\tau), \quad t>0.$$

Следовательно, по определению операторов $\mathbb{T}_k\xi(\tau)=\tau\xi(\tau)$, $\tau>0$, $k=1,2$, где $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi\in\Omega_k : \tau\xi\in\Omega_k\}$ (см. (12), (13)), общие решения однородных уравнений могут быть записаны в виде $\xi_k^O(t,\tau)=e^{-t\mathbb{T}_k}C_k(\tau)=e^{-t\tau}C_k(\tau)$, где $\tau>0$, $C_k(\tau)\in\Omega_k$, $k=1,2$, – произвольные векторы.

Применив формулу (8) для решения неоднородных уравнений при заданных начальных условиях

$$\xi_k(t,\tau)|_{t=0} = \int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds, \quad \tau>0, \quad k=1,2,$$

и положив $v(t)=\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi(0)=\varphi_0$ при $t\in(l,0]$, получим

$$\xi_k(t,\tau) = \int\limits_l^t e^{-(t-s)\mathbb{T}_k}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds = \int\limits_l^t e^{-(t-s)\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds.$$

Из первого уравнения системы, согласно области определения оператора $\mathbb{A}$, имеем

$$\xi_0(t)+\sum_{k=1}^2\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)\,d\mu_k(\tau)\in D(A_0^{1/2}). \tag{21}$$

Из второго уравнения системы получаем, что

$$\xi_0(t) = \int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi(l).$$

Подставив найденные выражения для функций ξ_k в (21), имеем

$$\int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi(l) + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\int\limits_l^t e^{-(t-s)\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\mu_k(\tau) =$$

$$= \int\limits_l^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds + A_0^{1/2}\varphi(l)\in D(A_0^{1/2}).$$

По условиям теоремы 1 $A\varphi(t)$, $B\varphi(t)$ ограничены при $t\to l$ при фиксированном значении параметра l, $-\infty\leqslant l\leqslant 0$, следовательно, $\varphi(l)\in H_1$, откуда получаем

$$\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds\in D(A_0^{1/2}).$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$-A_0^{1/2}\int\limits_l^t\left[A_0^{1/2}+\sum_{k=1}^2\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2}\right]v(s)\,ds=$$

$$= -A_0 \int\limits_l^t A_0^{-1/2}\left[I + \sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}v(s)\,ds, \quad t>0. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\int\limits_l^t A_0^{-1/2}\left[I + \sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}v(s)\,ds \in D(A_0). \tag{23}$$

Введём обозначение

$$R(t) := A_0^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2}, \quad t>0,$$

тогда вектор-функцию (23) можно записать в виде

$$\int\limits_l^t v(s)\,ds + \int\limits_l^t R(t-s)v(s)\,ds = y(t) \in D(A_0). \tag{24}$$

После интегрирования по частям в (24) получаем следующее интегральное уравнение:

$$(I+R(0))\int\limits_l^t v(s)\,ds + \int\limits_l^t R'(t-s)\left(\int\limits_l^s v(s)\,ds\right)ds = y(t), \quad y(t)\in C(\mathbb{R}_+;H_1), \tag{25}$$

где

$$R'(t) = -A_0^{-1/2}\sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_k(\tau)\right)Q_k^*Q_kA_0^{1/2} =$$

$$= -\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau)\right)A_0^{-1}A - \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau)\right)A_0^{-1}B,$$

$$R(0) = A_0^{-1/2}\left[\sum_{k=1}^{2}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)Q_k^*Q_k\right]A_0^{1/2} = \left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right)A_0^{-1}A + \left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right)A_0^{-1}B.$$

Уравнение (25) можно записать в виде

$$(I+R(0))\int\limits_0^t v(s)\,ds + \int\limits_0^t R'(t-s)\left(\int\limits_0^s v(p)\,dp\right)ds = y(t) - \Phi(t), \tag{26}$$

где

$$\Phi(t) := (I+R(0))(\varphi(0)-\varphi(l)) + \int\limits_l^0 R'(t-s)(\varphi(s)-\varphi(l))\,ds + \int\limits_0^t R'(t-s)(\varphi(0)-\varphi(l))\,ds,$$

$\Phi(t)\in D(A_0)$, так как заданная вектор-функция $A_0\varphi(t)\in C([l,0],H)$ по условию теоремы.

Введём вектор-функцию $w(t) := \int_0^t v(s)\,ds$, тогда уравнение (26) можно записать в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$(I + R(0))w(t) + \int\limits_0^t R'(t-s)w(s)\,ds = y(t) - \Phi(t). \tag{27}$$

Покажем, что $R'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))$. Действительно, для любого $z \in H_1$ справедлива оценка

$$\|R'(t)z\|_{H_1} = \left\| \left[\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau) \right) A + \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau) \right) B \right] A_0^{-1}(A_0 z) \right\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau) \right) A A_0^{-1} + \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau) \right) B A_0^{-1} \right\|_H \|z\|_{H_1} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_1(\tau) \right) \|A A_0^{-1}\|_H + \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_2(\tau) \right) \|B A_0^{-1}\|_H \right] \|z\|_{H_1}.$$

Таким образом, $R'(t) \in \mathcal{B}(H_1)$. Кроме того, для любых $t_1, t_2 > 0$ выполняется неравенство

$$\|R'(t_1) - R'(t_2)\|_{H_1} \leqslant \left(\int\limits_0^{+\infty} (e^{-t_1\tau} - e^{-t_2\tau})\,d\mu_1(\tau) \right) \|A A_0^{-1}\|_H + \left(\int\limits_0^{+\infty} (e^{-t_1\tau} - e^{-t_2\tau})\,d\mu_2(\tau) \right) \|B A_0^{-1}\|_H.$$

Следовательно, $R'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))$. Из (27) получаем

$$w(t) = (I + R(0))^{-1} \left(y(t) - \Phi(t) - \int\limits_0^t R'(t-s)w(s)\,ds \right) =: Lw(t),$$

где оператор $L : C(\mathbb{R}_+, H_1) \to C(\mathbb{R}_+, H_1)$. Покажем, что $\|L\|_{C(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}(H_1))} < +\infty$.

