СОДЕРЖАНИЕ

Том 65, номер 8, 2020

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Распространение прямоугольного радиоимпульса с хаотической фазой в резонансно-поглощающей газовой среде

Г. М. Стрелков 731

Спектры структур на основе оптических волокон с тонкой сердцевиной и надоболочечными покрытиями

О. В. Иванов, Л. И. Юсупова, А. М. Низаметдинов 749

Параметрический метод подводной радионавигации в условиях Арктики

Г. Я. Шайдуров, Г. Н. Романова, Д. С. Кудинов 757

Повышение точности измерений комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей в сверхвысокочастотном диапазоне волноводным методом

М. П. Пархоменко, Д. С. Каленов, И. С. Еремин, Н. А. Федосеев, В. М. Колесникова, О. А. Дьяконова 764

Радиопоглощающая структура на основе решеток резистивных квадратов

В. И. Пономаренко, И. М. Лагунов 769

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Циклические точечные процессы с ограниченным последействием для анализа импульсных сигналов с существенной вариабельностью ритма импульсов

В. Е. Анциперов 774

Влияние декорреляционных факторов на погрешность измерений разности фаз сигналов интерферометрическими системами

В. И. Каевицер, В. М. Смольянинов, И. В. Смольянинов 798

Помехоустойчивость когерентного приемника сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией при наличии ретранслированной помехи

Г. В. Куликов, А. А. Лелюх, Е. Н. Граченко 804

Метод совместного приема и моноимпульсного пеленгования сигналов радиоизлучающих динамических объектов

Н. Ю. Музыченко 809

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

Разработка коллектора с многоступенчатой рекуперацией для гиротрона

О. И. Лукша, П. А. Трофимов 813

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

Высоковольтные быстровосстанавливающиеся лавинные диоды
на основе карбида кремния

П. А. Иванов, Т. П. Самсонова, А. С. Потапов, М. Ф. Кудояров 820

Влияние эффекта самонагревания на вольт-амперные характеристики
полевых транзисторов на структуре “кремний на изоляторе” при высоких температурах

Н. В. Масальский 827

ХРОНИКА

Памяти Юрия Семеновича Шинакова 831

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 731–748

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.371.01

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАДИОИМПУЛЬСА С ХАОТИЧЕСКОЙ ФАЗОЙ В РЕЗОНАНСНО-ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

© 2020 г. Г. М. Стрелков*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

**E-mail: strelkov@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 02.11.2018 г.
После доработки 02.11.2018 г.
Принята к публикации 11.01.2019 г.

Выполнен анализ возможных характера и особенностей дисперсионных искажений прямоугольного наносекундного радиоимпульса с хаотической фазой, моделируемой на основе отображения Чебышева первого рода третьего порядка, при распространении в резонансно-поглощающей газовой среде. Показано, что удаление импульса от излучателя сопровождается трансформацией огибающей к шумоподобному виду и формированием у него “хвоста”, на который может приходиться заметная доля текущей энергии. Установлено, что в достаточно широких интервалах значений параметров, описывающих степень хаотичности мгновенной фазы излучаемого импульса, влияние среды не приводит в процессе распространения к разрушению или принципиальным изменениям вида его корреляционных функций.

DOI: 10.31857/S0033849420080124

ВВЕДЕНИЕ

Одним из современных направлений развития радиосистем различного назначения являются импульсные сигналы, характеристики которых изменяются случайным образом (хаотически) (см., например, [1–5]). Такие сигналы обладают широкими спектрами, позволяют в том числе увеличивать скрытность и помехозащищенность работы систем и обладают рядом других преимуществ по сравнению с регулярными сверхширокополосными сигналами. В то же время в опубликованных к настоящему времени результатах исследований полностью отсутствует анализ важного аспекта проблемы, связанного с влиянием среды распространения на характеристики хаотических сигналов. Такая ситуация обусловлена в первую очередь тем, что дисперсионные искажения сигналов всегда рассматриваются на основе интеграла Фурье, а характерные ширины амплитудных и фазовых спектров хаотических сигналов таковы, что препятствуют, по-видимому, получению прямых численных оценок уровня искажений.

В [6] приведено решение задачи о распространении радиоимпульса в резонансно-поглощающей газовой среде, основанное на временном представлении сигнала и не являющееся, таким образом, результатом вычисления интеграла Фурье. Принципиальной особенностью решения является возможность аналитического описания на его основе пространственно-временной эволюции импульса при условии, что в частотном интервале, занимаемым его спектром, показатель преломления среды незначительно отличается от единицы. Для земной атмосферы, в частности, указанное отличие в гига- и терагерцевом диапазонах не превышает $\sim 10^{-4}$ (см., например, [7–9]).

Цель данной работы – представить результаты начального этапа теоретического анализа на основе [6] задачи о дисперсионных искажениях в резонансно-поглощающей среде прямоугольного радиоимпульса с хаотической фазой. Хаотичность фазы моделируется на основе отображения Чебышева первого рода третьего порядка. Аналогичным образом задача может быть рассмотрена с привлечением альтернативных отображений, обсуждаемых в литературе (см., например, [1, 10]). Несущая частота импульса f' совпадает с резонансной частотой водяного пара $\nu_{ij} = 380.1$ ГГц (длина волны $\lambda = 0.789$ мм). Ближайшая к ней сильная линия молекулы H_2O имеет резонансную частоту 326.4 ГГц ($\lambda = 0.919$ мм).

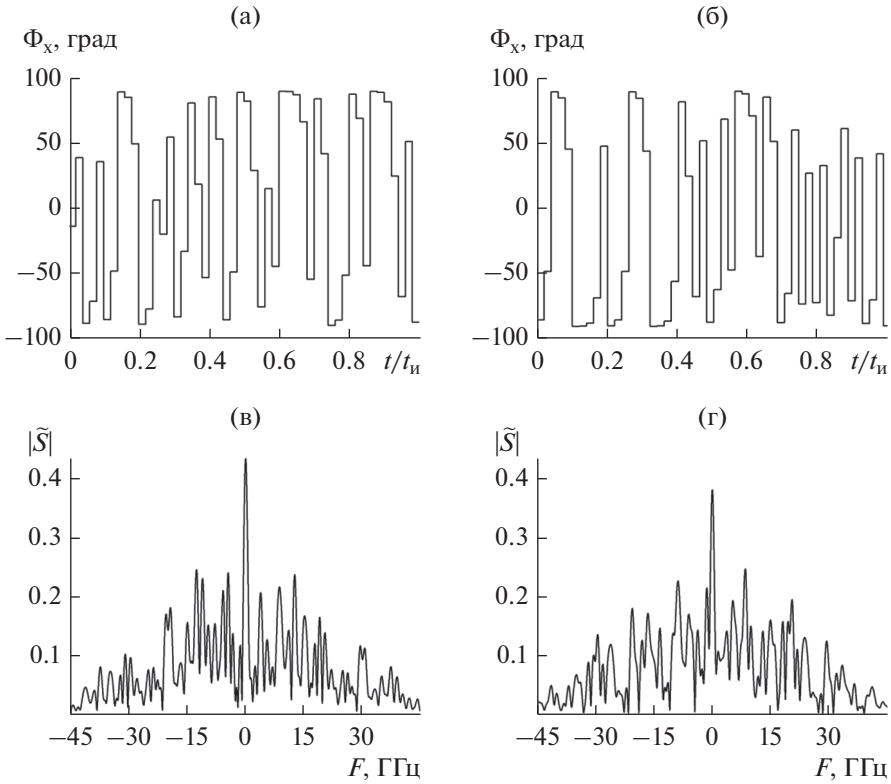

Рис. 1. Хаотическая фаза прямоугольного импульса (а, б) и амплитудный спектр его комплексной огибающей (в, г) при $A_0 = 1; \Phi_0 = 0$; $\Delta\Phi = 180°$; $N = 50$; $t_и = 10^{-9}$ с и $X_0 = 0.05$ (а, в) и 0.4 (б, г).

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Комплексную напряженность электрического поля, излучаемого прямоугольного импульса примем в виде

$$\tilde{E}(0;t) = \begin{cases} A_0 \exp\left(i\omega' t + i\Phi_x(t)\right) = \tilde{A}(0;t)\exp\left(i\omega' t\right), \\ 0 < t \le t_и; \\ 0; \quad t > t_и. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь t – время; $\omega' = 2\pi f'$; A_0 и $t_и$ – “высота” и длительность излучаемого импульса; $\Phi_x(t)$ – хаотически изменяющаяся составляющая его текущей фазы (далее – хаотическая фаза) и $\tilde{A}(0;t) = A_0 \exp\left(i\Phi_x(t)\right)$ – начальная комплексная огибающая импульса.

Полагаем далее, что: а) за время излучения импульса величина $\Phi_x(t)$ претерпевает N скачков в моменты времени $t_k = kt_и/N$ $(k = 1;2;3;\ldots;N)$, оставаясь неизменной в пределах промежутков между скачками, равных $t_и/N$; б) в пределах промежутка с номером k величина $\Phi_x(t)$ определяется как

$$\Phi_x(t) = \Phi_0 + (\Delta\Phi/2)X_k, \quad t_{k-1} < t \le t_k, \quad (2)$$

где Φ_0 – постоянное смещение величины Φ_x от нуля; $\Delta\Phi$ – интервал значений скачков (девиация) хаотической фазы и величина X_k определяется через знакопеременное отображение Чебышева первого рода третьего порядка:

$$X_k = 4X_{k-1}^3 - 3X_{k-1}. \quad (3)$$

Конкретный вид знакопеременной последовательности величин X_k задается выбором начального условия X_0, причем $|X_0| < 1$ и $|X_0| \ne 0.5$, как и $|X_k|$.

На рис. 1а и 1б приведены примеры временного хода ступенчатой функции $\Phi_x(t)$ для двух значений параметра X_0 и прочих равных условиях. Визуально приведенные кривые $\Phi_x(t)$ заметно различаются. Однако их средние $\bar{\Phi}_x$ и среднеквадратические ширины $\Delta(\Phi_x) = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\Phi_x - \bar{\Phi}_x\right)^2\right)^{0.5}$ почти не изменяются для указанных в подписи к рис. 1 значений X_0. Для рис. 1а ($X_0 = 0.05$) имеем $\bar{\Phi}_x = 7°$ и $\Delta(\Phi_x) = 68°$ и для рис. 1б ($X_0 = 0.4$) – $\bar{\Phi}_x = -13°$ и $\Delta(\Phi_x) = 70°$.

Амплитудные спектры начальных огибающих импульса (1), вычисленные для приведенных кривых $\Phi_x(t)$ в интервале от –45 до 45 ГГц, изоб-

ражены на рис. 1в и 1г. По горизонтали здесь дана разностная частота $F = f - f'$. Вид спектров практически совпадает, как и их интегральные характеристики, найденные для указанного частотного интервала. В частности, энергии приведенных спектров составляют 0.918 (см. рис. 1в) и 0.911 (см. рис. 1г) от энергии излучаемого импульса, а их среднеквадратические ширины равны 15.1 и 15.9 ГГц соответственно. Обратим также внимание, что при принятых значениях параметров введение хаотической фазы приводит к расширению его спектра почти на два порядка по сравнению со случаем квазимонохроматического импульса равной длительности.

Согласно [6] искажения комплексной огибающей импульсного сигнала (1) в резонансно-поглощающей газовой среде применительно к изложенной выше постановке задачи описываются следующими выражениями:

1) при $0 < t \le t_и$

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\tau;t') = A_0\Bigg[&\exp\left(i\Phi_x(t')\right) - \int_0^{t'}\frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\theta}}J_1\left(2\sqrt{\delta_1\theta}\right)\times\\ &\times\exp\left((p_1 - i\omega')\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)d\theta -\\ &-\int_0^{t'}\frac{\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\theta}}J_1\left(2\sqrt{\delta_2\theta}\right)\exp\left((p_2 - i\omega')\theta\right)\times\\ &\times\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)d\theta +\\ &+\int_0^{t'}\exp(-i\omega'\theta)\exp(i\Phi_x(t'-\theta))\times\\ &\times\Bigg[\int_0^{\theta}\frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\eta}}J_1(2\sqrt{\delta_1\eta})\exp(p_1\eta)\times\\ &\times\frac{\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\theta-\eta}}J_1\left(2\sqrt{\delta_2(\theta-\eta)}\right)\exp\left(p_2(\theta-\eta)\right)d\eta\Bigg]d\theta\Bigg];\end{aligned} \tag{4}$$

2) при $t' > t_и$

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\tau;t') = A_0\times&\\ \times\Bigg[-\int_{t'-t_и}^{t'}&\frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\theta}}J_1\left(2\sqrt{\delta_1\theta}\right)\exp\left((p_1 - i\omega')\theta\right)\times\\ &\times\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)d\theta - \int_{t'-t_и}^{t'}\frac{\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\theta}}J_1(2\sqrt{\delta_2\theta})\times\\ &\times\exp\left((p_2 - i\omega')\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)d\theta +\\ &+\int_{t'-t_и}^{t'}\exp\left(-i\omega'\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)\times\\ &\times\Bigg[\int_0^{\theta}\frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{\eta}}J_1\left(2\sqrt{\delta_1\eta}\right)\exp\left(p_1\eta\right)\times\\ &\times\frac{\sqrt{\delta_2}}{\sqrt{\theta-\eta}}J_1\left(2\sqrt{\delta_2(\theta-\eta)}\right)\exp\left(p_2(\theta-\eta)\right)d\eta\Bigg]d\theta\Bigg].\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь: z – длина трассы; $t' = t - z/c$; c – скорость света; функция $\Phi_x(t')$ определена формулой (2); $\tau(z) = \gamma_{ij}z$ и $\gamma_{ij} = \gamma(\nu_{ij})$ – оптическая глубина трассы и коэффициент поглощения среды (по мощности) на резонансной частоте; $p_{1,2} = -\delta \pm i\omega_1 = -\delta \pm i\sqrt{\omega_{ij}^2 - \delta^2}$; $\delta_{1,2} = 0.5\tau\delta\left(1 \pm i\delta/\omega_1\right)$; $\delta = = 2\pi d\nu$ ($d\nu$ – полуширина спектральной линии); $J_1(x)$ – функция Бесселя.

Соотношения (4) и (5) являются следствием обращения по Лапласу полученного в [6] операторного равенства

$$F(\tau;p) = F(p)\exp\left(-\tau\delta\frac{p}{p^2 + 2\delta p + \omega_{ij}^2}\right), \tag{6а}$$

где $F(\tau;p) = \int_0^{\infty}\tilde{E}(\tau;t')\exp(-pt')dt'$ и $F(p) = = \int_0^{\infty}\tilde{E}(0;t')\exp(-pt')dt'$ – изображения по Лапласу поля импульса в конце и начале трассы (остальные обозначения введены выше).

Решение (4), (5) можно представить в альтернативной форме. С этой целью при получении равенства (6а) вначале следует перейти к безразмерному времени $\bar{t}' = t'\omega_{ij}$ и безразмерной переменной Лапласа $\bar{p} = p/\omega_{ij}$. Равенство (6а) примет тогда вид

$$F(\tau;\bar{p}) = F(\bar{p})\exp\left(-\frac{\tau\delta}{\omega_{ij}}\frac{\bar{p}}{\bar{p}^2 + 2\dfrac{\delta}{\omega_{ij}}\bar{p} + 1}\right), \tag{6б}$$

или

$$F(\tau;\bar{p}) = F(\bar{p})\exp\left(-\frac{\tau\delta}{\omega_{ij}}\frac{1}{\bar{p} + \dfrac{1}{\bar{p}} + 2\dfrac{\delta}{\omega_{ij}}}\right). \tag{6в}$$

Согласно одному из частных случаев теоремы Эфроса [11] при выполнении для ограниченной по модулю функции операторного равенства

$$F(\tau;\bar{p}) \rightleftarrows \tilde{E}(\tau;\bar{t}') \tag{7}$$

справедливо также операторное равенство

$$\frac{1}{\bar{p}}F\left(\tau;\bar{p} + \frac{1}{\bar{p}}\right) \rightleftarrows \int_0^{\bar{t}'}\tilde{E}(\tau;\alpha)J_0\left(2\sqrt{\alpha(\bar{t}'-\alpha)}\right)d\alpha. \tag{8}$$

Выполнив для равенства (6в) обращение по Лапласу с учетом формул (7) и (8) и возвратившись в полученном соотношении к размерному времени, для комплексной огибающей распространяющегося импульса в итоге получим:

1) при $0 < t \le t_и$

$$\tilde{A}(\tau;t') = A_0\Bigg[\exp\left(i\Phi_x(t')\right) - \\ -\int_0^{t'}\exp\left(-i\omega'\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)\sqrt{\frac{\delta\tau}{\theta}}\times \\ \times J_1\left(2\sqrt{\delta\theta}\right)\exp\left(-2\delta\theta\right)d\theta + \\ +\int_0^{t'}\exp\left(-i\omega'\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)\left(\omega_{ij}\right)\times \\ \times\Bigg[\int_0^{\theta}J_1\left(2\omega_{ij}\sqrt{\alpha(\theta-\alpha)}\right)J_1\left(2\sqrt{\delta\tau\alpha}\right)\times \\ \times\sqrt{\frac{\delta\tau}{\theta-\alpha}}\exp\left(-2\delta\alpha\right)d\alpha\Bigg]d\theta\Bigg]; \tag{9}$$

2) при $t' > t_и$

$$\tilde{A}(\tau;t') = A_0\times \\ \times\Bigg[-\int_{t'-t_и}^{t'}\exp\left(-i\omega'\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)\times \\ \times\sqrt{\frac{\delta\tau}{\theta}}J_1\left(2\sqrt{\delta\theta}\right)\exp\left(-2\delta\theta\right)d\theta + \\ +\int_{t'-t_и}^{t'}\exp\left(-i\omega'\theta\right)\exp\left(i\Phi_x(t'-\theta)\right)\left(\omega_{ij}\right)\times \\ \times\Bigg[\int_0^{\theta}J_1\left(2\omega_{ij}\sqrt{\alpha(\theta-\alpha)}\right)J_1\left(2\sqrt{\delta\tau\alpha}\right)\times \\ \times\sqrt{\frac{\delta\tau}{\theta-\alpha}}\exp\left(-2\delta\alpha\right)d\alpha\Bigg]d\theta\Bigg]. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) являются аналогами соотношений (4) и (5). Определяемые ими величины $\tilde{A}(\tau;t')$ в пределах погрешностей вычислений совпадают с результатами, следующими из (4) и (5). При этом не требуется работа с функцией Бесселя комплексного аргумента. Заметим, что в частном случае $X_0 = 0$ они описывают искажения прямоугольного квазимонохроматического импульса. Изложенные ниже результаты получены на основе соотношений (9) и (10) с шагом вычислений по времени $\Delta t' = 0.001t_и$.

2. ОГИБАЮЩАЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ ИМПУЛЬСА С ХАОТИЧЕСКОЙ ФАЗОЙ

Искажения огибающей и корреляционных функций импульса с хаотической фазой рассмотрим применительно к трассе, проходящей на высоте $h = 12$ км, которую условно полагают верхней границей тропосферы. Метеоусловия на трассе: давление 197.8 мб; температура 225 К; влажность 6×10^{-3} г м$^{-3}$ (стандартная модель летней атмосферы [12]). С учетом метеоусловий и приведенных в [13] данных о характеристиках спектральных линий H_2O находим полуширину линии с резонансной частотой 380.1 ГГц на высоте 12 км: $d\nu = 0.5$ ГГц. При нормальных атмосферных условиях коэффициент поглощения атмосферы на указанной частоте практически полностью определяется линией и равен ≈300 дБ/км [14, 15]. Пересчет этой величины в соответствии с [13] и с учетом метео-условий на трассе дает $\gamma_{ij} \approx 1.44$ дБ или 0.33 км$^{-1}$. Следовательно, при длине трассы 3 км ее оптическая глубина на резонансной частоте равна $\tau = 1$.

Рисунок 2 дает общее представление о характере эволюции огибающей $\left|\tilde{A}(\delta;t')\right|$ импульса с хаотической фазой с увеличением оптической глубины трассы. Начальные параметры импульса здесь те же, что и на рис. 1а. Уже при малых величинах τ изначально прямоугольная огибающая импульса принимает шумоподобный вид (см. рис. 2а, 2б). Другими словами, в пределах интервала $\bar{t}' \in (0...1)$ величину поля в некоторый момент времени по его значениям в предыдущие моменты указать не представляется возможным даже предположительно. Последующее увеличение τ сопровождается нарастанием хаотизации поля (рис. 2в–2д). При этом в отдельные моменты времени амплитуда поля в пределах текущей длительности импульса может двукратно превышать начальную величину $A_0 = 1$ (рис. 2е–2м). Другой характерной особенностью деформации импульса является формированием у него уже регулярного “хвоста”, протяженность которого и величины поля в котором с увеличением τ постепенно также возрастают. Физически смену характера изменений поля при $\bar{t}' = 1$ можно интерпретировать следующим образом. При $\bar{t}' < 1$ поле, регистрируемое в конце трассы, представляет собой результат сложения поля распространяющегося импульса (первое слагаемое в формуле (9)) и полей, излучаемых молекулами H_2O, которые оказались возбужденными из-за воздействия на них поля импульса (второе и третье слагаемые в формуле (9)). При $\bar{t}' > 1$ в конце трассы регистрируется только суммарное поле излучающих молекул (формула (10)).

Дополнительное представление о характере деформации текущей огибающей радиоимпульса с удалением от излучателя дают его интегральные характеристики, определяемые стандартными выражениями [16]. После вычисления поля импульса по формулам (9) и (10) любые его интегральные характеристики находим далее без введения каких-либо упрощений. Если же искажения описывать на основе спектральных представлений, их определение, во-первых, представляет самостоятельную задачу и, во-вторых, обусловлено необходимостью последующих оценок влияния на полу-

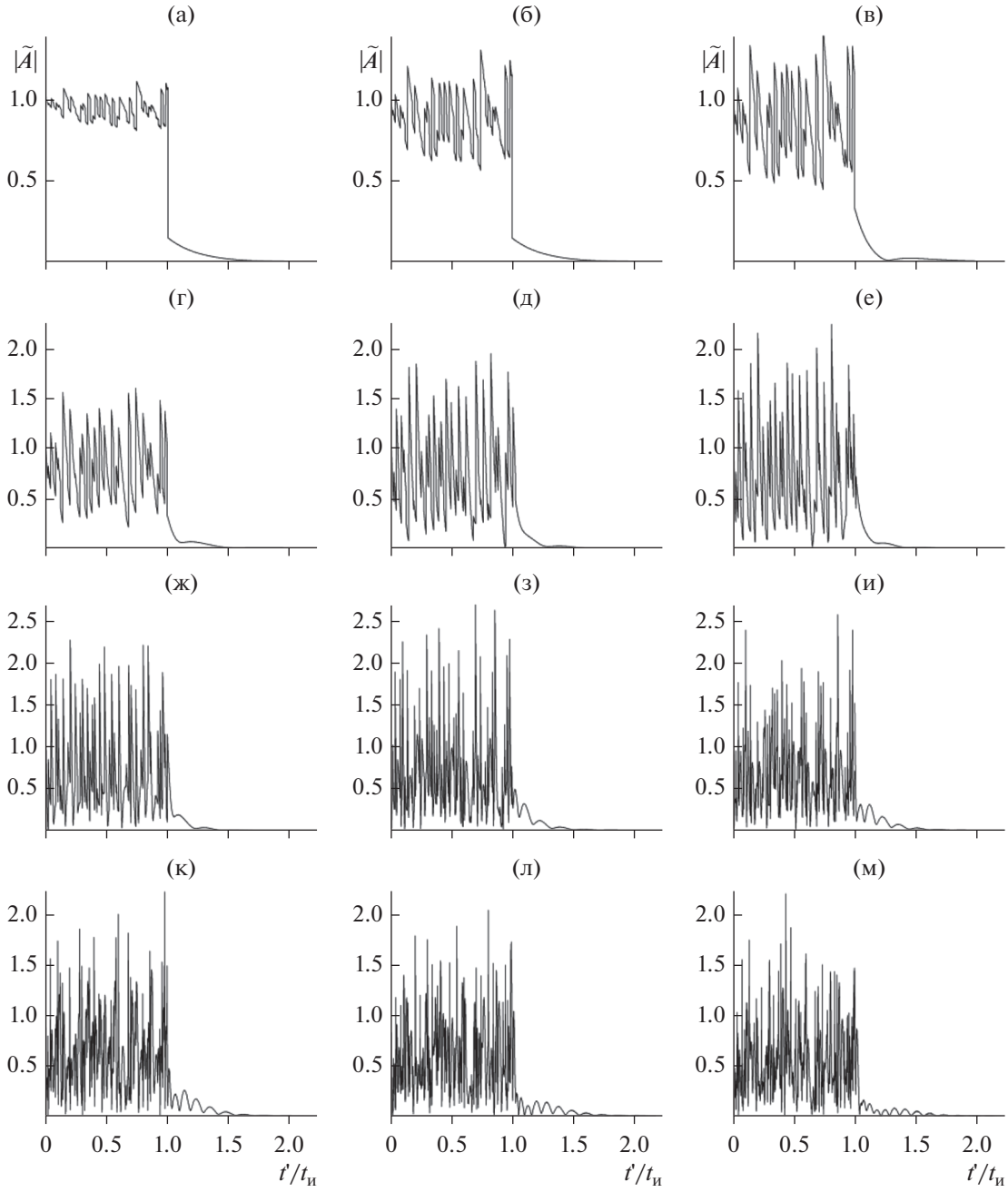

Рис. 2. Деформация прямоугольного радиоимпульса с хаотической фазой при распространении в резонансно-поглощающей газовой среде при $A_0 = 1$; $f' = 380.1$ ГГц; $t_и = 10^{-9}$ с; $X_0 = 0.05$; $\Phi_0 = 0$; $\Delta\Phi = 180°$; $N = 50$; $d\nu = 0.5$ ГГц и $\tau = 1$ (а); 3 (б); 5 (в); 10 (г); 20 (д); 30 (е); 50 (ж); 100 (з); 150 (и); 200 (к); 300 (л) и 400 (м).

чаемые результаты вводимых при вычислении интеграла Фурье допущений.

На рис. 3 в интервале значений оптической глубины τ, соответствующих огибающим рис. 2, приведены две интегральные характеристики: текущая энергия импульса

$$E_и(\tau) = \int_0^\infty \left|\tilde{A}(\tau;t')\right|^2 dt'$$

и ее доля, формирующая хвост импульса,

$$\chi(\tau) = \int_{t_и}^\infty \left|\tilde{A}(\tau;t')\right|^2 dt' / E_и(\tau).$$

Здесь и далее величина $E_и$ нормирована на начальную энергию импульса, так что $\bar{E}_и = E_и / E_и(0)$. Можно видеть, что на поведении интегральных характеристик импульса нарастающая шумопо-

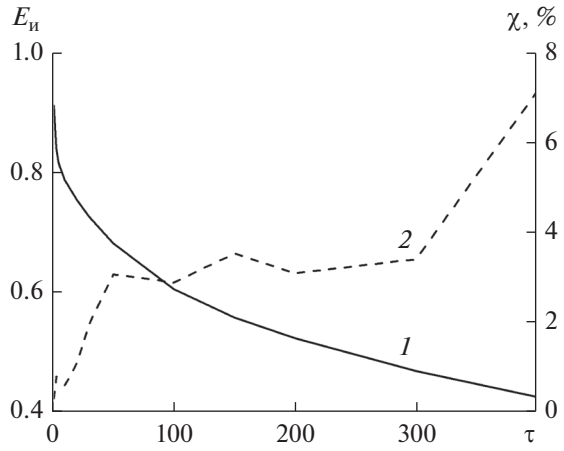

Рис. 3. Энергия прямоугольного импульса с хаотической фазой (кривая *1*) и относительная энергия его "хвоста" (кривая *2*) при распространении в резонансно-поглощающей среде (значения параметров те же, что и на рис. 2).

добность его текущей огибающей не сказывается. С увеличением τ оптической глубины трассы энергия импульса монотонно убывает (см. рис. 3, кривая *1*), как и должно быть. Поскольку при этом ширина спектра импульса многократно превышает ширину спектральной линии, величина $E_и(\tau)$ при всех рассмотренных τ остается сопоставимой со своим начальным значением. При этом также при всех τ энергия хвоста составляет малую долю (≤8%) текущей энергии импульса (см. рис. 3, кривая *2*). Незначительно отклоняются от своих начальных значений нормированные величины центра тяжести $\overline{t}_{цт} = t_{цт}/t_и$ и среднеквадратической ширины $\Delta\overline{t}_и = \Delta t_и/t_и$ импульса. Так, для огибающих на рис. 2а и 2м имеем $\overline{t}_{цт} = 0.499$ и 0.567 и $\Delta\overline{t}_и = 0.294$ и 0.307 соответственно. Приведенные оценки получены для деформированного импульса в целом. Если же выполнить их без учета полей хвостов (т.е. для временного интервала $\overline{t}' \in [0...1]$), отклонения величин $\overline{t}_{цт}$ и $\Delta\overline{t}_и$ от своих начальных значений уменьшаются в разы.

К интегральным характеристикам импульсных радиосигналов относятся и их корреляционные функции (КФ): автокорреляционная (АКФ)

$$\Psi_A(\tau;\mu) = \left|\frac{1}{E_и(\tau)}\int_{\mu}^{\infty}\tilde{A}^*(\tau;t'-\mu)\tilde{A}(\tau;t')dt'\right| \qquad (11)$$

и взаимная корреляционная функция (ВКФ) излученного и деформированного импульсов

$$\Psi_M(\tau;\mu) = \left|\frac{1}{\sqrt{E_и(0)\,E_и(\tau)}}\int_{\mu}^{\infty}\tilde{A}^*(0;t'-\mu)\tilde{A}(\tau;t')dt'\right|. \qquad (12)$$

В формулах (11) и (12) введено: μ – временной сдвиг; * – знак комплексного сопряжения. Структуры КФ определяют возможности радиосистем по точности измерений дальности и скорости целей [16]. Как и интегральные характеристики, рассмотренные выше, КФ находятся непосредственно по результатам вычислений поля по формулам (9) и (10). На начальном этапе их изучения представляет интерес, по-видимому, установить возможный характер их деформаций, обусловливаемый изменениями τ.

На рис. 4 приведена совокупность АКФ импульса с хаотической фазой, соответствующих огибающим на рис. 2. Хотя вид текущих огибающих с увеличением τ заметно варьирует, их АКФ различаются лишь незначительными деталями пьедесталов. При этом во всех случаях АКФ имеет узкий и высокий по сравнению с пьедесталом максимум, т.е. близка к идеальной. В отсутствие боковых максимумов единственной характеристикой АКФ является ширина $\Delta\mu_{0.5}(\tau)$ ее центрального пика по уровню 0.5. На рис. 4 ширина АКФ изменяется от ~$0.022t_и$ (рис. 4а) до ~$0.013t_и$ (рис. 4м), т.е. центральный пик незначительно сужается. Таким образом, с нарастанием хаотизации огибающей при увеличении τ (см. рис. 2) ее АКФ остается такой же, что и у излученного импульса.

Автокорреляционная функция отрезка слабокоррелированного случайного процесса также близка к идеальной. Поэтому по виду АКФ, изображенных на рис. 4, соответствующие им реализации величины $|\tilde{A}(\tau;t')|$ (см. рис. 2) нельзя с определенностью отнести к случаям приема полезного сигнала или шумоподобной помехи. При известном передаваемом сигнале дополнительная информация для принятия адекватного решения обеспечивается параллельным вычислением ВКФ излученного и деформированного импульсов. Совокупность ВКФ, соответствующих кривым $|\tilde{A}|$ на рис. 2 и кривым АКФ на рис. 4, представлена на рис. 5. Как видим, и при значительной деформации распространяющийся импульс сохраняет выраженную корреляционную связь с излученным импульсом. Кривые ВКФ, как и кривые АКФ, имеют единственный максимум и слабо выраженный пьедестал. Их характеристиками являются теперь ширина центрального максимума, определяемая по аналогии с шириной центрального максимума АКФ, и высота центрального пика. На рис. 5 ширина ВКФ возрастает от ~ $0.023t_и$ (рис. 5а) до ~$0.091t_и$ (рис. 5м), а высота $\Psi_{M\max}(\tau)$ убывает от ~0.99 до ~0.41 соответственно. Наличие выраженного пика у кривых ВКФ заведомо обеспечивает идентификацию обработанной реализации $|\tilde{A}(\tau;t')|$ как передаваемого сигнала.

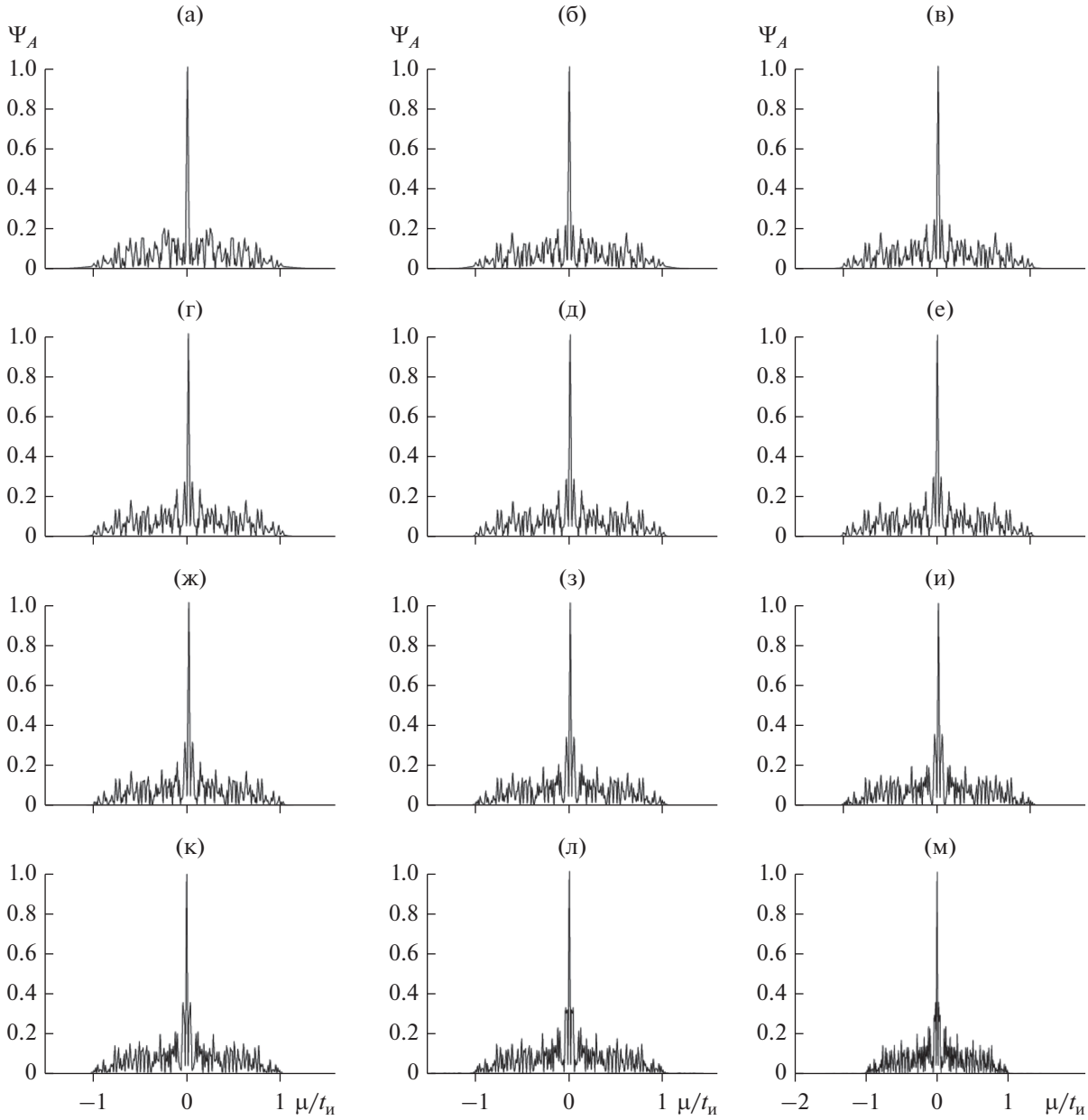

Рис. 4. Автокорреляционная функция прямоугольного радиоимпульса с хаотической фазой в резонансно-поглощающей газовой среде (значения параметров те же, что и на рис. 2).

3. О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРОВ ХАОТИЧЕСКОЙ ФАЗЫ НА ИСКАЖЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ И КФ ДЕФОРМИРОВАННОГО ИМПУЛЬСА

Деформацию импульса после прохождения трассы заданной длины определяют две группы параметров. К первой из них относятся параметры, непосредственно формирующие временной ход хаотической фазы, т.е. девиация хаотической фазы $\Delta\Phi$; число ее скачков N в пределах длительности излучаемого импульса и начальное условие X_0. Ко второй – параметры среды (резонансная частота ν_{ij} и полуширина спектральной линии $d\nu$) и импульса (несущая f' и длительность $t_и$). Результаты, приведенные на рис. 2–5, и основанные на них выводы получены при неизменном временном ходе величины Φ_x, изображенном на рис. 1а, и параметрах среды и импульса, указанных в подписи к рис. 2. Вместе с тем величины параметров задачи, в принципе, могут значительно отличаться от их значений, принятых для рис. 1 и 2. Здесь рассмотрим влияние на искажения импульса параметров первой группы и с этой целью по отдельности сопоставим их вариации с соот-

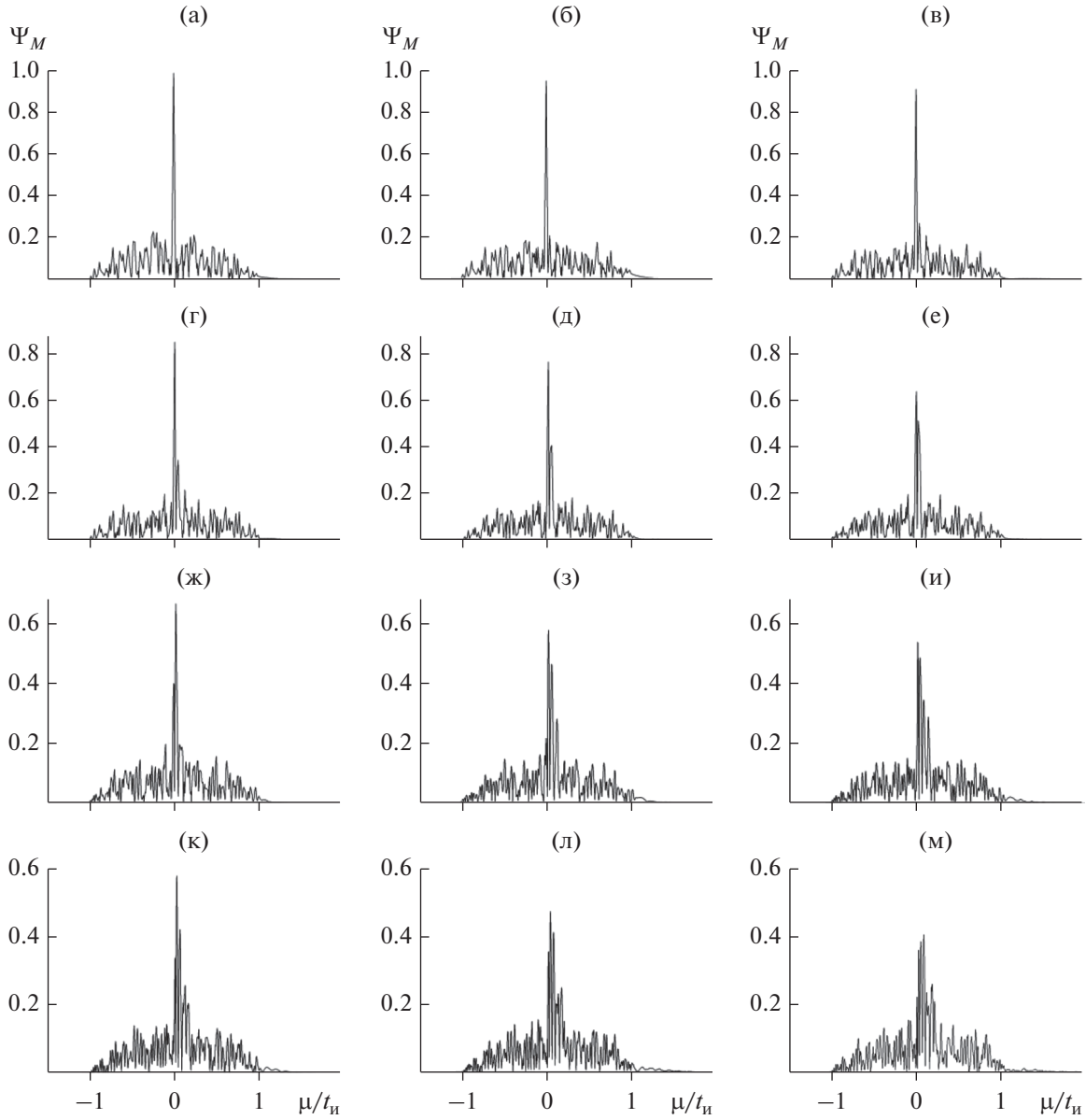

Рис. 5. Взаимная корреляционная функция излученного и деформированного прямоугольных радиоимпульсов с хаотической фазой в резонансно-поглощающей газовой среде (значения параметров те же, что и на рис. 2).

ветствующими им вариациями огибающей и КФ импульса с хаотической фазой, сопровождающими его распространение в резонансно-поглощающей среде.

3.1. Девиация хаотической фазы

На рис. 6–9 представлены изменения тех же характеристик импульса с хаотической фазой, что и рис. 2–5, но уже в зависимости от девиации $\Delta\Phi$. Оптическая глубина трассы здесь постоянна и равна 200, что равносильно длине трассы 600 км, девиация $\Delta\Phi$ изменяется с шагом 30°от 0° до 150° (рис. 6а–6е; 8а–8е; 9а –9е) и от 210° до 360° (рис. 6ж–6м; 8ж–8 м; 9ж–9м), а остальные параметры те же, что и на рис. 2. Отсутствующие на рис. 6, 8 и 9 кривые для $\Delta\Phi = 180°$ уже были приведены на рис. 2к, 4к и 5к соответственно.

Вид огибающей на рис. 6а характерен для случая квазимонохроматического прямоугольного импульса ($\Delta\Phi = 0°$) при значительной оптической глубине трассы (см. [6]). Она представляет собой совокупность двух подымпульсов, первый из которых и есть, собственно, частично поглощенный средой импульс, а второй – проявление высвечивания энергии, приобретенной молекулами среды при прохождении импульса. Текущая энергия импульса на рис. 6а составляет только

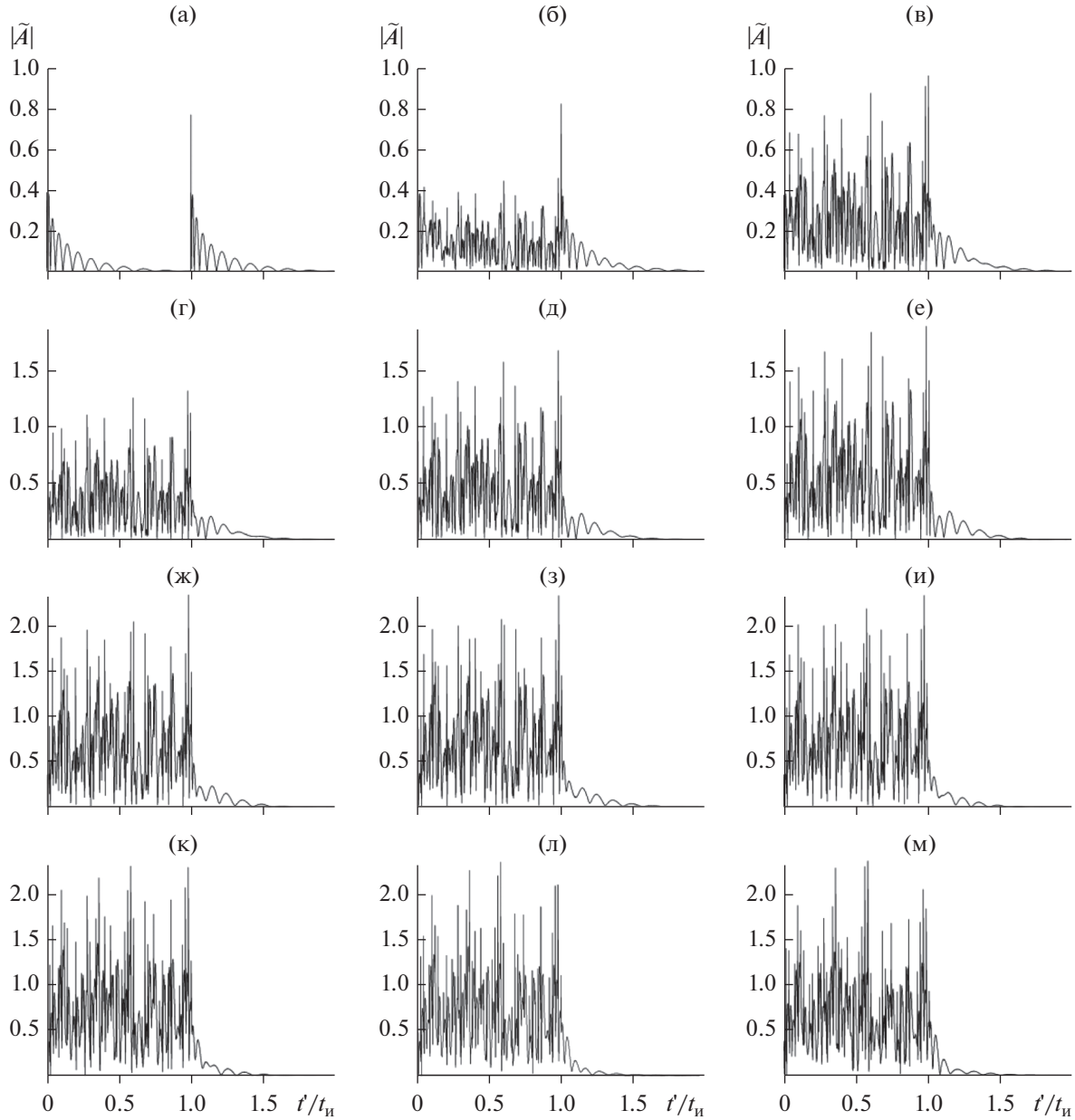

Рис. 6. К вопросу о влиянии девиации хаотической фазы на искажения огибающей прямоугольных радиоимпульсов в резонансно-поглощающей газовой среде при $A_0 = 1$; $f' = 380.1$ ГГц; $t_и = 10^{-9}$ с; $X_0 = 0.05$; $\Phi_0 = 0$; $N = 50$; $\tau = 200$; $d\nu = 0.5$ ГГц и различных $\Delta\Phi = 0°$ (а); 30° (б); 60° (в); 90° (г); 120° (д); 150° (е); 210° (ж); 240° (з); 270° (и); 300° (к); 330° (л) и 360° (м)).

~1.3% его начальной энергии, а $\chi \sim 44.8\%$, так что почти половина текущей энергии приходится на хвост. С увеличением параметра $\Delta\Phi$ спектр импульса уширяется. Соответственно, величины поля в импульсе постепенно возрастают, а огибающая все больше хаотизируется (см. рис. 6б–6е). Визуальный анализ кривых на рис. 6 позволяет также заключить, что по достижении девиацией фазы величины ~200° ее последующее увеличение практически не приводит к сколько-нибудь выраженным изменениям вида огибающей, в частности, высот отдельных "выбросов" поля (см. рис. 6ж–6м). При этом поле в пределах текущей длительности импульса по-прежнему можно определить, как шумоподобное (или как случайный процесс), а поле в хвосте остается регулярным. Зависимости интегральных характеристик $\bar{E}_и$ и χ от $\Delta\Phi$ приведены на рис. 7. Увеличение девиации фазы сопровождается, как и должно быть, выраженным ростом текущей энергии в конце

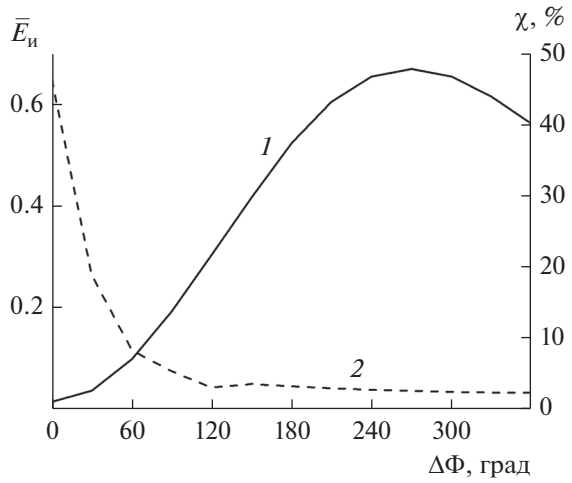

Рис. 7. К вопросу о влиянии девиации хаотической фазы на энергию прямоугольного импульса (кривая *1*) и относительную энергию его "хвоста" (кривая *2*) при распространении в резонансно-поглощающей среде (значения параметров те же, что и на рис. 6).

трассы (см. рис. 7, кривая *1*). При этом все меньшая доля текущей энергии приходится на хвост импульса (см. рис. 7, кривая *2*). Визуально поведение обеих кривых на рис. 7 указывает также на постепенную стабилизацию описываемых ими величин при увеличении ΔΦ, что согласуется с отмеченным выше возможным "насыщением" уровня хаотизации огибающей.

Корреляционная функция для огибающих на рис. 6 приведены на рис. 8 (АКФ) и рис. 9 (ВКФ). Как и в случае рис. 6, их следует рассматривать совместно с АКФ и ВКФ, найдеными для $\Delta\Phi = 180°$ и приведенными на рис. 4к и 5к. При $\Delta\Phi = 0°$ АКФ имеет характерную трехпиковую структуру (рис. 8а), боковые пики которой являются следствием сформировавшегося протяженного хвоста (см. рис. 6а). Далее увеличение девиации фазы приводит к выделению центрального пика АКФ из формирующегося пьедестала (рис. 8б–8е) и последующей стабилизации вида АКФ (рис. 8ж–8м). С погрешностью, не превышающей 2%, ширины АКФ на рис. 8ж–8м равны $10^{-2}t_и$. При $\Delta\Phi > 0$ кривые ВКФ также имеют выраженный центральный максимум (см. рис. 9), высота которого вначале увеличивается (рис. 9б–9е), а затем незначительно варьирует вблизи уровня ~0.6 (см. рис. 9ж–9м). Полагаем, что в совокупности результаты, представленные на рис. 6–9, обосновывают возможность проявления "эффекта насыщения" уровня искажений импульса с хаотической фазой в резонансно-поглощающей среде, когда дальнейшее увеличение параметра ΔΦ при прочих равных условиях уже не приводит к выраженным дополнительным вариациям его текущих характеристик.

3.2. Число скачков хаотической фазы

Отдельные огибающие на рис. 10 различаются только соответствующими им значениями параметра $N \le 100$ (указаны в подписи к рисункам), остальные параметры совпадают с принятыми ранее для рис. 2к, для которого $N = 50$. Уменьшение числа скачков при прочих равных условиях приводит к сужению спектра излучаемого импульса и возрастанию его поглощения средой. Так, при $N = 16$ (рис. 10з) среднеквадратическая ширина спектра равна ~8.1 ГГц, что в ~ 1.9 раза меньше аналогичной величины для импульса, искажения которого показаны на рис. 2к. Соответственно, уменьшение N заметно сказывается не только на частоте выбросов поля в пределах временного интервала $t' \in [0..t_и]$, но и на их высотах (ср. рис. 10а и 10з). Одновременно хвост импульса становится все более выраженным (рис. 10д–10з). Чтобы количественно охарактеризовать указанные тенденции, обратимся интегральным характеристикам $\bar{E}_и$ и χ, значения которых для огибающих на рис. 2к и рис. 10 приведены в табл. 1.

Таблица 1. Влияние числа скачков фазы N на интегральные характеристики прямоугольного импульса с хаотической фазой в резонансно-поглощающей газовой среде

N	Интегральная характеристика					
	$E_и$	$\bar{t}_{цт}$	$\Delta\bar{t}_и$	γ_1	γ_2	χ, %
100	0.602	0.505	0.295	0.103	–1.081	0.89
80	0.607	0.497	0.287	0.158	–0.940	2.07
64	0.597	0.520	0.292	0.126	–0.921	4.72
50	0.523	0.540	0.296	0.077	–0.945	3.08
40	0.451	0.539	0.291	0.098	–0.793	3.80
32	0.415	0.568	0.298	–0.010	–0.879	3.62
25	0.330	0.613	0.319	–0.114	–1.154	11.4
20	0.235	0.588	0.323	0.156	–0.974	10.9
16	0.189	0.598	0.329	0.176	–0.942	16.3

Примечание: $A_0 = 1$; $f' = 380.1$ ГГц; $t_и = 10^{-9}$ с; $X_0 = 0.05$; $\Phi_0 = 0$; $\Delta\Phi = 180°$; $\nu_{ij} = 380.1$ ГГц; $d\nu = 0.5$ ГГц; $\tau = 200$.

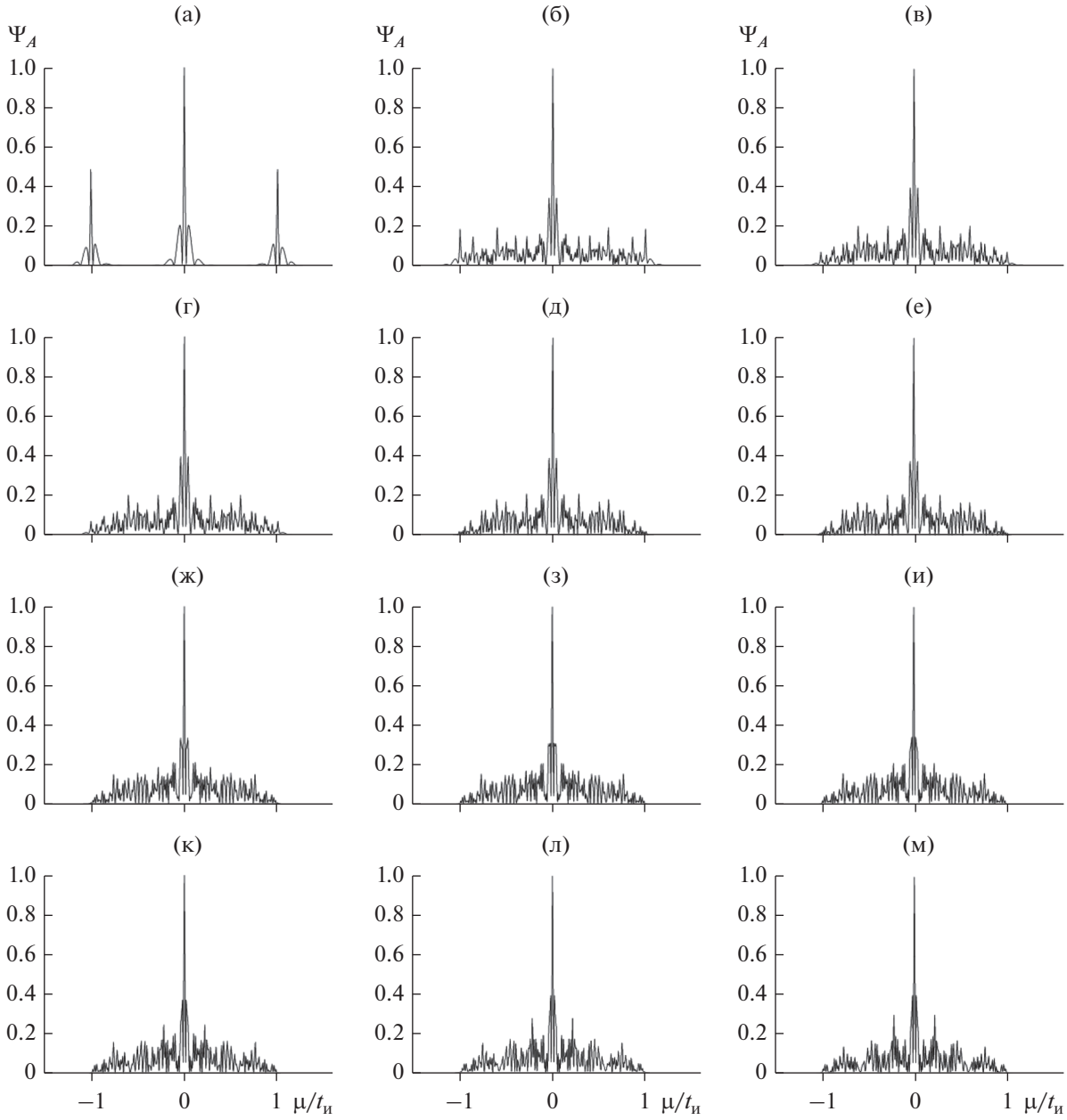

Рис. 8. К вопросу о влиянии девиации хаотической фазы на искажения АКФ прямоугольного импульса (значения параметров те же, что и на рис. 6).

Можно видеть, что изменение числа скачков в рассмотренном интервале $N \in [100...16]$ сопровождается в обоих случаях монотонным изменением величин $\bar{E}_и$ и χ в ~3 и ~18 раз соответственно. Таблица 1 содержит также нормированные величины центра тяжести $\bar{t}_{цт} = t_{цт}/t_и$ и среднеквадратической ширины $\Delta\bar{t}_и = \Delta t_и/t_и$, коэффициента асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 для кривых $|\tilde{A}|$, изображенных на рис. 10. Обратим внимание, что на поведении перечисленных характеристик вариации параметра N заметно не сказываются, так что во всех случаях их значения мало отличаются от соответствующих значений для прямоугольного импульса ($\bar{t}_{цт}(0) = 0.5$; $\Delta\bar{t}_и(0) = 0.289$; $\gamma_1(0) = 0$; $\gamma_2(0) = -1.2$).

