
СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 3, 2021 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- О вычислении T -конгруэнтного централизатора
Х. Д. Икрамов 369
- Разностные схемы на основе преобразования Лагерра
А. Ф. Мاستрюков 373
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа системы с запаздыванием в управлении
М. С. Близорукова, В. И. Максимов 382
- Метод проекции градиента для класса экстремальных задач с ограничением в виде подмножества точек гладкой поверхности
Ю. А. Черняев 391
-

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Редуцированная модель SIR пандемии COVID-19
С. И. Виноцкий, А. А. Гусев, В. Л. Дербов, П. М. Красовицкий, Ф. М. Пеньков, Г. Чулуунбаатар 400
-

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении в классе L_∞
В. Л. Камынин 413
- Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием
Е. П. Кубышкин, В. А. Куликов 428
- Аналитическое обращение операторной матрицы задачи дифракции на отрезке цилиндра в пространствах Соболева
С. И. Эминов 450
- Exact solutions of the KdV equation with dual-power law nonlinearity
Fibay Urbain, N. A. Kudryashov, E. Tala-Tebue, Malwe Boudoue Hubert, S. Y. Doka, Kofane Timoleon Crepin 457
-

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях
И. Б. Бахолдин 458
- К вопросу о взаимодействии встречных релятивистских потоков нейтральной плотной плазмы
С. Л. Гинзбург, В. Ф. Дьяченко, Л. И. Михайлова, В. М. Четкин, Н. Н. Фимин 475
- Течение невязкой суспензии вдоль плоской границы
О. Б. Гуськов 493

Численное моделирование двумерных течений газа
через гранулированные материалы с фазовым переходом

Н. А. Луценко, С. С. Фецов

504

Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии
на процессы переноса в многофазной среде

А. В. Нестеров

519

**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 519.61

О ВЫЧИСЛЕНИИ T -КОНГРУЭНТНОГО ЦЕНТРАЛИЗАТОРА© 2021 г. **Х. Д. Икрамов**

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 10.02.2020 г.
 Переработанный вариант 24.07.2020 г.
 Принята к публикации 16.09.2020 г.

Пусть A – комплексная $n \times n$ -матрица. Множество \mathcal{L} матриц X , удовлетворяющих соотношению $X^T A X = A$, называется T -конгруэнтным централизатором матрицы A . Показано, что вычисление матриц из нелинейного многообразия \mathcal{L} можно свести к решению линейного матричного уравнения. Библ. 3.

Ключевые слова: *-конгруэнция, T -конгруэнция, T -конгруэнтный централизатор, дробно-линейная функция, матричное уравнение типа Сильвестра.

DOI: 10.31857/S0044466921030108

1. В пространстве $M_n(\mathbb{C})$ комплексных $n \times n$ -матриц рассматриваются два типа конгруэнтных преобразований: T -конгруэнции как преобразования вида

$$A \rightarrow P^T A P$$

и *-конгруэнции

$$A \rightarrow P^* A P.$$

В обоих случаях P – произвольная невырожденная матрица. В этой статье речь пойдет о преобразованиях первого типа.

Множество \mathcal{L} матриц X , удовлетворяющих соотношению

$$X^T A X = A, \tag{1}$$

мы называем T -конгруэнтным централизатором матрицы A по той причине, что оно есть аналог классического централизатора в том случае, когда группа $GL_n(\mathbb{C})$ действует на пространстве $M_n(\mathbb{C})$ конгруэнциями вместо подобий.

Хорошо известно, как вычисляется обычный централизатор, задаваемый линейным условием коммутирования с матрицей A . Напротив, решение квадратичного уравнения (1) представляет собой непростую задачу, решенную до конца лишь для небольшого числа матриц A . Нелегко даже просто определить размерность многообразия (1).

Цель настоящей заметки – показать, что вычисление матриц из \mathcal{L} , спектр которых не содержит хотя бы одного из чисел 1 и -1 , можно свести к решению линейного матричного уравнения. Как это делается, показано в п. 2. В п. 3 описанный прием редукции применяется к некоторым конкретным матрицам A .

2. Найдем дробно-линейные функции

$$\phi(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

такие, что

$$\phi(\lambda) = -\phi(\lambda^{-1}), \tag{2}$$

т.е.

$$\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} = -\frac{b\lambda + a}{d\lambda + c}. \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что равенство (3) невозможно, если хотя бы один из коэффициентов a, b, c, d равен нулю. Оно эквивалентно соотношениям

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = -\frac{c}{d} = -\frac{d}{c}$$

или

$$a^2 = b^2, \quad c^2 = d^2, \quad ac = -bd, \quad ad = -bc.$$

Варианты $a = b, c = d$ и $a = -b, c = -d$ соответствуют несовместным системам. Поэтому (3) имеет два семейства решений: функции вида

$$\phi_C(\lambda) = C \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \quad (4)$$

получающиеся при выборе $a = b, c = -d$, и функции

$$\psi_D(\lambda) = D \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad (5)$$

отвечающие выбору $a = -b, c = d$. Здесь C и D – произвольные ненулевые константы.

3. Очевидно, что невырожденные решения уравнения (1) образуют мультипликативную группу. Если X – такое решение, то (1) можно переписать в виде

$$X^\top A = AX^{-1}. \quad (6)$$

При любом натуральном k матрица X^k также является решением (1), а потому

$$(X^k)^\top A = A(X^{-1})^k. \quad (7)$$

Рассматривая произвольную линейную комбинацию соотношений (7) для одной и той же матрицы X , заключаем, что

$$[f(X)]^\top A = Af(X^{-1}) \quad (8)$$

для всякого многочлена f от матрицы X . Для любой аналитической функции f , определенной на спектре матрицы X , матрица $f(X)$ может интерпретироваться как многочлен от X ; поэтому равенство (8) имеет место и для всех таких функций.

Выберем многочлен f для формулы (8) так, чтобы матрица $f(X)$ совпала с $\phi(X) \equiv \phi_1(X)$, где $\phi_1(\lambda)$ – функция из семейства (4). Тогда

$$[\phi(X)]^\top A = A\phi(X^{-1}).$$

Согласно (2),

$$\phi(X^{-1}) = -\phi(X).$$

Полагая

$$Y = \phi(X) = (X + I)(X - I)^{-1}, \quad (9)$$

видим, что матрица Y есть решение однородного матричного уравнения типа Сильвестра:

$$AY + Y^\top A = 0. \quad (10)$$

При этом она не может иметь собственного значения 1.

Напротив, пусть Y – произвольное решение уравнения (1), не имеющее собственного значения 1. Для такой матрицы Y формула (9) допускает обращение

$$X = (Y + I)(Y - I)^{-1} = \phi(Y).$$

Эта матрица X принадлежит T -конгруэнтному централизатору \mathcal{L} .

Если спектр матрицы $X \in C_A$ содержит 1, но не содержит -1 , то функцию $\phi_1(\lambda)$ в проведенных рассуждениях нужно заменить функцией $\psi_1(\lambda)$ (см. (5)).

Замечание 1. Идея приема, использованного в данном пункте, заимствована автором в книге Веддерберна “Лекции о матрицах” (см. [1]). Рецензент этой статьи указал, что хорошо известное дробно-рациональное преобразование типа (9), обсуждаемое в обзоре [2] и цитируемых там работах, позволяет значительно более простой и изящный переход от уравнения (1) к уравнению (10). Несложно проверить, что для любых квадратных матриц A и X справедливо равенство

$$(X^\top - I)A(X + I) + (X^\top + I)A(X - I) = 2(X^\top AX - A).$$

Если X — матрица из T -конгруэнтного централизатора \mathcal{L} , то правая часть этого равенства обращается в нуль. Тем самым, для такой матрицы X имеем

$$(X^\top - I)A(X + I) + (X^\top + I)A(X - I) = 0.$$

Умножая полученное соотношение слева на матрицу, обратную к $X^\top - I$, и справа на матрицу, обратную к $X - I$, находим

$$A(X + I)(X - I)^{-1} + (X^\top - I)^{-1}(X^\top + I)A = 0.$$

Учитывая (9), это и есть равенство (10).

Дополнительное достоинство этого рассуждения состоит в том, что оно не требует невырожденности от матрицы X .

4. Полное описание решений уравнения (10) для некоторых матриц A дано в [3]. Уравнение $ZA + AZ^\top = 0$, рассматриваемое в этой статье, переходит в наше уравнение (10), если положить $Z = Y^\top$.

Пусть A есть жорданова клетка $J_n(0)$ с нулем на главной диагонали. Вид решений Y уравнения (10) зависит от четности числа n . Покажем, например, как выглядят матрицы Y для четного $n = 2m$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & -y_3 & 0 & \cdots & -y_m & 0 \\ 0 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & -y_2 & 0 & \cdots & -y_{m-1} & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & \cdots & -y_{m-2} & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_2 & 0 & -y_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & y_m & 0 & y_{m-1} & 0 & y_{m-2} & \cdots & 0 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что размерность пространства решений уравнения (10) равна $m = \frac{n}{2}$. Такова же (нелинейная) размерность T -конгруэнтного централизатора \mathcal{L} . При нечетном $n = 2m + 1$ обе размерности равны числу $m + 1$.

Положим теперь

$$A = \begin{pmatrix} & & & & & & & & (-1)^{n+1} \\ & & & & & & & & \cdots (-1)^n \\ & & & & & & & & \cdots \cdots \\ & & & & -1 & -1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{11}$$

При любом n решения Y уравнения (10), соответствующего такой матрице A , являются верхнетреугольными тёплицевыми матрицами. Размерность пространства решений всегда равна $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Покажем, как выглядят матрицы Y для нечетного $n = 2m + 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 & y_2 & 0 & y_3 & \cdots & y_m & 0 \\ & 0 & y_1 & 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 & y_m \\ & & 0 & y_1 & 0 & y_2 & \cdots & y_{m-1} & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & & & 0 & y_1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & y_1 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Выбор именно таких матриц A , т.е. $J_n(0)$ и матрицы (11), обозначаемой в [3] как Γ_n , объясняется следующим обстоятельством. Каноническая форма произвольной $n \times n$ -матрицы относительно T -конгруэнций есть прямая сумма блоков трех типов. Матрицы $J_k(0)$ и Γ_k (при различных порядках k) представляют два из этих типов.

В заключение я хотел бы поблагодарить рецензента первоначального варианта этой статьи за очень полезные замечания, в частности, на указание, что аналогичные приемы могут быть использованы для сведения квадратных и полуторалинейных матричных уравнений типа (1) к линейным и полулинейным уравнениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wedderburn J.H.M.* Lectures on Matrices. AMS, Providence, 1934.
2. *Simoncini V.* Computational methods for linear matrix equations // SIAM Review. 2016. V. 58. № 3. P. 377–441.
3. *De Terán F., Dopico F.M.* The solution of the equation $XA + AX^T = 0$ and its application to the theory of orbits // Linear Algebra Appl. 2011. V. 434. P. 44–67.

**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 550.834

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

© 2021 г. А. Ф. Мастрюков

*630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6,
Институт вычисл. матем. и матем. геофизики СО РАН, Россия*

e-mail: maf@omzg.sscc.ru

Поступила в редакцию 30.01.2020 г.
Переработанный вариант 30.07.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

В работе рассматриваются оптимальные разностные схемы для решения волнового уравнения с использованием преобразования Лагерра. В разностную схему уравнений для гармоник вводятся дополнительные параметры. Численные значения этих параметров получаются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца. Полученные таким образом оптимальные значения параметров используются при построении разностных схем – оптимальных разностных схем. Рассмотрены оптимальные разностные схемы 2-го порядка и 4-го порядка аппроксимации. Приведены оптимальные параметры разностных схем. Значения этих параметров зависят только от отношения пространственных шагов разностной сетки. Показано, что использование оптимальных разностных схем ведет к повышению точности решения уравнений. Простая модернизация разностной схемы дает повышение эффективности алгоритма. Библ. 18. Фиг. 2. Табл. 3.

Ключевые слова: конечно-разностный метод, оптимальный, точность, электромагнитные волны, метод Лагерра.

DOI: 10.31857/S0044466921030145

1. ВВЕДЕНИЕ

При численном решении дифференциальных уравнений широко используются спектральные методы. Спектральные методы позволяют более эффективно решать задачи со сложной зависимостью параметров уравнений от времени. Например, в случае с релаксацией диэлектрической проницаемости, выраженной в интегральной форме [1], [2].

Конечно-разностный метод прост в программной реализации и экономичен [3], [4]. Но есть задачи, такие как частотное зондирование, в электроразведке [5], где предпочтительнее использовать спектральные методы.

В ряде задач спектральный метод, основанный на преобразовании Лагерра, по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье. Эффективность обусловлена видом уравнений для гармоник Лагерра [7], [8]. Левая часть этих уравнений не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Кроме того, система уравнений для гармоник всегда содержит только действительные переменные.

Важным показателем качества численного алгоритма является точность получаемого решения уравнений [9]. Существуют различные способы повышения точности решения, например, использование разностных схем более высокого порядка аппроксимации или построение разностных схем минимизирующих погрешность дисперсионного соотношения (dispersion-preserving) [9]. Ко второму типу схем относятся так называемые оптимальные разностные схемы.

В работе оптимальными называются разностные схемы, параметры которых определяются минимизацией некоего функционала. В данном случае параметры определяются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца.

В работе [11] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармоники Фурье вводятся 3 дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении.

Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено в работе [12] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае оптимизация проводилась по 4 параметрам.

В работах [13], [14] была рассмотрена оптимальная разностная схема 2-го порядка аппроксимации для решения уравнений Максвелла и для решения волнового уравнения, основанная на разложении Лагерра по временной переменной. Здесь оптимизация проводилась по 4 параметрам.

В настоящей работе рассматриваются оптимальные разностные схемы 2-го порядка и 4-го порядка аппроксимации для решения двумерного волнового уравнения на основе преобразования Лагерра, использующие различное число параметров.

Предлагаемые оптимальные схемы являются модернизацией обычных разностных схем, но они обладают более высокой точностью и более высокой эффективностью.

В работе приведены параметры оптимальных разностных схем и результаты тестовых расчетов с использованием этих схем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать волновое уравнение вида

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + S(t, x, z) \quad (1)$$

в прямоугольной пространственной области при нулевых граничных и начальных условиях

$$E(t = 0, x, z) = 0, \quad \frac{\partial E(t = 0, x, z)}{\partial t} = 0.$$

Здесь $S(t, x, z)$ – источник волн, v – скорость волны, γ – коэффициент поглощения. Величины v , γ являются функциями координат x , z .

Такое уравнение описывает как распространение упругих волн, так и распространение электромагнитных волн. В первом случае E – это давление и v – это скорость упругих волн, во втором случае E – это напряженность электрического поля и v – это скорость электромагнитных волн.

К такому же уравнению можно свести систему двумерных уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в двумерном случае имеют вид [5], [15]

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (4)$$

где $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ – ток внешнего источника, ε – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная проницаемость.

Продифференцировав по времени уравнение (2) и подставив в него выражения из уравнений (3), (4), при $\mu = \text{const}$ получим для электрического поля E_y уравнение вида (1), где источник имеет вид

$$S(t, x, z) = -\mu \frac{\partial J_y}{\partial t}.$$

Систему уравнений (2)–(4) будем использовать для оценки точности решения волнового уравнения (1).

Проведем преобразование Лагерра [16] по времени уравнения (1)

$$E_n = \int_0^\infty E(t)(ht)^{-\alpha/2} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (5)$$

$$E(t) = (ht)^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} E_n l_n^{\alpha}(ht), \tag{6}$$

где $l_n^{\alpha}(ht)$ – ортогональная функция Лагерра [16] степени n , α – целая константа, h – параметр преобразования Лагерра.

В результате получим уравнение для n -й гармоники Лагерра E_n :

$$\frac{\partial^2 E_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial z^2} + S_n = \frac{h^2}{v^2} \left(\frac{1}{4} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) E_k \right) + \gamma h \left(\frac{1}{2} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k \right). \tag{7}$$

Рассмотрим разностную аппроксимацию этого уравнения.

3. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ

Определим E_n и S_n в целых i, j узлах разностной сетки. Производные заменим конечными разностями второго порядка аппроксимации. Запишем уравнение (7) в разностном виде, используя средние значения гармоник Лагерра:

$$\begin{aligned} & (\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1})/(\Delta x^2) + (\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j})/\Delta z^2 + S_{n,i,j} = \\ & = \frac{h^2}{v^2} \left(\frac{1}{4} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) \langle E_k \rangle \right) + \gamma h \left(\frac{1}{2} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь в правой части уравнения гармоники поля заменены средними значениями по 9 точкам [12]:

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle = & c E_{k,i,j} + d(E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1}) + g(E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) + \\ & + e(E_{k,i+1,j+1} + E_{k,i+1,j-1} + E_{k,i-1,j+1} + E_{k,i-1,j-1}), \end{aligned} \tag{9}$$

где c, d, g, e – весовые множители, удовлетворяющие уравнению

$$c + 2d + 2g + 4e = 1 \quad \text{или} \quad e = (1 - c - 2d - 2g)/4.$$

В разностных производных по z использованы средние значения [12] для поля вида

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1-\beta}{2} E_{n,i,j+1} + \beta E_{n,i,j} + \frac{1-\beta}{2} E_{n,i,j-1}, \tag{10}$$

и в разностных производных по x использованы средние значения вида

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1-\alpha}{2} E_{n,i+1,j} + \alpha E_{n,i,j} + \frac{1-\alpha}{2} E_{n,i-1,j}. \tag{11}$$

Разностное уравнение (8), содержащее дополнительные параметры $\alpha, \beta, c, d, g, e$, аппроксимирует уравнение (7) со вторым порядком.

Подберем введенные параметры $\alpha, \beta, c, d, g, e$ таким образом, чтобы точность аппроксимации уравнения была наиболее высокой.

4. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Для нулевой гармоники поля $E = E_{0y}$, уравнение (7) можно представить в виде уравнения Гельмгольца. Без учета источников уравнение (7) принимает простой вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = k_0^2 E, \quad k_0^2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2v^2} + \gamma \right). \tag{12}$$

В случае электромагнитных волн

$$k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left(\epsilon \frac{h}{2} + \sigma \right).$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать, применяя средние значения поля, приведенные в предыдущем разделе

$$\frac{\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1}}{\Delta x^2} = k_0^2(cE_{n,i,j} + d(E_{n,i,j+1} + E_{n,i,j-1}) + g(E_{n,i+1,j} + E_{n,i-1,j}) + e(E_{n,i+1,j+1} + E_{n,i+1,j-1}) + E_{n,i-1,j-1}).$$

Уравнение (12) имеет точное решение:

$$E = E_0 ch(k_x x) ch(k_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2, \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta.$$

Подставим это решение в приведенное разностное уравнение. После простых преобразований получим уравнение

$$V^2(\theta, k) = 1,$$

где

$$\begin{aligned} V^2(\theta, k) = & \left((1 - \alpha) ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) + \alpha \right) (ch(k \sin \theta) - 1) + \\ & + r^2 \left((1 - \beta) ch(k \sin \theta) + \beta \right) \left(ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) - 1 \right) / \left(k^2 \left(c/2 + d \left(ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) \right) \right. \\ & \left. + g \left(ch(k \sin \theta) + 2e(ch(k \sin \theta)) ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

и $r = \Delta x / \Delta z$, $k = k_0 \Delta x$.

Будем искать параметры α , β , c , d , g , e , требуя максимально точного выполнения равенства $V^2(\theta, k) = 1$ в пределах допустимых значений θ , k .

Для этого определим функционал

$$F(u) = F(\alpha, \beta, c, d, g, e) = \iint (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk, \quad (14)$$

где $u = (\alpha, \beta, c, d, g, e)$ – вещественный вектор искомых параметров.

Пределы интегрирования по углу $\theta = [0, \pi/2]$. Пределы интегрирования по второй переменной от $k = 0$ до $k = K$. Величина k определяет отношение шага разностной сетки Δx к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Поэтому брать величину верхнего предела интегрирования K значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Будем искать точку минимума функционала (14) при заданных значениях r , K по параметрам α , β , c , d , g , e .

Для минимизации функционала будем использовать итерационный метод Ньютона [17]. Этот метод требует вычисления первой и второй производных функционала $F(u)$. Производные $F(u)$ по параметрам α , β , c , d , g , e легко вычисляются, так как выражение под интегралом и функция $V(\theta, k)$ имеют явный вид.

Минимальное значение функционала $F(u)$ при заданных значениях r , K обозначим $I(r, K) = \min F(u)$. Значения параметров α , β , c , d , g в точке минимума функционала $F(u)$ будем называть оптимальными параметрами.

В табл. 1 приведены оптимальные значения параметров α , β , c , d , g и интеграла $I(r, K)$, полученные при $e = 0$, $c = 1 - 2d - 2g$, т.е. при минимизации по 5 параметрам. Учет $e \neq 0$ дает незначительное (около 20%) уменьшение значения интеграла $I(r, K)$.

При заданном $r = \Delta x / \Delta z$, с ростом верхнего предела K , минимальное значение $I(r, K)$ в промежутке от $K = 0$ до $K \approx 0.3$ падает от единицы до $I \approx 10^{-5}$, в промежутке от $K \approx 0.3$ до $K \approx 2.5$ растет в 30–40 раз. Малые K соответствуют слабо меняющимся решениям уравнения (12).

При заданном верхнем пределе K с ростом r минимальное значение $I(r, K)$ растет менее, чем на 30% в промежутке $r = [1, 3]$. Зависимость от r значения $I(r, K)$ и определяемых параметров α , β , c , d , g носит монотонный характер.

Приводимые здесь разностные аппроксимации уравнения Гельмгольца используют различное число точек сетки. Шаблон разностной схемы без оптимальных параметров является 5-то-

Таблица 1

α	β	c	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.8465	0.8465	0.6782	0.08044	0.08044	5.88e-05	1	1
0.8613	0.8613	0.6916	0.07708	0.07708	2.61e-04	1	1.5
0.8981	0.8981	0.7283	0.06790	0.06790	1.35e-03	1	2.5
0.4985	0.9966	0.6752	0.08187	0.08051	5.96e-05	1.5	1
0.5046	1.0105	0.6852	0.08013	0.07722	2.64e-04	1.5	1.5
0.5207	1.0467	0.7133	0.07511	0.06820	1.37e-03	1.5	2.5
0.3184	0.9735	0.6744	0.08227	0.08052	7.10e-05	2	1
0.3215	0.9860	0.6834	0.08102	0.07725	3.14e-04	2	1.5
0.3296	1.018	0.7083	0.07757	0.06827	1.60e-03	2	2.5

Таблица 2

C	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.7554	0.06114	0.06114	4.65e-02	1	1
0.7621	0.05946	0.05946	4.01e-02	1	1.5
0.7825	0.05435	0.05435	2.62e-02	1	2.5
0.7673	0.05005	0.06625	4.25e-02	1.5	1
0.7710	0.05062	0.06384	3.78e-02	1.5	1.5
0.7828	0.05151	0.05707	2.73e-02	1.5	2.5
0.7974	0.03316	0.06811	3.68e-02	2	1
0.7983	0.03531	0.06551	3.30e-02	2	1.5
0.8022	0.04061	0.05826	2.46e-02	2	2.5

чечным, а шаблон разностной схемы с оптимальными параметрами является 9-точечным. Увеличение числа точек ведет к увеличению числа вычислительных операций.

Если положить $\alpha = 1, \beta = 1$, и искать минимум интеграла по трем параметрам, то шаблон такой оптимальной схемы остается 5-точечным, как и обычная схема 2-го порядка. Такая простая модернизация обычной схемы 2-го порядка не меняет структуры матрицы системы разностных уравнений (8).

В табл. 2 приведены оптимальные значения параметров c, d, g для разных значений величины $r = \Delta x / \Delta z$ и при разных верхних пределах интегрирования по k в формуле (14). Указаны также значения интеграла $I(r, K)$, полученные при этих значениях параметров. Эти значения интеграла, как и ранее, нормированы на величину интеграла для неоптимальной схемы.

Зависимость интеграла $I(r, K)$ от r, K существенно отличается от случая, приведенного в табл. 1. При заданном r , с ростом верхнего предела K , минимальное значение $I(r, K)$ падает от единицы до $I \approx 2 \times 10^{-2}$, в промежутке $K = [0, 2.5]$. При заданном верхнем пределе K , с ростом r минимальное значение $I(r, K)$ меняется менее, чем на 30% в промежутке $r = [1, 3]$.

Значения интеграла $I(r, K)$ при $K = 2.5$ примерно на порядок больше, чем в случае минимизации по 5 параметрам, приведенным в предыдущей таблице. При уменьшении K эта разница возрастет до трех порядков, т.е. схема с 5 параметрами позволяет достичь более глубокой минимизации $I(r, K)$, чем схема с 3 параметрами, но с ростом K разница быстро уменьшается.

Как и для разностной схемы 2-го порядка для разностных схем 4-го порядка можно также построить оптимальную разностную схему. Рассмотрим разностную аппроксимацию четвертого порядка уравнения (12) вида

$$\frac{16(E_{i+1,j} + E_{i-1,j}) - (E_{i+2,j} + E_{i-2,j}) - 30E_{i,j}}{12\Delta z^2} - \frac{16(E_{i,j+1} + E_{i,j-1}) - (E_{i,j+1} + E_{i,j-1}) - 30E_{i,j}}{12\Delta x^2} = \tag{15}$$

$$= k_0^2 (cE_{i,j} + d(4(E_{i,j+1} + E_{i,j-1})/6 - (E_{i,j+2} + E_{i,j-2})/6) + g(4(E_{i+1,j} + E_{i-1,j})/6 - (E_{i+2,j} + E_{i-2,j})/6).$$

Таблица 3

C	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.8897	0.05513	0.05513	2.48e-02	1	1
0.8961	0.05191	0.05191	2.13e-02	1	1.5
0.9043	0.04781	0.04781	1.84e-02	1	2
0.8952	0.04812	0.05667	1.85e-02	1.5	1
0.8993	0.04747	0.05313	1.60e-02	1.5	1.5
0.9049	0.04638	0.04864	1.38e-02	1.5	2
0.9184	0.02465	0.05693	1.58e-02	2	1
0.9208	0.02584	0.05334	1.37e-02	2	1.5
0.9245	0.02671	0.04878	1.19e-02	2	2

Шаблон этой схемы является 9-точечным. Введение трех параметров c, d, g при $c = 1 - d - g$ не увеличивает числа точек схемы. Выписав для этого случая уравнения (13), (14) и проведя минимизацию по этим трем параметрам, получим оптимальные параметры, которые приведены в табл. 3.

При заданном r , с ростом верхнего предела K , минимальное значение $I(r, K)$ падает от единицы до $I \approx 10^{-2}$, в промежутке $K = [0, 2]$. При заданном верхнем пределе K , с ростом r минимальное значение $I(r, K)$ падает в 2.5 раза в промежутке $r = [1, 3]$. При $K > 2.1$ точка минимума $I(r, K)$ не определяется.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Решение уравнения (1) спектральным методом Лагерра, полученное с использованием оптимальных параметров, будем сравнивать с решением системы уравнений (2)–(4) высокоточным [18] конечно-разностным методом (7-го порядка аппроксимации по времени и 6-го порядка аппроксимации по пространству).

Источник тока брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s),$$

$$f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (16)$$

где f_0 – несущая частота источника, t_0 – момент центра импульса источника, z_s – точка расположения источника.

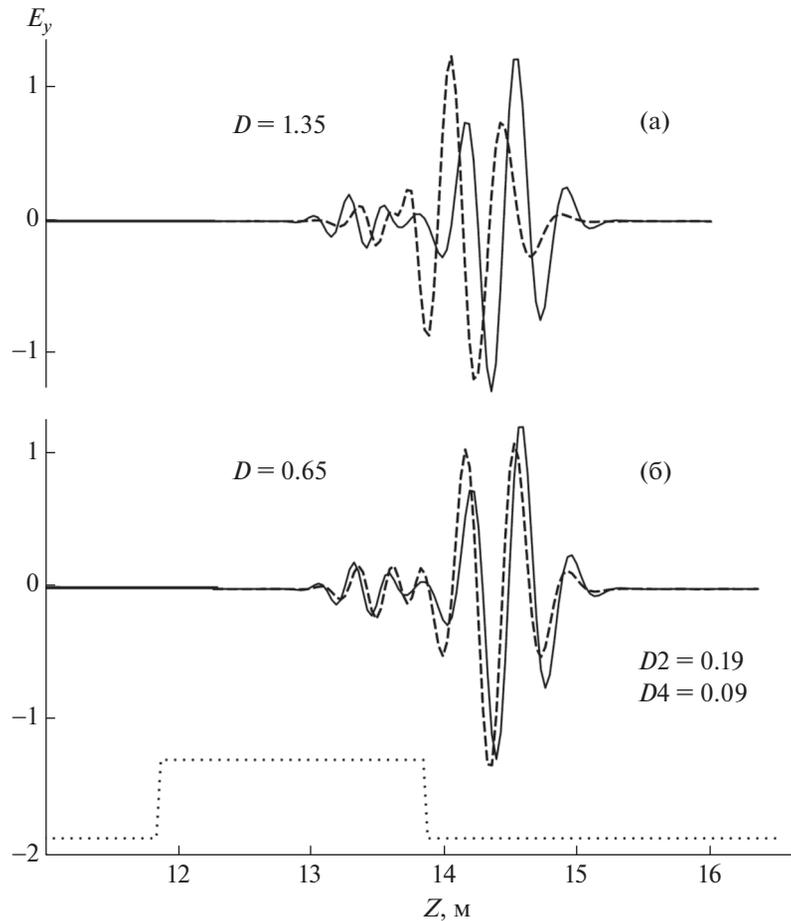
В преобразовании Лагерра использовались 310 гармоник Лагерра, параметры $\alpha = 1, h = 100$.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением

$$D(t) = \frac{\int_0^{\infty} |E_y(z, t) - E_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^{\infty} |E_{0y}(z, t)| dz}, \quad (17)$$

здесь $E_y = E$ – решение уравнения (1), полученное с использованием разложения Лагерра, E_{0y} – решение уравнений (2)–(4), полученное с использованием конечно-разностной схемы. На графиках, приведенных ниже, решение этой конечно-разностной схемой показано сплошной линией.

На фиг. 1 показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y – компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Шаг разностной схемы



Фиг. 1. Решение уравнения неоптимальной (а) и оптимальной (б) разностными схемами 2-го порядка аппроксимации.

$\Delta x = 0.05$. Точками показано расположение слоя в среде. Сплошная линия соответствует решению уравнений (2)–(4).

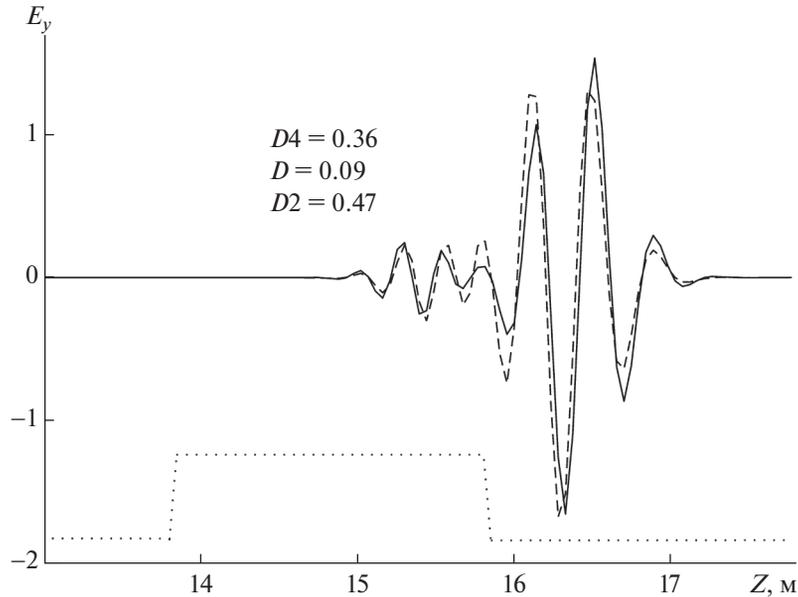
На фиг. 1а штрихованная линия соответствует решению обычной, неоптимальной разностной схемой 2-го порядка. Указана величина погрешности D для этого решения.

На фиг. 1б штриховая линия соответствует решению оптимальной разностной схемой 2-го порядка с тремя оптимальными параметрами, приведенными в табл. 2, при $r = 1.5$, $K = 2.5$. Здесь величина погрешности D примерно в два раза меньше, чем в случае использования неоптимальной схемы фиг. 1а.

Видно, что оптимальная разностная схема с тремя оптимальными параметрами дает более точное решение. Простая модернизация разностной схемы ведет также и к повышению эффективности алгоритма. В данном случае это дает сокращение времени счета на несколько первых процентов.

На этой же фигуре приведено решение оптимальной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации с 5 оптимальными параметрами, приведенными в табл. 1, и решение разностной схемой 4-го порядка аппроксимации без оптимальных параметров. Для сравнения приведены погрешности $D2$ и $D4$ для этих алгоритмов. Эти решения графически совпадает с решением уравнений (2)–(4).

На фиг. 2 показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y – компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Шаг разностной схемы $\Delta x = 0.07$. Точками показано расположение слоя в среде.



Фиг. 2. Решение уравнения неоптимальной (штриховая линия) и оптимальной (сплошная линия) разностными схемами 4-го порядка аппроксимации.

Сплошная линия соответствует решению уравнений (2)–(4), штриховая линия соответствует решению разностной схемой 4-го порядка без оптимальных параметров. Указана величина погрешности для этого решения $D4$, ниже указана величина погрешности D для решения оптимальной схемой с тремя оптимальными параметрами, приведенными в табл. 3 при $r = 1.5$, $K = 2.0$. Погрешности D в четыре раза меньше погрешности $D4$.

Решение разностной схемой с тремя оптимальными параметрами, графически неотлично от решения уравнений (2)–(4). Как и в случае, показанном на фиг. 1, здесь оптимальная разностная схема дает сокращение времени счета на несколько первых процентов.

Для сравнения, эта задача решалась с использованием оптимальной разностной схемы 2-го порядка с 5 оптимальными параметрами из табл. 1, при $r = 1.5$, $K = 2.5$. На этой фигуре приведена только погрешность $D2$ этого решения. Разница величин $D2$ и $D4$ менее 30%, но схема 2-го порядка в этом варианте оказывается на 20–25% экономичнее схемы 4-го порядка.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование оптимальных разностных схем позволяет повысить точность решения уравнения в сравнении с обычными схемами 2-го порядка аппроксимации. Это верно и для разностных схем 4-го порядка аппроксимации. Оптимальные схемы с 5 оптимальными параметрами дают более точное решение, чем оптимальные схемы с 3 оптимальными параметрами. Оптимальные схемы с 3 оптимальными параметрами требуют простой модернизации обычных неоптимальных разностных схем, но повышают точность решения задачи и сокращают время счета задачи. Значения оптимальных параметров зависят только от отношения пространственных шагов разностной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Luebbers R., Hansberger F.P.* FDTD for Nth-order dispersive media // *IEEE Trans. Ant Propog.* 1992. V. 40. P. 1297–1301.
2. *Turner G., Siggins A.F.* Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // *Geophysics.* 1994. V. 59. P. 1192–1200.
3. *Bergmann T., Johan O.A. Robertsson, Klaus Holliger.* Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // *Geophysics.* 1998. V. 63. P. 856–867.

4. *Bergmann T., Joakim O. Blanch, Johan O.A. Robertsson, Klaus Holliger.* A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // *Geophysics.* 1999. V. 64. P. 1369–1377.
5. Электроразведка. Справочник геофизика / Под ред. А.Г. Тархова. М.: Недра, 1980. С. 518.
6. *Конюх Г.В., Михайленко Б.Г.* Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмоки // *Труды ИВМ и МГ. Матем. моделирование в геофизике.* Новосибирск. 1998. № 5. С. 107–112.
7. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофиз.* 2003. Т. 44. № 10. С. 1060–1069.
8. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофиз.* 2006. Т. 47. № 3. С. 397–407.
9. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. С. 548.
10. *Tam C.K., Webb J.C.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // *J. Comput. Phys.* 1993. V. 107. № 2. P. 262–281.
11. *Jo C.H., Shin C., Suh H.S.* An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // *Geophys.* 1996. V. 61. P. 529–537.
12. *Chen J.B.* An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // *Geophys.* 2012. V. 77. P. T201–T210.
13. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Оптимальные разностные схемы для уравнений Максвелла при решении прямых задач электромагнитных зондирований // *Геология и геофиз.* 2015. Т. 56. № 9. С. 1713–1722.
14. *Мастрюков А.Ф.* Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // *Сиб. Ж. вычисл. матем.* 2016. № 5. С. 107–112.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 620.
16. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 832.
17. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. С. 518.
18. *Ghris M., Fornberg B., Driscoll T.A.* Staggered time integrator for wave equations // *SIAM J. Numer. Analys.* 2000. V. 38. P. 718–741.

**ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

УДК 517.977

ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД НЕВЯЗКИ В ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДА СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ

© 2021 г. М. С. Близорукова^{1,*}, В. И. Максимов^{1,**}

¹ 620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН, Россия

*e-mail: msb@imm.uran.ru

**e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 23.03.2020 г.
Переработанный вариант 23.03.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Рассматривается задача реконструкции неизвестного входного воздействия системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием в управлении. Представлен устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теории гарантированного управления. Библиография: 12.