Утверждение. *Для любых функций* $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ *и для любого* $T > 0$ *при* $t \in [0, T]$ *имеет место оценка*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} \leqslant \kappa \sup_{t \in [0,T]} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa = \|(M_1(0)A + M_2(0)B)(A + B)^{-1}\|_H < +\infty$, *функции* $M_k(t)$, $k = 1, 2$, *определены формулами (5).*

Действительно, для любых $w_1(t), w_2(t) \in H_1$ при $t > 0$ имеем

$$\|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} = \left\| (I + R(0))^{-1} \int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s) - w_2(s))\,ds \right\|_{H_1}. \tag{28}$$

Далее, для любого $z \in H_1$ имеем

$$\|(I + R(0))^{-1} z\|_{H_1} = \|A_0 (I + R(0))^{-1} A_0^{-1}(A_0 z)\|_H = \|(A_0(I + R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0 z)\|_H.$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0, что $A_0(I + R(0))A_0^{-1} = (A + B)A_0^{-1}$. Таким образом,

$$\|(A_0(I + R(0))A_0^{-1})^{-1}(A_0 z)\|_H = \|A_0 (A + B)^{-1}(A_0 z)\|_H. \tag{29}$$

Подставляя в формулу (29) $z = \int_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds$, учитывая представление (28) для любого $T > 0$, получаем

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} = \sup_{t\in[0,T]} \left\| A_0(A+B)^{-1}A_0 \int\limits_0^t R'(t-s)(w_1(s)-w_2(s))\,ds \right\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \left\| A_0(A+B)^{-1}A_0 \int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\,ds \right\|_H \sup_{t\in[0,T]} \|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1}. \tag{30}$$

Можно установить оценку

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| A_0(A+B)^{-1}A_0 \int\limits_0^t R'(t-s)A_0^{-1}\,ds \right\|_H =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} \|A_0(A+B)^{-1}A_0(R(t)-R(0))A_0^{-1}\|_H \leqslant \|A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\|_H. \tag{31}$$

Нетрудно проверить, используя определение оператора A_0, что

$$\|A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1}\|_H = \|(M_1(0)A + M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H < +\infty. \tag{32}$$

Действительно, справедлива цепочка равенств

$$A_0(A+B)^{-1}A_0R(0)A_0^{-1} = A_0(A+B)^{-1}A_0(M_1(0)A_0^{-1}A + M_2(0)A_0^{-1}B)A_0^{-1} =$$

$$= A_0(A+B)^{-1}(M_1(0)A + M_2(0)B)A_0^{-1} = A_0(A+B)^{-1}(A+B-A_0)A_0^{-1} =$$

$$= A_0(A+B)^{-1}((A+B)A_0^{-1} - I) = I - A_0(A+B)^{-1} =$$

$$= I - (A+B-M_1(0)A - M_2(0)B)(A+B)^{-1} = (M_1(0)A + M_2(0)B)(A+B)^{-1}.$$

Из установленных оценок (30)–(32) следует, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \|Lw_1(t) - Lw_2(t)\|_{H_1} \leqslant \|(M_1(0)A + M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H \sup_{t\in[0,T]} \|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1} =$$

$$= \kappa \sup_{t\in[0,T]} \|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1},$$

где $\kappa = \|(M_1(0)A + M_2(0)B)(A+B)^{-1}\|_H < +\infty$. Отсюда для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем неравенство

$$\sup_{t\in[0,T]} \|L^n w_1(t) - L^n w_2(t)\|_{H_1} \leqslant \frac{\kappa^n T^n}{n!} \sup_{t\in[0,T]} \|w_1(t)-w_2(t)\|_{H_1}.$$

Таким образом, значение n можно выбрать настолько большим, что $\kappa^n T^n/n! < 1$. Следовательно, $\|L^n\|_{C([0,T];\mathcal{B}(H_1))} < 1$, т.е. отображение $L^n : C([0,T],H_1) \to C([0,T],H_1)$ является сжимающим, и уравнение (27) имеет единственное решение $w(t) \in C([0,T],H_1)$. В силу произвольности $T > 0$ отсюда получаем, что решение $w(t) \in C([0,+\infty),H_1)$. Тогда

$$\int\limits_l^t v(s)\,ds = \int\limits_l^0 v(s)\,ds + \int\limits_0^t v(s)\,ds = \int\limits_l^0 \varphi'(s)\,ds + w(t) = \varphi(0) - \varphi(l) + w(t) \in C([0,+\infty),H_1).$$

Вернёмся к первому уравнению системы (10) и воспользуемся тем, что

$$\int\limits_l^t v(s)\,ds \in C([0,+\infty), H_1).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$-A_0^{1/2}\Big[\xi_0(t)+\sum_{k=1}^2 Q_k^*\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_k(t,\tau)\,d\tau\Big]+f(t)-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l)=$$

$$=-A_0^{1/2}\Big[\int\limits_l^t A_0^{1/2}v(s)\,ds+A_0^{1/2}\varphi(l)+\sum_{k=1}^2 Q_k^*\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Q_kA_0^{1/2}v(s)\,ds\,d\mu_k(\tau)\Big]+$$

$$+f(t)-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l)=$$

$$=-\Big[\int\limits_l^t A_0v(s)\,ds+A_0\varphi(l)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Av(s)\,ds\,d\mu_1(\tau)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Bv(s)\,ds\,d\mu_2(\tau)\Big]+$$

$$+f(t)-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l). \qquad (33)$$

С помощью замены переменной $v(t):=u'(t)$, $u(t)=\varphi(t)$, $t\in[l,0]$, $u(+0)=\varphi_0$, $\varphi(0)=\varphi_0$ в выражении (33) и формулы интегрирования по частям получим

$$-\Big[\int\limits_l^t A_0u'(s)\,ds+A_0\varphi(l)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Au'(s)\,ds\,d\mu_1(\tau)+\int\limits_0^\infty\int\limits_l^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}Bu'(s)\,ds\,d\mu_2(\tau)\Big]+$$

$$+f(t)-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l)=$$

$$=-\Big[A_0u(t)+\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)Au'(s)\,ds+\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu'(s)\,ds\Big]+$$

$$+f(t)-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)A+\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)B\Big)\varphi(l)=$$

$$=-A_0u(t)-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_1(\tau)\Big)Au(s)\Big|_l^t\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_1(\tau)Au(s)\,ds-$$

$$-\Big(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau}\,d\mu_2(\tau)\Big)Bu(s)\Big|_l^t+\int\limits_l^t\int\limits_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\,d\mu_2(\tau)Bu(s)\,ds+$$

$$+ f(t) - \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau) B\right)\varphi(l) =$$

$$= -A_0 u(t) - \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) Au(t) + \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau)\right) Au(l) +$$

$$+ \int_l^t \int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\, d\mu_1(\tau) Au(s)\, ds - \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) Bu(t) +$$

$$+ \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau)\right) Bu(l) + \int_l^t \int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\, d\mu_2(\tau) Bu(s)\, ds +$$

$$+ f(t) - \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau) B\right)\varphi(l) =$$

$$= -A_0 u(t) - \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) Au(t) + \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau)\right) A\varphi(l) +$$

$$+ \int_l^t \int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\, d\mu_1(\tau) Au(s)\, ds - \left(\int_0^\infty \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) Bu(t) + \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau)\right) B\varphi(l) +$$

$$+ \int_l^t \int_0^\infty e^{-(t-s)\tau}\, d\mu_2(\tau) Bu(s)\, ds + f(t) - \left(\int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_1(\tau) A + \int_0^\infty \frac{e^{-(t-l)\tau}}{\tau}\, d\mu_2(\tau) B\right)\varphi(l) =$$

$$= -(A+B)u(t) + \int_l^t K_1(t-s) Au(s)\, ds + \int_l^t K_2(t-s) Bu(s)\, ds + f(t).$$

Таким образом, полученное уравнение совпадает с интегро-дифференциальным уравнением (1) с начальными условиями (2). Следовательно, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2). Более того, выполнение условий теоремы 1 обеспечивает выполнение условий теоремы 6.5 из работы [1, с. 166], и тогда оценка (16) следует из оценки (20). Теорема 1 доказана.