Совокупности корреляционных функций, отвечающих огибающим на рис. 10, приведены на рис. 11 и рис. 12. Их элементами являются также и кривые АКФ и ВКФ, найденные при $N = 50$ и изображенные на рис. 4к и 5к. Видно, что отмеченные ранее для рис. 4 и 8 характерные особенности кривых АКФ сохраняются на рис. 11 до

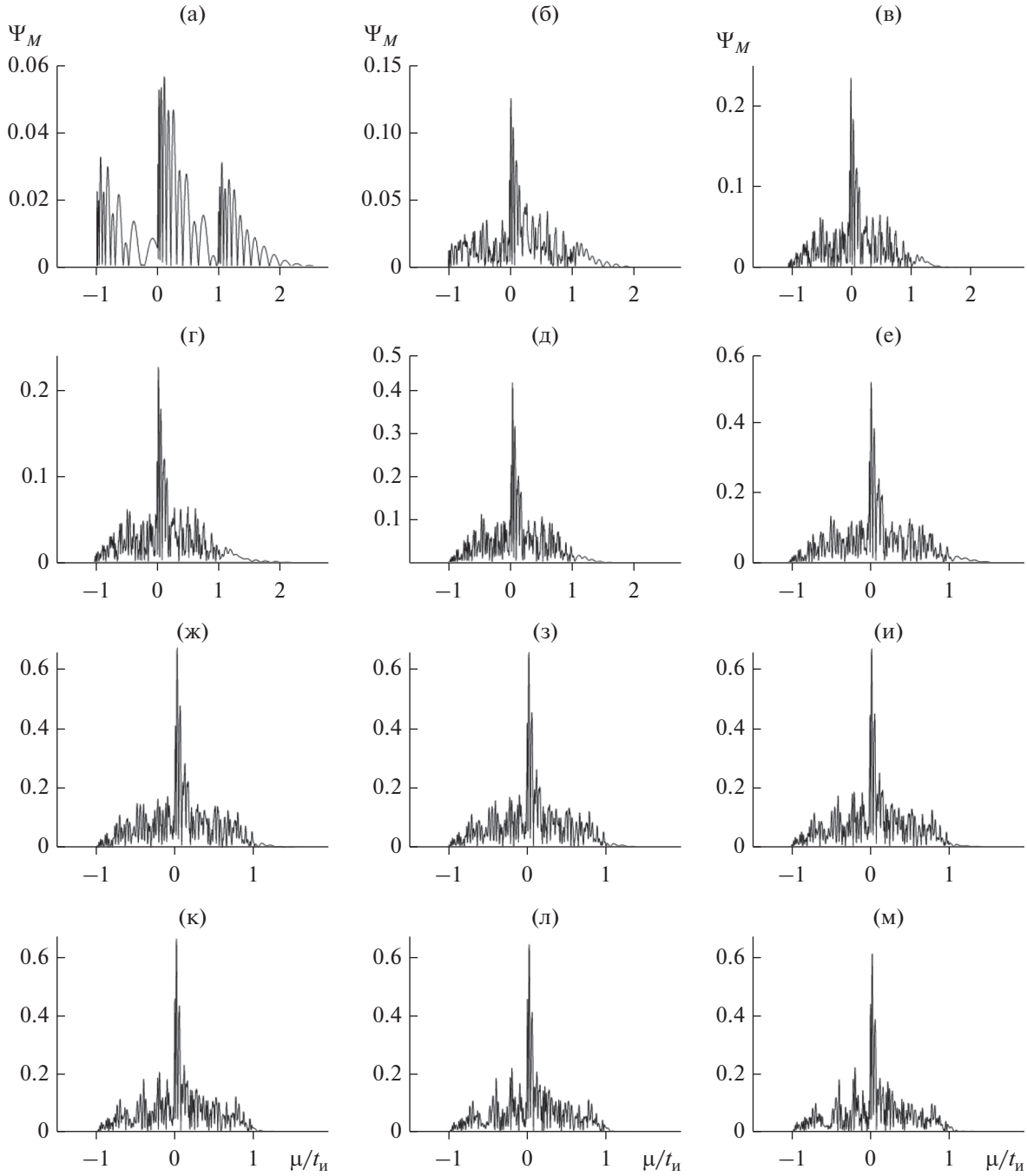

Рис. 9. К вопросу о влиянии девиации хаотической фазы на искажения ВКФ прямоугольного импульса (значения параметров те же, что и на рис. 6).

$N \approx 40$ (рис. 11а–11г). Дальнейшее уменьшение параметра N приводит к возникновению боковых максимумов АКФ (рис. 11д–11з) с варьирующими характеристиками. Ширина центрального максимума АКФ $\Delta\mu_{0.5}(\tau) = 0.008t_и$ (рис. 11а) и $0.018t_и$ (рис. 11з). На рис. 12 при всех N кривые ВКФ имеют несколько выраженных максимумов в окрестности нулевого временного сдвига. Это свидетельствует о заведомо не помеховой природе принятой реализации $\left|\tilde{A}(\tau;t')\right|$.

3.3. Параметр X_0

При прочих равных условиях изменения величины X_0 не приводят к заметным изменениям спектра импульса (пример см. на рис. 1в, 1г) и, как

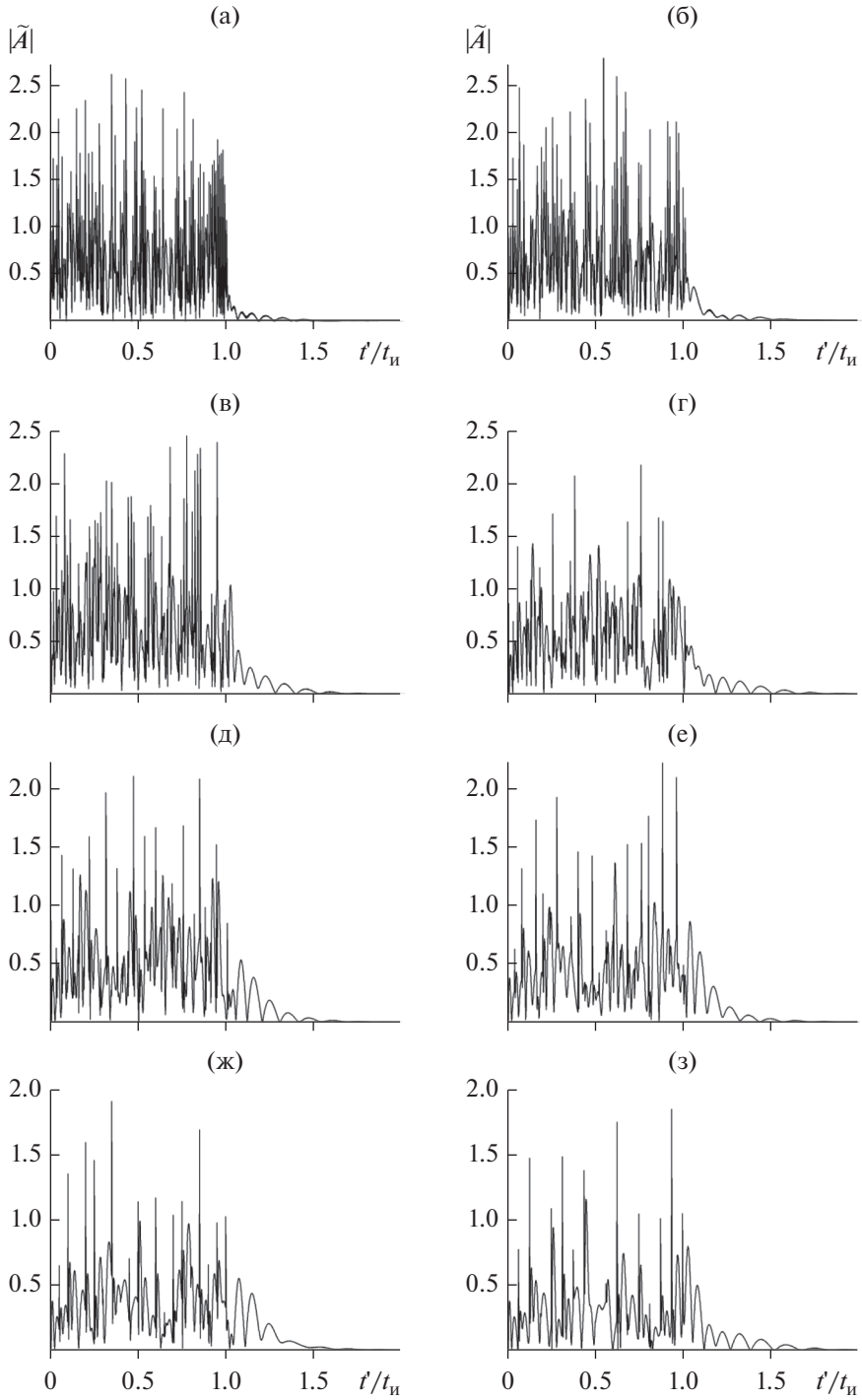

Рис. 10. К вопросу о влиянии числа скачков фазы в излучаемом прямоугольном импульсе с хаотической фазой на искажения его огибающей при $A_0 = 1$; $f' = 380.1$ ГГц; $t_и = 10^{-9}$ с; $X_0 = 0.05$; $\Phi_0 = 0$; $\Delta\Phi = 180°$; $\tau = 200$; $d\nu = 0.5$ ГГц и $N = 100$ (а); 80 (б); 64 (в); 40 (г); 32 (д); 25 (е); 20 (ж) и 16 (з)).

можно предположить, не будут сопровождаться заметными дополнительными изменениями текущей огибающей импульса и его интегральных характеристик. Приведенные ниже данные это подтверждают. Так, огибающие на рис. 13 отвечают различающимся значениям $X_0 \in [0.1...0.4]$. К их совокупности относится и огибающая на рис. 2к, для которой $X_0 = 0.05$. Можно видеть, что различия между отдельными огибающими и, в частности, характерными высотами их локальных мак-

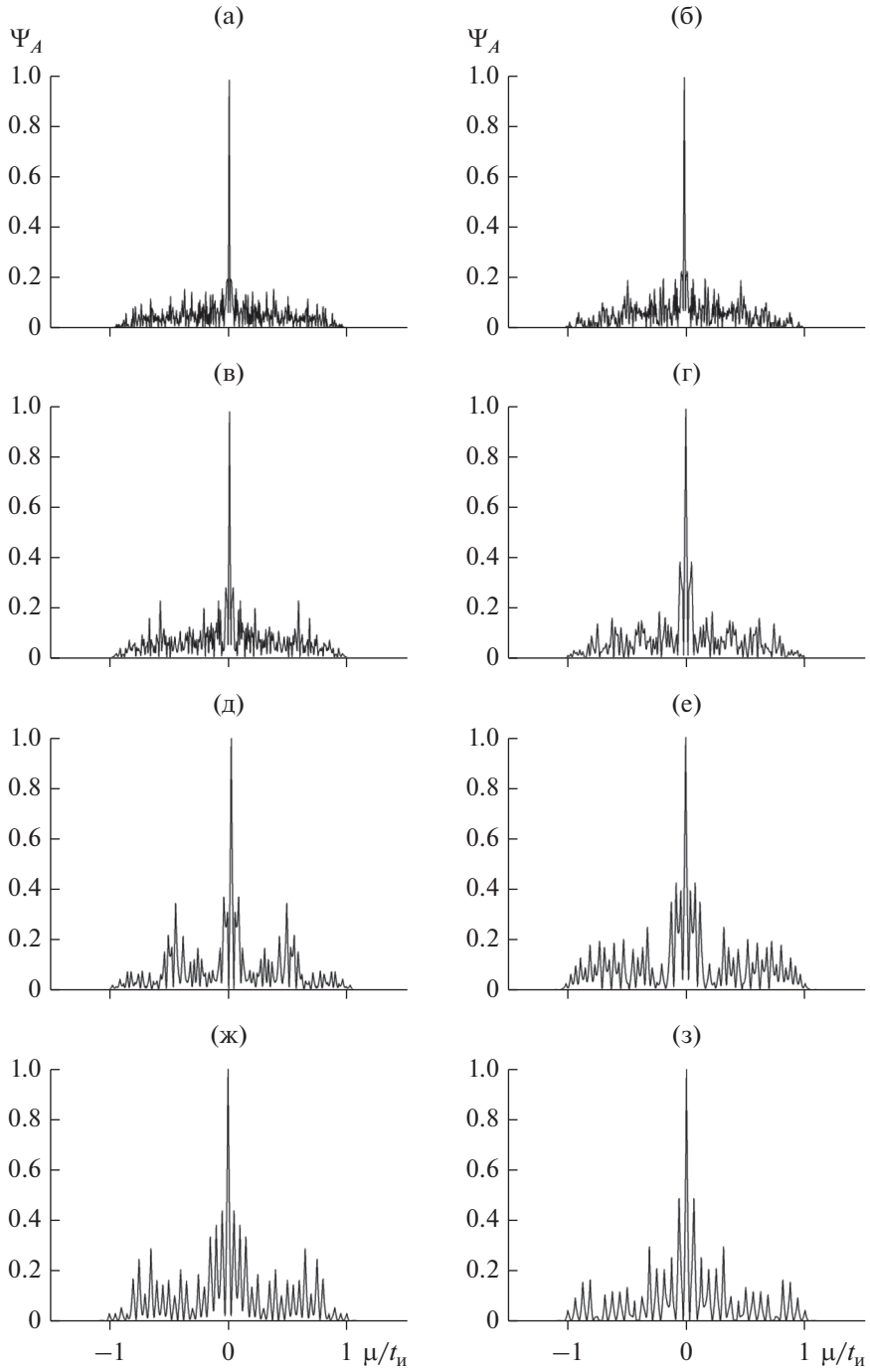

Рис. 11. К вопросу о влиянии числа скачков фазы в излучаемом прямоугольном импульсе на искажения его АКФ (значения параметров те же, что и на рис. 10).

симумов весьма незначительны. Количественно на их близость друг к другу указывают и интегральные характеристики кривых, которые приведены в табл. 2 (обратим внимание, что здесь первая строка совпадает с четвертой строкой табл. 1). Например, относительные отклонения величин $\overline{t}_{цт}$ и $\Delta\overline{t}_и$ в табл. 2 от их средних значений 0.535 и 0.296 не превышают ~5.8 и 6.8% соответственно. Также незначительно изменяются величины $\overline{E}_и$ и χ. Кроме того, величины характеристик $\overline{t}_{цт}$; $\Delta\overline{t}_и$; γ_1 и γ_2 при всех X_0 весьма мало отличаются от своих значений для прямоугольного импульса (см. выше).

Корреляционные функции для огибающих на рис. 13 приведены на рис. 14 и 15 (см. также

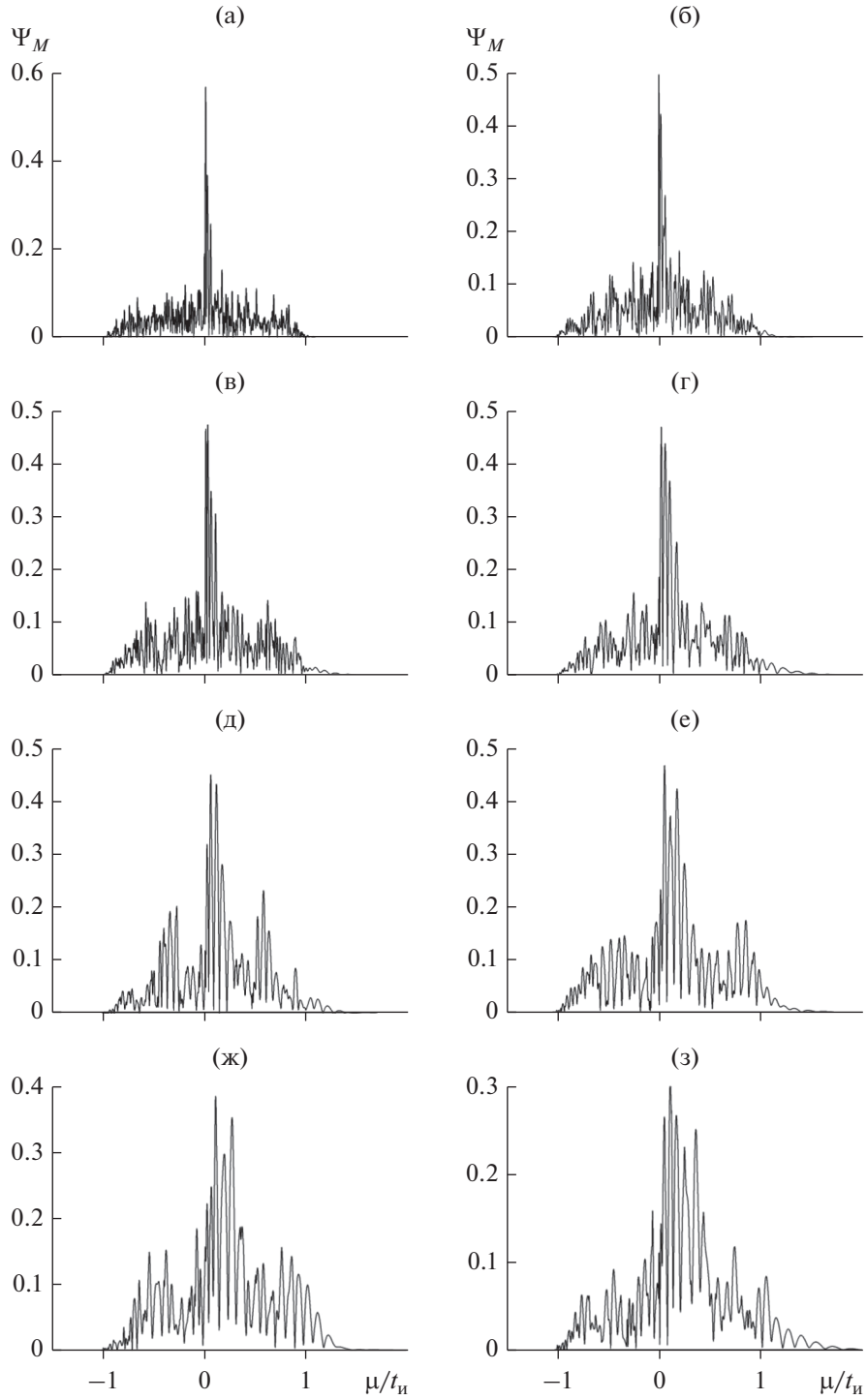

Рис. 12. К вопросу о влиянии числа скачков фазы в излучаемом прямоугольном импульсе на искажения его ВКФ (значения параметров те же, что и на рис. 10).

рис. 4к и 5к). Визуально в каждой из совокупностей кривые весьма близки. Это замечание относится прежде всего к центральным пикам кривых. Так, на рис. 13 наибольшее относительное отклонение ширины центральных максимумов $\Delta\mu_{0.5}(X_0)$ от среднего значения ~$0.012t_и$ не превышает 3%; аналогичная оценка для рис. 14 составляет ~2%. Таким образом, варьирование параметра X_0, по-видимому, не приводит к дополнительным особенностям искажений импульса (1).

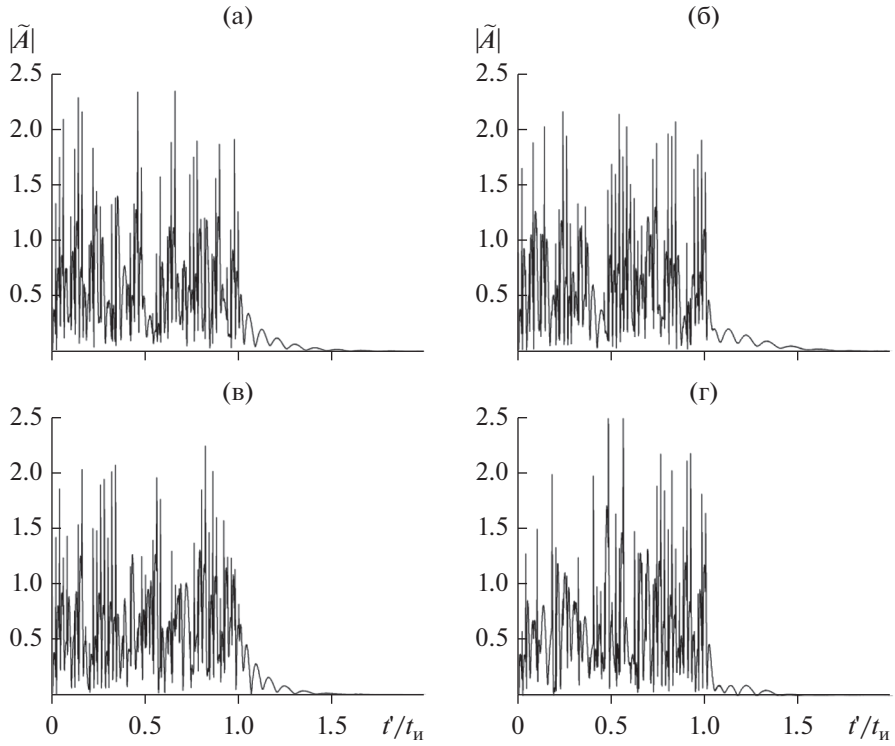

Рис. 13. К вопросу о влиянии параметра X_0 на искажения огибающей прямоугольного импульса с хаотической фазой при $A_0 = 1$; $f' = 380.1$ ГГц; $t_и = 10^{-9}$ с; $\Phi_0 = 0$; $\Delta\Phi = 180°$; $N = 50$; $\tau = 200$; $d\nu = 0.5$ ГГц и $X_0 = 0.1$ (а); 0.2 (б); 0.3 (в) и 0.4 (г).

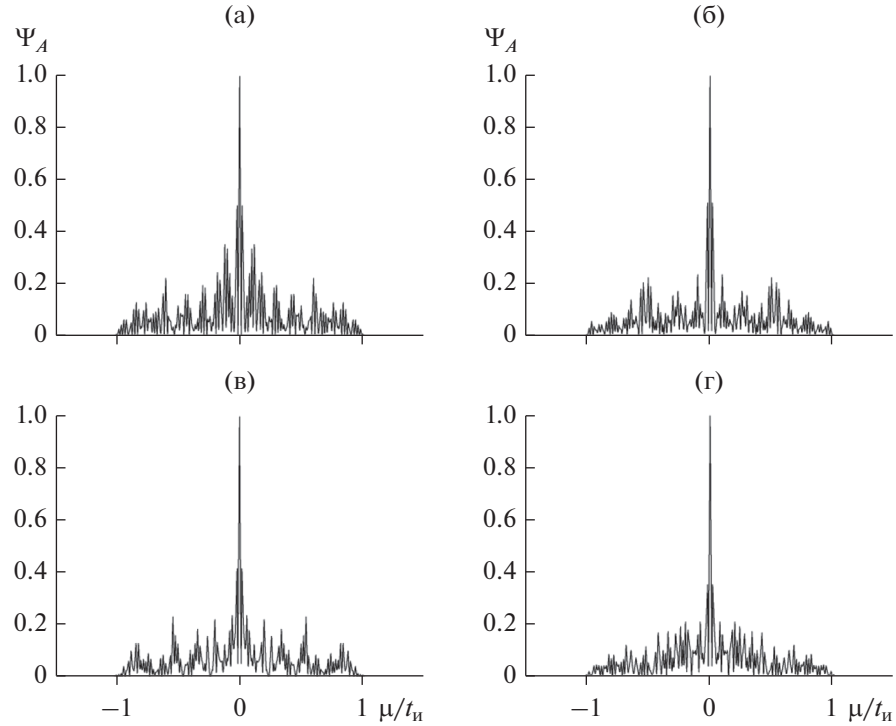

Рис. 14. К вопросу о влиянии параметра X_0 на искажения АКФ прямоугольного импульса с хаотической фазой (значения параметров те же, что и на рис. 13).

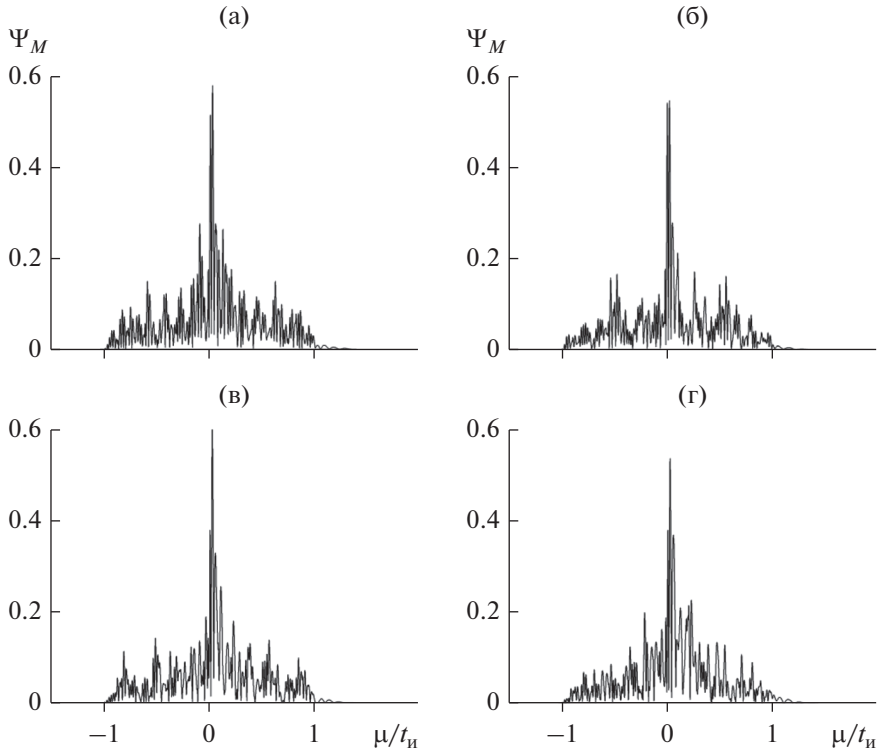

Рис. 15. К вопросу о влиянии параметра X_0 на искажения ВКФ прямоугольного импульса с хаотической фазой (значения параметров те же, что и на рис. 13).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведены результаты начального анализа характера и особенностей дисперсионных искажений распространения прямоугольного радиоимпульса с хаотической фазой в резонансно-поглощающей газовой среде. Хаотичность фазы моделируется на основе отображения Чебышева первого рода третьего порядка. При удалении импульса от излучателя сопровождается постепенной трансформацией, его огибающей к виду шумоподобного сигнала (случайного процесса) и формированием “хвоста”, поле которого регулярно изменяется во времени. При вариациях параметров задачи, формирующих временной ход хаотической фазы, шумоподобность огибающей на текущие величины интегральных характеристик импульса практически не влияет, что означает их малую информативность.

Таблица 2. Влияние параметра X_0 на интегральные характеристики прямоугольного импульса с хаотической фазой в резонансно-поглощающей газовой среде

X_0	Интегральная характеристика					
	$\bar{E}_и$	$\bar{t}_{цт}$	$\Delta\bar{t}_и$	γ_1	γ_2	χ,%
0.05	0.523	0.540	0.296	0.077	−0.945	3.08
0.1	0.497	0.504	0.304	0.116	−1.157	2.72
0.2	0.494	0.524	0.305	0.001	−1.057	3.13
0.3	0.519	0.544	0.298	−0.102	−1.113	2.90
0.4	0.534	0.564	0.276	−0.132	−0.938	2.18

Примечание: $A_0 = 1$; $f' = 380.1$ ГГц; $t_и = 10^{-9}$ с; $N = 50$; $\Phi_0 = 0$; $\Delta\Phi = 180°$; $\nu_{ij} = 380.1$ ГГц; $d\nu = 0.5$ ГГц; $\tau = 200$.

В рассмотренных интервалах значений параметров, описывающих степень хаотичности мгновенной фазы излучаемого импульса, влияние среды не приводит к последующим принципиальным изменениям вида его авто- и взаимной корреляционных функций в процессе распространения. Во всех рассмотренных ситуациях текущие КФ деформирующегося импульса имеют вид узкого пика на фоне широкого пьедестала, характерная высота которого значительно меньше единицы. При этом ширины АКФ и ВКФ по уровню 0.5 удовлетворяют неравенству $\Delta\mu_{0.5} \ll t_и$. Таким образом, введение хаотической фазы обеспечивает сохранение их характерного вида в условиях последующей значительной деформации, огибающей из-за частотной дисперсии.

Представленные данные указывают на принципиальную необходимость учета влияния среды распространения при выполнении оценок преимуществ применения в радиосистемах хаотических сигналов, в том числе, импульсов с хаотиче-

ской фазой. Представляет также интерес изучение влияния несущей частоты и длительности хаотического импульса на его характеристики и поиск оптимальных отображений, которые обеспечат наибольшее уширение спектра излучаемого импульса при относительно малом числе скачков фазы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васюта К.С., Малышев А.А., Зоц Ф.Ф.* // Системи обробки інформації. 2012. Т. 2. № 3. С. 22.
2. *Костенко П.Ю., Васюта К.С., Симоненко С.Н., Барсуков А.Н.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2010. Т. 53. № 1. С.1.
3. *Костенко П.Ю., Васюта К.С., Симоненко С.Н.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2011. Т. 54. № 3. С. 47.
4. *Зудилин А.С., Назаров Л.Е.* // Труды VI Всерос. научно-технич. Конф. “Радиолокация и радиосвязь”. М., 2012. Т. 2. С. 3.
5. *Калинин В.И., Чапурский В.В.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 10. С. 1025.
6. *Стрелков Г.М.* // РЭ. 2008. Т. 58. № 10. С. 989.
7. *Зражевский А.Ю., Малинкин В.Г., Соколов А.В.* // РЭ. 1974. Т. 19. № 11. С. 2392.
8. *Жевакин С.А., Наумов А.П.* // РЭ. 1967. Т. 12. № 7. С. 1147.
9. *Жевакин С.А., Наумов А.П.* // РЭ. 1967. Т. 12. № 6. С. 955.
10. *Seventline J.B., Rani D.E., Rajeswari K.R.* // Radioengineering. 2010. V. 19. № 3. P. 415.
11. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1975.
12. *Глаголев Ю.А.* Справочник по физическим параметрам атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1970.
13. *Зражевский А.Ю.* // РЭ. 1976. Т. 21. № 5. С. 951.
14. *Жевакин С.А., Наумов А.П.* // РЭ. 1964. Т. 9. № 8. С. 1327.
15. *Жевакин С.А., Наумов А.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 9, 10. С. 1213.
16. *Варакин Л.Е.* Теория сложных сигналов. М.: Сов. радио, 1970.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 749–756

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 681.7.068

СПЕКТРЫ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН С ТОНКОЙ СЕРДЦЕВИНОЙ И НАДОБОЛОЧЕЧНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

© 2020 г. О. В. Иванов[a, b, c, *], Л. И. Юсупова[a, c], А. М. Низаметдинов[a]

[a] *Ульяновский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Гончарова, 48/2, Ульяновск, 432071 Российская Федерация*

[b] *Ульяновский государственный университет, ул. Л. Толстого, 42, Ульяновск, 432017 Российская Федерация*

[c] *Ульяновский государственный технический университет, ул. Северный Венец, 32, Ульяновск, 432027 Российская Федерация*

**E-mail: olegivvit@yandex.ru*

Поступила в редакцию 18.04.2019 г.
После доработки 08.08.2019 г.
Принята к публикации 09.08.2019 г.

Исследованы спектры пропускания волоконно-оптических структур, в которых происходит преобразование мод в отрезке волокна SM450 с малой сердцевиной при нанесении на оболочку волокна тонкопленочного покрытия. Рассчитаны моды и их дисперсионные зависимости для чистого волокна SM450 и для того же волокна с надоболочечным покрытием. Показан интерференционный механизм возникновения провалов в спектре пропускания. Создана установка для нанесения пленок поливинилового спирта на отрезок оптического волокна длиной до 20 см методом вытягивания из раствора, позволяющая производить вытяжку из раствора со скоростями от 0.1 до 1.7 мм/с. Экспериментально измерены спектры пропускания структуры при нанесении надоболочечных слоев. Обнаружено смещение спектров при нанесении тонких пленок. Измерена зависимость величины смещения по длине волны от скорости вытягивания из раствора, определяющей толщину пленки.

DOI: 10.31857/S0033849420070049

ВВЕДЕНИЕ

Оптоволоконные структуры, спектральные характеристики которых определяются взаимодействием и преобразованием нескольких волоконных мод различных типов, привлекают значительный интерес благодаря простоте их создания, компактностью, возможностью использования для измерения параметров внешней среды, таких как показатель преломления, химический состав, влажность и др. Можно выделить следующие структуры указанного вида: длиннопериодные волоконные решетки [1], тейперы [2, 3], смещенные стыки волокон [4], вставки специальных волокон. В качестве вставок применяются многомодовые [5] и маломодовые волокна [6], волокна с тонкой сердцевиной [7–10], без сердцевины [11], с депрессированной оболочкой [12, 13] и др. [14–16].

В волоконных структурах со вставками нестандартных волокон на стыке со стандартным волокном происходит преобразование моды сердцевины в различные моды волокна вставки, в том числе в моды оболочки, поле которых распространяется до внешней поверхности оболочки волокна. Эти моды обладают высокой чувствительностью к различным физическим параметрам внешней среды. Волоконные структуры с такими особенностями находят применение в качестве датчиков, в частности, влажности [15], температуры [7], показателя преломления внешней среды [10, 16], уровня жидкости [17–19].

Вставки из волокон с малой сердцевиной отличаются тем, что сердцевина такого волокна не может удерживать моду и эта мода выходит в оболочку. Интерференция нескольких мод, возбуждаемых на первом стыке вставки и достигших второго стыка, приводит к возникновению достаточно сложных спектров с немонотонным распределением интенсивности по длине волны [17]. Положение спектральных пиков оказывается чувствительным к показателю преломления внешней среды. Ранее было показано, что чувствительность структур, возбуждающих оболочечные моды, может быть существенно увеличена путем нанесения покрытий на оболочку волокна с показателем преломления более высоким по сравнению с показателем преломления оболочки [20]. Увеличение чувствительности достигается за счет концентрации поля мод оболочки вблизи внешней границы волоконной структуры.

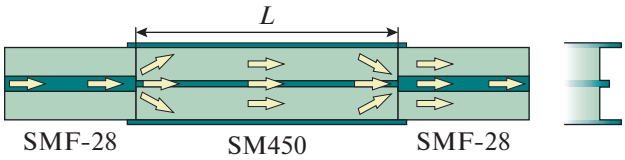

Рис. 1. Схема распространения световых лучей в волоконной структуре и профиль показателя преломления волокна SM450.

Цель данной работы – исследовать волоконно-оптическую структуру со вставкой волокна SM450 с тонкой сердцевиной и нанесенным на оболочку тонкопленочным покрытием на основе поливинилового спирта с показателем преломления более высоким, чем показатель преломления оболочки, проанализировать модовый состав и дисперсионные зависимости для чистого волокна и для того же волокна с надоболочечным покрытием, а также изучить зависимость величины смещения по длине волны от толщины волокна, определяемой скоростью вытягивания из раствора.

1. ВОЛОКОННАЯ СТРУКТУРА

Для создания волоконно-оптической структуры был использован отрезок волокна SM450 (фирма Fibercore, Великобритания) с параметрами: радиус сердцевины $r_c = 1.75$ мкм, числовая апертура NA = 0.12, длина волны отсечки $\lambda_{отс} \sim 400$ нм. Данный отрезок вставляли между стандартными волокнами SMF-28 (фирма Corning, США) параметры которых: $r_c = 4.2$ мкм, относительная разница между показателями преломления сердцевины и оболочки $\Delta = 0.36\%$, NA = 0.14, $\lambda_{отс} = 1260$ нм. Оптические волокна соединяли с помощью автоматического сварочного аппарата. Длина отрезка волокна SM450 обычно составляет несколько сантиметров.

Малый радиус сердцевины волокна SM450 обусловлен тем, что рабочая длина волны этого волокна лежит в области длин волн около 450 нм. Структура на основе отрезка волокна SM450 была исследована в диапазоне длин волн 1100...1700 нм, на которых сердцевина малого размера удерживает моды достаточно слабо и значительная часть энергии поля фундаментальной моды распространяется через оболочку. При попадании моды волокна SMF-28 на первый стык с волокном SM450, вследствие несогласованности полей двух волокон, имеющих существенно различные параметры сердцевины, мощность из моды сердцевины волокна SMF-28 распределяется между различными модами волокна SM450.

От первого стыка моды распространяются по отрезку волокна SM450 ко второму стыку. Часть энергии рассеивается в результате ее передачи модам высоких порядков и потерь на поверхности волокна. На втором стыке моды волокна SM450 преобразуются в различные моды сердцевины волокна SMF-28, при этом моды оболочки быстро затухают, а вклады от различных мод волокна SM450 распространяются далее в моде сердцевины волокна SMF-28, интерферируя друг с другом.

Для того чтобы повысить чувствительность созданной структуры к параметрам внешней среды, на оболочку волоконной структуры наносилось тонкопленочное покрытие, которое создавало дополнительный прозрачный надоболочечный слой толщиной от сотен до тысяч нанометров. Показатель преломления этого слоя должен быть больше показателя преломления кварцевой оболочки, чтобы подтягивать поле оболочечных мод от сердцевины к внешнему радиусу [20] и увеличивать поверхностное поле моды, распространяющееся во внешней среде. Покрытие может применяться не только для смещения поля в область границы с внешней средой, но служить в качестве элемента, чувствительного к химическому составу среды (кислотности, солености и др.). Вид созданной структуры, ход световых лучей в ней и профиль показателя преломления показаны на рис. 1.

2. МОДЫ ВОЛОКОН SM450 И SMF-28

Спектральные свойства исследуемой структуры обусловлены в первую очередь свойствами мод волокна SM450. Проанализируем модовый состав этого волокна, рассчитаем дисперсию и профили распределения мод. Волокно SM450 имеет малую сердцевину, поэтому модовая структура этого волокна существенно отличается от структуры мод стандартного волокна. Расчет эффективных показателей преломления мод волокна SM450 ($n_{эф} = \beta/k_0$, где β – постоянная распространения моды и k_0 – волновое число в вакууме) был произведен в предположении, что волокно имеет ступенчатый профиль со следующими параметрами: радиус сердцевины $r_c = 1.75$ мкм, показатель преломления сердцевины $n_c = n_{об} + 0.0034$, радиус оболочки $r_{об} = 62.5$ мкм. Величину показателя преломления $n_{об}$ рассчитывали с использованием формулы Зельмейера, описывающей дисперсию кварцевого стекла [21].

Для расчета оболочечных мод использовали матричный метод, позволяющий находить моды многослойных цилиндрических световодов с произвольным числом слоев. Метод основан на преобразовании уравнений Максвелла к матричной форме для матриц 4 × 4, задающих преобразование вектора поля, составленного из тангенциальных границам электрических и магнитных полей [1].

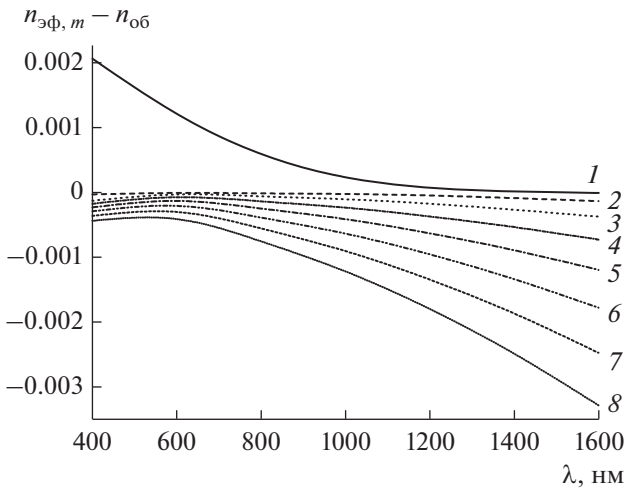

Рис. 2. Дисперсионные зависимости $n_{эф,m} - n_{об}$ для эффективных показателей преломления первых восьми мод LP_{0m} волокна SM450 от длины волны (LP_{01}...LP_{08} – *1–8* соответственно).

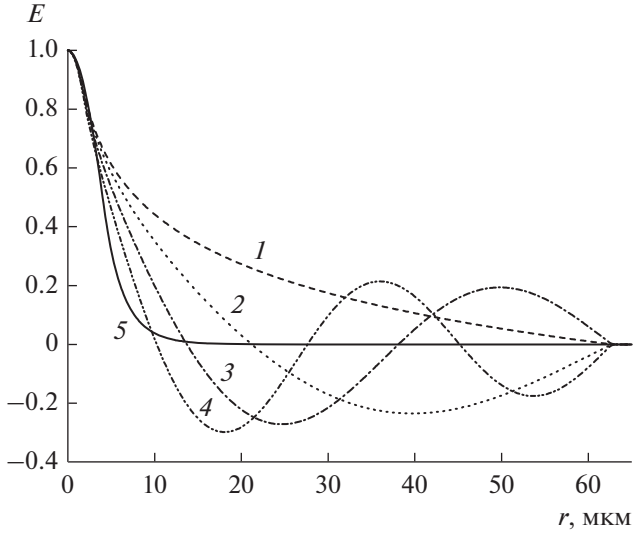

Рис. 3. Профили амплитуды электрического поля мод волокон SM450 (LP_{01}...LP_{04} – кривые *1–4* соответственно) и SMF-28 (LP_{01} – кривая *5*) на длине волны 1500 нм.

На рис. 2 приведены зависимости эффективных показателей преломления $n_{эф,m} - n_{об}$ первых восьми азимутально-симметричных мод волокна SM450 от длины волны. Номера кривых соответствуют индексу m, задающему радиальное модовое число линейно поляризованной моды LP_{0m}. Дисперсионные кривые становятся ниже с ростом модового числа. Фундаментальная мода LP_{01} выделяется среди остальных мод и является модой сердцевины до длин волн около 900 нм. Ее эффективный показатель преломления понижается от показателя преломления сердцевины и приближается к показателю преломления оболочки при увеличении длины волны. После 1200 нм она ведет себя аналогично другим оболочечным модам. Дисперсионные зависимости на длинах волн больше 600 нм все более сильно идут вниз с увеличением длины волны. Моды LP_{02}, ..., LP_{08} во всем исследуемом диапазоне длин волн являются модами внешней оболочки.

Моды оболочки являются модами всего волокна – их поле распространяется как в сердцевине, так и во внешней оболочке волокна. Профили электрического поля E мод LP_{01}, ..., LP_{04} волокна SM450 на длине волны 1500 нм показаны на рис. 3 (кривые *1–4*). Профили нормированы на амплитуды поля в центре волокна. Видно, что с ростом радиального номера моды увеличивается число колебаний амплитуды поля от радиуса внутри оболочки, уменьшается доля поля, распространяющегося вблизи сердцевины волокна, и увеличивается амплитуда поля вблизи внешней поверхности оболочки.

На стыке стандартного волокна и волокна с тонкой сердцевиной излучение из сердцевины волокна SMF-28 попадает в волокно SM450, при этом энергия излучения перераспределяется между модами волокна SM450. Эффективность передачи энергии определяется схожестью профиля поля моды принимающего волокна и поля моды сердцевины подводящего волокна (интегралом перекрытия мод). Профиль моды сердцевины волокна SMF-28 имеет существенно более узкое распределение по сравнению с модами волокна SM450 (см. рис. 3, кривая *5*), поэтому не происходит передачи энергии в какую-то отдельную моду, а возбуждается сразу несколько мод.

3. МОДЫ ВОЛОКНА SM450 С ПОКРЫТИЕМ

При нанесении тонкопленочного покрытия на оболочку оптического волокна происходит добавление дополнительного оптического слоя, который может изменять постоянные распространения оболочечных мод или, если его показатель преломления выше показателя преломления оболочки, приводить к возникновению мод внешнего слоя. С точки зрения увеличения чувствительности оболочечных мод интерес представляет нанесение покрытий с показателем преломления выше показателя преломления оболочки, поэтому рассмотрим именно этот случай.

На внешнюю оболочку волокна наносится покрытие из поливинилового спирта. При расчете мод волоконной структуры с покрытием необходимо учитывать зависимости показателей преломления от длины волны как самого волокна,

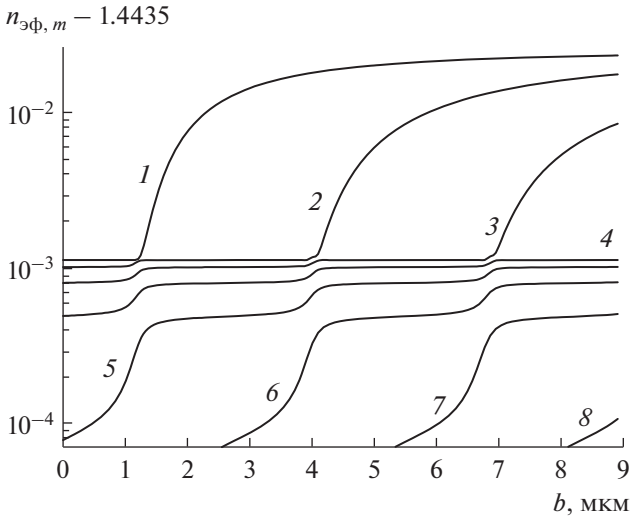

Рис. 4. Зависимости эффективных показателей преломления первых восьми мод LP_{0m} волокна SM450 от толщины надоболочечного покрытия (LP_{01}, ..., LP_{08} – кривые *1–8* соответственно) на длине волны 1500 нм.

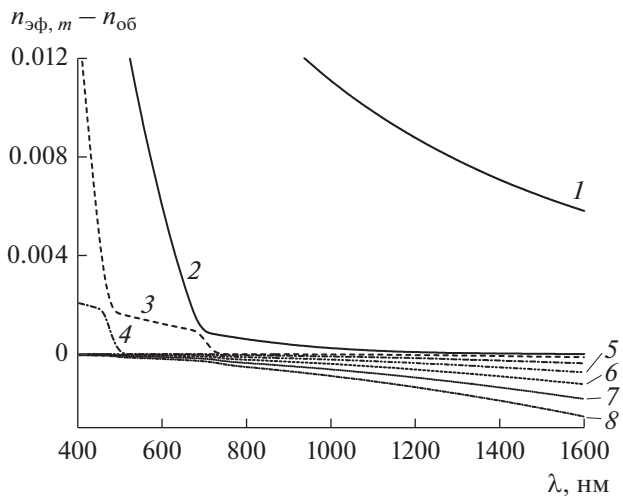

Рис. 5. Дисперсионные зависимости эффективных показателей преломления первых восьми мод LP_{0m} волокна SM450 с надоболочечным покрытием толщиной 2 мкм от длины волны (LP_{01}, ..., LP_{08} – кривые *1–8* соответственно).

так и покрытия. Для дисперсии показателя преломления поливинилового спирта используем результаты работы [22]:

$$n^2 - 1 = \frac{1.1490\lambda^2}{\lambda^2 - 0.1234783^2}. \quad (1)$$

На рис. 4 приведены зависимости эффективных показателей преломления первых восьми мод (LP_{01}...LP_{08}) волокна SM450 от толщины надоболочечного покрытия на длине волны 1500 нм. При нулевой толщине покрытия набор мод совпадает с набором мод волокна SM450. При увеличении толщины эффективные показатели преломления растут вследствие повышения среднего показателя преломления структуры. После достижения толщины 1 мкм покрытие захватывает первую моду LP_{01} и ее эффективный показатель преломления начинает стремиться к показателю преломления поливинилового спирта. Все остальные моды делают скачок на одну моду вверх: мода LP_{0m+1} продолжает идти по пути моды LP_{0m} с ростом толщины. На толщине 4 мкм следующая мода LP_{02} переходит в покрытие, а остальные моды делают скачок. Аналогичный перескок повторяется примерно через каждые 2.8 мкм прироста толщины пленки.

Посмотрим на этот процесс изменения мод с другой точки зрения – в зависимости от длины волны при фиксированной толщине пленки. На рис. 5 показаны эффективные показатели преломления $n_{эф,m} - n_{об}$ первых восьми мод LP_{0m} волокна SM450 с надоболочечным покрытием толщиной 2 мкм в зависимости от длины волны. Полученные кривые идут по длине волны в обратном порядке по сравнению с зависимостями от толщины, что связано с уменьшением отношения толщины покрытия к длине волны при сдвиге в красную сторону спектра.

На длине волны 1600 нм одна мода LP_{01} является модой покрытия и отстоит достаточно далеко от остальных мод. При уменьшении длины волны ее эффективный показатель преломления сильно растет, тогда как другие моды ведут себя как обычные оболочечные моды. Рост эффективного показателя преломления моды внешнего покрытия с уменьшением длины волны вызван тем, что все большая часть этой моды расположена внутри слоя внешнего покрытия. На длине волны 700 нм вторая мода уходит в покрытие с перескоком на одну моду для мод LP_{03}, ..., LP_{08}, и на длине волны 460 нм – третья мода. В ИК-диапазоне, используемом в волоконной оптике, для указанной толщины только одна мода является модой покрытия. Поле этой моды в основном распространяется по покрытию, поэтому интеграл перекрытия этой моды с модой сердцевины волокна SMF-28 пренебрежимо мал, и ее участие во взаимодействии мод можно не учитывать.

На длинах волн, соответствующих сближению дисперсионных зависимостей двух мод, эти моды имеют схожие профили: поле присутствует и в сердцевине и в оболочке, а осцилляции их поля по радиусу происходят в противофазе [12]. На стыке со стандартным волокном мода сердцевины преобразуется в волокне-вставке в несколько мод высоких порядков, возвращение которых в сердцевину происходит со значительными потерями и сопровождается их интерференцией между собой.

4. НАНЕСЕНИЕ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ВОЛОКНО

Для нанесения на волоконные световоды полимерных покрытий на основе поливинилового спирта был использован метод погружения и вытягивания из раствора. Сначала волоконную структуру из отрезка волокна SM450, зачищенного от полимерного покрытия и вваренного между зачищенными на концах стандартными волокнами, погружали в емкость с заранее приготовленным водным раствором поливинилового спирта. Затем волокно вытягивали вертикально вверх из раствора, остатки которого стекают под действием сил поверхностного натяжения и силы тяжести. Часть раствора остается на волокне в виде тонкой жидкой пленки, толщина которой определяется скоростью вытягивания, после чего пленка высыхает, закрепляясь на поверхности волокна. Чем быстрее волокно вытягивают из раствора, тем толще оказывается слой материала, осаждающийся на волокне. Толщина пленки также может контролироваться изменением вязкости (концентрации) раствора. В некоторых случаях в процессе высыхания происходит стекание раствора под действием силы тяжести, что приводит к меньшей толщине пленки в верхней части волокна. После вытягивания поливиниловая пленка покрывает всю структуру, включая места сварки и зачищенные концы стандартных волокон, однако наличие покрытия на этих концах никак не сказывается на спектрах структуры, так как оболочечные моды из стандартного волокна остаются только в оболочке и теряются, не проникая в сердцевину.

Как уже отмечалось, для увеличения поверхностного поля мод волокна показатель преломления пленки должен быть больше показателя преломления оболочки волокна. Показатель преломления поливинилового спирта на длине волны около 1500 нм примерно равен 1.47, а кварца – 1.44, т.е. требуемое соотношение выполняется. Раствор поливинилового спирта приготавливали растворением порошка поливинилового спирта в дистиллированной воде на паровой бане в течение 1 ч. Концентрация поливинилового спирта в растворе может варьироваться в пределах от 3.5 до 15 (мас. %). Мы использовали раствор с концентрацией спирта 4%.

Скорость вытягивания из раствора может варьироваться от десятков микрон до нескольких миллиметров в секунду. После нанесения пленки образцы сушили при комнатной температуре в течение нескольких минут. Указанные выше параметры приготовления раствора и режима нанесения позволяют получить пленки толщиной от сотен до тысяч нанометров.

Для погружения и вытягивания оптического волокна из раствора была создана установка

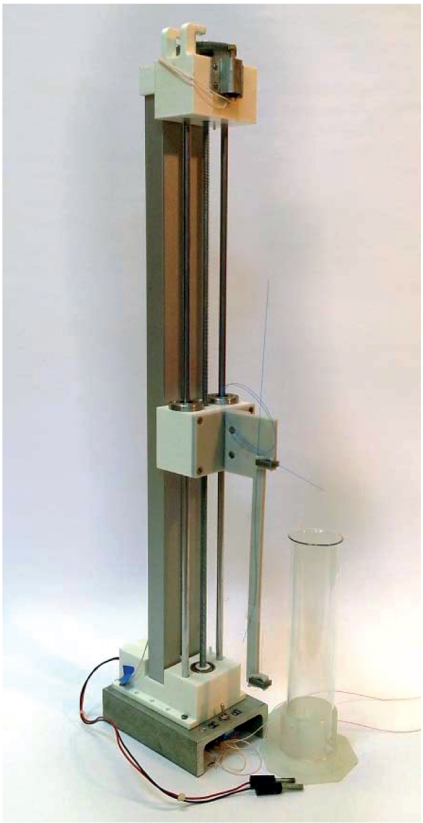

Рис. 6. Фотография установки для нанесения покрытий на волокно.

(рис. 6), на которой волокно закрепляется и равномерно двигается вдоль вертикальной оси. В установке имеется шаговый двигатель с понижающим редукторным механизмом, который через редукторный механизм крутит опорный вал, двигающий каретку со скоростью 0.1...1.7 мм/с. Для уменьшения биений, люфтов и улучшения плавности хода в каретке установлены три линейных подшипника. На каретке через специальные отверстия закреплен держатель волокна. Отрезок волокна с двойной оболочкой длиной 20 см, зачищенный от полимерного покрытия, зажимали с небольшим натяжением между двумя фиксаторами на держателе. С помощью переключателя меняли направление вращения винта и направление движения держателя с волокном вверх или вниз.

Окружающая среда оказывает влияние на испарение растворителя и может влиять на процесс формирования прозрачной пленки, поэтому необходимо контролировать состояние окружающей среды. Для этого установка была размещена в специальной камере, которая позволяла стабилизировать условия вытяжки – поддерживать постоянную температуру, влажность, отсутствие воздушных потоков. Это давало возможность

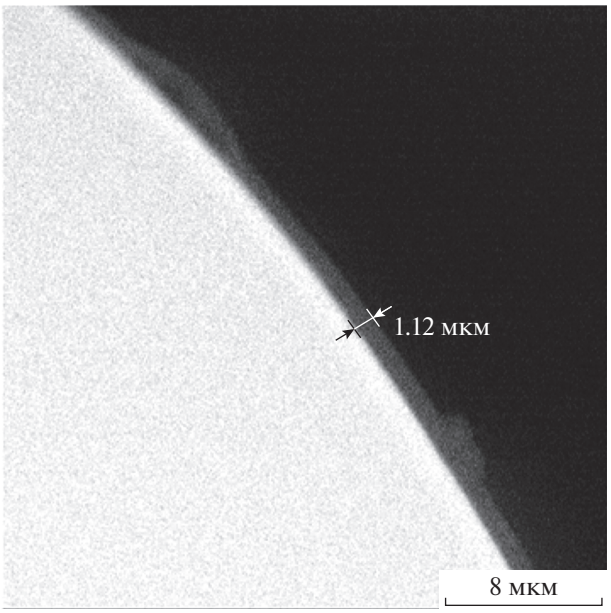

Рис. 7. Изображение торца волокна с надоболочечным слоем толщиной 1.12 мкм, полученного вытягиванием из раствора на скорости 1.632 мм/с.

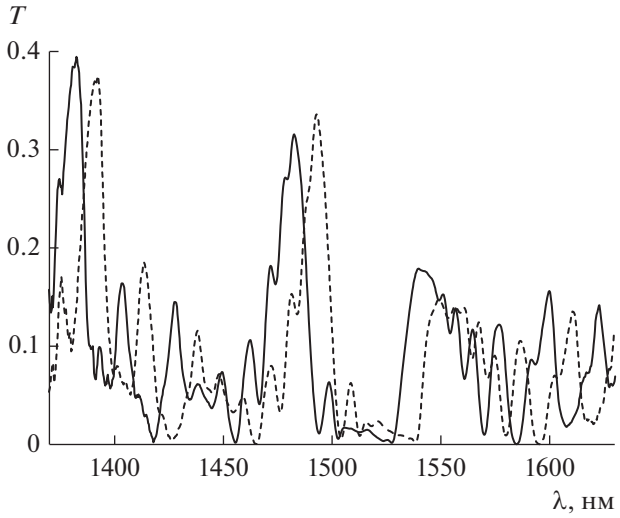

Рис. 8. Спектры структуры без покрытия (сплошная кривая) и с поливиниловым надоболочечным слоем, нанесенным вытягиванием из раствора на скорости 1.51 мм/с (штриховая).

улучшить однородность толщины и качества покрытия по длине волокна.

С помощью сканирующего электронного микроскопа была измерена толщина пленки, нанесенной вытягиванием волокна со скоростью 1.632 мм/с. Изображение торца волокна, полученное на микроскопе, представлено на рис. 7. Измеренная толщина пленки составила 1.12 мкм.

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ

Для измерения спектра пропускания структуры свет от широкополосного источника (лампа накаливания или суперлюминесцентный диод) запускается в стандартное волокно, проходит через исследуемую структуру снова в стандартное волокно и направляется в спектральный анализатор. Структуру на основе отрезка вставки волокна длиной 88 мм, зачищенного от полимерного покрытия, с приваренными с двух его концов стандартными волокнами фиксировали между двумя держателями в слегка натянутом положении. При этом по возможности были исключены деформации структуры, такие как изгиб или скрутка вдоль продольной оси волокна.

Вытягиванием из раствора на волокно наносили тонкопленочное покрытие поливинилового спирта. Измерение спектра производили через 5 минут после окончания вытяжки в положении, когда все волокно находилось в воздухе. После измерения спектра волокно промывали в воде и протирали этиловым спиртом. Данную процедуру повторяли несколько раз для различных скоростей вытягивания. Таким образом, скорость вытяжки уменьшали от 0.5 до 1.6 мм/с. Эксперимент был закончен измерением спектра пропускания структуры без покрытия.

На рис. 8 показаны измеренные спектры пропускания структуры без покрытия (сплошная кривая) и с поливиниловым надоболочечным слоем, нанесенным вытягиванием из раствора на скорости 1.51 мм/с (штриховая). Спектры представляют собой серию пиков с расстоянием порядка нескольких десятков нанометров между ними. Видно, что при нанесении пленки на поверхность оболочки имеет место смещение всего спектра в область бóльших длин волн, при этом в целом его форма сохраняется. Сдвиг спектра в среднем происходит на величину около 10 нм. Причина сдвига спектра – изменение профиля показателя преломления волокна в результате нанесения пленки – приводит к смещению профилей оболочечных мод и изменению их постоянных распространения.

Рассмотрим интерференцию мод в структуре немного более подробно. Предположим, что в волокне преимущественно происходит взаимодействие некоторых двух мод из всего набора мод волокна. Условие конструктивной интерференции двух мод имеет вид

$$\left(n_{\text{эф},i} - n_{\text{эф},j}\right) L = p\lambda, \qquad (2)$$

где $n_{\text{эф},i}$ и $n_{\text{эф},j}$ – эффективные показатели преломления двух мод, λ – длина волны света в вакууме, L – длина волокна-вставки и p – целое число. После нанесения покрытия толщиной Δb

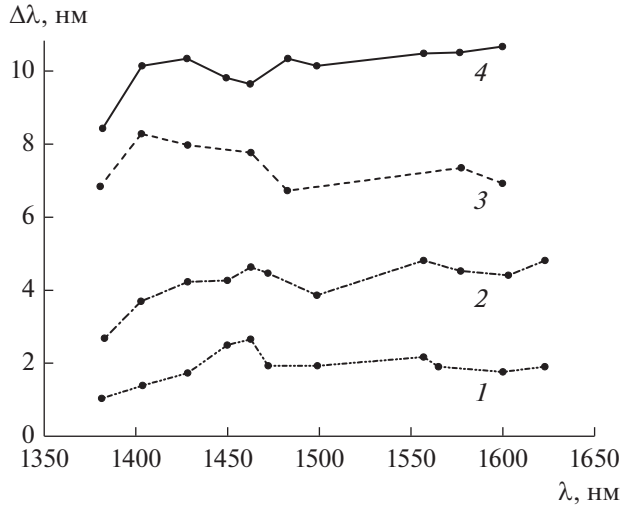

Рис. 9. Зависимость сдвига длины волны пиков спектра пропускания при различных скоростях вытягивания волокна из раствора 0.59 (*1*), 0.87 (*2*), 1.31 (*3*) и 1.51 мм/с (*4*).