Ключевые слова: реконструкция, система с запаздыванием, оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466921030042

1. ВВЕДЕНИЕ

В подавляющем большинстве реальных процессов, имеющих место при решении практических задач, наблюдателю доступны не все параметры и характеристики рассматриваемых объектов. При этом в случае статических по постановке задач, когда алгоритмы не учитывают возможное изменение данных в процессе счета, особых проблем не возникает. Другое дело, когда требуется восстановить неизвестные параметры в динамике синхронно с развитием процесса. Поскольку, как правило, измерения результатов наблюдений и экспериментов сопровождаются неизбежными ошибками, помехами, то применение стандартных методов в этом случае бывает затруднительно. Информация о данных расчетов в этом случае может меняться, и решение должно приниматься на основании выборки, которая очевидно ограничена, поскольку в каждый момент доступны только прошлые по времени данные, а не вся зависимость, как в апостериорных задачах, где алгоритмы обрабатывают историю измерений целиком. Эти данные требуют обработки в режиме он-лайн, что затрудняет применение обычных методов при поиске решений обратных задач и требует привлечения специальных, называемых методами регуляризации, разработанных в рамках теории некорректных задач. Упрощенно задачу динамического восстановления можно сформулировать как процедуру получения устойчивой по отношению к помехам оценки подлежащей восстановлению функциональной характеристики системы с помощью некоторого локально регуляризованного метода. При этом разрешающий алгоритм строится в классе конечно-шаговых алгоритмов, т.е. алгоритмов, учитывающих поступающую информацию в конечном числе временных узлов. Теоретическая основа одного из методов, обеспечивающих в реальном времени динамическое восстановление входного воздействия на систему, заложена в [1]–[3]. В большинстве работ по данной тематике решение задач динамического восстановления (или online реконструкции) основывается на методе локальной регуляризации экстремального сдвига с использованием сглаживающего функционала (см. [2]–[6]). Данный метод представляет собой вариант принципа управления с поводырем: в контур управления вводится дополнительная динамическая система – модель. Необходимость использовать эту систему отпадает, если в качестве метода регуляризации применять динамический метод невязки, который был предложен в [7] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии ограничений на входное воздействие в виде выпуклого компакта и модифицирован в [8]–[10] – в случае их отсутствия. Для систем с распределенными параметрами динамический метод невязки был развит, например, в [11], а для систем с запаздыванием в фазовых координатах – в [12].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t - \tau) + Bu(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \quad (2.1)$$

с начальным состоянием $x(0) = x_0$ (начальное состояние считаем фиксированным и заданным). Здесь $u \in R^r$, $t \in T$ – переменная времени, $0 < \vartheta < +\infty$, $\tau = \text{const} > 0$, B – постоянная $n \times r$ матрица, $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние системы в момент t .

Траектория (решение) системы $x(t)$, $t \in T$, заранее неизвестна и определяется некоторым возмущением $u(t)$, $t \in [-\tau, \vartheta]$, которое при $t \in T$ также неизвестно. Это возмущение подчинено априорному ограничению $u(\cdot) \in P(\cdot)$, где

$$P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; R^r) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}, \quad (2.2)$$

P – выпуклый компакт.

Полагаем, что функция $u(s)$, $s \in [-\tau, 0]$, известна и является непрерывной. Символом E обозначим замкнутое множество в пространстве R^n , в котором остается траектория вместе с окрестностью радиуса единица при всех $t \in T$, т.е. $\bigcup_{t \in T} S_1(x(t)) \subset E$. Здесь $S_1(a)$ – замкнутая окрестность единичного радиуса с центром в точке a . Вектор-функция f_1 и матричная функция f_2 – локально липшицевы по совокупности переменных с константами $c_j^0(Y) > 0$, $j = 1, 2$, т.е. для любого ограниченного множества $Y \in T \times E$ при любых $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in Y$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |f_1(t_1, x_1) - f_1(t_2, x_2)|_n &\leq c_1^0 (|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|_n), \\ \|f_2(t_1, x_1) - f_2(t_2, x_2)\| &\leq c_2^0 (|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|_n), \quad c_j^0 = c_j^0(Y), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее символом $|\cdot|_n$ обозначена норма вектора в евклидовом пространстве R^n , а символом $\|\cdot\|$ – норма матрицы в пространстве $R^{n \times r}$.

В дискретные моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, координаты $x(\tau_i)$ измеряются с некоторой погрешностью $h \in (0, 1)$. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in R^n$, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h. \quad (2.4)$$

Требуется указать алгоритм приближенного восстановления неизвестного возмущения $u(\cdot)$ по результатам неточных измерений $x(\tau_i)$. Таким образом, рассматриваемая задача состоит в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $x(\tau_i)$ в “реальном времени” формирует (по принципу обратной связи) некоторую функцию $u = u^h(\cdot)$, являющуюся приближением (в метрике пространства $L_2(T; R^r)$) возмущения $u(\cdot)$ на отрезке $[0, \vartheta]$.

Сформулированная выше задача является задачей восстановления (реконструкции). В настоящей работе мы укажем алгоритм решения, основанный на динамическом аналоге известного в теории некорректных задач метода невязки. Суть последнего состоит, как известно, в следующем: на основании имеющейся неточной информации очерчивается некоторое множество Ω , заведомо содержащее искомым элемент. Затем в этом множестве по некоторому правилу выбирается другой элемент, служащий приближением искомого. Обычно приближающий элемент отыскивается как точка экстремума подходящего функционала. Ниже эта идея реализована для рассматриваемой задачи.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Перейдем к описанию алгоритма решения.

Пусть для каждого $h \in (0, 1)$ фиксировано семейство Δ_h разбиений отрезка T контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$ на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta, \quad \delta = \delta(h), \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta. \quad (3.1)$$

Далее нам потребуются следующие обозначения. Символом $\left[\frac{\vartheta}{\tau}\right]$ обозначим целую часть числа $\frac{\vartheta}{\tau}$, $N = \left[\frac{\vartheta}{\tau}\right] + 1$, $|\cdot|$ – модуль числа и (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве.

Введем постоянные $c^0 > 0$ и b такие, что

$$\begin{aligned} |f_1(t, x) + f_2(t, x)u_1 + Bu_2|_n &\leq c^0 \quad \forall t \in T, \quad u_1, u_2 \in P, \quad x \in E, \\ \|f_2(t, x)\| &\leq b \quad \forall t \in T, \quad x \in E. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В таком случае, очевидно, что

$$|\dot{x}(t)|_n \leq c^0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T. \quad (3.3)$$

Для простоты выкладок положим: разбиения Δ_h таковы, что числа $l = l(h) = \frac{\tau}{\delta(h)}$ являются целыми. Кроме того, $\tau_j \in \Delta_h, \forall j \in [0 : N - 1]$.

В дальнейшем считаем выполненным

Условие 1: $\text{rank } B = r$.

В силу условия 1, можно указать число $c_* > 0$ такое, что

$$|Bu|_n \geq c_* |u|_r \quad \text{для всех } u \in R^r. \quad (3.4)$$

Пусть $\omega(\cdot)$ – модуль непрерывности функции $u(s), s \in [-\tau, 0]$, т.е.

$$\omega(\delta) = \sup \{|u(s_1) - u(s_2)|_r : s_1, s_2 \in [-\tau, 0], |s_1 - s_2| \leq \delta\}.$$

Всюду ниже $\delta = \delta(h), l = l(h), \tau_i = \tau_{h,i}$.

При $i \in [0 : l]$ обозначим

$$u_{i-l}^h = u(-\delta(i-l)). \quad (3.5)$$

Тогда видно, что при $i \in [1 : l]$ справедливы неравенства

$$\left| \int_{\tau_{i-1}-\tau}^{\tau_i-\tau} \{u(t) - u_{i-l}^h\} dt \right|_r \leq \delta \omega(\delta). \quad (3.6)$$

Введем множества ($i \geq 1, j \in [0 : N]$)

$$\Omega_{h,i}^{(j)} = \left\{ v \in P : \left| (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1} - [f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) + f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) u_{i-l}^h + Bv] \right|_n \leq \sigma_h^{(j)} \right\}, \quad (3.7)$$

где

$$\sigma_h^{(j)} = 2h\delta^{-1} + K_1\delta + K_2h + \delta^{-1} b \tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h), \quad (3.8)$$

$$K_1 = c_1^0(1 + c^0) + c_2^0(1 + c^0)d(P), \quad K_2 = c_1^0 + c_2^0d(P), \quad d(P) = \sup_{u \in P} |u|_r,$$

$$\tilde{\lambda}_{-1}(\delta, h) = \delta \omega(\delta), \quad (3.9)$$

$$\tilde{\lambda}_j(\delta, h) = c_*^{-1} [2(2 + K_2)h + 2K_1\delta^2 + 3b\tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h)] \quad \text{при } j \in [0 : N].$$

Считаем при $i \geq 1, j \in [0 : N], \tau_i \leq \vartheta - \delta,$

$$u_{i-1}^h = \operatorname{argmin} \{ |u|_r : u \in \Omega_{h,i}^{(j)} \}, \tag{3.10}$$

$$u^h(t) = u_{i-1}^h \quad \text{при} \quad t \in \delta_{i-1} = [\tau_{i-1}, \tau_i]. \tag{3.11}$$

При $i \in [-l, 0]$ (см. (3.5))

$$u^h(t) = u_i^h = u(\delta i), \quad \text{если} \quad t \in (\delta i, \delta(i+1)]. \tag{3.12}$$

Алгоритм решения рассматриваемой задачи состоит в следующем. До начала работы алгоритма фиксируется величина погрешности измерения фазового состояния системы, а именно, число $h \in (0, 1)$. Вместе с ним фиксируется равномерное разбиение Δ_h отрезка T контрольными моментами времени $\tau_i = \tau_{h,i}$. Работа алгоритма разбивается на однотипные шаги. На i -м шаге, в момент τ_i , на основании поступивших на начало этого шага результатов измерения ξ_i^h и ξ_{i-1}^h строится семейство множеств вида (3.7). После этого вычисляется вектор u_{i-1}^h по формуле (3.10). Затем, согласно (3.11), определяется функция $u(t)$ при $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$. Вся процедура осуществляется до момента времени ϑ .

Лемма 1. При $\tau_i \in (\tau_j, \tau(j+1)] \cap T, j \in [0 : N]$, справедливы следующие соотношения:

$$\mu_i(\delta, h) \equiv \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{u(s) - u^h(s)\} ds \right|_r \leq \tilde{\lambda}_j(\delta, h), \tag{3.13}$$

$$\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u(t) dt \in \Omega_{h,i}^{(j)}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Пусть $j = 0, \tau_i \in (0, \tau]$. Очевидно, что для любого $x(\cdot) \in X_T = \{x(\cdot) : x(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in P(\cdot)\}$ ($P(\cdot)$ определено согласно (2.2)) верно неравенство

$$|x(t_1) - x(t_2)|_n \leq c^0 |t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in T. \tag{3.15}$$

Поэтому при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, ввиду (2.4), (3.3), (2.3) и (3.15), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \left| f_1(t, x(t)) - f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) \right| \leq c_1^0 \left(t - \tau_{i-1} + |x(t) - \xi_i^h|_n \right) \leq \\ & \leq c_1^0 \left(t - \tau_{i-1} + h + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |\dot{x}(t)|_n dt \right) \leq c_1^0 (\delta + h + c^0 \delta), \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\left| f_2(t, x(t))u - f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)u \right| \leq c_2^0 (\delta + h + c^0 \delta) d(P) \quad \forall u \in P. \tag{3.17}$$

Заметим, что, ввиду (3.5), (3.12),

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u^h(t - \tau) dt = \delta u_{i-l-1}^h.$$

В таком случае, в силу (3.2), (3.17) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_2(t, x(t))u(t - \tau) dt - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)u_{i-l-1}^h dt \right|_n \leq \\ & \leq b \int_{\tau_{i-1-\tau}}^{\tau_i-\tau} |u(t) - u_{i-l-1}^h|_r dt + \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f_2(t, x(t)) - f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)u_{i-l-1}^h\} dt \right|_n \leq \\ & \leq b \int_{\tau_{i-1-\tau}}^{\tau_i-\tau} |u(t) - u_{i-l-1}^h|_r dt + c_2^0 (\delta + h + c^0 \delta) d(P) \delta. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из (3.2), (3.16) и (3.18) вытекает неравенство

$$\left| \delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t - \tau) + Bu(t)] dt - \left[f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) + f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)u_{i-1}^h + B\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u(t) dt \right] \right|_n \leq \leq K_1\delta + K_2h + \delta^{-1}b \left| \int_{\tau_{i-1}-\tau}^{\tau_i-\tau} \{u(t) - u_{i-1}^h\} dt \right|_r. \quad (3.19)$$

Теперь учтем, что первое слагаемое в (3.19) под знаком нормы, равное, очевидно, $(x(\tau_i) - x(\tau_{i-1}))\delta^{-1}$, отклоняется от $(\xi_i^h - \xi_{i-1}^h)\delta^{-1}$ не более, чем на $2h\delta^{-1}$ (см. (2.4)). В таком случае, учитывая неравенства (3.6) и (3.19), а также (3.8) и (3.9), заключаем, что справедливы включения (3.14). Проверим справедливость неравенств (3.13) при $j = 0$, $\tau_i \in (0, \tau]$. В силу включения $u_{i-1}^h \in \Omega_{h,i}^{(0)}$ (см. (3.7), (3.10), (3.12)) имеет место неравенство

$$\left| B \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u^h(t) dt - \xi_i^h + \xi_{i-1}^h - \delta \{f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) + f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)u_{i-1}^h\} \right|_n \leq \delta\sigma_h^{(0)}, \quad (3.20)$$

где, очевидно, имеем

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u^h(t) dt = \delta u_{i-1}^h.$$

Кроме того,

$$\left| \xi_i^h - \xi_{i-1}^h - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t - \tau) + Bu(t)] dt \right| \leq 2h. \quad (3.21)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\left| B \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{u^h(t) - u(t)\} dt \right|_n = \left| x(\tau_i) - x(\tau_{i-1}) - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t - \tau)\} dt - Bu_{i-1}^h \delta \right|_n. \quad (3.22)$$

В таком случае, учитывая (3.20)–(3.22), заключаем, что справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \left| B \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{u^h(t) - u(t)\} dt \right|_n \leq 2h + \delta\sigma_h^{(0)} + \\ & + \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f_1(t, x(t)) - f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) + f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)u_{i-1}^h + f_2(t, x(t))u(t - \tau)\} dt \right|_n \leq \\ & \leq 2h + \delta\sigma_h^{(0)} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left| f_1(t, x(t)) - f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) \right|_n dt + b \left| \int_{\tau_{i-1}-\tau}^{\tau_i-\tau} \{u^h(t) - u(t)\} dt \right|_r + \\ & + \left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f_2(t, x(t)) - f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)\} u(t - \tau) dt \right|_n. \end{aligned}$$

Ввиду неравенств (3.16), имеют место соотношения

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left| f_1(t, x(t)) - f_1(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) \right|_n dt \leq c_1^0 \delta (\delta + h + c^0 \delta).$$

В свою очередь, в силу (3.17) справедливы неравенства

$$\left| \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f_2(t, x(t)) - f_2(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h)\} u(t - \tau) dt \right|_n \leq c_2^0 \delta (\delta + h + c^0 \delta) d(P).$$

Следовательно, верны оценки

$$\left| B \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{u^h(t) - u(t)\} dt \right|_n \leq \lambda_i(h, \delta), \tag{3.23}$$

где

$$\lambda_i(h, \delta) = 2\delta\sigma_h^{(0)} + b\mu_{i-1}(\delta, h).$$

Причем (см. (3.6)) при $i \in [1 : l]$, $\mu_{i-1}(\delta, h) = \delta\omega(\delta)$. Из (3.23), учитывая (3.4), при $\tau_i \in (0, \tau]$ получаем

$$\mu_i(\delta, h) \leq c_*^{-1}\lambda_i(h, \delta) = c_*^{-1}(2\delta\sigma_h^{(0)} + b\mu_{i-1}(\delta, h)). \tag{3.24}$$

Заметим, что при $\tau_i \in [0, \tau)$ из (3.24) вытекают оценки

$$\mu_i(\delta, h) \leq C_1 h + C_2 \delta^2 + 3c_*^{-1} b \delta \omega(\delta),$$

где $C_1 = 2c_*^{-1}(2 + K_2)$, $C_2 = 2c_*^{-1}K_1$. Справедливость неравенства (3.13) при $j = 0$, $\tau_i \in (0, \tau]$, установлена. Пусть эти неравенства верны при $\tau_i \in (\tau(j-1), \tau j]$, $j \geq 1$. Докажем, что эти же неравенства справедливы при $\tau_i \in (j\tau, (j+1)\tau]$. Видно, что и в этом случае неравенства (3.23) останутся справедливыми. Однако при этом $\lambda_i(h, \delta) = 2\delta\sigma_h^{(j)} + b\mu_{i-1}(\delta, h)$, где, очевидно, $\mu_{i-1}(\delta, h) \leq \tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h)$. Следовательно верны неравенства

$$\left| B \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{u^h(t) - u(t)\} dt \right|_n \leq 2\delta\sigma_h^{(j)} + b\tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h). \text{ Значит при } \tau_i \in (j\tau, (j+1)\tau]$$

$$\mu_i(\delta, h) \leq c_*^{-1}(2\delta\sigma_h^{(j)} + b\tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h)).$$

Отсюда следуют неравенства (3.13). Заметим, что неравенства (3.19) справедливы при всех $\tau_i \in \Delta_h$. Кроме того, ввиду (3.13), при всех $\tau_i \in (\tau j, \tau(j+1)] \cap T$, $j \in [0 : N]$, имеем

$$\mu_{i-1}(\delta, h) \leq \tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h). \tag{3.25}$$

Поэтому включение (3.14) при $j \in [1 : N]$, $\tau_i \in (\tau j, \tau(j+1)] \cap T$, следует из (3.19) и (3.25). Лемма доказана.

По индукции нетрудно показать, что при $j \in [0 : N]$

$$\tilde{\lambda}_j(\delta, h) = c_j^{(1)} h + c_j^{(2)} \delta^2 + c_j^{(3)} \delta \omega(\delta), \tag{3.26}$$

где

$$c_j^{(1)} = 2(2 + K_1)c_*^{-1} \sum_{k=0}^j (c_*^{-1}3b)^k, \quad c_j^{(2)} = 2K_1c_*^{-1} \sum_{k=0}^j (c_*^{-1}3b)^k, \quad c_j^{(3)} = (c_*^{-1}3b)^{j+1}.$$

Рассмотрим систему вида

$$\dot{w}^h(t) = f_1(\tau_i, \xi_i^h) + f_2(\tau_i, \xi_i^h)u_{i-1}^h + Bu_i^h, \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \tag{3.27}$$

$$w^h(\tau_i) = \xi_0^h, \quad i \in [1 : m-1], \quad m = m_h. \tag{3.28}$$

Положим $w^h(t) = \xi_0^h$ при $t \in \delta_0$.

Проверим равномерную сходимость траекторий модели $w^h(\cdot)$ к $x(\cdot)$ при $h \rightarrow 0$. Для этого достаточно установить неравенства

$$\varepsilon(\tau_i) \equiv \left| x(\tau_i) - w^h(\tau_i) \right|_n \leq v(h), \quad i \in [1 : m],$$

где

$$m = m_h, \quad v(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Лемма 2. При всех $\tau_i \in (\tau j, \tau(j+1)] \cap [\tau_1, \vartheta]$, $j \in [0 : N]$, справедливы неравенства

$$\varepsilon(\tau_i) \leq h + c^0 \delta + \tilde{c}_j^{(1)} h \delta^{-1} + \tilde{c}_j^{(2)} \delta + \tilde{c}_j^{(3)} \omega(\delta),$$

где

$$\tilde{c}_j^{(1)} = \tau bc_j^{(1)} + 4\tau + \tau K_2, \quad \tilde{c}_j^{(2)} = \tau K_1 + \tau bc_j^{(2)}, \quad \tilde{c}_j^{(3)} = \tau bc_j^{(3)}.$$

Доказательство. При $i = 1$ с учетом (2.4), (3.3), (3.28) получаем

$$\varepsilon(\tau_1) = |x(\tau_1) - w^h(\tau_1)|_n = |\xi_0^h - x(\tau_1)|_n \leq |\xi_0^h - x(\tau_1)|_n + |x(\tau_1) - x_0|_n \leq h + c^0 \delta. \tag{3.29}$$

В свою очередь, при $\tau_i \in (\tau_j, \tau(j+1)]$, т.е. $i \in (lj, l(j+1)]$, верны неравенства

$$\varepsilon(\tau_i) \leq |x(\tau_j) - w^h(\tau_j)|_n + \varphi_{ji}, \tag{3.30}$$

где

$$\varphi_{ji} = \left| \sum_{k=lj}^{i-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \{f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t - \tau) + Bu(t) - f_1(\tau_k, \xi_k^h) - f_2(\tau_k, \xi_k^h)u_{k-l}^h - Bu_k^h\} dt \right|_n.$$

При этом

$$\varphi_{ji} \leq \left| \sum_{k=lj}^{i-1} \{\xi_{k+1}^h - \xi_k^h + \delta[f_1(\tau_k, \xi_k^h) + f_2(\tau_k, \xi_k^h)u_{k-l}^h + Bu_k^h]\} \right|_n + 2(i-1-lj)\delta h. \tag{3.31}$$

Так как $u_k^h \in \Omega_{h,k}^{(j)}$, то, в силу (3.7), из (3.31) получаем

$$\varphi_{ji} \leq \left| \delta \sum_{k=lj}^i \sigma_h^{(j)} \right|_n + 2l\delta h \leq \delta l \sigma_h^{(j)} + 2l\delta h = \tau \sigma_h^{(j)} + 2\tau h. \tag{3.32}$$

Поэтому для каждого $i \in (lj, l(j+1)]$, т.е. $\tau_i \in (\tau_j, \tau(j+1)]$, вследствие (3.8), (3.30), (3.32), получаем

$$\varepsilon(\tau_i) \leq \varepsilon(\tau_j) + 2\tau h + \tau \delta^{-1} (2h + K_1 \delta^2 + K_2 h \delta + b \tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h)) \leq \varepsilon(\tau_j) + v^{(j)}(\delta, h). \tag{3.33}$$

Здесь

$$v^{(j)}(\delta, h) = \tau \delta^{-1} \{2h + K_1 \delta^2 + K_2 h \delta + b \tilde{\lambda}_{j-1}(\delta, h)\} + 2\tau h = \tilde{c}_j^{(1)} h \delta^{-1} + \tilde{c}_j^{(2)} \delta + \tilde{c}_j^{(3)} \omega(\delta).$$

При $j = 0$ в (3.33) вместо $\varepsilon(0)$ стоит $\varepsilon(\tau_1)$. Видно, что справедливы неравенства

$$\tilde{\lambda}_j(\delta, h) \leq \tilde{\lambda}_{j+1}(\delta, h). \tag{3.34}$$

Таким образом, при всех $i \in (lj, l(j+1)]$, в силу (3.26), (3.34), (3.33), справедливы неравенства

$$\varepsilon(\tau_i) \leq \varepsilon(\tau_j) + v^{(j)}(\delta, h) \leq \varepsilon(\tau_1) + \sum_{k=0}^j v^{(k)}(\delta, h) \leq \varepsilon(\tau_1) + j v^{(j)}(\delta, h).$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

На основании лемм 1 и 2 стандартным образом (см., например, [2], [3]) доказывается

Теорема 1. Пусть $\delta(h) \rightarrow 0$, $h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; R^r) \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости (см. ниже теорему 2). Установим эту оценку. Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 3 (см. [3, с. 29]). Пусть $u(\cdot) \in L_\infty(T_*; R^n)$, $v(\cdot) \in W(T_*; R^n)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t u(\tau) d\tau \right| \leq \varepsilon, \quad |v(t)|_n \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ верно неравенство

$$\left| \int_a^t (u(\tau), v(\tau)) d\tau \right| \leq \varepsilon(K + \text{var}(T_*; v(\cdot))).$$

Здесь символ $\text{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_* , а символ $W(T_*; R^n)$ – множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow R^n$ с ограниченной вариацией.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t \{u^h(s) - u(s)\} ds \right|_r \leq \Phi(\delta, h) = K_3 h \delta^{-1} + K_4 \delta + K_5 \omega(\delta). \quad (4.1)$$

Здесь

$$K_3 = \sum_{j=0}^N c_{1j}, \quad K_4 = \sum_{j=0}^N c_{2j}, \quad K_5 = \sum_{j=0}^N c_{3j}.$$

Доказательство. Имеет место соотношение

$$\left| \int_{\tau_i}^t \{u^h(s) - u(s)\} ds \right|_r \leq 2d(P)\delta, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (4.2)$$

Из (3.26), (4.2) и леммы 1 вытекает справедливость неравенств

$$\sup_{t \in [\tau_j, \tau_{j+1})} \left| \int_{\tau_j}^t \{u^h(s) - u(s)\} ds \right|_r \leq c_{1j} h \delta^{-1} + c_{2j} \delta + c_{3j} \omega(\delta), \quad (4.3)$$

где $c_{1j} = \tau c_j^{(1)}$, $c_{2j} = \tau c_j^{(2)} + 2d(P)$, $c_{3j} = \tau c_j^{(3)}$. Неравенство (4.1) вытекает из (4.2), (4.3). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, $n = r$, $u(\cdot) \in W(T; R^r)$. Тогда справедлива оценка*

$$\left| u(\cdot) - u^h(\cdot) \right|_{L_2(T; R^r)}^2 \leq C \Phi(\delta, h), \quad (4.4)$$

где постоянная C не зависит от h , δ .

Доказательство. В силу (3.10), (3.14) справедливы неравенства

$$\left| u_{i-1}^h \right|_r \leq \delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u(t)|_r dt, \quad i \in [1 : m - 1].$$

Отсюда получаем

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left| u^h(t) \right|_r^2 dt = \left| u_{i-1}^h \right|_r^2 \delta \leq \left| \delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u(t) dt \right|_r^2 \delta \leq \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u(t)|_r^2 dt.$$

В силу (3.11) из последнего неравенства имеем

$$\left| u^h(\cdot) \right|_{L_2(T; R^r)}^2 \leq \left| u(\cdot) \right|_{L_2(T; R^r)}^2. \quad (4.5)$$

Далее, учитывая (4.5), получаем

$$\left| u(\cdot) - u^h(\cdot) \right|_{L_2(T; R^r)}^2 = \left| u(\cdot) \right|_{L_2(T; R^r)}^2 - 2 \int_0^{\vartheta} (u(t), u^h(t)) dt + \left| u^h(\cdot) \right|_{L_2(T; R^r)}^2 \leq 2 \int_0^{\vartheta} (u(t), u(t) - u^h(t)) dt. \quad (4.6)$$

Из (4.6) в силу лемм 3 и 4 получаем (4.5). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
2. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.

3. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
4. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
5. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемехан. 2009. № 4. С. 18–30.
6. *Максимов В.И.* Реконструкция возмущения нелинейной системы при измерении части координат фазового вектора // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 14–23.
7. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 34–44.
8. *Близорукова М.С., Максимов В.И.* Об одном алгоритме динамической реконструкции входных воздействий при измерении части координат // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1007–1017.
9. *Близорукова М.С.* Динамический метод невязки в задаче реконструкции неизвестных характеристик системы второго порядка // Изв. Ин-та матем. и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 53. С. 48–60.
10. *Максимов В.И.* Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 2. С. 297–307.
11. *Maksimov V.I.* Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybernetics. 1996. V. 25. № 3. P. 465–481.
12. *Близорукова М.С.* О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикл. матем. и информатика. 2000. № 5. С. 105–115.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.658

**МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ КЛАССА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ
ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПОДМНОЖЕСТВА ТОЧЕК
ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

© 2021 г. Ю. А. Черняев

420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

e-mail: chernyuri@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2020 г.
Переработанный вариант 24.03.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Рассматривается обобщение метода проекции градиента на случай невыпуклых множеств ограничений, представляющих собой теоретико-множественную разность множества точек гладкой поверхности и объединения конечного числа выпуклых открытых множеств. Исследуются необходимые условия экстремума и вопросы сходимости метода. Библ. 14.

Ключевые слова: гладкая поверхность, выпуклое открытое множество, метод проекции градиента, необходимые условия локального минимума.

DOI: 10.31857/S004446692102006X

ВВЕДЕНИЕ

Один из возможных подходов к решению задачи вида $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in X \subset E^n$, в случае гладкой функции $\varphi(x)$ и выпуклого замкнутого множества X состоит в построении итерационного процесса по правилу

$$x_0 \in X, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k(\text{Pr}_X(x_k - \beta_k \varphi'(x_k)) - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_k \in (0; 1]$ и $\beta_k \in (0; +\infty)$ – параметры алгоритма. В силу выпуклости и замкнутости X задача проектирования всегда имеет единственное решение. Если нахождение проекций не требует привлечения трудоемких итерационных процедур, то соответствующий метод решения исходной задачи, называемый методом проекции градиента, может оказаться эффективным.

В [1] изучается одна из модификаций указанного метода для задач с неточно заданными исходными данными. В [2] предлагается подход к решению задач нелинейного программирования, объединяющий идеи метода проекции градиента и метода барьерных функций. В [3] рассмотрен непрерывный вариант метода в пространстве с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования. Кроме того, к настоящему времени разработаны модификации метода, предназначенные для решения более сложных вычислительных задач. Например, в [4] на основе метода проекции градиента строится алгоритм нахождения квазиразрешения нелинейного некорректного операторного уравнения, в [5] исследуется непрерывный аналог метода в пространстве с переменной метрикой для численного решения квазивариационных неравенств, а в [6] рассматривается класс некорректных задач минимизации приближенно заданного гладкого функционала на выпуклом множестве в гильбертовом пространстве. Различные варианты метода проекции градиента и вопросы их сходимости изучаются также в [7]–[9].

Возвращаясь к задаче $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in X \subset E^n$, отметим, что в случае невыпуклого допустимого множества X она существенно усложняется и для ее решения, как правило, приходится использовать иные, более трудоемкие методы. К числу наиболее распространенных из них относятся метод модифицированной функции Лагранжа и метод линеаризации. Однако для некоторых классов задач в последние годы было разработано обобщение метода проекции градиента. Одной из первых по соответствующей тематике является работа [10], где изучен класс допустимых множеств с пустой внутренностью, представляющих собой выпуклые гладкие поверхности.

Идея алгоритма, предложенного в [10], лежит в основе алгоритмов, рассматриваемых в [11]–[13] и предназначенных для решения задач с ограничениями более сложного вида. В [11] изучаются допустимые множества, представляющие собой гладкие поверхности общего вида, в [12] – теоретико-множественные пересечения сферической поверхности и выпуклого множества произвольной структуры, в [13] – пересечения гладкой поверхности общего вида и выпуклого множества.

В данной статье рассматривается обобщение метода проекции градиента на случай ограничений, представимых в виде теоретико-множественной разности множества точек гладкой поверхности S и объединения конечного числа выпуклых открытых множеств $\text{int } G_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, где каждое из замкнутых множеств G_i в любой своей граничной точке имеет единственную опорную гиперплоскость. В работе предлагается алгоритм построения итерационной последовательности $\{x_k\}$ и доказывается, что при выполнении ряда предположений любая ее предельная точка удовлетворяет необходимым условиям локального минимума.

В процессе использования алгоритма на каждой итерации приходится решать вспомогательную задачу проектирования точки $x_k - \beta\phi'(x_k)$, $\beta > 0$, на пересечение l замкнутых полупространств, содержащих точку x_k , и касательной гиперплоскости к поверхности S , построенной в точке x_k . При $l = 1$ поиск точки $z(x_k)$, являющейся решением этой задачи, осуществляется просто; с ростом l ее поиск усложняется. Однако, поскольку проектирование равносильно минимизации выпуклой квадратичной функции, то соответствующая задача сводится к задаче квадратичного программирования и может быть решена с помощью конечношаговых алгоритмов. Отметим также, что построению каждого из l полупространств предшествует решение вспомогательной задачи проектирования точки x_k на одно из выпуклых замкнутых множеств G_i . Если эти множества имеют простую геометрическую структуру (например, являются шарами), то соответствующие задачи решаются просто; в противном случае поиск проекций усложняется и может потребовать привлечения итерационных процедур.

Наиболее сложной при реализации алгоритма является задача отыскания проекции точки на невыпуклое множество, представляющее собой пересечение l замкнутых полупространств и гладкой поверхности S . Как уже отмечалось в [11], за последние годы был разработан ряд итерационных алгоритмов проектирования точки на множество вида $\{x \in A : g(x) = 0\}$, где A – выпуклый компакт, а $g(x)$ удовлетворяет тому или иному условию подчинения. Одно из таких условий представляет собой липшицевость $g(x)$ на A и рассматривается в [14]. При реализации метода, предлагаемого в настоящей работе, на каждой итерации требуется проектировать различные точки отрезка $[x_k, z(x_k)]$, при этом расстояние от проектируемой точки до ее проекции не может превосходить величину $\|x_k - z(x_k)\|$, поэтому в качестве A можно брать пересечение l имеющихся полупространств и замкнутого шара с центром в проектируемой точке и радиусом, не меньшим этой величины. Поскольку гладкая поверхность может быть задана в виде $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$, где $g(x) \in C^1(E^n)$, то $g(x)$ на любом компакте является липшицевой, а значит, для нахождения проекции может быть использован алгоритм из [14].

Отметим, что привлечение итерационных процедур для поиска проекции точки на невыпуклое множество существенно увеличивает объем вычислений на итерации при использовании предлагаемого в данной работе метода. Поэтому следует ожидать, что соответствующий метод для многих конкретных задач минимизации окажется менее эффективным по сравнению с методом модифицированной функции Лагранжа или методом линеаризации, о которых упоминалось выше. Однако, как уже отмечалось в [11], названные методы имеют свои недостатки, существенно ограничивающие их практическое использование. В связи с этим возможны ситуации, когда для минимизации гладкой функции на допустимом множестве рассматриваемого вида целесообразно использовать метод проекции градиента, несмотря на его сравнительно невысокую эффективность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ МЕТОДА

Рассмотрим задачу вида $\phi(x) \rightarrow \min$, $x \in X \subset E^n$, в которой $\phi(x) \in C^1(X)$, а X непусто и представляет собой теоретико-множественную разность множества точек поверхности $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$ и множества $\bigcup_{i=1}^l \text{int } G_i$, где $g(x) \in C^1(E^n)$ и при любом $x \in S$ имеет место

$\|g'(x)\| \neq 0$, а $G_i, i = \overline{1, l}$, выпуклы и замкнуты и $\text{int } G_i, i = \overline{1, l}$, непусты. Пусть каждое из множеств $G_i, i = \overline{1, l}$, в любой своей граничной точке x имеет единственную опорную гиперплоскость, нормаль которой считается внешней, т.е. для всех $y \in G_i$ орт $n^i(x)$ нормали удовлетворяет условию $\langle n^i(x), y - x \rangle \leq 0$. Будем полагать, что при каждом i орт $n^i(x)$ является непрерывной вектор-функцией на границе ∂G_i множества G_i .

Введем следующие обозначения: $n(x) = g'(x) \|g'(x)\|^{-1}$ – орт нормали касательной гиперплоскости к поверхности S в точке $x \in S$; $\Lambda(x) = \{y \in E^n : \langle n(x), y - x \rangle = 0\}$ – касательная гиперплоскость к S в точке $x \in S$; $s^i(x)$ – проекция точки x на множество G_i , $n^i(x)$ – орт нормали опорной гиперплоскости к G_i в точке $s^i(x)$, $\Gamma^i(x) = \{e \in E^n : \langle n^i(s^i(x)), e - s^i(x) \rangle \geq 0\}$, $P(x) = \Gamma^1(x) \cap \Gamma^2(x) \cap \dots \cap \Gamma^l(x)$.

В силу гладкости $g(x)$, гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in S$ и вектор-функция $n(x)$ непрерывна на S . Проекция $s^i(x)$ при любом $x \in X$ определяется однозначно, так как $G_i, i = \overline{1, l}$, являются выпуклыми замкнутыми множествами евклидова пространства E^n . Поскольку каждое из $G_i, i = \overline{1, l}$, в любой своей граничной точке x имеет только одну опорную гиперплоскость, то векторы $n^i(x)$, а значит, и полупространства $\Gamma^i(x), i = 1, 2, \dots, l$, определяются единственным образом для любого $x \in X$. Поскольку по построению при каждом $i = 1, 2, \dots, l$ имеет место $x \in \Gamma^i(x)$, то всегда $x \in P(x)$.

Через $z(x)$ будем обозначать проекцию точки $x - \beta \varphi'(x), x \in X$, на множество $\Lambda(x) \cap P(x)$, где β – фиксированное положительное число. В силу выпуклости и замкнутости $\Lambda(x)$ и $\Gamma^i(x), i = 1, 2, \dots, l$, проекция $z(x)$ при любом $x \in X$ определяется однозначно.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Задается $\beta > 0$ и полагается $k = 0$.

Шаг 1. Пусть x_k есть k -е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, полупространства $\Gamma^i(x_k), i = 1, 2, \dots, l$, и точка $z(x_k)$.

Шаг 3. Если $x_k = z(x_k)$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 4.

Шаг 4. Задается $\alpha_k \in (0; 1]$.

Шаг 5. Пусть x_{k+1} – проекция точки $x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)$ на $S \cap P(x_k)$.

Шаг 6. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Множество S в силу непрерывности $g(x)$ является замкнутым, поэтому, в силу замкнутости $\Gamma^i(x), i = 1, 2, \dots, l$, множество $S \cap P(x_k)$ тоже замкнуто, а значит, задача проектирования на него всегда имеет хотя бы одно решение. Действительно, пусть $\tilde{x} \in E^n, y \in S \cap P(x_k)$ и $T = \{x \in E^n : \|x - \tilde{x}\| \leq r\}$, где r – произвольное число, не меньшее $\|\tilde{x} - y\|$, тогда каждая проекция точки \tilde{x} на $S \cap P(x_k)$ является также проекцией на $S \cap P(x_k) \cap T$ и наоборот. Но $\psi(x) = \|x - \tilde{x}\|$ непрерывна при любом фиксированном \tilde{x} , а значит, в силу компактности $S \cap P(x_k) \cap T$, вытекающей из компактности T и замкнутости $S \cap P(x_k)$, существует $\min_{x \in S \cap P(x_k) \cap T} \|x - \tilde{x}\|$, поэтому задача проектирования \tilde{x} на $S \cap P(x_k)$ имеет решение.

Будем считать, что при выбранном начальном приближении $x_0 \in X$ выполняются следующие условия:

1) множество $M(x_0) = \{x \in X : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ограничено;

2) для любого $x \in M(x_0)$ гиперплоскость $\Lambda(x)$ и множество внутренних точек $P(x)$ имеют непустое пересечение.

Заметим, что если точка $x \in M(x_0)$ не принадлежит границе никакого из множеств $G_i, i = \overline{1, l}$, то $\text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$ заведомо непусто, а если точка $x \in M(x_0)$ принадлежит границе только одного

из множеств G_i , $i = \overline{1, l}$, то непустота $\text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$ означает несовпадение касательной гиперплоскости к поверхности S с опорной гиперплоскостью к соответствующему множеству G_i в этой точке. Если $l = 1$ или G_i , $i = \overline{1, l}$, являются попарно непересекающимися, то для любой точки $x \in M(x_0)$, очевидно, имеет место один из двух указанных случаев.