Доказательства теорем 2, 3 повторяют доказательство теоремы 1 при $l = 0$ и $-\infty \leqslant l < 0$ соответственно.

Доказательство замечания 2. Условие (17) равносильно выполнению условий

$$A_0^{1/2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \left(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds\right) d\mu_k(\tau) \in D(A_0^{1/2}),$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \in \Omega_k, \quad \int_{-\infty}^0 \sqrt{\tau} e^{s\tau} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \in \Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

По условию теоремы 3 $\varphi_0 \in H_1$ и $\varphi^{(1)}(t) \in C((-\infty, 0], H_1)$. Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получаем оценки

$$\left\| A_0^{1/2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_1^* \left(\int_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_1 A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds\right) d\mu_1(\tau)\right\|_H \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \biggl(\int\limits_{-\infty}^0 e^{s\tau} \biggl\| A_0^{1/2} Q_1^* Q_1 A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} \biggr\|_H ds\biggr) \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \biggl(\int\limits_{-\infty}^0 e^{2s\tau}\, ds\biggr)^{1/2} \biggl(\int\limits_{-\infty}^0 \biggl\| A \frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2 ds\biggr)^{1/2} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau} \leqslant C_1 \int\limits_0^\infty \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau^{3/2}} \biggl(\int\limits_{-\infty}^0 \biggl\| A \frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2 ds\biggr)^{1/2},$$

поскольку $A_0^{1/2} Q_1^* Q_1 A_0^{1/2} = A$. Аналогично рассматриваем случай $k = 2$. Справедливы следующие оценки:

$$\int\limits_0^\infty \biggl\| \int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \biggr\|_H^2 d\mu_k(\tau) \leqslant C_2 \int\limits_0^\infty \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau^2} \biggl(\int\limits_{-\infty}^0 \biggl\| A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2 ds\biggr)^{1/2},$$

$$\int\limits_0^\infty \biggl\| \int\limits_{-\infty}^0 \sqrt{\tau} e^{s\tau} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds \biggr\|_H^2 d\mu_k(\tau) \leqslant C_3 \int\limits_0^\infty d\mu_k(\tau) \biggl(\int\limits_{-\infty}^0 \biggl\| A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\biggr\|_H^2 ds\biggr)^{1/2}, \quad k = 1, 2,$$

где $C_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ – некоторые константы. Таким образом, условия (18), (19) являются достаточными для выполнения условия (17).

6. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим функции

$$\mu_1(\tau) = \biggl(\sum_{k=0}^{j-1} a_k\biggr) \chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau),$$

$$\mu_2(\tau) = \biggl(\sum_{k=0}^{j-1} b_k\biggr) \chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau), \quad \tau \in [\beta_{j-1}, \beta_j), \quad j = \overline{1, N} \ \ (\text{или} \ \ j \in \mathbb{N}),$$

где $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $\chi[\beta_{j-1}, \beta_j)(\tau)$ – характеристические функции интервалов $[\beta_{j-1}, \beta_j)$, $0 \leqslant \beta_{j-1} < \beta_j$, $\beta_0 = 0$.

Тогда ядра интегральных операторов имеют представления

$$K_1(t) = \sum_{j=1}^N a_j e^{-\beta_j t}, \quad K_2(t) = \sum_{j=1}^N b_j e^{-\beta_j t}$$

и условия (4) принимают вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

$$M_1(t) = \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t}, \quad M_2(t) = \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} e^{-\beta_j t},$$

$$\|\xi\|_{\Omega_1} = \biggl(\int\limits_0^{+\infty} \|\xi(s)\|_H^2\, d\mu_1(s)\biggr)^{1/2} = \biggl(\sum_{n=1}^N a_n \|\xi_n\|_H^2\biggr)^{1/2},$$

$$\|\xi\|_{\Omega_2} = \biggl(\int\limits_0^{+\infty} \|\xi(s)\|_H^2\, d\mu_2(s)\biggr)^{1/2} = \biggl(\sum_{n=1}^N b_n \|\xi_n\|_H^2\biggr)^{1/2},$$

где $\xi_n = \xi(\beta_n) \in H$, $n \in \{1, \ldots, N\}$.

В этом случае задача (14), (15) может быть записана следующим образом:

$$\frac{dv(t)}{dt}+A_0^{1/2}\left[\xi_0(t)+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\sqrt{\beta_j}}Q_1^*\xi_{1j}(t)+\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\sqrt{\beta_j}}Q_2^*\xi_{2j}(t)\right]=f_1(t),\quad \frac{d\xi_0(t)}{dt}=A_0^{1/2}v(t),$$

$$\frac{d\xi_{1j}(t)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\beta_j}}Q_1A_0^{1/2}v(t)-\beta_j\xi_{1j}(t,\tau),\quad \frac{d\xi_{2j}(t)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\beta_j}}Q_2A_0^{1/2}v(t)-\beta_j\xi_{2j}(t,\tau),\quad j=\overline{1,N},$$

$$v(t)|_{t=0}=\varphi_1,\quad \xi_0(t)|_{t=0}=A_0^{1/2}\varphi_0,\quad \xi_{kj}(t)|_{t=0}=\int\limits_l^0\frac{e^{\beta_j s}}{\sqrt{\beta_j}}Q_kA_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds,\quad k=1,2,\quad j=\overline{1,N},$$

$$f_1(t)=f(t)-\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\beta_j}e^{-\beta_j(t-l)}A+\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\beta_j}e^{-\beta_j(t-l)}B\right)\varphi(l).$$

Оценка (16) в этом случае имеет вид

$$E(t):=\frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2+\|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2)\leqslant\frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2\leqslant$$

$$\leqslant d\left[\|\varphi_1\|_H^2+\|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2+\sum_{k=1}^{2}\left\|\int\limits_l^0\frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\,ds\right\|_{\Omega_k}^2+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^t\left\|f(s)-\sum_{j=1}^{N}\frac{e^{-\beta_j(s-l)}}{\beta_j}(a_jA+b_jB)\varphi(l)\right\|_H ds\right)^2\right].$$