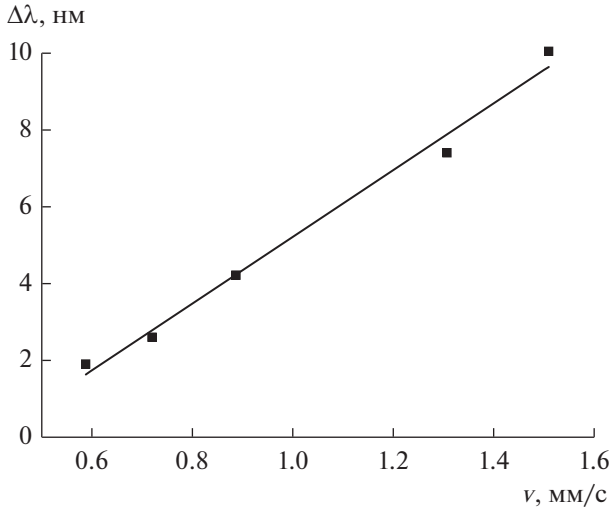

Рис. 10. Зависимость усредненного сдвига длины волны от скорости вытягивания волокна из раствора.

условие конструктивной интерференции выполняется уже на другой длине волны $\lambda + \Delta\lambda$:

$$\left(n_{\text{эф},i} + \frac{dn_{\text{эф},i}}{d\lambda}\Delta\lambda + \frac{dn_{\text{эф},i}}{db}\Delta b - n_{\text{эф},j} - \right.$$
$$\left. - \frac{dn_{\text{эф},j}}{d\lambda}\Delta\lambda - \frac{dn_{\text{эф},j}}{db}\Delta b\right)L = p(\lambda + \Delta\lambda). \quad (3)$$

Вычитая из последнего выражения уравнение (2), получим

$$\Delta\lambda\left(\frac{dn_{\text{эф},i}}{d\lambda} - \frac{dn_{\text{эф},j}}{d\lambda}\right) + \Delta b\left(\frac{dn_{\text{эф},i}}{db} - \frac{dn_{\text{эф},j}}{db}\right)L = p\Delta\lambda, \quad (4)$$

откуда, снова используя (2), найдем смещение интерференционного максимума по длине волны:

$$\Delta\lambda = \frac{\dfrac{dn_{\text{эф},i}}{db} - \dfrac{dn_{\text{эф},j}}{db}}{\dfrac{n_{\text{эф},i} - n_{\text{эф},j}}{\lambda} - \dfrac{dn_{\text{эф},i}}{d\lambda} + \dfrac{dn_{\text{эф},j}}{d\lambda}}\Delta b. \quad (5)$$

Производные эффективных показателей преломления по длине волны можно получить из дисперсионных кривых (см. рис. 5), а производные по толщине – из аналогичных зависимостей от толщины (см. рис. 4). Оценка показывает, что расчетный сдвиг длины волны составляет от нескольких до десятка нанометров для толщины пленки 1 мкм, что близко к значениям сдвига, наблюдаемым экспериментально.

Зависимости сдвига длины волны нескольких пиков спектра пропускания при различных скоростях вытягивания волокна из раствора приведены на рис. 9. Видно, что при увеличении скорости вытягивания сдвиг растет от 2 до 10 нм, что связано с соответствующим увеличением толщины пленки. В то же время есть некоторый рост величины сдвига для пиков на бóльших длинах волн. На рис. 10 показана зависимость усредненного сдвига длины волны для измеренных пиков от скорости вытягивания волокна из раствора. Полученная зависимость близка к линейной с коэффициентом наклона 8.7 нм/(мм/с).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследования волоконно-оптической структуры, основанной на вставке волокна SM450 с малой сердцевиной и нанесенным тонкопленочным покрытием из поливинилового спирта, показали, что при увеличении толщины покрытия возникают моды внешнего слоя. При этом на определенной толщине или длине волны происходит перескок мод, когда вторая мода занимает место моды, перешедшей во внешний слой, а каждая следующая мода – место предыдущей. Спектры пропускания структуры содержат пики, обусловленные интерференцией оболочечных мод волокна с расстоянием порядка нескольких десятков нанометров между ними. При увеличении толщины покрытия до 1 мкм происходит смещение провалов в спектрах в длинноволновую область. Величина сдвига монотонно растет при увеличении скорости вытягивания, определяющей толщину покрытия. Расчетная оценка сдвига по длине волны совпадает по порядку величины с результатами, полученными в эксперименте.

Волоконные структуры исследованного типа с нанесенным тонкопленочным покрытием из поливинилового спирта могут использоваться в сенсорных приложениях в качестве элемента,

чувствительного к влажности или химическому составу внешней среды, благодаря зависимости показателя преломления поливинилового спирта от указанных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов О.В., Никитов С.А.* Оболочечные моды волоконных световодов и длиннопериодные волоконные решетки. М.: Физматлит, 2012.
2. *Frazão O., Falate R., Fabris L. et al.* // Opt. Letters. 2006. V. 31. № 20. P. 2960.
3. *Tong C., Chen X., Zhou Y. et al.* // Optical Review. 2018. V. 25. № 3. P. 295.
4. *Dong X., Su L., Shum P. et al.* // Opt. Commun. 2006. V. 258. № 2. P. 159.
5. *Silva S., Frazao O., Viegas J. et al.* // Meas. Sci. Technol. 2011. V. 22. № 8. P. 085201.
6. *Li A., Wang Y., Hu Q., Shieh W.* // Opt. Express. 2015. V. 23. № 2. P. 1139.
7. *Bao W., Hu N., Qiao X. et al.* // IEEE Photonics Technol. Lett. 2016. V. 28. № 20. P. 2245.
8. *Li L., Xia L., Xie Z., Liu D.* // Opt. Express. 2012. V. 20. № 10. P. 11109.
9. *Huang X., Li X., Yang J. et al.* // Sci. Rep. 2017. V. 7. P. 44994.
10. *Xia T.-H., Zhang A.P., Gu B., Zhu J.-J.* // Opt. Commun. 2010. V. 283. № 10. P. 2136.
11. *Novais S., Ferreira M.S., Pinto J.L.* // Coatings. 2018. V. 8. P. 453.
12. *Иванов О.В.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 10. С. 1041.
13. *Ivanov O.V., Yang F., Tian F., Du H.* // Opt. Express. 2017. V. 25. № 25. P. 31197.
14. *Pang F., Liang W., Xiang W. et al.* // IEEE Photonics Technol. Lett. 2009. V. 21. № 2. P. 76.
15. *Akita S., Sasaki H., Watanabe K. et al.* // Sensors and Actuators B: Chem. 2010. V. 147. № 2. P. 385.
16. *Zhao Y., Pang F., Dong Y. et al.* // Opt. Express 2013. V. 21. № 22. P. 26136.
17. *Ben X.U., Jian-Qing L.I., Yi L.I., Dong X.-Y.* // Chin. Phys. Lett. 2012. V. 29. №. 10. P. 104209.
18. *Antonio-Lopez J.E., Sanchez-Mondragon J.J., LiKamWa P., May-Arrioja D. A.* // Opt. Lett. 2011. V. 36. № 17. P. 3425.
19. *Gu B., Qi W., Zhou Y. et al.* // Opt. Express. 2014. V. 22. № 10. P. 11834.
20. *Villar I.D., Achaerandio M., Matías I.R. et al.* // Opt. Lett. 2005. V. 30. № 7. P. 720.
21. *Fleming J.W.* // Appl. Opt. 1984. V. 23. № 24. P. 4486.
22. *Bodurov I., Vlaeva I., Viraneva A. et al.* // Nanosci. Nanotechnol. 2016. V. 16. P.31.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 757–763

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.39,621.391.6,621.396.2

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОДВОДНОЙ РАДИОНАВИГАЦИИ В УСЛОВИЯХ АРКТИКИ

© 2020 г. Г. Я. Шайдуров[a], *, Г. Н. Романова[a], Д. С. Кудинов[a]

[a]*Сибирский федеральный университет,*
ул. Академгородок, 13А, Красноярск, 660036 Российская Федерация
**E-mail: GShy35@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.12.2018 г.
После доработки 27.03.2019 г.
Принята к публикации 12.04.2019 г.

Рассмотрен радионавигационный метод определения координат морских подводных аппаратов (ПА) без всплытия (в том числе под паковыми льдами в условиях Арктики) на основе взаимодействия электромагнитных (ЭМ) и акустических (АК) волн в скин-слое морской воды. Получены энергетические оценки для радиоканала в зависимости от проводимости воды и глубины положения ПА. Показаны результаты лабораторных испытаний, подтверждающих параметрический эффект и использование этого явления для приема электромагнитных сигналов под водой на разностной частоте ЭМ- и АК-колебаний.

DOI: 10.31857/S0033849420070116

ВВЕДЕНИЕ

Тяжелые погодные условия Арктики – штормы, ледовые поля, ветры – являются чрезвычайно сложным препятствием для вождения морских подводных аппаратов (ПА) с буксируемыми вблизи поверхности моря приемными антеннами. В случае передачи и приема сигналов через радиобуй требуется всплытие ПА, что не всегда возможно из-за толщины слоя льда. Бортовые инерционные средства навигации (гирокомпас, лаг) не обеспечивают необходимой точности вождения ПА, особенно при проведении геодезических и геофизических работ по исследованию морского дна и поиску минеральных ресурсов, что требует периодической коррекции координат по данным спутниковых систем навигации.

В связи со значительным поглощением электромагнитных волн морской водой для передачи информации на ПА в погруженном состоянии используют сверхнизкие частоты в диапазоне 75...78 Гц [1] с мощными наземными радиостанциями и большими полотнами антенн – проекты “Seafarer” (“Мореплаватель”) (США) и “Зевс” (Россия).

Так, в системе “Seafarer”, при мощности передатчика 10 МВт и площади горизонтального полотна погруженных в грунт антенн в 100 × 100 км^2, на частоте 75 Гц была достигнута дальность 5000 км с глубиной приема в морской воде до 100 м [1].

Из-за сложности и высокой стоимости этих систем представляет интерес поиск альтернативных вариантов, в том числе для связи и навигации.

В [2] обращено внимание на возможность создания сейсморазведочных подводных систем для решения задач поиска углеводородов в условиях Арктики. В настоящее время для этой цели используются широкофюзеляжные корабли и буксируемые сейсмические косы длиной до 1000 м и более. Кроме того, в ледовой обстановке необходимо использовать ледокол. Такая техника морской сейсморазведки для условий Севера малоэффективна.

В работе [3] указано на возможность подводной радиосвязи на основе эффекта параметрической демодуляции сигналов наземных радиостанций, работающих на частотах $f_э \pm F$, путем “подсветки” с ПА поверхности воды акустическим излучением частоты $f_а$, близкой к частоте электромагнитной волны $f_э$. В этом случае в скин-слое возникают сигналы низкой частоты F, мало поглощаемые морской водой, которые принимаются приемником ПА.

Интерес представляет работа [4], посвященная исследованиям взаимодействия просветных АК- и ЭМ-волн при передаче информации вдоль трассы на большие расстояния в различных условиях: в морской среде и в гидроакустическом бассейне с пресной водой. В этой работе был обнаружен предсказанный в [3] параметрический эффект.

Первые работы по исследованию влияния ультразвука на проводимость электролитов были выполнены в 20-х годах прошлого века П. Дебаем [5, 6]. Вопросы взаимодействия ЭМ- и АК-волн в

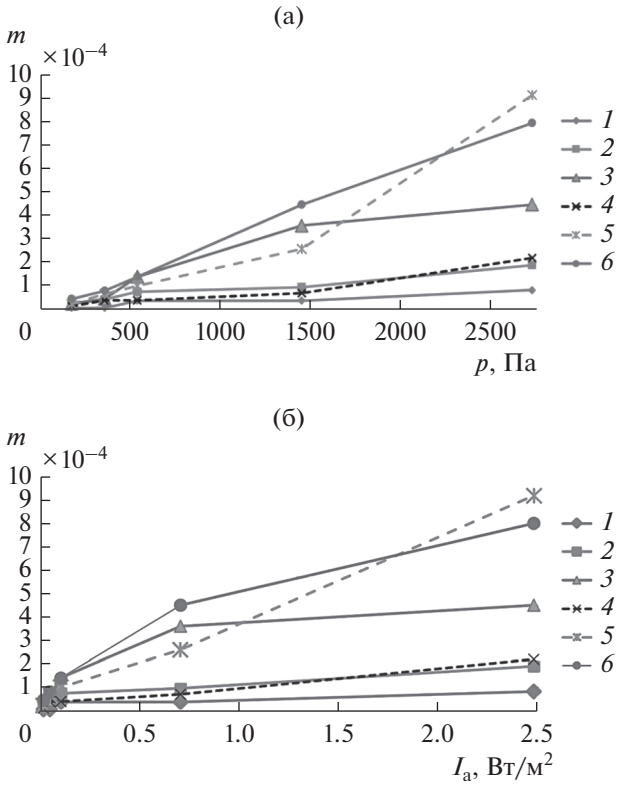

Рис. 1. Экспериментальные зависимости коэффициента параметрического преобразования m от давления p (а) и от плотности потока мощности $I_а$ (б) при различной концентрации раствора соли S: 1 (*1*), 2.94 (*2*), 5.88 (*3*), 11.7 (*4*), 23.5 (*5*) и 35‰ (*6*).

электролитах и морской воде рассматривались в работах [7–13].

Физической основой параметрического эффекта является динамическое раскачивание ионов солевых примесей в морской воде ультразвуком. Наши теоретические оценки и экспериментальные результаты [14] позволили уточнить основные зависимости параметрического эффекта от солености воды и плотности потока мощности АК-излучения, которые необходимы для решения прикладных задач.

Подобный эффект происходит и в горных породах, проводимость которых носит ионный характер за счет наличия в порах горной породы минерализованной воды. При этом наблюдалось двукратное и более изменение проводимости горной породы под действием сейсмических ударов [15].

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С целью установления количественных соотношений между давлением ультразвука и коэффициентом параметрического преобразования ЭМ-поля ультразвуком в октябре 2018 г. авторами был проведен эксперимент в бассейне с соленой водой (раствор NaCl). Размеры бассейна составляли 0.5 × 0.5 × 1.3 м^3, общий объем воды 320 л. Между противоположными сторонами бассейна через титановые электроды пропускали ток от генератора, а прием возникающей при этом ЭДС вели с помощью помещенного на поверхность воды отрезка кабеля длиной 20 см (электрического диполя), концы которого были погружены в воду через неполяризующиеся электроды. Частоту генератора можно было изменять в районе основной частоты $f_э$ = 16.5 кГц. АК-волны генерировались вибратором с рабочей частотой $f_а$ = 15 кГц. При этом у поверхности воды формировалась плотность потока мощности в диапазоне до 2.5 Вт/м^2, что соответствовало давлению 2500 Па.

На рис. 1а, 1б представлены экспериментально наблюдаемые зависимости коэффициента параметрического преобразования (демодуляции) m от давления p и плотности потока мощности акустического излучения $I_а$ при различной концентрации раствора соли.

Коэффициент параметрического преобразования определяли как отношение:

$$m = E_F / E_{fэ}, \qquad (1)$$

где E_F – ЭДС с выхода приемного электрического диполя на разностной частоте $F = f_э - f_а$; $E_{fэ}$ – ЭДС на основной частоте $f_э$ = 16.5 кГц.

Как видно из рис. 1б, при плотности потока мощности АК-излучения $I_а \approx 1.2$ Вт/м^2 $m = 10^{-3}$, а при $I_а$ = 2.5 Вт/м^2 коэффициент m достигал величины 2×10^{-3}, что указывает на его линейную зависимость от акустического давления в растворе.

Подобные результаты были получены и при бесконтактном возбуждении ЭМ-поля в указанном бассейне с помощью индуктивной петли, расположенной горизонтально на расстоянии 1.5 м от его центра, а также в бассейнах с размерами 0.5 × 0.5 × 0.5 м^3 и 1.5 × 2.5 × 3 м^3. Перенос технических решений на открытый морской бассейн не изменяет физической основы параметрического эффекта, поскольку эксперименты, проведенные в бассейнах разных размеров, не влияли на величину коэффициента параметрической демодуляции.

2. РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА В МОРСКИХ УСЛОВИЯХ

На рис. 2 приведена схема приема радиосигнала под водой параметрическим методом. Плоская ЭМ-волна береговой радиостанции с частотой $f_э$ и напряженностью поля $\vec{E}_0$ имеет на границе раздела вода–воздух эллиптическую поляризацию. Величину горизонтальной составляющей напряженности поля на поверхности моря E_{x0} можно

оценить через коэффициент преломления, определяемый, согласно граничным условиям Леонтовича, мнимой частью относительной комплексной диэлектрической проницаемости морской воды

$$E_{x0} = \frac{E_{z0}}{\sqrt{\gamma\lambda\sigma_в}}, \quad (2)$$

где $\lambda = c/f_э$ – длина ЭМ-волны, в м; c – скорость света, $\sigma_в$ – электропроводность морской воды, в См/м; $\gamma = 1/(2\pi c\varepsilon_0) = 60$ 1/См, ε_0 – электрическая постоянная, E_{z0} – вертикальная компонента напряженности поля береговой радиостанции [16].

В сторону поверхности моря с ПА излучается АК-волна с частотой $f_а = f_э \pm F$, близкой к частоте $f_э$, где F – частота модуляции ЭМ-сигнала.

Дадим оценку требуемой мощности излучателя АК-волн для глубины погружения ПА $h = 50$ м, площади АК-пятна на поверхности моря $S_а = 1000$ м^2 и плотности потока мощности АК-излучения $I_а$=1 Вт/м^2. С учетом эмпирического выражения для коэффициента потерь в воде β [дБ/км] = 0.036 $f_а^{3/2}$ [кГц] [17] получаем

$$P_а = 2I_а S_а \exp(-\beta h) = 2 \text{ кВт}. \quad (3)$$

АК-излучение модулирует электропроводность воды в скин-слое по гармоническому закону:

$$\sigma(t) = \sigma_в[1 + m_\sigma \sin(\omega_а t)], \quad (4)$$

где $\sigma_в$ – электропроводность воды в отсутствие АК-поля; m_σ – коэффициент, определяющий зависимость электропроводности от плотности потока мощности АК-волны, плотности воды, ее солености и температуры.

Толщина скин-слоя для ЭМ-волны с угловой частотой $\omega_э = 2\pi f_э$ определяется как

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega_э}}, \quad (5)$$

где $\mu = \mu'\mu_0$ – магнитная проницаемость воды, $\mu' = 1$, μ_0 – магнитная постоянная.

Для случая нормального падения на поверхность моря плоской ЭМ-волны с напряженностью поля $E_x = E_{x0}\sin(\omega_э t)$ в скин-слое наводится ток с плотностью

$$j_x = \sigma(t)E_x = \sigma_в[\sin(w_э t) + m_\sigma \sin(w_э t)\sin(w_а t)]E_{x0}. \quad (6)$$

В глубь моря распространяется низкочастотная составляющая ЭМ-волны на разностной частоте $\omega_э - \omega_а = 2\pi F$, несущая информацию о координатах. Ей соответствует плотность тока

$$j_F = m\sigma_в E_{x0}\cos[(w_э - w_а)t] = m\sigma_в E_{x0}\cos(2\pi F t)]. \quad (7)$$

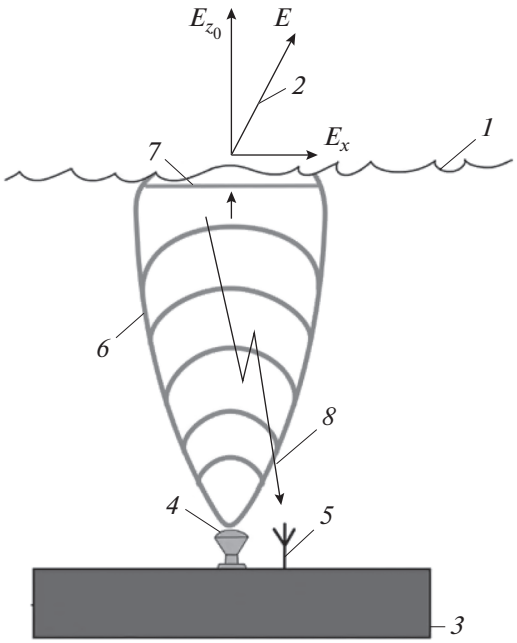

Рис. 2. Схема приема радиосигнала под водой с использованием параметрического метода: *1* – поверхность моря, *2* – ЭМ-волна береговой радиостанции, *3* – ПА, *4* – АК-излучатель, *5* – приемная антенна ЭМ-волн, *6* – акустическое излучение, *7* – АК-пятно на поверхности моря, *8* – ЭМ-волна на разностной частоте $F = f_э - f_а$.

Здесь коэффициент $m = m_\sigma/2$ имеет смысл коэффициента параметрического преобразования.

Для оценки возможностей приема навигационных или связных сигналов параметрическим методом под водой воспользуемся графиком зависимости вертикальной напряженности ЭМ-поля радионавигационной станции (РНС) E_{z0} от расстояния над поверхностью моря (рис. 3), который рассчитан для излучаемой мощности в 1 кВт и рабочей частоты 100 кГц в полосе частот 1 Гц [16]. Как видно из рисунка, на дистанции 500 км E_{z0} = 300 мкВ/м, а на дистанции 1000 км – E_{z0} = 100 мкВ/м.

Принимая, для примера, величину базы кодированного шумоподобного сигнала (ШПС) $B = 10^4$ с длительностью одного канального бита в 10 мс, можно оценить ширину спектра сигнала как $\Delta F = 100$ Гц.

При $\lambda = 3000$ м и $\sigma_в = 4$ См/м коэффициент преломления ЭМ-волны на границе воздух–вода составит $(\gamma\lambda\sigma_в)^{1/2} = 848$. Тогда из формулы (2) получаем оценку для горизонтальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности моря на расстоянии 500 км: $E_{x0} = 3.5 \times 10^{-7}$ В/м.

Чтобы поднять уровень сигнала, целесообразно проинтегрировать электрическое поле E_{x0} по поверхности моря путем “подсветки” его скин-слоя несколькими АК-лучами, излучаемыми с

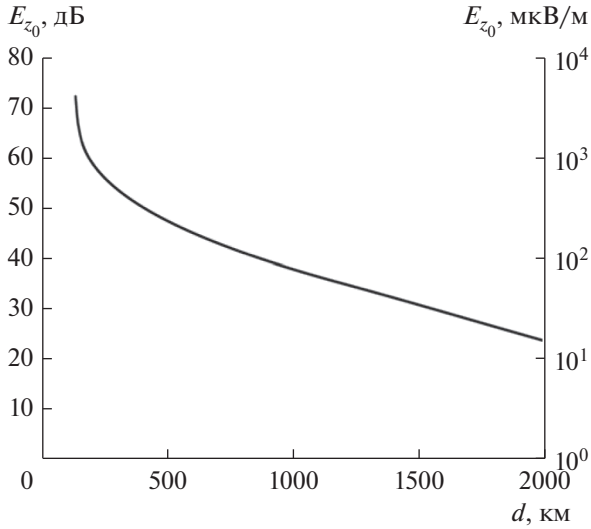

Рис. 3. Зависимость напряженности вертикальной составляющей электрического поля базовой станции над морем от расстояния на частоте 100 кГц для излучаемой мощности 1 кВт.

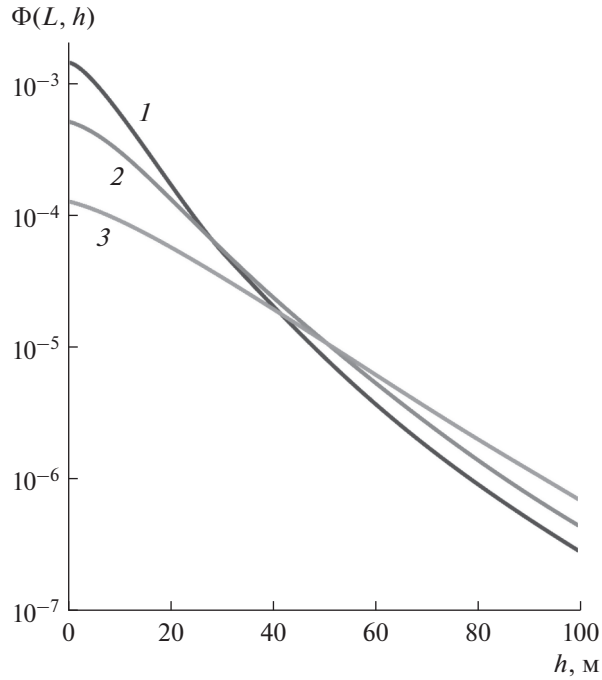

Рис. 4. Зависимость геометрического коэффициента Ф (L, h) от глубины приема h при различных длинах акустического пятна L: 30 (*1*), 50 (2), 100 м (*3*).

ПА, расположив их в линейный ряд. В этом случае в скин-слое на частоте ЭМ-волны образуется эквивалентная ЭМ-антенна, длина которой L и поперечное сечение $S_э = \delta d$ [м^2] (d – диаметр АК-пятна на поверхности воды).

Амплитуду плотности тока в морской воде эквивалентного дипольного источника с напряженностью поля E_{x0} можно найти из формулы (7):

$$j_{x0} = 0.5m\sigma_в E_{x0} = 3.5\times10^{-10}\ \text{А/м}^2. \qquad (8)$$

Расчет в формуле (8) проведен при следующих параметрах: плотность потока мощности $I_а = 1$ Вт/м^2, коэффициент параметрического преобразования $m = 5 \times 10^{-4}$, соленость воды $S = 35‰$, ее электропроводность $\sigma_в = 4$ См/м (см. рис. 1б). В этом случае суммарный ток через эквивалентный параллелепипед с площадью сечения $S_э$ на частоте $F =$ $= 50$ Гц составит

$$J_{x0} = j_{x0}S_э = j_{x0}\delta d = 8.4\times10^{-9}\ \text{А},$$

где $d = 30$ м, $\delta = 0.8$ м – средняя глубина скин-слоя на частоте $f_э = 100$ кГц.

Плотность тока на глубине нахождения ПА $h = 50$ м от проводника с током J_{x0} длиной L можно определить согласно [18]:

$$j_{xh} = \frac{J_{x0}L\exp(-\alpha h)}{2\pi\left(L^2/4 + h^2\right)^{3/2}} = \qquad (9)$$
$$= J_{x0}\Phi(L,h) = 8.4\times10^{-14}\ \text{А/м}^2,$$

где $\alpha = 28 \times 10^{-3}$ 1/м – коэффициент затухания ЭМ-поля разностной частоты F в морской воде при $F = 50$ Гц; $L = 30$ м – длина эквивалентной поверхностной антенны (диполя), соответствующая диаметру акустического пятна на поверхности воды d. График функции $\Phi(L, h)$ при различных значениях L приведен на рис. 4.

Напряженность электрического поля ЭМ-волны на глубине 50 м составит

$$E_{xh} = \frac{j_{x0}}{\sigma_в} = 2.1\times10^{-14}\ \text{В/м}. \qquad (10)$$

Соответственно, напряженность магнитного поля –

$$H_h = \frac{E_{xh}}{W} = 2.1\times10^{-12}\ \text{А/м}, \qquad (11)$$

где $W = \sqrt{\mu}\left(\left|\varepsilon - i\dfrac{\sigma_в}{2\pi F}\right|\right)^{-1/2} = 10^{-2}$ Ом – волновое сопротивление морской воды; $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость воды; $\varepsilon' = 80$.

Далее оценим уровень сигнала на входе бортового приемника ПА на разностной частоте $F = 50$ Гц.

При приеме на электрическую антенну с длиной $L_А = 100$ м получаем

$$U_E = E_{xh}L_А = 2.1\times10^{-12}\ \text{В}. \qquad (12)$$

Если использовать магнитную бортовую антенну с эффективной площадью $S_м = 10^6$ м^2, то уровень сигнала на входе приемника на глубине h составит

$$U_h = H_h 2\pi F\mu S_м = 8.4\times10^{-10}\ \text{В}. \qquad (13)$$

На выходе приемника, после свертки ШПС с базой $B = 10^4$ уровень сигнала при приеме на электрическую антенну увеличится до следующего значения:

$$U_{EB} = U_E B^{1/2} = 2.1\times10^{-10}\ \text{В}.$$

При этом уровень сигнала с использованием магнитных антенн составит

$$U_{hB} = U_h B^{1/2} = 2.8\times10^{-8}\ \text{В}.$$

Эти оценки показывают, что прием сигнала более эффективен на магнитную антенну, чем на электрическую.

Сопоставим далее полученные уровни сигнала с действующими на входе приемника помехами и шумами.

Величину отношения $C_U/(U_\text{п} + U_\text{ш})$ – сигнал/(помеха плюс шум) с оценкой полезного сигнала C_U по формулам (12) или (13) можно дополнительно поднять за счет интегрирования сигнала по мере снижения скорости движения ПА.

Тепловой шум на входе приемника в полосе частот составляет

$$U_\text{ш} = (kT\Delta F R_\text{вх})^{1/2} \approx 2\times10^{-9}\ \text{В},$$

где $k = 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $T \approx 300$ К – температура входных цепей, $\Delta F = 100$ Гц – полоса пропускания приемника, $R_\text{вх} = 10^3$ Ом – входное сопротивление приемника.

Напряжение электрического поля помех при приеме на буксируемую антенну длиной 300 м и движение ПА со скоростью 3.1 м/с составляло $U_\text{п} = -175$ дБ/В [19], что на глубине $h = 50$ м соответствует напряженностям полей помех: электрического $E_\text{п} = 5 \times 10^{-12}$ В/м и магнитного $H_\text{п} = 5 \times 10^{-10}$ А/м. При этом отношение сигнал/помеха на выходе приемника после свертки ШПС в нашем случае составляет 12 дБ.

В длинноволновых радионавигационных системах типа “Лоран” (США), ошибка в оценке координат в зависимости от дальности находится в пределах 100...1000 м, что определяет требуемое отношение сигнал/помеха, которое регулируется изменением скорости движения корабля и подбором величины базы сигнала B.

При подледном плавании энергетика канала существенно улучшается, поскольку слой льда преломляет передаваемый ЭМ-сигнал сильнее, чем поверхностный слой морской воды. В этом случае согласно формуле (2) на поверхности льда горизонтальная составляющая электрического поля волны будет больше, чем на поверхности воды в $(\sigma_\text{в}/\sigma_\text{л})^{1/2}$ раз:

$$E_x = E_{z0}\left(\sigma_\text{в}/\sigma_\text{л}\right)^{1/2}, \qquad (14)$$

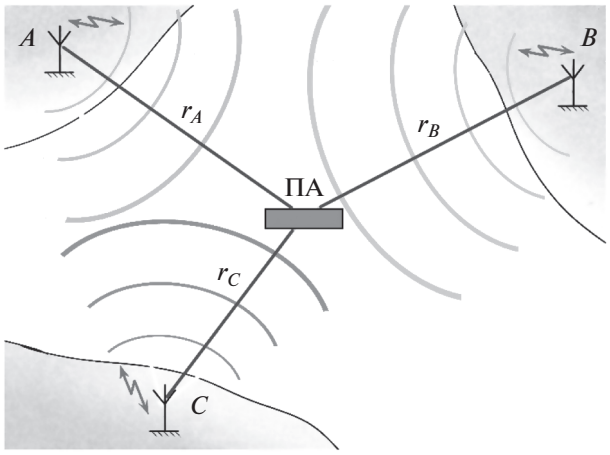

Рис. 5. Эпюры: $E(t)$ – поле излучения базовых РНС, расположенных в точках A, B, C; $S_A(t)$, $S_B(t)$, $S_C(t)$ – сигналы акустической подсветки, $R(\tau)$ – корреляционные свертки ШПС в приемнике; T_A, T_B, T_C – длительность сигналов базовых станций; τ_{AB}, τ_{AC} – времена задержек корреляционных сверток ШПС.

где $\sigma_\text{в} = 4$ См/м – электропроводность воды; $\sigma_\text{л}$ – электропроводность льда.

Согласно [20] $\sigma_\text{л} = 10^{-3}$ См/м при температуре –20°С на частоте 100 кГц. При этом уровень полезного сигнала должен возрасти в $\sqrt{\sigma_\text{в}/\sigma_\text{л}} = 63$ раза.

Безусловно, этот эффект требует экспериментального подтверждения, хотя с точки зрения теории подобный вывод вполне корректен.

На рис. 5 показана схема расположения базовых РНС в трех точках: A, B, C. Координаты ПА определяются на пересечении линий положения в рабочей зоне РНС. Для разностно-дальномерных РНС – это гиперболы с фокусами в точках A, B, C, на которых разность расстояний между парой базовых станций соответствует линиям положения. Координаты ПА подчиняются условиям $r_A - r_B = \text{const}$, $r_A - r_C = \text{const}$.

Широкополосные кодированные сигналы передатчиков базовых РНС могут излучаться последовательно во времени, как показано на рис. 6, либо параллельно с ортогональным кодированием.

После демодуляции ЭМ-волны в скин-слое на бортовую антенну ПА сигналы поступают в виде низкочастотной последовательности видеоимпульсов длительностью 10 мс. В этом случае, при базе $B = 10^4$, длительность каждой из пачек T_A, T_B, T_C составит 100 с и дискретность отсчетов координат по расстоянию при скорости движения ПА 1 м/с составит 100 м.

Путем преобразования в цифровой поток в микроконтроллере приемника формируются сиг-

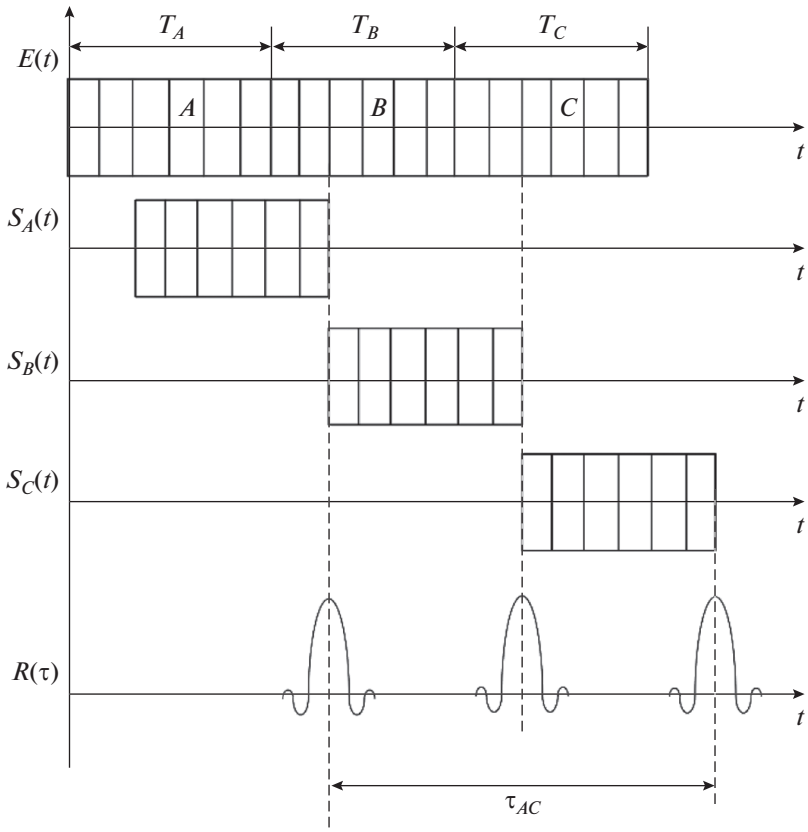

Рис. 6. Схема расположения базовых РНС: *A*, *B*, *C* – точки расположения базовых радионавигационных станций; r_A, r_B, r_C – расстояние между базовыми станциями и подводным аппаратом; ПА – подводный аппарат.

налы корреляционных сверток $R(\tau)$ (см. рис. 5) и измеряется разность времени прихода сигналов базовых станций $t_{AB} = (r_A - r_B)/c$ и $t_{AC} = (r_A - r_C)/c$, соответствующая линиям положения РНС, нанесенным на географическую карту местности с обозначением точек положения базовых РНС *A*, *B*, *C* (см. рис. 6).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Рассмотрена возможность реализации подводного приема радионавигационных или связных сигналов в длинноволновых диапазонах на основе параметрического взаимодействия электромагнитных и акустических волн в скин-слое. При мощности излучения базовых радионавигационных станций в 1 кВт, на дистанции 500...1000 км и рабочей частоте 100 кГц минимальная глубина подводного приема на магнитную антенну оценивается как 50 м.

2. В случае приема подо льдами, за счет увеличения коэффициента преломления волны электрического поля, можно ожидать существенного повышения отношения сигнал/помеха, что позволит соответственно снизить мощность акустического излучателя и увеличить глубину приема.

3. Получены экспериментальные материалы с количественной оценкой параметрического эффекта в широком диапазоне плотностей потока акустического излучения и концентрации соли.

4. По результатам лабораторных исследований, проведенных в 2018 г., было найдено, что при плотности потока мощности акустического излучения 1 Вт/м^2 коэффициент параметрического преобразования электромагнитного поля в сигналы низкой частоты составил 5×10^{-4}, что потенциально позволяет реализовать прием радиосигналов на глубине 50 м без всплытия подводного аппарата.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-07-00885, 20-37-70009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соловьев В.И., Новик Л.И., Морозов И.Д.* Связь на море. Л.: Судостроение, 1978.

2. *Левицкий Н.В., Детков В.А., Мегеря В.М., Шайдуров Г.Я.* // Технологии сейсморазведки. 2010. № 3. С. 75.
3. *Шайдуров Г.Я., Кудинов Д.С., Сухотин В.В.* // Успехи совр. радиоэлектроники. 2012. № 12. С. 89.
4. *Mironenko M.V., Alekseev A.V., Korochentsev V.I. et al.* // Proc. 2000 Int. Symp. on Underwater Technology. Tokyo 23–26 May. N.Y.: IEEE, 2000. P. 105.
5. *Бергман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
6. *Oka S.* // Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 1933. V. 15. № 11. P. 413.
7. *Yeager E., Hovorka F.* // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. V. 25. № 3. P. 443.
8. *Cheeke J.D.N.* Fundamentals and applications of ultrasonic waves. Boca Raton: CRC Press, 2002.
9. *Dukhin A.S., Goetz P.J.* Characterization of Liquids, Nano- and Microparticulates, and Porous Bodies Using Ultrasound. Amsterdam: Elsevier, 2010.
10. *Ляхов Г.А., Суязов Н.В.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 1. С. 80.
11. *Осовец С.М., Гинзбург Д.А., Гурфинкель В.С.* // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. № 1. С. 103.
12. *Сёмкин С.В., Смагин В.П.* // Альманах совр. науки и образования. Тамбов: Грамота, 2008. № 7. С. 181.
13. *Shumann W.O.* // Zeitschrift Angew. Physik. 1957. V. 9. № 8. P. 373.
14. *Шайдуров Г.Я., Кудинов Д.С., Романова Г.Н.* // Ученые записки физ. фак. МГУ. 2014. № 6. С. 6.
15. *Поляков О.А., Лизун С.А., Кондрат В.Ф. и др.* Основы сейсмоэлектроразведки. М.: Недра, 1995.
16. *Долуханов М.П.* Распространение радиоволн. М.: Связь, 1972.
17. *Голямина И.П.* Ультразвук. Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979.
18. *Zhdanov M.S.* Foundations of Geophysical Electromagnetic Theory and Methods. Amsterdam: Elsevier, 2018.
19. *Калашников Н.И., Дудкин Ф.Л., Николаенко Ю.В.* Основы морской электроразведки. Киев: Наукова думка, 1980.
20. *Финкельштейн М.И., Мендельсон В.Л., Кутев В.А.* Радиолокация слоистых земных покровов. М.: Недра, 1986.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 764–768

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.315.61

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ В СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛНОВОДНЫМ МЕТОДОМ

© 2020 г.
М. П. Пархоменко[a], *, Д. С. Каленов[a], И. С. Еремин[a], Н. А. Федосеев[a], В. М. Колесникова[a], О. А. Дьяконова[a]

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190, Российская Федерация*

**E-mail: pamikle@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.03.2019 г.
После доработки 24.12.2019 г.
Принята к публикации 30.12.2019 г.

Рассмотрен улучшенный волноводный метод определения комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей материалов, не требующий измерения расстояния от плоскостей образца до плоскостей калибровки. Проведенная проверка этого метода и сравнение полученных результатов с классическим волноводным методом на примере образца из высокоомного кремния показали уменьшение ошибки в определении тангенсов углов диэлектрических и магнитных потерь, а также действительной составляющей комплексной магнитной проницаемости.

DOI: 10.31857/S0033849420080112

ВВЕДЕНИЕ

Для определения электромагнитных параметров материалов широко используются резонаторные, волноводные методы и метод свободного пространства [1–9]. Резонаторные методы определяют параметры материалов на отдельных частотах. Основное преимущество волноводного метода заключается в том, что он позволяет определять электромагнитные параметры материалов в широкой полосе частот. Но существует ряд причин, которые ограничивают применение *классического* волноводного метода, главные из которых – это наличие воздушного зазора между образцом и стенками волновода (особенно между образцом и широкой стенкой волновода) и погрешность, связанная с неточностью определения фазы коэффициентов отражения и прохождения. Последняя обусловлена главным образом ошибкой в определении расстояний от границ образца до границ измерительной секции. Для уменьшения влияния на результаты измерений зазора между образцом и широкой стенкой волновода предложено заполнять его непроводящей пастой, составленной из мелкодисперсного медного порошка, перемешанного с вазелином [7, 9]. Другую погрешность, связанную с неточностью определения расстояний от границ образца до границ измерительной секции, можно уменьшить, используя секции-фланцы, длина которых равнялась бы длине исследуемого образца [9]. Однако существует *методическая* возможность уменьшения этой погрешности. Эта возможность базируется на том, что современные анализаторы цепей позволяют измерять все четыре S-параметра измерительной секции с образцом за один цикл (два коэффициента отражения и два коэффициента прохождения). Получаемое при этом число уравнений превышает число неизвестных. Это позволяет при определении комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей составить комбинацию уравнений, при решении которых отпадает необходимость определения указанных выше расстояний. Такая комбинация, определяющая *улучшенный* волноводный метод, рассмотрена в [10].

Цель данной работы – повышение точности измерений диэлектрической и магнитной проницаемостей в СВЧ-диапазоне с помощью волноводного методом.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАТЕРИАЛОВ В КЛАССИЧЕСКОМ И УЛУЧШЕННОМ ВОЛНОВОДНЫХ МЕТОДАХ

В волноводном методе, который строится на базе использования в эксперименте *векторного* анализатора цепей, измеряются *комплексные* ко-

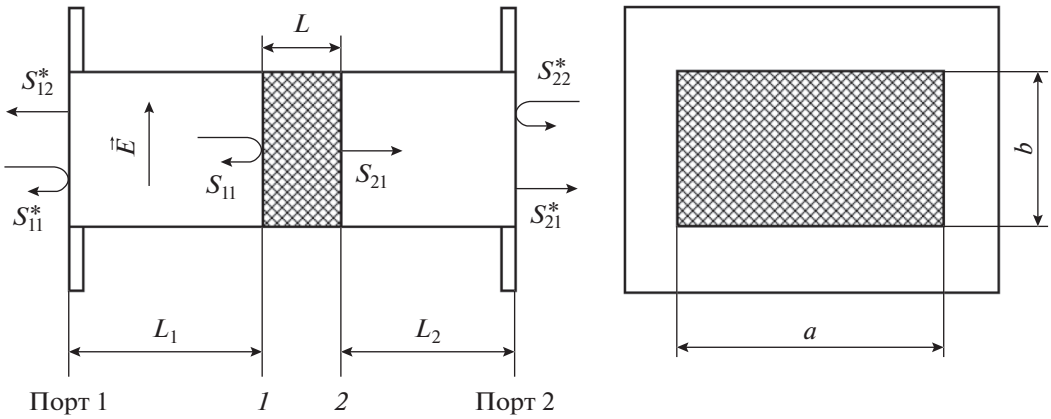

Рис. 1. Волноводная секция с исследуемым образцом: $a \times b$ – поперечные размеры волновода, $\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, L – длина образца; вид спереди (слева) и вид сбоку (справа).

эффициенты отражения и прохождения измерительной секции с образцом исследуемого материала (см. рис. 1). В этом случае при *отсутствии* воздушного зазора аналитическое решение задачи позволяет определить комплексные диэлектрическую и магнитную проницаемости этого материала [5, 6].

Классический волноводный метод основан на приведенных ниже формулах для комплексных коэффициентов отражения S_{11} и прохождения S_{21} на границах 1-го и 2-го образцов (см. рис. 1), т.е. он фактически использует только два S-параметра:

$$S_{11} = \frac{\Gamma\left(1 - P^2\right)}{1 - \Gamma^2 P^2}, \quad (1)$$

$$S_{21} = \frac{P\left(1 - \Gamma^2\right)}{1 - \Gamma^2 P^2}, \quad (2)$$

где Γ – коэффициент отражения в волноводе на границе воздух–образец (в случае образца *бесконечной* длины, т.е. при отсутствии интерференции в образце); P – коэффициент распространения через материал образца в волноводе. Он определяется следующим соотношением:

$$P = \exp(-\gamma L) = \exp[-(\alpha + j\beta)L]. \quad (3)$$

Здесь $\gamma = \alpha + j\beta$ постоянная распространения волны в волноводе, заполненном исследуемым материалом, которая складывается из постоянной затухания α [Нп/м] и фазовой постоянной β [м$^{-1}$], L – толщина образца.

В реальной измерительной секции комплексные коэффициенты отражения S_{11}^* и прохождения S_{21}^* измеряются на границах измерительной волноводной секции (см. рис. 1) и связаны с коэффициентами S_{11} и S_{21} формулами

$$S_{11} = \frac{S_{11}^*}{R_1^2}, \quad (4)$$

$$S_{21} = \frac{S_{21}^*}{R_1 R_2}. \quad (5)$$

Здесь $R_1 = \exp(-\gamma_0 L_1)$ и $R_2 = \exp(-\gamma_0 L_2)$, где

$$\gamma_0 = j\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2} -$$

постоянная распространения в волноводе с воздушным заполнением, λ_0 – длина волны в свободном пространстве, λ_c – критическая длина волны в волноводе. В выражения для R_1 и R_2 входят величины L_1 и L_2, которые надо измерять с достаточной точностью.

Соотношения для определения комплексных диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей в *классическом* волноводном методе находятся в такой последовательности. На первом этапе из системы уравнений (1) и (2) выражаем P и Γ через известные величины S_{11} и S_{21} [6]:

$$\Gamma = \frac{S_{11}^2 - S_{21}^2 + 1}{2S_{11}} \pm \sqrt{\frac{\left(S_{11}^2 - S_{21}^2 + 1\right)^2}{4S_{11}^2} - 1}, \quad (6)$$

$$P = \frac{S_{21} + S_{11} - \Gamma}{1 - (S_{21} + S_{11})\Gamma}. \quad (7)$$

Далее, используя дисперсионное уравнение для волновода с заполнением (ε и μ – параметры материала заполнения) [11] и выражение для коэффициента отражения Γ на границе воздух–исследуемый образец, находим искомые соотношения для определения комплексных диэлектрической

ε и магнитной μ проницаемостей исследуемого материала:

$$\mu = -\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}\frac{1}{\gamma_0 L}\left[\ln|P| + j(\varphi - 2\pi k)\right], \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda_0^2}{\mu}\left\{\frac{1}{\lambda_c^2} - \left(\frac{1}{2\pi L}\right)^2\left[\ln|P| + j(\varphi - 2\pi k)\right]^2\right\}, \quad (9)$$

где $\varphi = \arg P$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Значение k определяется путем анализа группового времени задержки сигнала в образце [6].

Теперь обратимся к улучшенному волноводному методу, который позволяет исключить погрешность, связанную с неточностью определения размеров L_1 и L_2. В реальной измерительной установке, измеряя комплексные коэффициенты отражения S_{11}^*, S_{22}^* и прохождения S_{21}^*, S_{12}^* на границах измерительной волноводной секции, получаем систему из трех уравнений (при двух неизвестных P и Γ) [10]:

$$S_{11}^* = R_1^2\left(\frac{\Gamma\left(1-P^2\right)}{1-\Gamma^2P^2}\right), \quad (10)$$

$$S_{22}^* = R_2^2\left(\frac{\Gamma\left(1-P^2\right)}{1-\Gamma^2P^2}\right), \quad (11)$$

$$S_{21}^* = S_{12}^* = R_1R_2\left(\frac{P\left(1-\Gamma^2\right)}{1-\Gamma^2P^2}\right). \quad (12)$$

Используя эту систему, можно составить комбинацию уравнений, которая не зависит от размеров L_1 и L_2 [10]:

$$S_{11}^*S_{22}^* - S_{21}^*S_{12}^* = \\ = \exp\left[-2\gamma_0\left(L_{\text{возд}} - L\right)\right]\left(\frac{\Gamma^2 - P^2}{1-\Gamma^2P^2}\right), \quad (13)$$

$$\frac{S_{21}^* + S_{12}^*}{2} = \exp\left[-\gamma_0\left(L_{\text{возд}} - L\right)\right]\frac{P\left(1-\Gamma^2\right)}{1-\Gamma^2P^2}, \quad (14)$$

где $L_{\text{возд}} = L_1 + L_2 + L$ – длина измерительной секции, которая может быть измерена с хорошей точностью (см. рис. 1).

Теперь выражения для P и Γ находим из вновь полученной системы:

$$P = \frac{x+1}{2y} \pm \sqrt{\left(\frac{x+1}{2y}\right)^2 - 1}, \quad (15)$$

$$\Gamma = \pm\sqrt{\frac{x-P^2}{xP^2-1}}, \quad (16)$$

где

$$x = \left(S_{21}^*S_{12}^* - S_{11}^*S_{22}^*\right)\exp\left[2\gamma_0\left(L_{\text{возд}} - L\right)\right]$$

и

$$y = \left(\frac{S_{21}^* + S_{12}^*}{2}\right)\exp\left[\gamma_0\left(L_{\text{возд}} - L\right)\right].$$

Заметим, что в этом случае P и Γ уже не зависят от L_1 и L_2. Из (15) выбираются те решения, при которых выполняется условие $|P| \le 1$.

Для правильного выбора знака в (16) получим коэффициент отражения Γ другим путем. Обозначим его Γ_1 и выразим из (10):

$$\Gamma_1 = \frac{\alpha\left(P^2-1\right) \pm \sqrt{\alpha^2P^4 + 2P^2\left(2S_{11}^{*2} - \alpha^2\right) + \alpha^2}}{2S_{11}^*P^2}, \quad (17)$$

где $\alpha = \exp\left(-2\gamma_0 L_1\right)$.

Знак плюс или минус в выражении (17) выбирают исходя из условия $|\Gamma_1| \le 1$, а знак в выражении (16) – из условия $\Gamma \approx \Gamma_1$.

Далее, по методике, описанной выше, получаем выражения (8) и (9) для определения ε и μ, в которых P и Γ задаются соотношениями (15) и (16). Ниже приведены экспериментальные результаты по определению комплексных диэлектрических и магнитных проницаемостей высокоомного кремния, полученные по обеим методикам, и проведено их сравнение.

2. ИЗМЕРЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ВЫСОКООМНОГО КРЕМНИЯ

Экспериментальная проверка описанных выше волноводных методик проводилась на высокоомном кремнии. Из заготовки кремния с удельным сопротивлением около $\rho = 1.1$ кОм см изготавливали образец с поперечными размерами 22.72×10.09 мм^2 и длиной 15.98 мм, который вставляли в волноводную секцию с поперечными размерами волновода $a \times b = 22.86 \times 10.16$ мм^2. Для волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе критическая длина $\lambda_c = 2a$. Длина волноводной секции была равна 50.07 мм. Воздушный зазор между образцом и широкой стенкой волновода, который не превышал 0.07 мм, заполняли непроводящей пастой, составленной из мелкодисперсного медного порошка, перемешанного с вазелином. Измерения проводили в полосе частот 8.2...12.4 ГГц, а обработку результатов измерений – двумя приведенными выше способами. Полученные зависимости действительной составляющей ε_1 и тангенса угла диэлектрических потерь $\mathrm{tg}\delta_\varepsilon$ кремния от частоты представлены на рис. 2а, 2б.

Проведем анализ полученных результатов. Как известно, в рассматриваемом частотном диапазоне действительная составляющая ε_1 диэлектрической проницаемости кремния не обнаружи-

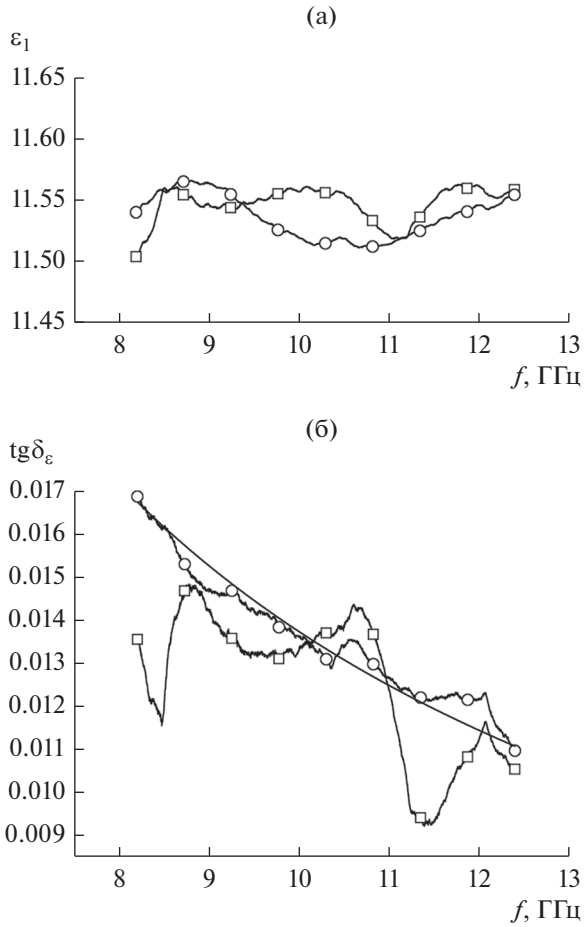

Рис. 2. Частотные зависимости ε_1 (а) и $\mathrm{tg}\delta_\varepsilon$ (б) для образца кремния (поперечные размеры – 22.72 × × 10.09 мм^2, длина – 15.98 мм), полученные экспериментально классическим волноводным методом (квадратики) и улучшенным волноводным методом (кружочки); расчет по формуле (18) для образца с ρ = = 1.13 кОм см и ε_1 = 11.6 (сплошная кривая на рис. 2б).

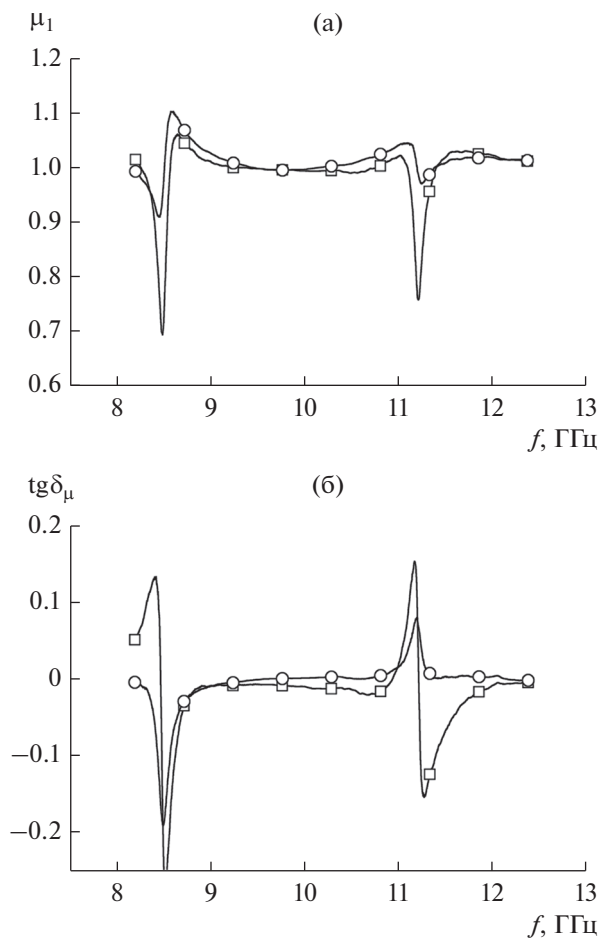

Рис. 3. Частотные зависимости μ_1 (а) и $\mathrm{tg}\delta_\mu$ (б) для образца кремния (поперечные размеры образца – 22.72 × 10.09 мм^2, длина – 15.98 мм), полученные экспериментально классическим волноводным методом (квадратики) и улучшенным волноводным методом (кружочки).

вает дисперсии и равняется 11.6. Вычисленные значения ε_1 в нашем случае находятся в пределах от 11.5 до 11.56, т.е. погрешность не превышает 1%. Что касается тангенса угла диэлектрических потерь, то их частотные зависимости заметно отличаются (см. рис. 2б). При обработке классическим методом полученная зависимость отображается волнообразной кривой. В улучшенном волноводном методе экспериментальная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь от частоты достаточно хорошо описывается уравнением (18). Этому есть объяснение. В высокоомном кремнии решеточные потери существенно ниже потерь на свободных носителях, а тангенс угла потерь на свободных носителях уменьшается с ростом частоты по закону [12]:

$$\mathrm{tg}\delta_\varepsilon = 1/(\varepsilon\varepsilon_0\omega\rho), \qquad (18)$$

где ω – круговая частота электромагнитной волны, ρ – удельное сопротивление материала, ε – относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная (на рис. 2б эта зависимость показана сплошной кривой). Заметим, что формула (18) позволяет уточнить значение удельного сопротивления кремния, которое составило ρ = 1.13 кОм см. Мы видим, что с учетом поправки на удельное сопротивление отклонение экспериментальной зависимости от расчетной минимально, т.е. не превышает 7×10^{-4} (см. рис. 2б). При обработке классическим методом отклонение на порядок больше и достигает величины 5×10^{-3}.

Кремний – немагнитный материал, поэтому при обработке результатов измерений мы полагали $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$. Изложенные выше волноводные методы позволяют определять комплексную магнитную проницаемость материала. Найденные зависимости для μ_1 и $\mathrm{tg}\delta_\mu$ показаны на рис. 3а, 3б.

Значения μ_1, полученные разными методами, примерно совпадают. Наблюдаемые на графиках выбросы в значении μ_1 и $\mathrm{tg}\delta_\mu$ объясняются приборной погрешностью измерений значений коэффициента отражения в точках его минимумов на частотах, определяемых условием $l = k\lambda_в/2$ ($k = 1, 2, 3...$, $\lambda_в$ – длина волны в волноводе на заданной частоте минимума коэффициента отражения). В нашем эксперименте в полосе частот 8.2...12.4 ГГц располагаются два минимума – на частотах 8.5 и 11.2 ГГц – и выбросы при обработке по улучшенному волноводному методу меньше. В окрестностях максимума коэффициента отражения в районе частоты 10 ГГц результаты, полученные обоими способами, примерно одинаковы.