В силу непрерывности $\varphi(x)$ и замкнутости X , вытекающей из замкнутости S и открытости $\text{int } G_i$, $i = \overline{1, l}$, множество $M(x_0)$ компактно, при этом в силу непрерывности $\varphi'(x)$ существует $d_0 = \beta \max_{x \in M(x_0)} \|\varphi'(x)\| < \infty$, а в силу сжимающего свойства проектирования на выпуклое множество $\Lambda(x)$ при любом $x \in M(x_0)$ имеем $\|x - z(x)\| \leq \beta \|\varphi'(x)\| \leq d_0$.

Пусть $D(x) = \{y \in R^n : \|x - y\| \leq 2d_0\}$ – шар радиуса $2d_0$ с центром в точке x , а Y – такое выпуклое компактное множество, что для любого $x \in M(x_0)$ справедливо включение $D(x) \subset Y$. В силу компактности Y и замкнутости S пересечение этих множеств является компактным, поэтому существует $K = \min_{x \in S \cap Y} \|g'(x)\| > 0$, так как $g(x) \in C^1(E^n)$ и $\|g'(x)\| \neq 0$ при любом $x \in S$. Заметим, что если $x \in M(x_0)$, то при любом $\alpha \in (0; 1]$ произвольная проекция точки $x + \alpha(z(x) - x)$ на множество $S \cap P(x)$ лежит в Y , поскольку

$$\begin{aligned} \|x - \text{Pr}_{S \cap P(x)}(x + \alpha(z(x) - x))\| &\leq \|x - (x + \alpha(z(x) - x))\| + \\ &+ \|(x + \alpha(z(x) - x)) - \text{Pr}_{S \cap P(x)}(x + \alpha(z(x) - x))\|, \end{aligned}$$

где первое слагаемое в правой части неравенства равно $\alpha \|z(x) - x\|$ и не превосходит d_0 , а второе слагаемое не больше первого, так как $x \in S \cap P(x)$.

Будем полагать, что $g(x) \in C^{1.1}(Y)$, т.е. существует такая положительная константа M , что для всех $x, y \in Y$ справедливо неравенство $\|g'(x) - g'(y)\| \leq M \|x - y\|$. Тогда из показанного в [11] следует, что при $N = M/K$ для всех $x, y \in S \cap Y$ имеет место $\|n(x) - n(y)\| \leq N \|x - y\|$.

В силу замкнутости $P(x)$ и компактности Y их пересечение компактно. Поскольку касательная гиперплоскость к S , построенная в произвольной точке $x \in M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\text{int } P(x)$, то она имеет непустое пересечение и с $\text{int } P(x) \cap \text{int } Y$. Действительно, пусть $x \in M(x_0)$ и $h \in \text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$, тогда $(x; h] \subset \text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$, так как множества $\text{int } P(x)$ и $\Lambda(x)$ выпуклы и по построению $x \in P(x)$ и $x \in \Lambda(x)$. Из определения множества Y следует, что любая точка $(x; h] \cap \text{int } D(x)$ лежит одновременно в $\Lambda(x)$, в $\text{int } P(x)$ и в $\text{int } Y$. В силу произвольности рассмотренных точек $x \in M(x_0)$ и $h \in \text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$, отсюда вытекает справедливость требуемого утверждения.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Справедлива следующая

Лемма 1. *Функции $\psi_1(x) = \max_{y \in P(x) \cap Y} \langle n(x), y - x \rangle$ и $\psi_2(x) = \min_{y \in P(x) \cap Y} \langle n(x), y - x \rangle$ непрерывны на $S \cap Y$.*

Доказательство. Докажем непрерывность $\psi_1(x)$; непрерывность $\psi_2(x)$ доказывается аналогично. Пусть x_* – произвольная точка из $S \cap Y$, $\{x_k\}$ – произвольная последовательность, лежащая в $S \cap Y$ и сходящаяся к x_* . Обозначим через y_k ($k = 1, 2, \dots$) произвольную точку максимума $\xi_k(y) = \langle n(x_k), y - x_k \rangle$ на $P(x_k) \cap Y$. В силу неравенства Коши–Буняковского имеет место $|\langle n(x), y - x \rangle| \leq \|n(x)\| \|y - x\| = \|y - x\|$, а поскольку $\{x_k\} \subset Y$, $\{y_k\} \subset Y$ и Y ограничено, то $\{\psi_1(x_k)\}$ ограничена.

Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(x_k) = \psi_1(x_*)$. Предположим противное, тогда в силу ограниченности $\{\psi_1(x_k)\}$ найдется такая подпоследовательность $\{x_{k_m}\}$, что $\{\psi_1(x_{k_m})\}$ сходится к числу, отличному от $\psi_1(x_*)$. Множество Y компактно и $\{y_k\} \subset Y$, поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\{y_{k_m}\}$ сходится к некоторой точке $y_* \in Y$. Поскольку $y_k \in P(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, то $\langle n^i(x_k), y_k - s^i(x_k) \rangle \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, $k = 1, 2, \dots$, а тогда, в силу сходимости $\{y_{k_m}\}$ к y_* и $\{x_k\}$ к x_* ,

сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклые множества $G_i, i = 1, 2, \dots, l$, и непрерывности $n^i(x)$ на ∂G_i , имеет место $\langle n^i(x_*), y_* - s^i(x_*) \rangle \geq 0, i = 1, 2, \dots, l$, т.е. $y_* \in P(x_*)$.

Из непрерывности $n(x)$ и сделанного предположения следует, что y_* не является точкой максимума $\xi(y) = \langle n(x_*), y - x_* \rangle$ на $P(x_*) \cap Y$, т.е. имеется точка $\bar{y}_* \in P(x_*) \cap Y$, для которой $\xi(\bar{y}_*) > \xi(y_*)$. Но тогда найдутся такие окрестности $U_\delta(x_*)$ и $U_\varepsilon(\bar{y}_*)$, что для всех $x \in U_\delta(x_*)$ и $y \in U_\varepsilon(\bar{y}_*)$ справедливо неравенство $\langle n(x), y - x \rangle > 0.5(\xi(\bar{y}_*) + \xi(y_*))$. Возьмем произвольную точку $h \in \text{int } P(x_*) \cap \text{int } Y$ (выше было показано, что такая точка на $\Lambda(x_*)$ обязательно существует), тогда в силу выпуклости множества Y и полупространств $\Gamma^i(x_*), i = 1, 2, \dots, l$, справедливо включение $(\bar{y}_*; h] \subset \text{int } P(x_*) \cap \text{int } Y$, а значит, для всех x из $(\bar{y}_*; h]$ имеем $\langle n^i(x_*), x - s^i(x_*) \rangle > 0, i = 1, 2, \dots, l$. В силу сходимости $\{x_k\}$ к x_* , существует такое $k_1 \in N$, что при всех $k \geq k_1$ точка x_k лежит в $U_\delta(x_*)$, тогда, взяв произвольную точку $\tilde{h} \in (\bar{y}_*; h] \cap U_\varepsilon(\bar{y}_*)$, получим, что при $k \geq k_1$ имеет место

$$\xi_k(\tilde{h}) = \langle n(x_k), \tilde{h} - x_k \rangle > 0.5(\xi(\bar{y}_*) + \xi(y_*)).$$

Кроме этого, $\langle n^i(x_*), \tilde{h} - s^i(x_*) \rangle > 0, i = 1, 2, \dots, l$, а тогда, в силу сходимости $\{x_k\}$ к x_* и сжимающего свойства оператора проектирования, найдется такое $k_2 \in N$, что при $k \geq k_2$ имеет место $\langle n^i(x_k), \tilde{h} - s^i(x_k) \rangle > 0, i = 1, 2, \dots, l$, т.е. $\tilde{h} \in P(x_k) \cap Y$.

Поскольку $\xi(y_*) = \langle n(x_*), y_* - x_* \rangle$, то в силу непрерывности $n(x)$ и сходимости $\{y_{k_m}\}$ к y_* и $\{x_k\}$ к x_* существует такое $m_0 \in N$, что при $m \geq m_0$ имеем

$$\xi_{k_m}(y_{k_m}) = \langle n(x_{k_m}), y_{k_m} - x_{k_m} \rangle < 0.5(\xi(\bar{y}_*) + \xi(y_*)).$$

Отсюда и из вышеприведенных рассуждений следует, что при больших m точка y_{k_m} не доставляет максимум $\xi_{k_m}(y)$ и $P(x_{k_m}) \cap Y$, так как $\xi_{k_m}(\tilde{h}) > \xi_{k_m}(y_{k_m})$. Из полученного противоречия следует, что сделанное выше предположение неверно, а значит, $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(x_k) = \psi_1(x_*)$. В силу произвольности рассмотренной последовательности $\{x_k\}$, лежащей в $S \cap Y$ и сходящейся к x_* , утверждение леммы доказано.

Замечание 1. Поскольку касательная гиперплоскость к S , построенная в произвольной точке x множества $M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\text{int } P(x) \cap \text{int } Y$, то при любом фиксированном $x \in M(x_0)$ имеет место $\psi_1(x) > 0$ и $\psi_2(x) < 0$, поэтому в силу компактности $M(x_0)$ существуют положительные константы $\varepsilon_1 = \min_{x \in M(x_0)} \psi_1(x)$ и $\varepsilon_2 = -\max_{x \in M(x_0)} \psi_2(x)$.

В силу компактности Y существует $d = \max_{x, y \in Y} \|x - y\| < \infty$. Обозначим $\varepsilon = 0.5 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Ниже приведено утверждение, доказательство которого проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения из [13], где в качестве допустимого множества X рассматривается пересечение гладкой поверхности S и выпуклого замкнутого множества F . Отличие состоит в том, что в проводимых рассуждениях множество F при каждом x заменяется на $P(x)$.

Лемма 2. При любом $x \in S$, для которого $\min_{y \in M(x_0)} \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{Nd + 1}$, имеет место $\psi_1(x) \geq \varepsilon, \psi_2(x) \leq -\varepsilon$.

Замечание 2. В силу показанного выше, если $x_* \in M(x_0)$, то

$$\|x_* - \text{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))\| \leq \frac{2d_0}{2^s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Решая относительно s неравенство $\frac{2d_0}{2^s} \leq \frac{\varepsilon}{Nd+1}$, получаем $s \geq \log_2 \frac{2d_0(Nd+1)}{\varepsilon}$. Отсюда и из леммы 2 следует, что при целых $s \geq \bar{s}_1$, где \bar{s}_1 – наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \dots$, при котором выполняется указанное неравенство, имеет место

$$\psi_1(\text{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \geq \varepsilon, \quad \psi_2(\text{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \leq -\varepsilon.$$

Считая $x \in X$, введем обозначения: $y_s(x) = x + 2^{-s}(z(x) - x)$, $s = 0, 1, 2, \dots$; $u_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на поверхность S ; $p_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на множество $S \cap P(x)$; $c_s(x)$ – решение задачи $\langle n(u_s(x)), y - u_s(x) \rangle \rightarrow \min$, $y \in P(x) \cap Y$ при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x) \rangle \geq 0$ и задачи $\langle n(u_s(x)), y - u_s(x) \rangle \rightarrow \max$, $y \in P(x) \cap Y$ при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x) \rangle < 0$. Отметим, что при фиксированных $x \in X$ и $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ проекции $u_s(x)$ и $p_s(x)$ в общем случае определяются не однозначно, так как множества S и $S \cap P(x)$, вообще говоря, не являются выпуклыми. Точка $c_s(x)$ при выбранной проекции $u_s(x)$ тоже может определяться не однозначно, так как она есть точка минимума или максимума линейной функции, не являющейся строго выпуклой или строго вогнутой.

Пусть x_* – произвольная точка множества $M(x_0)$, которая не совпадает с $z(x_*)$. Введем обозначения: $L_s(x_*)$ – прямая, проходящая через точку $y_s(x_*)$ перпендикулярно $\Lambda(u_s(x_*))$ (силу показанного в [11] она проходит и через точку $u_s(x_*)$); $\tilde{L}_s(x_*)$ – луч, начинающийся в точке $y_s(x_*)$ и проходящий через точку $c_s(x_*)$. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения из [13].

Лемма 3. Пусть $x_* \in M(x_0)$, $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$, v – произвольная точка множества Y , а δ и $\bar{\delta}$ – расстояния от точки v , соответственно, до гиперплоскости $\Lambda(u_s(x_*))$ и до прямой $L_s(x_*)$. Тогда, если v лежит на поверхности S , то при $0 < \delta < \frac{2K}{M}$ имеет место $\bar{\delta} \geq \sqrt{\delta \left(\frac{2K}{M} - \delta \right)}$.

С учетом справедливости леммы 3 аналогично тому, как это было сделано в [13], доказываются приведенные ниже утверждения. В проводимых при доказательстве рассуждениях множество F при фиксированном $x_* \in M(x_0)$ заменяется на $P(x_*)$.

Лемма 4. Если $x_* \in M(x_0)$, то при всех целых $s \geq \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, где \bar{s}_1 и \bar{s}_2 – некоторые номера из множества $\{0, 1, 2, \dots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S , то на отрезке $[y_s(x_*); c_s(x_*)]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.

Замечание 3. В данной формулировке \bar{s}_1 имеет тот же смысл, что и в замечании к лемме 2, а \bar{s}_2 – наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющий условию $s \geq \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$, если $\varepsilon \geq \frac{K}{M}$, и условиям $s \geq \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$ и $s \geq \log_2 \frac{2d_0\sqrt{N(K-M\varepsilon)}}{\sqrt{K\varepsilon}}$ одновременно, если $\varepsilon < \frac{K}{M}$.

Лемма 5. Если точки $x_* \in M(x_0)$ и $z(x_*)$ не совпадают, то существует такая положительная константа M_0 , что при всех целых $s \geq \bar{s}$, где \bar{s} – некоторый номер из множества $\{0, 1, 2, \dots\}$, имеет место $\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\| \leq M_0 \|y_s(x_*) - u_s(x_*)\|$.

Замечание 4. В данной формулировке $\bar{s} = \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, где \bar{s}_1 и \bar{s}_2 имеют тот же смысл, что и в замечаниях к леммам 2 и 4.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

В этом разделе будут получены необходимые условия локального минимума $\varphi(x)$ на X и доказано предложение о сходимости алгоритма.

Лемма 6. Если $x_* \in M(x_0)$ – точка локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X , то $z(x_*)$ совпадает с x_* .

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [13] с заменой множества F при фиксированном $x_* \in M(x_0)$ на $P(x_*)$.

Из утверждения леммы 6 следует, что в случае выполнения равенства $x_k = z(x_k)$ при некотором k точка $x_k \in M(x_0)$ удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X . Если равенство $x_k = z(x_k)$ не выполняется ни при каком k , то алгоритм становится итерационным.

Заметим, что множество X может быть задано с помощью функциональных ограничений в форме $X = \{x \in E^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, l; g(x) = 0\}$, где $g(x)$ является гладкой, а $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l$, – вогнутыми и гладкими на E^n и для каждого $i = 1, 2, \dots, l$ существует такая точка \tilde{x}_i , что $f(\tilde{x}_i) > 0$. Тогда $G_i = \{x \in E^n : f_i(x) \geq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, и для любого $x_* \in X$ имеет место представление $\Gamma^i(x_*) = \{x \in E^n : \langle f'_i(s^i(x_*)), x - s^i(x_*) \rangle \leq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, l$. Вводя обозначения $F_i = \{x \in E^n : f_i(x) \leq 0\}$ и $F = \bigcap_{i=1}^l F_i$, получим, что $X = \{x \in F : g(x) = 0\}$, при этом конусы возможных направлений множеств F_i и $\Gamma^i(x_*)$ для каждого i в произвольной точке $x_* \in X$ совпадают.

Лемма 7. Если точка $x_* \in M(x_0)$ совпадает с $z(x_*)$, то она стационарна в смысле Лагранжа.

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [12] с учетом введенного выше определения точки $z(x)$ и непустоты $\text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in M(x_0)$.

Будем считать, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$, тогда существует константа $L = \max_{x \in Y} \|\varphi'(x)\| < \infty$. Отсюда следует, что для любых $x, y \in Y$ при некотором $\theta \in [0; 1]$ имеет место $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \|\varphi'(x + \theta(y - x))\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$, т.е. $\varphi(x)$ является липшицевой на Y .

Введем обозначения: $z_k = z(x_k)$, $\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle$, $p_{k,s} = p_s(x_k)$. Рассмотрим способ выбора чисел α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, состоящий в том, что величина α_k при каждом k полагается равной 2^{-s_k} , где s_k – первый из номеров $s = 0, 1, 2, \dots$, при котором $\varphi(x_k) - \varphi(p_{k,s}) \geq 0.25 \times 2^{-s} |\varphi_k(z_k)|$. Аналогично тому, как это было сделано в [13], можно показать, что выбор α_k из указанного условия всегда возможен.

Лемма 8. При выборе чисел α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, согласно указанному способу, имеет место $\varphi_k(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [13].

Лемма 9. Точка $z(x)$ непрерывно зависит от x на множестве $M(x_0)$.

Доказательство. Пусть x_* – произвольная точка из $M(x_0)$, а $\{x_k\}$ – произвольная последовательность, лежащая в $M(x_0)$ и сходящаяся к x_* . Покажем, что последовательность $\{z_k\}$ сходится к $z(x_*)$, откуда будет вытекать непрерывность $z(x)$ в точке x_* .

Предположим, что $\{z_k\}$ не сходится к $z(x_*)$. Тогда поскольку $M(x_0)$ ограничено и $\|x_k - z_k\| \leq d_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\{z_k\}$ тоже ограничена, а значит, существует подпоследовательность $\{z_{k_m}\}$, сходящаяся к некоторой точке z_* , отличной от $z(x_*)$. Поскольку $x_k, z_k \in \Lambda(x_k) \cap P(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\langle n(x_k), z_k - x_k \rangle = 0$ и $\langle n^i(x_k), z_k - s^i(x_k) \rangle \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, а значит, в силу сходимости $\{x_k\}$ к x_* и $\{z_{k_m}\}$ к z_* , имеем $\langle n(x_*), z_* - x_* \rangle = 0$ и $\langle n^i(x_*), z_* - s^i(x_*) \rangle \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, т.е. $z_* \in \Lambda(x_*) \cap P(x_*)$. Точка $z(x_*)$ является проекцией $x_* - \beta\varphi'(x_*)$ на выпуклое множество $P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$, поэтому $\|x_* - \beta\varphi'(x_*) - z(x_*)\| < \|x_* - \beta\varphi'(x_*) - z_*\|$. Тогда, поскольку $x_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$, $z_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z_*$, то существуют такое $m_1 \in \mathbb{N}$ и такая окрестность $U_\delta(z(x_*))$, что при $m \geq m_1$ для всех $x \in U_\delta(z(x_*))$ справедливо неравенство $\|x_{k_m} - \beta\varphi'(x_{k_m}) - x\| < \|x_{k_m} - \beta\varphi'(x_{k_m}) - z_{k_m}\|$.

Пусть \bar{x} – произвольная точка из $\text{int } P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$, тогда $(z(x_*), \bar{x}) \subset \text{int } P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$ в силу выпуклости $P(x_*)$ и $\Lambda(x_*)$. Возьмем произвольную точку $h \in (z(x_*), \bar{x}) \cap U_\delta(z(x_*))$, тогда найдется

окрестность $U_\varepsilon(h)$, целиком лежащая в $U_\delta(z(x_*)) \cap \text{int } P(x_*)$, поскольку $U_\delta(z(x_*))$ является открытым шаром и $h \in U_\delta(z(x_*)) \cap \text{int } P(x_*)$. Обозначив через h_k проекцию точки h на гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, получим

$$\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \rangle = \langle n(x_{k_m}), h - h_{k_m} \rangle + \langle n(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \rangle,$$

где второе слагаемое справа равно нулю, так как $h_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m})$, а модуль первого слагаемого есть расстояние от точки h до гиперплоскости $\Lambda(x_{k_m})$, в силу того что векторы $n(x_{k_m})$ и $h - x_{k_m}$ коллинеарные и $\|n(x_{k_m})\| = 1$. Поскольку $\langle n(x_*), h - x_* \rangle = 0$, так как $h \in \Lambda(x_*)$, и $\{x_{k_m}\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$, а $n(x)$ является непрерывной вектор-функцией на S , то это означает, что $\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, откуда $\|h - h_{k_m}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Окрестность $U_\varepsilon(h)$ целиком лежит в $\text{int } P(x_*)$, а значит, для всех $x \in U_\varepsilon(h)$ имеет место $\langle n^i(x_*), x - s^i(x_*) \rangle > 0$, $i = 1, 2, \dots, l$. Но тогда из сходимости $\{x_{k_m}\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$ и сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклые множества следует, что найдется такое $m_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $m \geq m_2$ справедливы неравенства $\|h - h_{k_m}\| < \varepsilon$ и $\langle n^i(x_{k_m}), h_{k_m} - s^i(x_{k_m}) \rangle > 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, т.е. $h_{k_m} \in U_\varepsilon(h) \cap P(x_{k_m})$. Окрестность $U_\varepsilon(h)$ целиком лежит в $U_\delta(z(x_*))$, поэтому при $m \geq \max\{m_1, m_2\}$ имеем $\|x_{k_m} - \beta\phi'(x_{k_m}) - h_{k_m}\| < \|x_{k_m} - \beta\phi'(x_{k_m}) - z_{k_m}\|$, где $h_{k_m} \in P(x_{k_m}) \cap \Lambda(x_{k_m})$.

Поскольку z_k — проекция $x_k - \beta\phi'(x_k)$ на $P(x_k) \cap \Lambda(x_k)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, то выполнение последнего неравенства невозможно. Из полученного противоречия следует, что z_* совпадает с $z(x_*)$, а значит, $\{z_k\}$ сходится к $z(x_*)$. В силу произвольности рассмотренной точки $x_* \in M(x_0)$ и последовательности $\{x_k\}$, лежащей в $M(x_0)$ и сходящейся к x_* , утверждение леммы доказано.

Предложение. Если $\phi(x) \in C^{1,1}(Y)$ и последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму при выборе α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, согласно указанному способу, то любая ее предельная точка x_* совпадает с $z(x_*)$.

Доказательство. Поскольку $\{x_k\} \subset M(x_0)$ и $M(x_0)$ ограничено, то $\{x_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть x_* — произвольная предельная точка, а $\{x_{k_m}\}$ — соответствующая ей подпоследовательность.

Покажем, что x_* совпадает с $z(x_*)$. Из леммы 8 имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \phi'(x_{k_m}), z(x_{k_m}) - x_{k_m} \rangle = 0$, а значит, $\langle \phi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$, так как $x_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$ и из леммы 9 следует, что $z(x_{k_m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z(x_*)$. Поскольку $z(x_*)$ — проекция точки $x_* - \beta\phi'(x_*)$ на выпуклое множество $P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$ и при этом $x_* \in P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$, то

$$\langle x_* - z(x_*), x_* - \beta\phi'(x_*) - z(x_*) \rangle = \|x_* - z(x_*)\|^2 + \beta \langle \phi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle \leq 0,$$

где $\langle \phi'(x_*), z(x_*) - x_* \rangle = 0$, а значит, x_* совпадает с $z(x_*)$. В силу произвольности рассмотренной предельной точки x_* последовательности $\{x_k\}$, утверждение предложения доказано.

Из данного предложения и леммы 7 следует, что если X задано с помощью функциональных ограничений, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, построенной по изложенному алгоритму при указанном способе выбора α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, стационарна в смысле Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П., Недич А. О трехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для решения задач минимизации с неточными исходными данными // Известия вузов. Математика. 1993. № 12. С. 35–43.
2. Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г. Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 5. С. 669–684.
3. Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П. Регуляризованный непрерывный экстраградиентный метод первого порядка с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 12. С. 1587–1595.

4. *Козлов А.И.* Градиентно-проекционный метод для нахождения квазирешений нелинейных нерегулярных операторных уравнений // Вычислит. методы и программирование. 2003. Т. 4. Вып. 1. С. 117–125.
5. *Мияйлович Н., Ячимович М.* Некоторые непрерывные методы для решения квазивариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 202–208.
6. *Кокурин М.Ю.* О решении некорректных невыпуклых экстремальных задач с точностью, пропорциональной погрешности в исходных данных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 11. С. 1815–1828.
7. *Du N., Wang H., Liu W.* A fast gradient projection method for a constrained fractional optimal control // J. Scientific Comput. 2016. V. 68. № 1. P. 1–20.
8. *Tang Z., Qin J., Sun J., Geng B.* The gradient projection algorithm with adaptive mutation step length for non-probabilistic reliability index // Tehnicki Vjesnik. 2017. V. 24. № 1. P. 53–62.
9. *Preininger J., Vuong P.T.* On the convergence of the gradient projection method for convex optimal control problems with bang-bang solutions // Comput. Optimizat. Appl. 2018. V. 70. № 1. P. 221–238.
10. *Заботин В.И., Черняев Ю.А.* Сходимость итерационного метода решения задачи математического программирования с ограничением в виде выпуклой гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 4. С. 609–612.
11. *Черняев Ю.А.* Обобщение метода проекции градиента и метода Ньютона на экстремальные задачи с ограничением в виде гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1493–1502.
12. *Черняев Ю.А.* Сходимость метода проекции градиента и метода Ньютона для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения сферической поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1733–1749.
13. *Черняев Ю.А.* Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 37–49.
14. *Дуллеев А.М., Заботин В.И.* Итерационный алгоритм проектирования точки на невыпуклое многообразие в линейном нормированном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 5. С. 827–830.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 51-73

РЕДУЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ SIR ПАНДЕМИИ COVID-19¹⁾

© 2021 г. С. И. Виноцкий^{1,2,*}, А. А. Гусев¹, В. Л. Дербов³, П. М. Красовицкий⁴,
Ф. М. Пеньков^{5,**}, Г. Чулуунбаатар^{1,2}

¹ 141980 Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6, ОИЯИ, Россия

² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

³ 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Россия

⁴ 050032 Алматы, ул. Ибрагимова, 1, ИЯФ, Казахстан

⁵ 050040 Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

*e-mail: vinitsky2016@gmail.com

**e-mail: fmp56@mail.ru

Поступила в редакцию 12.09.2020 г.
Переработанный вариант 19.10.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Предложена математическая модель пандемии COVID-19, сохраняющая оптимальный баланс между адекватностью описания пандемии в модели SIR и простотой практических оценок. В качестве базовых уравнений модели дан вывод двухпараметрических нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием по времени, пригодных для описания любого сообщества (страна, город и т.п.). Приведенные примеры моделирования развития пандемии в зависимости от параметров: τ – время возможного распространения инфекции одним вирусносителем и α – вероятность инфицирования здорового члена популяции при контакте с инфицированным в единицу времени, например за день, находится в качественном согласии с динамикой пандемии COVID-19. Дано сравнение предложенной модели с моделью SIR. Библ. 18. Фиг. 7.

Ключевые слова: математическая модель, пандемия COVID-19, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, модель SIR.

DOI: 10.31857/S0044466921030169

1. ВВЕДЕНИЕ

Математические модели распространения инфекции имеют особое значение в случае глобальных пандемий. Несмотря на то что они не могут воспроизвести полную картину пандемии, они обеспечивают качественные прогнозы ее развития и выявляют конкретные динамические закономерности, которые могут быть полезны при оптимальном планировании социальных профилактических мер, которые позволяют в определенной степени контролировать ситуацию. Эти меры являются предметом жарких споров, поскольку они существенно меняют повседневную жизнь людей и имеют большие экономические последствия. Отметим, например, что эффективность социального дистанцирования для снижения пика заболеваемости была продемонстрирована еще во время пандемии испанского гриппа в 1918–1919 гг. [1]. Новые инструменты прогнозирования, основанные на математическом моделировании, обеспечивают несомненное преимущество в облегчении процесса адаптации и корректировки, способствуя эффективному управлению ресурсами на индивидуальном и институциональном уровнях.

Попытки математического моделирования инфекций имеют более чем столетнюю историю [2]–[4]. Позже Кермак и МакКендрик [5] рассмотрели развитие эпидемии в закрытой однородной популяции, предполагая, что полный иммунитет обеспечивается однократным заражением, и что в сам момент заражения человек не заразен. С этими предположениями проблема была в конечном итоге сведена к интегродифференциальному уравнению типа Вольтерра, анализ которого позволил сделать такие выводы, как существование пороговой плотности населения, ниже

¹⁾Работа выполнена при частичной поддержке Программы 5-100 РУДН, гранта Полномочного представителя Республики Казахстан в ОИЯИ (2020), гранта РФФИ и МОКНСМ 20-51-44001.

которой не может возникнуть эпидемия, решающая роль небольших изменений скорости заражения, и конец эпидемии до того, как уязвимое население будет исчерпано. Модель была обобщена [6] с учетом эффекта от постоянного притока новых восприимчивых особей в популяцию (рождение, иммиграция и т.д.). Аналогичные результаты были получены при передаче инфекции через промежуточного хозяина [5].

Естественно, пандемия COVID-19 вызвала всплеск интереса к разработке инструментов прогнозирования, основанных на математическом моделировании. Конкретные цели и подходы разных исследовательских групп существенно различаются. Например, Uhlig и соавт. [7], основываясь на детерминированных компартментных моделях, сочетающих эпидемиологический, статистический и нейросетевой подходы, предложили метод эмпирического нисходящего (top-down) моделирования для обеспечения прогнозов эпидемий и расчетов рисков для (локальных) вспышек. Основываясь на первоначальных результатах, авторы [7] предполагают, что статистические системы предлагаемого типа будут использованы для управления автоматическими веб-платформами с целью демократизации распространения результатов прогнозов.

Для оперативных оценок желательны более простые режимы. Самый простой подход – это подгонка графиков к имеющимся данным. В [8] предполагалось, что количество $P(t)$ совокупных диагностированных положительных случаев COVID-19 описывается функцией ошибок. Это верно, если ежедневный прирост новых случаев $P'(t)$ может быть описан гауссовым распределением, что обычно не так [9]. Köhler-Rieper и соавт. [9] предложили детерминированную модель прогноза для эпидемии COVID-19, в которой динамика модели выражается одной прогнозируемой переменной $\kappa(t)$, входящей в интегродифференциальное уравнение в виде коэффициента, зависящего от времени. Модель [9] имеет сходство с классическими компартментными моделями, такими как SIR [10], а переменная $\kappa(t)$ может быть интерпретирована как эффективное число воспроизводства случаев инфицирования. Авторы [9] считают это принципиальным преимуществом, поскольку модель сформулирована с использованием наиболее достоверных статистических данных, а именно, количества кумулятивных диагностированных положительных случаев COVID-19. Они применили модель к более чем 15 странам, и результаты доступны через веб-платформу [11].

В качестве альтернативы интегродифференциальному уравнению в данной статье мы используем подход, основанный на дифференциальных уравнениях с запаздыванием [12], частном случае функционально-дифференциальных уравнений. Такие модели задержки следуют стратегии моделирования процесса удаления не с помощью отдельной переменной, а со сдвигом по времени в функции, описывающей количество кумулятивных случаев. Dell'Anna [13] представил пример применения модели задержки по времени к проблеме COVID-19. Можно показать эквивалентность интегродифференциальных и дифференциальных уравнений с запаздыванием. Например, авторы [9] показывают, что основное уравнение их модели идентично дифференциальному уравнению с запаздыванием в [7] при соответствующем выборе весовой функции интегрирования.

Наше модельное уравнение аналогично общей модели из [5], [13], однако последующий анализ в [13] проводится с использованием упрощенного уравнения без учета так называемого логистического фактора (см. ниже), т.е. в частном случае пренебрежимо малого количества инфицированных лиц по сравнению с численностью популяции, что реально в глобальном смысле, но сомнительно для небольших групп населения

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

N_{\max} – количество членов популяции.

$N(t)$ – количество инфицированных в момент времени t .

τ – время возможного распространения инфекции одним вирусоносителем. Это может быть временем естественной длительности болезни или временем от заболевания до изоляции вирусоносителя от общества. В настоящем рассмотрении τ – параметр модели.

$N(t - \tau)$ – количество больных, но уже не вирусоносителей. Разумеется, при $t - \tau < 0$ величина $N(t - \tau) = 0$.

$N(t) - N(t - \tau)$ – количество вирусоносителей в момент времени t .

$N_{\max} - N(t)$ – количество не зараженных членов популяции.

$(N(t) - N(t - \tau))/N_{\max}$ – плотность вирусоносителей в обществе.

то уравнение для $x(t)$ разбивается на цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha(1 - x_1(t))(x_1(t) - 0), & x_1(0) &= \text{const}, & 0 \leq t < \tau, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha(1 - x_2(t))(x_2(t) - x_1(t)), & x_2(\tau) &= x_1(\tau), & \tau \leq t < 2\tau, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \alpha(1 - x_3(t))(x_3(t) - x_2(t)), & x_3(2\tau) &= x_2(2\tau), & 2\tau \leq t < 3\tau, \\ & \dots \end{aligned}$$

При этом уравнение для $x_1(t)$ не содержит сдвинутого по времени слагаемого и может быть решено явно:

$$x_1(t) = \frac{x_1(0)}{e^{-\alpha t} + x_1(0) - x_1(0)e^{-\alpha t}}.$$

Поэтому уравнение для $x_2(t)$

$$\frac{dx_2}{dt} = \alpha(1 - x_2(t))(x_2(t) - x_1(t))$$

относится к уравнениям типа

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(1 - y(t))(y(t) - F(t))$$

с известной функцией $F(t)$, которые имеют аналитические решения. В частности, решение, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$, может быть записано в виде:

$$y(t) = 1 + \frac{\exp\left(-\alpha \int_{t_0}^t (1 - F(t')) dt'\right)}{\frac{1}{y_0 - 1} + \alpha \int_{t_0}^t \exp\left(-\alpha \int_{t_0}^{t'} (1 - F(t'')) dt''\right) dt'}.$$

Аналитические решения, приведенные выше, пригодны для полного анализа развития пандемии в рамках описанной модели, но для этого необходима работа со сложными и длинными в записи выражениями. Единственная польза от этого рассмотрения, без анализа общего решения, состоит в том, что при непрерывности функции $x(t)$, задаваемой разбиением на решениях в интервалах, длительностью τ , производная $dx(t)/dt$ тоже будет непрерывной функцией за исключением одной точки $t = \tau$. В этой точке $x(t - \tau) = x(0)$ не может быть равной 0 (при таких начальных условиях существует только тривиальное решение $x = 0$) и производная, определяемая уравнениями (4) или (5), всегда будет иметь разрыв.

Обговорив возможности аналитического решения, далее мы, на этом этапе рассмотрения, использовать его не будем из-за его сложности. Будем исследовать достаточно очевидные свойства решений в линейном приближении или проводить анализ численных решений уравнений (4) и (5).

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

3.1. Начальная стадия

Видно, что уравнение (4) нелинейно и нелокально из-за слагаемого, сдвинутого по времени. Тем не менее на временах, когда заражение не охватило все общество и $x(t) \ll 1$, уравнение (4) может быть исследовано в линейном приближении:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x(t) - x(t - \tau)). \quad (6)$$

Начнем исследование с начала инфицирования, когда $x(t - \tau) = 0$. В этом случае уравнение (6) имеет экспоненциальное решение:

$$x(t) = x(0)e^{\alpha t} \quad (7)$$

с количеством относительного прироста инфицированных (например, за 1 день, $dt \approx \Delta t = 1$ день)

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt \quad \text{или} \quad \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \alpha, \quad (8)$$

т.е. коэффициент α определяет относительный рост инфицированных в начале пандемии. Его значения достигают 0.3–0.2 (см. любую страну по данным института Хопкинса). С вводом режима (само)изоляции значения коэффициента α понижаются и становятся близкими к 0.15–0.1 (опять же – данные института Хопкинса). Для понимания дальнейшего изменения темпов роста инфицированных необходимо уже анализировать уравнение (6) вместе с запаздывающим слагаемым. Обратим внимание, что решение

$$x = x_0 e^{\beta t} \quad (9)$$

удовлетворяет уравнению (6), если β удовлетворяет трансцендентному уравнению:

$$\beta = \alpha(1 - e^{-\beta\tau}), \quad (10)$$

которое легко переписывается в уравнение для $z = \beta\tau$:

$$z = \alpha\tau(1 - e^{-z}). \quad (11)$$

Поэтому, вообще говоря, относительное количество инфицированных за 1 день через несколько недель после начала пандемии будет определяться параметром β :

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \beta, \quad (12)$$

который, в свою очередь, определяется уравнением (11). При $\alpha\tau \gg 1$ уравнения (10) и (11) имеют решения $\beta \approx \alpha$, т.е. решения уравнений (7) и (9) совпадают. Заметим, что при $\alpha\tau = 3$, $\beta \approx 0.94\alpha$, а при $\alpha\tau = 2.6$, $\beta \approx 0.9\alpha$, т.е. β практически равно α (в рамках точности данных, приведенных в Википедии) уже при значении параметра $\alpha\tau = 2.5$. Второе очевидное решение уравнения (10) $\beta = 0$ порождает решение в виде константы и ее вкладом на экспоненциально растущем участке слагаемым можно пренебречь. За исключением случая, когда у нас имеется только одно решение уравнений (10) и (11). Это происходит, когда $\alpha\tau \leq 1$. В этом случае решение $\beta = 0$ единственное и возникает возможность прекращения пандемии на стадии вне полного инфицирования.