Пример 2. Рассмотрим функции

$$K_1(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\,\text{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t),\quad K_2(t)=\sum_{j=1}^{N}b_j\,\text{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t),$$

где $0<\alpha<1$, $a_j>0$, $b_j\geqslant 0$, $0\leqslant\beta_{j-1}<\beta_j$, $j=\overline{1,N}$, $\beta_0=0$,

$$\text{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t):=t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_j)^nt^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]},\quad j=\overline{1,N},$$

– функции Работнова (см. [10, с. 36]), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Функции Работнова имеют следующие интегральные представления (см. [10, с. 29]):

$$\text{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}\,d\tau}{\tau^\alpha+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha}},\quad 0<\alpha<1,\quad j=\overline{1,N}.$$

Тогда

$$d\mu_1(\tau)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{\tau^\alpha+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha}}\right)d\tau,$$

$$d\mu_2(\tau)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j}{\tau^\alpha+2\beta_j\cos(\pi\alpha)+\beta_j^2\tau^{-\alpha}}\right)d\tau,$$

$$M_1(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}\, d\mu_1(\tau)}{\tau} = \sum_{j=1}^N a_j \int\limits_t^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s)\, ds,$$

$$M_2(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}\, d\mu_2(\tau)}{\tau} = \sum_{j=1}^N b_j \int\limits_t^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s)\, ds.$$

Условия (4) принимают вид

$$\sum_{j=1}^N \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

В этом случае задача (14), (15) имеет представление

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\bigg[\xi_0(t) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{j=1}^N \int\limits_0^{+\infty} \frac{(a_j Q_1^*\xi_1(t,\tau) + b_j Q_2^*\xi_2(t,\tau))\, d\tau}{\sqrt{\tau}(\tau^\alpha + 2\beta_j\cos(\pi\alpha) + \beta_j^2\tau^{-\alpha})}\bigg] = f_1(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2} v(t),$$

$$\frac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_1 A_0^{1/2} v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \quad \frac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_2 A_0^{1/2} v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \quad \tau > 0,$$

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0} = \int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad k = 1, 2,$$

$$f_1(t) = f(t) - \sum_{j=1}^N \bigg(\bigg(\int\limits_{t-l}^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s)\, ds\bigg)(a_j A + b_j B)\varphi(l)\bigg).$$

Оценка (16) принимает вид

$$E(t) := \frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2) \leqslant \frac{1}{2}\|Z(t)\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant d\bigg[\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \bigg\|\int\limits_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_1 A_0^{1/2}\frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds\bigg\|_{\Omega_k}^2 +$$

$$+ \bigg(\int\limits_0^t \bigg\| f(s) - \sum_{j=1}^N \bigg(\int\limits_{s-l}^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, \tau)\, d\tau\bigg)(a_j A + b_j B)\varphi(l)\bigg\|_H ds\bigg)^2\bigg].$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при частичной финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
2. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
3. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
4. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 536–551.
7. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.
8. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
9. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961.
10. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.
После доработки 01.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1431–1435

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ

© 2022 г. В. В. Козлов

Доказана теорема о неустойчивости равновесия в автономной системе дифференциальных уравнений с интегральным инвариантом: если в некоторой окрестности B равновесия определена функция V с неотрицательной производной $\dot{V}$ в силу системы, причём $\dot{V} > 0$ в некоторых точках B, сколь угодно близких к состоянию равновесия, то это равновесие неустойчиво. В отличие от классических теорем Ляпунова–Четаева–Красовского здесь не накладывается никаких ограничений на свойства самой функции V в окрестности положения равновесия.

DOI: 10.31857/S0374064122100119, EDN: KQYOBT

Введение. Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v_i(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

допускающая интегральный инвариант

$$\int \rho(x)\, d^n x, \quad \rho > 0.$$

Как известно, плотность удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Пусть $x = 0$ – положение равновесия: $v(0) = 0$. Необходимое условие существования интегрального инварианта сводится к равенству

$$\operatorname{div} v|_{x=0} = 0.$$

Наша цель – указать новые условия неустойчивости равновесия $x = 0$. Положим

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\},$$

где ε – некоторое положительное число.

Дифференциальные уравнения (1) могут не определять динамическую систему в пространстве $\mathbb{R}^n$ из-за возможности ухода её решений в бесконечность за конечное время. Чтобы этого избежать, введём гладкую положительную функцию $\rho_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая тождественно равна единице в шаре B и достаточно быстро убывает на бесконечности. Замена времени по формуле

$$d\tau = \frac{1}{\rho_1}\, dt$$

не меняет систему в области B и сохраняет фазовые траектории (и направление движения по ним). При подходящем выборе функции ρ_1 решения новой системы дифференциальных уравнений определены при всех $\tau \in \mathbb{R}$. Кроме того, новая система допускает интегральный инвариант с плотностью ρ/ρ_1.

Напомним обобщённую теорему Красовского [1, с. 84; 2, с. 31] об условиях неустойчивости равновесия $x = 0$ системы (1): если найдётся открытая область Ω $(0 \in \partial\Omega)$ и функция $V\colon B \to \mathbb{R}$, $V(0) = 0$ такие, что выполняются условия

1) $V(x) > 0$ в Ω,

2) $V(x) \equiv 0$ при всех $x \in \partial\Omega \bigcap B$,

3) $\dot{V}(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \Omega \bigcap B$,

4) множество $\{x \in B : \dot{V}(x) = 0\} \bigcap \Omega$ не содержит целых полутраекторий $\{x(t),\ \ t \geqslant 0\}$ системы,

то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

В первоначальной формулировке этой теоремы предполагалось, что условие 3) выполнено при всех $x \in B$ (см. [1, с. 84]). Область Ω, очевидно, инвариантна относительно фазового потока системы (1) (согласно условиям 1) и 2)). Собственно, область Ω определяется заданием функции V. Формулировка четвёртого условия несколько отличается от соответствующей формулировки в работах [1, с. 84; 2, с. 31].