Что касается тангенса угла магнитных потерь, то здесь преимущество улучшенного волноводного метода очевидно: значение $\mathrm{tg}\delta_\mu$ в окрестностях максимума коэффициента отражения, определенное по улучшенному методу, равняется 1×10^{-3} а в классическом методе оно принимает отрицательную величину с порядком 10^{-2}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены два способа определения комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей материалов волноводным методом. Экспериментальная проверка на примере образца из высокоомного кремния показала, что при обработке улучшенным волноводным методом уменьшается ошибка в определении тангенсов углов диэлектрических $\mathrm{tg}\delta_\varepsilon$ и магнитных $\mathrm{tg}\delta_\mu$ потерь, а также действительной составляющей μ_1 комплексной магнитной проницаемости.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брандт А.А.* Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Chen L.F., Ong C.K., Neo C.P. et al.* Microwave Electronics: Measurement and Materials Characterization. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
3. *Пархоменко М.П., Калёнов Д.С., Федосеев Н.А. и др.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 7. С. 651.
4. *Parkhomenko M.P., Kalenov D.S., Fedoseev N.A. et al.* // Phys. Wave Phenomena. 2015. V. 23. № 3. P. 202.
5. *Nicolson A.M., Ross G.F.* // IEEE Trans. 1970. V. IM-19. № 4. P. 377.
6. *Weir W.B.* // Proc. IEEE. 1974. V. 62. № 1. P. 33.
7. *Пархоменко М.П., Калёнов Д.С., Ерёмин И.С. и др.* // Журн. Радиоэлектроники. 2018. № 9. http://jre.cplire.ru/jre/sep18/6/text.pdf.
8. *Пархоменко М.П., Савельев С.В., фон Гратовски С.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 3. С. 276.
9. *Parkhomenko M.P., Kalenov D.S., Eremin I.S. et al.* // Phys. Wave Phenomena. 2019. V. 27. № 4. P. 299.
10. *Baker-Jarvis J., Janezic M.D., Grosvenor J.H., Jr., Geyer R.G.* Transmission/Reflection and Short-Circuit Line of Methods for Measuring Permittivity and Permeability. NIST Technical Note 1355-R. Boulder: NIST, 1993. 124 p. https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/TN/nbstechnicalnote1355r.pdf.
11. *Лебедев И.В.* Техника и приборы СВЧ. Т. 1. М.: Высш. шк., 1970.
12. *Гарин Б.М., Копнин А.Н., Пархоменко М.П. и др.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 21. С. 56.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 769–773

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874

РАДИОПОГЛОЩАЮЩАЯ СТРУКТУРА НА ОСНОВЕ РЕШЕТОК РЕЗИСТИВНЫХ КВАДРАТОВ

© 2020 г. В. И. Пономаренко[a], *, И. М. Лагунов[a]

[a] Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, просп. Акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007 Российская Федерация

*E-mail: vponom@gmail.com

Поступила в редакцию 24.04.2019 г.
После доработки 24.04.2019 г.
Принята к публикации 08.07.2019 г.

На основе решения задачи дифракции нормально падающей электромагнитной волны на периодической структуре, состоящей из плоских решеток резистивных квадратов, расположенных в диэлектрическом слое, лежащем на металлическом зеркале, проведены расчеты оптимальных параметров структуры, при которых минимален коэффициент отражения в заданном диапазоне длин волн. Показано, что при числе решеток до трех приближенный расчет коэффициента отражения от мелкоячеистой структуры можно проводить методом, при котором решеткам сопоставляются пленки с эффективным поверхностным сопротивлением, вычисляемым на основе решения квазистатической задачи. Также показано, что оптимизированная исследуемая структура имеет меньший уровень отражения по сравнению с оптимизированной известной структурой на основе резистивных пленок.

DOI: 10.31857/S0033849420070098

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поглотитель электромагнитных волн (ПЭВ) на основе сплошных резистивных пленок, разделенных слоями недиспергирующего диэлектрика, как и аналогичный ему ПЭВ на основе проводящих сеток, при заданном числе пленок (сеток) между слоями имеет уровень коэффициента отражения (КО) в рабочем диапазоне частот тем меньший, чем больше толщина структуры по отношению к максимальной длине волны, что характерно для немагнитных ПЭВ [1, 2]. В плане применения ПЭВ в технике СВЧ очевидна актуальность снижения уровня отражения без увеличения их толщины или, что взаимосвязано, уменьшения толщины без увеличения отражения [3–5]. В работе исследуется возможность снижения уровня отражения многопленочного ПЭВ путем его фрагментации, а именно – разбиения пленок на квадратные элементы, разделенные зазорами. Эффективность фрагментации для ПЭВ с одной пленкой показана в [6–8].

Исследуемая структура, изображенная на рис. 1, состоит из N плоских решеток резистивных квадратов с поверхностными сопротивлениями ρ_i и стороной $2s_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, период структуры $2b$.

Решетки находятся в слое диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ε и делят его на слои с толщинами $\{d_i\}$. Структура расположена на металлическом зеркале, лежащем в плоскости $z = d$. Плоская электромагнитная волна, зависящая от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, поляризована вдоль оси x и падает на структуру нормально из области свободного пространства $z < 0$.

Наряду со структурой, изображенной на рис. 1, исследуется также структура, отличающаяся тем, что соседние решетки смещены относительно друг друга на полпериода по осям x, y.

2. ДИФРАКЦИОННЫЙ И ДИФРАКЦИОННО-КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Решение задачи дифракции на структуре рис. 1 и на структуре со сдвигом решеток проводилось методом, примененным в работах [2, 6, 9]. Суть метода – решение задачи рассеяния в одномодовом эквивалентном волноводе на основе разделения резистивных элементов на малые прямоугольные элементы, токи которых возбуждают E-, H- и TEM-моды канала Флоке. Число разбиений квадрата на элементы и число учитываемых гармоник канала Флоке выбиралось аналогично предложенному в работах [2, 9], так, чтобы точность вычисления коэффициента отражения по амплитуде составляла 0.002.

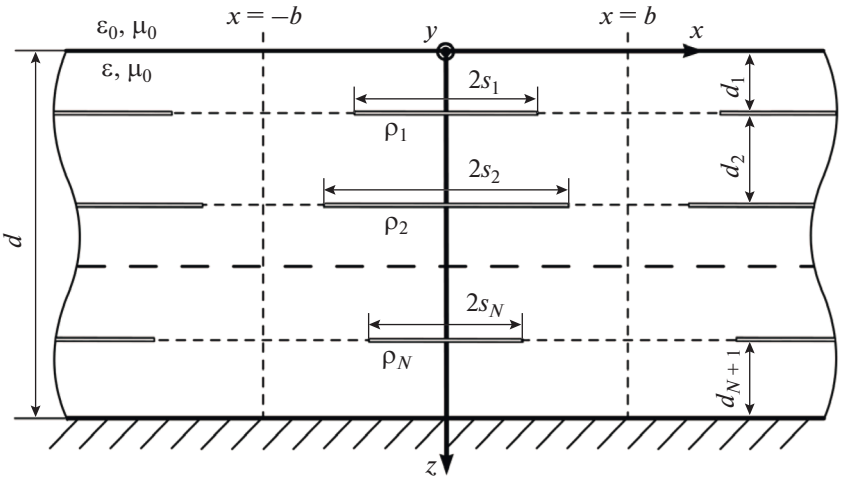

Рис. 1. ПЭВ на основе решеток резистивных квадратов.

Приближенный метод расчета КО, который можно охарактеризовать как дифракционно-квазистатический, основан на замене решеток сплошными пленками, обладающими эффективным резистивно-емкостным поверхностным сопротивлением, с последующим вычислением КО по мощности от многослойной структуры. Сопоставление решеткам сплошных пленок основано на решении задачи теории потенциала для плоской решетки из резистивных лент с поверхностным сопротивлением $\tilde{\rho}$, которая находится в квазистатическом электрическом поле [8, 10]. Такая решетка, бесконечная в направлении оси y, погруженная в среду с относительной диэлектрической проницаемостью ε, изображена на рис. 2.

Вектор первичного электрического поля с амплитудой E_0 направлен вдоль оси x. Эффективное поверхностное сопротивление $\rho_{эф}$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} \rho_{эф} = \tilde{\rho}/B, \\ B = -\dfrac{2Abk}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\psi(t)\arcsin(k\sin t)dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, \\ k = \sin\left(\pi s/(2b)\right), \\ A = -2i\omega\varepsilon_0\varepsilon\tilde{\rho}, \quad i^2 = -1, \end{cases} \tag{1}$$

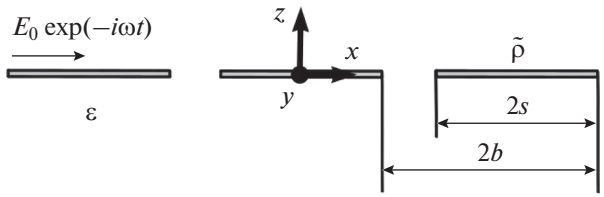

Рис. 2. Плоская решетка из резистивных лент в квазистатическом поле.

где $2b$ – период, $2s$ – ширина ленты, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Функция ψ является решением следующего интегрального уравнения:

$$\begin{cases} \psi(u) = \dfrac{2Abk}{\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} K(u,t)\psi(t)\,dt - \sin u, \\ K(u,t) = \dfrac{\cos u \ln\left|\sin(u-t)\right| - t\sin u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \end{cases} \tag{2}$$

При численном решении уравнения (2) методом сеток учитывалась слабая особенность ядра путем интегрирования в окрестности точки $t = u$ [10].

Если “ленты” не однородны в направлении оси y, а составлены из квадратов с поверхностным сопротивлением $\tilde{\rho}$ и стороной $2s$, разделенных зазорами шириной $(2b - 2s)$, то таким “лентам” сопоставляется усредненное поверхностное сопротивление, являющееся точным в теории цепей [11]:

$$\langle\tilde{\rho}\rangle = \tilde{\rho}b/s. \tag{3}$$

Сопротивление $\langle\tilde{\rho}\rangle$ подставляется в формулы (1) на место $\tilde{\rho}$ при вычислении $\rho_{эф}$.

Коэффициент отражения многослойной структуры с пленками, обладающими эффективными поверхностными сопротивлениями $\rho_{эф}$, вычисляемыми по формулам (1)–(3), находили матричным методом, учитывая соответствие пленки слою толщиной $\tau \ll d_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N+1)$ с относительной диэлектрической проницаемостью [12, 13]

$$\tilde{\varepsilon} = i/\left(\omega\tau\varepsilon_0\rho_{эф}\right). \tag{4}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Целевой функцией задачи оптимизации исследуемого ПЭВ являлся минимум максимального значения $R_{макс}$ КО в рабочем диапазоне длин волн. Параметрами оптимизации являлись величины b, ε, $\{\rho_i, s_i, d_i\}$. Оптимизацию проводили при числе решеток $N = 1 \ldots 5$ и различных наборах начальных значений параметров оптимизации как методом координатного спуска, так и методом Монте-Карло [14, 15]. Накладывалось ограничение $d_i > 0.075\,d$ $(i = 2, \ldots, N-1)$ на толщины слоев между двумя соседними решетками во избежание такого их сближения в результате оптимизации, при котором две решетки практически сливались бы в одну. Оба метода оптимизации приводили к одинаковым конечным результатам. КО вычислялся на тридцати длинах волн, составляющих геометрическую прогрессию. С целью сравнения оптимизировались также аналоговые структуры на основе сплошных резистивных пленок. Во всех расчетах полагалось $d = 1$ см. Поскольку в расчетные формулы входят лишь отношения длины падающей волны к геометрическим параметрам, приведенные ниже зависимости КО от длины волны могут быть пересчитаны для других длин волн соответствующим масштабированием геометрических параметров.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 3а, 3б. Кривые *3*, *4* строились при оптимальных значениях параметров, соответствующих кривым *1*, *2*. Значения оптимальных параметров приведены в таблице 1.

Обращает на себя внимание некоторое преимущество структуры с двумя решетками ($R_{макс} = 9.1\%$) перед структурой с тремя решетками ($R_{макс} = 10.1\%$), что, по-видимому, можно объяснить наложением условия ограничения минимальной толщины диэлектрической прослойки между соседними решетками.

Из рис. 3а, 3б и таблицы видно, что оптимизированные структуры на основе решеток резистивных квадратов имеют существенно лучший показатель эффективности $R_{макс}$ по сравнению с оптимизированными аналоговыми структурами на основе сплошных резистивных пленок.

Как видно из рис. 3а, 3б, приближенный дифракционно-квазистатический метод расчета КО для структур со сдвигом соседних решеток имеет меньшую точность, чем при отсутствии сдвига. Последнее объясняется тем, что при сдвиге токи смещения в решетке замыкаются не только через область зазора между соседними квадратами этой решетки, но и через токи проводимости в квадратах соседних решеток, и это не коррелирует с принятым при выводе формул (1), (2) предположением, что одиночная решетка из лент окружена бесконечной диэлектрической средой. По этой же причине при $N > 3$ точность дифракционно-квазистатического метода расчета КО снижается по сравнению с проиллюстрированной на рис. 3а, 3б, поскольку наращивание числа решеток без увеличения толщины структуры приводит к уменьшению расстояния между соседними решетками.

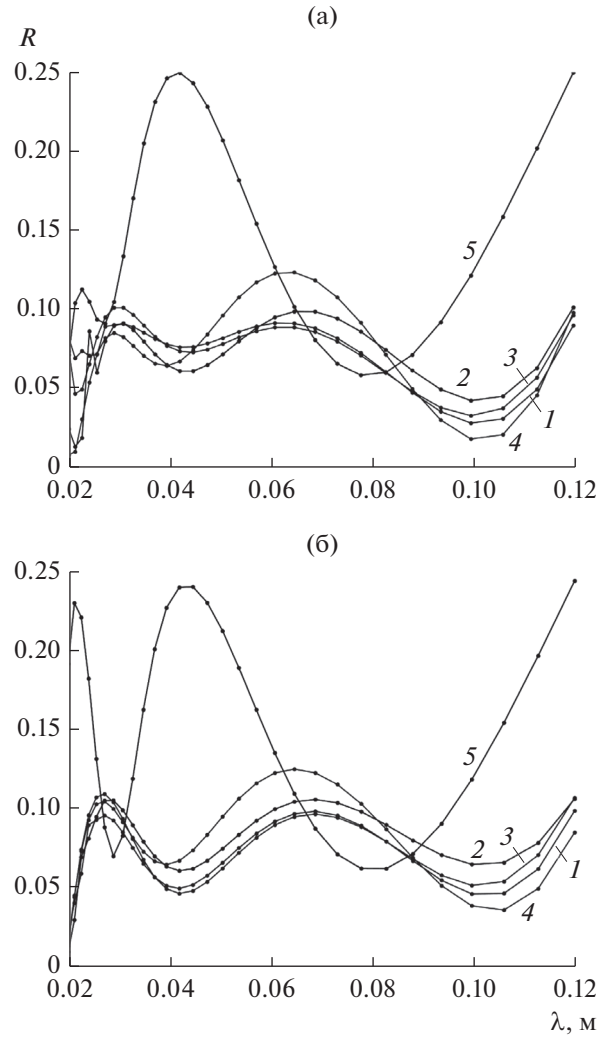

Рис. 3. Зависимость КО по мощности от длины волны для оптимальных структур с двумя (а) и тремя (б) резистивными решетками или пленками: *1* – структура без сдвига, дифракционный расчет; *2* – структура со сдвигом соседних решеток, дифракционный расчет; *3* – структура без сдвига, дифракционно-квазистатический расчет; *4* – структура со сдвигом, дифракционно-квазистатический расчет; *5* – аналоговая структура со сплошными резистивными пленками.

С целью проверки критичности исследованных структур к отклонению параметров от оптимальных, наборы значений последних увеличивались на 2% и затем настолько же уменьшались. При этом $R_{макс}$ в расчетном частотном диапазоне отклонялся от оптимального на величину до 0.015.

Таблица 1. Оптимальные параметры структур с двумя и тремя резистивными решетками или пленками

Параметр	Две решетки или пленки			Три решетки или пленки		
	без сдвига	со сдвигом	сплошные пленки	без сдвига	со сдвигом	сплошные пленки
$R_{макс}$, %	9.1	10.1	25.0	9.9	10.6	24.4
b, мм	6.51	6.35	–	6.35	6.35	–
ε	4.52	3.99	3.12	3.78	3.82	3.88
ρ_1, Ом	143	136	305	157	152	444
ρ_2, Ом	71	62	163	69	67	407
ρ_3, Ом	–	–	–	207	207	229
s_1, мм	4.60	4.60	–	4.60	4.74	–
s_2, мм	5.98	5.70	–	5.98	5.80	–
s_3, мм	–	–	–	5.72	5.61	–
d_1, мм	3.77	3.45	3.08	3.26	3.09	0.78
d_2, мм	3.40	3.72	5.50	3.67	3.84	3.05
d_3, мм	2.83	2.83	1.42	2.26	2.28	3.10
d_4, мм	–	–	–	0.81	0.79	3.07

На рис. 4 приведены зависимости от длины волны вещественной $\rho'_{эф}$ и мнимой $\rho''_{эф}$ частей эффективного поверхностного сопротивления первой решетки, имеющей по оси z координату d_1, и второй решетки, имеющей по той же оси координату $d_1 + d_2$ для оптимизированной структуры с двумя решетками без их сдвига. Видно, что вещественные части $\rho_{эф}$ существенно отличаются от поверхностного сопротивления квадратов ρ_1, ρ_2 из таблицы, а мнимые части, которые имеют смысл емкостной компоненты $\rho_{эф}$, возрастают почти линейно с ростом длины волны.

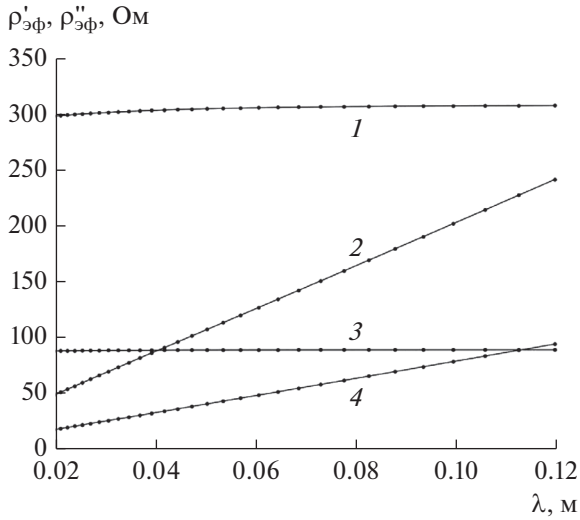

Рис. 4. Зависимость компонент эффективного поверхностного сопротивления решеток от длины волны оптимизированной структуры без сдвига с двумя решетками: *1* – вещественная часть эффективного поверхностного сопротивления первой решетки; *2* – мнимая часть эффективного поверхностного сопротивления первой решетки; *3* – вещественная часть эффективного поверхностного сопротивления второй решетки; *4* – мнимая часть эффективного поверхностного сопротивления второй решетки.

При числе решеток $N = 4$, 5 значения $R_{макс}$ изменяются по сравнению с тремя решетками не более чем на 0.004 как для исследуемых структур на основе решеток со сдвигом и без него, так и для аналоговой структуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения задачи дифракции на периодической структуре из плоских решеток резистивных квадратов, расположенных в слое диэлектрика, лежащем на металлическом зеркале, построены оптимальные частотные зависимости коэффициента отражения для двух вариантов структуры – со смещением соседних решеток и без него. Показано преимущество такой структуры в качестве радиопоглощающей над известной структурой на основе сплошных резистивных пленок. Предложен приближенный дифракционно-квазистатический метод расчета коэффициента отражения от структуры, являющийся существенно более простым в вычислительном плане по сравнению с дифракционным. Показано, что в расчетном диапазоне длин волн 2...12 толщин

структуры наращивание числа решеток от двух до пяти не приводит к существенному изменению эффективности ПЭВ. Оценена критичность исследованной структуры к отклонению ее параметров от оптимальных.

Результаты работы могут быть использованы для создания ПЭВ разного рабочего диапазона частот с проводящими квадратами в качестве элементов, диссипирующих электромагнитную энергию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимин Б.Ф.* // Зарубеж. радиоэлектроника. 1989. № 2. С. 75.
2. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2017. Т 62. № 7. С. 657.
3. *Rozanov K.N.* // IEEE Trans. 2000. V. AP-48. № 8. P. 1230.
4. *Li W., Chen M., Zeng Zh. et al.* // Composites Sci. Technol. 2017. V. 145. P. 10.
5. *Watts C.M., Liu X., Padilla W.J.* // Adv. Mater. 2012. V. 24. P. OP98.
6. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // Электромагнитные волны и электрон. системы. 2018. № 6. С. 30.
7. *Пономаренко В.И., Журавлев С.И.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 5. С. 812.
8. *Пономаренко В.И., Мировицкий Д.И., Будагян И.Ф.* // Радиотехника. 1984. Т. 39. № 11. С. 68.
9. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* Композиционные материалы: разработка и применение. Новосибирск: АНС “СибАК”. 2017. С. 112.
10. *Пономаренко В.И.* // Изв. вузов. Электромеханика. 1982. № 5. С. 518.
11. *Казанцев Ю.Н., Бабаян В.А., Казанцева Н.Е. и др.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 3. С. 264.
12. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Мир, 1970.
13. *Пономаренко В.И., Куприянов И.К., Журавлев С.И.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 2. С. 346.
14. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2001.
15. *Биндер К., Хеерман Д.В.* Моделирование методом Монте-Карло в статистической физике. М.: Физматлит, 1995.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 774–797

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 519.218.5

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ С СУЩЕСТВЕННОЙ ВАРИАБЕЛЬНОСТЬЮ РИТМА ИМПУЛЬСОВ

© 2020 г. В. Е. Анциперов*

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

**E-mail: antciperov@cplire.ru*

Поступила в редакцию 02.02.2020 г.
После доработки 02.02.2020 г.
Принята к публикации 12.02.2020 г.

Представлены результаты применения модели циклических точечных процессов с ограниченным последействием для анализа ритмических характеристик импульсных сигналов. Показано, что являясь обобщением рекуррентных и альтернирующих точечных процессов, циклические процессы позволяют описывать потоки событий более чем с двумя состояниями. Последнее обстоятельство существенно расширяет область их применения, в частности, на биомедицинские сигналы. В работе осуществлен вывод полного (локального) статистического описания циклических процессов, исследована асимптотика их поведения и приведено упрощенное статистическое описание для случая стационарных режимов. В последнем случае на основе локальной статистики получены аналитические выражения для среднего и второго смешанного моментов циклического процесса. В наиболее важном частном случае выяснена зависимость особенностей их структуры от временных масштабов динамики сигнала и от соотношений между масштабами.

DOI: 10.31857/S0033849420070013

ВВЕДЕНИЕ

Многие важные импульсные сигналы в природе и в технике являются результатом взаимодействия периодических процессов и связанных с ними случайных событий. Хотя реализации подобных сигналов сами не являются строго периодическими функциями, их средние статистические характеристики обладают свойством периодичности. Часто подобные сигналы называются *циклостационарными*, они встречаются в телекоммуникационных системах, радарах, телеметрии, астрономии, механике, эконометрии и биологии. Обширный список моделей, алгоритмов и приложений циклостационарных сигналов представлен в работе [1].

Для моделирования импульсных сигналов циклостационарного типа часто используются профильтрованные с некоторой импульсной передаточной функцией случайные точечные процессы. Широкий класс используемых для этих целей точечных процессов составляют так называемые точечные процессы с ограниченным последействием (в терминологии Ф.Я. Хинчина [2]). Процессы с ограниченным последействием являются далеко идущими обобщениями простого пуассоновского процесса, наследующими от него свойство статистической независимости длительностей интервалов между импульсами. Одними из популярных семейств точечных процессов этого класса являются рекуррентные процессы [3], характеризующиеся одинаковым распределением длительностей интервалов. В теории систем массового обслуживания такие процессы также называются процессами восстановления [4]. Рекуррентные процессы нашли широкое применение в теориях связи, очередей, распределения ресурсов и т.д. Однако для задач моделирования сигналов биомедицинского происхождения, они оказались не вполне адекватными. Проблема состоит в том, что описываемые рекуррентными процессами потоки импульсов имеют постоянный средний ритм, а для биомедицинских сигналов свойственна вариабельность ритма во времени [5]. К счастью, эту проблему можно разрешить оставаясь в рамках класса процессов с ограниченным последействием. Это достигается на пути включения в анализ моделей циклических точечных процессов. Для циклических процессов условие одинакового распределения длительностей интервалов между импульсами заменяется условием цикличности их последовательных распределений [6].

Цель данной работы состоит в разработке L_2 теории циклических точечных процессов с ограниченным последействием, подобной аналогичной теории для рекуррентных процессов, и анализа на основе характеристик второго смешанного момента циклических процессов временных масштабов ритма импульсных сигналов циклостационарного типа.

1. КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Зададим рабочую модель выделенного фрагмента импульсного сигнала $z(t')$ в виде последовательности подобных по форме $g(t')$ случайных импульсов на заданном весовым окном $h(t')$ интервале:

$$z(t') = h(t'-t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t'-t_k), \qquad (1)$$

где t – момент времени анализа, положение весового окна. Моменты времени появления импульсов $\{t_k\}$ и соответствующие им амплитуды $\{A_k\}$, $-\infty < k < +\infty$, предполагаются (бесконечными) совокупностями случайных величин, статистика которых детализируется ниже.

В отношении окна $h(t')$ примем, что оно представляет собой некоторую положительную функцию, существенно отличную от нуля в области квазистационарности сигнала:

$$h(t') = \begin{cases} \geq 0, & |t'| < \Sigma \\ \approx 0, & |t'| \geq \Sigma \end{cases}, \qquad (2)$$

где величина 2Σ представляет собой характерную длительность интервалов квазистационарности. Для определенности примем $h(0) = 1$.

Функцию формы импульса $g(t')$ также будем считать существенно отличной от нуля на интервале длительности ~2σ: $g(t') \approx 0$, $|t'| \geq \sigma$, но не обязательно положительной. Для определенности нормируем ее на единицу (в квадратичной норме):

$$\int g^2(t')dt' = 1 = \int |\gamma(f)|^2 df,$$
$$\gamma(f) = \int g(t')\exp(-2\pi jft')dt', \qquad (3)$$

где j – мнимая единица. В (3) также представлена частотная характеристика $\gamma(f)$ формы импульса $g(t')$, которая ввиду действительности последней является комплексной эрмитово-симметричной $\gamma^*(f) = \gamma(-f)$ функцией частоты.

Известным фактом спектральной теории является то, что в случае $\sigma \ll \Sigma$ ширина $\Omega \sim 1/\sigma$ характеристики $\gamma(f)$ (3) задает ширину частотного диапазона (полосу) всего сигнала $z(t')$ (1). Далее соотношение $\sigma \ll \Sigma$ будем считать выполненным. Более того, будем считать $\sigma \ll \bar{s}$, $\bar{s} \ll \Sigma$, где $\bar{s}$ – средняя длительность интервала следования импульсов. Из $\sigma \ll \bar{s}$ следует, что, помимо прочего, в (1) предполагается отсутствие существенного перекрытия импульсов. Неравенство же $\bar{s} \ll \Sigma$, означает, что на анализируемом фрагменте число импульсов существенно больше единицы. Далее параметр $\bar{s}$ будет определен строго, пока же отметим, что с учетом сделанных предположений модель (1) характеризуется по крайней мере тремя временными масштабами $\sigma \ll \bar{s} \ll \Sigma$.

Предполагаемая многомасштабность сигнала $z(t')$ (1) уже достаточна для анализа простых процедур его обработки, включая анализ специализированных представлений. Отметим, что при этом всегда остается возможность дальнейшего уточнения модели, посредством добавления в нее ряда деталей для более глубокого анализа конкретных случаев. В данной работе, выбирая между характеристиками модели такими, как общность и простота, с одной стороны, или специализация и сложность, с другой, будем в основном придерживаться первой альтернативы. С этой целью представим $z(t')$ (1) в виде результата последовательных линейных операций над некоторым еще более простым импульсным сигналом – идеальным точечным процессом (сигналом) $x(t')$, см. работы [7–11]:

$$z(t') = h(t'-t)\times\{g(t')*x(t')\} =$$
$$= h(t'-t)\int g(t'-t'')x(t'')dt'', \qquad (4)$$
$$x(t') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t'-t_k),$$

где $\delta(t'')$ – дельта-функции Дирака, задающая форму импульсов $x(t')$. В отличие от $z(t')$ (1) все временные масштабы процесса $x(t')$ (4) связаны только со статистикой моментов времени импульсов $\{t_k\}$. Внутренний же σ и внешний Σ масштабы результирующего сигнала $z(t')$ определяются характеристиками ядра $g(t')$ операции свертки “*” и окна $h(t')$ операции взвешивания "×”, применяемых к точечному процессу $x(t')$. Отметим, что ввиду линейности перечисленных операций статистические моменты $z(t')$ – первый $m_t(t')$, второй смешанный $R_t(t',t'')$ и т.д. – также линейно связаны с соответствующими моментами $x(t')$:

$$m_t(t') = \overline{z(t')} = h(t'-t)\int g(t'-t'')\overline{x(t'')}dt'',$$
$$R_t(t',t'') = \overline{z(t')z(t'')} = H(t'-t,t''-t)\times \qquad (5)$$
$$\times\iint G(t'-t''',t''-t^{IV})\overline{x(t''')x(t^{IV})}dt'''dt^{IV}.$$

Здесь и далее чертой сверху обозначается операция усреднения. В (5) весовое окно $H(t',t'') = h(t')h(t'')$ и ядро свертки $G(t',t'') = g(t')g(t'')$ имеют на плоскости $\{(t',t'')\}$ носители с теми же характерными размерами ~Σ и σ.

В отношении статистики $x(t')$ (4) примем следующие общие предположения. Будем считать совокупность моментов времени появления импульсов $\{t_k\}$ и совокупность амплитуд $\{A_k\}$ статистически независимыми друг от друга. Более того, будем считать все A_k независимыми в совокупности, одинаково распределенными случайными величинами с первым и вторым статистическими моментами, равными соответственно $\overline{A}$ и $\overline{A^2}$. При этом первый и второй смешанный моменты сигнала $x(t')$ (4) принимают вид

$$\overline{x(t')} = \overline{A}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\overline{\delta(t'-t_k)},$$

$$\overline{x(t')x(t'')} = \overline{A^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\overline{\delta(t'-t_k)\delta(t''-t_k)} + \tag{6}$$

$$+\overline{A}^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}{}'\overline{\delta(t'-t_l)\delta(t''-t_k)},$$

где $\sum_l{}'\ldots$ означает суммирование по индексу $l \neq k$.

Из (6) следует, что для нахождения требуемых статистических моментов необходимо, по крайней мере, задание одно- и двумерных распределений вероятностей всех моментов времени t_k и всех пар (t_l,t_k):

$$\overline{\delta(t'-t_k)} = \int\delta(t'-t'')\,p_k(t'')\,dt'' = p_k(t'),$$

$$\overline{\delta(t'-t_k)\delta(t''-t_k)} =$$

$$= \int\delta(t'-t''')\delta(t''-t''')\,p_k(t''')\,dt''' =$$

$$= p_k(t')\delta(t''-t'),$$

$$\overline{\delta(t'-t_l)\delta(t''-t_k)} = \iint\delta(t'-t''')\delta\left(t''-t'^{\nu}\right)\times$$

$$= \times\, p_{lk}\left(t''',t'^{\nu}\right)dt'''\,dt'^{\nu} = p_{lk}(t',t''),$$

где $p_k(t')$ и $p_{lk}(t',t'')$ – плотности соответствующих распределений. С учетом введенных обозначений соотношения (6) можно записать в явном виде:

$$\overline{x(t')} = \overline{A}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_k(t'),$$

$$\overline{x(t')x(t'')} = \overline{A^2}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_k(t')\right]\delta(t''-t') + \tag{7}$$

$$+\overline{A}^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}{}'p_{lk}(t',t'').$$

Некоторого упрощения выражений в правых частях (7) можно добиться, если принять достаточно общее допущение об ординарности процесса $x(t')$ [3]. Ординарность означает, что для интервалов времени малой длительности Δ вероятность появления в них только одного импульса имеет первый порядок малости по Δ: $P_1(t,\Delta) \approx \lambda(t)\Delta$, а двух и более импульсов – порядок выше первого: $P_n(t,\Delta) = o(\Delta), n = 2,3,\ldots$, где $P_n(t,\Delta)$ – вероятность появления n импульсов в $(t,t+\Delta)$. Зависящий в общем случае от времени коэффициент $\lambda(t) \geq 0$ носит название (средней) интенсивности потока импульсов [3]. Последнее обстоятельство связано с тем, что среднее число импульсов $\overline{n}$ на интервале $(t,t+\Delta)$ имеет следующее разложение по Δ:

$$\overline{n}(t,t+\Delta) = 0P_0(t,\Delta) + 1P_1(t,\Delta) + 2P_2(t,\Delta) +$$

$$+\ldots = \lambda(t)\Delta + o(\Delta).$$

Интенсивность $\lambda(t)$ ординарного процесса напрямую связана с плотностями $\{p_k(t)\}$ распределений вероятностей моментов импульсов $\{t_k\}$. Эта связь следует из того факта, что здесь события $t_k \in (t,t+\Delta)$ для разных k несовместны, имеют вероятности $p_k(t)\Delta$ и в совокупности составляют в точности событие появления одного импульса на этом интервале. Поэтому исходя из $P_1(t,\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_k(t)\Delta = \lambda(t)\Delta$ получим

$$\lambda(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_k(t). \tag{8}$$

С учетом соотношения (8) выражения (7) для первого и второго смешанных статистических моментов $x(t')$ принимают следующий окончательный вид:

$$\overline{x(t')} = \overline{A}\lambda(t'),\quad \overline{x(t')x(t'')} =$$

$$= \overline{A^2}\lambda(t')\delta(t''-t') + \overline{A}^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}{}'p_{lk}(t',t''). \tag{9}$$

Для нахождения правых частей (9) (в конечном счете (5)) достаточно задания интенсивности $\lambda(t')$ и совокупности двумерных плотностей $\{p_{lk}(t',t'')\}$. Однако ввиду известных условий согласованности распределений весьма желательно, чтобы все они были заданы не эвристически, а в рамках некоторого полного статистического описания случайных моментов $\{t_k\}$, содержащего все конечномерные плотности распределения вероятностей $p_{l,\ldots,k}(t_l,\ldots,t_k)$. В контексте задач оценивания параметров модели (1) подобное задание, как отмеча-

лось выше, не должно быть чрезмерно сложным, чтобы допускать построение (синтез) трактуемых, поддающихся простому анализу оценок. Очевидно, наиболее простым было бы предположение о статистической независимости моментов $\{t_k\}$. Однако в отличие от амплитуд $\{A_k\}$ предположение о статистической независимости совокупности $\{t_k\}$ для реалистических моделей является, как правило, сверхупрощением.

Следующим по сложности классом точечных процессов являются рекуррентные процессы [3], характеризующиеся статистической независимостью и одинаковым распределением (iid – independent and identically-distributed) не самих $\{t_k\}$, а длительностей $\{s_k\}$, $s_k = t_{k+1} - t_k \geq 0$, интервалов между импульсами. В теории систем массового обслуживания такие процессы также называются процессами восстановления [4][1] . Оказалось, однако, что хотя область применимости рекуррентных процессов и является достаточно широкой [3], она недостаточна для моделирования важных классов сигналов ряда современных приложений. Например, общепризнанным фактом является то, что для задач моделирования сигналов биомедицинского происхождения, рекуррентные процессы не вполне адекватны: описываемые ими потоки импульсов имеют постоянный средний ритм, а для биомедицинских сигналов характерна вариабельность ритма во времени [5].

К счастью, для решения проблемы моделирования сигналов с переменным ритмом оказалось возможным лишь несколько обобщить модель рекуррентных точечных процессов, оставаясь в рамках класса процессов с ограниченным последействием [2]. Это достигается на пути включения в анализ моделей циклических точечных процессов. Для циклических процессов сохраняется условие независимости интервалов $\{s_k\}$, но условие их одинакового распределения заменяется более слабым условием циклического повторения последовательных распределений [6].

Ввиду того, что класс точечных циклических процессов с ограниченным последействием используется в радиотехнических приложениях не так часто (за исключением альтернирующих процессов [4, 12]), напомним его место в семействе процессов с ограниченным последействием и дадим на этой основе его полное статистическое описание. Затем воспользуемся полным статистическим описанием циклических процессов для вывода используемого в дальнейшем локального описания асимптотического поведения процесса.

[1] Подробнее о терминологии в данной области см. примечание в работе [3, с. 100].

2. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Широким семейством точечных процессов, описывающих потоки событий появления точек (узких импульсов) на временной оси в случайные моменты $t_1 \leq t_2 \leq \ldots < \infty$ начиная с некоторого неслучайного момента времени начала наблюдения t_0, являются процессы с ограниченным последействием. По определению А.Я. Хинчина [2] это процессы, у которых длительности интервалов между моментами событий $s_0, \ldots, s_k, \ldots$, $s_k = t_{k+1} - t_k$ независимы в совокупности и имеют заданные плотности распределения вероятностей $\rho_0(s), \ldots, \rho_k(s), \ldots$; $s \geq 0$. Если все плотности, исключая $\rho_0(s)$, совпадают между собой: $\rho_k(s) = \hat{\rho}(s)$, то процесс называется рекуррентным (процессом восстановления). Можно показать [12], что если рекуррентный процесс является стационарным, то обязательно $\rho_0(s)$ совпадает с сопряженной к $\hat{\rho}(s)$ плотностью

$$\hat{\varrho}(s) = \frac{1}{\bar{s}} \int_s^{+\infty} \hat{\rho}(s')\, ds',$$

где $\bar{s}$ – математическое ожидание $\hat{\rho}(s)$.

Более того, асимптотически при неограниченном увеличении времени анализа $t \to \infty$ всякий рекуррентный процесс по отношению к t как к началу наблюдения процесса становится стационарным и его интенсивность $\lambda(t)$ асимптотически стремится к $1/\bar{s}$ [1] (элементарная теорема восстановления). Отметим, что к рекуррентным процессам относится также простейший точечный процесс – однородный пуассоновский процесс, стационарный относительно любого момента времени $t \geq t_0$.

Простым обобщением рекуррентных процессов являются альтернирующие процессы (с ограниченным последействием) [4, 12]. Для этих процессов требование одинакового распределения интервалов заменяется требованиями одинаковых распределений с плотностью $\hat{\rho}_0(s)$ четных интервалов и с плотностью $\hat{\rho}_1(s)$ нечетных. Если $\hat{\rho}_0(s)$ и $\hat{\rho}_1(s)$ являются экспоненциальными функциями, то процесс является альтернирующим пуассоновским. Для альтернирующих процессов также выполняется соответствующее утверждение о асимптотической стационарности [4].

Следующим шагом обобщения является замена условия совпадения плотностей распределения вероятностей через событие, условием их совпадения через K событий (K – период цикличности). Такие процессы с ограниченным последействием называются циклическими [6] и задаются они наборами K плотностей распределения вероятностей $\hat{\rho}_0(s)$, $\hat{\rho}_1(s), \ldots, \hat{\rho}_{K-1}(s)$, $s \geq 0$. Таким образом, для цикли-

ческих процессов имеет место $\rho_k(s) = \hat{\rho}_{k \bmod K}(s)$ для произвольных k, где бинарная операция mod означает, как обычно, остаток от деления целого k на период K.

Удобно представлять себе циклический процесс как некоторую систему из K состояний $\{0,1,\ldots,(K-1)\}$, в которой состояния детерминированным образом циклически сменяют друг друга $0 \to 1 \to \ldots \to (K-1) \to 0 \to \ldots$, но эти смены происходят в случайные моменты времени, такие, что распределение вероятностей интервалов s_k между соседними моментами (времена пребывания в состояниях) зависит от номера состояния k. Если в этой интерпретации снять условие детерминированности переходов, то будет осуществлен переход к следующему обобщению – к определению полумарковских процессов [4].

Заметим, что для общих процессов с ограниченным последействием, ввиду $t_{k+1} = t_0 + s_0 + \ldots + s_k$ и независимости $s_0,\ldots,s_k$ в совокупности, условные плотности распределения моментов $\{t_k\}$ обладают следующим марковским свойством:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{k+1|k,\ldots,1}(t_{k+1}|t_1,\ldots,t_k) &= \rho_k(s_k|t_1,\ldots,t_k) = \\ &= \rho_k(s_k \mid s_0,\ldots,s_{k-1}) = \\ &= \rho_k(s_k) = \rho_k(t_{k+1}-t_k) = \tilde{p}_{k+1|k}(t_{k+1}|t_k).\end{aligned} \tag{10}$$

Для циклических процессов свойство (10) уточняется следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{k+1|k,\ldots,1}(t_{k+1}|t_1,\ldots,t_k) &= \hat{\rho}_{k \bmod K}(t_{k+1}-t_k) = \\ &= \tilde{p}_{k+1|k}(t_{k+1}|t_k).\end{aligned} \tag{11}$$

Используя это свойство, можно на основе цепного правила записать для циклических процессов следующие выражения конечномерных плотностей распределения вероятностей моментов $\{t_k\}$ [12]:

$$\begin{aligned}&\tilde{p}_{1,\ldots,k+1}(t_1,\ldots,t_{k+1}) = \\ &= \hat{\rho}_0(t_1-t_0)\prod_{i=1}^{k}\hat{\rho}_{i \bmod K}(t_{i+1}-t_i).\end{aligned} \tag{12}$$

Выражения (12) задают в общем виде структуру полного статистического описания циклических точечных процессов с ограниченным последействием. Однако для целей данной работы удобнее другое – локальное задание статистики процесса. Именно, выбирая произвольным образом момент времени анализа процесса $t > t_0$, перенумеруем последовательные моменты точек процесса относительно этого t следующим образом ($l < 0 < 1 < k$):

$$-\infty < \ldots \le t_l' \le \ldots \le t_0' \le t \le t_1' \le \ldots \le t_k' < \ldots < \infty,$$

где моменты t_l' с индексами l, значения которых меньше некоторого номера $L \le 0$, полагаются равными начальному моменту времени t_0. Используя рассуждения, подобные применявшимся при выводе (8), с помощью (12) находятся плотности распределения вероятностей моментов в локальном описании $\{t_k'\}$. А именно, учтем, что событие, соответствующее заданной конечной последовательности моментов $t_l' \le \ldots \le t_k'$, $\left(t \in (t_l', t_k')\right)$, может быть представлено в терминах исходного описания процесса $t_1 \le t_2 \le \ldots < \infty$ как сумма следующих несовместных событий: во-первых, события $(t_1 = t_l') \cap (t_2 = t_{l+1}') \cap \ldots \cap (t_{k-l+1} = t_k')$, во-вторых, события $(t_2 = t_l') \cap (t_3 = t_{l+1}') \cap \ldots \cap (t_{k-l+2} = t_k')$ и т.д. Суммируя заданные описанием (12) плотности вероятностей этих событий, получим

$$\begin{aligned}p_{l,\ldots,k}(t_l',\ldots,t_k') &= \tilde{p}_{1,\ldots,k-l+1}(t_l',\ldots,t_k') + \\ &+ \tilde{p}_{2,\ldots,k-l+2}(t_l',\ldots,t_k') + \ldots = \\ &= \tilde{p}_1(t_l')\prod_{i=l}^{k-1}\hat{\rho}_{(i-l+1) \bmod K}(t_{i+1}'-t_i') + \\ &+ \tilde{p}_2(t_l')\prod_{i=l}^{k-1}\hat{\rho}_{(i-l+2) \bmod K}(t_{i+1}'-t_i') + \ldots = \\ &= \sum_{j=1}^{K}\left[\sum_{q=0}^{\infty}\tilde{p}_{j+qK}(t_l')\right]\prod_{i=l}^{k-1}\hat{\rho}_{(i-l+j) \bmod K}(t_{i+1}'-t_i'),\end{aligned} \tag{13}$$

где в соответствии с (12) использованы обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(t) &= \hat{\rho}_0(t-t_0), \\ \tilde{p}_2(t) &= \int_{t_0}^{t}\tilde{p}_{12}(t',t)\,dt' = \\ &= \int_{t_0}^{t}\hat{\rho}_1(t-t')\hat{\rho}_0(t'-t_0)\,dt', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{14}$$

для одномерных плотностей вероятности $\{\tilde{p}_k(t)\}$ моментов $\{t_k\}$ в терминах исходного описания процесса. Кроме того, в (13) сгруппированы слагаемые с кратными периоду K номерами $\{j+qK\}$, $j = 1,\ldots,K$, поскольку в силу цикличности процесса все они имеют одинаковые сомножители при $\tilde{p}_{j+qK}(t)$. Если учесть, что при разных сомножителях в (13) ряды одномерных плотностей по форме подобны $\lambda(t)$ (8), то естественно считать их парциальными интенсивностями процесса и обозначить как $\lambda_j(t)$:

$$\sum_{q=0}^{\infty}\tilde{p}_{j+qK}(t) = \lambda_j(t), \quad j = 1,\ldots,K. \tag{15}$$

Парциальные интенсивности $\{\lambda_j(t)\}$ можно интерпретировать как интенсивности версий исходного циклического процесса (с общим началом t_0),

прореженных с периодом K, начиная с моментов $t_j, j = 1,\ldots,K$. Нетрудно заметить, что все эти версии представляют собой обычные рекуррентные точечные процессы с разными начальными плотностями $\rho_0(s)$, но с одинаковой плотностью $\hat{\rho}(s)$, являющейся сверткой всех K плотностей $\hat{\rho}_0(s)$, $\hat{\rho}_1(s),\ldots,\hat{\rho}_{K-1}(s)$. Из теории рекуррентных процессов известно [12], что асимптотически, при $t \to +\infty$, вне зависимости от начальной плотности, интенсивность такого процесса стремится к постоянному пределу $1/\bar{S}$, где $\bar{S}$ – математическое ожидание $\hat{\rho}(s)$. Поскольку математическое ожидание свертки есть сумма математических ожиданий $\{\bar{s}_j\}$ ее сомножителей, $\bar{S} = \bar{s}_0 + \ldots + \bar{s}_{K-1}$, асимптотический предел для всех $\{\lambda_j(t)\}$ можно представить и как $1/K\bar{s}$, где $\bar{s}$ есть средний интервал времени между точками процесса $\bar{s} = (\bar{s}_0 + \ldots + \bar{s}_{K-1})/K$.

Из сделанных замечаний следует, что для циклических процессов при $t \to +\infty$ конечномерные плотности распределения вероятностей $p_{l,\ldots,k}(t_l',\ldots,t_k')$ (13) будут зависеть только от разностей последовательных аргументов $(t_{i+1}' - t_i')$, т.е. асимптотически они становятся стационарными. Это свойство обобщает упоминавшиеся выше аналогичные факты для рекуррентного и альтернирующего процессов, являющихся частными случаями циклического.

Предполагая далее для циклического процесса асимптотику $t \to +\infty$, т.е. предполагая для него выполненным условие стационарности $\lambda_j(t) = 1/K\bar{s}$, перепишем статистическое задание (13) распределений наборов подряд идущих моментов времени с l-го по k-й ($l \le 0 < 1 \le k$) в виде

$$p_{l,\ldots,k}(t_l,\ldots,t_k) = \\ = \frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=1}^{K}\prod_{i=l}^{k-1}\hat{\rho}_{(i-l+j)\bmod K}(t_{i+1} - t_i), \quad (16)$$

где использованы локальные относительно момента времени анализа t координаты $t_i = t_i' - t$, $-\infty < i < \infty$. При этом, очевидно, момент времени анализа процесса переносится в начало координат, и это предполагает его расположение между крайними моментами времени набора: $t_l \le 0$ и $0 \le t_k$. Если в (16) произвести замену индекса $j' = (j - l)\bmod K$, то при суммировании по j новый индекс j' будет пробегать значения из $\{0,\ldots,K-1\}$, что позволяет плотности распределений вероятностей (16) переписать в следующем окончательном виде ($l \le 0 < 1 \le k$):

$$p_{l,\ldots,k}(t_l,\ldots,t_k) = \frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\prod_{i=l}^{k-1}\hat{\rho}_{(i+j)\bmod K}(t_{i+1} - t_i), \quad (17)$$

где возвращено обозначение индекса суммирования $j' \to j$. Отметим, что каждое слагаемое в (17) может интерпретироваться как совместная плотность распределения вероятности набора $t_l,\ldots,t_k$ и определенного состояния j процесса в момент времени анализа 0 (или в течение времени от t_0 до t_1).

Условие $l \le 0 < 1 \le k$ для (17) не является ограничением для полного статистического задания процесса. С помощью (17) также можно вычислить конечномерные плотности наборов $t_l \le \ldots \le t_k$, расположенных по одну сторону от нуля. Они вычисляются как маргинальные для распределений бóльших наборов подряд идущих моментов, содержащих в себе данный поднабор, но имеющих крайние моменты по разные стороны от нуля. Заметим, что поскольку при этом приходится интегрировать $\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)$ вдоль положительной $t_1 \ge 0$ и/или отрицательной $t_0 \le 0$ полуосей, полезно заменить плотности $\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)$ выражениями $\theta(t_1)\theta(-t_0)\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)$ и интегрировать его уже вдоль полных осей координат $-\infty < t_0 < \infty$ и $-\infty < t_1 < \infty$. При этом, поскольку $\hat{\rho}_j(s) \equiv 0$, $s < 0$, оказывается полезным следующее тождество:

$$\theta(t_1)\theta(-t_0)\hat{\rho}_j(t_1 - t_0) \equiv \\ \equiv \theta(t_1)\hat{\rho}_j(t_1 - t_0) - \hat{\rho}_j(t_1 - t_0)\theta(t_0). \quad (18)$$

Найдем, например, одномерные плотности распределения $p_k(t)$ для моментов времени $t_k = t$, $k \ge 1$, процесса. Для этого используем набор моментов $t_0 \le 0 \le t_1 \le \ldots \le t_{k-1} \le t$ и проинтегрируем соответствующую ему плотность $p_{0,\ldots,k}(t_0,t_1,\ldots,t_{k-1},t)$ (17) по t_0 от $-\infty$ до 0 и по $t_1 \le \ldots \le t_{k-1}$ от 0 до t:

$$p_k(t) = \frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^t dt_1\left[\int_{-\infty}^{0} dt_0\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)\right]\int_{t_1}^{t} dt_2\hat{\rho}_{(j+1)\bmod K}(t_2 - t_1)\ldots \\ \ldots\int_{t_{k-2}}^{t} dt_{k-1}\hat{\rho}_{(j+k-2)\bmod K}(t_{k-1} - t_{k-2})\hat{\rho}_{(j+k-1)\bmod K}(t - t_{k-1}) = \\ = \frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\theta(t_1)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt_0\theta(-t_0)\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)\right]\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\hat{\rho}_{(j+1)\bmod K}(t_2 - t_1)\ldots \\ \ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dt_{k-1}\hat{\rho}_{(j+k-2)\bmod K}(t_{k-1} - t_{k-2})\hat{\rho}_{(j+k-1)\bmod K}(t - t_{k-1}), \quad (19)$$

где пределы всех интегралов заменены на бесконечные ввиду автоматического обращения подынтегральных выражений в нуль вне интервалов интегрирования $t_{i-1} \le t_i \le t$ и искусственного введения функций Хэвисайда $\theta(t_1)$ и $\theta(-t_0)$ в первых двух интегралах.

Используя для интеграла по t_0 в (19) тождество (18), получим

$$\theta(t_1)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt_0\theta(-t_0)\hat{\rho}_j(t_1-t_0)\right] =$$
$$= \theta(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} dt_0\hat{\rho}_j(t_1-t_0) - \int_{0}^{+\infty} dt_0\hat{\rho}_j(t_1-t_0) =$$
$$= \theta(t_1)\int_{-\infty}^{0} dt_0\hat{\rho}_j(t_1-t_0) =$$
$$= \theta(t_1)\int_{t_1}^{+\infty} ds\hat{\rho}_j(s) = \overline{s}_j\hat{\varrho}_j(t_1),$$

где использована сопряженная к $\hat{\rho}_j(s)$ плотность $\hat{\varrho}_j(t)$ (см. выше).

Подставляя полученное выражение в (19), окончательно получим

$$p_k(t) = \sum_{j=0}^{K-1}\frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat{\varrho}_j(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\hat{\rho}_{(j+1)\mathrm{mod}K}(t_2-t_1)\ldots$$
$$\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dt_{k-1}\hat{\rho}_{(j+k-2)\mathrm{mod}K}(t_{k-1}-t_{k-2})\times \tag{20}$$
$$\times\hat{\rho}_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}(t-t_{k-1}).$$

Частным случаем (20) является распределение первого момента t_1 (последующего времени пребывания в состоянии на момент анализа), равное

$$p_1(t) = \sum_{j=0}^{K-1}\frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}}\hat{\varrho}_j(t). \tag{21}$$

Отметим, что плотность (21) можно интерпретировать как формулу полной вероятности, если понимать под $\hat{\varrho}_j(t)$ плотности условных распределений вероятностей находиться в течение времени t, начиная с нуля, в состоянии j, а под $\overline{s}_j/K\overline{s} = \pi_j$ – безусловные вероятности оказаться в этом состоянии на момент времени анализа 0.

Из (20) следует, что все $p_k(t)$ являются взвешенными (с весами $\pi_j = \overline{s}_j/K\overline{s}$) суммами $(k-1)$-кратных сверток $\hat{\varrho}_j(s)$ и последовательных $(k-1)$ плотностей $\hat{\rho}_{(j+1)\mathrm{mod}K}(s)$, ..., $\hat{\rho}_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}(s)$. Для компактной записи выражений, подобных (20), полезно ввести специальные обозначения $C_j^{(k)}(t)$, $j = 0,\ldots,K-1$, для k-кратных сверток подряд следующих $(k+1)$ плотностей $\hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}(s)$,..., $\hat{\rho}_{(j+k)\mathrm{mod}K}(s)$, $k = 0,1,\ldots$ (понимая под 0-сверткой $C_j^{(0)}(t) = \hat{\rho}_j(t)$):

$$C_j^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} dt_2\hat{\rho}_{(j+1)\mathrm{mod}K}(t_2-t_1)\ldots$$
$$\ldots\int_{-\infty}^{\infty} dt_k\hat{\rho}_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}(t_k-t_{k-1})\times \tag{22}$$
$$\times\hat{\rho}_{(j+k)\mathrm{mod}K}(t-t_k).$$

Функции $C_j^{(k)}(t)$ (22), будучи плотностями распределений сумм $(k+1)$ независимых положительных случайных величин, тождественно обращаются в нуль на отрицательной полуоси $t < 0$, а на положительной $t > 0$ они положительны и нормированы на единицу. Кроме того, их средние и дисперсии равны суммам средних и суммам дисперсий всех входящих под свертку плотностей.

Доопределив $C_j^{(k)}(t)$ для значений $k = -1$ посредством $C_j^{(-1)}(t) = \delta(t)$, $j = 0,\ldots,K-1$, из (22) можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$C_j^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat{\rho}_j(t_1)C_{(j+1)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(t-t_1). \tag{23}$$

С учетом определений $C_j^{(k)}(t)$ (22) одномерные плотности (20) принимают следующий более компактный вид:

$$p_k(t) = \sum_{j=0}^{K-1}\frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat{\varrho}_j(t_1)C_{(j+1)\mathrm{mod}K}^{(k-2)}(t-t_1) =$$
$$= \sum_{j=0}^{K-1}\pi_j\hat{\varrho}_j^{(k)}(t), \tag{24}$$

где

$$\hat{\varrho}_j^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\hat{\varrho}_j(t')C_{(j+1)\mathrm{mod}K}^{(k-2)}(t-t'), \tag{25}$$

могут интерпретироваться как плотности распределения условных вероятностей моментов t_k, $k > 0$, при условии прохождения процесса через состояние j в момент времени анализа 0, а $\pi_j = \overline{s}_j/K\overline{s}$ – как (безусловные) вероятности оказаться в этом состоянии. В частном случае $k = 1$ из определения (25) следует $\hat{\varrho}_j^{(1)}(t) = \hat{\varrho}_j(t)$.

Просуммировав обе части (24) по k от 1 до ∞, в соответствии с (8) получим

$$\lambda_+(t) = \sum_{j=0}^{K-1}\frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat{\varrho}_j(t_1)C_{(j+1)\mathrm{mod}K}^{(k-2)}(t-t_1).$$

Продифференцировав $\lambda(t)$ и учитывая, что $\overline{s}_j\hat{\varrho}_j'(t) = \delta(t) - \hat{\rho}_j(t)$, получим

$$\lambda_+'(t) = \frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[C_{(j+1)\bmod K}^{(k-2)}(t) - C_{(j)\bmod K}^{(k-1)}(t)\right] = \frac{1}{\overline{s}}\delta(t),$$

где также использованы рекуррентные соотношения (23). Интегрируя это соотношение с учетом $p_k(t) \equiv 0$ при $t < 0$, получим $\lambda_+(t) = \theta(t)/\overline{s}$.

Все, что сделано выше для вероятностей $p_k(t)$ моментов $t_k = t$, $k \geq 1$ с равным успехом может быть повторено и для вероятностей $p_l(t)$ моментов $t_l = t$, $l \leq 0$. Для этого возьмем набор $t_l \leq t_{l+1} \leq \ldots \leq t_0 \leq 0 \leq t_1$ и проинтегрируем соответствующую ему плотность $p_{l,\ldots,1}(t, t_{l+1}, \ldots, t_0, t_1)$ (17) по t_1 от 0 до ∞ и по $t_{l+1} \leq \ldots \leq t_0$ от t до 0:

$$\begin{aligned} p_l(t) &= \frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_t^0 dt_0\left[\int_0^{+\infty} dt_1\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)\right]\int_t^{t_0} dt_{-1}\hat{\rho}_{(j-1)\bmod K}(t_0 - t_{-1})\ldots \\ &\ldots\int_t^{t_{l+2}} dt_{l+1}\hat{\rho}_{(j+l+1)\bmod K}(t_{l+2} - t_{l+1})\hat{\rho}_{(j+l)\bmod K}(t_{l+1} - t) = \\ &= \frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_0\theta(-t_0)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\theta(t_1)\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)\right]\int_{-\infty}^{+\infty} dt_{-1}\hat{\rho}_{(j-1)\bmod K}(t_0 - t_{-1})\ldots \\ &\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dt_{l+1}\hat{\rho}_{(j+l+1)\bmod K}(t_{l+2} - t_{l+1})\hat{\rho}_{(j+l)\bmod K}(t_{l+1} - t), \end{aligned} \tag{26}$$

где пределы всех интегралов заменены на бесконечные ввиду автоматического обращения подынтегральных выражений в нуль вне интервалов интегрирования $t \leq t_i \leq t_{i+1}$ и искусственного введения функций Хэвисайда $\theta(t_1)$ и $\theta(-t_0)$ в первых двух интегралах.

Используя для интеграла по t_1 в (26) тождество (18), получим

$$\begin{aligned} &\theta(-t_0)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\theta(t_1)\hat{\rho}_j(t_1 - t_0)\right] = \\ &= \int_0^{+\infty} dt_1\hat{\rho}_j(t_1 - t_0) - \theta(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\hat{\rho}_j(t_1 - t_0) = \\ &= [1 - \theta(t_0)]\int_0^{+\infty} dt_1\hat{\rho}_j(t_1 - t_0) = \\ &= \theta(-t_0)\int_{-t_0}^{+\infty} ds\hat{\rho}_j(s) = \overline{s}_j\varrho_j(-t_0). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (26), окончательно получим

$$\begin{aligned} p_l(t) &= \sum_{j=0}^{K-1}\frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_0\hat{\varrho}_j(-t_0)\times \\ &\times\int_{-\infty}^{+\infty} dt_{-1}\hat{\rho}_{(j-1)\bmod K}(t_0 - t_{-1})\ldots \\ &\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dt_{l+1}\hat{\rho}_{(j+l+1)\bmod K}(t_{l+2} - t_{l+1})\hat{\rho}_{(j+l)\bmod K}(t_{l+1} - t). \end{aligned} \tag{27}$$

Частным случаем (27) является распределение нулевого момента t_0 (предшествующего времени пребывания в состоянии на момент анализа):

$$p_0(t) = \sum_{j=0}^{K-1}\frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}}\hat{\varrho}_j(-t). \tag{28}$$

Плотность (28) можно интерпретировать как формулу полной вероятности, понимая под $\hat{\varrho}_j(-t)$ плотности условных вероятностей находиться в течение времени $(-t)$ вплоть до нуля в состоянии j, а под $\overline{s}_j/K\overline{s} = \pi_j$ – безусловные вероятности оказаться в состоянии j в момент времени анализа 0.