3.2. Конечная стадия

Решение $x(t) = 1$, т.е. “все заболели” удовлетворяет уравнению (4). Кроме того, уравнению (4) удовлетворяет любая константа. Поэтому возможен выход решения уравнения (4) на константу, меньшую 1, т.е. прекращение пандемии при неполном инфицировании популяции. Простое приближение позволяет оценить пик заболеваний, т.е. найти условия, при которых

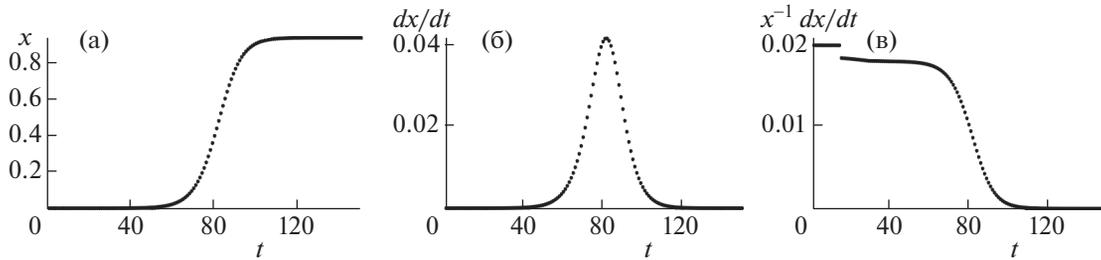
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Для этого в уравнении (4) разложим $x(t - \tau)$ в ряд Тейлора по τ :

$$x(t) - x(t - \tau) \approx \frac{dx}{dt} \tau - \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \tau^2,$$

и с условием равенства нулю второй производной получим из (4) уравнение для количества больных в пике заболевания $x_m(t)$:

$$1 = \alpha\tau(1 - x_m(t)) \quad (13)$$



Фиг. 1. (а) Изменение плотности инфицированных $x(t)$ со временем t в днях, (б) абсолютный прирост плотности инфицированных dx/dt , (в) относительный прирост плотности инфицированных $(dx/dt)/x$ при $\alpha = 0.2$, $\tau = 14$ дней, $\alpha\tau = 2.8$, $x(0) = 10^{-6}$.

или

$$x_m = \frac{\alpha\tau - 1}{\alpha\tau}. \tag{14}$$

Ниже, демонстрируя поведение $x(t)$ и $x'(t)$, мы укажем на хорошее согласие x_m из уравнения (14) с реальными расчетами, несмотря на использование достаточно грубой оценки (13). Здесь же, заметив, что уравнение для переменной y : $x = x_0 + (1 - x_0)y$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(1 - x_0)(1 - y(t))(y(t) - y(t - \tau)), \tag{15}$$

совпадает с уравнением (4) при новой эффективной $\alpha_{\text{eff}} = \alpha(1 - x_0)$, будем рассматривать y , как малую по сравнению с 1 величину, для которой допустим рассмотренный выше анализ с решением типа

$$y = y_0 e^{\beta t}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получаем для β вместо уравнения (11) уравнение с эффективной α_{eff} , т.е.:

$$\beta\tau = \alpha\tau(1 - x_0)(1 - e^{-\beta\tau}), \tag{17}$$

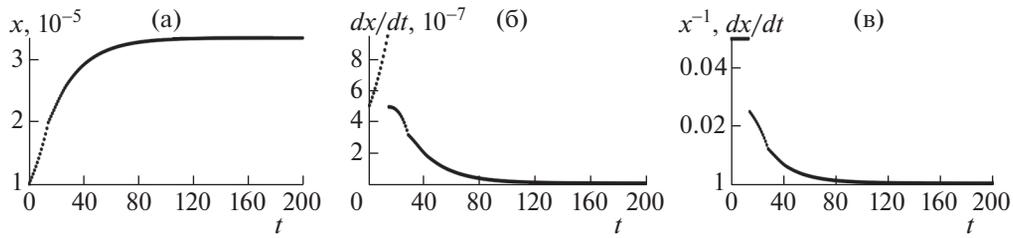
которое при $\alpha\tau(1 - x_0) \leq 1$ имеет тривиальное решение $\beta = 0$. Сравнивая с условием прохождения пика заболеваний (13), т.е. полагая $x_0 = x_m$, можно описать нарастание эпидемии следующим сценарием: с ростом количества заболевших эффективная константа $\alpha\tau(1 - x_0)$ уменьшается и достигает 1. В этой точке скорость нарастания количества заболевших достигает максимума. Далее эпидемия идет на спад. Наверное, этот этап можно назвать инерциальным периодом.

4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

4.1. Решения при $\alpha\tau > 1$

Для численного исследования уравнение (4) решалось методом Эйлера с шагом в 1 день. На фиг. 1 приведены численные решения для ситуации “свободный полет”, когда $\alpha\tau = 2.8 > 1$. Может иллюстрировать политику полной иммунизации общества вследствие его тотального инфицирования. Начальные условия выбраны равными одной миллионной от населения (320 для США, 140 для России, 12 для Москвы, 2.5 для Алматы и т.д.). Время инфицирования выбрано равным 14 дням. Скорее всего, нужно брать 20–30 дней.

Результат: длительность пандемии около 100 дней. Пик заболевания приходится на 80–90-е дни и достигает значений 40 человек на 1000 населения. Поскольку такого количества больничных коек нигде нет (согласно сайту ВОЗ [14] количество больничных коек не превышает 8 на 1000 населения даже для развитых стран), то эта схема будет сопровождаться большим количеством отказов в лечении (т.е. смертей). Интересно, что относительный прирост сопровождается скачком при переходе на 14-й день решения (7) в решение (9), т.е. небольшим отличием α от β (см. выше). О разрыве производных в этой точке говорилось выше.



Фиг. 2. (а) Изменение плотности инфицированных $x(t)$ со временем t в днях, (б) абсолютный прирост плотности инфицированных dx/dt , (в) относительный прирост плотности инфицированных $(dx/dt)/x$ при $\alpha = 0.05$, $\tau = 14$ дней, $\alpha\tau = 0.7$, $x(0) = 10^{-5}$.

Заметим, что при $\alpha\tau = 2.8$ уравнение (14) дает, что пик заболевания будет при достижении $x_m = 0.64$, т.е., согласно фиг. 1а, на 86-й день развития эпидемии. Этот вывод подтверждается фиг. 1б, где пик заболевания приходится на 82-й день.

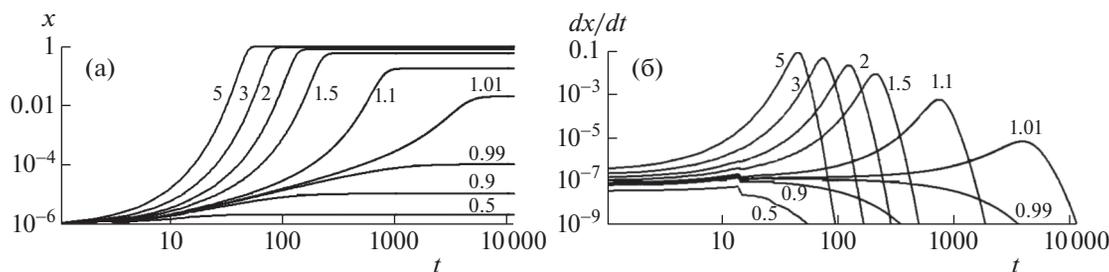
4.2. Решения при $\alpha\tau < 1$

Для демонстрации режима угасания пандемии при $\alpha\tau < 1$, когда существует единственное решение уравнения (10): $\beta = 0$, ниже приводится фиг. 2 с расчетами уравнения (4) при $\alpha = 0.05$, $\tau = 14$ дней, т.е. $\alpha\tau = 0.7 < 1$. Начальное значение было выбрано $x(0) = 10^{-5}$, т.е. в 10 раз больше, чем для расчетов, приведенных на фиг. 1. Это было сделано для удобства анализа, поскольку рост инфицированных небольшой. Видно, что рост инфицированных (примерно в 3.5 раза) выходит на константу, не достигая единицы, т.е. возможен режим остановки пандемии без полного инфицирования популяции. Для этого произведение $\alpha\tau$ должно быть меньше 1, как и обсуждалось выше. В этом режиме производная имеет заметный скачок, поскольку α и β значительно различаются. Для этого примера продолжительность пандемии около 100 дней и близка ко времени развития пандемии, приведенной на фиг. 1. Это случайность. Можно выбрать вероятность инфицирования больше, например, $\alpha = 0.07$ и получить значительно большее время развития пандемии (около 1500 дней) в режиме $\alpha\tau < 1$. Количество инфицированных при этом увеличится примерно в 50 раз, т.е. решение, по-прежнему, будет выходить на константу, значительно отличающуюся от 1, но за очень большие времена.

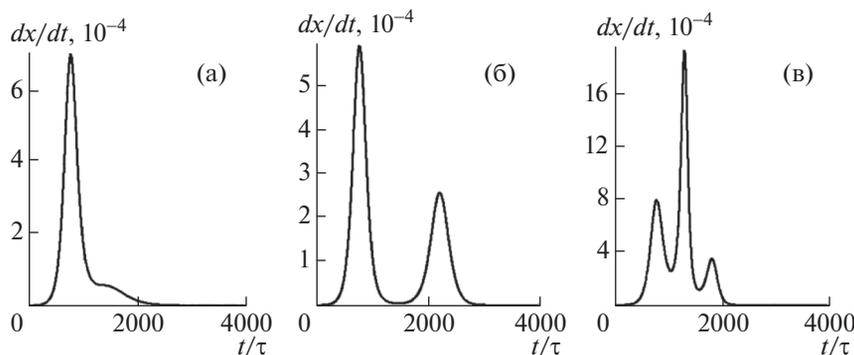
4.3. Зависимость решений от значения параметра $\alpha\tau$

Рассмотренные примеры численных решений не противоречат анализу уравнений (4) в линейном приближении. Более того, подтверждают основные выводы. Тем не менее остается неясным выход на константу при больших временах для $\alpha\tau > 1$. В этом случае для анализа нельзя использовать линейное приближение и нужно проводить анализ численно. Поскольку уравнение (5) определяется только одной константой $\alpha\tau$, то ниже приводятся численные решения при разных значениях этой константы. Правильная схема отображения плотности инфицированных в зависимости от значения ζ не является наглядной. Поэтому ниже приведена ось времени, совпадающая с днями при $\tau = 14$ дней. При других значениях τ множитель $\tau/14$ является масштабирующим. Например, 100 дней при $\tau = 14$ перейдут в 200 дней при $\tau = 28$. Во всех расчетах $x(0) = 10^{-6}$.

Фиг. 1 при $\alpha\tau = 0.5, 0.9, 0.99$ показывают динамику плотности инфицирования и ее производную по времени t при $\alpha\tau < 1$. В этом случае пандемия прекращается при малом количестве инфицированных (максимум 0.01% популяции), но время ее развития достаточно велико и увеличивается при приближении $\alpha\tau$ к 1. На этих фигурах при $\alpha\tau = 1.5, 2, 3, 5$ для сравнения показаны кинетики нарастания инфицированных, для которых доля инфицированных меняется от 60 до 100% за достаточно короткие времена развития инфекции. На фиг. 3 также приведены решения при $\alpha\tau = 1.01, 1.1$ в случае небольшого отличия $\alpha\tau$ от 1. Так, при $\alpha\tau = 1.01$ решение выходит на константу (2% инфицированного населения) в течение длительного периода (годы). При $\alpha\tau = 1.1$ срок выхода на плато короче, но количество инфицированных составит 18%. Из фиг. 3б видно,



Фиг. 3. (а) Численные решения $x = x(t)$ уравнения (5) и (б) их производные dx/dt в зависимости от t в единицах $\tau / 14$ при разных значениях $\alpha\tau$: 0.5, 0.9, 0.99, 1.01, 1.1, 1.5, 2, 3, 5.



Фиг. 4. Абсолютный прирост dx/dt плотности инфицированных в зависимости от t в единицах τ : (а) при $T = 1100$ дней и $\alpha = \alpha_0(1.2 - 0.2 \exp(-(t/T)^6))$, (б) при $T = 1500$ дней и изменении $\alpha = \alpha_0(1.2 - 0.2 \exp(-(t/T)^6))$, (в) при $T = 1500$ дней и $\alpha = \alpha_0(3 - 2 \exp(-(t/T)^6))$ при $\alpha_0\tau = 1.1$, $\tau = 14$ дней, $x(0) = 10^{-6}$.

что при $\alpha\tau > 1$ имеет место возрастание производной dx/dt на некотором интервале при $t > \tau$, чего не наблюдается при $\alpha\tau \leq 1$. Заметим, что в настоящий момент. (Статья подготовлена в мае 2020 г.) Текущая статистика COVID-19 за более поздние периоды (см., например, [15], [16]), качественно согласуется с нашими прогнозами) количество инфицированных в России составляет 0.13%, Германии – 0.20% в США – 0.36%, т.е. в этих странах точно реализуется сценарий $\alpha\tau > 1$.

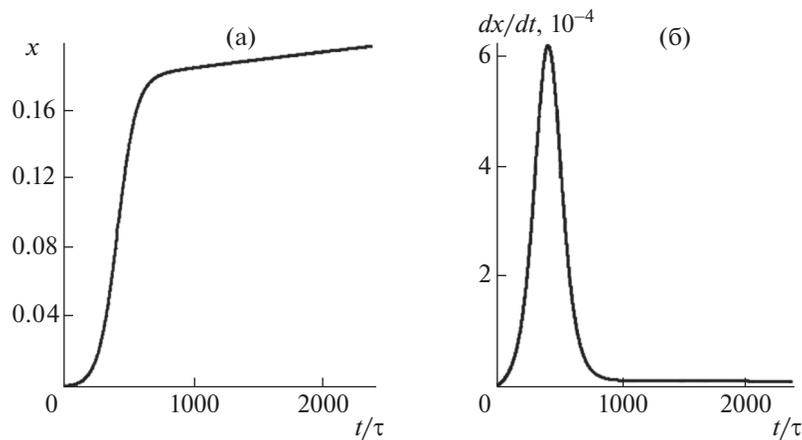
4.4. Волны эпидемии

Приведенные выше рассуждения показывают, что при заданной константе $\alpha\tau$ пик заболевания определяется уравнением (13) и является единственным. Однако при возможности управления параметром $\alpha\tau$ можно добиться двух и даже трех пиков. Для демонстрации этого утверждения введем управление параметром α с резким изменением его значения:

$$\alpha = \alpha_0(1 + \varepsilon - \varepsilon e^{-(t/T)^6}). \tag{18}$$

Для выбора значения ε можно опираться на значения эффективной константы $\alpha\tau(1 - x_0)$, которая должна быть больше 1 и асимптотического значения x_∞ , например, из фиг. 3 при $x_0 = x_\infty$. Ниже приводятся (см. фиг. 4), иллюстрирующие расчеты с появлением двух и даже трех пиков. Видно, что при выбранном значении $\alpha_0\tau$ вблизи 1 небольшой скачок α на 20% (фиг. 4а и 4б) приводит к появлению второго пика (фиг. 4б), а для того чтобы они были наблюдаемы, время переключения параметра α составляет $T = 1500$ дней (сравни фиг. 4а и 4б). Для появления 3-го пика скачок α должен быть больше. В приведенном примере (фиг. 4в) α увеличивается в 3 раза.

Выбор переходной функции в форме (18) является достаточно произвольным, и можно исследовать функции с более быстрой степенью переключения значения $\alpha\tau$, сжимая, таким образом,



Фиг. 5. (а) Плотность $x(t)$ инфицированных в зависимости от времени t в единицах τ , и (б) абсолютный прирост dx/dt плотности инфицированных при $\alpha\tau = 1.1$, $\tau = 14$ дней, $x(0) = 0$, $j = 10^{-6}$.

шкалу времени для возникновения новых пиков заболевания. Именно за это поведение отвечает реакция общества на пандемию.

Таким образом, ответ на вопрос: “Можно ли ожидать двух или более пиков скоростей заболевания?”, можно сформулировать в форме: “Количество пиков может достигать, по крайней мере, трех, и определяется амплитудой и скоростью изменения параметра $\alpha\tau$.”

4.5. Транспорт инфекции

Рассматривая развитие пандемии в рамках уравнений (4), (5), т.е. в схеме “инфицированный больной заражает окружающих”, мы не учитывали приток инфицированных больных извне. И если для больших сообществ этот механизм роста больных может оказаться малозначимым, то для небольших городов приток больных извне может оказывать существенное влияние на динамику развития инфекции. Для того, чтобы включить поток инфицированных в уравнения (4) или (5), можно просто добавить слагаемое j к производной $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - x(t))(x(t) - x(t - \tau)) + j, \quad (19)$$

где j имеет смысл относительной доли инфицированных больных, прибывающих в сообщество в единицу времени, например, за день. В общем случае поток инфицированных больных j является функцией времени t и может быть легко изменен усилиями общества, вплоть до полной изоляции ($j = 0$). При рассмотрении схемы развития инфекции по уравнению (19) начальное условие $x(t = 0)$ может быть нулевым, убирая описанный выше скачок производной при $t = \tau$. Используемые выше схемы анализа решений уравнения (4) пригодны и для анализа уравнения (19). Мы не будем их здесь повторять, а приведем пример численного решения уравнения (19), отображенного на фиг. 5, при относительно небольших значениях $\alpha\tau$ и j . Выбранное значение $j = 10^{-6}$ означает, что в город с населением сто тысяч человек въезжает один инфицированный человек за десять дней. Как видно из фиг. 5, даже такой незначительный приток инфицированных людей приводит к вспышке заболевания, протекающей быстрее, чем при задании начального условия на количество больных. Это можно увидеть, сравнивая фиг. 5 с кривой при $\alpha\tau = 1.1$ на фиг. 3а.

Характерной особенностью динамики заболеваний при внешнем притоке носителей инфекции является “затянутый хвост”, который, в принципе, позволяет увидеть источник заболеваний во внешнем притоке носителей инфекции.

5. СРАВНЕНИЕ НАСТОЯЩЕЙ МОДЕЛИ С МОДЕЛЬЮ SIR

Как уже отмечалось выше, пандемия “испанки” спровоцировала необходимость создания прогноза пандемий на основе хоть и упрощенных, но математических моделей. В частности, именно тогда была создана до сих пор используемая модель SIR [5]. В настоящее время эта модель значительно расширена, но ее уравнения до сих пор остаются базовыми, именно с ними мы будем сравнивать настоящую модель. Название модели является аббревиатурой трех переменных модели: S – Susceptible (количество людей, способных заразиться), I – Infectious (количество носителей инфекции), R – removed (количество людей, не способных заразиться (иммунные или умершие)). Система дифференциальных уравнений, восходящая еще к [5], записывается в виде

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\alpha IS}{N_{\max}}, \quad (20)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\alpha IS}{N_{\max}} - \gamma I, \quad (21)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (22)$$

Здесь N_{\max} – количество членов популяции, а α и γ – параметры модели. Система уравнений (20)–(22) сохраняет общее количество членов популяции со временем, т.е. $S + I + R = N_{\max}$. Для сравнения нашей модели с моделью SIR, определим переменные модели SIR в наших обозначениях. Итак, у нас $N(t)$ – количество заболевших, тогда $S = N_{\max} - N(t)$, $R = N(t - \tau)$, $I = N(t) - N(t - \tau)$. Подставляя определенные таким образом переменные S , I и R в уравнения (20)–(22), получаем

$$\frac{d(N_{\max} - N(t))}{dt} = -\frac{\alpha(N_{\max} - N(t))(N(t) - N(t - \tau))}{N_{\max}}, \quad (23)$$

$$\frac{d(N(t) - N(t - \tau))}{dt} = \frac{\alpha(N_{\max} - N(t))(N(t) - N(t - \tau))}{N_{\max}} - \gamma(N(t) - N(t - \tau)), \quad (24)$$

$$\frac{dN(t - \tau)}{dt} = \gamma(N(t) - N(t - \tau)). \quad (25)$$

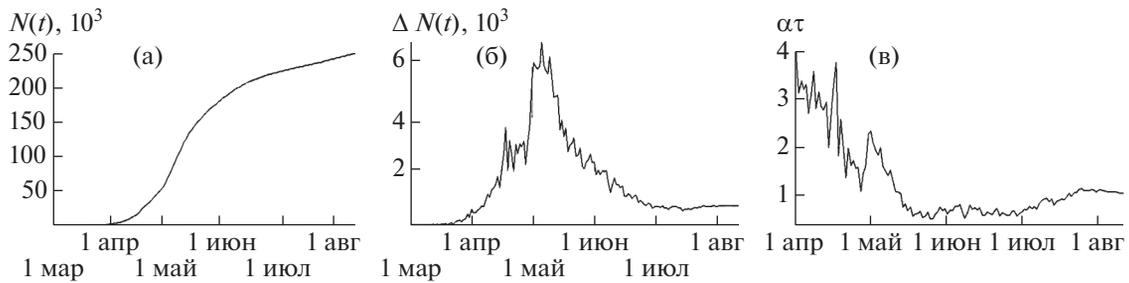
Видно, что уравнение (23) дает в точности уравнение (3) нашей модели и при использовании плотности, уравнение (4). Уравнение (24) с учетом уравнения (25) тоже дает уравнение (3). Поскольку уравнение (3) и его следствия (4) и (5) имеют единственные решения, то формально уравнения (22) и (25) служат лишь для связи параметров γ и τ . Разумеется, параметр γ может в этом случае являться функцией времени, что не противоречит ни идее модели SIR, ни условию $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$.

Таким образом, уравнение нашей модели не противоречит модели SIR, являясь ее реализацией при функциональной связи между заболевшими и носителями инфекции $I = N(t) - N(t - \tau)$.

6. АНАЛИЗ ТЕКУЩЕЙ СИТУАЦИИ

В настоящий момент считается, что антитела на инфекцию возникают практически у всех заболевших на 20–24-й день после инфицирования. Поэтому в этом анализе будем полагать, что время инфицирования τ составляет 21 день в социуме, где противоинфекционные меры общества не позволяют его снизить радикально (“свободный полет”). С учетом оценочной вероятности инфицирования в режиме (само)изоляции $\alpha = 0.1$ – 0.15 получаем значения $\alpha\tau = 2.2$ – 3.15 , которые дают (см. фиг. 3 при $\alpha\tau = 2, 3$) время инфицирования популяции примерно 150 дней с естественной датой завершения пандемии (февраль, март, апрель, май, июнь) конец июня–июль практически для всех стран после вспышки в Китае. Если же общество сократит время инфицирования τ в 2–3 раза, то длительность пандемии увеличится и будет определяться единицей времени “год”, с бонусом в меньшее количество заболевших.

Разумеется, действия общества по уменьшению $\alpha\tau$ приведут к необходимости решения уравнений (4) при переменном значении $\alpha\tau$, и приведенные численные решения не будут отобра-



Фиг. 6. (а) Число инфицированных COVID-19 $N(t)$, (б) суточный прирост $\Delta N(t)$ инфицированных со 2 марта по 13 августа в Москве по доступным данным из Википедии) и (в) зависимость параметра $\alpha\tau \equiv \alpha(t)\tau$ с 1 апреля по 13 августа при $\tau = 21$ дней.

жать ситуацию в полной мере. В этом случае с целью прогноза можно решать уравнения “в текущий момент времени”. Для такой задачи необходимо будет знание $\alpha\tau$ в текущий момент времени. Заметим, что действия общества приблизили значения $\alpha\tau$ к 1 и наблюдаемое увеличение инфицированных определяется параметром β , т.е. решением уравнения (10). В случае $\alpha\tau$, близких к 1, можно указать линейную связь между этими параметрами:

$$\alpha\tau \approx 1 + \beta\tau/2. \quad (26)$$

Например, в США, где количество инфицированных достигло 0.4% (16.05.2020), прирост инфицированных составил около 2% в день. При $\tau = 21$ день $\alpha\tau = 1.21$. В режиме развития пандемии согласно фиг. 3 при $\alpha\tau = 1.1, 1.5$ длительность пандемии будет не менее года. Если же малый прирост инфицированных связан с завершением пандемии, то количество инфицированных должно быть намного больше официальной статистики. Собственно выбор вариантов развития пандемии небольшой: или большая часть общества уже инфицирована (вне официальной статистики), либо пандемия будет длиться год и более.

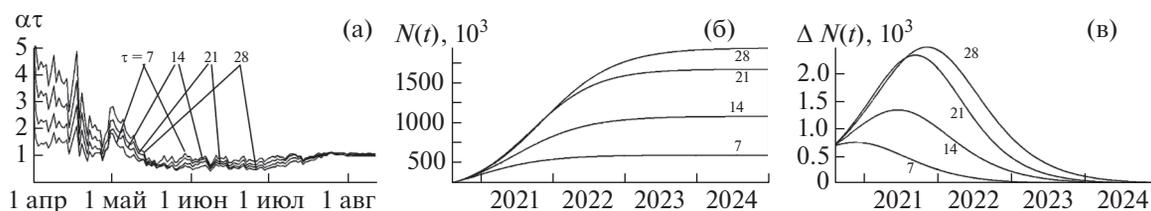
На фиг. 6 представлены данные из Wikipedia по числу инфицированных COVID-19 в Москве, и вычисленный на основе этих данных согласно уравнению (2) параметр модели $\alpha\tau \equiv \alpha(t)\tau$:

$$\alpha\tau = \frac{\tau(N(t+1) - N(t))}{(1 - N(t)/N_{\max})(N(t) - N(t-\tau))} \quad (27)$$

при $\tau = 21$ день. Из фиг. 6 видно, что до середины мая $\alpha\tau$ уменьшается, что связано как с постепенным введением ограничений, так и с пониманием ситуации населением. Скачок $\alpha\tau$ в окрестности 1 мая связан с тем, что 15 апреля из-за проверки пропусков в метро Москвы скопились толпы людей, что дало благоприятные условия для распространения вируса. Начиная с середины мая и до конца июня $\alpha\tau \approx 0.55-0.8$ становится постоянной, и наблюдается уменьшение дневного прироста инфицированных. В середине июня в Москве постепенно снимаются ограничения, в результате в первые две декады июля наблюдается рост $\alpha\tau$. Начиная с конца июля и до середины августа $\alpha\tau \approx 1.05-1.1$ и суточный прирост инфицированных составляет около 700 человек, однако использование этих данных для модели дает пессимистичный результат: к концу года суточный прирост превысит 1000 человек, а количество заболевших — 350 000.

Относительно равномерное распределение зараженных по Москве к началу эпидемии и медленное распространение, при котором человек, зараженный в одном конце Москвы, может заразить в другом ее конце, а также условия (законы), не зависящие от района Москвы, позволяют пренебречь очаговостью и рассматривать весь мегаполис как одну популяцию. Большое число заболевших минимизируют вероятностную составляющую ошибки, что видно на фиг. 6, 7, где амплитуда быстрых колебаний дневного прироста заболевших и произведения $\alpha\tau$ со временем уменьшается.

Для иллюстрации на фиг. 7 представлены параметр модели $\alpha\tau \equiv \alpha(t)\tau$ при $\tau = 7, 14, 21, 28$ и прогноз числа $N(t)$ и суточного прироста инфицированных $\Delta N(t)$, полученных, используя среднее значение $\alpha\tau \equiv \alpha(t)\tau$ с 31 июля по 13 августа. При всех $\alpha\tau$ наблюдается возрастание суточного прироста инфицированных $\Delta N(t)$. При этом при $\tau < 14$ скачок $\alpha\tau$ в окрестности 1 мая становится необъяснимым.



Фиг. 7. (а) Зависимость параметра $\alpha\tau \equiv \alpha(t)\tau$ с 1 апреля по 13 августа для Москвы при $\tau = 7, 14, 21, 28$ дней, (б) число инфицированных $N(t)$ и (в) суточный прирост инфицированных $\Delta N(t)$, полученные с помощью экстраполяции на 2021–2024 гг.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕДОСТАТКИ МОДЕЛИ

Предложенная двухпараметрическая модель развития инфекции в виде обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием по времени по сути является редуцированной моделью SIR при функциональной связи между заболевшими и носителями инфекции $I = N(t) - N(t - \tau)$. Такая редукция сохраняет оптимальный баланс между адекватностью описания пандемии в модели SIR и простотой практических оценок. При этом предложенная модель позволяет решать как прямую задачу: при заданных параметрах τ и α находить зависимость плотности инфицированных $x(t)$ от времени t , так и обратную задачу: при заданной зависимости плотности инфицированных от времени определить зависимость параметров модели от времени. Это дает возможность быстрого прогноза развития инфекции по предшествующей информации о статистике заболевания (см. фиг. 7).

Отметим, что при заданной константе $\alpha\tau$ пик заболевания определяется уравнением (13), и является единственным. Однако при возможности резкого изменения параметра $\alpha\tau$ можно добиться двух и даже трех пиков, что продемонстрировано на фиг. 4. Такое изменение $\alpha\tau$ за счет изменения α может носить сезонную зависимость восприимчивости к болезни от времени года или зависимость от количества контактов в рабочие и праздничные дни, и дни каникул. В частности, для России минимальное значение $\alpha\tau$ приходилось на весенние и летние каникулы и можно будет видеть в осенние и зимние каникулы. Изменения величины $\alpha\tau$ за счет параметра τ в большей степени определяются реакцией общества на заболевание. Таким образом, ответ на вопрос: “Можно ли ожидать двух или более пиков скоростей заболевания?”, можно сформулировать в форме: “Количество пиков может достигать, по крайней мере, трех, и определяется амплитудой и скоростью изменения параметра $\alpha\tau$.” Текущая информация, подтверждающая многопиковое распространение COVID-19 в мегаполисах, представлена, например, в сообщениях РИА НОВОСТИ [17].

Рассматривая развитие пандемии в рамках уравнений (4), (5), т.е. в схеме “инфицированный больной заражает окружающих”, мы не учитывали приток инфицированных больных извне. И если для больших сообществ этот механизм роста больных может оказаться малозначимым, то для небольших городов приток больных извне может оказывать существенное влияние на динамику развития инфекции. Для того чтобы включить поток инфицированных в уравнения (4) или (5), достаточно добавить слагаемое j — относительную долю инфицированных больных, прибывающих в сообщество в единицу времени, к производной $x(t)$ и получить в результате неоднородное уравнение (19). В общем случае поток инфицированных больных j является функцией времени t и может быть легко изменен усилиями общества, вплоть до полной изоляции ($j = 0$). Фиг. 5 показывает, что даже незначительный приток инфицированных людей приводит к вспышке заболевания, протекающей быстрее, чем при задании начального условия на количестве больных.

К недостаткам модели можно отнести описание в среднем. Примеры проявления некорректности такого описания могут проявляться в небольших социумах, где подпитка инфекции со стороны может оказать большее значение, чем механизмы развития, представленные уравнениями (4). Кроме того, описание не зависит от “координат”, т.е. не отражает пространственного распределения инфекции. Поэтому вне модели остались последние последующие вспышки из-за “выравнивания плотности инфицированных” по регионам. Остальные недостатки, связанные с количеством параметров модели (например, распределение населения на разные группы со своими значениями $\alpha\tau$), скорее всего не являются значимыми при описании популяции “в целом”. Су-

щественная особенность COVID-19, которая делает его в некоторой степени уникальным среди других инфекций, заключается в том, что тяжесть заболевания сильно различается у отдельных пациентов от легкого до смертельного исхода. Более того, в процессе развития болезни есть особая (бифуркационная) точка, в которой у некоторых пациентов неожиданно возникают фатальные легочные осложнения. Эти особенности имеют большое практическое значение, поскольку в простых случаях статистические данные сильно недооцениваются (пациенты не обращаются за медицинской помощью и не принимаются во внимание), а в потенциально опасных случаях требуется особая немедленная помощь. В нынешнюю упрощенную модель эти особенности, природа которых еще далеко не ясна [18], не были включены.

Задача будущих исследований состоит в том, чтобы устранить указанные выше недостатки, стремясь сохранить оптимальный баланс между адекватностью модели и простотой для практических оценок.

Авторы благодарны А. Кукетаеву за идею взаимосвязи данной модели и модели SIR.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strochlic N., Champine R.D.* How some cities “flattened the curve” during the 1918 flu pandemic // <https://www.nationalgeographic.com/history/2020/03/how-cities-flattened-curve-1918-spanish-flu-pandemic-coronavirus/>
2. *Ross R.* An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. Part I // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1916. V. 92. P. 204–230.
3. *Ross R., Hudson H.* An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. Part III // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1917. V. 93. P. 225–240.
4. *Ross R., Hudson H.P.* An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. Part II // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1917. V. 93. P. 212–225.
5. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics // *Proc. Roy. Soc. A.* 1927. V. 115. P. 700–721.
6. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* Contributions to the mathematical theory of epidemics. II. The problem of endemicity // *Proc. Roy. Soc. A.* 1932. V. 138. P. 55–83.
7. *Uhlig S., Nichani K., Uhlig C., Simon K.* Modeling projections for COVID-19 pandemic by combining epidemiological, statistical, and neural network approaches // Preprint from medRxiv 2020.
8. *Ciufolini I., Paolozzi A.* A mathematical prediction of the time evolution of the COVID-19 pandemic in some countries of the European Union using Monte Carlo simulations // *Eur. Phys. J. Plus.* 2020. V. 135. P. 495.
9. *Kohler-Rieper F., Rohlf C.H.F., De Micheli E.* A novel deterministic forecast model for COVID-19 epidemic based on a single ordinary integro-differential equation // Preprint from medRxiv, 05 May 2020. <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2020.04.29.20084376v2>
10. Compartmental Models // 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology
11. COVID-19 Prognostic Model // 2020. url:<http://www.roehlnet.de/corona/countries-all>.
12. *Baker C.T.H.* Retarded differential equations // *J. Comput. Appl. Math.* 2000. V. 125. P. 309–335.
13. *Dell’Anna L.* Solvable delay model for epidemic spreading: the case of COVID-19 in Italy // 2020. [arXiv: 2003.13571q-bio.PE]
14. Европейское региональное бюро ВОЗ, Копенгаген, Дания // https://gateway.euro.who.int/ru/indicators/hfa_476-5050-hospital-beds-per-100-000/
15. Яндекс. Коронавирус: статистика // <https://yandex.ru/covid19/stat>
16. Coronavirus, la situazione in Italia // <https://lab.gedidigital.it/gedi-visual/2020/coronavirus-i-contagi-in-italia>
17. Динамика выявленных случаев COVID-19 в мегаполисах // <https://ria.ru/20200924/koronavirus-1577684607.html?in=t>
18. Symptoms of Novel Coronavirus (2019-nCoV), CDC (Center for Disease Control and Prevention)// www.cdc.gov, 10/02/2020. <https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/about/symptoms.html>

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.95

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА
ПОГЛОЩЕНИЯ В ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ
УРАВНЕНИИ В КЛАССЕ L_∞ ¹⁾**

© 2021 г. В. Л. Камынин

115409 Москва, Каширское шоссе, 31, Национальный исследовательский
ядерный университет “МИФИ”, Россия

e-mail: vlkamyinin2008@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.01.2020 г.
Переработанный вариант 17.09.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Доказаны теоремы существования и единственности решений обратных задач определения зависящего от времени коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении с двумя независимыми переменными. В качестве дополнительного условия задается условие интегрального наблюдения. Неизвестный коэффициент поглощения ищется в классе ограниченных на $[0, T]$ функций. Приведены примеры обратных задач, для которых выполняются условия доказанных в работе теорем. Библ. 24.

Ключевые слова: обратные задачи, условие интегрального наблюдения, вырождающиеся параболические уравнения с недивергентной главной частью.

DOI: 10.31857/S004446692103011X

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются вопросы однозначной разрешимости обратных задач определения коэффициента $\gamma(t)$ в параболическом уравнении

$$u_t - a(t, x)u_{xx} + b(t, x)u_x + c(t, x)u + \gamma(t)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (1.2)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^l u(t, x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Здесь $Q = [0, T] \times [0, l]$, T, l – некоторые числа, $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$, $f(t, x)$, $u_0(x)$, $\omega(x)$, $\varphi(t)$ – известные функции.

Обратная задача (1.1)–(1.4) рассматривается в двух вариантах постановки.

Постановка 1. Неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ ищется в классе функций из $L_\infty(0, T)$.

Постановка 2. Неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ ищется в классе неотрицательных функций из $L_\infty(0, T)$.

Особенностью рассматриваемых постановок обратных задач является предположение о том, что уравнение (1.1) является вырожденным, а именно, выполнены условия

$$0 \leq a(t, x) \leq a_1, \quad 1/a(t, x) \in L_q(Q), \quad q > 1. \quad (1.5)$$

¹⁾Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.а03.21.0005 от 27.08.2013.

Для случая равномерно параболических уравнений обратные задачи восстановления коэффициента поглощения с интегральным наблюдением вида (1.4) рассматривались при различных предположениях и для различных видов параболических уравнений (второго и высокого порядка, с дивергентной и недивергентной главной частью) в работах ряда авторов (см., например, [1]–[6] и др.). Отметим также работы [7]–[9] и др., где изучались обратные задачи определения младшего коэффициента в невырождающихся параболических уравнениях с другими, нежели (1.4), дополнительными условиями.

Ранее автором при предположении (1.5) и дополнительном условии (1.4) были исследованы обратные задачи восстановления зависящего от t источника в правой части вырождающегося параболического уравнения вида (1.1) (см. [10], [11]). Отметим еще работу [12], где при предположении типа (1.5) была рассмотрена обратная задача определения неизвестного, но зависящего от x источника в правой части неравномерно параболического уравнения. Наконец, в недавней работе [13] была рассмотрена обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении (1.1) с условием интегрального наблюдения (1.4), но в случае, когда старший коэффициент уравнения (1.1) сильно вырождается при $x = 0$: вместо условия (1.5) предполагается, что $a(t, x) \sim a_0 x^\alpha$, $x \rightarrow 0$, $\alpha = \text{const} \geq 2$.

Отметим, что изучение как прямых, так и обратных задач для вырождающихся параболических уравнений имеет важные применения в различных прикладных задачах гидродинамики, климатологии, задачах изучения пористых сред, а также в финансовой математике (см., например, [14], [15] и дальнейшие ссылки в [14]). В связи с этим укажем еще работы [16]–[21] и др., где также рассматривались обратные задачи для вырождающихся параболических уравнений, но в постановках, отличных от представленных в данной работе.

Перейдем к точным формулировкам.

Все равенства и неравенства предполагаются выполненными почти всюду, все рассматриваемые в работе функции предполагаются, как минимум, измеримыми, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву.

Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [22], [23]). При этом для удобства будем использовать обозначения нормы: $\|\cdot\|_{L_2(0,l)} \equiv \|\cdot\|_2$.