Пусть теперь Ω – проколотая окрестность точки $x = 0$. Более точно, пусть гладкая функция V определена в шаре B и удовлетворяет условиям 1) и 3) теоремы Красовского. Если система (1) допускает интегральный инвариант, то V – первый интеграл этой системы. Для доказательства рассмотрим замкнутую область $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leqslant c\}$, где c – малое положительное число. Так как $V(0) = 0$, то (по условию 1)) V – гладкая непостоянная функция. По теореме Сарда почти все значения этой функции являются регулярными. В частности, для почти всех c граница M_c представляет собой гладкое замкнутое регулярное многообразие. По теореме Гаусса поток векторного поля ρv через границу M_c равен

$$\int\limits_{M_c} \operatorname{div}(\rho v)\, d^n x = 0. \tag{2}$$

Так как $\rho > 0$, то (по условию 3)) векторное поле ρv либо касается ∂M_c, либо направлено наружу от границы M_c. С учётом (2) поле ρv тогда должно касаться ∂M_c. Так как множество регулярных значений $\{c\}$ функции V всюду плотно, то по непрерывности V будет первым интегралом.

В частности, функция V будет функцией Ляпунова и, следовательно, равновесие $x = 0$ устойчиво. Таким образом, в самом простом случае (когда область Ω совпадает с $B \setminus \{0\}$) теорема Красовского не применима к системам с интегральным инвариантом.

Если условие 3) теоремы Красовского заменить более сильным условием $\dot{V} > 0$ в $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ (тогда условие 4) будет лишним), то система (1) будет иметь асимптотическую траекторию, которая выходит из положения равновесия [1, с. 77]. Следует иметь ввиду, что неустойчивость положения равновесия ещё не означает наличие асимптотически выходящих траекторий. В работе [3] указаны контрпримеры для размерности фазового пространства $n \geqslant 3$ (при $n = 2$ всегда имеется асимптотическая траектория, выходящая из неустойчивого изолированного равновесия [4, с. 78]). В статье [5] установлено, что аналитическая система дифференциальных уравнений в трёхмерном фазовом пространстве с изолированной особой точкой всегда имеет хотя бы одну асимптотическую траекторию (входящую или выходящую). Частичное распространение этого результата на случай нечётного $n \geqslant 5$ показано в работах [3, 6].

1. Теорема о неустойчивости. Для систем с инвариантной мерой можно указать иные условия неустойчивости состояний равновесия.

Теорема. *Если найдётся гладкая функция* $V\colon B \to \mathbb{R}$ *такая, что:*

1) $\dot{V}(x) \geqslant 0$ *при всех* $x \in B$,

2) $\dot{V}(\xi) > 0$ *при некоторых* ξ *из сколь угодно малой окрестности точки* $x = 0$,

то равновесие $x = 0$ *неустойчиво.*

Главное отличие от классических теорем Ляпунова–Четаева–Красовского о неустойчивости состоит в том, что здесь не накладывается никаких ограничений на свойства самой функции V в окрестности положения равновесия. Кроме того, не предполагается выполненным условие 4) теоремы Красовского.

Следствие. *Если найдётся аналитическая функция* $V\colon B \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\dot{V} \geqslant 0$ *и* $\dot{V} \not\equiv 0$, *то равновесие неустойчиво.*

Доказательство теоремы. По приведённым во введении данным можно считать, что фазовый поток системы (1) определён при всех $t \in \mathbb{R}$. По теореме Э. Хопфа решения с почти всеми начальными данными либо уходят на бесконечность, либо бесконечно много раз сколь угодно близко подходят к своей начальной точке, причём это свойство имеет место как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. В первом случае теорема доказана: решение с почти каждым начальным условием $x(0) = \xi$ покинет область B. Рассмотрим второй случай, когда $\dot V(\xi) > 0$ и решение с начальным условием ξ не покидает область B. Воспользуемся равенством

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int\limits_0^t \dot V(x(t))\,dt \geqslant 0.$$

С другой стороны, при приближении $x(t)$ к точке ξ, где $\dot V(\xi) > 0$, интеграл справа заведомо увеличивается всегда на малую, но на одну и ту же положительную константу. Это легко выводится из теоремы о выпрямлении фазовых траекторий в окрестности неособой точки $x = \xi$ (рисунок).

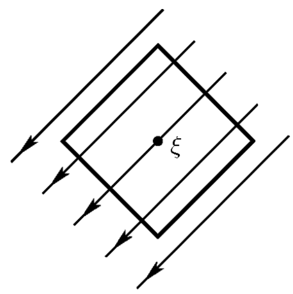

Рисунок. Фазовые траектории в окрестности неособой точки ξ.

Следовательно, $V(x(t)) \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$, откуда вытекает, что решение с почти каждым начальным данным ξ за конечное время покинет область B. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть все решения системы (1) определены на всей оси времени $\mathbb{R} = \{t\}$ и найдётся гладкая функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\dot V(x) \geqslant 0$. Тогда решения системы (1) с почти всеми начальными данными из области $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot V(x) > 0\}$ уходят на бесконечность при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

Из этого утверждения с учётом замечаний из введения вытекает сформулированная выше теорема.

Замечание 2. Предположим, что система (1) допускает непостоянный интеграл $f\colon \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}$ (как, например, в гамильтоновых системах). Пусть $f(0) = 0$ и f может принимать значения разных знаков в сколь угодно малой окрестности точки $x = 0$. Если найдётся функция $V\colon B \to \mathbb{R}$ такая, что:

1) $\dot V(x) \geqslant 0$ в области $\Omega = B \bigcap \{f(x) > 0\}$,

2) $\dot V(\xi) > 0$ для некоторых сколь угодно малых ξ из области Ω,

то равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Это утверждение доказывается точно так же, как и теорема с учётом инвариантности области $\{f(x) > 0\}$. Конечно, в условии 1) в качестве инвариантной можно взять область $\{f(x) < 0\}$.

Замечание 3. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы Красовского и $\dot V(x) > 0$ в некоторых точках $\Omega \bigcap B$, сколь угодно близких к началу координат. Тогда $x = 0$ – неустойчивое равновесие.

Доказательство неустойчивости основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы, и использует инвариантность области Ω.

2. Примеры.

2.1. Рассмотрим динамику частицы на плоскости в соленоидальном силовом поле. Её уравнения движения имеют следующий вид:

$$\ddot x_1 = \frac{\partial W}{\partial x_2}, \quad \ddot x_2 = -\frac{\partial W}{\partial x_1}.$$

Фазовый поток сохраняет стандартную форму объёма в четырёхмерном фазовом пространстве $\{x, \dot x\}$. Пусть W – ненулевой однородный многочлен по x_1 и x_2 степени $n \geqslant 2$. Тогда (по формуле Эйлера)

$$(\dot x_1 x_2 - x_1 \dot x_2)^{\cdot} = nW.$$

Если $W \geqslant 0$ (или $W \leqslant 0$), то (по доказанной теореме) положение равновесия $x_1 = x_2 = 0$ неустойчиво.