Из (27) следует, что все $p_l(t)$ являются взвешенными суммами $(-l)$-кратных сверток $\hat{\varrho}_j(s)$ и предшествующих в обратном порядке плотностей $\hat{\rho}_{(j-1)\bmod K}(s)$, ..., $\hat{\rho}_{(j+l)\bmod K}(s)$. Для компактной записи выражений, подобных (27), полезно ввести специальные обозначения $D_j^{(k)}(t)$, $j = 0, \ldots, K-1$, для k-кратных сверток подряд следующих в обратном порядке $(k+1)$ плотностей $\hat{\rho}_{(j)\bmod K}(s)$, ..., $\hat{\rho}_{(j-k)\bmod K}(s)$, $k = 0, 1, \ldots$ (понимая под 0-сверткой $D_j^{(0)}(t) = \hat{\rho}_j(t)$):

$$\begin{aligned} D_j^{(k)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat{\rho}_{(j)\bmod K}(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} dt_2\hat{\rho}_{(j-1)\bmod K}(t_2 - t_1)\ldots \\ &\ldots\int_{-\infty}^{\infty} dt_k\hat{\rho}_{(j-k+1)\bmod K}(t_k - t_{k-1})\hat{\rho}_{(j-k)\bmod K}(t - t_k). \end{aligned} \tag{29}$$

Функции $D_j^{(k)}(t)$ (29), будучи плотностями распределений сумм $(k+1)$ независимых положительных случайных величин, тождественно обращаются в нуль на отрицательной полуоси $t<0$, а на положительной $t>0$ они положительны и нормированы на единицу. Кроме того, их средние и дисперсии равны суммам средних и суммам дисперсий всех входящих под свертку плотностей.

Сравнивая определения $D_j^{(k)}(t)$ (29) и $C_j^{(k)}(t)$ (22), легко заметить, что

$$D_j^{(k)}(t) = C_{(j-k)\mathrm{mod}K}^{(k)}(t). \tag{30}$$

Просуммировав соотношения (30) по j от 0 до $K-1$, получим тождество

$$\sum_{j=0}^{K-1} D_j^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{K-1} C_j^{(k)}(t). \tag{31}$$

Доопределив $D_j^{(k)}(t)$ для значений $k=-1$ посредством $D_j^{(-1)}(t)=\delta(t)$, $j=0,\ldots,K-1$, из (29) можно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$D_j^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \hat{\rho}_j(t_1) D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(t-t_1). \tag{32}$$

С учетом определения $D_j^{(k)}(t)$ (29) одномерные плотности (27) принимают следующий более компактный вид:

$$\begin{aligned} p_l(t) &= \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \hat{\varrho}_j(t_0) D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}(-t-t_0) = \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} \pi_j \hat{\varrho}_j^{(l)}(-t), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\hat{\varrho}_j^{(l)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{\varrho}_j(t') D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}(t-t') \tag{34}$$

могут интерпретироваться как плотности распределения условных вероятностей моментов t_l, $l \le 0$, при условии прохождения процесса через состояние j в момент времени анализа 0, а $\pi_j = \overline{s}_j / K\overline{s}$ — как (безусловные) вероятности оказаться в этом состоянии. В частном случае, $l=0$, из определения (34) следует $\hat{\varrho}_j^{(0)}(t) = \hat{\varrho}_j(t)$.

Просуммировав обе части (33) по l от $-\infty$ до 0, в соответствии с (8) получим

$$\lambda_-(t) = \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\overline{s}_j}{K\overline{s}} \sum_{l=-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{\varrho}_j(t_0) D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}(-t-t_0).$$

Продифференцировав $\lambda_-(t)$ и учитывая, что $\overline{s}_j \hat{\varrho}_j'(t) = \delta(t) - \hat{\rho}_j(t)$, получим

$$\lambda_-'(t) = \frac{1}{K\overline{s}} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{l=-\infty}^{0} \left[D_{(j)\mathrm{mod}K}^{(-l)}(-t) - D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}(-t) \right] = -\frac{1}{\overline{s}} \delta(t),$$

где также использованы рекуррентные соотношения (32). Интегрируя это соотношение с учетом $p_l(t) \equiv 0$ при $t>0$, получим $\lambda_-(t) = \theta(-t)/\overline{s}$.

Исходя из того, что $\lambda(t') = \lambda_-(t') + \lambda_+(t')$ для всех t', получаем, что первый момент (среднее) стационарного циклического процесса $x(t')$ (9) в явном виде есть:

$$\overline{x(t')} = \overline{A}\lambda(t') = \frac{\overline{A}}{\overline{s}} = \overline{x}. \tag{35}$$

3. ВТОРОЙ МОМЕНТ СТАЦИОНАРНОГО ЦИКЛИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ЛОКАЛЬНОЙ ВЕРСИИ

Возвращаясь к соотношениям (9), найдем на основе локального описания (17) двумерные плотности распределения вероятностей $p_{lk}(t',t'')$, $l \ne k$. Воспользуемся методом, подобным использованному в предыдущем разделе при нахождении одномерных распределений $p_k(t)$, где случаи $k \ge 1$ и $k \le 0$ рассматривались отдельно. Для определенности найдем $p_{lk}(t',t'')$ при $l<k$, дополнительный случай $k<l$ получается в результате одновременных перестановок $k \leftrightarrow l$ и $t' \leftrightarrow t''$. Таким образом, рассмотрим три случая: А) $l<k\le 0$, Б) $l \le 0 < k$ и В) $1 \le l < k$.

Случай А: $l < k \le 0$.

В группе моментов

$$\begin{aligned} -\infty < t' = t_l \le t_{l+1} \le \ldots \le t_{k-1} \le t_k = \\ = t'' \le t_{k+1} \le \ldots \le t_0 \le 0 \le t_1 < +\infty \end{aligned}$$

проинтегрируем соответствующую плотность (17) по моменту t_1 от 0 до ∞, по $t_{k+1} \le \ldots \le t_0$ от t'' до 0 и по $t_{l+1} \le \ldots \le t_{k-1}$ от t' до t'':

$$\begin{aligned} p_{lk}(t',t'') = \frac{1}{K\overline{s}} \sum_{j=0}^{K-1} \int_{t''}^{0} dt_0 \left[\int_0^{\infty} dt_1 \hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}(t_1 - t_0) \right] \times \\ \times \int_{t''}^{t_0} dt_{-1} \hat{\rho}_{(j-1)\mathrm{mod}K}(t_0 - t_{-1}) \ldots \\ \ldots \int_{t''}^{t_{k+2}} dt_{k+1} \hat{\rho}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}(t_{k+2} - t_{k+1}) \times \\ \times \hat{\rho}_{(j+k)\mathrm{mod}K}(t_{k+1} - t'') \int_{t'}^{t''} dt_{k-1} \hat{\rho}_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}(t'' - t_{k-1}) \ldots \\ \ldots \int_{t'}^{t_{l+2}} dt_{l+1} \hat{\rho}_{(j+l+1)\mathrm{mod}K}(t_{l+2} - t_{l+1}) \hat{\rho}_{(j+l)\mathrm{mod}K}(t_{l+1} - t'). \end{aligned} \tag{36}$$

Воспользовавшись выведенным ранее соотношением

$$\theta(-t_0)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\theta(t_1)\hat{\rho}_j(t_1-t_0)\right]=\overline{s}_j\hat{\varrho}_j(-t_0),$$

а также соотношениями (29) и (34), перепишем (36) в компактном виде:

$$p_{lk}(t',t'')=\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\overline{s}_j\hat{\varrho}_j^{(k)}(-t'')D_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}^{(k-l-1)}(t''-t'),\quad(37)$$

откуда следует, что $p_{lk}(t',t'')$, $l<k\le 0$, отлична от нуля при $t'\le t''\le 0$.

Случай Б: $0\le l<k$.

В группе моментов

$$-\infty<t_0\le 0\le t_1\le\ldots\le t_{l-1}\le t_l=$$
$$=t'\le t_{l+1}\le\ldots\le t_{k-1}\le t_k=t''<+\infty$$

проинтегрируем соответствующую плотность (17) по моменту t_0 от $-\infty$ до 0, по $t_1\le\ldots\le t_{l-1}$ от 0 до t' и по $t_{l+1}\le\ldots\le t_{k-1}$ от t' до t'':

$$p_{lk}(t',t'')=$$
$$=\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{t'}dt_1\left[\int_{-\infty}^{0}dt_0\hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}(t_1-t_0)\right]\times$$
$$\times\int_{t_1}^{t'}dt_2\hat{\rho}_{(j+1)\mathrm{mod}K}(t_2-t_1)\ldots$$
$$\ldots\int_{t_{l-2}}^{t'}dt_{l-1}\hat{\rho}_{(j+l-2)\mathrm{mod}K}(t_{l-1}-t_{l-2})\times\quad(38)$$
$$\times\hat{\rho}_{(j+l-1)\mathrm{mod}K}(t'-t_{l-1})\int_{t'}^{t''}dt_{l+1}\hat{\rho}_{(j+l)\mathrm{mod}K}(t_{l+1}-t')\ldots$$
$$\times\int_{t_{k-2}}^{t''}dt_{k-1}\hat{\rho}_{(j+k-2)\mathrm{mod}K}(t_{k-1}-t_{k-2})\times$$
$$\times\hat{\rho}_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}(t''-t_{k-1}).$$

Воспользовавшись выведенным ранее соотношением

$$\theta(t_1)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}dt_0\theta(-t_0)\hat{\rho}_j(t_1-t_0)\right]=\overline{s}_j\hat{\varrho}_j(t_1),$$

а также соотношениями (22) и (25), перепишем (38) в компактном виде:

$$p_{lk}(t',t'')=\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\overline{s}_j\hat{\varrho}_j^{(l)}(t')C_{(j+l)\mathrm{mod}K}^{(k-l-1)}(t''-t'),\quad(39)$$

откуда следует, что $p_{lk}(t',t'')$, $0\le l<k$ отлична от нуля при $0\le t'\le t''$.

Случай В: $l\le 0<k$.

В группе моментов

$$-\infty<t'=t_l\le t_{l+1}\le\ldots\le t_0\le 0\le t_1\le\ldots$$
$$\ldots\le t_{k-1}\le t_k=t''<+\infty$$

проинтегрируем соответствующую плотность (17) по моментам $t_{l+1}\le\ldots\le t_0$ от t' до 0 и по $t_1\le\ldots\le t_{k-1}$ от 0 до t'':

$$p_{lk}(t',t'')=\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_{t'}^{0}dt_0\int_0^{t''}dt_1\hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}(t_1-t_0)\times$$
$$\times\int_{t'}^{t_0}dt_{-1}\hat{\rho}_{(j-1)\mathrm{mod}K}(t_0-t_{-1})\ldots$$
$$\ldots\int_{t'}^{t_{l+2}}dt_{l+1}\hat{\rho}_{(j+l+1)\mathrm{mod}K}(t_{l+2}-t_{l+1})\times\quad(40)$$
$$\times\hat{\rho}_{(j+l)\mathrm{mod}K}(t_{l+1}-t')\int_{t_1}^{t''}dt_2\hat{\rho}_{(j+1)\mathrm{mod}K}(t_2-t_1)\ldots$$
$$\ldots\int_{t_{k-2}}^{t''}dt_{k-1}\hat{\rho}_{(j+k-2)\mathrm{mod}K}(t_{k-1}-t_{k-2})\times$$
$$\times\hat{\rho}_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}(t''-t_{k-1}).$$

Воспользовавшись (22) и (29), перепишем (40) в компактном виде:

$$p_{lk}(t',t'')=\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_{-\infty}^{0}dt_0\int_0^{+\infty}dt_1\hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}(t_1-t_0)\times\quad(41)$$
$$\times D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}(t_0-t')C_{(j+1)\mathrm{mod}K}^{(k-2)}(t''-t_1),$$

откуда следует, что $p_{lk}(t',t'')$, $l\le 0<k$ отлична от нуля при $t'\le 0\le t''$.

Далее, используя соотношение (18) и рекуррентные тождества (23) и (32), окончательно получим

$$p_{lk}(t',t'')=$$
$$=\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{+\infty}dt_1C_{(j+1)\mathrm{mod}K}^{(k-2)}(t''-t_1)D_{(j)\mathrm{mod}K}^{(-l)}(t_1-t')-\quad(42)$$
$$-\frac{1}{K\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{+\infty}dt_0C_{(j)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(t''-t_0)D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}(t_0-t').$$

Для дальнейших целей полезно ввести набор связанных с $C_j^{(k)}(t)$ (22) и $D_j^{(k)}(t)$ (29) функций $c_j(t)$, $d_j(t)$ $j=0,\ldots,K-1$:

$$c_j(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_j^{(k)}(t),\quad d_j(t)=\sum_{k=0}^{\infty}D_j^{(k)}(t).\quad(43)$$

Функции $c_j(t)$ и $d_j(t)$ (43) тождественно обращаются в нуль на отрицательной полуоси $t < 0$, а на положительной $t > 0$ они положительны, но не нормированы, т.е. не являются плотностями распределения вероятностей. Из соотношений (31) можно получить следующую связь между ними:

$$\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} c_j(t) = b(t) = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} d_j(t),$$
$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} C_j^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} D_j^{(k)}(t). \quad (44)$$

Для определения второго момента $\overline{x(t')x(t'')}$ согласно (9) необходимо найти двойную сумму

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{'+\infty} p_{lk}(t',t'').$$

Разобьем сумму на четыре слагаемых: **А')** $l,k \le 0$, **Б')** $l,k \ge 1$, **В')** $l \le 0,\ k \ge 1$, **В")** $l \ge 1,\ k \le 0$ и в соответствии с результатами рассмотренных выше случаев А–В найдем их.

А'. Сумма $S_{--}(t',t'') = \sum_{k=-\infty}^{+0}\sum_{l=-\infty}^{'0} p_{lk}(t',t'')$:

$$S_{--}(t',t'') = \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{l=-\infty}^{k-1} p_{lk}(t',t'') +$$
$$+ \sum_{l=-\infty}^{0}\sum_{k=-\infty}^{l-1} p_{lk}(t',t'') = \frac{1}{K}\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\overline{s}_j\hat{\varrho}_j^{(k)}(-t'')\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{+\infty} D_{(j+k-1)\mathrm{mod}K}^{(m)}(t''-t') + \frac{1}{K}\sum_{l=-\infty}^{0}\frac{1}{\overline{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\overline{s}_j\hat{\varrho}_j^{(l)}(-t')\sum_{m=0}^{+\infty} D_{(j+l-1)\mathrm{mod}K}^{(m)}(t'-t'') =$$
$$= \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} d_j(t''-t')\frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=-\infty}^{0}\overline{s}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}\hat{\varrho}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}^{(k)}(-t'') +$$
$$+ \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} d_j(t'-t'')\frac{1}{\overline{s}}\sum_{l=-\infty}^{0}\overline{s}_{(j-l+1)\mathrm{mod}K}\hat{\varrho}_{(j-l+1)\mathrm{mod}K}^{(l)}(-t') =$$
$$= \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} d_j(t''-t')\mu_j(t'') + \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} d_j(t'-t'')\mu_j(t'),$$

где введено $\mu_j(t) = \frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{s}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}\hat{\varrho}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}^{(-k)}(-t)$.

С учетом определения $\hat{\varrho}_j^{(l)}(t)$, $l \le 0$ (34):

$$\mu_j(t) = \frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{s}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\hat{\varrho}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}(t')\times$$
$$\times D_{(j+k)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(-t-t').$$

Продифференцируем $\mu_j(t)$ с учетом $\overline{s}_j\hat{\varrho}_j'(t) = \delta(t) - \hat{\rho}_j(t)$:

$$\mu_j'(t) = \frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=0}^{+\infty}\overline{s}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}\left[\hat{\varrho}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}(t')D_{(j+k)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(-t-t')\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right] -$$
$$- \frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\left[\delta(t') - \hat{\rho}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}(t')\right]D_{(j+k)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(-t-t') =$$
$$= -\frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[D_{(j+k)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(-t) - \int_{-\infty}^{\infty} dt'\hat{\rho}_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}(t')D_{(j+k)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(-t-t')\right] =$$
$$= -\frac{1}{\overline{s}}\sum_{k=0}^{+\infty}\left[D_{(j+k)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}(-t) - D_{(j+k+1)\mathrm{mod}K}^{(k)}(-t)\right] = -\frac{1}{\overline{s}}\delta(t),$$

где было использовано рекуррентное тождество (32). Интегрируя $\mu'_j(t)$ и учитывая, что $\mu_j(t) \equiv 0$ при $t > 0$, получим $\mu_j(t) = \theta(-t)/\bar{s}$. С учетом этого имеем

$$S_{--}(t',t'') = \frac{1}{\bar{s}}\theta(-t'')b(t''-t') + \frac{1}{\bar{s}}\theta(-t')b(t'-t'') = \frac{1}{\bar{s}}\theta(-t')\theta(-t'')b(|t''-t'|). \quad (45)$$

Б'. Сумма $S_{++}(t',t'') = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{'+\infty} p_{lk}(t',t'')$:

$$S_{++}(t',t'') = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=k+1}^{+\infty} p_{lk}(t',t'') + \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{k=l+1}^{+\infty} p_{lk}(t',t'') = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\bar{s}_j\hat{\varrho}_j^{(k)}(t'')\sum_{m=0}^{+\infty}C^{(m)}_{(j+k)\mathrm{mod}K}(t'-t'') +$$

$$+\frac{1}{K}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\bar{s}_j\hat{\varrho}_j^{(l)}(t')\sum_{m=0}^{+\infty}C^{(m)}_{(j+l)\mathrm{mod}K}(t''-t') = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1}c_j(t'-t'')\frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{s}_{(j-k)\mathrm{mod}K}\hat{\varrho}^{(k)}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t'') +$$

$$+\frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1}c_j(t''-t')\frac{1}{\bar{s}}\sum_{l=1}^{+\infty}\bar{s}_{(j-l)\mathrm{mod}K}\hat{\varrho}^{(l)}_{(j-l)\mathrm{mod}K}(t') = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1}c_j(t'-t'')\nu_j(t'') + \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1}c_j(t''-t')\nu_j(t'),$$

где введено

$$\nu_j(t) = \frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{s}_{(j-k)\mathrm{mod}K}\hat{\varrho}^{(k)}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t).$$

С учетом определения $\hat{\varrho}_j^{(k)}(t)$, $k \ge 0$ (25), получаем

$$\nu_j(t) = \frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{s}_{(j-k)\mathrm{mod}K}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\hat{\varrho}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t')C^{(k-2)}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}(t-t').$$

Продифференцируем $\nu_j(t)$ с учетом $\bar{s}_j\hat{\varrho}'_j(t) = \delta(t) - \hat{\rho}_j(t)$:

$$\nu'_j(t) = -\frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\bar{s}_{(j-k)\mathrm{mod}K}\left[\hat{\varrho}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t')C^{(k-2)}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}(t-t')\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right] +$$

$$+\frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\left[\delta(t') - \hat{\rho}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t')\right]C^{(k-2)}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}(t-t') =$$

$$= \frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[C^{(k-2)}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}(t) - \int_{-\infty}^{\infty}dt'\hat{\rho}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t')C^{(k-2)}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}(t-t')\right] =$$

$$= \frac{1}{\bar{s}}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[C^{(k-2)}_{(j-k+1)\mathrm{mod}K}(t) - C^{(k-1)}_{(j-k)\mathrm{mod}K}(t)\right] = \frac{1}{\bar{s}}\delta(t),$$

где было использовано рекуррентное тождество (23). Интегрируя $\nu'_j(t)$ и учитывая, что $\nu_j(t) \equiv 0$ при $t < 0$, получим $\nu_j(t) = \theta(t)/\bar{s}$. С учетом этого имеем

$$S_{++}(t',t'') = \frac{1}{\bar{s}}\theta(t'')b(t'-t'') + \frac{1}{\bar{s}}\theta(t')b(t''-t') = \frac{1}{\bar{s}}\theta(t')\theta(t'')b(|t''-t'|). \quad (46)$$

В'. Сумма $S_{-+}(t',t'') = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{0} p_{lk}(t',t'')$:

$$S_{-+}(t',t'') = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{0} p_{lk}(t',t'') =$$

$$= \frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{\infty}dt_1\left[\sum_{k=1}^{+\infty}C^{(k-2)}_{(j+1)\mathrm{mod}K}(t''-t_1)\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{0}D^{(-l)}_{(j)\mathrm{mod}K}(t_1-t')\right] -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{\infty}dt_0\left[\sum_{k=1}^{+\infty}C_{(j)\mathrm{mod}K}^{(k-1)}\left(t''-t_0\right)\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{0}D_{(j-1)\mathrm{mod}K}^{(-l-1)}\left(t_0-t'\right)\right]=\\
&=\frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{\infty}dt_1\left[\delta\left(t''-t_1\right)+c_{(j+1)\mathrm{mod}K}\left(t''-t_1\right)\right]d_{(j)\mathrm{mod}K}\left(t_1-t'\right)-\\
&-\frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\int_0^{\infty}dt_0c_{(j)\mathrm{mod}K}\left(t''-t_0\right)\left[\delta\left(t_0-t'\right)+d_{(j-1)\mathrm{mod}K}\left(t_0-t'\right)\right]=\\
&=\frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\theta\left(t''\right)d_{(j)\mathrm{mod}K}\left(t''-t'\right)-\frac{1}{K\bar{s}}\sum_{j=0}^{K-1}\theta\left(t'\right)c_{(j)\mathrm{mod}K}\left(t''-t'\right)+\\
&\quad+\frac{1}{K\bar{s}}\int_0^{\infty}dt_1\sum_{j=0}^{K-1}c_{(j+1)\mathrm{mod}K}\left(t''-t_1\right)d_{(j)\mathrm{mod}K}\left(t_1-t'\right)-\\
&\quad-\frac{1}{K\bar{s}}\int_0^{\infty}dt_0\sum_{j=0}^{K-1}c_{(j)\mathrm{mod}K}\left(t''-t_0\right)d_{(j-1)\mathrm{mod}K}\left(t_0-t'\right)=\\
&=\frac{1}{\bar{s}}\left[\theta\left(t''\right)b\left(t''-t'\right)-\theta\left(t'\right)b\left(t''-t'\right)\right]=\frac{1}{\bar{s}}\theta\left(t''\right)\theta\left(-t'\right)b\left(t''-t'\right),
\end{aligned}
\tag{47}
$$

где использовано тождество (18).

B". Сумма $S_{+-}\left(t',t''\right)=\sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{l=1}^{+\infty}p_{lk}\left(t',t''\right)$:

$$
\begin{aligned}
S_{+-}\left(t',t''\right)&=\sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{l=1}^{+\infty}p_{lk}\left(t',t''\right)=\sum_{l=-\infty}^{0}\sum_{k=1}^{+\infty}p_{kl}\left(t',t''\right)=\\
&=\sum_{l=-\infty}^{0}\sum_{k=1}^{+\infty}p_{lk}\left(t'',t'\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{0}p_{lk}\left(t'',t'\right)=\\
&=S_{-+}\left(t'',t'\right)=\frac{1}{\bar{s}}\theta\left(t'\right)\theta\left(-t''\right)b\left(t'-t''\right).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Суммируя выражения (44)–(47), получим следующий окончательный результат:

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}{}'p_{lk}\left(t',t''\right)=\frac{1}{\bar{s}}b\left(\left|t''-t'\right|\right).
\tag{49}
$$

Теперь, с учетом найденного выражения (49) для двойной суммы и (35) для интенсивности $\lambda\left(t'\right)$ может быть окончательно выписан явный вид второго момента $\overline{x\left(t'\right)x\left(t''\right)}$ (9):

$$
\overline{x\left(t'\right)x\left(t''\right)}=\frac{1}{\bar{s}}\left\{\overline{A^2}\delta\left(t''-t'\right)+\bar{A}^2b\left(\left|t''-t'\right|\right)\right\},
\tag{50}
$$

регулярная часть которого полностью задается функцией $b\left(t\right)$ (44), однозначно определяемой через свертки $C_j^{(k)}\left(t\right)$ (22) подряд следующих плотностей распределения вероятностей $\hat{\rho}_{(j)\mathrm{mod}K}\left(s\right)$, ..., $\hat{\rho}_{(j+k)\mathrm{mod}K}\left(s\right)$.

Отметим, что $\overline{x\left(t'\right)x\left(t''\right)}$ (50) зависит от разности аргументов $t=t''-t'$, что также является признаком стационарности процесса.

Если ввести характеристические функции $\left\{\chi_k\left(f\right)\right\}$ для задающих циклический процесс плотностей распределения вероятностей $\left\{\hat{\rho}_k\left(s\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots,K-1$:

$$
\chi_k\left(f\right)=\int_0^{+\infty}\hat{\rho}_k\left(s\right)\exp(-2\pi jfs)ds=1-2\pi jf\bar{s}_k+\ldots,
\tag{51}
$$

то в соответствии с определением (22) характеристическими функциями сверток $C_j^{(k)}\left(t\right)$ будут:

$$
\begin{aligned}
\psi_l^{(k)}\left(f\right)&=\int_0^{+\infty}C_l^{(k)}\left(t\right)\exp(-2\pi jft)dt=\\
&=\prod_{i=0}^{k}\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}\left(f\right).
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Отметим, что все $\left\{\chi_k\left(f\right)\right\}$ и $\left\{\psi_l^{(k)}\left(f\right)\right\}$, будучи характеристическими функциями распределений, которые обращаются в нуль на отрицательной оси, являются аналитическими функциями в нижней комплексной полуплоскости $\mathrm{Im}\left(f\right)<0$, где также имеют место ограничения $\left|\chi_k\left(f\right)\right|<1$ и $\left|\psi_l^{(k)}\left(f\right)\right|<1$.

С помощью (52) может быть найдено преобразованием Фурье $b\left(t\right)$ (44):

$$
\begin{aligned}
\Psi\left(f\right)&=\int_0^{+\infty}b\left(t\right)\exp(-2\pi jft)dt=\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_l^{(k)}\left(f\right)=\\
&=\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}\left(f\right).
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Если в суммах рядов (53) сгруппировать члены с кратными периоду K номерами $k = m + nK$, $m = 0,\ldots,(K-1)$, $n = 0,\ldots$, то в силу их циклического характера можно по крайней мере в нижней комплексной полуплоскости $Im(f) < 0$ привести эти ряды к конечным суммам вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{k}\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}(f) = \sum_{m=0}^{K-1}\prod_{i=0}^{m}\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}(f)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left[\prod_{i=0}^{K-1}\chi_i(f)\right]^n = \frac{\sum_{m=0}^{K-1}\prod_{i=0}^{m}\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}(f)}{1-\prod_{i=0}^{K-1}\chi_i(f)}.$$

Подставляя эти выражения в (53), найдем $\Psi(f)$ в удобном для анализа виде:

$$\Psi(f) = \frac{\sum_{m=0}^{K-1}\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\prod_{i=0}^{m}\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}(f)}{1-\prod_{i=0}^{K-1}\chi_i(f)}. \quad (54)$$

Представление (54) полезно тем, что из него следует явное уравнение для полюсов $\Psi(f)$, которые, как известно, определяют многие черты поведения исходной функции $b(t)$ (44). Из (54) следует, что уравнение для полюсов есть

$$\prod_{i=0}^{K-1}\chi_i(f) = 1. \quad (55)$$

В частности, ввиду равенства характеристических функций в нуле единице, нуль всегда является корнем (55). Соответствующий этому корню вычет $\Psi(f)$ легко находится (см. (51)) и равен $1/2\pi j\bar{s}$. Отсюда, например, вытекает асимптотическое поведение $b(t) \to 1/\bar{s}$ при $t \to \infty$.

С помощью $\Psi(f)$ (54) может быть найден спектр второго момента $\overline{x(t')x(t'')}$:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x(0)x(t)}\exp(-2\pi jft)dt =$$

$$= \frac{\overline{A^2}}{\bar{s}} + \frac{\bar{A}^2}{\bar{s}}\int_{-\infty}^{+\infty}b(|t|)\exp(-2\pi jft)dt = \quad (56)$$

$$= \frac{\overline{A^2}}{\bar{s}} + \frac{\bar{A}^2}{\bar{s}}\{\Psi(-f-j0)+\Psi(f-j0)\}.$$

Из (56), в частности, следует, что $S(f)$ имеет в нуле особенность $\bar{A}^2\delta(f)/\bar{s}^2$, которая ведет к асимптотике $\overline{x(0)x(t)} \to \bar{A}^2/\bar{s}^2 = \bar{x}^2$ при $t \to \pm\infty$. В невырожденных случаях $\Psi(f)$, за исключением $f = 0$, не имеет особенностей на действительной оси (уравнение (55) имеет единственный действительный корень – нуль). Поэтому $\Psi(f) - 1/2\pi jf\bar{s}$ является регулярной функцией действительных частот и спектр $S(f)$ (56) можно представить в виде суммы сингулярной и регулярной частей:

$$S(f) = \frac{\overline{A^2}}{\bar{s}} + \frac{\bar{A}^2}{\bar{s}^2}\left\{\delta(f) + 2\mathrm{Re}\left[\bar{s}\Psi(f) - \frac{1}{2\pi jf}\right]\right\}. \quad (57)$$

Отметим здесь формальную аналогию (57) со спектром рекуррентного импульсного процесса, обсуждаемого в [13] (см. там же ссылки).

4. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ КОНКРЕТИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Уравнения (50) и (57) задают наиболее общий вид представлений второго момента $\overline{x(t')x(t'')}$ (9) точечного циклического процесса во временной и в частотной областях. При этом задающие процесс плотности распределения вероятностей $\hat{\rho}_0(s), \hat{\rho}_1(s), \ldots, \hat{\rho}_{K-1}(s)$, $s \geq 0$, могут иметь произвольный вид – любую форму, статистические моменты, включая моду, масштаб и т.д. Однако для конкретизации анализа в отношении определенного класса задач, необходимо, как это отмечалось в разд. 1, ввести некоторые элементы детализации модели, ограничив ее на определенные частные случаи. Одним из распространенных в приложениях частных случаев является ситуация, в которой плотности $\{\hat{\rho}_k(s)\}$ имеют одинаковую форму, но различаются расположением на полуоси $s \geq 0$. Формально, в данном случае центрированные статистические моменты всех $\hat{\rho}_k(s)$ предполагаются равными, за исключением математических ожиданий $\bar{s}_k$. Рассмотрим эту частную модель более подробно.

Будем считать, что все K плотностей распределения вероятностей циклического процесса имеют одинаковую форму $\hat{\rho}_0(s)$, но сдвинуты относительно нее на Δs_k: $\hat{\rho}_k(s) = \hat{\rho}_0(s - \Delta s_k)$, $k = 1,\ldots,K-1$. При этом будем считать, что сдвиги заданы явным образом в виде синусоидальной последовательности $\Delta s_k = \theta\sin(2\pi k/K)$. Математические ожидания введенных плотностей $\{\hat{\rho}_k(s)\}$ очевидно равны $\bar{s}_k = \bar{s}_0 + \theta\sin(2\pi k/K)$, где $\bar{s}_0$ – математическое ожидание $\hat{\rho}_0(s)$. Среднее значение и размах $\{\bar{s}_k\}$ составляют соответственно $\bar{s}_0$ и 2θ. Другими словами, параметр $\bar{s}_0$ совпадает с введенным ранее средним $\bar{s}$ интервалов между точками процесса, а величина $Q = 2\theta/\bar{s}_0$ может рассматриваться как параметр их вариабельности. Очевидно, что у введенного таким образом

набора плотностей все (центрированные) статистические моменты совпадают. В частности, у них совпадают стандартные отклонения β, удвоенную величину которых примем в качестве эффективной ширины каждой из $\{\hat{\rho}_k(s)\}$. Для обеспечения условия $\hat{\rho}_k(s) \equiv 0$ при $s < 0$ требуется, очевидно, условие $\beta + \theta \ll \bar{s}_0$, которое в дальнейшем будет предполагаться выполненным.

Попутно отметим, что ввиду K-периодичности синуса имеет место $\Delta s_{(k)\mathrm{mod}K} = \Delta s_k$, поэтому далее в обозначениях вида $\hat{\rho}_{(j+k)\mathrm{mod}K}(t)$, $\chi_{(l+i)\mathrm{mod}K}(f)$ и т.д. операцию $(\ldots)\mathrm{mod}K$ приведения индекса по модулю K можно в явном виде не выписывать.

С учетом введенных обозначений характеристические функции (51) плотностей распределения вероятностей $\hat{\rho}_k(s)$ в рассматриваемом случае представляются в виде

$$\chi_k(f) = \chi_0(f)\exp\{-2\pi jf\theta\sin(2\pi k/K)\},$$
$$\chi_0(f) = \int_0^{+\infty}\hat{\rho}_0(s)\exp(-2\pi jfs)ds. \tag{58}$$

Как следует из (54), в выражение для спектра $\Psi(f)$ характеристические функции (58) входят только как элементы следующих структурных блоков:

$$\Psi^{(m)}(f) = \frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\prod_{i=0}^{m}\chi_{l+i}(f) =$$
$$= \chi_0^{m+1}(f)\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\exp\left\{-2\pi jf\theta\sum_{i=0}^{m}\sin\left(2\pi\frac{l+i}{K}\right)\right\} = \tag{59}$$
$$= \chi_0^{m+1}(f)\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\exp\left(-2\pi jU_{m,K}f\theta\sin\left(2\pi\frac{l+m/2}{K}\right)\right),$$

где использовано обозначение $U_{m,K}$ для коэффициентов $\sin\left(\frac{\pi(m+1)}{K}\right)\Big/\sin\left(\frac{\pi}{K}\right)$, являющихся значениями полиномов Чебышева второго рода $U_m(x)$ в точке $x = \cos(\pi/K)$.

В частности, из полученного выражения ввиду $U_{m,K-1} = 0$, следует:

$$\Psi^{(K-1)}(f) = \prod_{i=0}^{K-1}\chi_i(f) = \chi_0^K(f),$$

что представляет собой входящее в знаменатель $\Psi(f)$ (54) блок-произведение характеристических функций.

Вводя временно обозначение $z_m = 2\pi U_{m,K}f\theta$ и воспользовавшись разложением $\exp(-jz_m\sin(\varphi))$ в ряд Фурье по φ (формула Якоби–Ангера, см. Приложение (П3)), найдем

$$\Psi^{(m)}(f) = \chi_0^{m+1}(f)\frac{1}{K}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{K-1}\exp\left(-jz_m\sin\left(2\pi\frac{l+m/2}{K}\right)\right) =$$
$$= \chi_0^{m+1}(f)\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(-1)^{pm}\mathcal{J}_{pK}(z_m),$$

где $\mathcal{J}_n(z)$ – функции Бесселя первого рода (см. Приложение (П1)).

Вводя спектральные окна $W_m^{(K)}(f)$:

$$W_m^{(K)}(f) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}(-1)^{pm}\mathcal{J}_{pK}(z_m) =$$
$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty}(-1)^{pm}\mathcal{J}_{pK}(2\pi U_{m,K}f\theta), \tag{60}$$

можно записать структурные блоки $\Psi^{(m)}(f)$ (59) в более компактном виде:

$$\Psi^{(m)}(f) = \chi_0^{m+1}(f)W_m^{(K)}(f). \tag{61}$$

Ввиду того, что при любых $n \neq 0$ значениями $\mathcal{J}_n(z)$ в нуле является нуль и только $\mathcal{J}_0(0) = 1$, общим свойством спектральных окон (60) при любых K и m является $W_m^{(K)}(0) = 1$. Частным свойством окон (60), выполняющимся при нечетных K и являющимся следствием известного свойства функций Бесселя $\mathcal{J}_{-n}(z) = (-1)^n\mathcal{J}_n(z)$, является то, что члены ряда в $W_m^{(K)}(f)$ (60) с нечетными номерами $\pm p$ взаимно сокращаются, а с четными – удваиваются, что позволяет в случае нечетного K несколько упростить выражение для $W_m^{(K)}(f)$ (60):

$$W_m^{(K)}(f) = \mathcal{J}_0(2\pi U_{m,K}f\theta) +$$
$$+ 2\sum_{q=1}^{+\infty}\mathcal{J}_{2qK}(2\pi U_{m,K}f\theta). \tag{62}$$

Отметим, что в этом случае все окна $W_m^{(K)}(f)$ выражаются через $W_0^{(K)}(f)$ с помощью масштабного преобразования частоты:

$$W_m^{(K)}(f) = W_0^{(K)}(U_{m,K}f).$$

Масштаб $U_{m,K}$ изменяется от 1 до $\sim K/\pi$ при изменении m от 0 до $(K-1)/2$ и обратно от $\sim K/\pi$ до 1 при изменении m от $(K-1)/2$ до $K-2$. При $m = K-1$ масштабный множитель $U_{K-1,K} = 0$ и $W_{K-1}^{(K)}(f) = W_0^{(K)}(0) \equiv 1$.

Во избежание громоздких выражений ниже будет рассматриваться только случай нечетных K, в котором все $W_m^{(K)}(f)$ являются масштабированными версиями $W_0^{(K)}(f)$.

В наиболее интересном случае $K \gg 1$, ряд из функций Бесселя (62) можно приблизить его конечным отрезком исходя из нижеприведенных оценок. На основе оценки $|\mathcal{J}_n(z)| \le |z/2|^n/n!$ (см. Приложение (П10)) можно, воспользовавшись формулой Стирлинга, выписать следующую верхнюю границу $\mathcal{J}_{2qK}(z)$, $q \ge 1$ для интервала $|z| < M$:

$$|\mathcal{J}_{2qK}(z)| \le \frac{1}{(2qK)!}|z/2|^{2qK} < \\ < \frac{1}{\sqrt{4\pi qK}}\left|\frac{ez}{4qK}\right|^{2qK} < \frac{1}{2\sqrt{\pi qK}}\left|\frac{M}{qK}\right|^{2qK}.$$

Если положить $M \sim K\hat{q}$, то приведенная оценка принимает вид

$$|\mathcal{J}_{2qK}(z)| < \frac{\exp(2qK\ln(\hat{q}/q))}{2\sqrt{\pi qK}} < \\ < \frac{\exp(-2K(q-\hat{q}))}{2\sqrt{\pi qK}},$$

откуда следует, что при больших K слагаемыми с $q \ge \hat{q}$ в (62) на интервале $|z| < K\hat{q}$ можно пренебречь и вместо бесконечных рядов использовать для $W_m^{(K)}(f)$ их конечные отрезки. Как отмечалось выше, в связи с вопросами о масштабном подобии, при больших K максимальный (при $m = (K-1)/2$) диапазон изменений $z = 2\pi U_{m,K} f\theta$ в $\sim K/\pi$ раз больше существенного диапазона $2\pi f\theta$ или в $\sim 2K\theta$ раз больше существенного диапазона изменений частоты f. Последний определяется полушириной $\chi_0(f)$ и в соответствии с (51) равен обратной полуширине $\hat{\rho}_0(s)$, т.е. β^{-1}. Другими словами, необходимо $M \sim 2K\theta/\beta$ и, соответственно, $\hat{q} \sim 2\theta/\beta$. Обрывая соответствующий ряд на членах с $q = \hat{q} - 1$, получим следующую аппроксимацию для $W_0^{(K)}(f)$ (62) на интервале $|f| \le \beta^{-1}$:

$$\hat{W}_m^{(K)}(f) = \hat{W}_0^{(K)}(U_{m,K}f) = \\ = \mathcal{J}_0(2\pi U_{m,K}f\theta) + 2\sum_{q=1}^{\hat{q}-1}\mathcal{J}_{2qK}(2\pi U_{m,K}f\theta). \quad (63)$$

Подставляя полученные структурные блоки $\Psi^{(m)}(f)$ (61) в спектр $\Psi(f)$ (54), получим следующее его приближение, содержащее конечное число слагаемых в числителе/знаменателе:

$$\Psi(f) = \frac{\sum_{m=0}^{K-1}\chi_0^{m+1}(f)\hat{W}_0^{(K)}(U_{m,K}f)}{1-\chi_0^K(f)}. \quad (64)$$

Отметим, что при любом K, при $\theta \to 0$ рассматриваемый циклический точечный процесс вырождается в рекуррентный, а спектр (64) – в выражение:

$$\Psi(f) = \frac{\chi_0(f)}{1-\chi_0(f)}, \quad (65)$$

которое совпадает с приведенным в [16] спектром стационарных рекуррентных процессов.

Несколько примеров $\Psi(f)$ (64) для $K = 7$ и плотности $\hat{\rho}_0(s)$ гауссовской формы с $\bar{s}_0 = 1$, $\beta = 0.02$ при нескольких значениях параметра вариабельности $Q = 2\theta/\bar{s}_0$ представлены на рис. 1 (вырожденный случай $Q = 0$ соответствует рекуррентному процессу с теми же $K, \bar{s}_0, \beta$).

Поскольку, как отмечалось ранее, для действительных $f \ne 0$ имеет место $|\chi_0(f)| < 1$, можно разложить знаменатель (64) в ряд по $\chi_0^K(f)$ и получить разложение спектра $\Psi(f)$ по степеням $\chi_0(f)$:

$$\Psi(f) = \sum_{m=0}^{+\infty}\hat{W}_0^{(K)}(|U_{m,K}|f)\ \chi_0^{m+1}(f), \quad (66)$$

где использована формальная периодичность $|U_{m,K}| = U_{(m)\mathrm{mod}K,K}$ по m.

Взяв от (66) обратное преобразование Фурье, получим согласно определению $\Psi(f)$ (53) функцию $b(t)$, являющуюся не сингулярной частью второго момента $\overline{x(t')x(t'')}$ (50) точечного циклического процесса:

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(f)\exp(2\pi jft)df = \\ = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{|U_{m,K}|}\Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|) * R_0^{(m)}(t), \quad (67)$$

где $R_0^{(m)}(t)$, так же как и $C_j^{(k)}(t)$ (22), – m-кратная свертка, но только плотности $\hat{\rho}_0(s)$ с собой. По существу, $R_0^{(m)}(t)$ представляет собой плотность распределения суммы $(m+1)$ независимых, одинаково распределенных с $\hat{\rho}_0(s)$ случайных интервалов. В соответствии с этим $R_0^{(m)}(t)$ в (67) имеют форму положительных пиков ширины $\sim 2\sqrt{m+1}\beta$, расположенных в точках $t_{m+1} = (m+1)\bar{s}_0$. При увеличении номера m форма пиков стремится к форме гауссовых распределений.

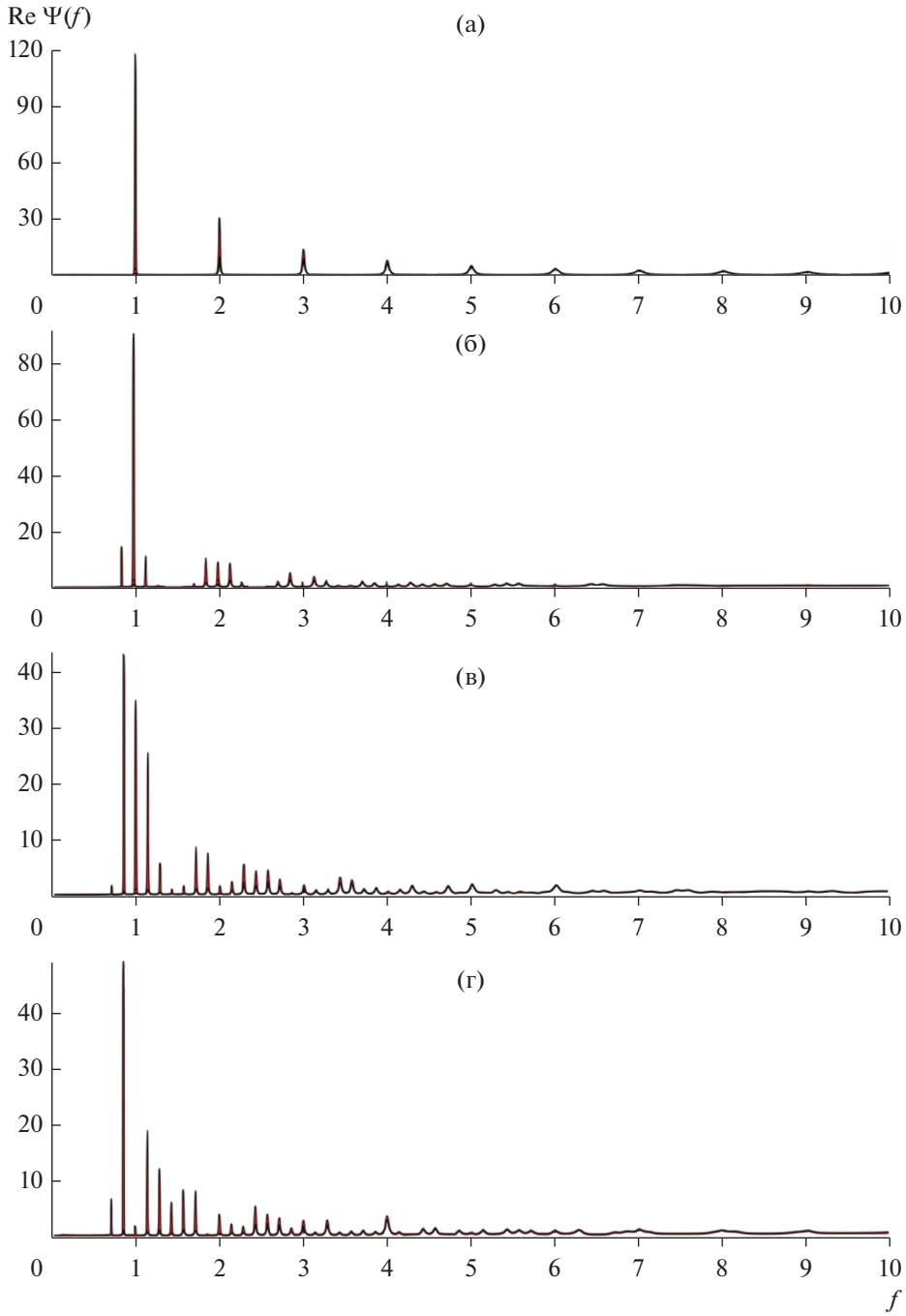

Рис. 1. Примеры спектров $\Psi(f)$ (64) для $K = 7$, $\overline{s}_0 = 1$, $\beta = 0.02$ и различных значений параметра вариабельности $Q = 2\theta/\overline{s}_0$: $Q = 0$ (а), 0.2 (б), 0.4 (в) и 0.6 (г).

В выражении (67) звездочка * обозначает операцию свертки $R_0^{(m)}(t)$ с масштабированным на $|U_{m,K}|$ ядром $\Pi_\theta^{(K)}(\xi)$, представляющим собой обратное преобразование Фурье от спектрального окна $\hat{W}_0^{(K)}(f)$:

$$\Pi_\theta^{(K)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{W}_0^{(K)}(f)\exp(2\pi jf\xi)\,df = \frac{1}{2\pi\theta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0(\zeta)\exp(j\zeta\xi/\theta)\,d\zeta + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{q=1}^{\hat{q}-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_{2qK}(\zeta)\exp(j\zeta\xi/\theta)\,d\zeta\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\theta^2-\xi^2}}\left\{1 + 2\sum_{q=1}^{\hat{q}-1}(-1)^q T_{2qK}\left(\frac{\xi}{\theta}\right)\right\}, \quad |\xi| < \theta, \tag{68}$$

где $T_{2qK}(\xi)$ – многочлены Чебышева первого рода (см. Приложение (П7)).

Замечательным результатом является то, что ядро $\Pi_\theta^{(K)}(\xi)$ (68) есть финитная функция: его значения при $|\xi| \le \theta$ задаются выражением (68), а вне этого отрезка ядро тождественно обращается в нуль. Несколько примеров ядер $\Pi_\theta^{(K)}(\xi)$ и их преобразований Фурье $\hat{W}_0^{(K)}(f)$ для $K = 7$ и $\theta = 0.1$ при разных значениях параметра $\hat{q} = 2\theta/\beta$ приведены на рис. 2.

Согласно приведенному выше анализу, слагаемые ряда $b(t)$ (67) представляют собой свертки $R_0^{(m)}(t)$ с финитными функциями $|U_{m,K}|^{-1} \times \times \Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|)$, носители которых составляют отрезки $(-\theta|U_{m,K}|;\theta|U_{m,K}|)$. Результирующий ряд (67) по структуре отчасти напоминает ряд вырожденного (при $\theta \to 0$) рекуррентного процесса с плотностью распределения интервалов $\hat{\rho}_0(s)$, для которого согласно (65) $\tilde{b}(t)$ имеет вид

$$\tilde{b}(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} R_0^{(m)}(t). \tag{69}$$

Ряд $\tilde{b}(t)$ (69) представлен эквидистантно расположенными в точках $t_{m+1} = (m+1)\overline{s}_0$ пиками с монотонно возрастающей шириной $\sim 2\sqrt{m+1}\beta$, как это было отмечено выше. Ввиду условия $\beta/\overline{s}_0 \ll 1$ пики с небольшими номерами m будут изолированными. Они начнут заметно перекрываться начиная с номеров $m \sim \hat{m} = (\overline{s}_0/2\beta)^2 \gg 1$, постепенно формируя постоянный асимптотический уровень $\sim 1/\overline{s}_0$ на бесконечности.

Ряд общего циклического процесса $b(t)$ (67) также содержит пики вида $R_0^{(m)}(t)$, но только при $m = pK - 1$, в точках $t_{m+1} = pK\overline{s}_0$, $p = 1, 2, \ldots$, ввиду $U_{m,K} \to 0$ и, соответственно, $|U_{m,K}|^{-1} \times \times \Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|) \to \delta(t)$. Однако в отличие от (69) в промежутках между этими пиками ($m \ne pK - 1$) соответствующие пики $R_0^{(m)}(t)$ из $b(t)$ (67) будут уширены на величину $\sim 2\theta|U_{m,K}|$ и деформированы за счет сглаживания с ядром $|U_{m,K}|^{-1}\Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|)$ (см. рис. 2), что при вариабельности интервалов $2\theta/\overline{s}_0 > \pi K^{-1}$ приведет к их перекрытию еще до первого неискаженного пика $R_0^{(K-1)}(t)$ (в основном в середине интервала $(0; K\overline{s}_0)$). Кроме того, деформация приводит к разбиению каждого из $R_0^{(m)}(t)$ пиков на несколько (вплоть до K) локальных пиков, что при их перекрытии ведет к усложнению картины $b(t)$ в промежутках между точками $t_{m+1} = pK\overline{s}_0$. Ряд примеров $b(t)$ (67) для $K = 7$ и плотности $\hat{\rho}_0(s)$ гауссовской формы с $\overline{s}_0 = 1$, $\beta = 0.02$ при нескольких значениях параметра вариабельности $Q = 2\theta/\overline{s}_0$ представлены на рис. 3 (вырожденный случай $Q = 0$ соответствует рекуррентному процессу с теми же $K, \overline{s}_0, \beta$).

5. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБОВ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИКЛИЧЕСКИХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Возвращаясь к исходной модели фрагмента импульсного сигнала $z(t')$ (1) и его статистическим моментам $m_t(t')$ и $R_t(t',t'')$ (5), подставим в них найденные выше выражения для $\overline{x(t')}$ (35) и $\overline{x(t')x(t'')}$ (50):

$$\begin{gathered} m_t(t') = \overline{z(t')} = \frac{\overline{A}}{\overline{s}} h(t'-t)\int g(t')dt' = \frac{\overline{A}\gamma(0)}{\overline{s}} h(t'-t), \\ R_t(t',t'') = \overline{z(t')z(t'')} = \\ = \frac{1}{\overline{s}} H(t'-t, t''-t)\times \\ \times\left\{\overline{A^2}\int G(t'-t''', t''-t''')dt''' + \right. \\ \left. + \overline{A}^2\iint G\left(t'-t''', t''-t^{\nu}\right) b\left(\left|t'''-t^{\nu}\right|\right)dt'''dt^{\nu}\right\}. \end{gathered} \tag{70}$$

В (70) для интеграла от формы импульса $g(t')$ в $m_t(t')$ использовано значение частотной характеристики $\gamma(f)$ (3) в нуле. Заметим, что перед формированием по измеренному сигналу некоторых оценок или представлений, подобных (70), он обычно подвергается предобработке. Последняя, как правило, включает в себя некоторую предварительную фильтрацию, обеспечивающую подавление медленных составляющих сигнала, в частности устранение постоянного уровня. Несложно показать, что в модели (1) результаты подобной фильтрации скажутся также на изменении формы импульсов – новая форма $g(t')$ будет представлять из себя свертку старой формы с импульсной реакцией предварительного фильтра. В частотной области эта операция соответствует перемножению спектров, поэтому ввиду режекции низких частот предварительным фильтром будем иметь $\gamma(0) = 0$. В силу этого обстоятельства согласно (70) будем иметь $m_t(t') = \overline{z(t')} \equiv 0$, т.е. главным источником информации о сигнале $z(t')$ (1) в описанной ситуации становится $R_t(t',t'')$.

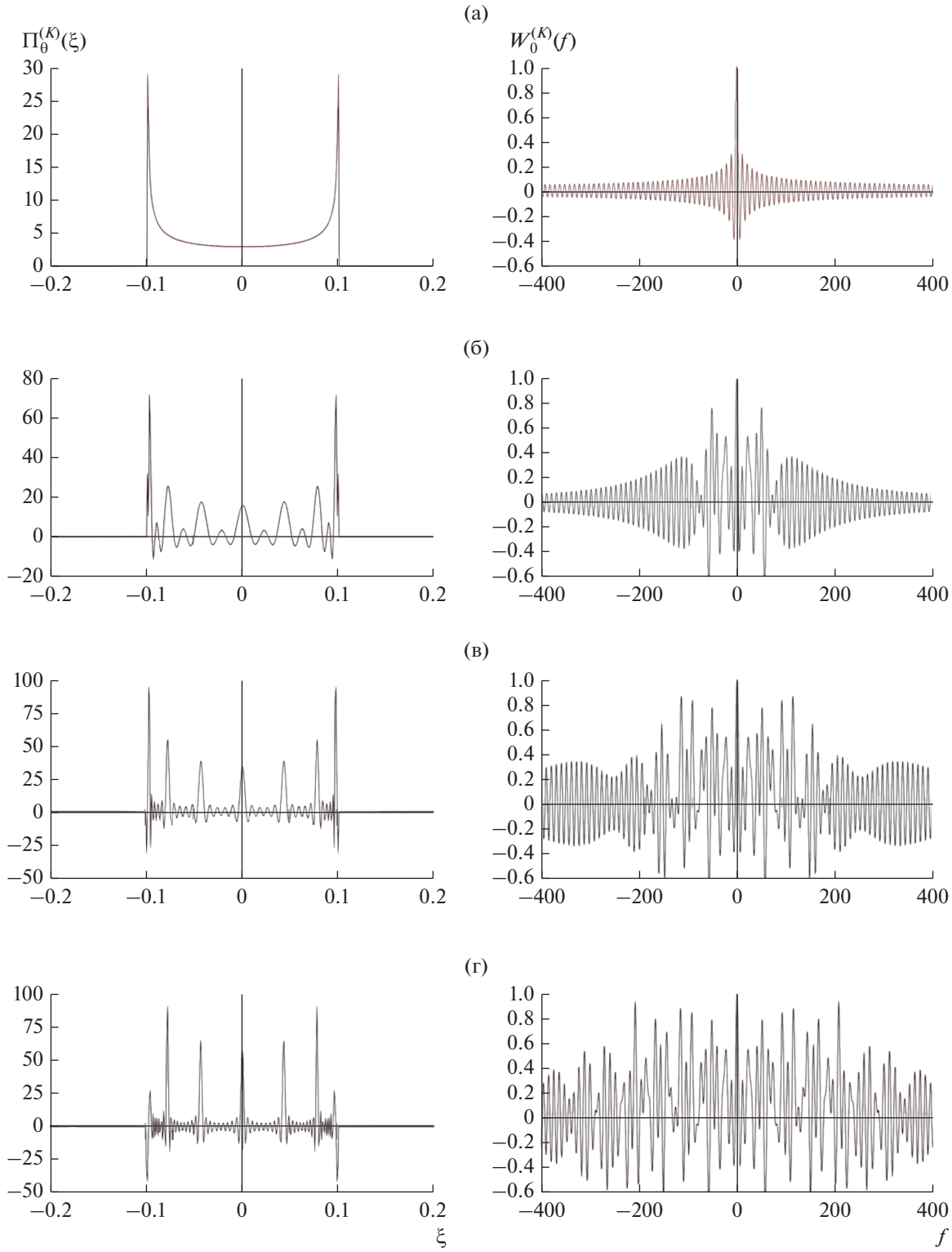

Рис. 2. Примеры ядер $\Pi_\theta^{(K)}(\xi)$ (68) (слева) и их спектров (справа) для $K = 7$, $\theta = 0.1$ и различных степеней аппроксимации, задаваемых параметром $\hat{q} = 2\theta/\beta$: $\hat{q} = 1$ (а), 3 (б), 6 (в) и 10 (г).

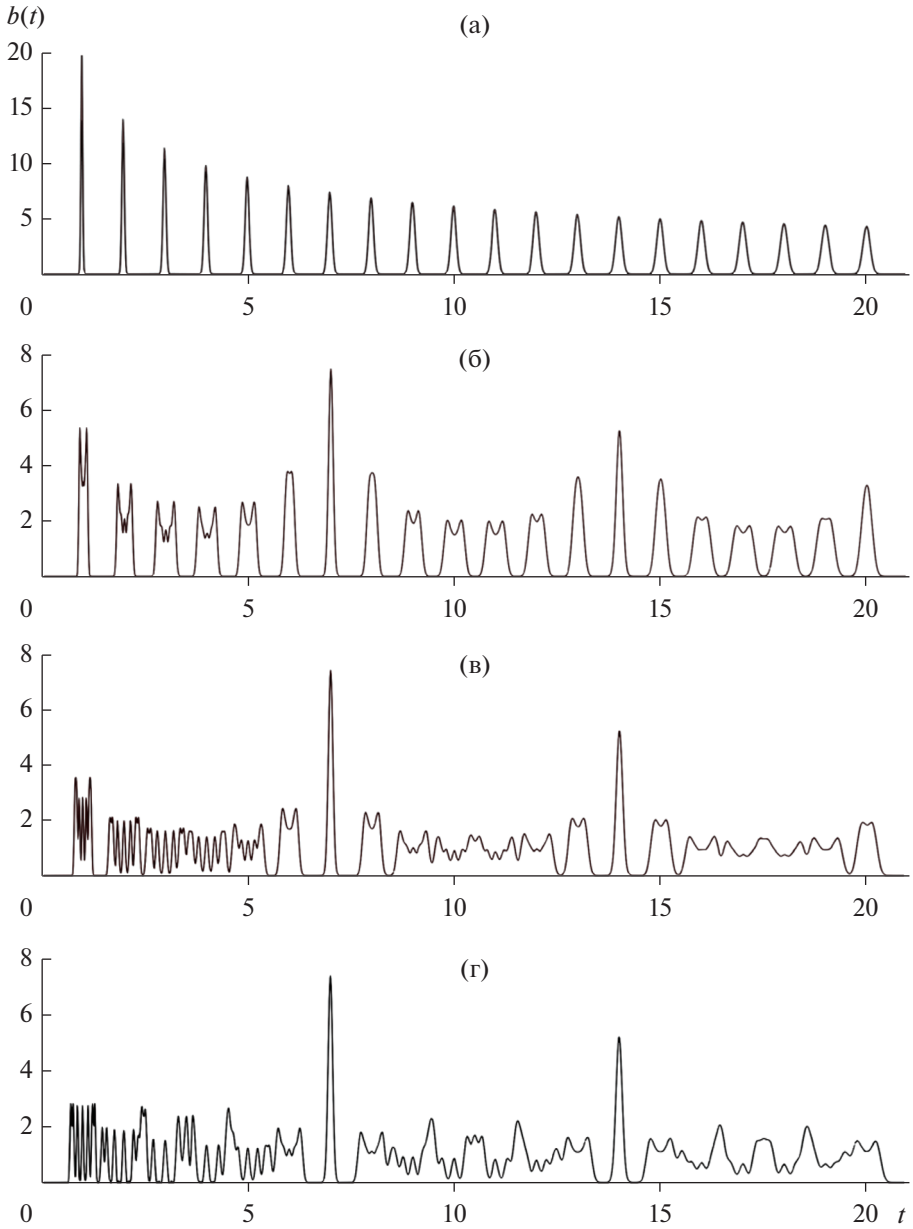

Рис. 3. Примеры функций $b(t)$ (67) для $K = 7$, $\bar{s}_0 = 1$, $\beta = 0.02$ и различных значений параметра вариабельности $Q = 2\theta/\bar{s}_0$: $Q = 0$ (а), 0.2 (б), 0.4 (в) и 0.6 (г).