Через $C^{0,\alpha}(Q)$, $\alpha = \text{const} \in (0, 1)$, будем обозначать пространство Гёльдера непрерывных в Q функций, имеющих конечную норму

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)} = \max_Q |u(t, x)| + \sup_{\substack{(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in Q \\ (t_1, x_1) \neq (t_2, x_2)}} \frac{|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}}.$$

Положим

$$Q_\tau = [0, \tau] \times [0, l], \quad \tau \in (0, T], \quad Q_T \equiv Q; \quad L_\infty^+(0, T) = \{z(t) \in L_\infty(0, T) : z(t) \geq 0\},$$

$$B_R = \{z(t) \in L_\infty(0, T) : \|z\|_{L_\infty(0, T)} \leq R\}, \quad B_R^+ = \{z(t) \in L_\infty^+(0, T) : \|z\|_{L_\infty(0, T)} \leq R\}.$$

Нам понадобятся хорошо известные неравенства: арифметическое неравенство Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.6)$$

а также неравенство Пуанкаре–Стеклова, которое при $n = 1$ может быть записано в виде

$$\|z\|_2 \leq \frac{l}{\pi} \|z_x\|_2, \quad z \in \dot{W}_2^1(0, l). \quad (1.7)$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1.1)–(1.4), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \leq a(t, x) \leq a_1, \quad (t, x) \in Q; \quad 1/a(t, x) \in L_q(Q), \quad q > 1, \quad \|1/a\|_{L_q(Q)} \leq a_2;$$

$$a_x(t, x), a_x^2(t, x)/a(t, x) \in L_\infty(Q), \quad \|a_x^2/a\|_{L_\infty(Q)} \leq K_a^*; \quad (A)$$

$$b^2(t, x)/a(t, x), c^2(t, x)/a(t, x) \in L_\infty(Q), \quad \|b^2/a\|_{L_\infty(Q)} \leq K_{b,a}, \quad \|c^2/a\|_{L_\infty(Q)} \leq K_{c,a}; \quad (B)$$

$$u_0(x) \in \overset{0}{W}_2^1(0, l), \quad \|u_0'\|_2 \leq M_1; \quad (C)$$

$$f^2(t, x)/a(t, x) \in L_1(Q), \quad \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \leq K_{f,a}; \quad (D)$$

$$\omega(x) \in \overset{0}{W}_2^1(0, l), \quad |\omega(x)| \leq K_\omega, \quad x \in [0, l], \quad \|\omega\|_2 \leq K_\omega^*; \quad (E)$$

$$\varphi(t) \in W_\infty^1(0, T), \quad |\varphi(t)| \leq K_\varphi, \quad |\varphi'(t)| \leq K_\varphi^*, \quad |\varphi(t)| \geq \varphi_0 > 0, \quad t \in [0, T]; \quad (F)$$

$$\varphi(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x)dx; \quad (G)$$

здесь $a_1, a_2, K_\omega, K_\omega^*, K_\varphi, \varphi_0 = \text{const} > 0, K_a^*, K_{b,a}, K_{c,a}, K_{f,a}, K_\varphi^* = \text{const} \geq 0$.

Замечание 1.1. Из условий (A) и (B) следует, что $b(t, x), c(t, x) \in L_\infty(Q)$, причем

$$\|b\|_{L_\infty(Q)} \leq K_b \equiv \sqrt{a_1 \cdot K_{b,a}}, \quad \|c\|_{L_\infty(Q)} \leq K_c \equiv \sqrt{a_1 \cdot K_{c,a}}. \quad (1.8)$$

Как было отмечено выше, обратная задача (1.1)–(1.4) рассматривается в двух постановках.

Обратная задача 1 (ОЗ.1).

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи (ОЗ.1) будем называть пару функций $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ таких, что

$$u(t, x) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{W}_2^1(0, l)) \cap W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad s > 1, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \gamma(t) \in L_\infty(0, T),$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1.1) п.в. в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4) в классическом смысле.

Обратная задача 2 (ОЗ.2).

Определение 1.2. Обобщенным решением задачи (ОЗ.2) будем называть пару функций $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ таких, что

$$u(t, x) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{W}_2^1(0, l)) \cap W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad s > 1, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \gamma(t) \in L_\infty^+(0, T),$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1.1) п.в. в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4) в классическом смысле.

Структура работы следующая. В разд. 3 и 4 доказываются теоремы существования и единственности решений задач (ОЗ.1) и (ОЗ.2) соответственно. Эти результаты базируются на доказательстве однозначной разрешимости прямой задачи (1.1)–(1.3) (функция $\gamma(t)$ в уравнении (1.1) предполагается известной) и явно выписанных оценках решения этой задачи. Соответствующие результаты получены в разд. 2. Наконец, в разд. 5 проводится обсуждение полученных результатов и приводятся примеры обратных задач (ОЗ.1) и (ОЗ.2), для которых справедливы доказанные в разд. 3 и 4 теоремы.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу (1.1)–(1.3). Будем предполагать, что коэффициент $\gamma(t) \in L_\infty(0, T)$ известен и

$$\|\gamma\|_{L_\infty(0, T)} \leq K_\gamma. \quad (2.1)$$

Решение $u(t, x)$ прямой задачи (1.1)–(1.3) будем понимать в смысле определения 1.1.

Докажем теоремы существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.3), при этом воспользуемся идеями доказательства аналогичных теорем из работы [12].

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (A)–(D) и (2.1). Тогда обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ этой задачи. Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$. Тогда функция $v(t, x)$ является решением уравнения

$$v_t - a(t, x)v_{xx} + \sqrt{a(t, x)} \frac{b(t, x)}{a(t, x)} v_x + c(t, x)v + \gamma(t)v = 0, \quad (2.2)$$

с однородными краевыми условиями

$$v(0, x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

Умножим уравнение (2.2) на $e^{-\lambda t} v$ (где $\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже) и проинтегрируем получившееся равенство по Q . Учитывая условие (2.3), после интегрирования по частям приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\lambda T}}{2} \int_0^l v^2(T, x) dx + \frac{\lambda}{2} \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dx dt + \int_Q e^{-\lambda t} a v_x^2 dx dt \leq \int_Q (e^{-\lambda t/2} |\sqrt{a} v_x|) \left(e^{-\lambda t/2} \left| \frac{a_x}{\sqrt{a}} v \right| \right) dx dt + \\ + \int_Q (e^{-\lambda t/2} |\sqrt{a} v_x|) \left(e^{-\lambda t/2} \left| \frac{b}{\sqrt{a}} v \right| \right) dx dt + \int_Q e^{-\lambda t} |c| v^2 dx dt + \int_Q e^{-\lambda t} |\gamma| v^2 dx dt. \end{aligned}$$

Для оценки первых двух слагаемых в правой части этого неравенства применим неравенство (1.6), относя $\varepsilon = 1/2$ к множителям $e^{-\lambda t/2} |\sqrt{a} v_x|$. Тогда приходим к соотношению

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2} \int_0^l v^2(T, x) dx + \frac{\lambda}{2} \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q e^{-\lambda t} a v_x^2 dx dt \leq \int_Q e^{-\lambda t} \left(\frac{a_x^2}{a} + \frac{b^2}{a} + |c| + |\gamma| \right) v^2 dx dt,$$

откуда с учетом условий (A), (B), (2.1) и (1.8) получим неравенство

$$\lambda \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dx dt \leq C \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dx dt,$$

где $C = \text{const} > 0$ не зависит от λ .

Выбирая $\lambda > C$, получаем, что $\int_Q e^{-\lambda t} v^2 dx dt \leq 0$, откуда следует, что $v(t, x) = 0$ в Q , т.е. $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$. Теорема доказана.

Теперь докажем теорему существования обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) и установим ряд оценок для такого решения, которые будут использованы в следующих разделах при исследовании обратных задач (ОЗ.1) и (ОЗ.2). В этих оценках через C с индексом будем обозначать положительные константы, зависящие только от $l, T, a_1, a_2, K_a^*, K_{b,a}, K_{c,a}, K_\gamma, K_{f,a}$ и M_1 .

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (A)–(D) и (2.1). Положим

$$q^* = \frac{2q}{q+1}, \quad \lambda_1 \equiv \lambda_1(\gamma) = 3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} + K_\gamma. \quad (2.4)$$

Тогда существует обобщенное решение $u(t, x)$ прямой задачи (1.1)–(1.3) при $s = q^*$ и выполнены оценки

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t, \cdot)\|_2^2 \leq e^{\lambda_1 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right), \quad (2.5)$$

$$\|a u_{xx}^2\|_{L_1(Q)}^2 \leq e^{\lambda_1 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right), \quad (2.6)$$

$$\|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \leq a_2 e^{\lambda_1 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right), \quad (2.7)$$

$$\|u_t\|_{L_2(Q)}^2 \leq C_1, \quad (2.8)$$

$$|u(t_1, x_1) - u(t_2, x_2)| \leq C_2 |x_1 - x_2|^{1/2} + C_3 |t_1 - t_2|^{1/6}, \quad (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in Q. \quad (2.9)$$

Доказательство. Используем схему доказательства теоремы 2.2 из [13]. Положим $a_n(t, x) = a(t, x) + 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, $h = 1/n$ и введем средние функции $(b/\sqrt{a})^h$, $(c/\sqrt{a})^h$, $(f/\sqrt{a})^h$ для функций b/\sqrt{a} , c/\sqrt{a} , f/\sqrt{a} соответственно (продолжив предварительно эти функции вне Q , например, нулем).

Отметим, что из известных свойств средних функций и предположений (B), (D) следует, что

$$\begin{aligned} \|(b/\sqrt{a})^h\|_{L_\infty(Q)} &\leq \|b/\sqrt{a}\|_{L_\infty(Q)} \leq \sqrt{K_{b,a}}, \quad \|(c/\sqrt{a})^h\|_{L_\infty(Q)} \leq \|c/\sqrt{a}\|_{L_\infty(Q)} \leq \sqrt{K_{c,a}}, \\ \|(f/\sqrt{a})^h\|_{L_2(Q)} &\leq \|f/\sqrt{a}\|_{L_2(Q)} \leq \sqrt{K_{f,a}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим в Q первую краевую задачу для уравнения

$$u_t^n - a_n u_{xx}^n + \sqrt{a_n} \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^h u_x^n + \sqrt{a_n} \left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^h u^n + \gamma(t) u^n = \sqrt{a_n} \left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h \tag{2.11}$$

с краевыми условиями

$$u^n(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad u^n(t, 0) = u^n(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.11) является равномерно параболическим, поэтому в силу [22] первая краевая задача (2.11), (2.12) имеет единственное решение $u^n(t, x) \in L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(0, l)) \cap W_2^{1,2}(Q)$.

Выведем для $u^n(t, x)$ ряд равномерных по n оценок. Для этого умножим уравнение (2.11) на $-e^{-\lambda_1 t} u_{xx}^n$, где λ_1 определена в (2.4), и проинтегрируем результат по Q_τ , $0 < \tau \leq T$. В результате после интегрирования по частям получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\lambda_1 \tau} \int_0^l |u_x^n(\tau, x)|^2 dx + \frac{\lambda_1}{2} \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} |u_x^n|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} a_n |u_{xx}^n|^2 dxdt &= \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \int_{Q_\tau} [e^{-\lambda_1 t/2} \sqrt{a_n} u_{xx}^n] \times \\ &\times \left[e^{-\lambda_1 t/2} \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^h u_x^n \right] dxdt + \int_{Q_\tau} [e^{-\lambda_1 t/2} \sqrt{a_n} u_{xx}^n] \left[e^{-\lambda_1 t/2} \left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^h u^n \right] dxdt - \\ &- \int_{Q_\tau} e^{\lambda_1 t} \gamma(t) |u_x^n|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} [e^{-\lambda_1 t/2} \sqrt{a_n} u_{xx}^n] \left[e^{-\lambda_1 t/2} \left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h \right] dxdt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для оценки второго, третьего и пятого слагаемых в правой части соотношения (2.13) применим неравенство (1.6), относя множитель $\varepsilon = 1/3$ к слагаемым $\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} a_n |u_{xx}^n|^2 dxdt$. В результате с учетом условий (B), (2.1), оценок (2.10) и неравенства Пуанкаре–Стеклова (1.7) находим, что

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_1 \tau} \|u_x^n(\tau, \cdot)\|_2^2 + \lambda_1 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} |u_x^n|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} a_n |u_{xx}^n|^2 dxdt &\leq \\ &\leq \|u_0\|_2^2 + \left(3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} + K_\gamma \right) \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} |u_x^n|^2 dxdt + 3 \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t} \left| \left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h \right|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Принимая во внимание определение λ_1 в (2.4) и оценку (2.10), из (2.14) получаем равномерную по n оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x^n(t, \cdot)\|_2^2 + \|\sqrt{a_n} u_{xx}^n\|_{L_2(Q)}^2 \leq e^{\lambda_1 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right). \tag{2.15}$$

В силу неравенства Гёльдера с учетом определения q^* в (2.4) и условия (A), получаем (подробнее см. [11]):

$$\|u_{xx}^n\|_{L_{q^*(Q)}}^2 = \left(\int_Q \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^{q^*} |\sqrt{a_n} u_{xx}^n|^{q^*} dxdt \right)^{2/q^*} \leq \|1/a_n\|_{L_q(Q)} \int_Q a_n |u_{xx}^n|^2 dxdt \leq a_2 \|\sqrt{a_n} u_{xx}^n\|_{L_2(Q)}^2,$$

откуда в силу (2.15) получаем оценку

$$\|u_{xx}^n\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \leq a_2 e^{\lambda_1 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right). \tag{2.16}$$

Из уравнения (2.11) имеем

$$u_t^n = a_n(t, x) u_{xx}^n - \sqrt{a_n} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \right)^{h_n} u_x^n - \sqrt{a_n} \left(\frac{c}{\sqrt{a}} \right)^{h_n} u^n - \gamma(t) u^n + \sqrt{a_n} \left(\frac{f}{\sqrt{a}} \right)^{h_n},$$

а тогда, применяя уже доказанную оценку (2.15), условия (A)–(D), (2.1) и оценки (2.10), получаем оценку

$$\|u_t^n\|_{L_2(Q)}^2 \leq C_1, \tag{2.17}$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от n .

На основании оценок (2.15), (2.17) и оценки (2.9) из [23, с. 79] получаем равномерную по n оценку

$$|u^n(t_2, x_2) - u^n(t_1, x_1)| \leq C_2 |x_2 - x_1|^{1/2} + C_3 |t_2 - t_1|^{1/6}, \tag{2.18}$$

где $C_2, C_3 > 0$ не зависят от n . Подробное доказательство приведено в [13], теорема 2.2.

В силу оценок (2.15)–(2.18) найдутся подпоследовательность $n_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, а также функция $u(t, x) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, l)) \cap W_{q^*}^{1,2}(Q) \cap C^{0,1/3}(Q)$, такие, что при $k \rightarrow \infty$

$$u^{n_k}(t, x) \rightrightarrows u(t, x) \quad \text{равномерно на } Q, \tag{2.19}$$

$$u_x^{n_k}(t, x) \rightarrow u_x(t, x) \quad \text{в норме } L_{q^*}(Q) \text{ и } * \text{-слабо в } L_\infty(0, T; L_2(0, l)), \tag{2.20}$$

$$u_t^{n_k}(t, x) \rightharpoonup u_t(t, x) \quad \text{слабо в } L_2(Q). \tag{2.21}$$

$$u_{xx}^{n_k}(t, x) \rightharpoonup u_{xx}(t, x) \quad \text{слабо в } L_{q^*}(Q). \tag{2.22}$$

Пусть $\psi(t, x) \in C^\infty(Q)$ – пробная функция, $h_k = 1/n_k$. Тогда в силу (2.11) справедливо интегральное тождество

$$\int_Q \left[u_t^{n_k} - a_{n_k} u_{xx}^{n_k} + \sqrt{a_{n_k}} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \right)^{h_k} u_x^{n_k} + \sqrt{a_{n_k}} \left(\frac{c}{\sqrt{a}} \right)^{h_k} u^{n_k} + \gamma(t) u^{n_k} - \sqrt{a_{n_k}} \left(\frac{f}{\sqrt{a}} \right)^{h_k} \right] \psi dx dt = 0.$$

В силу соотношений (2.19)–(2.22) в этом интегральном тождестве можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$. В результате получим, что $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) п.в. в Q .

На основании оценок (2.15)–(2.18) и условий (2.19)–(2.22) получаем, что для $u(t, x)$ справедливы оценки (2.5)–(2.9). Кроме того, в силу (2.19) функция $u(t, x)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3).

Таким образом, $u(t, x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1.1)–(1.3). Теорема 2.2 доказана.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2.2 дополнительно известно, что $\gamma(t) \geq 0$. Положим

$$\lambda_2 = 3K_{b,a} + 3 \frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a}. \tag{2.23}$$

Тогда решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет оценкам

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t, \cdot)\|_2^2 \leq e^{\lambda_2 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right), \tag{2.24}$$

$$\|a u_{xx}^2\|_{L_1(Q)}^2 \leq e^{\lambda_2 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right), \tag{2.25}$$

$$\|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \leq a_2 e^{\lambda_2 T} \left(M_1^2 + 3 \|f^2/a\|_{L_1(Q)} \right). \tag{2.26}$$

Доказательство. Будем проводить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.2, но вместо умножения уравнения (2.11) на $-e^{-\lambda_1 t} u_{xx}^n$ умножим его на $-e^{-\lambda_2 t} u_{xx}^n$. Поскольку $\gamma(t) \geq 0$, то

$$\int_{Q_t} e^{-\lambda_2 t} \gamma(t) |u_x^n|^2 dxdt \geq 0.$$

Поэтому вместо соотношения (2.13) мы получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{-\lambda_2 \tau} \int_0^l |u_x^n(\tau, x)|^2 dx + \frac{\lambda_2}{2} \int_{Q_t} e^{-\lambda_2 t} |u_x^n|^2 dxdt + \int_{Q_t} e^{-\lambda_2 t} a_n |u_{xx}^n|^2 dxdt \leq \frac{1}{2} \|u_0^n\|_2^2 + \int_{Q_t} [e^{-\lambda_2 t/2} \sqrt{a_n} u_{xx}^n] \times \\ & \times \left[e^{-\lambda_2 t/2} \left(\frac{b}{\sqrt{a}} \right)^h u_x^n \right] dxdt + \int_{Q_t} [e^{-\lambda_2 t/2} \sqrt{a_n} u_{xx}^n] \left[e^{-\lambda_2 t/2} \left(\frac{c}{\sqrt{a}} \right)^h u^n \right] dxdt + \int_{Q_t} [e^{-\lambda_2 t/2} \sqrt{a_n} u_{xx}^n] \left[e^{-\lambda_2 t/2} \left(\frac{f}{\sqrt{a}} \right)^h \right] dxdt. \end{aligned}$$

Далее дословно повторяем доказательство теоремы 2.2 и получаем, что решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет оценкам (2.24)–(2.26), которые отличаются от оценок (2.5)–(2.7) заменой λ_1 на λ_2 .

Замечание 2.1. Величина λ_2 , в отличие от λ_1 , не зависит от γ .

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ОЗ.1)

В данном разделе в дополнение к условиям (A)–(G) будем предполагать, что

$$f(t, x) \in L_\infty(0, T; L_1(0, l)), \quad \|f\|_{L_\infty(0, T; L_1(0, l))} \leq K_f. \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$K_{\omega, a} = \sqrt{K_a^* a_1} K_\omega, \quad K_{\omega, b} = \sqrt{K_{b, a} a_1} K_\omega, \quad K_{\omega, c} = \sqrt{K_{c, a} a_1} K_\omega, \quad F(t) = \int_0^l f(t, x) \omega(x) dx, \tag{3.2}$$

где K_ω из (E), K_a^* , a_1 из (A), $K_{b, a}$, $K_{c, a}$ из (B).

Рассмотрим обратную задачу (ОЗ.1) и выведем операторное уравнение для нахождения неизвестной функции $\gamma(t) \in L_\infty(0, T)$. Для этого умножим уравнение (1.1) на $\omega(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$. Учитывая условие наблюдения (1.4) и предположения (A), (E), (F), после интегрирования по частям получим равенство

$$\gamma(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \left[F(t) - \varphi'(t) - \int_0^l ((a\omega)_x + b\omega) u_x dx - \int_0^l c\omega u dx \right]. \tag{3.3}$$

Введем оператор $\mathcal{A}: L_\infty(0, T) \rightarrow L_\infty(0, T)$ по формуле

$$\mathcal{A}(\gamma)(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \left[F(t) - \varphi'(t) - \int_0^l ((a\omega)_x + b\omega) u_x dx - \int_0^l c\omega u dx \right], \tag{3.4}$$

где $\gamma(t)$ – произвольная функция из $L_\infty(0, T)$, а $u(t, x) \equiv u(t, x; \gamma)$ – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с данной $\gamma(t)$ в уравнении (1.1). Такое решение существует и единственно в силу теорем 2.1 и 2.2 из предыдущего раздела.

Тогда соотношение (3.3) может быть записано в виде

$$\gamma = \mathcal{A}(\gamma). \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. В силу условий (A)–(F), (3.1) и теорем 2.1, 2.2 оператор \mathcal{A} определен корректно и действует из $L_\infty(0, T)$ в $L_\infty(0, T)$.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(G) и (3.1). Тогда операторное уравнение (3.5) эквивалентно обратной задаче (ОЗ.1) в следующем смысле. Если пара $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ является решением обратной задачи, то $\gamma(t)$ удовлетворяет соотношению (3.5). Обратно, если $\gamma^*(t) \in L_\infty(0, T)$ является решением операторного уравнения (3.5), а $u^*(t, x)$ – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с данной $\gamma^*(t)$ в уравнении (1.1), то пара $\{u^*(t, x), \gamma^*(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (ОЗ.1).

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано выше при выводе соотношения (3.3).

Докажем второе утверждение. Пусть $\gamma^*(t) \in L_\infty(0, T)$ является решением уравнения (3.5). Рассмотрим функцию $u^*(t, x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с выбранной функцией $\gamma(t) \equiv \gamma^*(t)$ в уравнении (1.1). Положим

$$\varphi^*(t) = \int_0^l u^*(t, x)\omega(x)dx. \quad (3.6)$$

Тогда $\varphi^*(t) \in W_2^1(0, T)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе (3.3) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(t) \in W_2^1(0, T)$), приходим к соотношению

$$\gamma^*(t)\varphi^*(t) = F(t) - \varphi^{*'}(t) - \int_0^l ((a\omega)_x + b\omega)u_x^* dx - \int_0^l c\omega u^* dx. \quad (3.7)$$

Поскольку $\gamma^*(t)$ – решение уравнения (3.5), то в силу определения оператора \mathcal{A} в (3.4), получаем, что справедливо также соотношение

$$\gamma^*(t)\varphi(t) = F(t) - \varphi'(t) - \int_0^l ((a\omega)_x + b\omega)u_x^* dx - \int_0^l c\omega u^* dx. \quad (3.8)$$

Вычитая (3.8) из (3.7), получаем, что

$$\gamma^*(t)(\varphi - \varphi^*) + (\varphi - \varphi^*)' = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

В силу определения $\varphi^*(t)$ в (3.6) и условия (G) имеем

$$\varphi^*(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x)dx = \varphi(0). \quad (3.10)$$

Из (3.9), (3.10) получаем, что $\varphi(t) = \varphi^*(t)$ на $[0, T]$, а следовательно, пара $\{u^*(t, x), \gamma^*(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (ОЗ.1). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия (A)–(G) и (3.1). Положим

$$R_\gamma = \frac{2}{T}, \quad (3.11)$$

и предположим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Phi_0} \left\{ K_f K_\omega + K_\varphi^* + \exp \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(K_{b,a} + \frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} \right) T \right\} \right\} \times \\ & \times \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right] [M_1^2 + 3K_{f,a}]^{1/2} \leq \frac{2}{T}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда оператор \mathcal{A} , определенный формулой (3.4), переводит шар B_{R_γ} из пространства $L_\infty(0, T)$ в себя.

Доказательство. Пусть $\gamma(t) \in B_{R_\gamma}$. Тогда в силу определения $\mathcal{A}(\gamma)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_\infty(0, T)} & \leq \frac{1}{\Phi_0} \left\{ K_f K_\omega + K_\varphi^* + \left[\left(\int_0^l |a\omega'|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^l |a_x \omega|^2 dx \right)^{1/2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\int_0^l |b\omega|^2 dx \right)^{1/2} \right] \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t, \cdot)\|_2 + \left(\int_0^l |c\omega|^2 dx \right)^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_2 \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой (2.5), определением λ_1 в (2.4) и неравенством (1.7), из последнего неравенства получаем, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_\infty(0,T)} &\leq \frac{1}{\Phi_0} \left\{ K_f K_\omega + K_\varphi^* + \exp \left\{ \left(\frac{3}{2} K_{b,a} + \frac{3l^2}{2\pi^2} K_{c,a} + \frac{R_\gamma}{2} \right) T \right\} \right\} \times \\ &\times \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right] [M_1^2 + 3K_{f,a}]^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда в силу определения R_γ в (3.11) и условия (3.12), получаем, что

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_\infty(0,T)} \leq R_\gamma.$$

Лемма 3.2 доказана.

Замечание 3.2. Условие (3.12) заведомо выполняется при малых T .

Лемма 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.2, величина R_γ определена в (3.11). Тогда существует натуральное число k такое, что оператор \mathcal{A}^k (k -я степень оператора \mathcal{A}) является сжимающим на шаре B_{R_γ} .

Доказательство. Положим

$$\lambda_1^* = 2 + 3 \left(K_{b,a} + \frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} \right).$$

Пусть $\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t) \in B_{R_\gamma}$, где R_γ определено в (3.11). Пусть $u^{(i)}(t, x), i = 1, 2$ – решения прямой задачи (1.1)–(1.3) с коэффициентами $\gamma^{(i)}(t)$ в уравнении (1.1) соответственно. Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \sigma(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t)$. Тогда справедливы соотношения

$$v_t - a(t, x)v_{xx} + b(t, x)v_x + c(t, x)v + \gamma^{(1)}(t)v = -\sigma(t)u^{(2)}(t, x), \tag{3.13}$$

$$v(0, x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad v(t, 0) = v(t, l) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.14}$$

Учитывая условия леммы и определение оператора \mathcal{A} , имеем

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}(\gamma^{(1)})(t) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})(t) \right|^2 &\leq \frac{1}{\Phi_0^2} \left[\int_0^l (|(a\omega)_x| + |b\omega|) |v_x| dx + \int_0^l |c\omega| |v| dx \right]^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\Phi_0^2} \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right]^2 \|v_x(t, \cdot)\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Поскольку функция $v(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (3.13), (3.14), а коэффициент $\gamma^{(1)}(t)$ удовлетворяет оценке $\gamma^{(1)}(t) \leq 2/T$ (см. (3.11)), то оценка (2.5), примененная к $v(t, x)$, имеет вид

$$\|v_x(t, \cdot)\|_2^2 \leq 3e^{\lambda_1^* T} \int_Q \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau, x)} |u^{(2)}(\tau, x)|^2 dx d\tau. \tag{3.16}$$

Из (2.5) также вытекает оценка

$$|u^{(2)}(t, x)| \leq M_0 \equiv M_0(T), \quad (t, x) \in Q. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.16), (3.17) в (3.15), получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}(\gamma^{(1)})(t) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})(t) \right|^2 &\leq \frac{3}{\Phi_0^2} e^{\lambda_1^* T} M_0^2(T) \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right]^2 \times \\ &\times \int_0^t \int_0^l \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau, x)} dx d\tau \equiv m_1 \int_0^t \int_0^l \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau, x)} dx d\tau, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где константа $m_1 > 0$ не зависит от t .

Заметим, что из оценки (3.18) следует непрерывность оператора \mathcal{A} на B_{R_γ} .

Используя неравенство Гёльдера и условие (A), находим, что

$$\int_0^t \int_0^l \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau, x)} dx d\tau \leq a_2 l^{(q-1)/q} t^{(q-1)/q} \|\sigma\|_{L_\infty(0, T)}^2,$$

а следовательно, из (3.18) получаем оценку

$$\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(0, t)}^2 \leq m_1 a_2 l^{(q-1)/q} t^{(q-1)/q} \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{L_\infty(0, t)}^2. \quad (3.19)$$

На основании оценки (3.19) по индукции доказывается оценка

$$\|\mathcal{A}^k(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}^k(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(0, t)}^2 \leq m_1^k a_2^k \frac{l^{k(q-1)/q} t^{k(q-1)/q}}{(k!)^{k(q-1)/q}} \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{L_\infty(0, t)}^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а следовательно, справедлива оценка

$$\|\mathcal{A}^k(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}^k(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(0, T)}^2 \leq \frac{(m_1 a_2 l^{(q-1)/q} T^{(q-1)/q})^k}{(k!)^{k(q-1)/q}} \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{L_\infty(0, t)}^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Из (3.20), очевидно, следует, что при достаточно большом k оператор \mathcal{A}^k будет сжимающим на шаре B_{R_γ} . Лемма 3.3 доказана.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (A)–(G), (3.1), (3.12), а R_γ определена в (3.11). Тогда существует решение $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ обратной задачи (ОЗ.1), для него справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{L_\infty(0, T)} \leq R_\gamma \equiv \frac{2}{T}, \quad (3.21)$$

а также оценки (2.5)–(2.9) с $\lambda_1 = 3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} + \frac{2}{T}$. При этом не существует двух различных решений $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ этой задачи, для которых одновременно выполнена оценка (3.21).

Доказательство. В силу лемм 3.2 и 3.3 оператор \mathcal{A} является непрерывным на шаре B_{R_γ} и отображает этот шар в себя. Кроме того, некоторая степень оператора \mathcal{A} является сжимающим оператором на шаре B_{R_γ} . Поэтому в силу обобщенного принципа сжатых отображений (см., например, [24], с. 82) уравнение (3.5) имеет единственное решение $\gamma(t)$, причем оно удовлетворяет оценке (3.21).

Пусть $u(t, x)$ – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с полученным $\gamma(t)$ в уравнении (1.1). Тогда в силу леммы 3.1 пара $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ будет обобщенным решением обратной задачи (ОЗ.1), причем в силу теоремы 2.1 справедливы оценки (2.5)–(2.9) с $\lambda_1 = 3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2} K_{c,a} + \frac{2}{T}$.

Если предположить, что существует два различных решения $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ обратной задачи (ОЗ.1), для которых функции $\gamma^{(1)}(t)$ и $\gamma^{(2)}(t)$ одновременно удовлетворяют оценке (3.21), то обязательно $\gamma^{(1)}(t) \neq \gamma^{(2)}(t)$, поскольку если $\gamma^{(1)}(t) = \gamma^{(2)}(t)$, то и $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ в силу теоремы 2.1. Однако соотношение $\gamma^{(1)}(t) \neq \gamma^{(2)}(t)$ противоречит доказанной выше единственности решения уравнения (3.5) в шаре B_{R_γ} .

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда обратная задача (ОЗ.1) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ этой обратной задачи. Предположим, что

$$|u^{(i)}(t, x)| \leq K_u, (t, x) \in Q, \quad |\gamma^{(i)}(t)| \leq K_\gamma, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2. \quad (3.22)$$

Ниже в доказательстве этой теоремы через C с индексом будем обозначать любые положительные константы, зависящие от T, l , констант, входящих в условия (A)–(F), а также от K_u и K_γ .

Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $\sigma(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t)$. Тогда для пары $\{v, \sigma\}$ справедливы соотношения (3.13), (3.14), а также соотношение

$$\int_0^l v(t, x)\omega(x)dx = 0. \tag{3.23}$$

Умножим (3.13) на $\omega(x)$ и проинтегрируем результат по $[0, l]$. Учитывая соотношения (3.23) и (1.4), после интегрирования по частям получаем, что

$$-\sigma(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_0^l [(a\omega)_x + b\omega]v_x dx + \int_0^l c\omega v dx \right\}. \tag{3.24}$$

Подставляя (3.24) в (3.13), приходим к соотношению

$$v_t - a(t, x)v_{xx} + b(t, x)v_x + c(t, x)v + \gamma^{(1)}(t)v = \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_0^l [(a\omega)_y + b\omega]v_y dy + \int_0^l c\omega v dy \right\} u^{(2)}(t, x). \tag{3.25}$$

Умножим (3.25) на $e^{-\lambda t}v(t, x)$, где $\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже, и проинтегрируем по прямоугольнику Q . После несложных преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\lambda T}}{2} \int_0^l v^2(T, x)dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} v^2 dx dt + \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} a v_x^2 dx dt = & - \int_0^l \int_0^T (e^{-\lambda t/2} \sqrt{a} v_x) \left(e^{-\lambda t/2} \frac{a_x}{\sqrt{a}} v \right) dx dt - \\ & - \int_0^l \int_0^T (e^{-\lambda t/2} \sqrt{a} v_x) \left(e^{-\lambda t/2} \frac{b}{\sqrt{a}} v \right) dx dt - \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} c v^2 dx dt - \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} \gamma^{(1)} v^2 dx dt + \\ & + \int_0^l \frac{1}{\varphi} \left\{ \int_0^l [(a\omega)_y + b\omega]v_y dy \right\} e^{-\lambda t} u^{(2)} v dx dt + \int_0^l \frac{1}{\varphi} \left\{ \int_0^l c\omega v dy \right\} e^{-\lambda t} u^{(2)} v dx dt. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Применяя для оценки первых двух слагаемых в правой части (3.26) неравенство (1.6) при $\varepsilon = 1/2$, и учитывая условия (A), (B), (3.22), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} v^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} a v_x^2 dx dt \leq C_1 \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} v^2 dx dt + C_2 \int_0^l \left\{ \int_0^l (|a_y \omega| + |a\omega'|) |v_y| dy \right\} e^{-\lambda t} |v| dx dt + \\ + C_3 \int_0^l \left\{ \int_0^l (|c\omega| |v|) dy \right\} e^{-\lambda t} |v| dx dt \equiv C_1 \int_0^l \int_0^T e^{-\lambda t} v^2 dx dt + J_1 + J_2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Оценим слагаемые J_1 и J_2 . Используя неравенство (1.5), имеем

$$\begin{aligned} J_1 \leq C_2 \int_0^l \left\{ \int_0^T \left(\int_0^l \frac{|a_y|}{\sqrt{a}} |\omega| \sqrt{a} e^{-\lambda t/2} |v_y(t, y)| dy \right) e^{-\lambda t/2} |v(t, x)| dt \right\} dx + \\ + C_2 \int_0^l \left\{ \int_0^T \left(\int_0^l \sqrt{a} |\omega'| \sqrt{a} e^{-\lambda t/2} |v_y(t, y)| dy \right) e^{-\lambda t/2} |v(t, x)| dt \right\} dx \leq \\ \leq C_4 \int_0^l \int_0^T \left(\int_0^l e^{-\lambda t/2} \sqrt{a} |v_y(t, y)| dy \right) e^{-\lambda t/2} |v(t, x)| dt dx + \\ + C_5 \int_0^l \int_0^T \left(\int_0^l e^{-\lambda t/2} |\omega'| \sqrt{a} |v_y(t, y)| dy \right) e^{-\lambda t/2} |v(t, x)| dt dx \leq \frac{\varepsilon}{2} C_4 \int_0^l \int_0^T \left(\int_0^l e^{-\lambda t/2} \sqrt{a} |v_y(t, y)| dy \right)^2 dt dx + \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\varepsilon} C_4 \int_Q e^{-\lambda t} |v|^2 dxdt + \frac{\varepsilon}{2} C_5 \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^l e^{-\lambda t/2} |\omega' \sqrt{a}| v_y(t, y) | dy \right)^2 dt dx + \frac{1}{2\varepsilon} C_5 \int_Q e^{-\lambda t} |v|^2 dxdt \leq \\
 & \leq \frac{\varepsilon}{2} C_6 \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^l e^{-\lambda t} a v_y^2 dy \right) dt dx + \frac{C_7}{2\varepsilon} \int_Q e^{-\lambda t} |v|^2 dxdt \leq \frac{\varepsilon}{2} C_8 \int_Q e^{-\lambda t} a v_x^2 dxdt + \frac{C_7}{2\varepsilon} \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 J_2 \leq C_9 \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^l e^{-\lambda t/2} |v(t, y)| dy \right) e^{-\lambda t/2} |v(t, x)| dt dx \leq \frac{C_9}{2} \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^l e^{-\lambda t/2} |v(t, y)| dy \right)^2 dt dx + \\
 + \frac{C_9}{2} \int_Q e^{-\lambda t} |v(t, x)|^2 dxdt \leq C_{10} \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dxdt.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Полагая в (3.28) $\varepsilon = \frac{1}{2C_8}$ и подставляя затем оценки (3.28), (3.29) в (3.27), получаем, что

$$\frac{\lambda}{2} \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dxdt + \frac{1}{4} \int_Q e^{-\lambda t} v_x^2 dxdt \leq C_{11} \int_Q e^{-\lambda t} v^2 dxdt. \tag{3.30}$$

Выбирая теперь в (3.30) $\lambda > 2C_{11}$, получаем, что $v(t, x) \equiv 0$ в Q . Но тогда из (3.24) следует, что и $\sigma(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, т.е. решения $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ обратной задачи (ОЗ.1) совпадают. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.3. Теорема единственности 3.2, в отличие от теоремы 3.1, не содержит условий малости типа (3.11), (3.12), т.е. носит глобальный характер.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ОЗ.2)

В данном разделе будем предполагать выполненными условия (A)–(G), (3.1), а также дополнительно условие

$$\varphi'(t) \leq -\varphi^* < 0, \quad t \in [0, T], \quad \varphi^* = \text{const} > 0. \tag{4.1}$$

Для функции $F(t)$ (см. (3.2)) будем предполагать выполненным условие

$$F(t) \geq F_0, \quad F_0 = \text{const} \in (-\infty, +\infty). \tag{4.2}$$

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим оператор \mathcal{A} , заданный по формуле (3.4), однако, в данном разделе будем его рассматривать как оператор, действующий из $L_\infty^+(0, T)$ в $L_\infty(0, T)$.

В соответствии с леммой 3.1 обратная задача (ОЗ.2) эквивалентна операторному уравнению (3.5).