2.2. Рассмотрим вопрос об устойчивости изолированных положений равновесия следующей бездивергентной системы в трёхмерном евклидовом пространстве:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_3^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 x_3^2, \quad \dot{x}_3 = -\frac{2x_3^3}{3}. \tag{3}$$

Положим $V = x_1^2 + x_2^2$. Тогда

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + x_2^2)x_3^2.$$

Очевидно, что $\dot{V} \geqslant 0$ и $\dot{V} > 0$ в некоторых точках, сколь угодно близких к началу координат. Следовательно, по сформулированной выше теореме равновесие $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ неустойчиво. Более того, почти все решения системы (3) уходят в бесконечность.

Стоит отметить, что вся плоскость $\{x_3 = 0\}$ заполнена периодическими траекториями (следовательно, условие 4) теоремы Красовского не выполняется). Кроме того, хотя равновесие неустойчиво, нет решений, асимптотически выходящих из него [3], но есть две входящие в равновесие асимптотические траектории (как и полагается по теореме Брунеллы [5]).

2.3. Рассмотрим ещё задачу об устойчивости тривиального равновесия следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = y_1 + x_1\rho_1\rho_2, \quad \dot{y}_1 = -x_1 + y_1\rho_1\rho_2,$$
$$\dot{x}_2 = y_2 - x_2\rho_1\rho_2, \quad \dot{y}_2 = -x_2 - y_2\rho_1\rho_2, \tag{4}$$

где $\rho_k = x_k^2 + y_k^2$ $(k = 1, 2)$. Эта система также является бездивергентной и допускает первый интеграл

$$f = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2).$$

Однако эта функция не является положительно определённой в окрестности начала координат, и поэтому её нельзя принять за функцию Ляпунова.

Положим $V = x_1^2 + y_1^2$. Тогда

$$\dot{V} = 2(x_1^2 + y_1^2)^2(x_2^2 + y_2^2).$$

Следовательно (по доказанной теореме), равновесие $x = y = 0$ неустойчиво.

Стоит отметить инвариантность двумерных плоскостей $\{x_1 = y_1 = 0\}$ и $\{x_2 = y_2 = 0\}$ – они сплошь заполнены периодическими траекториями. Как показано в [3], система (4) вообще не допускает асимптотических траекторий (как входящих, так и выходящих из особой точки).

2.4. Наконец, рассмотрим градиентную динамическую систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

с гармонической функцией φ $(\Delta\varphi = 0)$. Покажем, что если $\varphi \neq \mathrm{const}$, то почти все её траектории выходят на бесконечность (как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$).

Действительно, фазовый поток системы (5) сохраняет стандартную меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^n = \{x\}$ ввиду бездивергентности её правой части:

$$\mathrm{div} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \Delta\varphi = 0.$$

Положив $V = \varphi$, получим

$$\dot{V} = \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2.$$

Поскольку гармоническая функция аналитична и $\varphi \neq \mathrm{const}$, то (согласно п. 1) почти все решения системы (5) уходят на бесконечность (возможно, за конечное время). Что и требовалось.

Множество траекторий, не уходящих в бесконечность, не сводится только к критическим точкам функции φ. Каждая из *невырожденных* критических точек – неустойчивое равновесие, и имеются траектории, асимптотически входящие в положение равновесия. Это вытекает из аналитичности гармонической функции и отсутствия у неё точек локального максимума [7].

Отметим ещё, что в системе (5) с гармонической функцией φ могут быть решения, уходящие в бесконечность за конечное время, простой пример – $n = 2$ и $\varphi = x_1^3 - 3x_1x_2^2$.

Предположение о гармоничности функции φ существенно. Например, если $\varphi = -(x, x)/2$, то все решения системы (5) стремятся к равновесию $x = 0$ при $t \to +\infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости. М., 1959.
2. *Карапетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М., 2020.
3. *Kozlov V.V., Treschev D.V.* Instability, asymptotic trajectories and dimension of the phase space // Moscow Math. J. 2018. V. 18. № 4. P. 681–692.
4. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.
5. *Brunella M.* Instability of equilibria in dimension three // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1998. V. 48. № 5. P. 1345–1357.
6. *Козлов В.В.* Первые интегралы и асимптотические траектории // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 1. С. 32–59.
7. *Козлов В.В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50. № 6. С. 928–937.

Математический институт
имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва,
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 09.08.2022 г.
После доработки 09.08.2022 г.
Принята к публикации 30.08.2022 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 10, с. 1436–1440

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.2

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. А. Тораев

Для уравнения $(-\Delta)^m U + a(x)U = 0$, где Δ – оператор Лапласа, с измеримым локально ограниченным коэффициентом $a(x)$ приведены критерии осцилляции и неосцилляции в неограниченной области, которая может быть определённым образом сужающейся или расширяющейся на бесконечности.

DOI: 10.31857/S0374064122100120, EDN: KQZWIR

Введение. Работа посвящена исследованию осцилляционных свойств уравнения

$$LU = (-\Delta)^m U + a(x)U = 0, \tag{1}$$

где $a(x)$ – локально суммируемая функция в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$.

Осцилляционные свойства решений уравнения (1) в различных неограниченных областях изучены многими авторами. Так, в статьях [1–5] предполагается, что $m = 1$ и область Ω при бо́льших x содержится в конусе $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > |x|\cos\alpha\}$, $0 < \alpha < \pi$. В работах [6, 7] рассмотрены области других видов. Различные виды неограниченных областей изучены в работе [8], в которой приведены оценки числа точек отрицательного спектра эллиптического оператора произвольного порядка.

Уравнение (1) рассматривается в неограниченной области Ω, которая может быть определённым образом сужающейся или расширяющейся на бесконечности.

Введём обозначения

$$\Omega_{r_0} = \{x \in \Omega : |x| > r_0\}, \quad \Omega_{r_0,b} = \{x \in \Omega : r_0 < |x| < b\}, \quad S_R^{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - r_0| = R\},$$

$\mathring{W}_2^m(\Omega)$ – замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $W_2^m(\Omega)$.

Определение. Уравнение (1) называется *осцилляционным* в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если для любого $r_0 > 0$ оно имеет нетривиальное обобщённое решение $U \in \mathring{W}_2^m(G)$, где $G \subset \Omega_{r_0}$ – некоторая ограниченная область, и *неосцилляционным* – в противном случае.

Сначала найдём оператор Δ^m в сферических координатах. Для $m = 1$ имеем

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\delta,$$

здесь $\Delta_r = \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ – радиальная часть оператора Лапласа, δ – оператор Бельтрами.