Для того чтобы наглядно связать структуру $R_t(t',t'')$ с выявленной структурой вторых моментов подлежащих точечных циклических процессов $x(t')$, перейдем от переменных t',t'' к линейно связанным с ними T,τ:

$$\begin{cases} T = \dfrac{t' + t''}{2} \\ \tau = t' - t'' \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t' = T + \dfrac{\tau}{2} \\ t'' = T - \dfrac{\tau}{2} \end{cases}. \qquad (71)$$

Роль весового окна $H(t',t'') = h(t')h(t'')$ в новых переменных легче оценить, если хотя бы приближенно разделить в нем переменные T,τ: $H(t',t'') \approx U(T)u(\tau)$. Это можно сделать точно, например, в случае, когда окно $h(t')$ имеет гауссову форму:

$$h(t') = \exp\{-t^2/2\Sigma^2\} \leftrightarrow H\left(T + \frac{\tau}{2}, T - \frac{\tau}{2}\right) = \\ = \exp\{-T^2/\Sigma^2\}\exp\{-\tau^2/4\Sigma^2\}.$$

В новых переменных представление сигнала его вторым моментом $R_t(t',t'')$ (70) записывается в виде

$$\hat{R}_t(T,\tau) = R_t\left(T+\frac{\tau}{2}, T-\frac{\tau}{2}\right) = \\ = \frac{1}{\bar{s}}U(T-t)u(\tau)\times \\ \times\left\{\overline{A^2}\Gamma(\tau)+\overline{A^2}\int\Gamma(\tau-\tau')b(|\tau'|)d\tau'\right\}, \quad (72)$$

где введена "автоковариация" формы импульса сигнала $\Gamma(\tau)$ – квадратичная по $g(t')$функция:

$$\Gamma(\tau) = \int G(\tau+t',t')dt' = \\ = \int g(\tau+t')g(t')dt' = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}|\gamma(f)|^2\exp(2\pi jf\tau)df. \quad (73)$$

Как отмечалось выше, частотная характеристика $\gamma(f)$ имеет ширину $\Omega \sim 1/\sigma$. То же относится и к квадрату ее огибающей $|\gamma(f)|^2$. Соответственно, эффективная ширина $\Gamma(\tau)$ (73) совпадает по порядку величины с длительностью импульса ~2σ – с наименьшим временным масштабом сигнала $z(t')$ (1). Наоборот, функции $U(T)$ и $u(\tau)$, факторизующие $H(t',t'')$, имеют эффективную ширину ~2Σ, соответствующую наибольшему временному масштабу. Учитывая эти соотношения и тот факт, что $u(0)=1$, запишем окончательное выражение для $\hat{R}_t(T,\tau)$ (72):

$$\hat{R}_t(T,\tau) = \frac{1}{\bar{s}}U(T-t)\times \\ \times\left\{\overline{A^2}\Gamma(\tau)+\bar{A}^2u(\tau)\int\Gamma(\tau-\tau')b(|\tau'|)d\tau'\right\}. \quad (74)$$

Как следует из (74), в данном "диагональном" представлении переменные T и τ разделяются. Это позволяет связать структуру двумерного представления $\hat{R}_t(T,\tau)$ на интервале анализа $(t-\Sigma, t+\Sigma)$ со структурой одномерного локального-стационарного представления $\hat{r}_t(\tau)$:

$$\hat{r}_t(\tau) = \frac{1}{\bar{s}}\left\{\overline{A^2}\Gamma(\tau)+\bar{A}^2u(\tau)\int\Gamma(\tau-\tau')b(|\tau'|)d\tau'\right\}. \quad (75)$$

Как следует из (74), в ~Σ-окрестности момента времени анализа t представление сигнала $\hat{R}_t(T,\tau)$ с точностью до множителя $U(T-t)\approx 1$ определяется функцией $\hat{r}_t(\tau)$ (75), непосредственно связанной с функцией $b(t)$ (44), (67), задающей структуру второго момента точечного процесса $x(t')$. Именно, с точностью до слагаемого $\overline{A^2}\Gamma(\tau)/\bar{s}$ представление $\hat{r}_t(\tau)$ есть результат последовательных линейных операций свертки с ядром $\Gamma(\tau)$ (73) и взвешивания с окном $\bar{A}^2u(\tau)/\bar{s}$ над $b(|t|)$. Другими словами, $\hat{r}_t(\tau)$ представляет собой симметричный относительно нуля фрагмент длительности ~2Σ, сглаженной с окном (ядром) длительности ~2σ функции $b(|t|)$. Отметим, что при этом согласно (73) вся требуемая информация о форме импульса сигнала $g(t')$ содержится в огибающей ее частотной характеристики $|\gamma(f)|$ (в АЧХ). В частотной области соответствующая интерпретация (75) следующая: спектр $\hat{r}_t(\tau)$ с точностью до подстилающей $\overline{A^2}|\gamma(f)|^2/\bar{s}$ представляет собой взвешенную с окном $\bar{A}^2|\gamma(f)|^2/\bar{s}$, сглаженную с ядром $\nu(f)$ длительности ~$1/\Sigma$ регулярную часть спектра $S(f)$ (57), где $\nu(f)$ – частотная характеристика $u(\tau)$. Отметим, что в отличие от симметричного унимодального ядра $\nu(f)$ весовое окно и кратная ему подстилающая – пропорциональные $|\gamma(f)|^2$ функции, ввиду отмеченного условия $\gamma(0)=0$, имеют максимумы в ненулевых симметричных частотах, определяемых колебательной составляющей формы импульса сигнала $g(t')$.

Более детальная характеризация структуры $\hat{R}_t(T,\tau)$, вытекающая из анализа $\hat{r}_t(\tau)$ (75), может быть осуществлена в рассмотренном выше частном случае циклических процессов с одинаковыми по форме, но различно расположенными на полуоси $s\geq 0$ плотностями $\{\hat{\rho}_k(s)\}$. Детализация структуры связана здесь с наличием у $b(|t|)$ дополнительных (помимо $\bar{s}$) временных параметров β – полуширины каждой из $\{\hat{\rho}_k(s)\}$, и θ – половины размаха их расположений $\{s_k\}$. В наиболее интересном, рассмотренном выше случае, $\beta+\theta \ll \bar{s}$, особенности структуры $\hat{r}_t(\tau)$ (75) будут определяться соотношением между σ и β,θ, с одной стороны, и между самими β и θ – с другой.

Именно в случае $\beta>\theta$ циклический процесс по существу, как это выше отмечалось ($\theta\to 0$), вырождается в рекуррентный со структурой функции $b(t)$, задаваемой выражением (69). При этом представление $\hat{r}_t(\tau)$(75) принимает следующий вид:

$$\hat{r}_t(\tau) = \frac{1}{\bar{s}}\left\{\overline{A^2}\Gamma(\tau)+\bar{A}^2u(\tau)\sum_{m=0}^{+\infty}R^{(m)}(t)\right\}, \quad (76)$$

где $R^{(m)}(t)$ являются результатом свертки $R_0^{(m)}$ и $\Gamma(\tau)$ (73). Другими словами, при $\beta>\sigma$ практиче-

ски $R^{(m)}(t) \approx R_0^{(m)}$ и второе, содержательное слагаемое в $\hat{r}_t(\tau)$ (76) имеет структуру второго момента связанного рекуррентного точечного процесса. В противном случае $\beta < \sigma$, пики $R^{(m)}(t)$ до номеров $m \sim (\sigma/\beta)^2$ практически имеют форму $\Gamma(t)$ и только затем $R^{(m)}(t) \approx R_0^{(m)}$. Отметим также, что за счет весового окна $u(\tau)$ на самом деле количество пиков $R^{(m)}(t)$ в $\hat{r}_t(\tau)$ конечно и равно $\sim\Sigma/\overline{s}$.

В другом случае $\beta < \theta$, подставляя выражение $b(t)$ (67) в $\hat{r}_t(\tau)$(75), получим

$$\hat{r}_t(\tau) = \frac{1}{\overline{s}}\left\{\overline{A^2}\Gamma(\tau) + \overline{A}^2 u(\tau)\sum_{m=0}^{+\infty}\Delta_\theta^{(K)}(t) * R_0^{(m)}(t)\right\}, \quad (77)$$

где $\Delta_\theta^{(K)}(t)$ является сверткой финитных ядер $|U_{m,K}|^{-1}\Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|)$ и $\Gamma(\tau)$ (73). При $\theta > \sigma$ сглаженные ядра $\Delta_\theta^{(K)}(t)$ практически совпадают с $|U_{m,K}|^{-1}\Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|)$ (небольшая модификация может касаться коррекции величины $\hat{q}$ в (63) при $\beta < \sigma$: вместо $2\theta/\beta$ целесообразно использовать $2\theta/\sigma$). При $\theta < \sigma$ функция автоковариации $\Gamma(\tau)$ полностью размоет структуру ядер $|U_{m,K}|^{-1}\Pi_\theta^{(K)}(t/|U_{m,K}|)$ и данный случай будет практически не отличим от вырожденного случая $\beta > \theta$ при $\beta < \sigma$. Повторим еще раз, что здесь, так же как и ранее, за счет весового окна $u(\tau)$ количество пиков $\Delta_\theta^{(K)}(t) * R_0^{(m)}(t)$ в $\hat{r}_t(\tau)$ конечно и равно $\sim\Sigma/\overline{s}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценивая итоги изложенных выше рассмотрений, хотелось бы отметить следующее. Как нам представляется, разработка L_2 теории (стационарных) циклических точечных процессов с ограниченным последействием может считаться на данный момент полностью выполненной. Именно, для общих циклических процессов в явном виде получены аналитические выражения первого и второго статистических моментов, также получена аналитическая формула спектра второго момента. Для локального описания циклического точечного процесса найдены его одно- и двумерные плотности распределения моментов времени точек (событий) процесса. Определены подобные *функции восстановления* в теории рекуррентных процессов, структурные функции теории циклических точечных процессов, такие как $C_j^{(k)}(t)$ (22), $D_j^{(k)}(t)$ (29), $c_j(t), d_j(t)$ (42) и $b(t)$ (44).

Другими словами, полностью разработан инструментарий для исследования в рамках L_2 теории циклических точечных процессов практически всех теоретических аспектов, известных в рамках соответствующей теории рекуррентных процессов.

Приведенный в работе детальный анализ важного частного случая циклических процессов – случая, в котором плотности распределения длительностей интервалов имеют одинаковую форму, но различаются расположениями, – открывает дорогу к применению разработанной теории в целом ряде приложений. В частности, отдельные элементы теории ранее были использованы для анализа сигналов ЭКГ на предмет оценки вариабельности сердечного ритма. В работах [8–11] изложен ряд результатов этих исследований, касающиеся дифференциации ЭКГ-записей без существенных аритмий или каких-либо других нарушений сердечного ритма и записей пациентов с гипертонической болезнью и высоким риском развития сосудистых событий. Полученные результаты позволяют выразить осторожный оптимизм также и в отношении перспектив развития прикладных аспектов разработанной теории.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сведения о функциях Бесселя первого рода $\mathcal{J}_n(z)$, целого порядка $n = 0, \pm 1, \ldots$

Функции Бесселя первого рода $\mathcal{J}_n(z)$ при целых значениях $n = 0, \pm 1, \ldots$ могут быть определены несколькими разными способами [14]. Помимо того, что они определяются как специальные решения одноименного дифференциального уравнения, $\mathcal{J}_n(z)$ могут быть определены рядом гипергеометрического типа:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n(z) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{-1^m}{m!}\frac{n!}{(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} = \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n\left[1 - \frac{1}{(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \ldots\right],\end{aligned} \quad (\text{П1})$$

либо как коэффициенты при степенях w в разложении производящей функции:

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left[w - \frac{1}{w}\right]\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_n(z)\, w^n. \quad (\text{П2})$$

Подстановка $w = \exp[j\varphi]$ в (П2) приводит к формуле Якоби–Ангера (к разложению в ряд Фурье $\exp[jz\sin(\varphi)]$):

$$\exp[jz\sin(\varphi)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_n(z)\exp(jn\varphi). \quad (\text{П3})$$

Из формулы (П3) следует, в частности, соотношение

$$\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\exp\left[jz\sin\left(\frac{2\pi}{K}\left(l-\frac{r}{2}\right)\right)\right]=$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_n(z)\exp\left[-\pi j\frac{n}{K}r)\right]\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1}\exp\left[2\pi j\frac{n}{K}l\right]=$$
$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(-1)^{pr}\mathcal{J}_{Kp}(z). \qquad (\text{П}4)$$

Из (П3) также следует формула интеграла Бесселя:

$$\int_0^{2\pi}\exp[jz\sin(\varphi)-jm\varphi]\,d\varphi=$$
$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_n(z)\int_0^{2\pi}\exp(j(n-m)\varphi)\,d\varphi= \qquad (\text{П}5)$$
$$=2\pi\mathcal{J}_m(z).$$

В свою очередь, из (П5) следуют интегральные представления вида

$$\mathcal{J}_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[jz\sin(\varphi)-jm\varphi]\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp[jz\sin(\varphi)]\left\{\exp[-jm\varphi]+(-1)^m\exp[jm\varphi]\right\}d\varphi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp[jz\sin(\varphi)](j)^m\cos\left[m\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]d\varphi= \qquad (\text{П}6)$$
$$=\frac{(j)^m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\exp[jzy]}{\sqrt{1-y^2}}\cos\left[m\left(\arcsin(y)+\frac{\pi}{2}\right)\right]dy=$$
$$=\frac{(-j)^m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\exp[jzy]}{\sqrt{1-y^2}}T_m(y)\,dy,$$

где использовано, что $\cos[m\arccos(y)]=T_m(y)$ – полиномы Чебышева первого рода. Взяв от обеих частей (П6) преобразование Фурье, получим фурье-образ $\mathcal{J}_m(z)$ (см. также [15]):

$$F[\mathcal{J}_m(z)](x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[jxz]\mathcal{J}_m(z)\,dz=2(-j)^m\int_{-1}^{1}\delta(x+y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}T_m(y)\,dy=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(j)^m\,2T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} & \text{для}\quad |x|<1,\\ 0 \quad \text{для} & |x|>1\,.\end{cases} \qquad (\text{П}7)$$

Из (П5) для $\mathcal{J}_0(2z\sin(\psi))$ следует:

$$\mathcal{J}_0(2z\sin(\psi))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[jz2\sin(\psi)\sin(\varphi)]\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[jz\cos(\varphi-\psi)]\exp[-jz\cos(\varphi+\psi)]\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[jz\sin\left(\varphi-\psi+\frac{\pi}{2}\right)\right]\exp\left[-jz\sin\left(\varphi+\psi+\frac{\pi}{2}\right)\right]d\varphi= \qquad (\text{П}8)$$
$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_p(z)\mathcal{J}_q(z)\exp[-\psi(p+q)]\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[j\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)(p-q)\right]d\varphi=$$
$$=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\mathcal{J}_p^2(z)\exp[-2p\psi].$$

Используя в (П6) формулу Родрига для полиномов Чебышева $T_m(y) = (-1)^m \frac{\sqrt{\pi}}{2^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \times$ $\times \sqrt{1-y^2}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(1-y^2\right)^{m-\frac{1}{2}}$, получим интеграл Пуассона:

$$\mathcal{J}_m(z) = \frac{(-j)^m}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\exp[jzy]}{\sqrt{1-y^2}}T_m(y)\,dy = \frac{(j)^m}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\exp[jzy]\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(1-y^2\right)^{m-\frac{1}{2}}dy =$$

$$= (j)^m\frac{(-1)^m}{2^m\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}[jz]^m\int_{-1}^{1}\exp[jzy]\left(1-y^2\right)^{m-\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^m\int_{-1}^{1}\exp[jzy]\left(1-y^2\right)^{m-\frac{1}{2}}dy = \qquad (П9)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^m\int_{0}^{1}\cos[zy]\left(1-y^2\right)^{m-\frac{1}{2}}dy.$$

Из интеграла Пуассона (П9) следует следующая оценка для $|\mathcal{J}_m(z)|$:

$$|\mathcal{J}_m(z)| < \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{|z|}{2}\right)^m\int_{0}^{1}\left(1-y^2\right)^{m-\frac{1}{2}}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{|z|}{2}\right)^m\int_{0}^{1}t^{m-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{|z|}{2}\right)^m B\left(m+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \qquad (П10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{|z|}{2}\right)^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{|z|}{2}\right)^m = \frac{1}{m!}\left(\frac{|z|}{2}\right)^m.$$

Сравнивая (П10) и (П1), можно сделать вывод, что $\mathcal{J}_m(z)$ на всей действительной оси не превосходит по абсолютной величине модуля своего первого члена в разложения в ряд по степеням аргумента z.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-02108 мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Napolitano A.* Cyclostationary Processes and Time Series. Theory, Applications, and Generalizations. Elsevier, 2019.
2. *Хинчин А.Я.* // Тр. МИАН СССР. 1955. Т. 49. С. 3.
3. *Большаков И.А.* Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума. М.: Сов. Радио, 1969.
4. *Cox D.R., Miller H.D.* The Theory of Stochastic Processes. L.: Methuen & Co LTD, 1970.
5. *Barbieri R., Matten E.C., Alabi A.A., Brown E.N.* // American J. Physiol. Heart Cicr. Physiol. 2005. V. 288. № 1. P. H424.
6. *Serfozo R.* Basics of Applied Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
7. Анциперов В.Е. // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 6. http://jre.cplire.ru/jre/jun15/8/text.pdf.
8. *Анциперов В.Е.* // Тез. докл. Второй российской конф. с международным участием “Физика – наукам о жизни”. СПб.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 2017. С. 61.
9. Анциперов В.Е. // Сб. трудов XI Всерос. конф. “Радиолокация и радиосвязь”. М., 2017. С. 359.
10. *Antsiperov V.* // Биомед. радиоэлектроника. 2018. Т. 7. С. 61.
11. *Анциперов В.Е.* // Физ. основы приборостроения. 2018. Т. 7. № 4. С. 70. https://doi.org/10.25210/jfop-1804-070077
12. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
13. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции / Пер. с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1974. Т. 2.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. Т. 1.
16. Bartlett M.S. // Proc. Fifth Berkeley Symp. Mathem. Statistics and Probability. Berkeley: Univ. of California Press., 1967. V. 3. P. 135.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 798–803

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 551.463.621.391

ВЛИЯНИЕ ДЕКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФАКТОРОВ НА ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ РАЗНОСТИ ФАЗ СИГНАЛОВ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

© 2020 г. В. И. Каевицер[a], В. М. Смольянинов[a], И. В. Смольянинов[a, *]

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация*

**E-mail: ilia159@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.
После доработки 26.06.2019 г.
Принята к публикации 01.07.2019 г.

На основе общей модели сигналов, рассеянных шероховатой поверхностью морского дна, разработаны соотношения для оценки погрешностей измерения интерферометрическим гидролокатором бокового обзора (ИГБО) углов прихода эхо-сигналов, вызванных декорреляцией зондирующих сигналов с большой базой в каналах приема из-за пространственного разноса антенн. Полученные соотношения позволяют скорректировать алгоритмы обработки сигналов, принимаемых многоантенным интерферометром, для снижения влияния аддитивной помехи на точность измерений углов прихода эхо-сигналов.

DOI: 10.31857/S0033849420070062

ВВЕДЕНИЕ

Вычисление углов прихода сигналов, основанное на измерении разности фаз между отсчетами комплексных колебаний в двух или более разнесенных в пространстве каналах приемника, используется в интерферометрических гидролокаторах бокового обзора (ИГБО) и системах позиционирования [1, 2]. Использование узкополосных зондирующих сигналов с большой базой позволяет снизить влияние аддитивных помех типа белого гауссовского шума путем обработки принятых сигналов с использованием методов согласованной фильтрации. Влияние аддитивных помех также снижается с ростом размера антенной базы, так как точность вычисления угла прихода обратно пропорциональна размеру антенной базы [3]. Однако расширение базы интерферометра, не согласованное с параметрами сигнальной посылки, увеличивает декорреляцию колебаний в каналах приемника, приводящую к ошибкам измерений [4].

Известные исследования в области измерительных интерферометрических систем [4] сориентированы в основном на измерительные системы, удовлетворяющие условию пространственно-временной узкополосности, которое ставит ограничение на размер антенной базы и ширину полосы сигналов. Модели колебаний в каналах приемника и алгоритмы их обработки при выполнении условия пространственно-временной узкополосности наиболее просты и потому привлекательны.

В данной работе на основании общей модели отраженных от шероховатой поверхности сигналов [5] изучаются погрешности измерения разности фаз в каналах ИГБО, вызванные декорреляционными факторами, и рассматриваются возможности корректировки моделей колебаний в каналах приемника и алгоритмов их обработки с целью повышения точности производимых оценок путем снижения влияния аддитивных системных помех, обусловленных моделью распределенного в пространстве объекта зондирования.

1. МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ В КАНАЛАХ ПРИЕМНИКА

Принцип измерения углов прихода сигналов с помощью интерферометрических систем описан в работах [1, 2]. Геометрия измерений представлена на рис. 1.

Для вычисления углов прихода сигналов с помощью интерферометрических систем используются, как минимум, две приемные антенны, которые условно будем называть опорной *1* и рабочей *2* (см. рис. 1).

Предполагается, что в качестве зондирующего используется сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) с центральной частотой f_0, длитель-

ностью T_c и девиацией частоты ΔF. Колебания с выхода каждой из приемных антенн подаются на фильтры, согласованные с ЛЧМ-сигналом.

Источник сигнала описывается дальностью до него R и направлением φ на него. Дальность однозначно связана с запаздыванием $\tau = 2R/V$, где V – скорость распространения звука. Таким образом, источник (отражающая поверхность) описывается функцией $\varphi(\tau)$, которая в общем случае может быть многозначной.

Отражающую поверхность будем считать шероховатой. Для такой поверхности в [5] дана в общем виде модель отраженных сигналов. Используя результаты этой работы, для комплексных огибающих $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ на выходе согласованных фильтров в случае однозначной поверхности, находящейся в дальней зоне, можно получить следующие соотношения:

$$\begin{gathered} Z_1(t) = \int h(\tau)\rho_s(t-\tau)\exp\{-j2\pi f_0\tau\}d\tau, \\ Z_2(t) = \int h(\tau)\rho_s\left[t-\tau+\frac{\Delta x}{V}\beta(\tau)\right]\times \\ \times\exp\left\{-j2\pi f_0\left[\tau-\frac{\Delta x}{V}\beta(\tau)\right]\right\}d\tau, \end{gathered} \tag{1}$$

где Δx – расстояние между антеннами.

В случае многозначных поверхностей (источников) будем иметь сумму нескольких интегралов. Пределы интегрирования в (1) от τ_0 до ∞, где τ_0 – минимальная задержка. Учитывая свойства подынтегральных функций, пределы интегрирования можно сократить.

В соотношении (1) $\rho_s(t)$ есть нормированная автокорреляционная функция (АКФ) комплексной огибающей зондирующего сигнала, т.е. энергия излучаемого колебания полагается равной единице. Ее отличие от единицы учитывается коэффициентом пропорциональности в $h(\tau)$, характеризующего отражающие свойства поверхности и дополнительные эффекты, возникающие при распространении звуковых волн.

Для шероховатой поверхности функция $h(\tau)$ полагается [5] реализацией комплексного нормального случайного процесса с нулевым средним и со следующими корреляционными свойствами:

$$\begin{gathered} \langle h(\tau_1)h^*(\tau_2)\rangle = \sigma_h^2(\tau_1)\delta(\tau_2-\tau_1), \\ \langle \mathrm{Re}\{h(\tau_1)\}\,\mathrm{Im}\{h(\tau_2)\}\rangle = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где усреднение производится по ансамблю.

Функция $\sigma_h^2(\tau)$ полагается медленно изменяющейся. Функция $\beta(\tau)$ в соответствии с рис. 1 равна

$$\beta(\tau) = \sin[\theta - \varphi(\tau)]. \tag{3}$$

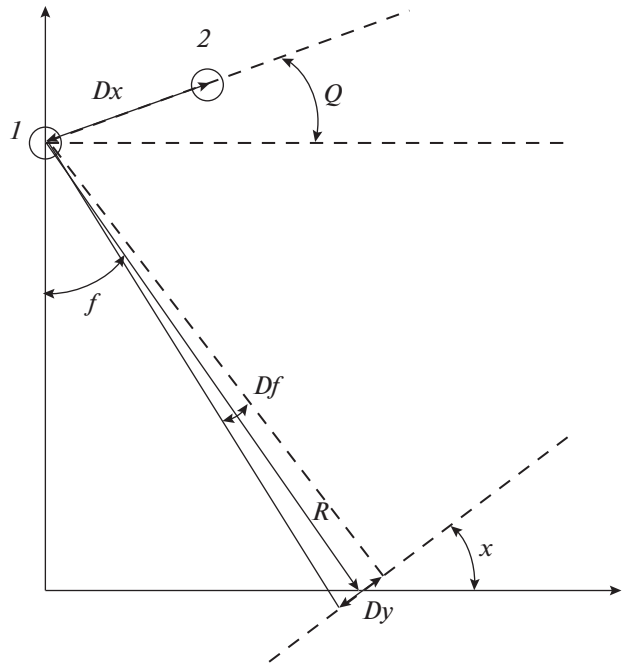

Рис. 1. Геометрия измерений интерферометрических систем.

При сделанных предположениях относительно функции $h(\tau)$ колебания $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ будут реализациями гауссовского случайного процесса с нулевым средним и дисперсиями:

$$\begin{gathered} \sigma_z^2(t) = \langle |Z_i(t)|^2\rangle = \int \sigma_h^2(\tau)|\rho_s(t-\tau)|^2 d\tau \cong \\ \cong \sigma_h^2(t)\int |\rho_s(\nu)|^2\, d\nu, \end{gathered} \tag{4}$$

где знак приближения отражает предположение о постоянстве $\sigma_h^2(\tau)$ на длительности главного лепестка автокорреляционной функции зондирующего сигнала. При этом учтено, что функция $|\rho_S(\nu)|^2$ за пределами главного лепестка ($|\nu| \le 1/\Delta F$) много меньше единицы.

Для дальнейшего важны соотношения, вытекающие из принятой модели отраженного сигнала:

$$\langle \mathrm{Re}\{Z_i(t)\}\,\mathrm{Im}\{Z_i(t)\}\rangle = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \rho_{12}(t_1,t_2) = \frac{\langle Z_1(t_1)Z_2^*(t_2)\rangle}{\sigma_z^2(t_1)} = \\ = \exp\left\{-j2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\beta(t_1)\right\} p(t_1,t_2)\}, \end{gathered} \tag{6а}$$

где

$$\begin{gathered} p(t_1,t_2) = \\ = \int \rho_S(\nu)\rho_S^*[\nu + t_2 - t_1 + \Delta x/V\,\beta(t_1-\nu)]\times \\ \times\exp\{-j2\pi\,\Delta x/\lambda\,[\beta(t_1-\nu) - \\ - \beta(t_1)]\}\,d\nu \Big/ \int |\rho_S(\nu)|^2\, d\nu \end{gathered} \tag{6б}$$

– декорреляционный коэффициент.

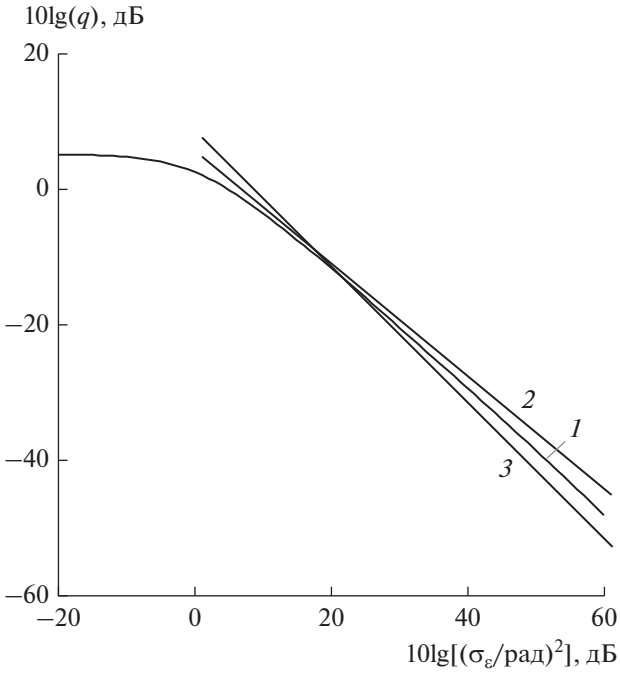

Рис. 2. Зависимость ошибки измерения разности фаз от соотношения сигнал помеха.

При $\mathrm{Re}\{p(t_1,t_2)\} = 1$ и $\mathrm{Im}\{p(t_1,t_2)\} = 0$ в отсутствие помех измеренная разность фаз между $Z(t_1)$ и $Z(t_2)$ соответствовала бы точному значению

$$\varepsilon(t_1) = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}\beta(t_1),$$

где λ – длина волны, соответствующая центральной частоте f_0. Отличие от единицы приводит к погрешности измерений.

Целью обработки является оценка величины $\varphi(t_1)$. Для этого сначала с помощью измерения разности фаз оцениваем величину $\varepsilon(t_1)$, затем путем деления на $2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}$ – величина $\beta(t_1)$, и, наконец, с помощью преобразования обратного (3) оцениваем величину $\varphi(t_1)$. При переходе от $\varepsilon(t_1)$ к $\beta(t_1)$ возникает неоднозначность, которая может быть устранена разными способами, один из которых был представлен в работе [6]. Если $\varepsilon(t_1)$ оценена со среднеквадратической ошибкой σ_ε, то для среднеквадратической ошибки σ_β и σ_φ будем иметь

$$\sigma_\beta = \frac{\sigma_\varepsilon}{2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\sigma_\beta}{|\beta'(\varphi)|} = \frac{\sigma_\beta}{|\cos(\theta-\varphi)|}. \qquad (7)$$

На входе приемника кроме отраженных колебаний присутствуют аддитивные помехи, которые предполагаются независимыми реализациями белого гауссова шума. На выходе согласованных фильтров с переносом частоты будем иметь комплексные колебания $n_1(t)$ и $n_2(t)$ с автокорреляционными свойствами, соответствующими спектральной плотности зондирующего сигнала. Согласно [7] нетрудно показать, что

$$\langle |n_i(t)|^2\rangle = \sigma_n^2, \quad \langle \mathrm{Re}\{n_i(t)\}\times \mathrm{Im}\{n_i(t)\}\rangle = 0. \qquad (8)$$

2. ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗНОСТИ ФАЗ

При выполнении условий (4), (5), (8) и $\sigma_h^2(t_1) = \sigma_h^2(t_2)$ два отсчета, $Y_1(t_1) = Z_1(t_1) + n_1(t_1)$ и $Y_2(t_2) = Z_2(t_2) + n_2(t_2)$, эквивалентны двум отсчетам Y_1 и Y_2 из стационарного нормального случайного процесса, взятым в разные моменты времени. Свойства этих отсчетов изучены в [7], в частности, получено одномерное распределение разности фаз ε в виде

$$W(\varepsilon) = \frac{1-\rho_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{1-y^2} + y\frac{\pi/2 + \arcsin(y)}{(1-y^2)^{3/2}}\right], \qquad (9а)$$

где $y = \rho_0\cos(\varepsilon-\theta_0)$, $|\varepsilon| \le \pi$, $\rho_0 = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{\rho\} + \mathrm{Im}^2\{\rho\}}$, $\theta_0 = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{\rho\}}{\mathrm{Re}\{\rho\}}\right)$,

$$\rho = \frac{\langle Y_1 Y_2^*\rangle}{\sigma_Y^2}. \qquad (9б)$$

В случае, когда сигнальные составляющие отсчетов Y_1 и Y_2 отличаются только фазовым сдвигом ($Y_1 = Z + n_1$, $Y_2 = Z\exp(j\varphi) + n_2$), погрешность измерения обусловлена только аддитивными помехами и параметры распределения (9б) имеют вид

$$\rho_0 = \frac{q}{1+q}, \quad q = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_n^2}, \quad \theta_0 = -\varphi.$$

Распределение имеет максимум при $\varepsilon = \theta_0$ и симметрично относительно этого значения [7]. Поэтому оценка будет не смещенной с дисперсией $\sigma_\varepsilon^2 = \langle(\varepsilon-\theta_0)^2\rangle$.

На рис. 2 представлена полученная расчетным путем (9а) зависимость ошибки измерения разности фаз от соотношения сигнал помеха (кривая *1*).

Для $1 \le q \le 10^6$ хорошей аппроксимацией этой зависимости является кривая *2*. Эта аппроксимация соответствует зависимости

$$\sigma_\varepsilon^2(q) = 0.4q^{-13/15}.$$

Для качественных выводов удобной является более грубая аппроксимация, (см. рис. 2, кривая *3*):

$$\sigma_\varepsilon^2(q) = 3q^{-1}. \qquad (10)$$

В случае отсутствия аддитивных помех погрешность измерения обусловлена только декорреляцией отсчетов. Пусть $Y_1 = Z_1$ и $Y_2 = Z_2\exp(j\varphi)$, где φ –

истинный угол. Тогда параметры распределения будут иметь вид

$$\rho = \frac{\langle Z_1 Z_2^* \rangle}{\sigma_z^2} \exp(-j\varphi) = p \exp(-j\varphi), \quad \rho_0 = |p|, \qquad (11)$$
$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{p\}}{\operatorname{Re}\{p\}}.$$

То есть оценка в этом случае будет смещенной на величину θ_0, а случайная составляющая погрешности измерений будет эквивалентна погрешности за счет аддитивных помех с эквивалентным отношением сигнал-помеха:

$$q_э = \frac{|p|}{1 - |p|}. \qquad (12)$$

Эквивалентное представление отсчетов Y_1 и Y_2 имеет вид

$$Y_1 = Z_э + n_{1э}, \quad Y_2 = Z_э \exp(-j(\varphi - \theta_0)) + n_{2э},$$
$$\langle |Z_э|^2 \rangle = |p| \sigma_z^2.$$

Из рассмотренного следует, что погрешность измерения глубины интерферометрическим ГБО в отсутствие аддитивных помех определяется коэффициентом (6б), характеризующим декорреляцию отсчетов $Z_1(t_1)$ и $Z_2(t_2)$. Декорреляция зависит от выбора момента взятия отсчета t_2 в рабочем канале относительно момента t_1 взятия отсчета в опорном канале и от поведения разности $\beta(t_1 - \nu) - \beta(t_1)$ в зависимости от ν в показателе экспоненты. Декорреляцию за счет первого фактора будем условно называть временной декорреляцией, а за счет второго фактора – фазовой. Проанализируем по отдельности влияние этих факторов на погрешность измерений.

3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ИЗ-ЗА ВРЕМЕННОЙ ДЕКОРРЕЛЯЦИИ

В чистом виде временная декорреляция имеет место при $\beta(t_1 - \nu) = \beta(t_1)$ для ν, по крайней мере, на длительности главного лепестка автокорреляционной функции ($|\nu| \le 1/\Delta F$). Функция $p(t_1, t_2)$ при этом равна

$$p(t_1, t_2) = \rho_{ss}(\Delta t),$$

где $\rho_{ss}(\Delta t)$ – нормированная АКФ зондирующего сигнала, а $\Delta t = t_1 - t_2 - \frac{\Delta x}{V}\beta(t_1)$. Функция $\rho_{ss}(\tau)$ пропорциональна обратному преобразованию Фурье от четвертой степени спектральной плотности зондирующего сигнала. Для ЛЧМ-сигнала

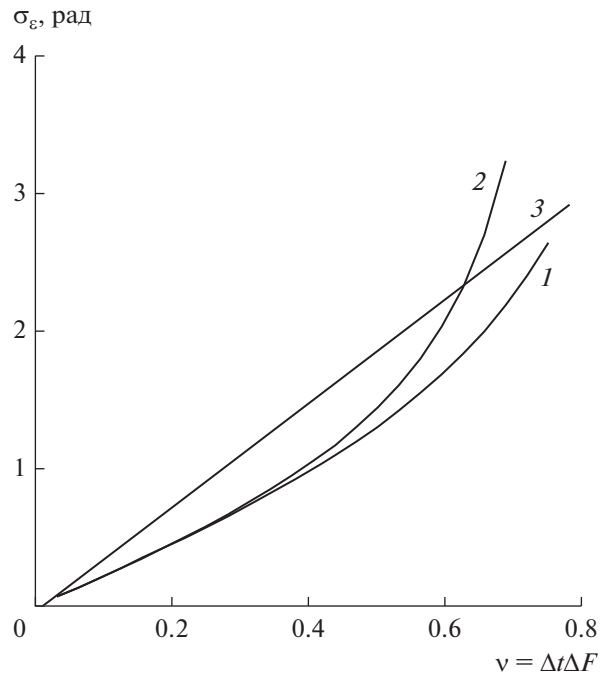

Рис. 3. Зависимость стандартного отклонения σ_ε погрешности измерения разности фаз из-за временной декорреляции.

с достаточно большой базой энергетический спектр близок к прямоугольному, и тогда имеем

$$p(t_1, t_2) = \rho_{ss}(\Delta t) \cong \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}, \qquad (13)$$

где $u = \Delta F \Delta t$.

При $|\Delta t| < 1/\Delta F$ оценка $\varepsilon(t_1)$ будет не смещенной, а случайная погрешность будет равна погрешности при аддитивной помехе с эквивалентным отношением сигнал-помеха (12). Для получения качественных выводов функцию (13) для $|u| < 1/2$ можно аппроксимировать выражением $1 - \frac{(\pi u)^2}{6}$, и $q_э \cong \frac{6}{(\pi u)^2} - 1$.

На рис. 3 представлена зависимость погрешности измерения разности фаз, рассчитанная по соотношениям (10), (12), (13) (кривой *1*) и с использованием указанной аппроксимации (кривая *2*). Из рис. 3 видно, что обе кривые близки до значений $u \le 1/2$ и, соответственно, $\sigma_\varepsilon \le \pi/2$. Кроме того, можно отметить, что обе зависимости до этих значений близки к линейной (кривая *3*).

Заданная точность измерения угла прихода отраженного сигнала может быть обеспечена, если $|u|$ не превосходит некоторую величину $u_{\max}$:

$$|u| \le u_{\max}. \qquad (14)$$

В предположении пространственно временной узкополосности членом $\frac{\Delta x}{V}\beta(t-\nu)$ в аргументе функции ρ_s пренебрегают и для измерения разности фаз используют синхронные отсчеты в каналах приемника ($t_1 = t_2$). Реально $\frac{\Delta x}{V}\beta(t)$ отлично от нуля, что обусловливает погрешности измерений, соответствующие значению

$$u = \Delta F\frac{\Delta x}{V}\beta(t) = \frac{\Delta F}{f_0}\frac{\Delta x}{\lambda}\beta(t).$$

При этом условие (14) с учетом того, что $|\beta(t)|$ может достигать единицы, переходит в ограничение на размер антенной базы или полосу сигнала (база сигнала):

$$\frac{\Delta x}{\lambda} \le u_{\max}\frac{f_0}{\Delta F}. \qquad (15)$$

4. ПОГРЕШНОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ФАЗОВОЙ ДЕКОРРЕЛЯЦИЕЙ

Положим в выражении (6б)

$$t_2 = t_1 - \frac{\Delta x}{V}\beta(t_1). \qquad (16)$$

Тогда разность $\beta(t_1-\nu)-\beta(t_1)$ будет иметь место как в показателе экспоненты, так и в аргументе функции ρ_s под интегралом. Предположим, что $\frac{\Delta x}{V}|\beta(t-\nu)-\beta(t)|$ при $|\nu| \le 1/\Delta F$ – малая по сравнению с $1/\Delta F$ величина и ей можно пренебречь в аргументе функции ρ_s под интегралом. Тогда

$$p = p[t_1, t_1 - \frac{\Delta x}{V}\beta(t_1)] \cong$$
$$\cong \frac{\int |\rho_S(\nu)|^2 \exp\left\{-j2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}[\beta(t_1-\nu)-\beta(t_1)]\right\}d\nu}{\int |\rho_S(\nu)|^2 d\nu}. \qquad (17)$$

То есть декорреляционный эффект будет связан лишь с вариацией показателя экспоненты.

При анализе разности $\beta(t-\nu)-\beta(t)$ каждой точке отсчета t будем сопоставлять плоский отражающий участок (см. рис. 1) размером, соответствующим разрешающей способности сигнала ($|\nu| \le 1/\Delta F$). Отражающий участок находится на расстоянии R от антенн, под углом ξ к горизонтали и характеризуется угловым $\Delta\varphi$ и линейным Δy размерами, которые для $|\xi-\varphi| \ge 2\sqrt{\lambda f_0/R\Delta F}$ имеют вид

$$\Delta\varphi \cong \frac{\lambda}{R}\frac{f_0}{\Delta F}\frac{1}{\operatorname{tg}|\varphi-\xi|}, \quad \Delta y \cong \lambda\frac{f_0}{\Delta F}\frac{1}{\sin|\varphi-\xi|},$$

а при $\varphi = \xi$ –

$$\Delta\varphi = 2\sqrt{\frac{\lambda}{R}\frac{f_0}{\Delta F}}, \quad \Delta y = 2\sqrt{\lambda R\frac{f_0}{\Delta F}}.$$

Поведение разности $\beta(t-\nu)-\beta(t)$ зависит от разности $\xi-\varphi$.

Для углов

$$|\xi-\varphi| \ge 2\sqrt{\frac{\lambda}{R}\frac{f_0}{\Delta F}} \qquad (18)$$

можно получить

$$\beta(t-\nu)-\beta(t) \cong \frac{\nu V}{2R}\operatorname{ctg}(\varphi-\xi)\cos(\theta-\varphi),$$
$$|\nu| \le \frac{1}{\Delta F}, \qquad (19)$$

где знак приближения связан с условием (18) и предположением малости величины $f_0\lambda/2\Delta FR$ по сравнению с единицей.

Отметим, что с увеличением дальности (глубины) условие (18) ослабляется, допуская меньшую разность углов. Кроме того, уменьшается разность (20), т.е. исключение этой разности из аргумента функции ρ_s под интегралом (6б) становится более оправданным.

Для получения качественных выводов при вычислении декорреляционного коэффициента p (19) функцию $\rho_s^2(\nu)$ аппроксимируем прямоугольником шириной $|\nu| \le 1/\Delta F$. Тогда коэффициент p будет иметь вид (13) при

$$u = \frac{\Delta x}{2R}\frac{f_0}{\Delta F}\operatorname{ctg}(\varphi-\xi)\cos(\theta-\varphi).$$

Оценка разности фаз ε при $|u| < 1$ будет не смещенной, а случайная погрешность будет равна погрешности измерения в аддитивном шуме с эквивалентным отношением сигнал–помеха, примерно равным $6/u^2 - 1$.

Заданное качество батиметрии достигается при выполнении условия (14). Величина u зависит от угла φ и разности $\xi-\varphi$, и ее модуль достигает максимума, когда в (18) выполняется равенство $\varphi = \theta$. С учетом этого (14) переходит в ограничение

$$\frac{\Delta x}{\lambda} < 4u_{\max}\sqrt{\frac{\Delta F}{f_0}\frac{R}{\lambda}}. \qquad (20)$$

Сопоставление соотношений (20) и (15) показывает, что при одновременном взятии отсчетов в опорном и рабочем каналах допустимый размер антенной базы не зависит от дальности и сокращается с увеличением полосы сигнала ΔF. Коррекция момента взятия отсчета в рабочем канале, в соответствии с (16), позволяет увеличить допустимый размер антенной базы как с ростом ΔF, так и с ростом дальности (глубины).

Для отражающего участка, перпендикулярного направлению на антенны ($\xi = \varphi$), когда условие (18) не выполняется, имеет место неоднозначность, так как положительным и отрицательным угловым приращениям φ соответствуют положительные приращения по дальности. Возникает сумма двух интегралов по ν от 0 до $1/\Delta F$ с разностью в показателе экспоненты:

$$\beta(t+\nu) - \beta(t) \cong$$
$$\cong \frac{\nu V}{2R}\sin(\theta-\varphi) \pm \sqrt{\frac{\nu V}{R}}\cos(\theta-\varphi).$$

При этом один знак соответствует положительному угловому приращению, другой – отрицательному.

Аппроксимируя функцию $\rho_s^2(\nu)$ прямоугольником, получаем

$$p = \int_0^1 \exp\{-ja_1\xi)\cos(a_2)\sqrt{\xi}d\xi, \qquad (21)$$

где $a_1 = \pi\frac{\Delta x}{R}\frac{f_0}{\Delta F}\sin(\theta-\varphi)$, $a_2 = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}\times$ $\times\sqrt{\frac{f_0}{\Delta F}\frac{\lambda}{R}}\cos(\theta-\varphi)$.

При выполнении условия (20) и достаточно большой дальности величина $a_1 \ll 1$ и экспоненту под интегралом можно разложить в ряд Тейлора с удержанием только первых двух членов. В этом случае интегрирование (21) легко осуществляется. При этом $\mathrm{Im}\{p\}$ имеет тот же порядок, что и величина a_1, а для $\mathrm{Re}\{p\}$ можно получить простое соотношение:

$$\mathrm{Re}\{p\} = 2\frac{a_2\sin(a_2) - 1 + \cos(a_2)}{a_2^2}. \qquad (22)$$

Величина $|a_2|$ при выполнении условия (20) может изменяться от 0 до $8\pi u_{\max}$. При этом $\mathrm{Re}\{p\}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что обусловливает большие погрешности вычисления дальности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе общей модели отраженных от шероховатой поверхности сигналов [4] разработаны простые соотношения, позволяющие производить оценку погрешностей измерения разности фаз в каналах интерферометрических систем, обусловленных декорреляцией колебаний в опорном и рабочем каналах. Уточнена верхняя граница на полосу зондирующего сигнала и базу антенн, при которой допустимо измерение разности фаз одновременно взятых отсчетов из колебаний в опорном и рабочем каналах. Показано, что в пределах этой границы, погрешности вычисления углов прихода сигналов практически не зависят от размера антенной базы в отсутствие аддитивных помех.

Полученные оценки позволяют проводить дальнейшее совершенствование алгоритмов обработки сигналов в интерферометрических системах с целью повышения точности измерения углов прихода отраженных сигналов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена по государственному заданию ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каевицер В.И., Разманов В.М., Кривцов А.П. и др.* // Радиотехника. 2008. № 8. С. 35.
2. *Каевицер В.И., Кривцов А.П., Смольянинов И.В., Элбакидзе А.В.* // Журнал радиоэлектроники. 2018. № 11. http://jre.cplire.ru/
3. *Долотов С.А., Каевицер В.И., Смольянинов И.В.* // Навигация и гидрография. 1996. № 3. С. 100.
4. *Xavier Lurton* // IEEE J. Oceanic Eng. 2000. V. 25. № 3. P. 351.
5. *Фалькович С.Е., Пономарев В.И., Шарко Ю.В.* Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в каналах с рассеянием. М.: Радио и связь, 1989.
6. *Лифанов Е.М., Козлов В.И., Горкин В.Б.* // Радиотехника. 1991. Т. 2. С. 3.
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1969.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 804–808

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.072

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМНИКА СИГНАЛОВ С КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ РЕТРАНСЛИРОВАННОЙ ПОМЕХИ

© 2020 г. Г. В. Куликов[a], *, А. А. Лелюх[a], Е. Н. Граченко[a]

[a] *МИРЭА – Российский технологический университет, просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация*

**E-mail: kulikov@mirea.ru*

Поступила в редакцию 20.06.2019 г.
После доработки 20.06.2019 г.
Принята к публикации 10.07.2019 г.

Методами статистической радиотехники проведен анализ помехоустойчивости приема сигналов с многопозиционной квадратурной амплитудной модуляцией (M-КАМ) при наличии в радиоканале шумовой и ретранслированной помехи. Показано, что качество приема сигналов с многопозиционной квадратурной амплитудной модуляцией весьма сильно подвержено влиянию такой помехи и с увеличением позиционности сигналов это влияние усиливается. Установлено также, что сигналы M-КАМ значительно выигрывают в помехоустойчивости приема на фоне ретранслированной помехи по сравнению с сигналами M-ФМ аналогичной позиционности.

DOI: 10.31857/S0033849420070074

ВВЕДЕНИЕ

Стремительное развитие телекоммуникационных технологий диктует все новые требования по скоростям передачи информации и помехоустойчивости приема в условиях ограниченной полосы пропускания канала связи. Одним из способов решения проблемы является использование многопозиционных сигналов. Это характерно, например, для действующих систем цифрового эфирного и спутникового телевидения, реализованных на основе стандартов DVB-S, DVB-S2/S2X[1,2]. С использованием этих стандартов строятся также авиационные системы высокоскоростной передачи данных для аэромобильных абонентов во время полета. Этот сегмент активно осваивается за рубежом и только начинает разрабатываться в России. Схемы модуляции-кодирования базируются в том числе и на применении сигналов с многопозиционной квадратурной амплитудной модуляцией (M-КАМ, в зарубежной литературе – M-QAM) [1]. В таких радиосистемах на входе приемника наряду с шумовой могут присутствовать и нефлуктуационные сигналоподобные помехи. Одной из часто встречающихся является ретранслированная помеха, вызванная многолучевым характером распространения радиоволн. Подробного анализа помехоустойчивости приема сигналов M-КАМ в такой помеховой обстановке в литературе нет.

Цель работы – анализ помехоустойчивости когерентного приемника сигналов с M-КАМ в присутствии ретранслированной и шумовой помех.

1. МОДЕЛИ СИГНАЛА И ПОМЕХ

Сигнал M-КАМ на тактовом интервале, равном длительности канального символа T_s, несущего информацию о $\log_2 M$ информационных битах, может принимать одно из M возможных значений:

$$s_i(t) = A_{\text{ср}}(I_i \cos\omega_0 t - Q_i \sin\omega_0 t),\quad t \in (0, T_s],\quad i = 0,1,\ldots M-1, \tag{1}$$

где $A_{\text{ср}} = \sqrt{2E_{s\text{ср}}/T_s}$ – средняя амплитуда сигнала ($E_{s\text{ср}} = E_{b\text{ср}}\log_2 M$ – энергия канального символа, средняя по всем информационным комбинациям; $E_{b\text{ср}}$ – средняя энергия, приходящаяся на один бит информации), I_i и Q_i – коэффициенты, определяющие амплитуды квадратурных компонент сигнала; ω_0 – несущая частота.

В качестве шумовой помехи рассмотрим белый гауссовский шум $n(t)$ с параметрами:

$$\langle n(t)\rangle = 0;\quad \langle n(t_1)n(t_2)\rangle = \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1).$$

[1] https://dvb.org/wp-content/uploads/2019/12/a171-1_s2_guide.pdf.
[2] https://dvb.org/?standard=dvb-s2x-implementation-guidelines.

Ретранслированная помеха $s_п(t)$ на входе приемника представляет собой задержанный сигнал, отраженный от земной поверхности или местных предметов:

$$s_п(t) = \mu s(t - \tau, \varphi_п),$$

где μ – относительная интенсивность ретранслированной помехи; $\tau < T_s$ – ее временная задержка; $\varphi_п$ – случайная начальная фаза помехи.

2. МОДЕЛЬ ПРИЕМНИКА

Когерентный приемник сигнала (1) (рис. 1) в присутствии белого гауссовского шума $n(t)$ содержит M корреляционных каналов и вычисляет интегралы *1* свертки

$$J_i = \frac{2A_{ср}}{N_0}\int_0^{T_s} x(t)(I_i \cos\omega_0 t - Q_i \sin\omega_0 t)dt,$$
$$i = 0,1,\ldots M-1$$

принимаемого колебания

$$x(t) = s_i(t) + s_п(t) + n(t)$$

с опорными сигналами

$$s_{опi}(t) = (I_i \cos\omega_0 t - Q_i \sin\omega_0 t).$$

Решающее устройство *2* в результате сравнения вычисленных интегралов (с учетом порога) принимает решение по максимуму правдоподобия в пользу того или иного канального символа. При этом полагаем, что синхронизация приемника идеальна.

3. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ БИТОВОЙ ОШИБКИ

Вероятность ошибочного приема канального символа вычисляется по формуле

$$P_{es} = 1 - \prod_{\substack{i=0\\ m\neq i}}^{M-1} p_i(J_m - J_i > \delta_{mi})|_m, \qquad (2)$$

где $p_i(J_m - J_i > \delta_{mi})|_m$ – вероятность того, что выходное значение m-го коррелятора приемника больше выходного значения любого другого i-го коррелятора при условии, что передавался m-й символ;

$$\delta_{mi} = \frac{E_{sm} - E_{si}}{N_0} = \frac{E_{sср}}{N_0}[(I_m^2 + Q_m^2) - (I_i^2 + Q_i^2)]$$

– порог принятия решения, определяемый полуразностью энергий сравниваемых канальных символов.

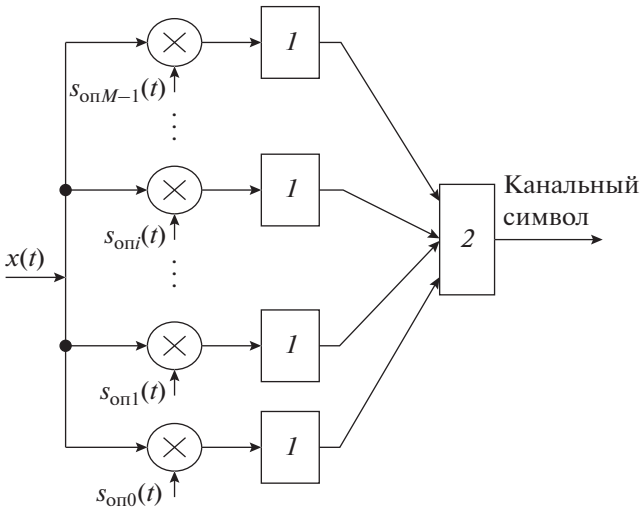

Рис. 1. Структурная схема когерентного приемника М-КАМ сигналов: *1* – интегратор, *2* – решающее устройство.

Вероятность битовой ошибки P_{eb} при достаточно большом отношении сигнал/шум с учетом кодирования Грея можно найти по формуле [2]:

$$P_{eb} = P_{es}\big/\log_2 M. \qquad (3)$$

Предположим сначала, что случайная начальная фаза ретранслированной помехи является фиксированной величиной. В этом случае распределения случайных процессов J_i на выходах всех корреляторов демодулятора можно считать нормальными и рассчитать условные по этому параметру статистические характеристики: средние значения, их линейные комбинации m_{mi} и дисперсии D_{mi}:

$$m_{mi} = \frac{2E_{sср}}{N_0}(0.5\left[(I_m - I_i)^2 + (Q_m - Q_i)^2\right] +$$
$$+ \frac{\tau}{T_s}\mu(I_m I_j + Q_m Q_j - I_i I_j - Q_i Q_j)\cos\varphi +$$
$$+ \frac{\tau}{T_s}\mu(I_m Q_j - I_j Q_m - I_i Q_j + I_j Q_i)\sin\varphi +$$
$$+ \left(1 - \frac{\tau}{T_s}\right)\mu(I_m^2 + Q_m^2 - I_m I_i - Q_m Q_i)\cos\varphi -$$
$$- \left(1 - \frac{\tau}{T_s}\right)\mu(I_m Q_i - I_i Q_m)\sin\varphi),$$

$$D_{mi} = \frac{2E_{sср}}{N_0}[(I_m - I_i)^2 + (Q_m - Q_i)^2],$$

где $\varphi = -\omega_0\tau + \varphi_п$.

Полученные характеристики позволят определить условные вероятности, входящие в (2), и условную вероятность битовой ошибки (3). Для получения безусловной вероятности битовой

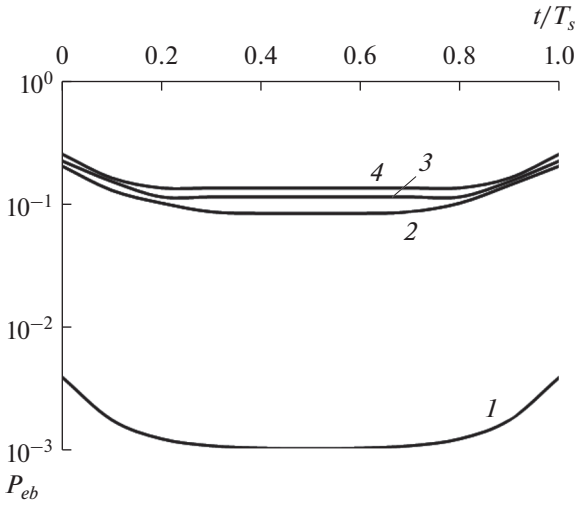

Рис. 2. Зависимость усредненной вероятности ошибки P_{eb} от задержки ретранслированной помехи τ/T_s для сигналов 4-КАМ (*1*), 16-КАМ (*2*), 32-КАМ (*3*) и 64-КАМ (*4*).

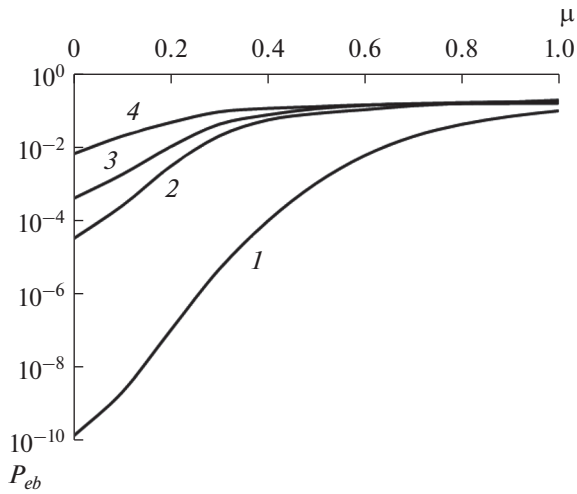

Рис. 3. Зависимость вероятности ошибки P_{eb} от интенсивности ретранслированной помехи μ для сигналов 4-КАМ (*1*), 16-КАМ (*2*), 32-КАМ (*3*) и 64-КАМ (*4*).