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия (A)–(G), (3.1), (4.1), (4.2), λ_2 определена в (2.23). Предположим, что

$$e^{\lambda_2 T/2} \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right] (M_1^2 + 3K_{f,a})^{1/2} \leq F_0 + \varphi^*. \tag{4.3}$$

Тогда для любой функции $\gamma(t) \in L_\infty^+(0, T)$ имеем $\mathcal{A}(\gamma)(t) \geq 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t) \in L_\infty^+(0, T)$, а $u(t, x) \equiv u(t, x; \gamma)$ – соответствующее решение прямой задачи (1.1)–(1.3). Тогда в силу условий леммы, оценки (2.24) и неравенства (1.7) имеем для любого $t \in [0, T]$, что

$$\begin{aligned}
 \int_0^l [(a\omega)_x + b\omega] u_x dx + \int_0^l c\omega u dx \leq \left[\left(\int_0^l |a\omega|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^l |a_x \omega|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^l |b\omega|^2 dx \right)^{1/2} \right] \|u_x(t, \cdot)\|_2 + \\
 + \left(\int_0^l |c\omega|^2 dx \right)^{1/2} \|u(t, \cdot)\|_2 \leq \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right] e^{\lambda_2 T/2} (M_1^2 + 3K_{f,a})^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

С другой стороны, в силу (4.1), (4.2)

$$F(t) - \varphi'(t) \geq F_0 + \varphi^*. \tag{4.5}$$

Из (4.4), (4.5), определения оператора $\mathcal{A}(\gamma)$ и условия (4.3), очевидно, следует, что $\mathcal{A}(\gamma)(t) \geq 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия (A)–(G), (3.1), константа λ_2 определена в (2.23). Тогда для любой функции $\gamma(t) \in L^+(0, T)$ имеем

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\| \leq \frac{e^{\lambda_2 T/2}}{\Phi_0} \left\{ K_f K_\omega + K_\phi^* + \left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2} (K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi} K_{\omega,c} \right] (M_1^2 + 3K_{f,a})^{1/2} \right\} \equiv R_\gamma^*. \quad (4.6)$$

Доказательство. Оценка (4.6) есть прямое следствие определения оператора \mathcal{A} и оценки (2.24).

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (A)–(G), (3.1), (4.1)–(4.3). Тогда существует решение $\{u(t, x), \gamma(t)\}$ обратной задачи (ОЗ.2) и для него справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{L_\infty(0, T)} \leq R_\gamma^*, \quad (4.7)$$

где R_γ^* определена в (4.6), а также оценки (2.24)–(2.26). При этом не существует двух различных решений $\{u^{(1)}, \gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)}, \gamma^{(2)}\}$ этой задачи, для которых одновременно выполнена оценка (4.7).

Доказательство. В силу лемм 4.1 и 4.2 оператор \mathcal{A} отображает множество $B_{R_\gamma^*}$ в себя. Так же, как в лемме 3.3 доказывается, что оператор \mathcal{A} непрерывен на $B_{R_\gamma^*}$ и некоторая его степень \mathcal{A}^k является сжимающим оператором на множестве $B_{R_\gamma^*}$.

Дальнейшее доказательство теоремы 4.1 дословно повторяет доказательство теоремы 3.1. Оценки (2.24)–(2.26) для функции $u(t, x)$ вытекают из следствия к теореме 2.2.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда обратная задача (ОЗ.2) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Данное утверждение есть прямое следствие теоремы 3.2 из предыдущего раздела.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Обсудим выполнение наложенных в работе условий и приведем примеры конкретных обратных задач, для которых применимы доказанные теоремы.

Условия $a_x^2/a, b^2/a, c^2/a \in L_\infty(Q), f^2/a \in L_1(Q)$ означают подчинение вырождаемости функций a_x, b, c, f вырождаемости старшего коэффициента a , и, очевидно, выполняются для широкого класса функций. В частности, условие $a_x^2/a \in L_\infty(Q)$ заведомо выполняется, если $a(t, x) \equiv a(t)$ не зависит от x .

Таким образом, теоремы единственности 3.2 и 4.2 справедливы для широкого класса рассматриваемых обратных задач.

Как было отмечено в замечании 3.2, условие (3.12) из теоремы 3.1 заведомо выполняется при малых T , поэтому и существование решения при малых T справедливо для широкого класса задач вида (ОЗ.1).

Приведем пример конкретной обратной задачи (ОЗ.1), для которой теорема 3.1 справедлива при произвольных значениях T (и при достаточно больших l).

Пример 5.1. Рассмотрим в Q обратную задачу (ОЗ.1):

$$u_t - t^\beta (x+1)u_{xx} + t^{\nu/2} b_1(t, x)u_x + \gamma(t)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \quad (5.1)$$

$$u(0, x) = x(l-x), \quad x \in [0, l]; \quad (5.2)$$

$$u(t, l) = u(t, 0) = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (5.3)$$

$$\int_0^l u(t, x)x(l-x)dx = \frac{l^5}{30}, \quad t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Здесь $\beta \in (0, 1), \nu \geq \beta, |b_1(t, x)| \leq K_b^*, |f(t, x)| \leq K_f^*$, где константы β, ν, K_b^*, K_f^* не зависят от l и T . Кроме того, имеем $\omega(x) = x(l-x), \varphi(t) = l^5/30$.

Нетрудно проверить, что для задачи (5.1)–(5.4) выполнены условия (A)–(G) и (3.1). Таким образом, для задачи (5.1)–(5.4) справедлива теорема единственности 3.2.

Непосредственными вычислениями получаем, что константы, входящие в условия (A)–(F), (3.1), (3.2), можно выбрать следующими:

$$\begin{aligned} a_1 &= T^\beta(l+1), & K_a^* &= T^\beta, & K_{b,a} &= K_b^{*2}T^{\nu-\beta}, & K_{c,a} &= 0, & K_{f,a} &= K_f^{*2}\frac{T^{1-\beta}}{1-\beta}\ln(l+1), \\ M_1 &= \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, & K_\omega &= \frac{l^2}{4}, & K_\omega^* &= \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, & \varphi_0 &= \frac{l^5}{30}, & \varphi^* &= 0, & K_{\omega,a} &= \frac{T^\beta l^2}{4}(l+1)^{1/2}, \\ & & & & & & & & & & & K_{\omega,b} &= K_b^* \frac{T^{\nu/2} l^2}{4}(l+1)^{1/2}, & K_{\omega,c} &= 0, & K_f &= lK_f^*. \end{aligned}$$

Тогда условие (3.12) для задачи (5.1)–(5.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{30}{l^5} \left\{ \frac{l^3}{4} K_f^* + \exp\left(1 + \frac{3}{2} T^{1+\nu-\beta} K_b^{*2}\right) \left[\frac{T^\beta l^{3/2}}{\sqrt{3}}(l+1) + \frac{l^{5/2}}{4}(l+1)^{1/2}(T^\beta + T^{\nu/2} K_b^*) \right] \right\} \times \\ \times \left[\frac{l^3}{3} + \frac{3\ln(l+1)}{1-\beta} T^{1-\beta} K_f^{*2} \right]^{1/2} \leq \frac{2}{T}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Легко видеть, что условие (5.5) будет выполнено при достаточно больших l (и фиксированном T). Таким образом, в этом случае применима теорема 3.1 и обратная задача (5.1)–(5.4) имеет решение $\{u(t, x), \gamma(t)\}$, причем справедлива оценка $|\gamma(t)| \leq \frac{2}{T}$. Кроме того, как было отмечено выше, данное решение будет единственным в силу теоремы 3.2.

Приведем теперь пример обратной задачи (O3.2), для которой справедливы теоремы 4.1 и 4.2.

Пример 5.2. Рассмотрим в Q обратную задачу (O3.2) для уравнения

$$u_t - t^\beta(x+1)u_{xx} + t^{\nu/2}b_1(t, x)u_x + t^{\delta/2}c_1(t, x)u + \gamma(t)u = f(t, x) \quad (5.6)$$

с краевыми условиями (5.2), (5.3) и условием интегрального наблюдения

$$\int_0^l u(t, x)x(l-x)dx = \frac{(2T-t)l^5}{60T}. \quad (5.7)$$

Здесь $\beta \in (0, 1)$, $\nu \geq \beta$, $\delta \geq \beta$, $|b_1(t, x)| \leq K_b^*$, $|c_1(t, x)| \leq K_c^*$, $|f(t, x)| \leq K_f^*$, где константы $\beta, \nu, \delta, K_b^*, K_c^*, K_f^*$ не зависят от l и T . Кроме того, имеем $\omega(x) = x(l-x)$, $\varphi(t) = \frac{(2T-t)l^5}{60T}$.

Как и в случае задачи (5.1)–(5.4) из примера 5.1, нетрудно проверить, что для задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) выполнены условия (A)–(G) и (3.1). Таким образом, для задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) справедлива теорема единственности 4.2.

Нетрудно проверить, что условия (4.1), (4.2) для рассматриваемой задачи также выполнены.

Снова непосредственными вычислениями получаем, что константы, входящие в условия (A)–(F), (3.1), (3.2), (4.1), (4.2), можно выбрать следующими:

$$\begin{aligned} a_1 &= T^\beta(l+1), & K_a^* &= T^\beta, & K_{b,a} &= K_b^{*2}T^{\nu-\beta}, & K_{c,a} &= K_c^{*2}T^{\delta-\beta}, & K_{f,a} &= K_f^{*2}\frac{T^{1-\beta}}{1-\beta}\ln(l+1), \\ M_1 &= \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, & K_\omega &= \frac{l^2}{4}, & K_\omega^* &= \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, & \varphi_0 &= \frac{l^5}{30}, & \varphi^* &= \frac{l^5}{60T}, & F_0 &= -\frac{l^3}{4}K_f^*, \\ K_{\omega,a} &= \frac{T^\beta l^2}{4}(l+1)^{1/2}, & K_{\omega,b} &= K_b^* \frac{T^{\nu/2} l^2}{4}(l+1)^{1/2}, & K_{\omega,c} &= K_c^* \frac{T^{\delta/2} l^2}{4}(l+1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Тогда условие (4.3) для задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{3}{2} T^{1+\nu-\beta} K_b^{*2} + \frac{3l^2}{2\pi^2} T^{1+\delta-\beta} K_c^{*2}\right) \left[T^\beta \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}(l+1) + \frac{l^{5/2}}{4}(l+1)^{1/2}(T^\beta + T^{\nu/2} K_b^*) + \frac{l^{7/2}}{4\pi}(l+1)^{1/2} T^{\delta/2} K_c^* \right] \times \\ \times \left[\frac{l^3}{3} + \frac{3\ln(l+1)}{1-\beta} T^{1-\beta} K_f^{*2} \right]^{1/2} \leq \frac{l^5}{60T} - \frac{l^3}{4} K_f^*. \end{aligned} \quad (5.8)$$

1. Если $l > 0$ фиксировано, то, очевидно, условие (5.8) выполнено при малых T . В этом случае в силу теоремы 4.1 будет существовать решение задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7).

2. Предположим теперь, что в уравнении (5.6) $c_1(t, x) \equiv 0$ (т.е. уравнение (5.6) совпадает с уравнением (5.1)). Тогда условие (5.8) будет иметь вид

$$\exp\left(\frac{3}{2}T^{1+\nu-\beta}K_b^{*2}\right)\left[T^\beta\frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}(l+1)+\frac{l^{5/2}}{4}(l+1)^{1/2}(T^\beta+T^{\nu/2}K_b^*)\right]\left[\frac{l^3}{3}+\frac{3\ln(1+l)}{1-\beta}T^{1-\beta}K_f^{*2}\right]^{1/2}\leq\frac{l^5}{60T}-\frac{l^3}{4}K_f^*. \quad (5.9)$$

Если фиксировать T , то условие (5.9) будет выполнено, если выбрать l достаточно большим. Таким образом, в этом случае в силу теоремы 4.1 решение обратной задачи также будет существовать.

Как было уже отмечено выше, в обоих рассмотренных случаях решение задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) будет единственным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приленко А.И., Орловский Д.Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики I // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 1. С. 119–129.
2. Приленко А.И., Орловский Д.Г. Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики II // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 4. С. 694–700.
3. Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 1. P. 35–45.
4. Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in Holder classes for some semilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 3. P. 596–606.
5. Камынин В.Л., Саролди М. Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1683–1691.
6. Бухарова Т.И., Камынин В.Л. Обратная задача определения коэффициента поглощения в многомерном уравнении теплопроводности с неограниченными младшими коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1183–1195.
7. Приленко А.И., Соловьев В.В. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. ур-ния. 1987. Т. 23. № 1. С. 136–143.
8. Приленко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
9. Приленко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 3. С. 146–155.
10. Камынин В.Л. О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2015. Т. 98. Вып. 5. С. 710–724.
11. Камынин В.Л. Обратная задача определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с неограниченными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 5. С. 832–841.
12. Prilepko A.I., Kamynin V.L., Kostin A.B. Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2018. V. 26. № 4. P. 523–539.
13. Камынин В.Л. Об обратных задачах для сильно вырождающихся параболических уравнений при условии интегрального наблюдения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2075–2094.
14. Cannarsa P., Martinez P., Vancostenoble J. Global Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2016. V. 239. № 1133. P. 1–207.
15. Bouchouev I., Isakov V. Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets // Inverse Problems. 1999. V. 15. № 3. R. 95–116.
16. Ivanchof M., Saldina N. An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2006. V. 14. № 5. P. 465–480.
17. Cannarsa P., Tort J., Yamamoto M. Determination of source terms in degenerate parabolic equation // Inverse Problems. 2010. V. 26. № 10. P. 105003.
18. Zui-Cha Deng, Liu Yang. An inverse problem of identifying the coefficient of first-order in a degenerate parabolic equation // J. Comp. Appl. Math. 2011. V. 235. P. 4404–4417.
19. Zui-Cha Deng, Liu Yang. An inverse problem of identifying the radiative coefficient in a degenerate parabolic equation // J. Chinese Annals of Mathematics. Ser. B. 2014. V. 35B. № 3. P. 355–382.
20. Deng Z.C., Qian K., Rao X.B., Yang L. An inverse problem of identifying the source coefficient in degenerate heat equation // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. V. 23. № 3. P. 498–517.
21. Huzuk N. Inverse problem of determining the coefficients in degenerate parabolic equation // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. V. 172. P. 1–11.
22. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Труды сем. им. И.Г. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 217–272.
23. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОВОРОТОМ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО АРГУМЕНТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹⁾

© 2021 г. Е. П. Кубышкин^{1,*}, В. А. Куликов^{1,**}

¹ 150000 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ, матем. ф-т, Россия

*e-mail: kubysh.e@yandex.ru

**e-mail: kulikov7677@gmail.com

Поступила в редакцию 13.02.2020 г.

Переработанный вариант 26.09.2020 г.

Принята к публикации 18.11.2020 г.

Изучаются бифуркации автоколебательных решений из однородных состояний равновесия начально-краевой задачи в круге для нелинейного уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента на заданный угол и временным запаздыванием, возникающей в нелинейной оптике. В плоскости основных параметров уравнения построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия, изучена динамика областей устойчивости в зависимости от величины запаздывания. Исследованы механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия, возможные при этом бифуркации пространственно неоднородных автоколебательных решений и их устойчивость, а также динамика таких решений в окрестности границы области устойчивости в плоскости основных параметров уравнения. Библ. 25. Фиг. 9.

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, пространственно неоднородные решения, бифуркация мультистабильности.

DOI: 10.31857/S0044466921030121

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] приведены результаты экспериментального и теоретического исследования образования пространственно неоднородных структур в световых пучках нелинейного оптического генератора со специальным контуром двумерной обратной связи. Такие структуры возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения световой волны. Их возникновение обусловлено нелинейностью системы, которая обеспечивается тонким слоем нелинейной проводящей среды, и контуром двумерной обратной связи с оператором пространственного преобразования световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В [1] также предложена математическая модель рассматриваемой системы, описывающая пространственное и временное изменение фазы электромагнитной волны и представляющая собой начально-краевую задачу с краевыми условиями Неймана для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором преобразования пространственного аргумента. Начально-краевая задача рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения. В [1]–[3] также приведены результаты аналитического и численного интегрирования предложенной математической модели на окружности для оператора поворота пространственного аргумента. Эта начально-краевая задача и различные ее обобщения изучались в достаточно большом количестве работ. Отметим некоторые из них. В большинстве работ начально-краевая задача рассматривается на окружности [4]–[6] и с оператором поворота пространственного аргумента на фиксированный угол. Изучается возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородного периодического решения (бифуркации Андронова-Хопфа), исследуется его устойчивость. В работе [7] указанная краевая задача изучается в предположении малости коэффициента диффузии, где строится асимптотика бегущих волн. В [8] также рассмотрен случай малости коэффициента диффузии. Задача построения бегущих

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-31-90133).

волн сводится к решению аналогичной задачи для некоторой более простой параболической системы, названной квазинормальной формой. При этом реализуется бесконечномерный “критический случай”, в связи с чем остается открытой проблема строгого обоснования предложенного метода. В работе [9] рассматривается возможность бифуркации неоднородных по пространственной переменной периодических решений в начально-краевой задаче с оператором поворота в круге. Показана возможность бифуркации ротационных волн. В [10], [11] начально-краевая задача рассмотрена в многомерной области с оператором преобразования достаточно общего вида. Сформулированы условия на возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородного периодического решения, предложен алгоритм построения такого решения. Модель работы [1] не учитывает фактор временного запаздывания в контуре обратной связи. Учет временного запаздывания рассмотрен в работах [12], [13], где для математической модели работы [1] с запаздывающим аргументом в функционале обратной связи на окружности показана возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородных бегущих волн, и исследуется их устойчивость. Аналогичная задача для кольцевой области рассмотрена в [14].

Настоящая работа посвящена изучению бифуркаций автоколебательных решений из однородных состояний равновесия указанной выше начально-краевой задачи в круге для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента на заданный угол относительно центра круга и временным запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. Изучены динамика однородных состояний равновесия и их устойчивость в зависимости от параметров начально-краевой задачи. В плоскости параметров управления (коэффициента усиления и угла поворота) с использованием метода D -разбиений в его специальной параметризации построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия. Исследована динамика областей устойчивости в зависимости от величины запаздывания и других параметров начально-краевой задачи, изучены возможные механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия. С использованием метода центральных многообразий и теории бифуркаций исследованы возможные бифуркации пространственно неоднородных автоколебательных решений при изменении параметров управления, а также их устойчивость. Изучена динамика таких решений в окрестности границы области устойчивости в плоскости управляющих параметров.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) + K(1 + \gamma \cos(u_\theta(\rho, \phi, t - T))) \quad (2.1)$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s)$, заданной в полярных координатах $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ($R > 0$) и $t \geq 0$, $-T \leq s \leq 0$ ($T > 0$), в котором $\Delta_{\rho\phi}$ – оператор Лапласа в полярных координатах, $u_\theta(\rho, \phi, t) \equiv u(\rho, (\phi + \theta) \bmod(2\pi), t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) – оператор поворота пространственного аргумента, D, K – положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$, в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$, рассматривается начально-краевая задача вида

$$\begin{aligned} u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) пространство начальных условий $H_0(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [-T, 0]), u(\rho, 0, s) = u(\rho, 2\pi, s), u_\phi(\rho, 0, s) = u_\phi(\rho, 2\pi, s), \text{ при каждом } s \text{ } u(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$, где пространство функций $H^2(K_R) \subset W_2^2(K_R)$ и получено замыканием множества функций $\{u(\rho, \phi) : u(\rho, \phi) \in C^2(\bar{K}_R), u_\rho(R, \phi) = 0, u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi), u_\phi(\rho, 0) = u_\phi(\rho, 2\pi)\}$ в метрике пространства функций $W_2^2(K_R)$. В дальнейшем $L_2(K_R)$ – пространство вещественнозначных определенных в K_R функций $u(\rho, \phi)$, для которых $\|u(\rho, \phi)\|_{L_2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{L_2}^{1/2} < \infty$, $(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} = \int_{K_R} \rho u(\rho, \phi)v(\rho, \phi) d\rho d\phi$, здесь и в дальнейшем $W_2^2(K_R) \subset L_2(K_R)$, $W_2^2(K_R) = \{u(\rho, \phi) : \|u(\rho, \phi)\|_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{W_2^2}^{1/2} < \infty$,

$(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{W^2} = (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} + (\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi), \Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi))_{L_2}$, $C(\bar{K}_R)$ и $C^2(\bar{K}_R)$ -пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых в \bar{K}_R функций, для которых определена норма $\|u(\rho, \phi)\|_C = \max_{\rho, \phi} |u(\rho, \phi)|$, $\|u(\rho, \phi)\|_{C^2} = \|u(\rho, \phi)\|_C + \|\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi)\|_C < \infty$.

Фазовым пространством начально-краевой задачи (2.1), (2.2) является пространство $H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } -T \leq s \leq 0, \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([-T, 0])\}$, норму в котором определим как $\|u(\rho, \phi, s)\|_H = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2}$. Областью определения правой части уравнения (2.1) является пространство $H_0(K_R; -T, 0)$. Норму в $H_0(K_R; -T, 0)$ определим как $\|u(\rho, \phi, s)\|_{H_0} = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{W^2}$.

Под решением начально-краевой задачи (2.1), (2.2), определенным при $t > 0$, будем понимать функцию $u(\rho, \phi, t + s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ (при каждом $t > 0$), непрерывно дифференцируемую по t при $t > 0$, обращающую уравнение (2.1) в тождество и удовлетворяющую начальным условиям (2.2).

Решение начально-краевой задачи (2.1), (2.2) может быть построено методом шагов следующим образом. Решение $u(\rho, \phi, t + s)$ начально-краевой задачи (2.1), (2.2) построим последовательно на отрезках $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $t_k = Tk$, $k = 1, 2, \dots, t_0 = 0$. Значения $u(\rho, \phi, t)$ на указанных отрезках обозначим соответственно через $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$. В результате для определения $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$ получим рекуррентную последовательность начально-краевых задач вида

$$u_t^{(k)} + u^{(k)} - D\Delta_{\rho\phi}u^{(k)} = K(1 + \gamma \cos(u_\theta^{(k-1)}(\rho, \phi, t - T))) \equiv f^{(k)}(\rho, \phi, t) (t_{k-1} \leq t \leq t_k), \tag{2.3}$$

$$u_\rho^{(k)}(R, \phi, t) = 0, u^{(k)}(\rho, 0, t) = u^{(k)}(\rho, 2\pi, t), u_\phi^{(k)}(\rho, 0, t) = u_\phi^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \tag{2.4}$$

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t_{k-1}) = u^{(k-1)}(\rho, \phi, t_{k-1}), u^{(1)}(\rho, \phi, 0) = u_0(\rho, \phi, 0), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.5}$$

в которых правая часть уравнений (2.3) и начальные условия (2.5) на каждом шаге вполне определенные функции. Решения (2.3)–(2.5) задаются формулой

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t) = \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1) u^{(k-1)}(\rho_1, \phi_1, t_{k-1}) d\rho_1 d\phi_1 + \int_0^t \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t - \tau, \rho_1, \phi_1) f^{(k)}(\rho_1, \phi_1, \tau) d\rho_1 d\phi_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.6}$$

где $G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1)$ – функция Грина однородной части (при $f^{(k)}(\rho, \phi, t) \equiv 0$) краевой задачи (2.3), (2.4). Из (2.6) также следуют единственность решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2) и его непрерывная зависимость от начальных условий и параметров уравнения, т.е. корректность поставленной начально-краевой задачи, а также нарастание гладкости решения по переменной t при $t \rightarrow \infty$, свойственное решениям уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе изучается динамика однородных состояний равновесия (2.1), (2.2) в зависимости от параметров K, θ, γ, T, D , их устойчивость, а также характер потери устойчивости и бифурцирующие при этом автоколебательные решения.

3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ начально-краевой задачи (2.1), (2.2) определяются как решения уравнения

$$u = K(1 + \gamma \cos(u)). \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) в зависимости от K и γ может иметь несколько решений, в том числе кратные. Исследуем условия возникновения состояний равновесия, их устойчивость и механизмы потери устойчивости в зависимости от параметров уравнения (2.1).

Выберем одно из решений $u_* = u_*(K, \gamma)$ уравнения (3.1) и запишем начально-краевую задачу (2.1), (2.2) в его окрестности, заменив $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$. В результате получим начально-краевую задачу

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T) + b_2u_\theta^2(\rho, \phi, t - T)/2 + bu_\theta^3(\rho, \phi, t - T)/6 + \dots, \quad (3.2)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \quad u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \quad (3.3)$$

$$b = K\gamma \sin(u_*(K, \gamma)), \quad b_2 = -K\gamma \cos(u_*(K, \gamma)), \quad (3.4)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по $u_0(\rho, \phi, t - T)$ более высокий порядок малости.

Рассмотрим линейную часть (3.2), (3.3)

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T), \quad (3.5)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \quad u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (3.6)$$

Определяя решения (3.5), (3.6) вида $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (решения Эйлера), получаем пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi) + bu_\theta(\rho, \phi)e^{-\lambda T}, \quad (3.7)$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$, точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (3.5), (3.6), а соответствующие им собственные функции решения искомого вида. Здесь и в дальнейшем знаком “тильде” будем обозначать комплексное расширение соответствующего функционального пространства, скалярное произведение и норма в котором обобщаются стандартным образом. Представим $u(\rho, \phi)$ в виде

$$u(\rho, \phi) = u_0(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\rho, n\phi)v_{nj}, \quad u_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}, \quad u_j(\rho, n\phi) = \frac{R_{nj}(\rho)e^{in\phi}}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}/RJ_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2} |J_n(\gamma_{nj})|} \quad (n \geq 0), \quad R_{-nj}(\rho) = R_{nj}(\rho), \quad u_j(\rho, 0) \equiv u_j(\rho), \quad (3.8)$$

$$(R_{nj}(\rho), R_{np}(\rho)) = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho) R_{np}(\rho) d\rho = \delta_{jp}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad v_{00}, v_{0j} \in \mathbb{R}, \quad v_{nj} \in \mathbb{C}, \quad v_{-nj} = \bar{v}_{nj},$$

где $J_n(\rho)$ – функции Бесселя I рода n -го порядка, γ_{nj} есть j -й положительный ноль функции $J'_n(\rho)$, $\gamma_{00} = 0$, а δ_{jp} – символ Кронекера. Функции $u_j(\rho, n\phi)$, являясь полной системой собственных функций оператора Лапласа, образуют ортогональный базис в $\tilde{H}^2(K_R)$ и ортонормированный в $\tilde{L}_2(K_R)$. Подставим (3.8) в (3.7). В результате получим последовательность уравнений

$$(\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T})v_{nj} = 0,$$

из которых ненулевые $v_{00}, v_{nj}, n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$, могут быть выбраны лишь при условии

$$P_{nj}(\lambda) \equiv \lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T} = 0. \quad (3.9)$$

Корни уравнений (3.9) и комплексно сопряженные им величины определяют все множество точек спектра пучка операторов (3.7) и отвечают за устойчивость решений (3.5), (3.6).

Построим в пространстве параметров K, θ, T, D, γ области устойчивости решений (3.5), (3.6). Для этого воспользуемся методом D -разбиений [15], в соответствии с которым в уравнениях (3.9) положим $\lambda = i\omega, -\infty < \omega < \infty$, и приравняем нулю вещественную и мнимую части каждого уравнения. В результате получим выражения

$$1 + D\gamma_{nj}^2 + b \cos(n\theta - \omega T) = 0, \quad \omega + b \sin(n\theta - \omega T) = 0, \quad (3.10)$$

которые эквивалентны равенствам

$$b = -(1 + D\gamma_{nj}^2)/\cos(n\theta - \omega T), \quad \text{tg}(\theta - \omega T) = \omega/(1 + D\gamma_{nj}^2). \quad (3.11)$$

Выразив теперь из второго равенства (3.11) $n\theta - \omega T$ и подставив в первое, а также, разрешив его относительно θ , получим последовательность выражений

$$b = b_n(D, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{nj}^2) / \cos(\arctg(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2))), \tag{3.12}$$

$$\theta = \theta_n(D, T, \omega) = (T\omega + \arctg(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k) / n, \tag{3.13}$$

$n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2n, j = 1, 2, \dots, \text{и}$

$$b = b_0(D, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{0j}^2) / \cos(\arctg(\omega / (1 + D\gamma_{0j}^2))), \tag{3.14}$$

$$T = T_0(D, \omega) = \omega^{-1} (\pi k - \arctg(\omega / (1 + D\gamma_{0j}^2))), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.15}$$

Изменяя теперь в (3.12), (3.13) параметр $-\infty < \omega < \infty$ (при фиксированных других параметрах), получаем в области $\{b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ плоскости (b, θ) семейство кривых, на которых пучок операторов (3.7) имеет точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. Это семейство дополнится прямыми $b = \text{const}$, определяемыми выражениями (3.14), (3.15). Здесь при фиксированном T из равенства (3.15) находим значения ω_{*jk} и подставляем в (3.14). В результате получим искомые значения b . Совокупность таких кривых и прямых позволяет выделить в плоскости (b, θ) (при фиксированных других параметрах) области устойчивости решений начально-краевой задачи (3.5), (3.6). Однако нас интересуют области устойчивости состояний равновесия начально-краевой задачи (2.1), (2.2) в пространстве параметров уравнения (2.1). Выберем в качестве основных параметры K и θ и построим области устойчивости состояний равновесия (2.1), (2.2) в плоскости этих параметров, считая другие параметры уравнения (2.1) фиксированными.

Рассмотрим выражения

$$K = K(u_*, \gamma) = u_* / (1 + \gamma \cos(u_*)), \quad b = b(u_*, \gamma) = \gamma u_* \sin(u_*) / (1 + \gamma \cos(u_*)) \tag{3.16}$$

как функции состояния равновесия $u_* > 0$. Заметим, что

$$dK/du_* = (1 + \gamma u_* \sin(u_*) / (1 + \gamma \cos(u_*))) / (1 + \gamma \cos(u_*)) = (1 + b(u_*, \gamma)) / (1 + \gamma \cos(u_*)).$$

Обозначим через $0 < u_{*1}(\gamma) < u_{*2}(\gamma) < \dots < u_{*j}(\gamma) < \dots$ последовательность корней уравнения $b(u_*, \gamma) = -1$ и рассмотрим интервалы $U_j(\gamma) = \{u_* : u_{*j-1}(\gamma) < u_* < u_{*j}(\gamma)\}, j = 1, 2, \dots, u_{*0} = 0$. При $u_* \in U_{2k}(\gamma), k = 1, 2, \dots, b(u_*, \gamma) < -1$. В этом случае пучок операторов (3.7) имеет, как следует из (3.9) при $n = 0$, вещественную положительную точку спектра, которой отвечает собственная функция $u_0(\rho)$, т.е. такие состояния равновесия (2.1), (2.2) всегда неустойчивы, при $u_* \in U_{2k-1}(\gamma), k = 1, 2, \dots, b(u_*, \gamma) > -1$. В этом случае состояния равновесия могут быть как устойчивы, так и неустойчивы, причем неустойчивость может наступить, как следует из первого равенства (3.10), лишь при условии $b(u_*, \gamma) > 1$. В связи с этим в выражениях (3.12)–(3.15) в дальнейшем будем рассматривать лишь нечетные значения k . Этот случай и представляет интерес с точки зрения теории бифуркаций. Отметим, что в точках $u_* = u_{*j}(\gamma)$ начально-краевая задача (2.1), (2.2) имеет кратные состояния равновесия (здесь сливаются и исчезают либо возникают устойчивое и неустойчивое состояния равновесия). Обозначим $K_j(\gamma) = K(u_{*j}(\gamma), \gamma), j = 0, 1, \dots$. На $U_{2k-1}(\gamma), k = 1, 2, \dots$, функция $K(u_*, \gamma)$ монотонно возрастает, а на $U_{2k}(\gamma), k = 1, 2, \dots$, монотонно убывает.

Равенства (3.12) являются четными функциями параметра ω , а (3.13) нечетными функциями параметра ω . При этом (3.12) при нечетных k монотонно возрастают при $\omega \geq 0$. Считая $\omega \geq 0$, из равенства (3.12) выразим

$$\omega = \omega(b) = (1 + D\gamma_{nj}^2) \text{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b)) = \omega(b(u_*, \gamma)) \tag{3.17}$$

и подставим в равенство (3.13), разделив его на два (для $\omega \geq 0$ и $\omega \leq 0$). В результате имеем

$$\theta^\pm = \theta_n^\pm(u_*, D, \gamma) = (T(1 + D\gamma_{nj}^2) \text{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma))) + \arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)) + \pi k) / n, \tag{3.18}$$

$$\theta^- = \theta_n^-(u_*, D, \gamma) = (-T(1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma))) - \arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)) + \pi k)/n, \quad (3.19)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 3, \dots, 2n - 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Изменяя теперь $0 \leq u_* < \infty$, $u_* \in U_{2k-1}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, в (3.16), (3.18), (3.19) при фиксированных значениях T, D, γ, n построим в области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ плоскости (K, θ) кривые, на которых пучок операторов (3.7), построенный для соответствующего состояния равновесия u_* , имеет точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. Кроме этого, при $n = 0$ из (3.14), (3.15) имеем последовательность уравнений

$$T(1 + D\gamma_{0j}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{0j}^2)/b(u_*, \gamma))) = (\pi k - \arccos((1 + D\gamma_{0j}^2)/b(u_*, \gamma))), \quad (3.20)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 3, \dots,$$

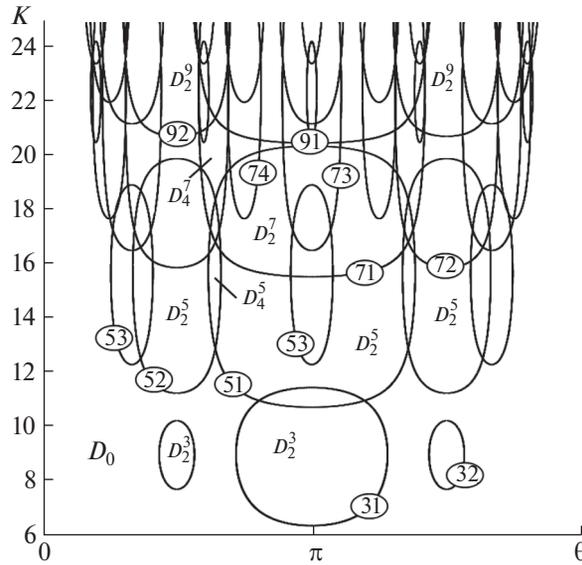
положительные нули которых $u_{*kp} \in U_{2k-1}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, определяют в области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ последовательность прямых $K = K(u_{*kp}, \gamma)$, на которых пучок операторов (3.7), построенный для состояния равновесия u_{*kp} , имеет точки спектра вида $\pm i\omega_*$, $\omega_* > 0$, которым отвечают собственные функции вида $u_j(\rho)$. Для определения направления движения точек спектра (из левой комплексной полуплоскости в правую или наоборот) при пересечении построенных кривых и прямых поступим следующим образом. Пусть (K_*, θ_*) – точка кривой или прямой, которая получена при некотором u_* и которой соответствует точка спектра $i\omega_*$, определяемая согласно (3.16), (3.17). Обозначим через $\lambda(K, \theta)$ точку спектра пучка операторов (3.7), удовлетворяющую условию $\lambda(K_*, \theta_*) = i\omega_*$. Вычислим производные $\lambda_K(K_*, \theta_*)$, $\lambda_\theta(K_*, \theta_*)$, воспользовавшись (3.9), (3.16) и теоремой о неявной функции. Направление движения точки спектра определяют величины

$$\operatorname{Re} \lambda_K(K_*, \theta_*) = (\gamma \sin(u_*) + u_* \gamma \cos(u_*) / (1 + b(u_*, \gamma))) (\cos(n\theta_* - \omega_* T) - b(u_*, \gamma) T) / \Delta, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_\theta(K_*, \theta_*) = nb(u_*, \gamma) \sin(n\theta_* - \omega_* T) / \Delta, \quad \Delta = 1 - 2b(u_*, \gamma) T \cos(n\theta_* - \omega_* T) + b^2(u_*, \gamma) T^2.$$

Таким образом, построим картину D -разбиений области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ и получим границы областей устойчивости различных состояний равновесия начально-краевой задачи (2.1), (2.2), а также изучим характер потери устойчивости соответствующих состояний равновесия. При этом через D_j обозначается область параметров, при которых пучок операторов (3.7) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости.

На фиг. 1–8 для различных значений параметров T, D, γ приведены картины D -разбиений области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Каждая замкнутая кривая, форма которой похожа на эллипс, представляет собой совокупность точек рассматриваемой области, на которых пучок операторов (3.7) имеет точки спектра вида $\pm i\omega_*$. При этом, при изменении параметров K, θ внутрь области, ограниченной замкнутой кривой, указанные точки спектра переходят в правую комплексную полуплоскость, и наоборот. Отметим, что некоторые замкнутые кривые представлены на фигурах лишь своей частью в силу ограничений на K и θ . Каждая замкнутая кривая имеет маркер из двух индексов, первый из которых характеризует область $U_k(\gamma)$, к которой относится исследуемое состояние равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$, второй индекс характеризует номер n , фигурирующий в определяющих замкнутую кривую функциях (3.16), (3.19) и являющийся индексом собственных функций пучка операторов (3.7), соответствующих точкам спектра $\pm i\omega_*$. На приведенных фигурах маркеры проставлены не на всех кривых в силу их плотности. Через D_j^p обозначены области (области неустойчивости), при значении параметров из которых пучок операторов (3.7), построенный по состоянию равновесия $u_* = u_*(K, \gamma) \in U_p(\gamma)$ имеет j точек спектра, принадлежащих правой открытой комплексной полуплоскости. Областью D_0 обозначена область, при значении параметров из которой устойчивы все имеющиеся состояния равновесия $u_* \in U_p(\gamma)$, $k = 1, 3, \dots$. Из фиг. 1, 3, 7 видно, что при $T = 0$ и малых θ (близких к 2π) области D_0 принадлежат точки, имеющие большие значения K . Применительно к начально-краевой задаче (2.1), (2.2) это означает, что при малых θ или близких к 2π бифуркация пространственно неоднородных автоколебательных решений возможна при достаточно больших значениях K . При увеличении T область D_0

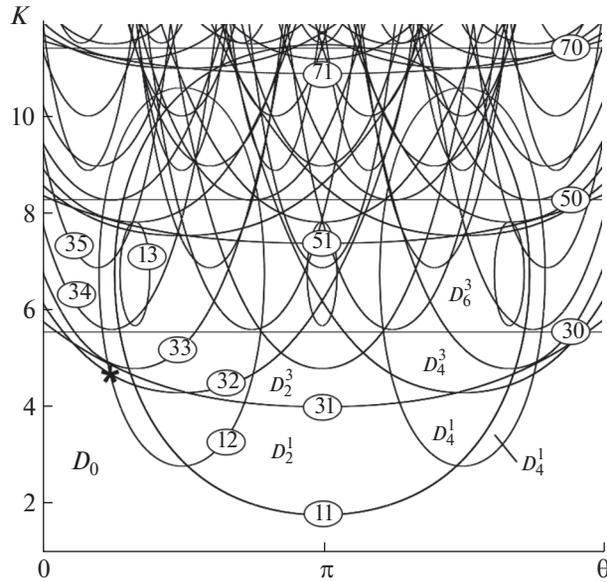


Фиг. 1. $D = 0.1, T = 0, \gamma = 0.25$.