Сделаем замену $t = \ln r$, тогда

$$\Delta = e^{-2t}(\Delta_t + \delta), \quad \Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (n-2)\frac{\partial}{\partial t}.$$

Далее

$$\Delta^m = e^{-2mt}(\Delta_t + \delta)^m = e^{-2mt}(\Delta_t^m + C_m^1\Delta_t^{m-1}\delta + C_m^2\Delta_t^{m-2}\delta^2 + \\ + C_m^3\Delta_t^{m-3}\delta^3 + \ldots + C_m^{m-1}\Delta_t\delta^{m-1} + \delta^m), \quad C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}. \tag{2}$$

Операторы $-\Delta_t$ и $-\delta$ положительны (неотрицательны). Поэтому и операторы $(-\Delta_t)^l$, $(-\delta)^l$ положительны [9, с. 238–242; 10, с. 222–226]. Из равенства (2) следует, что $\Delta_t^{m-k}\delta^k = \delta^k\Delta_t^{m-k}$, так как $(\Delta+\delta)^m = (\delta+\Delta)^m$.

1. Неосцилляция. Известно [6, с. 6], что выполнение для всех $U \in C_0^\infty(\Omega)$ неравенства

$$(LU,U) = \int\limits_{\Omega} [(-\Delta)^m U + a(x)U]U\,dx > 0 \tag{3}$$

является необходимым и достаточным условием неосцилляционности уравнения (1) в области Ω.

В неравенстве (3) переходим к сферическим координатам и используем замену

$$U = V\exp\left(\frac{2m-n}{2}t\right), \quad t = \ln r.$$

Тогда в силу равенства (2) будем иметь

$$(LU,U) = \int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\left\{(-1)^m\left[L_mV + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i(\delta^i L_{m-i}V) + \delta^m V\right]V + a(t,\varphi)V^2\exp(2mt)\right\}dt\,d\varphi, \tag{4}$$

где Φ – область изменения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$, $d\varphi$ – элемент поверхности $|\varphi| = 1$, L_j – обыкновенные линейные дифференциальные операторы порядка $2j$, характеристические полиномы которых имеют следующие корни:

1) при $j = m$

$$q_k^{(1)} = \frac{4(k+1)-n-2m}{2}, \quad q_k^{(2)} = \frac{n-2m+4k}{2}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

или (так как $q_k^{(1)} = -q_{m-1-k}^{(2)}$)

$$q_k^{(1,2)} = \pm\frac{n-2m+4k}{2}, \quad k = \overline{0, m-1};$$

2) при $j = m-i$

$$q_k^{(1)} = \frac{4(k+1)-n-2m}{2}, \quad q_k^{(2)} = \frac{n-2m+4k}{2}, \quad k = \overline{0, m-i-1}; \tag{5}$$

3) при $j < m/2$

$$q_k^{(1)} = \frac{4(k+1)-n-2m}{2}, \quad q_k^{(2)} = \frac{n-2m+4k}{2}, \quad k = \overline{0, m/2-2}.$$

В формуле (4) выражения $(-1)^m(\delta^i L_{m-i})V$ можно записать в виде

$$(-1)^m(\delta^i L_{m-i})V = (-1)^i\delta^i(-1)^{m-i}L'_{m-i}V + (-1)^i B_{m-i}\delta^i V, \quad i = \overline{1, m-1}. \tag{6}$$

Числа B_{m-i} определяются из формул (5).

Уравнения

$$L_{m-i}V = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

являются неосцилляционными в области Ω. Нетрудно проверить, что и уравнения

$$L'_{m-i}V = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

также будут неосцилляционными в области Ω. Поэтому справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}(-1)^m\sum_{i=1}^{m-1}[C_m^i\delta^i L'_{m-i}V]V\,dt\,d\varphi>0 \tag{7}$$

для любой функции $V\in C_0^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим многочлен

$$\sum_{i=0}^{m}\beta_{2i}\lambda^{2i}=\left[\lambda^2+\left(\frac{n-2m}{2}\right)^2\right]\left[\lambda^2+\left(\frac{n-2m+4}{2}\right)^2\right]\cdots$$

$$\cdots\left[\lambda^2+\left(\frac{n+2m-8}{2}\right)^2\right]\left[\lambda^2+\left(\frac{n+2m-4}{2}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть область* Ω *такова, что* $S_R^0\bigcap\Omega$ *при достаточно большом* R *состоит из совокупности областей* D_i *таких, что если* D_i^* *есть образ* D_i *на* S_1^0 *при отображении* $x'=x/|x|$, *то собственные значения оператора*

$$\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^lC_m^lB_{m-l}\delta^l+(-1)^m\delta^m$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле на ∂D_i^* *для любого* i *не меньше* NR^γ, $N=$ $=\mathrm{const}>0$, $\gamma=\mathrm{const}$. *Если*

$$a(x)\geqslant-\beta_0|x|^{-2m}-\frac{1}{4}\beta_2(|x|^m\ln|x|)^{-2}-N|x|^{\gamma-2m},$$

где β_0 *и* β_2 *определяются из (8), то уравнение (1) является неосцилляционным в области* Ω.

Доказательство. В силу условия (7) из равенства (4) следует, что

$$(LU,U)\geqslant\int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[(-1)^m(L_mV,V)+\sum_{l=1}^{m-1}((-1)^lC_n^lB_l\delta^lV+(-1)^m\delta^mV)V\Bigg]+$$

$$+a(t,\varphi)\exp(2mt)V^2\Bigg\}\,dt\,d\varphi. \tag{9}$$

Из условий теоремы и неравенства (9) будем иметь

$$(LU,U)\geqslant\int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{m}\beta_{2i}\left(\frac{d^iV}{dt^i}\right)^2+N|x|^\gamma V^2-\beta_0V^2-\frac{\beta_2}{4}\frac{V^2}{t^2}-N|x|^\gamma V^2\right]dt\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\left[\sum_{i=2}^{m}\beta_{2i}\left(\frac{d^iV}{dt^i}\right)^2+\beta_0V^2+\beta_2\left(\frac{dV}{dt}\right)^2-\beta_0V^2-\frac{\beta_2}{4}\frac{V^2}{t^2}\right]dt\,d\varphi\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\left[\beta_{2i}\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{d^iV}{dt^i}\right)^2+\beta_2\left(\left(\frac{dV}{dt}\right)^2-\frac{V^2}{4t^2}\right)\right]dt\,d\varphi>0,$$

так как известно (см. [6, с. 19]), что

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 dt \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{V^2}{t^2}\,dt.$$

Следовательно, уравнение (1) – неосцилляционное в области Ω.

Заметим, что при чётном n и таком, что $n \leqslant 2m$, возможен случай $\beta_0 = 0$.