ошибки необходимо провести усреднение полученных результатов по случайной величине φ:

$$P_{eb} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{eb}(\varphi)d\varphi.$$

Окончательные результаты расчетов получены численным усреднением. При этом учтено, что погрешность вычисления ошибки на порядок меньше минимальной представленной вероятности битовой ошибки.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим результаты расчетов помехоустойчивости приема сигнала М-КАМ при наличии ретранслированной помехи. Для адекватного сравнения полученных результатов нами проведена нормировка энергий сигналов с помощью величин коэффициентов I_i и Q_i так, чтобы средние энергии сравниваемых сигналов были одинаковы. При вычислениях в зависимости от выбора сигнальной точки использованы следующие корректирующие коэффициенты [3]: $1/\sqrt{10}$ и $3/\sqrt{10}$ для 16-КАМ, $1/\sqrt{20}$, $3/\sqrt{20}$ и $5/\sqrt{20}$ для 32-КАМ, $1/\sqrt{42}$, $3/\sqrt{42}$, $5/\sqrt{42}$ и $7/\sqrt{42}$ для 64-КАМ.

Из-за суперпозиции прямой и задержанной посылок с разными фазами условия приема полезного сигнала могут как существенно ухудшаться, так и несколько улучшаться. В среднем это все же приводит к увеличению вероятности ошибки. На рис. 2 приведены зависимости усредненной по начальной фазе помехи вероятности битовой ошибки P_{eb} от относительной задержки помехи τ/T_s для интенсивности помехи $\mu = 0.5$ при отношении сигнал/шум $E_{b\text{ср}}/N_0 = 13$ дБ. Увеличение вероятности ошибки в областях $\tau/T_s = 0$ и $\tau/T_s = 1$ объясняется тем, что при усреднении по начальной фазе помехи доля “опасных” ситуаций, когда сигнал и помеха противофазны и велика степень снижения уровня сигнала за счет суперпозиции колебаний, здесь выше, чем для области $\tau/T_s = 0.5$.

На рис. 3 представлены зависимости помехоустойчивости для всех исследованных сигналов от величины μ при отношении $E_{b\text{ср}}/N_0 = 13$ дБ и относительной задержке помехи $\tau/T_s = 0.5$. Из их сравнения следует, что ретранслированные помехи большой интенсивности ($\mu \geq 0.3$) опасны для всех видов сигналов М-КАМ и практически разрушают прием.

Наиболее показательной является зависимость вероятности ошибки P_{eb} от отношения сигнал/шум на входе приемника $E_{b\text{ср}}/N_0$. На рис. 4 приведены рассчитанные зависимости для $M = 4$, 16, 32 и 64 при разных интенсивностях помехи и $\tau/T_s = 0.5$. Здесь же для сравнения линией *1* приведен график помехоустойчивости рассматриваемого приемника по отношению только к белому гауссовскому шуму. Отметим, что из-за ограничений применимости формулы (3) результаты в области значений $E_{b\text{ср}}/N_0 < 4$ дБ имеют характер нижней границы.

С увеличением степени позиционности M полезного сигнала влияние ретранслированной помехи значительно усиливается. Анализ показывает, что присутствие на входе приемника ретранслированной помехи с интенсивностью $\mu = 0.1$

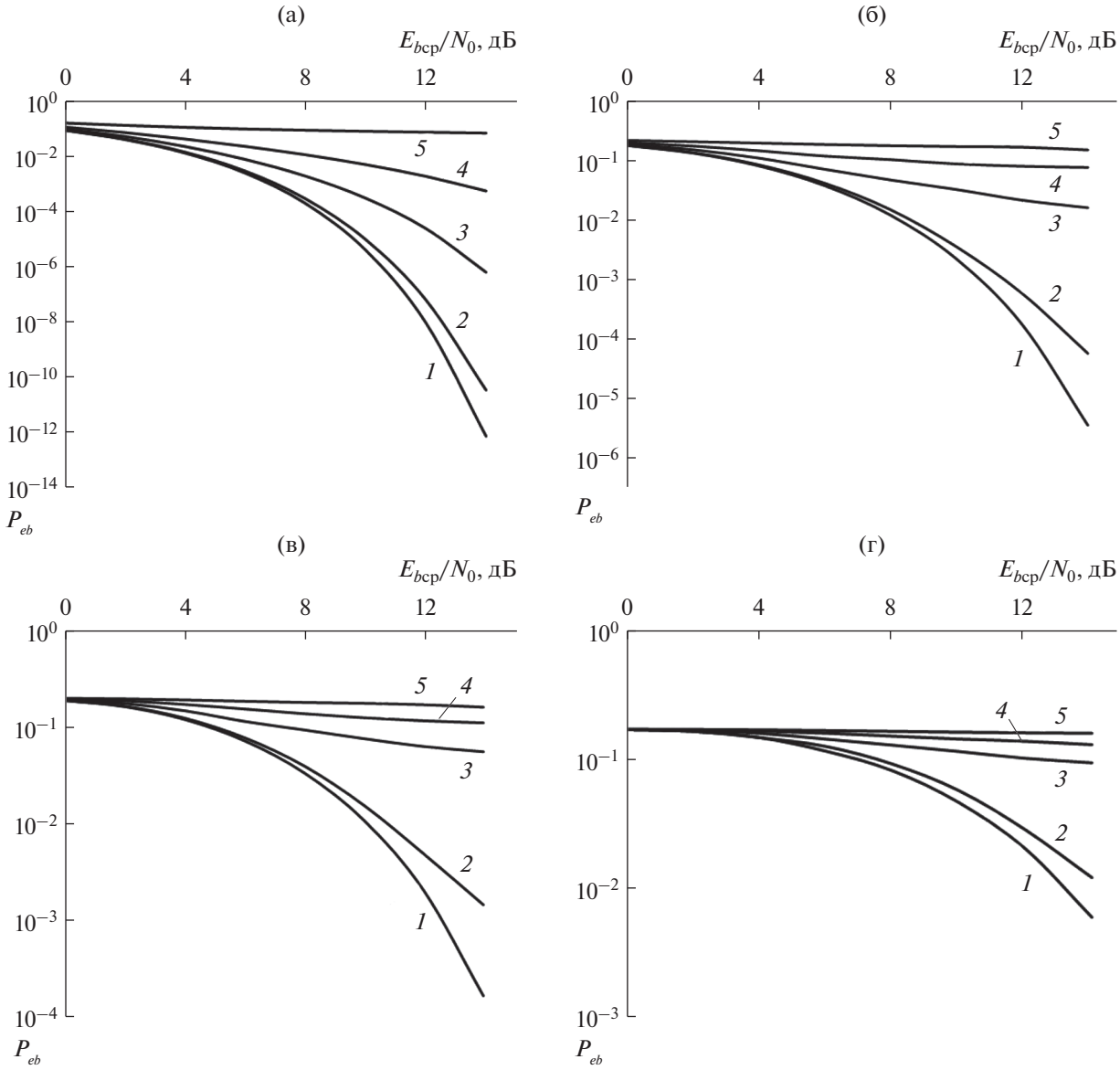

Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки P_{eb} от отношения сигнал/шум $E_{b\text{ср}}/N_0$ для сигналов 4-КАМ (а), 16-КАМ (б), 32-КАМ (в), 64-КАМ (г): μ = 0 (*1*), 0.1 (*2*), 0.3 (*3*), 0.5 (*4*) и 0.9 (*5*).

при $P_{eb} = 10^{-3}$ для 4-КАМ эквивалентно ухудшению отношения сигнал/шум всего на 0.2 дБ, для 16-КАМ это ухудшение составляет уже 0.8 дБ, для 32-КАМ – 2 дБ, а для 64-КАМ – более 3 дБ. При увеличении интенсивности помехи энергетические проигрыши существенно возрастают.

На рис. 5 для сравнения приведены графики помехоустойчивости приема сигналов М-КАМ (сплошные линии) и многопозиционной фазовой манипуляции (М-ФМ) (штриховые) [4] при одинаковых величинах M и параметрах ретранслированной помехи μ. Очевидно, что сигналы М-КАМ имеют преимущество в этой ситуации и их энергетический выигрыш может достигать нескольких децибел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ помехоустойчивости приема сигналов М-КАМ при наличии в радиоканале шумовой и ретранслированной помехи. По результатам анализа полученных данных можно сделать следующие выводы.

1. Качество приема сигналов с М-КАМ весьма сильно подвержено влиянию ретранслированной помехи и с увеличением позиционности сигналов это влияние усиливается. Так для $M > 16$ помехоустойчивость приема на фоне ретранслированной помехи заметно снижается даже при малых уровнях помехи. Прием сигналов М-КАМ с большой позиционностью в присутствии ретрансли-

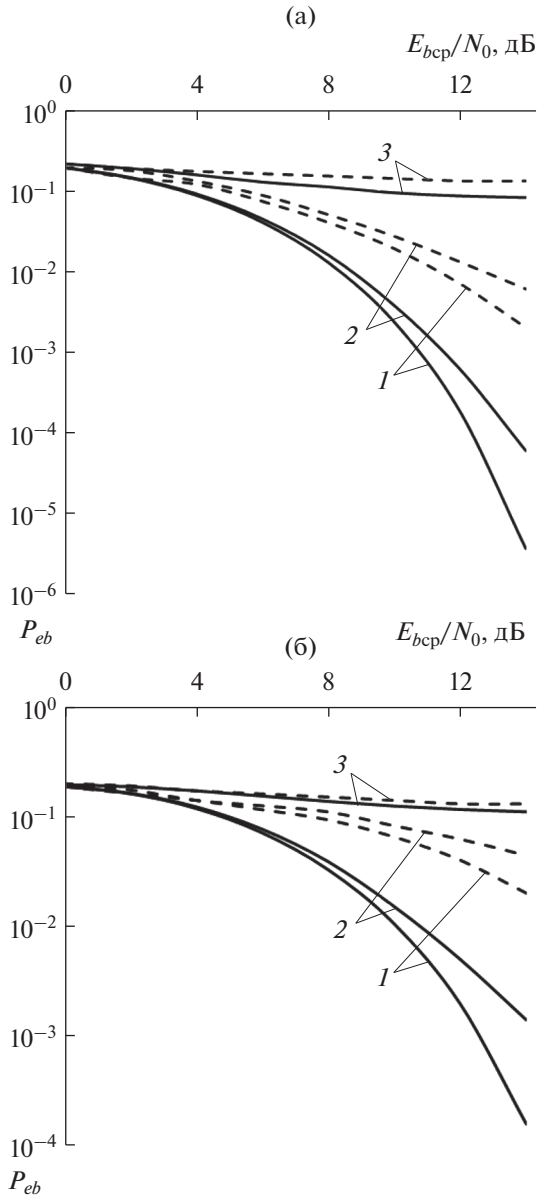

Рис. 5. Сравнительные зависимости вероятности ошибки P_{eb} от отношения сигнал/шум $E_{b\text{ср}}/N_0$ для сигналов М-КАМ (сплошные кривые) и М-ФМ (штриховые) при $\tau/T_s = 0.5$, $M = 16$ (а) и 32 (б) и различных $\mu = 0$ (*1*), 0.1 (*2*) и 0.5 (*3*).

рованной помехи без алгоритмов компенсации таких помех становится невозможным.

2. Сигналы М-КАМ значительно выигрывают в помехоустойчивости приема на фоне ретранслированной помехи по сравнению с сигналами М-ФМ аналогичной позиционности.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (уникальный идентификатор RFMEFI57418X0190).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров А.В., Лелюх А.А., Куликов Г.В., Гавриков Н.С.* // Журн. радиоэлектроники. 2019. № 1. http://jre.cplire.ru/jre/jan19/11/text.pdf.

2. *Прокис Дж.* Цифровая связь. М.: Радио и связь, 2000.

3. *Куликов Г.В., Нестеров А.В., Лелюх А.А.* // Журн. радиоэлектроники. 2018. № 11. http://jre.cplire.ru/jre/nov18/9/text.pdf.

4. *Нгуен Ван Зунг* // Журн. радиоэлектроники. 2019. № 3. http://jre.cplire.ru/jre/mar19/4/text.pdf.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 809–812

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.317.382

МЕТОД СОВМЕСТНОГО ПРИЕМА И МОНОИМПУЛЬСНОГО ПЕЛЕНГОВАНИЯ СИГНАЛОВ РАДИОИЗЛУЧАЮЩИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© 2020 г. Н. Ю. Музыченко*

Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи, ул. Нансена, 130, Ростов-на-Дону, 344038 Российская Федерация

**E-mail: Muzichenko_n@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.11.2019 г.
После доработки 12.11.2019 г.
Принята к публикации 18.02.2020 г.

Предложен метод совместного приема и моноимпульсного пеленгования сигналов радиоизлучающих динамических объектов, базирующийся на выравнивании коэффициентов передачи в пеленгационных каналах по дисперсиям шумов. В качестве математического аппарата, используемого при поиске решения, применена теория нечетких множеств. Эффективность метода подтверждена результатами натурных испытаний.

DOI: 10.31857/S0033849420080094

ВВЕДЕНИЕ

Задачи приема и пеленгования сигналов радиоизлучающих динамических объектов (ДО) не являются новыми, и сталкиваться с их решением приходится множеству разработчиков радиотехнических систем. В качестве элементов, выполняющих функции приема и пространственной селекции принимаемых сигналов, в зависимости от выбранной структуры, используются раздельные или совмещенные антенные системы (АС). В первом случае в качестве устройства первичной обработки сигналов используется диаграммообразующее устройство (ДОУ) на основе гибридных соединений [1] либо перекрестных переключателей [2], во втором случае ДОУ не требуется и сигналы рассогласования выделяются при вторичной обработке [3]. Компенсация ухода равносигнального направления (РСН) от геометрической оси АС в [1, 2] производится автоматически, а в [3] – путем периодически выполняемого выравнивания коэффициентов передачи в пеленгационных каналах по сигналу от источника контрольного сигнала. Это приводит к основному недостатку совмещенной амплитудной моноимпульсной АС – зависимости от контрольной антенны – и делает актуальным проведение исследования, направленного на его устранение. Предложенный в [4] порядок определения центральной точки группировки шумовых выборок и дисперсии шума открывает для этого новые возможности.

В данной работе предпринята попытка разработать метод совместного приема и моноимпульсного пеленгования сигналов радиоизлучающих ДО, базирующийся на выравнивании коэффициентов передачи в пеленгационных каналах по дисперсиям шумов.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть АС комплекса радиомониторинга ДО выполнена по схеме, приведенной на рис. 1.

Параметры элементов схемы обеспечивают синфазное сложение сигналов, принимаемых излучающими элементами ИЭ1...ИЭ4 в динамическом диапазоне принимаемых сигналов, что при выполнении условия наведения АС на ДО обеспечивает решение задачи приема сигналов.

Пусть также по результатам приема радиоизлучения с направления на контролируемый объект, его регистрации и обработки в полосе параллельного анализа ΔF в каждом информационном канале ИК1...ИК4 построены усредненные периодограммы, соответствующие смещенным на ширину диаграммы направленности относительно геометрической оси направлениям в вертикальной $j = 1$, $j = 3$ и горизонтальной $j = 2$, $j = 4$ плоскостях:

$$[f_i, P_{ji}], \quad j = \overline{1,4}, \quad i = \overline{1,N},$$

где N – число частотных каналов, P_{ji} – спектральная плотность мощности сигнала в i-м частотном канале j-й периодограммы.

Динамический диапазон изменения P_{ji} в устройстве обработки согласован с динамическим диапазоном сигналов на выходах ИК1...ИК4. Априорная информация о числе каналов с сигналом и шумом задана неравенствами $N1 \gg 1$, $N1 \ll N - N1$, где

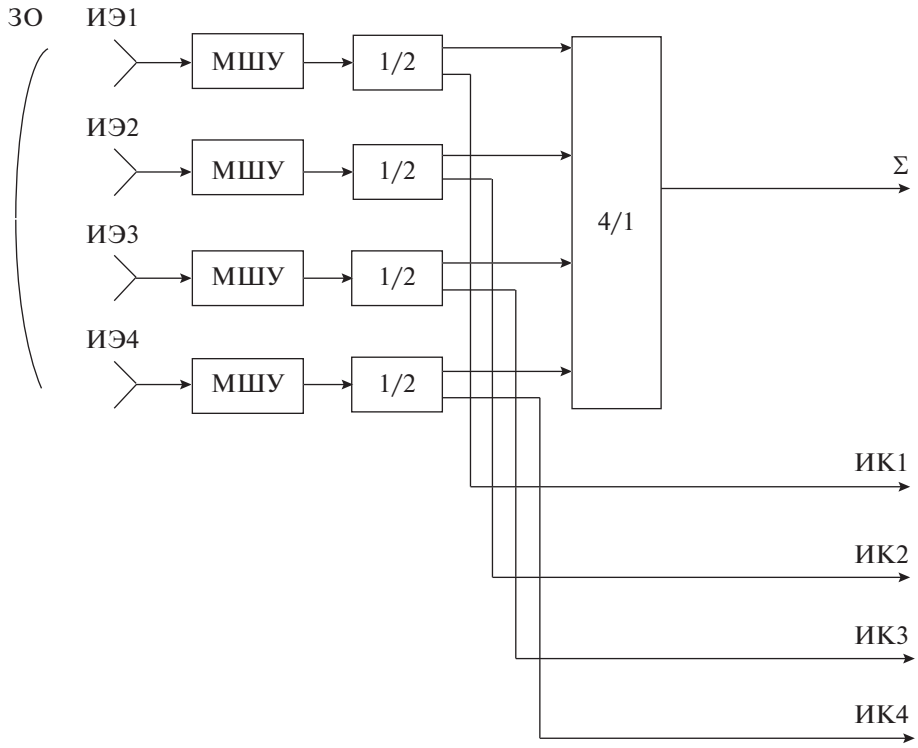

Рис. 1. Структурная схема антенной системы радиомониторинга динамических объектов: ЗО – зеркальный отражатель; ИЭ1...ИЭ4 – излучающие элементы; МШУ1... МШУ4 – малошумящие усилители; 1/2 – разветвители сигнала на два; 4/1 – четырехканальный сумматор; Σ – суммарный канал; ИК1...ИК4 – информационные каналы.

$N1$ – число частотных каналов, занимаемых сигналом. Известно также, что присутствующий в периодограмме сигнал является единственным, полностью находится в ее пределах, а его расположение на частотной оси не определено.

В качестве показателя, характеризующего качество решения задачи пеленгования, примем выраженное в процентах изменение значения ухода РСН в разрабатываемом методе $\Delta\text{РСН}_{\text{рм}}$ по отношению к известному $\Delta\text{РСН}_{\text{и}}$

$$I = \frac{\left|\Delta\text{РСН}_{\text{рм}} - \Delta\text{РСН}_{\text{и}}\right|}{\Delta\text{РСН}_{\text{и}}} \times 100\%. \qquad (1)$$

Требуется разработать метод совместного приема и моноимпульсного пеленгования сигналов радиоизлучающих динамических объектов, позволяющий за счет незначительного увеличения $\Delta\text{РСН}_{\text{рм}}$ по отношению к значению, найденному в [3], отказаться от необходимости использования контрольной антенны.

Уменьшение ухода РСН относительно геометрической оси АС требует периодического выравнивания коэффициентов передачи в пеленгационных каналах ИК1...ИК3 и ИК2...ИК4 в процессе эксплуатации комплекса, что при линейности приемных трактов после нормировки разностных сигналов к суммарным в идеале обеспечит минимально возможный уход РСН от геометрической оси антенны и независимость крутизны формируемых дискриминационных характеристик по азимуту и углу места от уровня принимаемого сигнала. В качестве параметров, позволяющих выполнить такую операцию в условиях отсутствия источника контрольного сигнала, по аналогии с [3] используем дисперсии шумов в пеленгационных каналах σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, σ_4^2.

Для каждого j-го информационного канала по аналогии с [4] определим максимальное значение P_{ji}:

$$P_{j\max} = \max_{i\in[1,\ldots,N]} P_{ji}. \qquad (2)$$

Сформируем на интервале $[0,\ldots,P_{j\max}]$ множество из M точек, отстоящих друг от друга на интервал Δ:

$$P_{jm} = [0,\Delta,2\Delta,\ldots,M\Delta], \quad \Delta \ll P_{j\max}. \qquad (3)$$

Априорная неопределенность по числу накоплений h при построении усредненных периодограмм $[f_i, P_{ji}]$ позволяет высказать предположение о стремлении законов распределения шумовых выборок к гаусовскому с ростом h.

По аналогии с [4] введем в рассмотрение функцию, характеризующую степень близости элемента P_{ji} к точке P_{jm} из множества $[0,\Delta,2\Delta,\ldots,M\Delta]$:

$$\mu(P_{jm}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{1+m\left(P_{jm}-P_{ji}\right)^2}, \qquad (4)$$

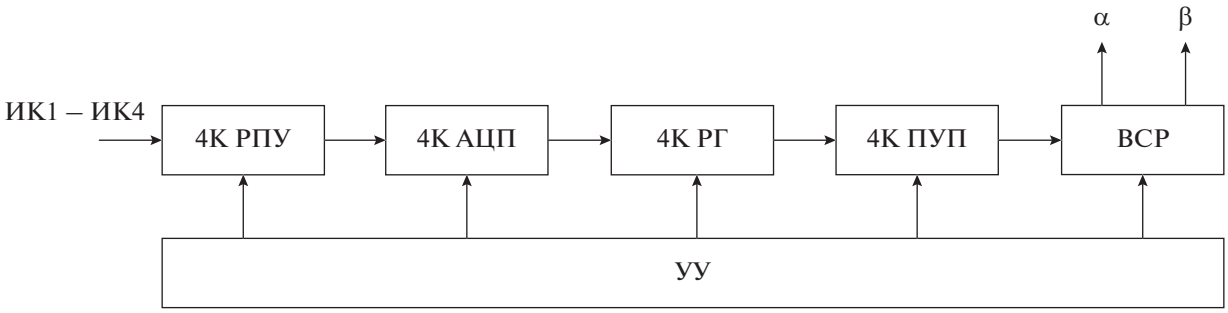

Рис. 2. Структурная схема формирователя сигналов рассогласований в плоскостях пеленгации: 4К РПУ – четырехканальное радиоприемное устройство; 4К АЦП – четырехканальный аналого-цифровой преобразователь; 4К РГ – четырехканальный регистратор; 4К ПУП – четырехканальный построитель усредненных периодограмм; ВСР – вычислитель сигналов рассогласований по азимуту и углу места; УУ – устройство управления.

где m – формоопределяющий параметр, характеризующий степень концентрации элементов P_{ji} вблизи точки P_{jm}.

При соответствующем выборе m функция принадлежности (4) обладает фильтрующими свойствами к сильно отклоненным от P_{jm} параметрам P_{ji} и не обладает таковыми к слабо отклоненным, что позволяет предварительно оценить центральную точку шумового кластера P_{jm*} как абсциссу ее локального максимума по алгоритму

$$P_{jm*} = \arg \max_{m\in[1,\ldots,M]} \mu(P_{jm}). \qquad (5)$$

При разработке алгоритма определения центральной точки шумового кластера воспользуемся следующими положениями:

– оценивание центральной точки шумового кластера P_{jm*} по максимуму функции $\mu(P_{jm})$ из-за низкой ее крутизны вблизи точки локального максимума неэффективно;

– максимально правдоподобную оценку P_{jm*} при симметричной относительно максимума форме функции $\mu(P_{jm})$ обеспечивает ее оценивание по методу центра тяжести;

– симметричность формы функции $\mu(P_{jm})$ может нарушаться из-за наличия «хвоста» в законе распределения шумовых выборок в построенных усредненных периодограммах.

С учетом сказанного определим уточненное значение P_{jm*} по абсциссе центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $\mu(P_{jm})$ в пределах от $P_{jE(0.5m*)}$ до $P_{jE(1.5m*)}$:

$$\overline{P}_{jm*} = \frac{\sum\limits_{v=E(0.5m*)}^{E(1.5m*)} \mu(P_{jv})P_{jv}}{\sum\limits_{v=E(0.5m*)}^{E(1.5m*)} \mu(P_{jv})}, \qquad (6)$$

где $E(*)$ – целая часть от числа, стоящего в скобках.

Переформируем исходные периодограммы путем вычитания из каждого ее элемента $\overline{P}_j$ и по полученным массивам $[f_i, P_{ji} - \overline{P}_{jm*}]$ определим дисперсии шумов в каналах $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$ путем селекции и усреднения отрицательных элементов $P_{ji} - \overline{P}_{jm*}$.

Знание $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$ позволяет определить коэффициенты, характеризующие степени неидентичности третьего канала относительно первого, а второго относительно четвертого:

$$k_{31} = \sigma_1^2 / \sigma_3^2, \quad k_{24} = \sigma_4^2 / \sigma_2^2. \qquad (7)$$

Коэффициенты k_{31} и k_{24} показывают, во сколько раз необходимо увеличить коэффициенты передачи третьего и второго каналов, чтобы они сравнялись соответственно с коэффициентами передачи первого и четвертого.

Выделение сигнального кластера в каждом информационном канале произведем путем селекции и усреднения положительных элементов $P_{ji} - \overline{P}_j$, превышающих порог:

$$P_0 = 2\sigma_j^2 \ln \frac{1}{P_{лт}}, \qquad (8)$$

где $P_{лт}$ – заданная вероятность ложных тревог при обнаружении сигнала.

Обозначая через $\hat{P}_j$ усредненную мощность сигнала в каждом информационном канале, сигналы рассогласований в азимутальной α и угломестной β плоскостях запишем в виде

$$\alpha = \frac{\hat{P}_2 - \hat{P}_4 k_{24}}{\hat{P}_2 + \hat{P}_4 k_{24}}, \quad \beta = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_3 k_{31}}{\hat{P}_1 + \hat{P}_3 k_{31}}. \qquad (9)$$

Структурная схема формирователя сигналов рассогласований в плоскостях пеленгации приведена на рис. 2.

Формирователь сигналов работает следующим образом. Сигналы ИК1...ИК4 с моноимпульсной антенной системы поступают на входы четырех-

канального устройства обработки, в котором последовательно соединены: четырехканальное радиоприемное устройство 4К РПУ, четырехканальный аналого-цифровой преобразователь 4К АЦП, четырехканальный регистратор 4К РГ и четырехканальный построитель усредненных периодограмм 4К ПУП. Они выполняют функции селекции принимаемых сигналов в согласованной полосе частот и их преобразования на промежуточную частоту (ПЧ), аналогово-цифрового преобразования, регистрации и построения усредненной периодограмм $[f_i, P_{ji}]$. Построенные периодограммы поступают на входы вычислителя сигналов рассогласований по азимуту и углу места (ВСР), где производится вычисление дисперсий шумов в каналах $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$, степеней неидентичности третьего канала относительно первого $k_{31} = \sigma_3^2/\sigma_1^2$ и второго относительно четвертого $k_{24} = \sigma_2^2/\sigma_4^2$, усредненных мощностей сигналов в каналах $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3, \hat{P}_4$ и сигналов рассогласования в плоскостях пеленгации α, β. Управление работой четырехканального устройства обработки и ВСР осуществляется с устройства управления УУ.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Для проверки эффективности разработанного метода были проведены натурные испытания контура слежения, собранного по схеме: моноимпульсная АС–формирователь сигналов рассогласований–электропривод наведения по азимуту и углу места. В качестве объекта для сравнения был выбран метод, базирующийся на выравнивании коэффициентов передачи в пеленгационных каналах по контрольному источнику сигнала [3], в качестве сравниваемого параметра – уход РСН от геометрической оси АС. Имитация неидентичности производилась путем введения в каналы ИК1 и ИК2 аттенюаторов с затуханием 1 дБ. Определение входящих в (1) $\Delta\text{РСН}_{\text{рм}}$ и $\Delta\text{РСН}_{\text{и}}$ производилось путем выполнения следующей последовательности операций:

– однократное оценивание коэффициентов k_{31} и k_{24} в разработанном методе и объекте сравнения производилось путем вычисления $k_{31} = \sigma_3^2/\sigma_1^2$, $k_{24} = \sigma_2^2/\sigma_4^2$ для разработанного метода и $k_{31} = \hat{P}_3/\hat{P}_1$, $k_{24} = \hat{P}_2/\hat{P}_4$ для объекта сравнения;

– механическое совмещение геометрической оси АС с направлением на контрольный источник сигнала;

– отклонение геометрической оси АС по азимуту и углу места на ширину ДН от ранее установленного направления;

– отработка рассогласований контурами слежения, оценивание $\Delta\text{РСН}_{\text{рм}}$ и $\Delta\text{РСН}_{\text{и}}$;

– вычисление I;

– десятикратное повторение приведенных выше операций и вычисление усредненного значения I.

Параметры источника контрольного сигнала выбиралась таким образом, чтобы отношение сигнал/шум в каналах с сигналом составляло 13 дБ, а в построенных усредненных периодограммах выполнялись заданные при постановке задачи условия по числу каналов с сигналом и шумом.

По результатам проведенных измерений полученное значение выбранного показателя качества по азимутальной и угломестной координате не превысило 12%, что, по-видимому, явилось той ценой, которую пришлось заплатить за отказ от использования источника контрольного сигнала.

Это позволило определить область определения разработанного метода – т.е. системы слежения за динамическими объектами, в которых требование к отсутствию источника контрольного сигнала доминирует над требованием к показателю точности определения ухода РСН и допускается незначительное ухудшение данного показателя при условии полного обеспечения первого требования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе предложенной методики выравнивания коэффициентов передачи в пеленгационных каналах получена возможность ценой незначительного (12%) ухудшения значения ухода РСН по сравнению с полученным значением в [3] обеспечить независимость системы слежения за ДО на базе совмещенной моноимпульсной АС от источника контрольного сигнала.

Характерной чертой разработанного метода является компенсация неидентичности коэффициентов передачи в пеленгационных каналах по результатам сравнения дисперсий шумов.

Областью применения разработанного метода являются системы слежения за ДО с повышенными требованиями к скрытности работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лайлс Ж.Ф.* // Зарубеж. радиоэлектроника. 1970. № 6. С. 43.
2. *Ларионов Б.А., Музыченко Н.Ю., Фоминченко Г.Л. и др.* Способ обработки сигналов при амплитудной псевдомоноимпульсной пеленгации Пат. РФ № 2157549. Опубл. офиц. бюл. “Изобретения. Полезные модели” № 28 от 10.10.2000. С. 8.
3. *Фомичев К.И., Леонов А.И.* Моноимпульсная радиолокация. М.: Сов. радио, 1969.
4. *Музыченко Н.Ю.* // Радиотехника. 2012. № 5. С. 41.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 813–819

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 621.385.69

РАЗРАБОТКА КОЛЛЕКТОРА С МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ РЕКУПЕРАЦИЕЙ ДЛЯ ГИРОТРОНА

© 2020 г. О. И. Лукша[a], *, П. А. Трофимов[a]

[a]*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация*

**E-mail: louksha@rphf.spbstu.ru*

Поступила в редакцию 19.07.2019 г.
После доработки 19.07.2019 г.
Принята к публикации 21.11.2019 г.

Разработана четырехступенчатая коллекторная система для экспериментального гиротрона СПбПУ, основанная на пространственной сепарации электронов с разной энергией в скрещенных электрическом и магнитном полях. Определены условия использования данной системы для эффективной рекуперации остаточной энергии электронов в отработанном пучке. Произведено численное моделирование рекуператора и выполнен анализ распределений электрического и магнитного полей в коллекторной области гиротрона. В результате теоретических оценок и проведенного траекторного анализа винтового электронного потока показано, что разработанная система обеспечивает рекуперацию остаточной энергии электронов, необходимую для достижения полного КПД гиротрона, превышающего 70%.

DOI: 10.31857/S0033849420080082

ВВЕДЕНИЕ

Гиротроны в настоящий момент являются наиболее эффективными среди мощных приборов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн. Данные приборы занимают особую нишу между традиционными вакуумными и оптическими устройствами, имеющими ограничения по уровню выходной мощности и КПД в указанных диапазонах длин волн. Гиротроны применяются при нагреве плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза, спектроскопии высокого разрешения, температурной обработке материалов и в ряде других приложений (например, [1]).

Гиротрон представляет собой мазер на циклотронном резонансе, использующий энергию поперечного движения электронов винтового электронного пучка (ВЭП) для генерации высокочастотного электромагнитного излучения. Электронный КПД гиротрона $\eta_{эл}$, определяемый эффективностью передачи энергии электронов ВЧ-излучению, как правило, не превышает 30...40% [2]. Энергия отработанного потока, оставшаяся после взаимодействия электронов с ВЧ-полем в резонаторе, рассеивается на коллекторе прибора в виде тепла. Перспективным методом повышения полного КПД гиротронов, как и других вакуумных СВЧ-приборов, является реализация коллекторов с рекуперацией остаточной энергии пучка. В таких устройствах на коллектор подается отрицательное относительно корпуса прибора напряжение, вследствие чего электроны до осаждения на металлических стенках тормозятся в электрическом поле и, как следствие, отдают часть своей энергии обратно в электрическую цепь.

В настоящее время в мощных гиротронах широко внедряются коллекторные системы с одноступенчатой рекуперацией энергии. Полный КПД таких гиротронов достигает 50...55% [1–3]. Дальнейшее увеличение эффективности возможно при реализации коллекторных систем с многоступенчатой рекуперацией энергии. В системах подобного рода происходит пространственная сепарация электронных фракций с различной кинетической энергией и последующее осаждение этих фракций на коллекторные электроды, имеющие различный задерживающий потенциал. В коллекторной области гиротронов индукция магнитного поля заметно меньше, чем в резонаторе. Как следствие, практически вся энергия электронов сосредоточена в их продольном (вдоль силовой линии магнитного поля) движении, что может упростить реализацию многоступенчатой рекуперации. При увеличении числа ступеней торможения, очевидно, возрастает максимальный полный КПД прибора. Однако системы с многоступенчатой рекуперацией пока еще не были реализованы в гиротронах, что обусловлено присущему отработанному ВЭП разбросу элек-

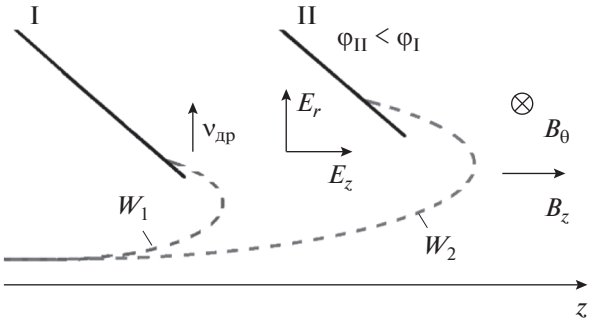

Рис. 1. Траектории электронов с разной начальной энергией W в скрещенных электрическом и магнитном полях: I, II – секции коллектора под различными потенциалами φ_I и φ_{II} ($\varphi_{II} < \varphi_I$).

тронов по компонентам скорости и поперечным координатам, а также наличию остаточного магнитного поля в коллекторной области.

На данный момент известен ряд методов пространственной сепарации электронов с разной энергией, которые могут быть использованы в системах многоступенчатой рекуперации. Среди них метод, основанный на радиальном дрейфе заряженных частиц в скрещенных магнитном и электрическом полях, представляется наиболее перспективным и активно исследуется в настоящее время несколькими научными группами. Были предложены и теоретически исследованы несколько конструкций коллекторов, в которых дрейф электронов осуществляется в продольном магнитном и азимутальном электрическом полях [4–6]. Альтернативным подходом, предложенным авторами данной работы, является использование для радиального дрейфа электронов продольного электрического и азимутального магнитного полей [7, 8].

В данной работе выполнен анализ возможностей реализации четырехступенчатой системы рекуперации с азимутальным магнитным полем для экспериментального импульсного гиротрона СПбПУ с рабочей частотой 74.2 ГГц и выходной СВЧ-мощностью ~100 кВт [9]. Обсуждаются основные критерии выбора параметров электродов и магнитных катушек для достижения эффективной рекуперации остаточной энергии электронов отработанного пучка. Произведен анализ распределений полей в разработанной системе рекуперации, а также конструктивных особенностей, ограничивающих ее возможности, и способов, позволяющих уменьшить негативное влияние этих особенностей. Представлены результаты расчета траекторий электронов отработанного пучка, подтверждающие перспективность предложенного метода пространственной сепарации электронов в скрещенных полях и возможности разработанной системы рекуперации для достижения рекордных значений полного КПД гиротрона.

1. ПРИНЦИП СЕПАРАЦИИ

Метод пространственной сепарации электронов, лежащий в основе разработанной системы рекуперации, предполагает в дополнение к удерживающему пучок продольному магнитному полю B_z и тормозящему продольному электрическому полю E_z введение азимутального магнитного поля B_θ. В основе принципа сепарации лежит радиальный дрейф электронов в скрещенных продольном электрическом и азимутальном магнитном полях, скорость которого определяется отношением E_z/B_θ.

На рис. 1 представлены схематически траектории двух электронов с разной начальной энергией при их движении в области, где имеется магнитное поле с компонентами B_z и B_θ, а также электрическое поле, созданное с помощью электродов I и II под различными потенциалами. Вклад в радиальный дрейф в данной конфигурации электродов вносит продольная компонента электрического поля E_z. При этом продольный дрейф под действием полей $E_r \times B_\theta$ не влияет принципиально на сепарацию электронов. Величину напряженности электрического поля E_z можно регулировать наклоном секций-электродов. Скорость дрейфа $v_{др}$ зависит только от величин полей и не зависит от энергии электронов. Следовательно, дрейфовое расстояние определяется исключительно временем, в течение которого электрон находится в области скрещенных полей, а оно, в свою очередь, определяется начальной энергией электрона W (см. рис. 1). При надлежащем выборе величин полей может быть обеспечена пространственная сепарация электронов, достаточная для осаждения фракций пучка с разной энергией на различных секциях коллектора.

При движении электронов в тормозящем электрическом поле возможно изменение направления их продольной скорости на обратное. При наличии ведущего магнитного поля B_z такие отраженные электроны могут выходить из коллекторной области и достигать резонатора, если не обеспечен радиальный дрейф, достаточный для их осаждения на одной из секций коллектора. Взаимодействуя в резонаторе с высокочастотным полем, отраженные электроны могут отбирать от него энергию, что отрицательно влияет на величину выходной СВЧ-мощности. Однако таким влиянием в принципе можно пренебречь, если коэффициент отражении электронов от коллектора не превышает 1...2% [10].

Можно обосновать следующие основные требования к источникам электрического и магнитного полей, которые позволят реализовать эффективную многоступенчатую рекуперацию энергии отра-

ботанного пучка в гиротронах, основанную на описанном выше методе. Во-первых, дрейфовое расстояние, которое проходят электроны в радиальном направлении при их движении в области торможения до осаждения на одном из электродов, должно заметно превышать толщину стенки полого ВЭП. Таким образом будет обеспечено осаждение электронов на секциях коллектора без их отражения в сторону резонатора. Во-вторых, амплитуда электрического и магнитного полей должна изменяться незначительно вдоль продольной координаты z в области рекуперации. Это необходимо для сохранения приемлемых продольных размеров коллекторной системы, а также для более равномерного распределения температурной нагрузки на секции коллектора. В-третьих, в переходной области между резонатором и коллектором магнитное и электрическое поля должны изменяться в пространстве адиабатически. В случае неадиабатически меняющихся полей электроны могут приобретать дополнительную поперечную скорость, что увеличивает вероятность их отражения в сторону резонатора и приводит к снижению эффективности рекуперации, поскольку часть электронов может не достигать секции, потенциал которой соответствует их энергии, и осаждаться на предыдущей по порядку секции под более положительным потенциалом.

2. РАЗРАБОТКА ЧЕТЫРЕХСТУПЕНЧАТОЙ КОЛЛЕКТОРНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ГИРОТРОНА СПбПУ

Моделирование коллекторной системы было выполнено для импульсного гиротрона средней мощности 4-миллиметрового диапазона длин волн. Ранее в этом гиротроне были проведены комплексные экспериментальные исследования, направленные на поиск методов повышения качества ВЭП и, как следствие, эффективности работы прибора [9, 11, 12]. Основные параметры рабочего режима экспериментального гиротрона СПбПУ приведены ниже:

Ускоряющее напряжение U_0, кВ	30
Ток пучка $I_п$, А	10
Частота генерации $f_г$, ГГц	74.2
Рабочая мода	$TE_{12,3}$
Длительность импульса тока пучка τ, мкс	30...60
Индукция магнитного поля в резонаторе $B_{рез}$, Тл	2.75

Электронный поток в нем формируется с помощью трехэлектродной магнетронно-инжекторной пушки (МИП). Магнитная система гиротрона состоит из соленоидов, для питания которых используется емкостной накопитель, работающий в режиме разовых импульсов.

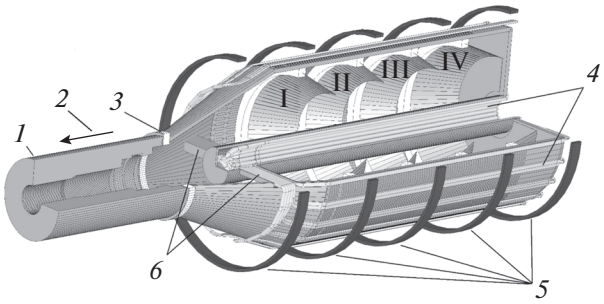

Рис. 2. Схематическое изображение модели коллектора: *1* – корпус гиротрона; *2* – направление к резонатору гиротрона; *3* – изолятор; *4* – тороидальный соленоид; *5* – катушки Гельмгольца; *6* – “жгуты” проводов; I–IV – секции коллектора.

Были сконструированы элементы коллекторной системы для реализации многоступенчатой рекуперации остаточной энергии пучка, основываясь на требованиях, приведенных в разд. 1. Трехмерное изображение модели коллектора гиротрона представлено на рис. 2. Моделирование коллекторной системы и расчеты траекторий электронов были выполнены с помощью программы трехмерного численного моделирования CST Studio Suite[1].

Для удержания электронного потока в области коллектора используется серия катушек Гельмгольца, создающих в сочетании с катушками магнитной системы гиротрона квазиоднородное распределение магнитного поля B_z вдоль продольной координаты z на длине области рекуперации. Азимутальное магнитное поле B_θ формируется с помощью соленоида с тороидальной намоткой. С входного торца этого соленоида, обращенного к резонатору, провода сгруппированы в два “жгута” для обеспечения доступа электронов в область рекуперации, где имеются скрещенные $E_z \times B_\theta$ поля. Намотка по внешнему радиусу может быть выполнена с помощью проводов с увеличенной площадью поперечного сечения для улучшения однородности распределения азимутального поля по азимуту в области рекуперации.

Четыре конических электрода I–IV являются ступенями рекуператора, служащими для торможения электронов и их осаждения на металлических стенках. Потенциалы секций уменьшаются в сторону от резонатора. Геометрические размеры секций были выбраны, исходя из требований разд. 1 и оценок дрейфовых расстояний электронов с разной энергией при заданных значениях E_z и B_θ. Корректировка размеров секций осуществ-

[1] Электронный ресурс: http://www.cst.com.

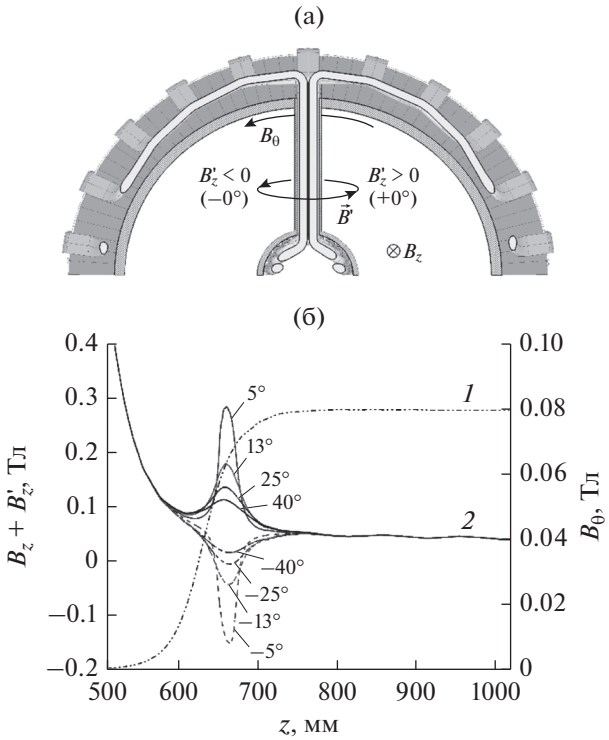

Рис. 3. Схематическое изображение сечения коллектора в плоскости "жгутов" тороидального соленоида (а); распределение индукции магнитного поля вдоль z (б): азимутальной компоненты $B_\theta(z)$ (*1*), а также суммарной продольной компоненты $B_z(z) + B'_z(z)$ (*2*) при разных значениях азимутальной координаты, отсчитываемой от центральной плоскости "жгута" в положительную +θ (сплошные линии) и отрицательную –θ (пунктирные линии) сторону.

лялась по результатам траекторного анализа (см. далее в разд. 3). Судя по этим результатам, практически все электроны осаждаются на внешних стенках секций (см. рис. 1). Изменяя их угол наклона, можно добиться уменьшения угла падения первичных электронов на поверхность, что дополнительно снижает тепловую нагрузку на коллектор. Эмитированные с коллектора вторичные электроны, в принципе, могут оказывать негативное влияние на работу прибора, если имеется возможность их попадания в резонатор. Однако при наличии скрещенных $E_z \times B_\theta$ полей и конусной форме электродов такая возможность практически исключена, что является одним из преимуществ рассматриваемого метода пространственной сепарации [7].

Рисунок 3 демонстрирует распределение компонент магнитного поля в коллекторной области. Здесь и далее отсчет вдоль продольной координаты z, совпадающей с осью прибора, ведется от центра эмитирующего пояска катода гиротрона. Область вблизи одного из "жгутов" при наблюдении от резонатора показана на рис. 3а. Ток, протекающий по проводам в "жгуте", создает дополнительное магнитное поле B' в его окрестности. Продольная компонента этого поля имеет как попутное ($B'_z > 0$), так и встречное ($B'_z < 0$) направление по отношению к направлению основного поля B_z, создаваемого магнитной системой гиротрона и катушками Гельмгольца. На рис. 3б приведены продольная и азимутальная компоненты суммарного магнитного поля в зависимости от координаты z. Значения B_z, B'_z, B_θ для каждого z определяли при значении радиальной координаты r, совпадающей со средним радиусом ВЭП при его движении в поле магнитной системы гиротрона и катушек Гельмгольца и выключенном тороидальном соленоиде. Электроны, влетающие в рекуператор со стороны "+θ" (см. рис. 3а), могут оказаться в рекуператоре на слишком малых радиусах, когда пройденного ими дрейфового расстояния будет недостаточно, чтобы попасть на одну из секций. Такие электроны, очевидно, повышают коэффициент отражения от коллектора. Если электроны попадают в коллектор со стороны "–θ", то около "жгута" направление результирующего продольного магнитного поля для таких электронов может меняться на противоположное. Подобный реверс магнитного поля приводит к заметному изменению поперечной скорости и возможному отражению электронов непосредственно на этом участке.

Чтобы уменьшить возмущающее действие магнитного поля "жгутов" на прохождение электронов в область рекуперации, в расчетах был использован секционированный катод. В этом катоде отсутствовала эмиссия с двух секторов эмитирующего пояска, азимутальное положение которых соответствовало положению "жгутов". Основываясь на результатах траекторного анализа, был выбран оптимальный размер этих секторов в азимутальном направлении, равный 70°. При таком размере секторов отсутствуют электроны, проходящие в области реверса продольного магнитного поля (рис. 3б), и в целом заметно уменьшено отражение электронов от коллектора по сравнению с катодом с однородной эмиссией. В области рекуперации ($z > 750$ мм) продольная компонента индукции магнитного поля B_z слабо меняется вдоль координаты z и равна примерно 0.05 Тл.

Как показал выполненный ранее траекторный анализ [7], при $B_z = 0.05$ Тл средний радиус пучка равен $R_{ср} \approx 55$ мм, а его толщина $\Delta R \approx 3$ мм. В области рекуперации значение B_θ на среднем радиусе пучка равно примерно 0.08 Тл (см. рис. 3б). Оценки, полученные при решении уравнений движения электронов в полях, заданных аналитически [13], показывают, что дрейфовое расстояние для электронов при типичных значениях их начальной энергии заметно превышает ΔR. Например, при $B_z = 0.05$ Тл, $B_\theta = 0.08$ Тл и $E_z = 1$ кВ/см электрон за время до изменения направления

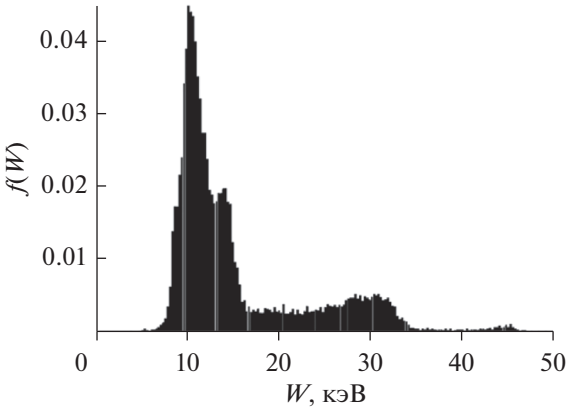

Рис. 4. Распределение электронов отработанного ВЭП по энергии в оптимизированном режиме работы гиротрона (электронный КПД $\eta_{эл} = 45\%$, $U_0 = 30$ кВ). Диапазон энергий электронов разбит на 400 интервалов.

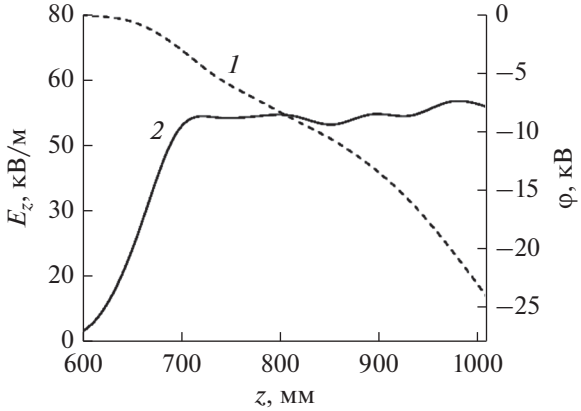

Рис. 5. Потенциал (*1*) и электрическое поле (*2*), определенные на радиусе, соответствующем среднему радиусу полого ВЭП, в зависимости от продольной координаты z при оптимизированных потенциалах секций коллектора.

продольной скорости на обратное смещается по радиусу на расстояние $\Delta R_{др}$ от 7 до 14 мм при изменении его начальной энергии от 8 до 38 кэВ. При этом следует учесть, что поскольку основная часть электронов осаждается на внешних стенках секций коллектора (см. рис. 1), то их дрейфовое расстояние превышает величину $\Delta R_{др}$.

3. ТРАЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ОТРАБОТАННОГО ВЭП В КОЛЛЕКТОРНОЙ ОБЛАСТИ ГИРОТРОНА

Для определения характеристик отработанного пучка были проведены расчеты электронных траекторий в электронно-оптической системе гиротрона и затем расчеты взаимодействия ВЭП с высокочастотным полем в резонаторе. В первом случае был использован вычислитель Tracking Solver, а во втором – PIC Solver, входящие в пакет моделирования CST Studio Suite. В качестве источника электронов использовали секционированный катод, описанный в разд. 2. В состав катодного узла МИП входил управляющий электрод, изменением потенциала которого можно было регулировать распределение электрического поля в прикатодной области [14]. Описанные ниже расчеты были выполнены для режима работы гиротрона, в котором за счет оптимизации распределений электрического и магнитного полей в области формирования ВЭП [9, 11, 14, 15] было обеспечено высокое качество пучка с низкими значениями скоростного и энергетического разбросов и высоким значением питч-фактора $\alpha = v_\perp/v_\parallel$, равным примерно 1.52. В этом режиме вычисленное значение выходной СВЧ-мощности составило 138 кВт, а электронного КПД гиротрона – 46%. Поток, прошедший через резонатор и состоящий из примерно 25×10^3 частиц, служил входным интерфейсом для расчета электронных траекторий в коллекторе. Энергетический спектр частиц в этом потоке показан на рис. 4.

Дальнейшей целью было достижение минимального значения мощности $P_{расс}$, рассеиваемой на стенках коллекторных секций, при достаточно малом отражении электронов в сторону резонатора, не превышающем 1.5%. Для этого изменяли внутренний радиус конусных секций, расстояние между секциями и их потенциалы $\varphi_{I–IV}$, а также азимутальное положение катодных секторов, в которых отсутствовала эмиссия электронов. Основное влияние на коэффициент отражения оказывает, очевидно, значение потенциала первой секции φ_I. Для обеспечения малого отражения величина $|e\varphi_I|$ не должна заметно превышать минимальную энергию электронов в спектре отработанного ВЭП $W_{мин}$. В типичных режимах работы гиротрона $W_{мин}$ составляет 20...30% от eU_0 [3, 16], что позволяет реализовать достаточно эффективную рекуперацию энергии даже в одноступенчатой схеме. Важное влияние на коэффициент отражения электронов от коллектора оказывает также величина внутреннего радиуса первой секции и взаимное положение “жгутов” и катодных секторов с подавленной эмиссией.

В результате проведенной оптимизации были выбраны следующие значения потенциалов секций коллектора: $\varphi_I = -7.72$ кВ, $\varphi_{II} = -10.72$ кВ, $\varphi_{III} = -14.72$ кВ, $\varphi_{IV} = -24.72$ кВ. Потенциалы указаны относительно заземленного корпуса коллектора. Продольное распределение электрического поля и потенциала в коллекторе при данных потенциалах секций, определенное на радиусе, соответствующем среднему радиусу полого ВЭП, показано на рис. 5. Для обеспечения квазиоднородного продольного электрического поля в области рекуперации ($z > 750$ мм) у секций коллектора имелись цилиндрические основания (см. ниже на рис. 7),

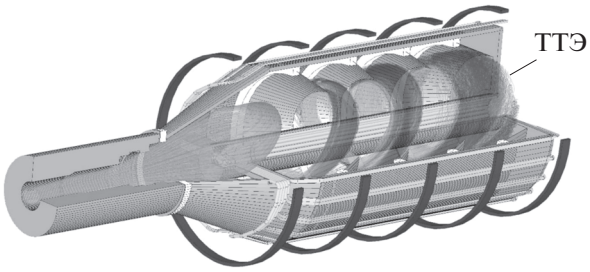

Рис. 6. Распространение отработанного ВЭП в коллекторной системе: ТТЭ – трехмерные траектории электронов; цилиндрические части секций, экранирующие рабочее пространство от заземленного корпуса коллектора, в целях наглядности траекторий не показаны.

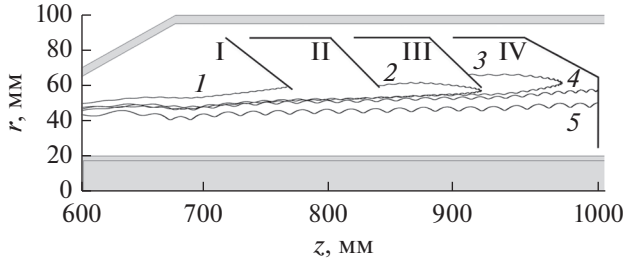

Рис. 7. Траектории электронов *1–5* (см. табл. 1) в плоскости *r–z*; I–IV – секции коллектора. Элементы магнитной системы на рисунке не показаны.

экранирующие рабочее пространство от заземленного корпуса коллектора.

В результате расчета траекторий электронов в коллекторе с оптимизированной геометрией секций и указанными выше их значениями потенциалов φ_{I-IV} было получено значение рассеиваемой на коллекторе мощности $P_{расс}$, равное 54.19 кВт, при токе отраженных электронов, составляющем 1.37% от $I_п$. На рис. 6 показаны рассчитанные 3D траектории электронов в этом режиме. Видно, что использование секционированного эмиттера обеспечивает прохождение электронов в область рекуперации без их осаждения на соединительных трубках “жгутов”.

Положение электронных траекторий в плоскости *r–z* приведено на рис. 7. Для лучшей наглядности из всего потока частиц были выбраны траектории электронов, имеющих разные значения энергии, питч-фактора и радиальной координаты во входной плоскости z = 320 мм и проходящих примерно на равном удалении от “жгутов”. Входные значения параметров электронных траекторий указаны в табл. 1. Средний питч-фактор электронов во входной плоскости равен примерно 0.59. Поскольку обмен энергией между ВЭП и электромагнитным полем в резонаторе сопровождается изменением поперечной скорости электронов, то можно предположить, что с ростом энергии частиц в отработанном пучке возрастает и их питч-фактор. Представленные траектории демонстрируют корректную работу метода пространственной сепарации электронов в скрещенных $E_z \times B_\theta$ полях в разработанной коллекторной системе, обеспечивающей осаждение частиц с разной энергией на секциях под соответствующем потенциалом.

Таблица 1. Входные параметры электронных траекторий

Номер траектории (см. рис. 7)	Энергия, кэВ	Питч-фактор	Радиус, мм
1	8.270	0.45	9.34
2	13.781	0.45	8.7
3	21.264	0.74	9.04
4	28.097	0.83	9.03
5	46.368	1.65	8.63

В рассмотренном режиме работы гиротрона полный КПД прибора составил

$$\eta_п = \frac{P_{ВЧ}}{P_{ВЧ} + P_{расс}} = 71.8\%,$$

где $P_{ВЧ}$ = 138 кВт, $P_{расс}$ = 54.19 кВт. Распределение мощности по электродам коллектора было следующим: мощности на секциях P_I = 36.15 кВт, P_{II} = 4.79 кВт, P_{III} = 5.24 кВт, P_{IV} = 7.58 кВт, мощность на корпусе коллектора $P_{колл}$ = 0.43 кВт. КПД рекуперации при этом равен 66.5%. Видно, что в разработанной системе основная часть электронов осаждается на первой секции. Это является следствием необходимости уменьшения радиуса внутреннего отверстия этой секции и снижения величины $|e\varphi_I|$ для того, чтобы обеспечить относительно небольшое отражение электронов в сторону резонатора. Основными причинами отражения электронов и непопадания их на соответствующую секцию являются возмущающее действие магнитного поля “жгутов” и имеющийся разброс электронов по радиальным координатам на входе в рекуператор. Если допустимый порог отражения повысить, то можно добиться увеличения полного КПД.

Отметим, что для спектра отработанного ВЭП, показанного на рис. 4, в случае четырехступенчатого коллектора с идеальной сепарацией, когда любой из электронов попадает на секцию с потенциалом, соответствующим его энергии, максимальный полный КПД равен 81.2% для остаточной энергии электронов при их осаждении на секциях $W_{ост}$ > 0.5 кэВ и 83.6% для $W_{ост}$ > 0 (при отражении от коллектора, равном 1.37% от $I_п$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках данной работы была разработана конструкция четырехступенчатого рекуператора, основанного на методе пространственной сепарации электронов в скрещенных азимутальном магнитном и аксиальном электрическом полях. Проведенное проектирование и численное моделирование показало, что практическая реализация многоступенчатых коллекторов возможна для импульсных гиротронов, таких как экспериментальный гиротрон СПбПУ.

Расчеты траекторий электронов показали возможность достижения необходимого пространственного разделения электронов с различными энергиями при наличии характерных разбросов радиальных координат и скоростей электронов. Недостатки предложенной коллекторной системы в основном связаны с локальными неоднородностями магнитного поля, создаваемыми “жгутами” проводов. Способом снижения негативного влияния этих неоднородностей на эффективность рекуперации может быть использование секционированного катода. В оптимальном режиме работы гиротрона был достигнут полный КПД 71.8% при КПД рекуперации 66.5% и токе отраженных от коллектора электронов, составляющем 1.37% от полного тока ВЭП.