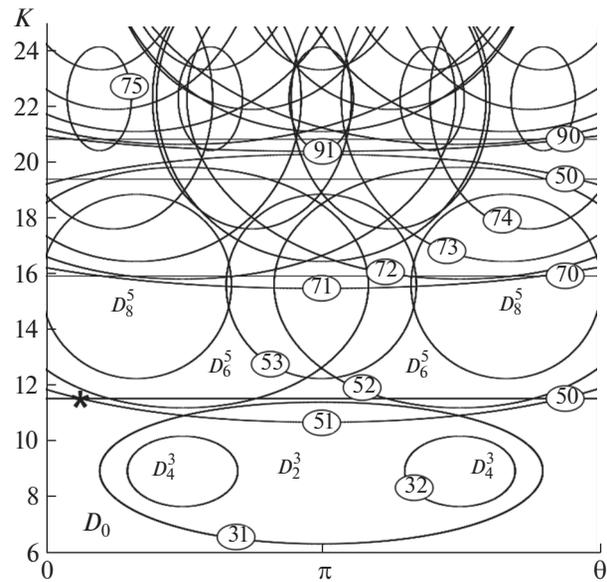
уменьшается, а области неустойчивости D_j^p увеличиваются в размерах. При этом появляются дополнительные области неустойчивости, обусловленные потерей устойчивости однородными состояниями равновесия по собственным функциям $u_j(\rho), j = 0, 1, \dots$, т.е. не зависящим от n , чего нет при $T = 0$. На фигурах эти области определяются горизонтальными прямыми. Эти прямые появляются парами при некоторых значениях K_{*j} , зависящих от T, D, γ . При увеличении T эти прямые расходятся — одна идет вверх, другая вниз, образуя область неустойчивости. При этом сначала потеря устойчивости происходит по собственной функции $u_0(\rho)$, т.е. не зависящей от ρ . Отметим, что при больших значениях T потеря устойчивости однородными состояниями равновесия возможна лишь по собственной функции $u_0(\rho)$. При уменьшении параметра D происходит увеличение количества областей неустойчивости (фиг. 7, 8). Из приведенных фигур видно, что потеря устойчивости однородным состоянием равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ может происходить с одновременным прохождением двух пар комплексно-сопряженных точек спектра пучка операторов (3.7) через мнимую ось комплексной плоскости. Это могут, например, быть точки, отмеченные на фиг. 3 знаком *. При этом одна из собственных функций может быть $u_0(\rho)$. Такая точка отмечена * на фиг. 5. Возможна также одновременная потеря устойчивости двумя состояниями равновесия. Такая точка отмечена * на фиг. 4. При уменьшении D таких состояний равновесия может быть больше.

4. БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (2.1), (2.2)

Изучим возможные бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (2.1), (2.2) из однородных состояний равновесия, обусловленные потерей их устойчивости. Воспользуемся для этого методом инвариантных (центральных) многообразий распределенных динамических систем [16]–[18] и теорией нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия [19]. При фиксированных T, D, γ выберем параметры K_*, θ_* таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости состояния равновесия u_* начально-краевой задачи (2.1), (2.2) и при этом пучок операторов (3.7) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, где $\omega_* > 0$ определяется согласно (3.17). Пусть для определенности точка спектра $\lambda = i\omega_*$ удовлетворяет уравнению (3.9) при некотором $n > 0$. Это означает, что точка K_*, θ_* удовлетворяет уравнению (3.18) и находится на правой ветви замкнутой кривой, определяющей границу области устойчивости,



Фиг. 4. $D = 0.1, T = 0.5, \gamma = 0.75.$



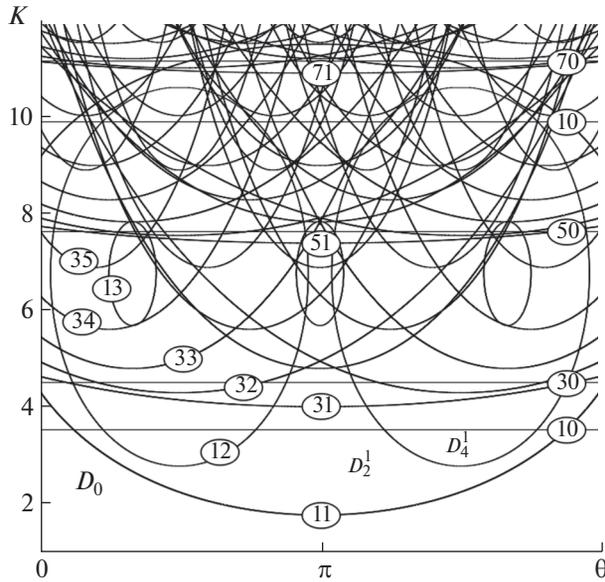
Фиг. 5. $D = 0.1, T = 1, \gamma = 0.25.$

$$b_2 = b_2(\epsilon) = -(K_* + \epsilon)\gamma \cos(u_*(\epsilon)), \tag{4.3}$$

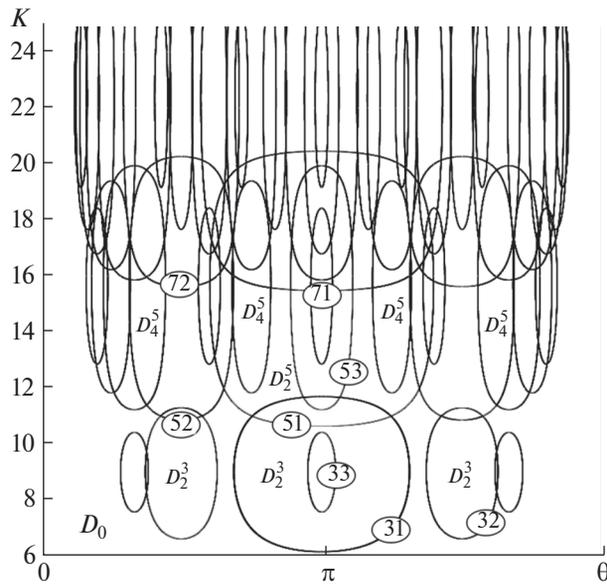
соответственно в дальнейшем будем использовать обозначение пучка операторов (3.7) $P(\lambda; \epsilon)$ и уравнений (3.9) $P_{ij}(\lambda; \epsilon)$.

Обозначим через $\lambda(\epsilon), \bar{\lambda}(\epsilon)$ точки спектра пучка операторов $P(\lambda; \epsilon)$, удовлетворяющие условию $\lambda(0) = i\omega_*$. Им будут соответствовать собственные функции $u_1(\rho, n\phi), \bar{u}_1(\rho, n\phi)$; $\lambda(\epsilon)$ аналитически зависит от ϵ и

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon) &= \chi(\epsilon) + i(\omega_* + \sigma(\epsilon)) = i\omega_* + \epsilon\lambda_1 + \dots = i\omega_* + \epsilon(\chi_1 + i\sigma_1) + \dots, \\ \lambda_1 &= -b_1(u_*, \gamma)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)} / (1 - b(u_*, \gamma)Te^{i(n\theta_* - \omega_*T)}). \end{aligned} \tag{4.4}$$



Фиг. 6. $D = 0.1, T = 1, \gamma = 0.75.$



Фиг. 7. $D = 0.05, T = 0, \gamma = 0.25.$

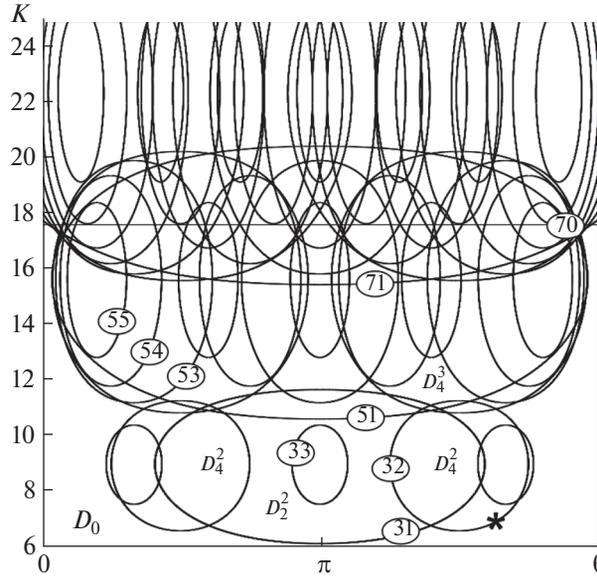
Рассмотрим присоединенную к (3.5), (3.6) (формально-сопряженную [20] с (3.5), (3.6)) начально-краевую задачу

$$v_t(\rho, \phi, t) - v(\rho, \phi, t) = -D\Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi, t) + bv_{-\theta}(\rho, \phi, t + T), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} v_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad v(\rho, 0, t) = v(\rho, 2\pi, t), \quad v_\phi(\rho, 0, t) = v_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ v(\rho, \phi, s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_1(K_R; 0, T) \end{aligned} \tag{4.6}$$

относительно функции $v(\rho, \phi, t + s)$ в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^-$, где $\mathbb{R}^- = \{t : -\infty < t \leq 0\}$, $0 \leq s \leq T$ ($T > 0$), $v_{-\theta}(\rho, \phi, t) \equiv v(\rho, (\phi - \theta) \bmod(2\pi), t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

Фазовым пространством начально-краевой задачи (4.5), (4.6) является пространство $H(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } 0 \leq s \leq T, \|v(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([0, T])\}$, обла-



Фиг. 8. $D = 0.05, T = 0/5, \gamma = 0.25$.

стью определения правой части уравнения (4.5) является пространство $H_0(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [0, T]), v(\rho, 0, s) = v(\rho, 2\pi, s), v_\phi(\rho, 0, s) = v_\phi(\rho, 2\pi, s), \text{ при каждом } s v(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$. Нормы в указанных пространствах вводятся по аналогии с $H(K_R; -T, 0), H_0(K_R; -T, 0)$. Начально-краевая задача (4.5), (4.6) корректно поставлена (и разрешима) в сторону убывания t .

Между элементами пространств $u(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$ и $v(\rho, \phi, s) \in H(K_R; 0, T)$ введем скалярное произведение

$$\langle u(\rho, \phi, s), v(\rho, \phi, s) \rangle = (u(\rho, \phi, 0), v(\rho, \phi, 0))_{L_2} - b \int_{-T}^0 (u_\theta(\rho, \phi, \xi), v(\rho, \phi, \xi + T))_{L_2} d\xi. \tag{4.7}$$

Решения (3.5), (3.6) и (4.5), (4.6) связаны между собой следующим образом. Обозначим через $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$ решения (3.5), (3.6) и (4.5), (4.6) соответственно, определенные при $t > \tau_1, u(\rho, \phi, \tau_1 + s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ и $t < \tau_2, v(\rho, \phi, \tau_2 + s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; 0, T)$, и пусть при этом $\tau_1 < \tau_2$. Тогда при $\tau_1 < t < \tau_2$ справедливо равенство

$$\langle u(\rho, \phi, t + s), v(\rho, \phi, t + s) \rangle = c \quad (c = \text{const}), \tag{4.8}$$

которое легко доказывается дифференцированием по t . В частности, для решений $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$, определенных при $-\infty < t < \infty$, равенства (4.8) выполнены при всех t .

Определяя теперь решения (4.5), (4.6) вида $v(\rho, \phi, t) = v(\rho, \phi)e^{pt}, p \in \mathbb{C}$, получаем характеристический пучок операторов

$$Q(p)v(\rho, \phi) \equiv pv(\rho, \phi) - v(\rho, \phi) + D\Delta_{\rho, \phi}v(\rho, \phi) - bv_{-\theta}(\rho, \phi)e^{pT}, \tag{4.9}$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Точки спектра (4.9) и точки спектра (3.7) могут быть упорядочены таким образом, что будут выполнены соотношения $p_j = -\bar{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots$. Таким образом, пучок операторов $Q(p; \epsilon)$ имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $p(\epsilon) = -\bar{\lambda}(\epsilon), \bar{p}(\epsilon)$, которым отвечают собственные функции $v_1(\rho, n\phi) = R_{n1}(\rho)e^{-in\phi}/(2\pi)^{1/2}, \bar{v}_1(\rho, n\phi)$.

Введем в рассмотрение функции

$$e_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) = u_1(\rho, n\phi)e^{\lambda(\epsilon)s}, \quad \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; -T, 0),$$

$$h_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) = u_1(\rho, n\phi)e^{p(\epsilon)s} / P_{-n_1}^1(-p(\epsilon); \epsilon), \quad \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; 0, T), \quad (4.10)$$

$$\langle e_1(\rho, n\phi, s; \epsilon), h_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \rangle = 1, \quad \langle e_1(\rho, n\phi, s; \epsilon), \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \rangle = 0.$$

Обозначим через $H_+(\epsilon)$ линейную оболочку функций (4.10), т.е. множество функций вида

$$u_+(\rho, n\phi, s; \epsilon) = e_1(\rho, n\phi, s; \epsilon)z + \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon)\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.11)$$

а через $H_-(\epsilon)$ множество функций $u_-(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых $\langle u_-(\rho, \phi, s), h_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \rangle = 0$, $\langle u_-(\rho, \phi), \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \rangle = 0$. Очевидно $H_+(\epsilon) \oplus H_-(\epsilon) = H_0(K_R, -T, 0)$; $H_+(\epsilon)$ определяет двумерное пространство решений $u_+(\rho, \phi, t + s; \epsilon)$ начально-краевой задачи (3.5), (3.6) вида (4.11), в котором $z = z(t)$ – решение уравнения

$$\dot{z} = \lambda(\epsilon)z. \quad (4.12)$$

Обозначим через $S_{u_*}(R) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \|u(\rho, \phi, s) - u_*\|_{H_0} < R\}$ шар радиуса R с центром в $u_* = u_*(K, \gamma)$ пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. В случае $u_* = 0$ будем использовать обозначение $S(R) = S_0(R)$. В дальнейшем $S_{\pm}(R; \epsilon) = S(R) \cap H_{\pm}(\epsilon)$.

Множество $M(\epsilon) \subset S(R)$ будем называть инвариантным многообразием начально-краевой задачи (3.2), (3.3), если для ее решений $u(\rho, \phi, t + s)$ с начальными условиями $u(\rho, \phi, t_0 + s) \in M(\epsilon)$ при некотором t_0 следует, что $u(\rho, \phi, t + s) \in M(\epsilon)$ при всех $t > t_0$ пока $u(\rho, \phi, t + s) \in S(R)$.

Результаты работы [16] и монографий [17], [18] применительно к начально-краевой задаче (3.2), (3.3) позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. *Существуют такие $\epsilon_0 > 0$ и $R > 0$, что при $|\epsilon| < \epsilon_0$ начально-краевая задача (3.2), (3.3) имеет инвариантное многообразие $M(\epsilon) \subset S(R)$, которое может быть представлено в виде*

$$u_- = G(u_+; \epsilon), \quad u_{\pm} \in S_{\pm}(R; \epsilon), \quad (4.13)$$

где нелинейный оператор $G(u_+; \epsilon) (G(0; \epsilon) \equiv 0)$ действует из $S_+(R; \epsilon) \oplus [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ в $S_-(R; \epsilon)$ и гладко зависит от входящих переменных (в смысле дифференцирования по Фреше).

Обозначим через $d(u(\rho, \phi, s); \epsilon)$ расстояние от точки $u(\rho, \phi, s) \in S(R)$ до множества $M(\epsilon)$ в метрике пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $u_0(\rho, \phi, s) \in S(R)$ – начальное условие решения $u(\rho, \phi, t + s; \epsilon)$ начально-краевой задачи (3.2), (3.3) ($u(\rho, \phi, s; \epsilon) = u_0(\rho, \phi, s)$). Тогда $t > 0$*

$$d(u(\rho, \phi, t + s; \epsilon); \epsilon) < Kd(u_0(\rho, \phi, s); \epsilon)e^{-\alpha t}, \quad (4.14)$$

где $K, \alpha > 0$ – некоторые постоянные.

Таким образом, поведение решений начально-краевой задачи (3.2), (3.3) с начальными условиями из $S(R)$ полностью определяется поведением решений на инвариантном многообразии $M(\epsilon)$, которое может быть описано поведением решений некоторой двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Многообразие $M(\epsilon)$, следуя [17], [18], будем называть центральным многообразием начально-краевой задачи (3.2), (3.3).

На основании представления (4.11) оператор $G(u_+; \epsilon)$ будем рассматривать как оператор $G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \epsilon)$ ($G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \epsilon) \equiv G(\rho, n\phi + 2\pi, s, z, \bar{z}; \epsilon)$, $G(\rho, n\phi, s, 0, 0; \epsilon) \equiv 0$), действующий из $\mathbb{C}^2 \oplus [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ в $S_+(R)$ и гладко зависящий от входящих переменных. С учетом этого и (4.12) представим оператор $G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \epsilon)$ и систему дифференциальных уравнений траекторий на $M(\epsilon)$ в виде разложений

$$G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \epsilon) = e_1(\rho, n\phi, s; \epsilon)z + \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon)\bar{z} + v_{20}(\cdot)z^2 + v_{11}(\cdot)z\bar{z} + v_{02}(\cdot)\bar{z}^2 + v_{30}(\cdot)z^3 + v_{21}(\cdot)z^2\bar{z} + v_{12}(\cdot)z\bar{z}^2 + v_{03}(\cdot)\bar{z}^3 + g(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \epsilon), \quad (4.15)$$

$$\dot{z} = \lambda(\epsilon)z + d(\epsilon)z^2\bar{z} + Z(z, \bar{z}; \epsilon) \equiv Z^*(z, \bar{z}; \epsilon), \quad (4.16)$$

где $v_{kj}(\cdot) = v_{kj}(\rho, n\phi, s; \epsilon)$, $v_{jk} = \bar{v}_{kj}(\cdot)$, $\|g(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \epsilon)\|_{H_1} = o(|z|^3)$, $|Z(z, \bar{z}; \epsilon)| = o(|z|^3)$. Система (4.16) представлена в нормализованном до кубических слагаемых виде [16].

Отметим следующее. Пусть $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ – решение начально-краевой задачи (3.2), (3.3). Продолжим его периодически по ϕ на \mathbb{R} . Функция $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon)$, где c – произвольное вещественное число, также является решением (3.2), (3.3), в чем легко убедиться непосредственно, обозначив $\phi_1 = \phi + c$ и с учетом равенства $\Delta_{\rho, \phi} u^* = \Delta_{\rho, \phi_1} u^*$. При этом, если $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon) \in M(\varepsilon)$, то $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon) \in M(\varepsilon)$, так как согласно (3.8), (4.10), (4.11) $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon) \in H_+(\varepsilon)$, где $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ – проекция $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ на $H_+(\varepsilon)$ по направлению $H_-(\varepsilon)$. Следствием этого являются справедливые для любого вещественного c тождества

$$g(\rho, n(\phi + c), s, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv g(\rho, n\phi, s, ze^{inc}, \bar{z}e^{-inc}; \varepsilon), \quad Z(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv zZ_1(z, \bar{z}; \varepsilon),$$

$$Z_1(ze^{inc}, \bar{z}e^{-inc}; \varepsilon) \equiv Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon). \tag{4.17}$$

Для построения центрального многообразия и системы дифференциальных уравнений траекторий на нем воспользуемся подходом, используемым в работах [21], [22]. Отметим, что близкая к указанному подходу схема построения уравнений траекторий на центральном многообразии для дифференциально-разностных уравнений приведена в [18]. В соответствии со сказанным перейдем от (3.2), (3.3) к эквивалентной начально-краевой задаче в области $\bar{K}_R \times [-T, 0] \times \mathbb{R}^+$, положив $w(\rho, \phi, s, t) = u(\rho, \phi, t + s)$,

$$w_t(\rho, \phi, s, t) = w_s(\rho, \phi, s, t),$$

$$w_s(\rho, \phi, 0, t) = -w(\rho, \phi, 0, t) + D\Delta_{\rho\phi} w(\rho, \phi, 0, t) - b(\varepsilon)w_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, t) +$$

$$+ b_2(\varepsilon)w_{\theta_*}^2(\rho, \phi, -T, t) + b(\varepsilon)w_{\theta_*}^3(\rho, \phi, -T, t)/6 + \dots, \tag{4.18}$$

$$w_\rho(R, \phi, s, t) = 0, \quad w(\rho, 0, s, t) = w(\rho, 2\pi, s, t), \quad w_\phi(\rho, 0, s, t) = w_\phi(\rho, 2\pi, s, t),$$

$$w(\rho, \phi, s, 0) = w_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0). \tag{4.19}$$

Условие принадлежности траекторий (4.16) краевой задаче (4.18), (4.19) в силу многообразия (4.15) определяет тождества

$$\frac{dG(\cdot)}{dt} \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial z} Z^*(z, \bar{z}; \varepsilon) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \bar{z}} \bar{Z}^*(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial s}, \tag{4.20}$$

$$G_s(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv -G(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi} G(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) - b(\varepsilon)G_{\theta_*}(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon) +$$

$$+ b_2(\varepsilon)G_{\theta_*}(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon)^2/2 + b(\varepsilon)G_{\theta_*}(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon)^3/6 + \dots, \tag{4.21}$$

для определения коэффициентов разложений (4.15), (4.16). Приравнивая в (4.20), (4.21) коэффициенты при одинаковых степенях z, \bar{z} получаем рекуррентную последовательность краевых задач для определения входящих в (4.15), (4.16) функций $v_{jk}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; -T, 0)$ и $d(\varepsilon)$, гладко зависящих от ε . При первых степенях равенства выполнены в силу (4.11), (4.12). Приравняв коэффициенты при z^2 , получим для определения $v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$2\lambda(\varepsilon)v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{20s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad v_{20s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) +$$

$$+ D\Delta_{\rho\phi} v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{20\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T} R_{n1}^2(\rho)e^{i2n\phi}/(4\pi), \tag{4.22}$$

которая имеет единственное решение

$$v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = w_{20}(\rho; \varepsilon)e^{i2n\phi + 2\lambda(\varepsilon)s}/(2\pi), \quad w_{20}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\varepsilon)R_{2nj}(\rho),$$

$$p_{2nj}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T} (R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho))/(2\lambda(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{2nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T})/2.$$

Аналогично для определения $v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ имеем краевую задачу

$$(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{11s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad v_{11s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) +$$

$$+ D\Delta_{\rho\phi} v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{11\theta_*}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T} R_{n1}^2(\rho)/(2\pi), \tag{4.23}$$

единственное решение которой имеет вид

$$v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \equiv w_{11}(\rho; \varepsilon)e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s} / (2\pi)w_{11}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\varepsilon)R_{0j}(\rho),$$

$$p_{0j}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} (R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}).$$

С учетом равенства $v_{02}(\rho, n\phi; \varepsilon) = \bar{v}_{20}(\rho, n\phi; \varepsilon)$, приравняем теперь в (4.20), (4.21) коэффициенты при z^3 . В результате получим для определения $v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$3\lambda(\varepsilon)v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{30s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad v_{30s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{30\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + (b_2(\varepsilon)w_{20}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/6)e^{i3n\theta_*-3\lambda(\varepsilon)T} e^{i3n\phi} / (2\pi)^{3/2}, \quad (4.24)$$

которая имеет единственное решение

$$v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = w_{30}(\rho; \varepsilon)e^{i3n\phi+3\lambda(\varepsilon)s} / (2\pi)^{3/2}, \quad w_{30}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{3nj}(\varepsilon)R_{3nj}(\rho),$$

$$p_{3nj}(\varepsilon) = e^{i3n\theta_*-3\lambda(\varepsilon)T} (b_2(\varepsilon)w_{20}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/6, R_{3nj}(\rho)) / (3\lambda(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{3nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i3n\theta_*-3\lambda(\varepsilon)T}).$$

Приравняв теперь в (4.20), (4.21) коэффициенты при $z^2\bar{z}$, получим краевую задачу вида

$$e_1(\rho, n\phi, s)d(\varepsilon) + (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{21}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{21s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad (4.25)$$

$$v_{21s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{21}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{21}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{21\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} e^{in\phi} / (2\pi)^{3/2}. \quad (4.26)$$

При $d(\varepsilon) \equiv 0$ краевая задача (4.25), (4.26) не разрешима в точке $\varepsilon = 0$. Разрешимости добиваемся выбором $d(\varepsilon)$. Общее решение уравнения (4.25) имеет вид

$$v_{21}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = e^{(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s} (w_{21}(\rho)e^{in\phi} / (2\pi)^{3/2} + d(\varepsilon) \int_0^s e^{(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s_1} e_{n1}(\rho, \phi, s_1) ds_1), \quad (4.27)$$

где $w_{21}(\rho)e^{in\phi} / (2\pi)^{3/2} \in \tilde{H}_1(K_R)$ произвольная функция. Подставив (4.27) в (4.26), получим

$$L(\varepsilon)w_{21} \equiv (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))w_{21} + w_{21} - D \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw_{21}}{d\rho} \right) + \frac{n^2}{\rho^2} w_{21} - b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} w_{21} = f_{21}(\rho; \varepsilon) \equiv -R_{n1}(\rho)(1 + b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} (1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)))d(\varepsilon)2\pi + (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}. \quad (4.28)$$

Краевая задача (4.28) разрешима не всегда, так как $L(0)R_{n1}(\rho) = 0$, а также $L^*(0)R_{n1}(\rho) = 0$, где $L^*(0)$ – сопряженный с $L(0)$ в смысле скалярного произведения (3.8) оператор. Необходимым и достаточным условием разрешимости является равенство $(f_{21}(\rho; \varepsilon), R_{n1}(\rho)) = 0$, из которого находим

$$d(\varepsilon) = a(\varepsilon) + ic(\varepsilon) = e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} ((b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2, R_{n1}(\rho)) / (1 + b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} (1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)))) / (2\pi) \quad (4.29)$$

и решение

$$w_{21}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=2}^{\infty} p_{nj}(\varepsilon)R_{nj}(\rho), \quad p_{nj}(\varepsilon) = ((b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}, R_{nj}(\rho)) / (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{nj}^2 + b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}),$$

которое определяется однозначно и удовлетворяет условию $(w_{21}(\rho; \varepsilon), R_{n1}(\rho)) = 0$.

Проанализируем поведение решений уравнения (4.16). Для выбранной точки (K_*, θ_*) значение $\pi/n < \theta_* < 3\pi/(2n)$. Поэтому $\cos(n\theta_*) < 0$. Знак $b_1(u_*, \gamma)$ в (4.5), (4.4) определяется знаком про-

изводной $b_{u_*}(u_*, \gamma)$. Поэтому $b_1(u_*, \gamma) > 0$ на нижней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости решений (3.5), (3.6) (области D_0), $b_1(u_*, \gamma) < 0$ на верхней части правой ветви замкнутой кривой границы области D_0 . Аналогичный знак имеет величина χ_1 в (4.4). Численный анализ, выполненный для различных значений параметров D, T, γ , показал, что в точках K_*, θ_* границы области устойчивости решений (3.5), (3.6) $a(0) < 0$. Поэтому при прохождении нижней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости в сторону увеличения параметра $K(\varepsilon > 0)$ в уравнении (4.16) происходит рождение устойчивого периодического решения (прямая бифуркация Андронова-Хопфа). Положим в (4.16) $z = re^{i\tau}$. В результате с учетом (4.17) будем иметь систему уравнений

$$\dot{r} = r(\chi(\varepsilon) + a(\varepsilon)r^2 + R(r^2; \varepsilon)), \quad \dot{\tau} = \omega_* + \sigma(\varepsilon) + c(\varepsilon)r^2 + T(r^2; \varepsilon), \tag{4.30}$$

где $Z_1(re^{i\tau}, re^{-i\tau}; \varepsilon) \equiv Z_1(r, r; \varepsilon) \equiv Z_1(r^2; \varepsilon) \equiv R(r^2; \varepsilon) + iT(r^2; \varepsilon)$, $|Z_1(r^2; \varepsilon)| = a(r^2) -$ гладкие по r^2 и ε функции. Из первого уравнения (4.30) находим асимптотически устойчивое состояние равновесия $r^2(\varepsilon) = r_*^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ($r_*^2 = -\chi_1/a(0)$) и подставляем во второе уравнение. В результате имеем асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение уравнения (4.16)

$$z_*(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} r_* (1 + O(\varepsilon)) e^{i\tau}, \quad \dot{\tau} = \omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon) = \omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon^2) \quad (\omega_{*1} = \sigma_1 + c(0)r_*^2) \tag{4.31}$$

периода $2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$.

На верхней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости бифуркация рождения устойчивого периодического решения происходит при уменьшении параметра $K(\varepsilon < 0)$, т.е. при переходе из области неустойчивости в область устойчивости (при увеличении K происходит “влипание” устойчивого периодического решения в неустойчивое состояние равновесия (обратная бифуркация Андронова-Хопфа). Аналогичная ситуация наблюдается и при прохождении левой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости решений (3.5), (3.6). В этом случае уравнению (3.9) при выбранных K_*, θ_* , n удовлетворяет корень $\lambda = -i\omega_*$, $\omega_* > 0$.

Подставив (4.31) в (4.15), получим периодическое решение $w_*(\rho, n\phi, s, \tau; \varepsilon^{1/2})$ начально-краевой задачи (4.18), (4.19), которое с учетом (4.17) может быть записано в виде $w_*(\rho, n\phi + \tau, s; \varepsilon^{1/2})$, а согласно (4.18) в виде $u_*(\rho, n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s); \varepsilon^{1/2})$. Покажем, что это решение может быть представлено в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$. Выпишем в явном виде с учетом (4.15), (4.18), (4.31) коэффициенты разложения $u_*(\cdot)$ при $\varepsilon^{1/2}$ и ε . В результате получим

$$u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2} r_* R_{n1}(\rho)(e^{i\psi} + e^{-i\psi})/(2\pi)^{1/2} + \varepsilon r_*^2 (w_{11}(\rho; 0) + w_{21}(\rho; 0)e^{i2\psi} + \bar{w}_{21}(\rho; 0)e^{-i2\psi})/(2\pi) + \varepsilon^{3/2} w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}), \quad \psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1})(t + s). \tag{4.32}$$

Введем в рассмотрение пространство $H_{an}(K_R) \subset H^2(K_R)$ вещественных аналитических функций, состоящее из таких бесконечно дифференцируемых функций $u(\rho, \psi)$, $\partial^k u(\rho, 0)/\partial \psi^k = \partial^k u(\rho, 2\pi)/\partial \psi^k$, $k = 0, 1, \dots$, для которых конечна норма

$$\|u(\rho, \psi)\|_{H_{an}} = \sup_{k=1,2,\dots} \left(\|u(\rho, \psi)\|_C, \left(1/(k!) \left\| \partial^k u(\rho, \psi) / \partial \rho^{k_1} \partial \psi^{k_2} \right\|_C \right)^{1/k} \right) < \infty.$$

Очевидно, что $H_{an}(K_R)$ – банахово пространство. Продолжим функции $u(\rho, \psi)$ по переменной ψ на \mathbb{R} 2π -периодически. Соответствующее пространство 2π -периодических по ψ функций $u(\rho, \psi)$ обозначим $H_{an}(K_R^*)$.

В (4.32) обозначим $\rho_* = \rho_1$, $\omega_{*1} = \omega_1$ и считая $w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = w(\rho, s) \in H_{an}(K_R^*)$ искомой функцией, а ρ_1, ω_1 параметрами, подставим (4.32) в (3.2). Слагаемые при степенях $\varepsilon^{1/2}$ и ε сократятся в

силу выбора функций $w_{jk}(\rho; \varepsilon)$. Сократив полученное равенство на $\varepsilon^{3/2}$, получим для определения $w(\rho, s)$ следующее операторное уравнение в $H_{an}(K_R^*)$:

$$\begin{aligned} Bw \equiv w_\psi(\rho, \psi)\omega_* + w - D\Delta_{\rho, \psi} w(\rho, \psi) + b(0)w(\rho, \psi + n\theta - \omega_* T) &= \Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \varepsilon^{1/2}) \equiv \\ &\equiv f_1(\rho)e^{i\psi} + \bar{f}_1(\rho)e^{-i\psi} + f_3(\rho)e^{i3\psi} + \bar{f}_3(\rho)e^{-i3\psi} + \mu r_1 F(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu), \\ f_1(\rho) &= -((1 - Tb(0)e^{i(n\theta_* - \omega_* T)})i\omega_1 + b_1(u_*, \gamma)e^{i(n\theta_* - \omega_* T)} r_1 R_{n1}(\rho)/(2\pi)^{1/2} + \\ &+ r_1^3 (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; 0) + w_{11}(\rho; 0))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{i(n\theta_* - \omega_* T)}/(2\pi)^{3/2}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

где $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $f_3(\rho)$, $f_{3p}(R) = 0$ – аналитическая функция ρ , $F(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu) : H_{an}(K_R^*) \rightarrow H_{an}(K_R^*)$ – нелинейный ограниченный аналитический по w и μ ($|\mu| < \mu_0$) оператор (определение см., например, в [23]).

Функции $w_1(\rho, \psi) = R_{n1}(\rho)e^{i\psi}/(2\pi)^{1/2}$, $w_{-1}(\rho, \psi) = R_{n1}(\rho)e^{-i\psi}/(2\pi)^{1/2}$ и только они (с точностью до их линейной комбинации) удовлетворяют уравнению $Bw_j(\rho, \psi) = 0$, $j = -1, 1$, а также уравнению $B^*w_j(\rho, s) = 0$, $j = -1, 1$, где $B^*w \equiv -w_\psi\omega_* + w - D\Delta_{\rho, \psi} w + b(0)w(\rho, \psi - n\theta + \omega T)$ сопряженный с B оператор: $(Bw_2, w_3)_{L_2} = (w_2, B^*w_3)_{L_2}$, $w_2, w_3 \in H_{an}(K_R^*)$. В связи с этим операторное уравнение $Bw = G(\rho, \psi)$, $G(\rho, \psi) \in H_{an}(K_R^*)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $(G(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0$, $j = -1, 1$. Решение, удовлетворяющее условию $(w(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0$ $j = -1, 1$, будет единственным и будет определяться в виде $w(\rho, \psi) = B^{-1}G(\rho, \psi)$. При этом обратный оператор B^{-1} будет вполне непрерывным. Условия разрешимости операторного уравнения (4.33)

$$(\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0, \quad j = -1, 1, \tag{4.34}$$

однозначно определяют аналитические по $w \in H_{an}(K_R^*)$ и μ ($|\mu| < \mu_0$) нелинейные функционалы

$$\rho_1(w; \mu) = \rho_* + \mu\rho_{*1}(w(\rho, \psi); \mu), \omega_1(w; \mu) = \omega_{*1} + \mu\omega_{*2}(w(\rho, \psi); \mu). \tag{4.35}$$

Подставим (4.35) в правую часть уравнения (4.33). В результате будем иметь удовлетворяющий условиям (4.35) нелинейный ограниченный аналитический по $w \in H_{an}(K_R^*)$ и μ ($|\mu| < \mu_0$) оператор $\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu)$, $\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); 0) \equiv \Phi_0(\rho, \psi)$. Это позволяет записать операторное уравнение (4.33) в виде

$$w(\rho, \psi) = B^{-1}\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu) \quad w(\rho, \psi) \in H_{an}(K_R^*) \quad (w(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0, \quad j = -1, 1. \tag{4.36}$$

Осталось применить к (4.33) теорему о неявной функции для нелинейных уравнений в банаховых пространствах, доказательство которой см., например, в [23]. Полученное решение $w(\rho, \psi; \mu)$ будет аналитической функцией при $|\mu| < \mu_0$. Подставив $w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$ в (4.32), получим периодическое решение $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$, которое представлено в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$

$$\begin{aligned} u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) &= \varepsilon^{1/2}u_1(\rho, \psi) + \varepsilon u_2(\rho, \psi) + \varepsilon^{3/2}u_3(\rho, \psi) + \dots, \\ \psi &= n\varphi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + \varepsilon^2\omega_{*2} + \dots)(t + s), \quad u_1(\rho, \psi) = (2/\pi)^{1/2}r_*R_{n1}(\rho)\cos(\psi). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Функции $u_j(\rho, \psi)$ и величины ω_{*j} , входящие в (4.37), могут быть получены до любого порядка непосредственно. Для этого в (4.37) необходимо заменить $r_* \rightarrow r_* + \varepsilon r_{*1} + \varepsilon^2 r_{*2} + \dots$ и подставить в начально-краевую задачу (3.2), (3.3). Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, получаем рекуррентную последовательность операторных уравнений $Bu_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi)$, где $G_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi, u_1(\rho, \psi), \dots, u_{j-1}(\rho, \psi))$ при $j = 2k$ и $G_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi, u_1(\rho, \psi), \dots, u_{j-1}(\rho, \psi), r_{*k}, \omega_{*k})$ при $j = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$. При $j = 2k$ операторные уравнения однозначно разрешимы, при $j = 2k + 1$ условия разрешимости $(G_j(\rho, \psi), w_p(\rho, \psi))_{L_2} = 0$, $p = -1, 1$, однозначно определяют r_{*k} , ω_{*k} , а решение, удовлетворяющее условиям $(u_j(\rho, \psi), w_p(\rho, s))_{L_2} = 0$, $p = -1, 1$, определяется однозначно. При этом $u_{2k}(\rho, \psi)$ содержат лишь четные гармоники по ψ до порядка $2k$ включительно, а $u_{2k+1}(\rho, \psi)$ – лишь нечетные гармоники по ψ до порядка $2k + 1$ включительно.

Решение вида (4.37) представляет собой ротационную волну, вращающуюся по часовой стрелке.

Если точка K_* , θ_* будет находиться на границе области D_0 , соответствующей левой ветви замкнутой кривой, имеющей минимум в точке $\theta = \pi/n$, и при этом пучок операторов (3.7) имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, $\omega_* > 0$, то все рассуждения почти дословно повторяются. В этом случае начально-краевая задача (3.2), (3.3) имеет при $\varepsilon > 0$ в окрестности нулевого состояния равновесия периодическое решение вида (4.37), в котором $\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$, т.е. это решение представляет собой ротационную волну, вращающуюся против часовой стрелки.