2. Осцилляция. Пусть $\Omega = T^\omega$ – нормальный телесный угол с раствором $\omega \leqslant \pi$ [6, с. 5]. Точность условий теоремы 1 показывает следующая

Теорема 2. *Пусть* λ_0 *– наименьшее собственное значение задачи*

$$\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i C_m^i B_{m-l}\delta^i z + (-1)^m\delta^m z = \lambda z, \tag{10}$$

$$D^\alpha z|_{\partial T^\omega} = 0, \quad |\alpha| = \overline{0, m-1}. \tag{11}$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ *при достаточно большом* r_0 *выполняется равенство*

$$a(x) \leqslant -(\beta_0 + \lambda_0 + \varepsilon)|x|^{-2m}, \quad |x| > r_0,$$

то уравнение (1) является осцилляционным в области T^ω.

Доказательство. Воспользуемся равенством (4) с учётом равенства (6), в котором положим $V = z(t)w(\varphi)$, где $w(\varphi)$ – собственная функция задачи (10), (11), соответствующая наименьшему собственному значению λ_0. После интегрирования получим

$$(LU,U) = \int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg[W^2\sum_{i=0}^{m}\beta_{2i}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m-1}A_i^{(1)}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2(\nabla_1 W)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2}A_i^{(2)}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2(\nabla_2 W)^2 + \ldots + A_1^{(m-1)}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2(\nabla_{m-1}W)^2 +$$

$$+ z^2\sum_{i=1}^{m-1}C_m^i\beta_{m-i}(\nabla_i W)^2 + z^2(\nabla_m W)^2 + a(t,\varphi)\exp(2mt)z^2W^2\Bigg]\,dt\,d\varphi,$$

здесь ∇_i – градиент порядка i $(i = \overline{1,m})$.

В силу условий теоремы имеем

$$(LU,U) \leqslant \int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg[W^2\sum_{i=1}^{m}\beta_{2i}\frac{d^iz}{dt^i} + \sum_{i=1}^{m-1}A_i^{(1)}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2(\nabla_{m-1}W)^2 + \sum_{i=1}^{m-2}A_i^{(2)}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2(\nabla_2 W)^2 + \ldots$$

$$\ldots + A_1^{m-1}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2(\nabla_{m-1}W)^2 + \beta_0 z^2W^2 + \lambda_0 z^2W^2 - \beta_0 z^2W^2 - \lambda_0 z^2W^2 - \varepsilon z^2W^2\Bigg]\,dt\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\Phi}\int\limits_{t_0}^{\infty}\Bigg[W^2\sum_{i=1}^{m}\beta_{2i}\frac{d^iz}{dt^i} + \sum_{i=1}^{m-1}A_i^{(1)}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2(\nabla_{m-1}W)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2}A_i^{(2)}\left(\frac{d^iz}{dt^i}\right)^2(\nabla_2 W)^2 + \ldots + A_1^{(m-1)}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2(\nabla_{m-1}W)^2 - \varepsilon z^2W^2\Bigg]\,dt\,d\varphi.$$

Функцию $z(t)$ определим следующим образом:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant t_1, \\ 1 & \text{при} \quad t_1 + \delta \leqslant t < t_2, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant t_2 + \delta, \end{cases}$$

где $\delta = \mathrm{const} > 0$. В результате получим

$$(LU, U) \leqslant \int\limits_{\Phi} \int\limits_{M_\delta} \bigg\{ \bigg[\sum_{i=0}^{m} \beta_{2i} \bigg(\frac{d^i z}{dt^i} \bigg)^2 w^2 + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \bigg(\frac{d^i z}{dt^i} \bigg)^2 (\nabla_1 w)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(2)} \bigg(\frac{d^i z}{dt^i} \bigg)^2 (\nabla_2 w)^2 + \ldots + A_1^{(m-1)} \bigg(\frac{dz}{dt} \bigg)^2 (\nabla_{m-1} w)^2 \bigg] \bigg\} \, dt \, d\varphi - \varepsilon (t_2^* - t_1^*) A,$$

где $t_1 < t_1^* < t_1 + \delta$, $t_2 < t_2^* < t_2 + \delta$, $A = \int_\Phi w^2 \, d\varphi$, $M_\delta = (t_1, t_1 + \delta) \bigcup (t_2, t_2 + \delta)$.

Теперь положим $z_{\varepsilon_1}(t) = z(\varepsilon_1 t)$, тогда из последнего неравенства будем иметь

$$(LU, U) \leqslant \int\limits_{\Omega_\delta} \bigg[\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_1^{2i} \beta_{2i} \bigg(\frac{d^i z_{\varepsilon_1}}{dt^i} \bigg)^2 w^2 + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{(1)} \varepsilon_1^{2i} \bigg(\frac{d^i z_{\varepsilon_1}}{dt^i} \bigg)^2 (\nabla_1 w)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} A_i^{(1)} \varepsilon_1^{2i} \bigg(\frac{d^i z_{\varepsilon_1}}{dt^i} \bigg)^2 (\nabla_2 w)^2 + \ldots + A_1^{(m-1)} \varepsilon_1^2 \bigg(\frac{dz_{\varepsilon_1}}{dt} \bigg)^2 (\nabla_{m-1} w)^2 \bigg] \, dt \, d\varphi - \varepsilon (t_2^* - t_1^*) A,$$

где

$$\Omega_\delta = \{(t, \varphi) \in T^w : t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \delta, \quad t_2 \leqslant t \leqslant t_2 + \delta, \quad \varphi \in \Phi\}.$$

Отсюда при $\varepsilon_1 \to 0$ получаем, что $(LU, U) \leqslant 0$, следовательно, согласно [6, с. 5, лемма 1.1], уравнение (1) – осцилляционное в области T^w.

Заключение. Теоремы 1 и 2 обобщают соответствующие результаты работ [6, 7], в которых рассмотрены случаи $m = 1, 2$.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту статьи за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Allegretto W.* Nonoscillation criteria for elliptic equations in conical operators // Pacific J. Math. 1981. V. 92. № 1. P. 15–25.
2. *Swanson C.* Comparison theorems for elliptic equations on unbounded domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 126. P. 278–285.
3. *Swanson C.* Strong oscillation on elliptic equations in general domain // Can. Math. Bull. 1970. V. 16. P. 105–110.
4. *Headley B., Swanson C.A.* Oscillation criteria for elliptic equations // Pacific J. Math. 1968. V. 27. P. 501–506.
5. *Kreith K.* Comparison theorems for general elliptic equations with mixed boundary // J. Differ. Equat. 1970. V. 8. P. 537–541.
6. *Тораев А.* Осцилляционные свойства решений эллиптических уравнений. Ашхабад, 1985.
7. *Тораев А.* Об осцилляции и неосцилляции решений эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 8. С. 1424–1435.
8. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* Об отрицательном спектре эллиптического оператора // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 2. С. 147–166.
9. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1984.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.

Туркменский государственный
архитектурно-строительный институт,
г. Ашгабат

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.
После доработки 30.07.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.