С использованием данных моделирования была спроектирована и изготовлена четырехступенчатая коллекторная системы для гиротрона СПбПУ. Первые экспериментальные результаты показали возможности достижения значений полного КПД, равного 60% в одноступенчатом режиме, что позволяет надеяться на успешную реализацию и многоступенчатой схемы рекуперации. Возможности дальнейшего совершенствования разработанного метода рекуперации связаны, очевидно, с улучшением конструкции магнитной системы, обеспечивающей требуемое распределение азимутального магнитного поля.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-12-10010-П). Часть результатов была получена с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (http://www.scc.spbstu.ru).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thumm M.* State-of-the-art of High Power Gyro-Devices and Free Electron Masers, update 2017. Karlsruhe: Institute of Technology, 2018.
2. *Запевалов В.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 10. С. 864.
3. *Morozkin M.V., Glyavin M.Y., Denisov G.G., Luchinin A.G.* // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 2008. V. 29. № 11. P. 1004.
4. *Pagonakis I.Gr., Hogge J.-P., Alberti S. et al.* // IEEE Trans. 2008. V. PS-36. № 2. P. 469.
5. *Wu C., Pagonakis I.G., Avramidis K.A. et al.* // Phys. of Plasmas. 2018. V. 25. № 3. P. 033108.
6. *Wu C., Pagonakis I.G., Albert D. et al.* // Phys. of Plasmas. 2019. V. 26. № 1. P. 013108.
7. *Лукша О.И., Трофимов П.А.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. № 18. С. 38.
8. *Louksha O.I., Trofimov P.A.* // Proc. 18th Int. Vacuum Electronics Conf. (IVEC 2017). London. April 24–26. N.Y.: IEEE, 2017. P. 8289518.
9. *Louksha O.I., Sominski G.G., Arkhipov A.V. et al.* // IEEE Trans. 2016. V. PS-44. № 8. P. 1310.
10. *Sakamoto K., Tsuneoka M., Kasugai A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. № 26. P. 3532.
11. *Лукша О.И., Самсонов Д.Б., Соминский Г.Г., Семин С.В.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 5. С. 132.
12. *Касьяненко Д.В., Лукша О.И., Пиосчик Б. и др.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. Вып. 5–6. С. 463.
13. *Молоковский С.И., Сушков А.Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
14. *Лукша О.И., Самсонов Д.Б., Соминский Г.Г., Цапов А.А.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 6. С. 101.
15. *Лукша О.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52. № 5–6. С. 425.
16. *Manuilov V.N., Morozkin M.V., Luksha O.I., Glyavin M.Y.* // Infrared Phys. and Technol. 2018. V. 91. № 1. P. 46.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 820–826

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 621.382.2

ВЫСОКОВОЛЬТНЫЕ БЫСТРОВОССТАНАВЛИВАЮЩИЕСЯ ЛАВИННЫЕ ДИОДЫ НА ОСНОВЕ КАРБИДА КРЕМНИЯ

© 2020 г. П. А. Иванов[a, *], Т. П. Самсонова[a], А. С. Потапов[a], М. Ф. Кудояров[a]

[a]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
ул. Политехническая, 26, Санкт-Петербург, 194021 Российская Федерация

*E-mail: Pavel.Ivanov@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 04.06.2018 г.
После доработки 02.08.2019 г.
Принята к публикации 15.08.2019 г.

Представлены лабораторные образцы высоковольтных (1560 В) быстровосстанавливающихся (20 нс) лавинных диодов на основе карбида кремния. Показано, что изготовленные диоды способны рассеивать в режиме одиночных лавинных импульсов тока (длительность импульса 1 мкс) энергию до 2.9 Дж/см^2. Численный расчет нестационарного теплового процесса показал, что в результате саморазогрева лавинным импульсом локальная температура в базовой области диодов достигает величины не менее 1100 К.

DOI: 10.31857/S0033849420070050

ВВЕДЕНИЕ

Развитие силовой электроники постоянно сопровождается внедрением новых технологий, повышающих эффективность и надежность работы преобразовательных устройств. В ближайшие годы следует ожидать широкого внедрения в силовую электронику приборов на основе материалов с большой шириной запрещенной зоны, в первую очередь на основе карбида кремния политипа 4H (4H-SiC) (см., например, [1]). Как полупроводниковый материал 4H-SiC по основным электрофизическим свойствам – ширине запрещенной зоны, предельной скорости носителей тока, напряженности поля лавинного пробоя, теплопроводности – в несколько раз превосходит кремний [2]. Использование силовых диодов и транзисторов на основе 4H-SiC взамен Si-приборов позволит более чем в 100 раз улучшить соотношение между мощностью и быстродействием [3]. В импульсных преобразователях большой эффект может дать переход на более высокие частоты коммутации. Так, преобразователь на основе силовых 4H-SiC-диодов и транзисторов может иметь в 5–10 раз большую частоту преобразований по сравнению с Si-приборами за счет более высокой теплопроводности 4H-SiC. Кроме того, возможность работы 4H-SiC-приборов при высоких температурах позволяет резко уменьшить габариты систем охлаждения и упростить конструкцию преобразователей. Все это дает возможность снизить массогабаритные показатели последних, что, в свою очередь, обеспечит создание более компактных схем с повышенными характеристиками по надежности.

В настоящее время широкое распространение получили высоковольтные (600...1700 В) диоды Шоттки (ДШ) на основе 4H-SiC (см., например, [https://www.wolfspeed.com/power/products]), которые предназначены для работы в составе силовых импульсных преобразователей. Достоинствами 4H-SiC-ДШ являются предельно высокое быстродействие (ДШ работают на основных носителях) и относительно небольшое напряжение включения в прямом направлении (высота барьера Шоттки составляет около 1 эВ). Однако 4H-SiC-ДШ имеют ограничения по максимальной рабочей температуре (175°С) и демонстрируют сравнительно высокий уровень утечек в обратном направлении (до нескольких сотен микроампер). Кроме того, планарные 4H-SiC-ДШ не предназначены для работы в лавинном режиме, поскольку для них существует проблема создания высокоэффективной охранной системы, предотвращающей деструктивный краевой пробой. Диоды с *p–n*-переходом на основе 4H-SiC потенциально способны работать при температурах до 700°С (диффузионная разность потенциалов *p–n*-перехода около 3 эВ) и имеют чрезвычайно малый уровень утечек (в наноамперном диапазоне). Для них можно создать эффективную охранную систему, позволяющую диодам работать в лавинном режиме. Быстродействие диодов с *p–n*-переходом принципиально может быть приближено к быстродействию ДШ за счет уменьшения времени жизни

инжектированных носителей, например, с помощью радиационных методов (такие диоды будут работать без модуляции сопротивления базы неосновными носителями, как и диоды Шоттки).

В силовой электронике востребованы диоды, способные к работе в режиме мощного контролируемого лавинного пробоя. Такие диоды необходимы для импульсных преобразователей с повышенными требованиями по надежности. Лавинные диоды могут применяться в качестве быстродействующих ограничителей импульсных перенапряжений, возникающих, например, в схемах с индуктивной нагрузкой. Также лавинные диоды могут применяться в качестве ограничителей СВЧ-мощности. Необходимо также отметить применение лавинных диодов для изготовления высоковольтных столбов. Лавинные диоды, соединенные последовательно в столб, позволяют более равномерно распределять напряжение между обратносмещенными диодами и тем самым предотвращать выход всей линейки из строя в случае перенапряжения на одном или нескольких диодах одновременно. Для всех перечисленных выше применений желательно, чтобы диод, работающий в лавинном режиме, обладал способностью рассеивать большую мощность.

В данной работе продемонстрированы лабораторные образцы высоковольтных быстровосстанавливающихся лавинных диодов (БВЛД) с *p*–*n*-переходом на основе 4H-SiC, имеющих быстродействие, сравнимое с промышленными 4H-SiC-ДШ, и способных рассеивать в режиме одиночных лавинных импульсов большую энергию.

1. ОБРАЗЦЫ ДИОДОВ

Диоды были изготовлены на основе пластины 4H-SiC *n*-типа с эпитаксиальными *p*- и *n*-слоями, пластина была изготовлена по нашему заказу фирмой Wolfspeed (США) [https://www.wolfspeed.com/materials/products/sic-epitaxy]. Постростовая технология изготовления диодов состояла из следующих основных процессов:

1) формирование омических контактов к верхнему эпитаксиальному *p*-слою и к *n*-подложке. Были изготовлены структуры с площадью анодных контактов 0.049 и 1 мм^2;

2) формирование охранной системы на периферии анодных контактов для предотвращения преждевременного краевого пробоя;

3) резка пластины с диодными структурами на чипы;

4) облучение чипов высокоэнергетичными протонами на уникальной научной установке (УНУ) “Циклотрон ФТИ” для уменьшения заряда обратного восстановления диодов. Диоды на основе 4H-SiC способны блокировать большое обратное напряжения при сравнительно высоком уровне легирования базы. Это позволяет 4H-SiC-диодам с *p*–*n*-переходом эффективно работать и без модуляции проводимости блокирующей базы инжектированными носителями. В этом случае для повышения быстродействия диодов целесообразно уменьшать время жизни неравновесных носителей заряда (ННЗ), например, облучением протонами. При облучении протонами генерируются дополнительные рекомбинационные центры и, соответственно, уменьшается время жизни ННЗ. А чем меньше время жизни, тем меньше заряд, вносимый в базу диода прямым током, и, соответственно, заряд обратного восстановления;

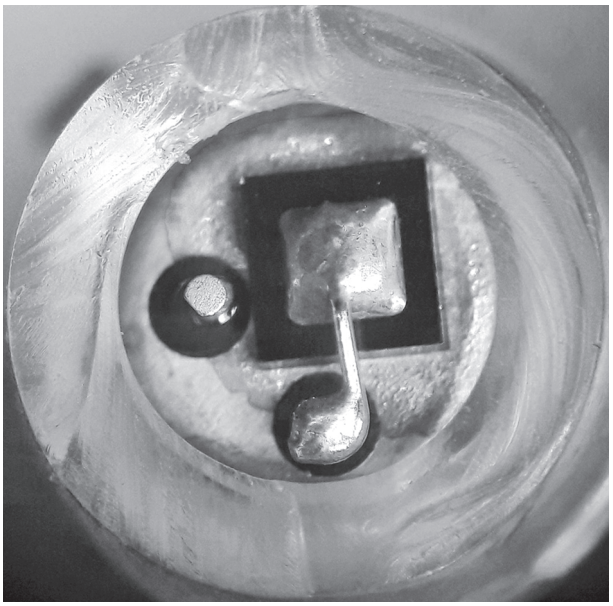

Рис. 1. Быстровосстанавливающийся лавинный диод на основе 4H-SiC, смонтированный в маломощном металлостеклянном корпусе с помощью пайки свинцово-оловянным припоем; площадь анода 1 мм^2.

5) напаивание чипов в металлостеклянный корпус и распайку проволочных выводов (рис. 1);

6) заливка корпуса силиконовым гелем.

2. ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ 4H-SiC-БВЛД

На рис. 2 представлены типовые вольт-амперные характеристики (ВАХ) диодов в прямом направлении (при токах до 10 А) (рис. 2а) и в обратном направлении (при токах 2 мА) (рис. 2б), записанные с помощью цифрового характериографа Л2-100 (запись проводилась в режиме однократного запуска развертки по напряжению). В прямом направлении напряжение открывания диодов составляет около 2.8 В (эта величина приблизительно равна контактной разности потенциалов 4H-SiC *p*–*n*-перехода). Дифференциальное сопротивление диодов в открытом состоянии составляет около 0.3 Ом. Как

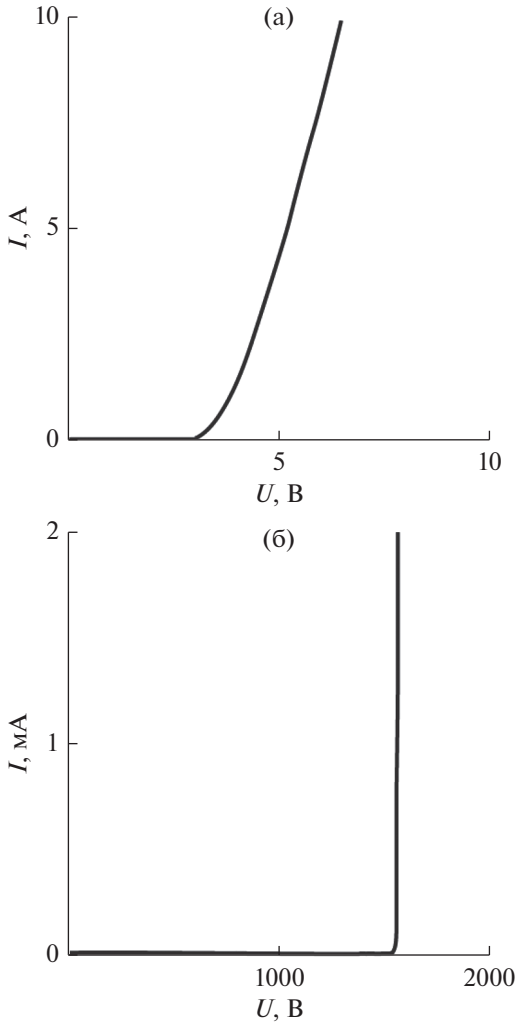

Рис. 2. Прямая (а) и обратная (б) ВАХ изготовленных 4H-SiC БВЛД; площадь *p–n*-перехода 1 мм^2; температура комнатная.

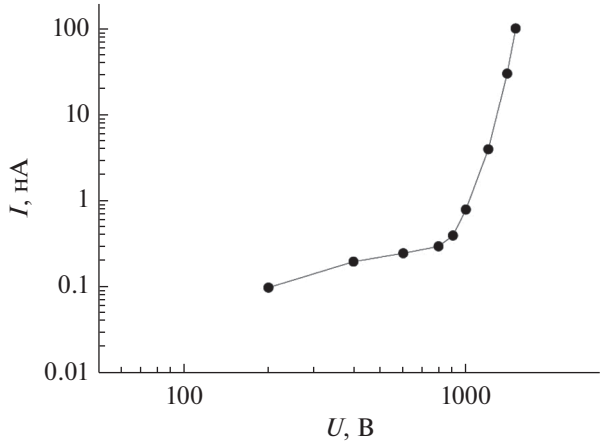

Рис. 3. Обратная ВАХ изготовленных 4H-SiC БВЛД, измеренная в допробойном режиме; площадь *p–n*-перехода 1 мм^2; температура комнатная.

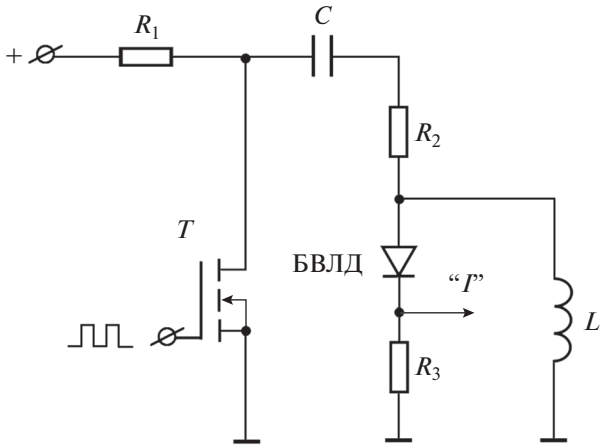

Рис. 4. Схема измерений характеристик ОВ.

видно из рис. 2б, резкий пробой диодов в обратном направлении наступает при напряжении 1560 В.

На рис. 3 показана типовая обратная ВАХ, измеренная на постоянном токе при напряжениях до 1500 В и построенная в двойном логарифмическом масштабе. Как видно, при комнатной температуре обратный ток относительно слабо растет при увеличении напряжения приблизительно до 800 В, не превышая при этом величины 0.5 нА. Далее обратный ток начинает увеличиваться резче, но вплоть до напряжения 1500 В его величина не превышает 100 нА.

3. ОБРАТНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ 4H-SiC-БВЛД

Измерения характеристик обратного восстановления (ОВ) диодов проводились с помощью импульсной схемы, показанной на рис. 4. В исходном состоянии МОП-транзистор *T* закрыт, а накопительный конденсатор *C* заряжен до напряжения источника питания положительной полярности. На затвор транзистора *T* подаются парные положительные открывающие импульсы. Во время первого импульса транзистор *T* открывается, БВЛД оказывается под обратным напряжением, а индуктивность *L* заряжается током разряда накопительного конденсатора через открытый транзистор *T* и ограничительный резистор R_2. Когда транзистор *T* закрывается, индуктивность *L* разряжается через прямосмещенный БВЛД и резистор R_3, формируя прямой ток накачки. Во время второго импульса транзистор *T* вновь открывается, БВЛД вновь оказывается под обратным напряжением, и через него течет обратный ток вплоть до полного восстановления блокирующей способности. Временная зависимость тока через измерительный резистор R_3 регистрируется

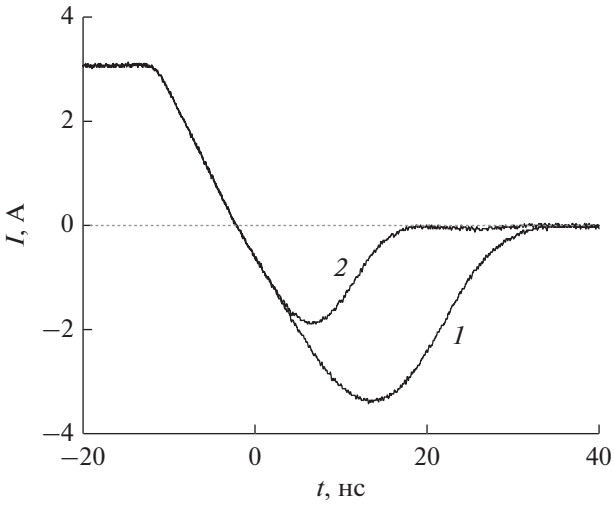

Рис. 5. Типовые характеристики ОВ необлученных (кривая *1*) и облученных (кривая *2*) диодов при их переключении с прямого тока 3 А на обратное напряжение 500 В.

цифровым осциллографом. Заряд обратного восстановления определяется как интеграл от обратного тока диода по времени.

На рис. 5 показаны типовые характеристики ОВ необлученных (кривая *1*) и облученных (кривая *2*) диодов при их переключении с прямого тока 3 А на обратное напряжение 500 В. (Скорость переключения тока с прямого на обратный составляла 300 А/мкс.) Заряды ОВ необлученных и облученных диодов составляют 63 и 20 нКл соответственно. После облучения диоды сохраняют “мягкий” характер восстановления, что свидетельствует о том, что облучение приводит к снижению коэффициента инжекции *p*–*n*-перехода [4]. Времена ОВ необлученных и облученных диодов составляют 35 и 20 нс соответственно. Таким образом, протонное облучение является эффективным инструментом для коррекции динамических характеристик высоковольтных *p*–*n*-диодов на основе 4H-SiC.

4. ИСПЫТАНИЯ 4H-SiC-БВЛД В ИМПУЛЬСНОМ ЛАВИННОМ РЕЖИМЕ

Ранее в работах [5, 6] нами были проведены физические исследования лавинного пробоя в высоковольтных *p*–*n*-диодах на основе 4H-SiC. Определены такие параметры, как лавинное сопротивление диодов, насыщенная скорость дрейфа электронов в блокирующей *n*-базе при высоких полях, температурный коэффициент напряжения пробоя.

В данном разделе продемонстрированы испытания изготовленных БВЛД на основе 4H-SiC на отказ при работе в импульсном лавинном режиме. Испытания проводили с помощью переклю-

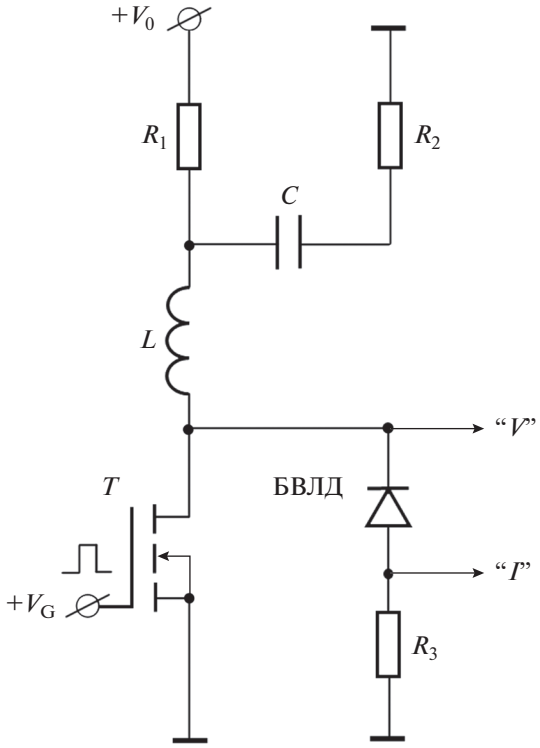

Рис. 6. Импульсная схема тестирования изготовленных БВЛД в лавинном режиме.

чающей схемы с индуктивной нагрузкой (Unclamped Inductive Switching, UIS) (рис. 6) [https://www.intersil.com/content/dam/Intersil/documents/an19/an1968.pdf]. Источником импульсного питания в схеме служит конденсатор *C* большой емкости, заряженный до напряжения V_0, которое выбирают намного меньше, чем напряжение пробоя диода V_b. Исходно к диоду приложено обратное напряжение V_0. Это же напряжение приложено к стоку закрытого МОП-транзистора (*T*). Когда транзистор *T* открывается импульсом V_G на затворе, конденсатор *C* разряжается через транзистор, индуктивность *L* и сопротивление R_2. Пиковый зарядный ток в индуктивности *L* может варьироваться изменением длительности открывающего импульса V_G. После закрывания транзистора *T* ток из него быстро перебрасывается в исследуемый БВЛД вместе с последовательно включенным измерительным резистором R_3. При этом на диоде генерируется обратное напряжение, превышающее напряжение пробоя V_b. Далее, по мере разряда индуктивности *L* ток падает, а напряжение остается выше V_b. И, наконец, когда ток уменьшается практически до нуля, напряжение также снижается до исходной величины V_b. Временные диаграммы напряжения на диоде и тока через него записываются двухканальным цифровым осциллографом. (Измеряемые импульсные

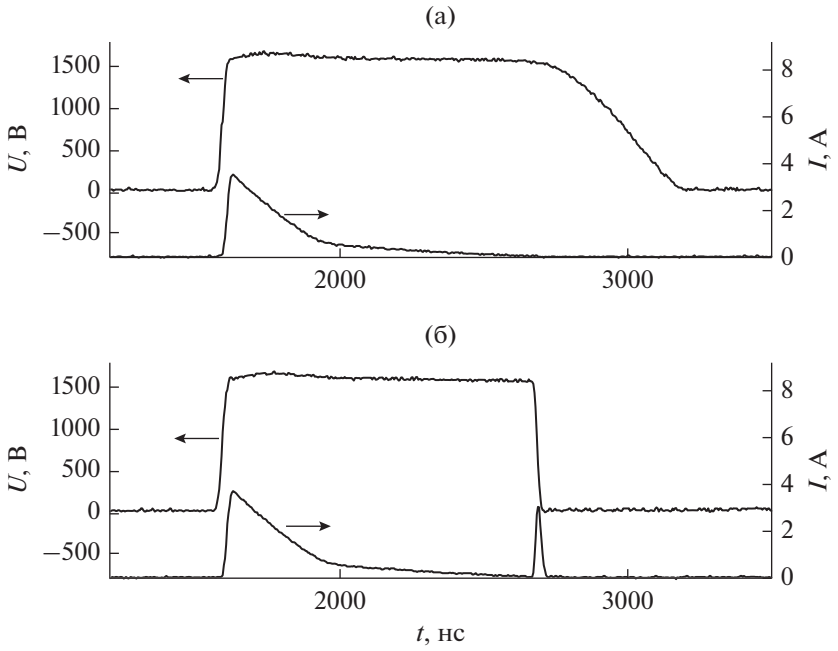

Рис. 7. Осциллограммы тока и напряжения, измеренные в схеме UIS при пиковом лавинном токе 3.5 (а) и 3.7 А (б).

напряжения передаются на входы осциллографа через широкополосные аттенюаторы.) Мгновенная мощность $P(t)$, которая рассеивается во время лавинного процесса, рассчитывается путем перемножения мгновенных величин тока $I(t)$ и напряжения $V(t)$. Полная энергия, рассеянная при прохождении импульса лавинного тока, определяется как интеграл от мощности по времени.

Таблица 1. Сравнение электрических параметров промышленных 4H-SiC-диодов Шоттки CPW4-1200-S005B и изготовленных 4H-SiC-БВЛД (при комнатной температуре)

Параметр	CPW4-1200-S005B	4H-SiC БВЛД
S, мм^2	1.54	1
$V_{R\max}$, В	1200	1200
V_F, В	1.8	4.5
I_R, мкА/мм^2	100	0.01
Q_{rr}, нКл / мм^2	18*	20**
C_0, пФ/мм^2	167	180
$E_{av,\max}$, Дж/см^2	–	2.9 ***

Примечание: S – площадь анода, $V_{R\max}$ – максимальное постоянное обратное напряжение, V_F – прямое падение напряжения при токе $I_F = 3$ А/мм^2, I_R – обратный ток при обратном напряжении $V_R = 1200$ В, Q_{rr} – заряд ОВ при токе $I_F = 3$ А/мм^2, C_0 – емкость при нулевом смещении, $E_{av,\max}$ – лавинная энергия. * При V_R = 800 В, dI/dt = 200 А/мкс. **При V_R = 500 В, dI/dt = 300 А/мкс. ***При длительности импульса 1 мкс.

Для тестирования изготовленных БВЛД в лавинном режиме были выбраны диоды малой площади (диаметр анода 250 мкм, площадь 4.9×10^{-2} мм^2), чтобы увеличить плотность мощности. На рис. 7 показаны осциллограммы тока и напряжения, измеренные с помощью схемы UIS. На рис. 7а пиковый лавинный ток составляет 3.5 А (плотность тока 71 А/мм^2), максимальное обратное напряжение достигает 1700 В. Представленные на рис. 7а осциллограммы свидетельствуют об обратимом характере лавинного пробоя (ВАХ диода, показанная на рис. 2б, после пропускания лавинного импульса не деградировала). На рис. 7б пиковый лавинный ток (3.7 А) несколько больше, чем ток на рис. 7а. При этом в момент времени, близком к окончанию лавинного импульса, наблюдается резкий всплеск тока при уменьшении напряжения до нуля, что свидетельствует о катастрофическом отказе диода (контроль ВАХ после пропускания лавинного импульса подтвердил, что произошла потеря блокирующей способности диода). Лавинная энергия, рассчитанная из зависимостей $I(t)$ и $V(t)$ (см. рис. 7а), составляет $E_{av,\max}$ = 1.4 мДж (2.9 Дж/см^2). Как мы полагаем, катастрофический отказ диода происходит вследствие нарушения баланса выделяемой и отводимой в диоде мощности и развития теплового пробоя.

Важно отметить, что изготовленные 4H-SiC-БВЛД не уступают диодам Шоттки на основе 4H-SiC по быстродействию (см. табл. 1, в кото-

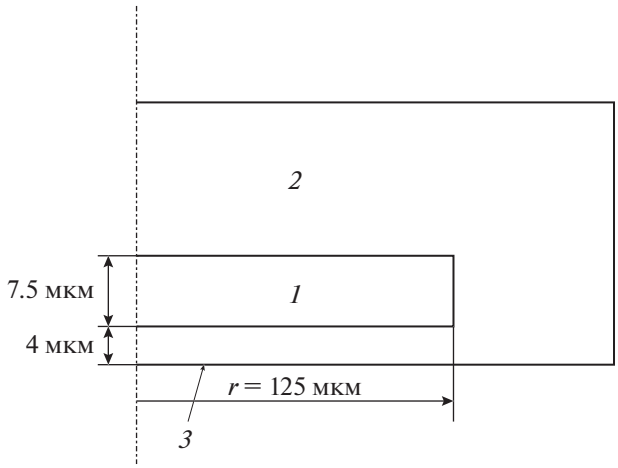

Рис. 8. Геометрия моделируемой структуры. *1* – ОПЗ (область выделения тепла), *2* – квазинейтральная часть кристалла 4H-SiC, *3* – поверхность эпитаксиальной структуры.

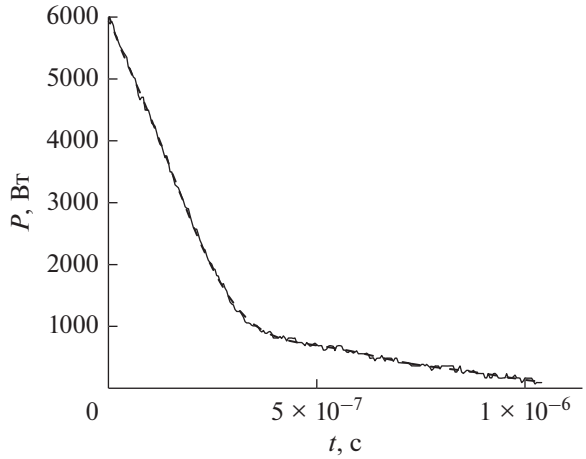

Рис. 9. Временная зависимость мощности, выделяемой в *n*-базе (сплошная кривая) и численная аппроксимация этой зависимости полиномом 9-й степени (штриховая).

рой проводится сравнение изготовленных 4H-SiC-БВЛД с промышленными 4H-SiC-диодами Шоттки CPW4-1200-S005B фирмы Wolfspeed [https://www.wolfspeed.com/media/downloads/19/CPW4-1200-S005B.pdf]).

5. РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА В 4H-SiC-БВЛД

Расчет нестационарного теплового процесса производился с помощью компьютерной программы, реализующей моделирование тепловых полей методом конечных элементов. Были приняты следующие упрощающие допущения: 1) электрическая мощность, рассеиваемая диодом в режиме лавинного пробоя, равномерно выделяется в области пространственного заряда (ОПЗ) *p*–*n*-перехода (в режиме лавинного пробоя ОПЗ занимает всю толщину *n*-базы), 2) поверхность 4H-SiC-кристалла теплоизолирована (отдачи тепла с поверхности нет). Очевидно, что в реальной ситуации мощность в силу ряда физических причин выделяется в *n*-базе неравномерно, а с поверхности кристалла все-таки происходит незначительная отдача тепла. Однако принятые допущения позволяют оценить *нижнюю* границу локального температурного перегрева в структуре диода.

На рис. 8 показана аксиальная геометрия моделируемой структуры. На рис. 9 показана измеренная временная зависимость мощности, выделяемой в области *n*-базы при прохождении импульса лавинного тока (сплошная линия), и численная аппроксимация этой зависимости полиномом 9-й степени (пунктир). Теплофизические параметры 4H-SiC-диода – зависимости коэффициента теплопроводности C и теплоемкости K 4H-SiC от температуры – были взяты из работы [7]:

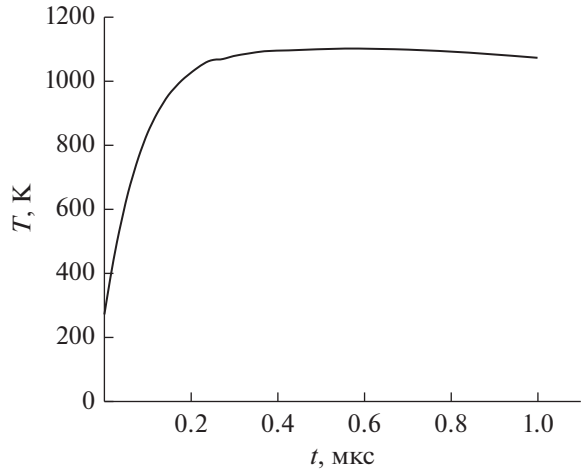

Рис. 10. Рассчитанная временная зависимость локальной температуры (в середине базовой области) при прохождении импульса лавинного тока.

$$C(T) = 0.48 + 0.023\exp(T/262)\ \text{Дж}/(\text{г град}), \quad (1)$$

$$K(T) = 2.67\times10^{3}T^{-1.26}\ \text{Вт}/(\text{см град}). \quad (2)$$

На рис. 10 представлена рассчитанная временная зависимость локальной температуры (в середине базовой области) при прохождении импульса лавинного тока. Как видно, локальная температура в середине базовой области достигает около 1100 K. В реальности локальный температурный перегрев может быть еще сильнее по той причине, что тепло выделяется в базовой области неравномерно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно, работоспособность полупроводниковых диодов с *p*–*n*-переходом при нагревании имеет фундаментальное ограничение, связанное с тем, что при повышении температуры увеличивается концентрация собственных носителей. Критической является температура, при которой концентрация собственных носителей в полупроводнике становится сравнимой с концентрацией легирующих примесей в базовых областях диода. В 4H-SiC, имеющем ширину запрещенной зоны 3.24 эВ, концентрация собственных носителей при комнатной температуре чрезвычайно мала – по разным оценкам она находится в пределах $10^{-8}...10^{-7}$ см$^{-3}$. В высоковольтных 4H-SiC-диодах уровень легирования блокирующей базы находится в пределах $10^{15}...10^{16}$ см$^{-3}$. Концентрация собственных носителей достигает таких величин при нагреве до температуры около 1350 K. Как мы полагаем, в изготовленных в данной работе 4H-SiC-БВЛД реализуется именно такое фундаментальное ограничение на величину максимальной рассеиваемой энергии лавинного импульса. Важно отметить и то, что изготовленные 4H-SiC-БВЛД не уступают диодам Шоттки на основе 4H-SiC по быстродействию. При этом диоды с *p*–*n*-переходом ожидаемо имеют существенно меньшие по величине допробойные утечки. И хотя они уступают диодам Шоттки по величине прямого падения напряжения, такие 4H-SiC БВЛД могут найти применение во многих областях силовой электроники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев А.А., Иванов П.А., Левинштейн М.Е. и др.*// Успехи физ. наук. 2019. Т. 189. № 8. С. 803.
2. *Kimoto T., Cooper J.A.* Fundamentals of Silicon Carbide Nechnology: Growth, Characterization, Devices, and Applications. Wiley-IEEE Press, 2014.
3. *Полищук А.* // Компоненты и технологии: Электронные компоненты. 2004. № 8. https://www.kit-e.ru/assets/files/pdf/2004_08_40.pdf.
4. *Козловский В.В.* Модифицирование полупроводников пучками протонов. СПб.: Наука, 2003.
5. *Иванов П.А., Грехов И.В., Ильинская Н.Д., Самсонова Т.П.* // ФТП. 2005. Т. 39. № 12. С. 1475.
6. *Иванов П.А., Потапов А.С., Самсонова Т.П., Грехов И.В.* // ФТП. 2017. Т. 51. № 3. С. 390.
7. *Wei R., Song S., Yang K. et al.* // J. Appl. Phys. 2013. V. 113. № 5. P. 053503.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 827–830

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 621.382.323

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА САМОНАГРЕВАНИЯ НА ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕВЫХ ТРАНЗИСТОРОВ НА СТРУКТУРЕ “КРЕМНИЙ НА ИЗОЛЯТОРЕ” ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

© 2020 г. Н. В. Масальский*

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Нахимовский пр., 36, корп. 1, Москва, 117218 Российская Федерация

**E-mail: volkov@niisi.ras.ru*

Поступила в редакцию 26.04.2019 г.
После доработки 13.08.2019 г.
Принята к публикации 26.08.2019 г.

Обсуждается подход для исследования влияния эффекта самонагревания на вольт-амперные характеристики (ВАХ) субмикронных полевых транзисторов на структуре “кремний на изоляторе” в диапазоне окружающих температур 225...350°C. Подход заключается в комбинировании экспериментальных данных и результатов численного моделирования. Показано, что с ростом окружающей температуры вклад механизма самонагревания последовательно снижается. Отмечена различная динамика спада тока *n*- и *p*-транзисторов, которая является значимой для аналоговых приложений, что необходимо учитывать при проектировании высокотемпературных схем. Предложенная методология позволяет критически оценить влияние самонагревания на ВАХ транзисторов в широком диапазоне высоких и температур и управляющих напряжений.

DOI: 10.31857/S0033849420070086

ВВЕДЕНИЕ

Высокотемпературная микроэлектроника – специализированное направление современной электроники, изделия которой должны функционировать в температурных условиях значительно превышающих коммерческий диапазон (выше 200°C). Одним из технологических базисов высокотемпературной электроники является технология кремний на изоляторе (КНИ), которая эффективно ограничивает температурную деградацию ключевых характеристик кремниевого метал–оксид–полупроводник (МОП) транзистора [1]. Однако для КНИ МОП-транзистора толстый погруженный окисел кремния под тонкопленочной кремниевой рабочей областью (областью канала транзистора) является определяющим условием для ярко выраженного проявления механизма самонагревания [2, 3]. Он наиболее сильно и опасно проявляется в аналоговых приложениях КНИ МОП-транзисторов. В данном случае он является самым серьезным ограничением при высоких значениях затворных $U_{зат}$ и стоковых $U_{ст}$ напряжений, что приводит к резкому росту локального перегрева устройства и при определенных условиях может привести к потере его функциональной устойчивости [https://www.analog.com/en/analog-dialogue/articles/high-temperature-electronic-pose-design-challenges.html/].

В данной работе для транзисторов, выполненных на основе отечественного базового КНИ КМОП процесса с топологическими нормами 0.5 мкм, решается задача – определить вклад эффекта самонагревания в их вольт-амперные характеристики (ВАХ) в температурном диапазоне выше 200°C.

1. ТЕСТОВЫЙ ТРАНЗИСТОР

Для исследования возможностей технологии был разработан тестовый кристалл, включающий в себя различные конструктивные варианты транзисторов А-типа, работающих в режиме частичного обеднения [http://www.myshared.ru/slide/467770/]. Тестовый кристалл содержит также набор транзисторных структур, который предоставляет возможность построения параметров SPICE-моделей. Преемственность базовой технологии подразумевала использование КНИ-структур, изготовленных по технологии SIMOX [https://www.analog.com/en/analog-dialogue/articles/ high-temperature-electronic-pose-design-challenges.html/, http://www.myshared.ru/slide/467770/]. Их основные параметры: толщина кремниевой пленки 180 нм; толщина слоя изолирующего окисла 150 нм; удельное сопротивление подложки *p*-типа 10...20 Ом см. Толщину затворного окисла оценивали по оптическим измерениям на установке APECS 3020 и по вольт-фарадным характеристикам МОП-кон-

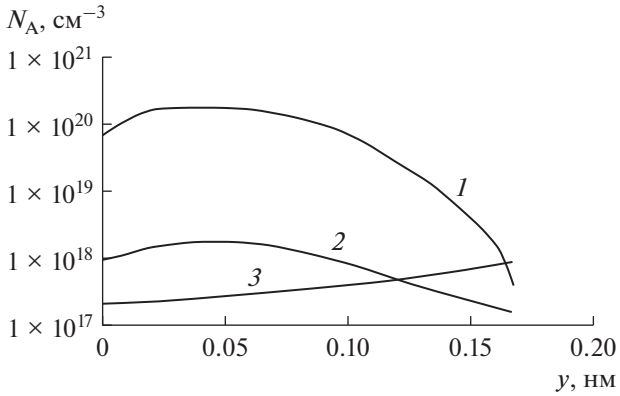

Рис. 1. Профили легирования областей транзистора по глубине: *1* – область сток/исток, *2* – низколегированная область, *3* – область канала.

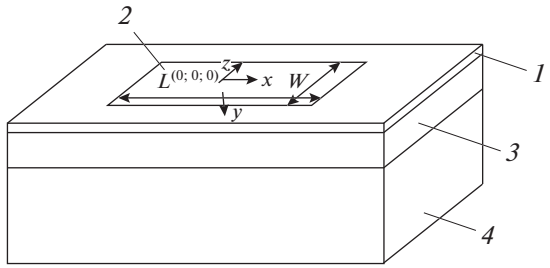

Рис. 2. Структурная схема КНИ МОП транзистора: *1* – тонкая кремневая пленка, *2* – тепловой источник (активная область транзистора), *3* – пленка SiO_2, *4* – кремневая подложка.

денсаторов, она составила 15 нм. Профили легирования областей стока и истока, областей с пониженной концентрацией легирования и области канала приведены на рис. 1.

В исследовании мы решали задачу – определить вклад эффекта самонагревания для случая стационарных электрических и тепловых полей. Мы рассматривали безкорпусную пластину, у которой на всех ее гранях происходит свободный теплообмен с окружающей средой, при этом отсутствует принудительное охлаждение. Учет теплоотводящих свойств корпуса – отдельная задача, поскольку эти свойства зависят не только от материала, но и от конструкции корпуса. При этом они действуют на все транзисторы одинаково. С практической точки зрения разработчикам микросхемы хорошо известны теплоотводящие свойства конкретного корпуса, и поэтому им важно знать влияние самонагревания на токовые характеристики отдельного транзистора. Это позволяет достоверно оценить работу конкретного электронного узла.

В эксперименте пластина была закреплена на специальной конструкции, чтобы обеспечить максимально свободную нижнюю поверхность. Температура пластины контролировалась при помощи резистивных “свидетелей”. Когда окружающая температура и температура пластины становились одинаковыми, на транзисторы подавалось напряжение. Измерения ВАХ транзисторов проводили по истечении длительного (несколько десятков минут) промежутка времени. Их выполняли на измерительном комплексе Hewlett Packard с зондовым устройством, позволяющим проводить измерения на пластине в диапазоне температур –60...300°С. Вклад самонагревания экстрагируется из результатов измерения стоковой проводимости в импульсном режиме [3]. При тестовых измерениях в диапазоне температур 125...225°С с шагом 20°С в каждом случае приходилось подбирать длительность импульса. В нашем случае создать натурные условия для окружающей среды, включая и температуру подложки, температура которой выше 225°С, не представляется технически возможным. Поэтому, опираясь на экспериментальные данные, мы численно исследовали влияние самонагревания на ВАХ КНИ КМОП-транзисторов в диапазоне высоких температур.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для моделирования электротепловых характеристик КНИ МОП-транзистора была рассмотрена трехслойная структура (см. рис. 2). Каждый слой характеризуется собственным температурным распределением и теплофизическими параметрами: плотностью, теплоемкостью, теплопроводностью [4]. Источник тепла расположен на верхней поверхности кристалла и занимает активную область, площадь которой $s_a = W \times L$ (W, L – ширина и длина активной области транзистора). Геометрические размеры слоев 1–3 следующие: $L_x^{(1)} = L_z^{(1)} = 20$ мкм для всех трех слоев; $L_y^{(1)} = 0.18$ мкм для верхнего слоя, $L_y^{(2)} = 0.15$ мкм – для среднего слоя и $L_y^{(3)} = 0.6$ мм для нижнего слоя. Активная область $L = 0.5$ мкм, $W = 3.1$ мкм.

Температурное поле для стационарного случая в рассматриваемой трехслойной структуре определяем из решения системы уравнений теплопроводности и электротепловой обратной связи [5, 6] с учетом того, что, во-первых, температура активной области транзистора T_a одинакова в каждой ее точке и, во-вторых, рассеиваемая транзистором мощность зависит от T_a. Распределение температуры рассчитывается численно с использованием итерационного алгоритма во взаимодействии с программной средой COMSOL Multiphysics [https://www.comsol.ru/heat-transfer-module. Программное обеспечение для расширенного моделирования теплопередачи] до тех пор, пока рассеиваемая транзистором мощность не будет изменяться. Полученное распределение температуры с установленным значением электрической мощности используется для расчета токов транзисторов. Они вычисля-

ются с помощью двумерных моделей для *n*- и *p*-канальных транзисторов, разработанных в системе приборно-технологического моделирования Sentaurus TCAD, в частности, с опцией “Thermodynamic” [https://www.synopsys.com/silicon/tcad/device-simulation/sentaurus-device.hlmt/] (мы используем достаточно старую версию TCAD), учетом температурных зависимостей физических параметров кремния. TCAD-модели откалиброваны по экспериментальным характеристикам для 225°C. Следует отметить, что разработанные модели структурно связаны с TCAD-моделями транзисторов обоих типов для того же технологического процесса, которые были откалиброваны на рабочую температуру 25°C [http://www.myshared.ru/slide/467770/] и применялись для моделирования в диапазоне температур –60...125°C.

На рис. 3 приведены результаты моделирования основных температурных зависимостей, которые характеризуют влияние саморазогревания на ВАХ КНИ МОП-транзисторов. Зависимости, представленные на рис. 3а, иллюстрируют изменение температуры активной области транзистора *n*- и *p*-типов с ростом окружающей температуры $T_о$. Отметим, что они имеют одинаковую крутизну и при высоких температурах параметр $\Delta T = T_а - T_о$ меняется незначительно.

На рис. 3б приведены ВАХ КНИ МОП-транзистора *n*- и *p*-типа $I_{ст}(U_{ст})$ при $U_{зат}$ = 5.5 В, которые позволяют оценить влияние самонагревания в диапазоне высоких температур окружающей среды.

Как показывают результаты, калибровка моделей транзисторов проведена на приемлемом уровне – максимальное отклонение данных составляет менее 3%. Отличие в поведении ВАХ для *n*- и *p*-транзисторов напрямую связано с температурно-зависимыми особенностями переноса заряда в них [4]. Дополнительное исследование показало, что максимальное расхождение токов в диапазоне высоких (>3.5 В) приложенных напряжениях для высокотемпературной модели и экспериментальных ВАХ при температурах 125 и 25°C составляет 5 и 11% соответственно.

По результатам моделирования видно, что действие механизма самонагревания для КНИ МОП транзисторов обоих типов заметно, и их ВАХ имеют ярко выраженный участок “отрицательного дифференциального сопротивления” [2, 3]. При этом с ростом температуры этот вклад постепенно снижается. В табл. 1 для транзисторов *n*- и *p*-типов приведены величина тока транзистора $I_{ст}$ и уменьшение тока транзистора $\Delta I_{ст}$, вызванное действием механизма самонагревания при напряжениях $U_{ст} = U_{зат}$ = 5.5 В.

Из результатов моделирования следует, что спад тока транзисторов с ростом температуры T_0 последовательно снижается. При этом вклад механизма существенно зависит от значения T_0. В общем случае зависимость $\Delta I_{ст}(T_о)$ нелинейная и имеет свои особенности для каждого типа транзистора. В исследуемом диапазоне температур вклад самонагревания при $U_{ст} = U_{зат}$ = 5.5 В уменьшается для *n*-транзистора в 2.8 раза, для *p*-транзистора в 2.2 раза. Относительный спад тока транзистора для *n*-типа снижается с 11.6 до

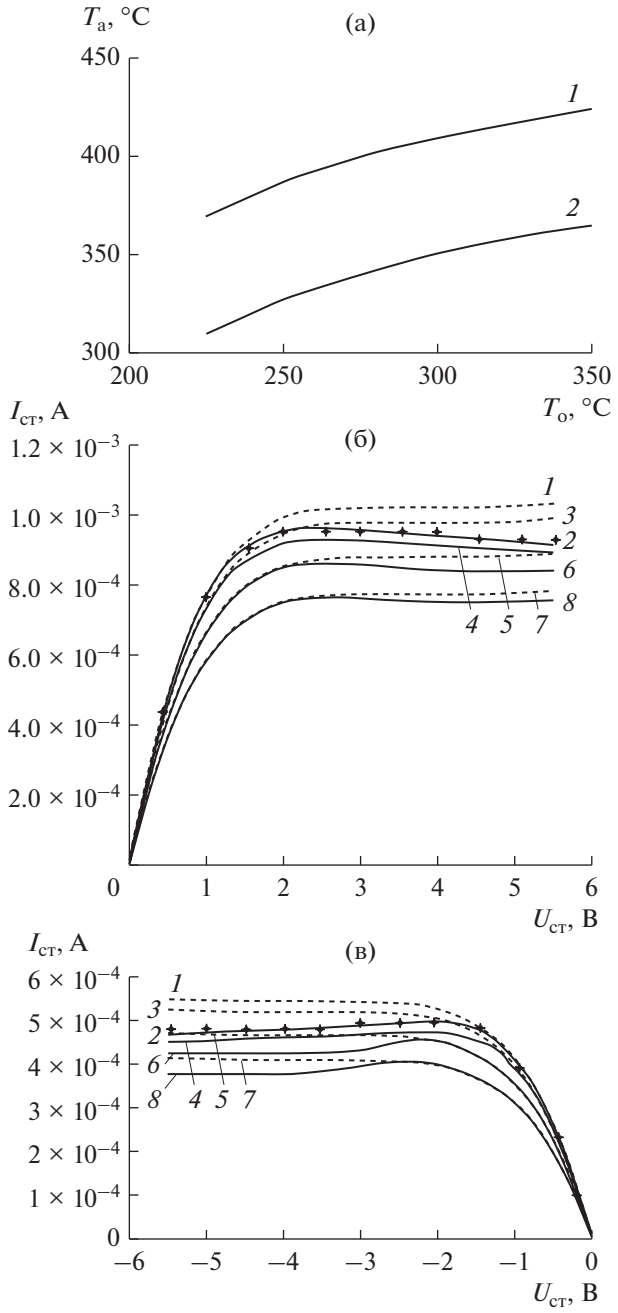

Рис. 3. Зависимость $T_а(T_о)$ при $U_{ст} = U_{зат}$ = 5.5 В: *1* – транзистор *n*-типа, *2* – транзистора *p*-типа (а); а также ВАХ $I_{ст}(U_{ст})$ КНИ МОП транзисторов *n*-типа (б) и *p*-типа (в) при T_0 = 225 (*1*,*2*), 250 (*3*,*4*), 300 (*5*,*6*) и 350°C (*7*,*8*) без учета самонагревания (*1*, *3*, *5*, *7*) и с учетом самонагревания (*2*, *4*, *6*, *8*), звездочки – экспериментальные данные.

Таблица 1. Температурные характеристики тока транзисторов

T_0, °C	n/p	
	$I_{ст}$, A	$\Delta I_{ст}$, A
225	$1.0341 \times 10^{-3}/5.5003 \times 10^{-4}$	$1.2101 \times 10^{-4}/0.8303 \times 10^{-4}$
250	$9.8943 \times 10^{-4}/5.2638 \times 10^{-4}$	$1.0222 \times 10^{-4}/0.7531 \times 10^{-4}$
300	$8.9514 \times 10^{-4}/4.7219 \times 10^{-4}$	$0.5878 \times 10^{-4}/0.4749 \times 10^{-4}$
350	$7.8800 \times 10^{-4}/4.1535 \times 10^{-4}$	$0.4318 \times 10^{-4}/0.3800 \times 10^{-4}$

5.5% и для p-типа – с 15 до 9%. Различия в динамике спада тока транзисторов из-за самонагревания может быть существенным для аналоговых приложений [1], что необходимо учитывать при проектировании высокотемпературных схем.

Например, рассмотрим генератор управляемый током, выполненный по КНИ-технологии с проектными нормами 0.5 мкм. Если его частота генерации близка к резонансной частоте самонагревания f_{th} [3], то сброс частоты выходного сигнала через большое число циклов может достигать до 20%. Его можно преодолеть только с помощью оригинального конструкторского решения, например, выбрать другие рабочие частоты, что необходимо сделать на стадии формирования проекта. К сожалению, такой подход применим лишь в конкретном случае. Различная динамика спада тока стока приводит к появлению нескольких резонансных частот. В диапазоне высоких температур они будут не сильно отличаться друг от друга, поэтому из проекта можно исключить весь этот частотный диапазон.

В случае цифровых схем частота переключения транзисторов, даже если и совпадает с f_{th}, то время в состоянии “Включено” составляет несколько микросекунд, и поэтому эффект самонагревания практически не проявляется при любых температурах.

Важно, что при небольших флуктуациях окружающей температуры вклад самонагревания практически не изменяется. Для 225°C экспериментально установлено, что если флуктуации составляют до 3%, то вклад самонагревания практически не изменяется.

Следует отметить, что методика учета влияния механизма самонагревания, развиваемая в данной работе, дает близкие к экспериментальным данным результаты в большинстве случаев аналоговых приложений, выполненных по 0.5 мкм технологии для коммерческого температурного диапазона [https://www.analog.com/en/analog-dialogue/articles/high-temperature-electronic-pose-design-challenges.html/].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе экспериментальных данных численно исследован вклад эффекта самонагревания в ВАХ субмикронных частично обедненных КНИ МОП n- и p-транзисторов в области высоких (выше 200°C) температур и высоких управляющих напряжений. Детальный учет этого процесса позволяет достоверно оценить снижение тока транзистора, которое нелинейным образом зависит от окружающей температуры. По данным моделирования в диапазоне температур 225...350°C вклад саморазогрева при $U_{ст} = U_{зат} = 5.5$ В уменьшается для n-транзистора в 2.8 раза, а для p-транзистора в 2.2 раза. Относительный спад тока транзистора для n-типа снижается с 11.6 до 5.5% и для p-типа с 15 до 9%. Такая различная динамика тока n- и p-транзисторов является значимой для аналоговых приложений, что необходимо учитывать при проектировании высокотемпературных схем.

Предложенная методология позволяет критически оценить влияние эффекта самонагревания на характеристики транзисторов, что является чрезвычайно актуальной и важной задачей при разработке и проектировании высокотемпературных микросхем. Недооценка этого факта приводит к необоснованным значениям максимальной температуры отдельного КНИ МОП-транзистора и переоценке его предельных энергетических возможностей и всей микросхемы в целом, что особенно важно для аналоговых приложений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0065-2019-0001 “Математическое обеспечение и инструментальные средства для моделирования, проектирования и разработки элементов сложных технических систем, программных комплексов и телекоммуникационных сетей в различных проблемно-ориентированных областях” (АААА-А19-119011790077-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolpert D., Ampadu P.* Managing Temperature Effects in Nanoscale Adaptive System. N.Y.: Springer-Verlag, 2012.
2. *Wang L., Fjeldly T., Iniguez B. et al.* // IEEE Trans. 2000. V. ED-47. № 2. P. 387.
3. *Jin W., Liu W, Fung S. et al.* // IEEE Trans. 2001. V. ED-48. № 4. P. 730.
4. *Colinge J.-P.* Silicon Insulator Technology: Materials to VLSI. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997.
5. *McAlister S.P., Lafontaine H.* // Solid State Electron. 2004. V. 48. № 6. P. 2001.
6. *Marani R., Perri A.G.* // The Open Electrical & Electronic Engineering J. 2010. № 4. P. 32.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2020, том 65, № 8, с. 831–832

ХРОНИКА

ПАМЯТИ ЮРИЯ СЕМЕНОВИЧА ШИНАКОВА

30 марта 2020 г. на 83-м году жизни скончался известный российский ученый в области теории информации и обработки сигналов, заведующий кафедрой Московского технического университета связи и информатики, доктор технических наук, профессор, академик Международной академии связи, член редколлегии журнала “Радиотехника и электроника” Юрий Семенович Шинаков.

Ю.С. Шинаков родился 16 октября 1937 г. в станице Красноармейской Краснодарского края. После окончания средней школы с серебряной медалью в 1955 г. Юрий Семенович поступил на радиотехнический факультет Московского электротехнического института связи (ныне – Московский технический университет связи и информатики, МТУСИ), который окончил с отличием в 1960 г. По распределению он был направлен на работу в научно-исследовательскую лабораторию кафедры радиотехнических систем Института. Вся его дальнейшая жизнь была неразрывно связана с этим вузом и с этой кафедрой: научный сотрудник, аспирант, старший научный сотрудник, доцент, профессор, заведующий кафедрой с 1986 г.

Еще в студенческие годы Юрий Семенович начал активно заниматься научными исследованиями. Его первой инженерной разработкой стал спектрограф, обеспечивавший измерение спектра солнечного света, отраженного листьями растений. Следующей работой стало создание цифровой командной радиолинии управления летательными аппаратами. Исследование выполнялось коллективом преподавателей, аспирантов и дипломников кафедры под руководством профессора Г.А. Левина. Впервые в практике создания подобных систем были использованы сложные (шумоподобные, псевдослучайные) сигналы с расширенным спектром. Некоторые результаты этой работы были представлены группой студентов из шести человек как дипломные проекты, а сама тематика этой научной работы впоследствии стала одной из центральных на кафедре.

Уже в первые годы своей профессиональной деятельности Ю.С. Шинаков как молодой ученый посещал лекции и семинары в МГУ, самостоятельно изучал математическую статистику и теорию вероятностей, постоянно расширял собственный опыт применения статистических методов при решении задач синтеза и анализа радиотехнических устройств и систем, работающих в условиях сложной помеховой обстановки.

Его кандидатская и докторская диссертации содержали новые результаты, которые явились вкладом в асимптотическую теорию оценок параметров сигналов и разрешения сигналов на фоне помех, а также их применения при разработке систем передачи и обработки информации.

Юрий Семенович опубликовал более 200 научных работ. Он является автором и соавтором монографий: “Статистическая теория связи и ее практические применения” (Радио и связь, 1982 г.), “Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех” (Радио и связь, 1986 г.). “CDMA: прошлое, настоящее, будущее” (МАС, 2003 г.), “Транспорт и доступ в инфокоммуникационных сетях” (МАС, 2006 г.).

В последние годы Ю.С. Шинаков занимался теоретическими и прикладными проблемами построения систем мобильной связи с кодовым разделением каналов, анализа взаимных влияний узкополосных сигналов в нелинейных радиотехнических устройствах, имитационного моделирования радиотехнических систем и устройств на ЭВМ. За работу по этой тематике в 2014 г. Юрий Семенович был удостоен Премии МАИК/Наука-Интерпериодика за лучшую публикацию.

Юрий Семенович уделял большое внимание подготовке научных кадров. Свой опыт исследовательской работы он обобщил в нескольких учебниках и учебных пособиях, написанных в соавторстве: “Основы радиотехники” (Радио и связь, 1983 г.), “Теория передачи сигналов элек-

тросвязи” (Радио и связь, 1989 г.), “Системы связи с подвижными объектами” (Радио и связь, 2002 г.), “Системы цифровой радиосвязи” (Эко-Трендз, 2005 г.). Он подготовил более 20 кандидатов наук среди которых были представители Вьетнама, Сирии, Йемена, Чада.

Юрий Семенович активно участвовал и в научно-организационной работе. Он являлся членом экспертного совета ВАК и диссертационного совета МТУСИ, председателем секции “Теория информации” при Центральном совете РНТОРЭС им. А.С. Попова и членом оргкомитета ежегодных научных сессий этого общества. В период с 2000 г. по 2009 г. Ю.С. Шинаков работал Главным ученым секретарем Международной академии связи.

Большую работу Юрий Семенович проводил и как член редколлегий журналов “Радиотехника и электроника”, “Радиотехника”, “Цифровая обработка сигналов”. Его оценки статей, как отечественных, так и зарубежных авторов всегда были на высоком профессиональном уровне, корректны и доброжелательны. Буквально до последнего дня своей жизни он отвечал на запросы редакции, не обращая внимание на проблемы со здоровьем.

Юрий Семенович был настоящим интеллигентом, в лучшем смысле этого слова, добрым, отзывчивым и принципиальным, когда это требовалось. Он прежде всего думал о деле, о человеке и всегда был готов помочь другим людям.

Редакция и редколлегия журнала “Радиотехники и электроника”, многочисленные ученики, коллеги и друзья глубоко скорбят о кончине Юрия Семеновича Шинакова и выражают искренние соболезнования его родным и близким.