Пусть теперь $\theta_* = \pi/n$. В этом случае пучок операторов (3.7) имеет двухкратную нулевую точку спектра, которой отвечают две собственные функции $u_{n1}(\rho, n\phi)$, $\bar{u}_{n1}(\rho, n\phi)$. В этом случае система уравнений (4.16) траекторий на центральном многообразии строится аналогично, при этом имеем, в чем легко убедиться непосредственно с учетом (4.17), $\text{Im } \lambda(\varepsilon) = 0$, $\text{Im } d(\varepsilon) = 0$, $\text{Im } Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon) = 0$. В результате, перейдя в (4.16) к полярным координатам $z = re^{it}$, имеем систему уравнений

$$\dot{r} = (\chi(\varepsilon) + a(\varepsilon)r^2 + R(\rho^2; \varepsilon))r, \quad \dot{t} = 0(R(\rho^2; \varepsilon) \equiv Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon)), \tag{4.38}$$

которая имеет семейство устойчивых состояний равновесия $r(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} r_*(1 + O(\varepsilon))$, $\tau = c$, где c — произвольная постоянная, $\rho_* = (-\chi_1/a(0))^{1/2}$. Этому семейству состояний равновесия в начально-краевой задаче (3.2), (3.3) соответствует однопараметрическое семейство устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия, определяемых формулой (4.37), в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t + s) \equiv \text{const}$.

Таким образом, при изменении θ_* вдоль границы области D_0 при $K = K_* + \varepsilon$ и проходя точку $\theta_* = \pi/n$, в окрестности состояния равновесия $u_* = u_*(K_*(\theta), \gamma)$ устойчивая ротационная волна (пространственно неоднородное периодическое решение периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$) меняет направление вращения, проходя через однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия. При этом период периодического решения $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \pi/n$.

Сказанное сформулируем окончательно в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть при выбранных D , T , γ параметры K_* , θ_* принадлежат границе области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ и при этом уравнение (3.9) имеет решение $\lambda = i\omega_*(-i\omega_*)$, $\omega_* > 0$ при некотором $n > 0$, пусть также $\chi_1 > 0$ и $a(0) < 0$. Тогда существуют такие ε_0 , $R > 0$, что при $K = K_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в шаре $S_{u_*}(R)$ начально-краевая задача (2.1), (2.2) имеет пространственно неоднородное периодическое решение $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) \in H_{an}(K_R)$, $\psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$ ($\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$), периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$ вида (4.37). Все остальные решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2) с начальными условиями из $S_{u_*}(R)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к этому периодическому решению в норме $H_0(K_R; -T, 0)$. Это решение является ротационной волной, вращающейся по часовой стрелке (против часовой стрелки). Если при этом $\theta_* = \pi/n$, то в шаре $S_{u_*}(R)$ начально-краевая задача (2.1), (2.2) имеет однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия, задаваемых формулой (4.37), в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t + s) \equiv \text{const}$. При прохождении параметром θ_* точки π/n период периодического решения (4.37) — $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$, и ротационная волна меняет направление вращения.

Рассмотрим теперь случай, когда точка K_* , θ_* границы области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ (2.1), (2.2) является точкой пересечения замкнутых кривых, определяющих границу области D_0 и соответствующих различным значениям n . Это могут быть, например, точки, отмеченные * на фиг. 3. В этом случае пучок операторов (3.7) имеет две пары комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_{*j}$, $\omega_{*j} > 0$, $j = 1, 2$, которым отвечают собственные функции

$e_{n_j}(\rho, \varphi), \bar{e}_{n_j}(\rho, \varphi), j = 1, 2$, возможен также случай, когда одна из пар комплексно сопряженных точек спектра превращается в двухкратную нулевую точку. При этом n_1 и n_2 всегда связаны соотношением $n_1 = n, n_2 = n + 1$, а уравнению (3.9) может удовлетворять как $i\omega_{*j}$, так и $-i\omega_{*j}$. Отметим также, что между ω_{*1} и ω_{*2} невозможны резонансные соотношения $\omega_{*1}/\omega_{*2} = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$. Это несложно показать, предположив противное и получив противоречие из равенства выражений (3.18), (3.19) для разных n . Поэтому дальнейший анализ будет проводиться по “нерезонансной” схеме.

Рассмотрим сначала случай двух пар комплексно сопряженных точек спектра пучок операторов (3.7). При этом для определенности считаем, что уравнению (3.9) при n и $n + 1$ удовлетворяют соответственно $i\omega_{*1}$ и $i\omega_{*2}$ и $\omega_{*j} > 0, j = 1, 2$. Этому условию удовлетворяет, например, точка, отмеченная на фиг. 3 и имеющая большую координату θ . Положим $K = K_* + \varepsilon_1, \theta = \theta_* + \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малые параметры, в дальнейшем обозначим $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Из (3.9) находим

$$\begin{aligned} \lambda_j(\bar{\varepsilon}) &= \chi_j(\bar{\varepsilon}) + i(\omega_{*j} + \sigma_j(\bar{\varepsilon})) = i\omega_{*j} + \varepsilon_1\lambda_{1j}^{(1)} + \varepsilon_2\lambda_{1j}^{(2)} + \dots, \\ \lambda_{1j}^{(1)} &= -b_1(u_*, \gamma)e^{iq\theta_*}, \quad \lambda_{1j}^{(2)} = -b(u_*, \gamma)ipe^{iq\theta_*}, \quad q = n + j - 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} e_{1j}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon}) &= u_1(\rho, q\varphi)e^{\lambda_j(\bar{\varepsilon})s}, \quad \bar{e}_{1j}(\rho, q\varphi, s; \bar{\varepsilon}) \in \tilde{H}_1(K_R; -T, 0), \\ h_{1j}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon}) &= u_1(\rho, q\varphi)e^{p_j(\bar{\varepsilon})s} / P'_{-q_1}(-p_j(\bar{\varepsilon}); \bar{\varepsilon}), \quad \bar{h}_{1j}(\rho, q\varphi, s; \bar{\varepsilon}) \in \tilde{H}_1(K_R; 0, T), \\ & q = n + j - 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

В этом случае $H_+(\bar{\varepsilon})$ есть множество функций вида

$$u_+(\rho, \varphi, s) = e_{11}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})z_1 + \bar{e}_{11}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})\bar{z}_1 + e_{12}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})z_2 + \bar{e}_{12}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})\bar{z}_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{4.41}$$

а $H_-(\bar{\varepsilon})$ – соответственно множество функций $u_-(\rho, \varphi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых $\langle u_-(\rho, \varphi, s), h_{1j}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon}) \rangle = 0, \langle u_-(\rho, \varphi, s), \bar{h}_{1j}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon}) \rangle = 0, j = 1, 2$ ($H_+(\bar{\varepsilon}) \oplus H_-(\bar{\varepsilon}) = H_0(K_R; -T, 0)$); $H_+(\bar{\varepsilon})$ определяет четырехмерное пространство решений $u_+(\rho, \varphi, s, t; \bar{\varepsilon})$ начально-краевой задачи (3.5), (3.6) вида (4.41), в котором $z_j = z_j(t)$ – решение уравнений

$$\dot{z}_j = \lambda_j(\bar{\varepsilon})z_j, \quad j = 1, 2. \tag{4.42}$$

Пусть $S_{\pm}(R)(\bar{\varepsilon}) = S(R) \cap H_{\pm}(\bar{\varepsilon})$. В рассматриваемом случае начально-краевая задача (3.2), (3.3) имеет четырехмерное центральное (инвариантное) многообразие $M(\bar{\varepsilon}) \subset S(R)$, которое определено теоремами 1, 2 применительно к рассматриваемому случаю и которое представимо в виде

$$\begin{aligned} G(\rho, \varphi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &= e_{m1}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})z_1 + \bar{e}_{m1}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})\bar{z}_1 + e_{n+11}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})z_1 + \\ & + \bar{e}_{n+11}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon})\bar{z}_1 + v_{2000}(\cdot)z_1^2 + v_{1100}(\cdot)z_1\bar{z}_1 + v_{0200}(\cdot)\bar{z}_1^2 + \dots \\ & + v_{0030}(\cdot)z_2^3 + v_{0021}(\cdot)z_2^2\bar{z}_2 + v_{0012}(\cdot)z_2\bar{z}_2^2 + v_{0003}(\cdot)\bar{z}_2^3 + g(\rho, \varphi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \end{aligned} \tag{4.43}$$

где $v_{jk}(\cdot) = v_{jk}(\rho, \varphi, s; \bar{\varepsilon}), v_{jk}(\cdot) = \bar{v}_{kj}(\cdot), \|g(\rho, \varphi, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})\|_{H_1} = o(|z|^3), |z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$. При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая поведение траекторий (3.2), (3.3) на (4.43) и записанная в нормализованной форме до кубических слагаемых включительно [16], имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1(\bar{\varepsilon})z_1 + d_{11}(\bar{\varepsilon})|z_1|^2z_1 + d_{12}(\bar{\varepsilon})|z_2|^2z_1 + Z_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \equiv Z_1^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2(\bar{\varepsilon})z_2 + d_{21}(\bar{\varepsilon})|z_1|^2z_2 + d_{22}(\bar{\varepsilon})|z_2|^2z_2 + Z_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \equiv Z_2^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \end{aligned} \tag{4.44}$$

где $|Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})| = o(|z|^3), j = 1, 2$. По аналогии с (4.17) имеем

$$\begin{aligned} g(\rho, \varphi + c, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &\equiv g(\rho, \varphi, z_1e^{inc}, \bar{z}_1e^{-inc}, z_2e^{i(n+1)c}, \bar{z}_2e^{-i(n+1)c}; \bar{\varepsilon}), \\ Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &\equiv z_j Z_{j1}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \\ Z_{j1}(z_1e^{inc}, \bar{z}_1e^{-inc}, z_2e^{i(n+1)c}, \bar{z}_2e^{-i(n+1)c}; \bar{\varepsilon}) &\equiv Z_{j1}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.45}$$

В рассматриваемом случае условие принадлежности траекторий системы уравнений (4.44) начально-краевой задачи (3.2), (3.3) в силу многообразия (4.43) определяют тождества

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial z_j} Z_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) \right) + G(\cdot) \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial s}, \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} G_s(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) &\equiv -G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) + D\Delta_{\rho\phi} G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) - \\ &- b(\epsilon_1)G_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) + b_2(\epsilon_1)G_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon})^2/2 + \\ &+ b(\epsilon_1)G_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon})^3/6 + \dots, \end{aligned} \tag{4.47}$$

для определения коэффициентов разложений (4.43), (4.44). Приравнявая в (4.46), (4.47) коэффициенты при одинаковых степенях $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, получаем для определения функций, входящих в (4.43), рекуррентную последовательность краевых задач аналогичных (4.22), (4.26). Часть этих краевых задач однозначно разрешима автоматически, однозначной разрешимости другой части добиваемся выбором коэффициентов $d_{jk}(\bar{\epsilon})$ (однозначным) по аналогии с краевой задачей (4.26). Опуская громоздкие вычисления, приведем необходимые для бифуркационного анализа выражения для коэффициентов $d_{jk}(\bar{\epsilon}) = a_{jk}(\bar{\epsilon}) + ic_{jk}(\bar{\epsilon})$:

$$\begin{aligned} d_{11}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))) \times \\ &\times (b_2(\epsilon_1)(w_{2000}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{1100}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n1}(\rho) + b(\epsilon_1)R_{n1}^3(\rho)/2, R_{n1}(\rho))/(2\pi), \\ d_{12}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} / (2\pi) / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))) \times \\ &\times (b_2(\epsilon_1)(w_{0011}(\rho; \bar{\epsilon})R_{n1}(\rho) + (w_{1010}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{1001}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n+11}(\rho)) + b(\epsilon_1)R_{n+11}^2(\rho)R_{n1}(\rho), R_{n1}(\rho)), \\ d_{21}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} / (2\pi) / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))) \times \\ &\times (b_2(\epsilon_1)(w_{1100}(\rho; \bar{\epsilon})R_{n+11}(\rho) + (w_{1010}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{0110}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n11}(\rho)) + b(\bar{\epsilon})R_{n1}^2(\rho)R_{n+11}(\rho), R_{n+11}(\rho)), \\ d_{22}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))) (b_2(\epsilon_1) \times \\ &\times (w_{0020}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{0011}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n+11}(\rho) + b(\epsilon_1)R_{n+11}^3(\rho)/2, R_{n+11}(\rho))/(2\pi), \\ w_{2000}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\bar{\epsilon})R_{2nj}(\rho), \quad p_{2nj}(\bar{\epsilon}) = (R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{i2n(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_1(\bar{\epsilon})T} / (2\lambda_1(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{2nj}^2 + b(\epsilon_1)e^{i2n(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_1(\bar{\epsilon})T})/2, \\ w_{1100}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\bar{\epsilon})R_{0j}(\rho), \quad p_{0j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{-(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\bar{\epsilon})e^{-(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T}), \\ w_{0020}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2(n+1)j}(\bar{\epsilon})R_{2(n+1)j}(\rho), \quad p_{2(n+1)j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n+11}^2(\rho), R_{2(n+1)j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{i2(n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_2(\bar{\epsilon})T} / (2\lambda_2(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{2(n+1)j}^2 + b(\epsilon_1)e^{i2(n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_2(\bar{\epsilon})T})/2, \\ w_{0011}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\bar{\epsilon})R_{0j}(\rho), \quad p_{0j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n+11}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{-(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} / (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\epsilon_1)e^{-(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T}), \\ w_{1010}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2n+1j}(\bar{\epsilon})R_{2n+1j}(\rho), \quad p_{2n+1j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n1}(\rho)R_{n+11}(\rho), R_{2n+1j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{i(2n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}))T} / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{2n+1j}^2 + b(\epsilon_1)e^{i(2n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}))T}), \end{aligned}$$

$$w_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(\bar{\varepsilon}) R_{1j}(\rho), \quad p_{1j}(\varepsilon) = (R_{n1}(\rho) R_{n+1}(\rho), R_{1j}(\rho)) \times \\ \times b_2(\varepsilon_1) e^{i(\theta_* + \varepsilon_2) - (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T} / (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{1j}^2 + b(\varepsilon_1) e^{i(\theta_* + \varepsilon_2) - (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T}), \\ w_{1001}(\rho; \bar{\varepsilon}) = \bar{w}_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}).$$

Исследуем поведение решений системы уравнений (4.44). Перейдем в плоскости параметров $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и плоскостях z_1 и z_2 к полярным координатам, соответственно положив

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos(\alpha), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \sin(\alpha), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad (4.48)$$

и $z_j = \varepsilon^{1/2} \rho_j e^{i\tau_j}$, $\rho_j \geq 0$, $j = 1, 2$. Запишем систему уравнений (4.44) с учетом (4.39), (4.45), (4.48) в новых переменных и в зависимости от новых параметров

$$\dot{\rho}_j = \varepsilon(\chi_j^1(\alpha, \varepsilon) + a_{j1}(\alpha, \varepsilon)\rho_1^2 + a_{j2}(\alpha, \varepsilon)\rho_2^2 + \varepsilon R_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon))\rho_j, \quad (4.49)$$

$$\dot{\tau}_j = \omega_{*j} + \varepsilon(\sigma_j^1(\alpha, \varepsilon) + b_{j1}(\alpha, \varepsilon)\rho_1^2 + b_{j2}(\alpha, \varepsilon)\rho_2^2 + \varepsilon T_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)), \quad j = 1, 2. \quad (4.50)$$

В (4.49), (4.50) имеем $\chi_j^1(\alpha, \varepsilon) = \chi_j(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$, $\sigma_j^1(\alpha, \varepsilon) = \sigma_j(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$ – непрерывные при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ функции,

$$a_{jk}(\alpha, \varepsilon) + ib_{jk}(\alpha, \varepsilon) = d_{jk}(\alpha, \varepsilon)(d_{jk}(\alpha, 0) = d_{jk}(0)), \quad \varepsilon^2(R_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon) + iT_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)) = \\ = Z_{j1}(\varepsilon^{1/2}\rho_1 e^{i\tau_1}, \varepsilon^{1/2}\rho_1 e^{-i\tau_1}, \varepsilon^{1/2}\rho_2 e^{i\tau_2}, \varepsilon^{1/2}\rho_2 e^{-i\tau_2}; \alpha, \varepsilon) \equiv Z_{j1}(\varepsilon^{1/2}\rho_1, \varepsilon^{1/2}\rho_1, \varepsilon^{1/2}\rho_2, \varepsilon^{1/2}\rho_2; \alpha, \varepsilon).$$

Поведение решений системы уравнений (4.49), (4.50) при малых ε определяется в основном (см., например, [24]) поведением решений главной части уравнений “медленных” переменных (4.49)

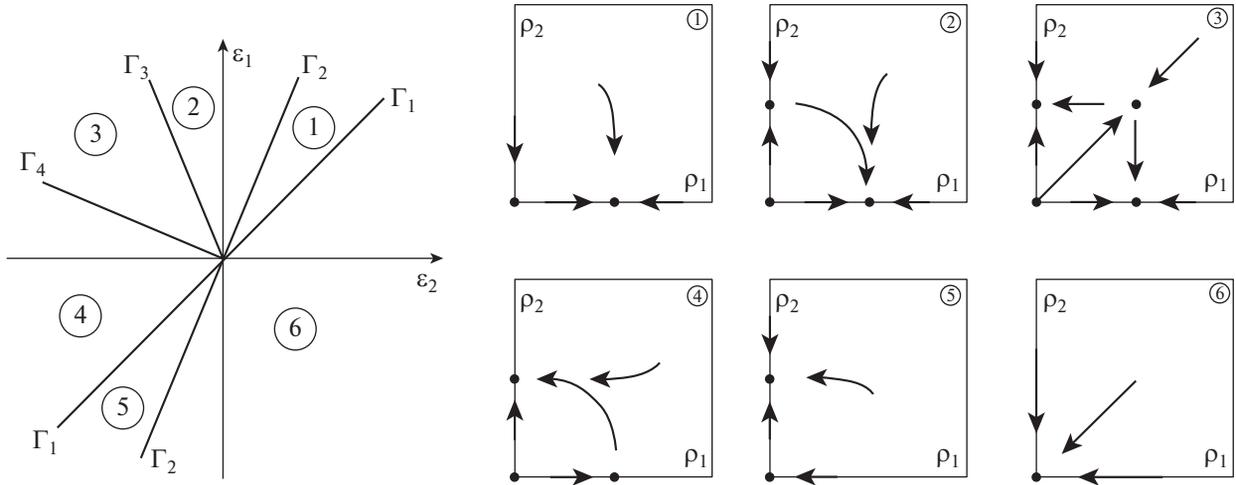
$$\dot{\rho}_j = (\chi_j^*(\alpha) + a_{j1}(0)\rho_1^2 + a_{j2}(0)\rho_2^2)\rho_j, \quad j = 1, 2, \quad (4.51)$$

где $\chi_j^*(\alpha) = \chi_j^1(\alpha, 0)$. Так, экспоненциально устойчивым состояниям равновесия (4.51) вида $(\rho_{*1}, 0)$ и $(0, \rho_{*2})$ при малых ε в (4.49), (4.50) и системе уравнений (4.44) соответствуют периодические решения с периодами, близкими к $2\pi/\omega_{*1}$ и $2\pi/\omega_{*2}$, соответственно, и того же характера устойчивости. Состоянию равновесия вида (ρ_{*1}, ρ_{*2}) , $\rho_{*j} > 0$ в (4.49), (4.50) и (4.44) соответствует двумерный инвариантный тор, характер устойчивости которого определяется устойчивостью (неустойчивостью) состояния равновесия. Отметим, что система уравнений (4.51) может иметь периодические решения лишь в исключительных (вырожденных) случаях. Численный анализ, выполненный для различных значений параметров T , D , γ показал, что в точках K_* , θ_* , являющихся точками пересечения замкнутых ветвей границы области D_0 , отвечающих различным значениям $n, n + 1$, всегда выполнены следующие неравенства: $a_{jk}(0) < 0$, $j, k = 1, 2$, $\Delta = a_{11}(0)a_{22}(0) - a_{12}(0)a_{21}(0) < 0$. Эти условия считаем в дальнейшем выполненными. Система уравнений вида (4.51) подробно проанализирована в работе [25]. В нашем случае система уравнений (4.51) легко анализируется непосредственно. Формулы состояний равновесия (4.51) имеют вид

$$(\rho_{*1}, 0) = ((-\chi_1^*(\alpha)/a_{11}(0))^{1/2}, 0), \quad (0, \rho_{*2}) = (0, (-\chi_2^*(\alpha)/a_{22}(0))^{1/2}), \quad (4.52)$$

$$(\rho_{*1}, \rho_{*2}) = ((-a_{22}(0)\chi_1^*(\alpha) + a_{12}(0)\chi_2^*(\alpha))/\Delta)^{1/2}, \quad ((a_{21}(0)\chi_1^*(\alpha) - a_{11}(0)\chi_2^*(\alpha))/\Delta)^{1/2}. \quad (4.53)$$

В соответствии с этим на плоскости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определим прямые (лучи), выходящие из нулевой точки: $\Gamma_1 : \chi_1^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_2 : \chi_2^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_3 : -a_{22}(0)\chi_1^*(\alpha) + a_{12}(0)\chi_2^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_4 : a_{21}(0)\chi_1^*(\alpha) - a_{11}(0)\chi_2^*(\alpha) = 0$. Бифуркационная диаграмма и соответствующие фазовые портреты (4.51) в зависимости от α приведены на фиг. 9. Диаграмма приведена применительно к рассматриваемой точке. В других точках границы области D_0 расположение прямых Γ_j может быть несколько иным, но характер фазовых перестроек остается неизменным.



Фиг. 9.

Каждому состоянию равновесия вида (4.52) в начально-краевой задаче (2.1), (2.2) соответствует периодическое решение вида (4.37) (ротационная волна), принадлежащее $S_{u_*}(R)$, аналогичного с состоянием равновесия характера устойчивости. Доказательство этого утверждения проводится по изложенной выше схеме. Состоянию равновесия (4.53) в (2.1), (2.2) соответствует двумерный инвариантный тор, принадлежащий $S_{u_*}(R)$, в нашем случае он всегда неустойчив.

Таким образом, бифуркационный сценарий с окрестности точки K_* , θ_* пересечения замкнутых кривых, соответствующих значениям n и $n + 1$ границы области D_0 , выглядит следующим образом. При $\theta < \theta_*$ и $K > K_*$ в $S_{u_*}(R)$ имеется единственное устойчивое периодическое решение вида (4.37) – ротационная волна, соответствующая значению n . При увеличении θ из состояния равновесия u_* бифурцирует неустойчивое периодическое решение вида (4.37) – ротационная волна, соответствующая значению $n + 1$. При дальнейшем увеличении θ из этого периодического решения бифурцирует неустойчивый двумерный инвариантный тор, делая периодическое решение асимптотически орбитально устойчивым. Таким образом, в $S_{u_*}(R)$ имеется два устойчивых периодических решения, являющихся ротационными волнами, и неустойчивый инвариантный тор. При дальнейшем увеличении θ неустойчивый инвариантный тор “влипает” в устойчивое периодическое решение, соответствующее значению n , делая его неустойчивым. В дальнейшем это неустойчивое периодическое решение “влипает” в неустойчивое состояние равновесия u_* . В окрестности u_* остается одна ротационная волна, соответствующая значению $n + 1$.

Случай, когда пучок операторов (3.7) при K_* , θ_* имеет пару комплексно сопряженных чисто мнимых точек спектра и двухкратную нулевую точку спектра, а остальные точки спектра имеют отрицательные вещественные части, рассматривается аналогично. При этом роль одной спиральной волны будет играть однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия. Также аналогично рассматривается случай, когда одна собственная функция пучка операторов не зависит от ϕ (отмеченный * на фиг. 5). В этом случае одно бифурцирующее периодическое решение является пространственно однородным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках; новые типы нелинейных волн, возникновение “оптической турбулентности” // Письма в Журнал эксперим. и теор. физ. 1988. Т. 47. № 12. С. 611–614.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.

3. *Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu. et al.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // *J. Optical Soc. Amer. Ser. B.* 1992. V. 9. № 1. P. 78–90.
4. *Разгулин А.В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.
5. *Разгулин А.В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 10. С. 1499–1508.
6. *Белан Е.П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // *Ж. матем. физ., анал., геом.* 2005. Т. 1. № 1. С. 3–34.
7. *Кащенко С.А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1991. Т. 31. № 3. С. 467–473.
8. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // *Теор. и матем. физ.* 2004. Т. 140. № 1. С. 14–28.
9. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // *Матем. моделирование.* 1993. Т. 5. № 4. С. 105–119.
10. *Скубачевский А.Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // *Дифференц. ур-ния.* 1998. Т. 34. № 10. С. 1394–140.
11. *Skubachevskii A.L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // *Nonlinear Analysis: TMA.* 1998. V. 32. №. 2. P. 261–278.
12. *Разгулин А.В., Романенко Т.Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 11. С. 1804–1821.
13. *Budzinskiy S.S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under O (2,2) Hopf bifurcation // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 2017. V. 49. P. 17–29.
14. *Budzinskiy S.S., Larichev A.V., Razgulin A.V.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2018. V. 44. P. 559–572.
15. *Неймарк Ю.И.* D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // *Прикл. матем. и механ.* 1949. Т. 13. № 4. С. 349–380.
16. *Куликов А.Н.* О гладких многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховых пространствах // *Исследования по устойчивости и теории колебаний.* Ярославль: Ярославский ун-т. 1976. С. 114–129.
17. *Мардсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
18. *Хессард Б., Казаринов Н., Вен И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
19. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
20. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
21. *Kubyshkin E.P., Moriakova A.R.* Features of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2018. Т. 14. № 3. P. 301–324.
22. *Кубышкин Е.П., Морякова А.Р.* Особенности бифуркаций периодических решений уравнения Мэкки–Гласса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 8. С. 1340–1357.
23. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
24. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 232 с.
25. *Серебрякова Н.Н.* Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний // *Прикл. матем. и механ.* 1963. Т. 27. № 1. С. 160–166.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.927

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ
ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ ЦИЛИНДРА
В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА**

© 2021 г. С. И. Эминов

173003 Великий Новгород, ул. Б.С.-Петербургская, 41, Новгородский гос. ун-т, Россия
e-mail: eminovsi@mail.ru

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.
Переработанный вариант 15.01.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Векторная задача дифракции электромагнитных волн на цилиндре описывается системой двух двумерных интегродифференциальных уравнений. После разложения неизвестных функций и правых частей в ряды Фурье задача сводится к системам одномерных уравнений. Рассмотрено аналитическое обращение главного оператора одномерных систем в пространствах Соболева. Доказаны теоремы об ограниченности и ограниченной обратимости главного оператора. Обратный оператор представлен в виде рядов и в замкнутой форме: элементы обратной матрицы представляют собой интегральные или интегродифференциальные операторы. Библ. 19.

Ключевые слова: дифракция, цилиндр, операторная матрица, пространства Соболева, теорема Лакса-Мильграма, интегральный оператор, сингулярный оператор, интегродифференциальный оператор, обратная матрица.

DOI: 10.31857/S0044466921030054

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассмотрено аналитическое обращение операторной матрицы, которая встречается в задаче дифракции на отрезке цилиндра (см. [1]),

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}A & a_{12}SL \\ a_{21}SA & a_{22}L \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} (Lv)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(t) \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, & (Au)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 u(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, \\ (SLv)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 v(t) \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, & (SAu)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, \end{aligned} \quad (2)$$

a_{ij} — постоянные величины.

В частном случае, когда $a_{12} = a_{21} = 0$, матрица является диагональной.

Уравнения с компактными операторами M и N

$$Au + Mu = f, \quad (3)$$

$$Lv + Nv = g \quad (4)$$

соответствуют осесимметричному случаю, а также задачам дифракции на цилиндрической поверхности. Эти уравнения рассмотрены во многих литературных источниках. В данной работе используются методы псевдодифференциальных уравнений, развитые в [2]–[5].

В указанных работах уравнения рассматриваются в пространствах Соболева, выбор индексов пространств обеспечивает ограниченность операторов задач. В [3] доказаны теоремы существования и единственности решения в пространствах Соболева для скалярных задач, а в [4] — для векторных задач.

Целью данной работы является аналитическое построение обратного оператора к главному непрерывно обратимому оператору задачи. Именно он является носителем информации о свойствах решения применительно к задачам дифракции электромагнитных волн (имеются в виду свойства поверхностных токов).

1. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ОДНОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Введем основные определения (см. [6], [7]): $H_s(R)$ – пространство обобщенных функций $u(\tau)$, преобразование Фурье которых $\tilde{u}(\xi)$ локально интегрируемо в смысле Лебега и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi < +\infty; \tag{5}$$

$H_s(-1,1)$ – подпространство в $H_s(R)$, состоящее из функций $u(\tau)$ с носителем в замкнутом промежутке $[-1,1]$. Финитные и бесконечно дифференцируемые функции $C_0^\infty(-1,1)$ плотны в $H_s(-1,1)$ по норме (5);

$\tilde{H}_s(-1,1)$ – пространство обобщенных функций f , допускающих продолжение lf на R , принадлежащее $H_s(R)$.

Норма в $\tilde{H}_s(-1,1)$ определяется формулой

$$\|f\|_s = \inf \|lf\|_s. \tag{6}$$

Псевдодифференциальный оператор

$$(\tilde{A}_s u)(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2s} \tilde{u}(\xi) \exp(-i\tau\xi) d\xi < +\infty, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{7}$$

как показано в [6, стр. 45], ограничен из пространства $H_s(R)$ в пространство $H_{-s}(R)$. Оператор сужения из пространства $H_{-s}(R)$ в пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$, согласно определению (6), также непрерывен. Отсюда получаем

Утверждение 1. *Интегральный оператор*

$$(\tilde{A}_s u)(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2s} \tilde{u}(\xi) \exp(-i\tau\xi) d\xi < +\infty, \quad -1 \leq \tau \leq 1, \tag{8}$$

непрерывен из пространства $H_s(-1,1)$ в пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$ при любом вещественном s .

Квадратичная форма оператора A_s

$$(A_s u, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty = \frac{1}{2\pi} \|u\|_s^2 \tag{9}$$

положительно-определена или коэрцитивна. Пространство, сопряженное к $H_s(-1,1)$, изоморфно пространству $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$ (см. [6, с. 74]). Поэтому выполнены условия теоремы Лакса–Мильграма (см. [8, с. 8], [4, с. 63]). Из этой теоремы следует сюръективность оператора A_s . Наконец, применяя теорему Банаха об обратном операторе, получим

Утверждение 2. *Непрерывный оператор A_s взаимно однозначно отображает пространство $H_s(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$, и обратный оператор A_s^{-1} ограничен.*

В [9, с. 81] для непрерывных операторов введено понятие фредгольмоваго оператора и индекса, исследовано поведение индекса в зависимости от компактных возмущений. Доказано (см. [9,

с. 81]), что если оператор B – фредгольмов, а K – компактен, то оператор $B + K$ также фредгольмов и его индекс равен индексу оператора B . Отсюда и из утверждения 2 следует

Утверждение 3. Для любого компактного оператора $K: H_s(-1,1) \rightarrow \tilde{H}_{-s}(-1,1)$ оператор $A_s + K$ отображает пространство $H_s(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим оператор A :

$$(Au)(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 u(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau - t|} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi| \tilde{u}(\xi) \exp(-i\tau\xi) d\xi, \quad -1 \leq \tau \leq 1, \tag{10}$$

из пространства $H_{1/2}(-1,1)$ в пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$. Равенство двух форм записи оператора (в координатной и в виде интеграла Фурье) на плотном в $H_{1/2}(-1,1)$ множестве $C_0^\infty(-1,1)$ следует из тождества

$$\ln \frac{1}{|\tau - t|} = C + \int_0^1 \frac{\cos(\xi(\tau - t)) - 1}{\xi} d\xi + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\xi(\tau - t))}{\xi} d\xi, \quad C = 0.5772. \tag{11}$$

Оператор A отличается от оператора $A_{1/2}$ на компактный оператор (см. [7, с. 107]), кроме того, он является положительным. С учетом утверждения 3 оператор A взаимно однозначно отображает пространства $H_{1/2}(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ и обратный оператор A^{-1} ограничен. Введем систему функций

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin(n \arccos(\tau)), \quad n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Она плотна в пространстве $H_{1/2}(-1,1)$, и имеют место соотношения (см. [10])

$$(A\varphi_n)(\tau) = \frac{n}{\sqrt{1 - \tau^2}} \varphi_n(\tau), \tag{13}$$

$$(A\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{14}$$

Для решения уравнения

$$Au = f \tag{15}$$

разложим неизвестную по функциям (12)

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \varphi_m(\tau),$$

подставим в (15), умножим скалярно в $L_2[-1,1]$ на φ_n и учтем (14). В результате получим

$$u(\tau) = (A^{-1}f)(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} (f, \varphi_m) \varphi_m(\tau). \tag{16}$$

В формуле (16) ряд можно привести к интегралу (см. [10], [7 с. 16]). Таким образом, доказана

Теорема 1. Оператор A непрерывно отображает пространство $H_{1/2}(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$, обратный оператор A^{-1} ограничен, задается формулой

$$(A^{-1}f)(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln \left| \frac{\tau - t}{1 - \tau t + \sqrt{1 - \tau^2} \sqrt{1 - t^2}} \right| dt \tag{17}$$

и отображает пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ на пространство $H_{1/2}(-1,1)$.

Элементы пространства $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ суть обобщенные функции, они проявляют себя по воздействию на пробные функции. Имеет место

Теорема 2. Если $f \in \tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{m=1}^{+\infty} |(f, \varphi_m)|^2 < +\infty. \tag{18}$$

Верно обратное утверждение, если выполнено (18), то элемент

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} (f, \varphi_m) \varphi_m(\tau)$$

принадлежит пространству $H_{1/2}(-1,1)$.

Доказательство. Для каждого элемента $f \in \tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ найдется такой элемент $u \in H_{1/2}(-1,1)$, что $Au = f$. Разлагая u в ряд (16) и учитывая (14), получаем

$$(Au, u) = \sum_{m=1}^{+\infty} |(f, \varphi_m)|^2 < +\infty. \tag{19}$$

Обратно, пусть выполнено (18), тогда верно и (19). Из положительной определенности оператора A (см. [10]) следует, что

$$\|u\|_{1/2}^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} (Au, u) < +\infty, \quad \gamma^2 > 0,$$

поэтому $u \in H_{1/2}(-1,1)$. Что и требовалось доказать.

Аналитическое обращение с помощью ортонормированных систем можно построить и для других одномерных операторов в пространствах Соболева (см. [11]). Остановимся на интегральном операторе L . Введем систему функций

$$\psi_n(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n = 0, \\ \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \frac{\cos(n \arccos(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n \geq 1, \end{cases} \tag{20}$$

которая является ортонормированной в следующем смысле (см. [12, с. 236]):

$$(L\psi_n)(\tau) = \begin{cases} \ln 2 \sqrt{1-\tau^2} \psi_0(\tau), & n = 0, \\ \frac{1}{n} \sqrt{1-\tau^2} \psi_n(\tau), & n \geq 1, \end{cases} \tag{21}$$

$$(L\psi_n, \psi_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{22}$$

Согласно (21), оператор L переводит функции, определенные формулой (20), в многочлены. Аналогично теореме 1, доказывается

Теорема 3. Оператор L непрерывно отображает пространство $H_{-1/2}(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$, обратный оператор L^{-1} ограничен, задается формулой

$$(L^{-1}g)(\tau) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} g'(t)}{\tau-t} dt + \frac{1}{\pi \ln 2 \sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{23}$$

и отображает пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$ на все пространство $H_{-1/2}(-1,1)$.

Замечание 1. Формула (23) получена многими авторами (см., в частности, [13, с. 591], [12, с. 224]). Новым является положение о том, что оператор L^{-1} отображает ограниченно пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$ на все пространство $H_{-1/2}(-1,1)$.

Замечание 2. В формулу (23) входит производная $f'(t)$. В связи с этим отметим важный факт из теории пространств Соболева: пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$ совпадает с пространством $H_{1/2}(-1,1)$ (см. [14, с. 71]), в котором плотно множество $C_0^\infty(-1,1)$. Поэтому оператор L^{-1} корректно определен на плотном в пространстве $H_{1/2}(-1,1)$ множестве и далее продолжается по непрерывности.

Замечание 3. Для оператора L имеет место также аналог теоремы 2. Как и A , оператор L является положительно-определенным. Это свойство является следствием положительности и ограниченной обратимости (см. [15, с. 49]).

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим оператор

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}A & a_{12}SL \\ a_{21}SA & a_{22}L \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H_{1/2}(-1,1) \\ H_{-1/2}(-1,1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{H}_{-1/2}(-1,1) \\ \tilde{H}_{1/2}(-1,1) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

который отображает прямую сумму гильбертовых пространств $H_{1/2} \oplus H_{-1/2}$ в $\tilde{H}_{-1/2} \oplus \tilde{H}_{1/2}$.

Все операторы $A: H_{1/2} \rightarrow \tilde{H}_{-1/2}$, $SL: H_{-1/2} \rightarrow \tilde{H}_{-1/2}$, $SA: H_{1/2} \rightarrow \tilde{H}_{1/2}$, $L: H_{-1/2} \rightarrow \tilde{H}_{1/2}$ являются ограниченными (см. [6, с. 45]).

Заметим, что L – интегральный оператор с логарифмической особенностью в ядре; A – гиперсингулярный оператор, ядро этого оператора получается из ядра оператора L в результате двойного дифференцирования; SL и SA – сингулярные операторы I рода.

Для обращения оператора T рассмотрим уравнение

$$T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

или соответствующую систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}(Au)(\tau) + a_{12}(SLv)(\tau) &= f(\tau), \\ a_{21}(SAu)(\tau) + a_{22}(Lv)(\tau) &= g(\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Коэффициенты a_{ij} – постоянны. Потребуем, чтобы выполнялись условия $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$. Разложим неизвестные функции в ряды

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \varphi_m(\tau), \quad v(\tau) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m \psi_m(\tau) \tag{26}$$

и подставим в (25). Отметим, что наряду со свойствами ортонормированности (14) и (22),

$$(A\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{mn}, \quad (L\psi_n, \psi_m) = \delta_{mn}, \tag{27}$$

имеют место равенства

$$(SL\psi_n, \varphi_m) = \delta_{mn}, \quad (SA\varphi_n, \psi_m) = \delta_{mn}. \tag{28}$$

После подстановки (26) в (25) первое уравнение умножим на φ_n (точнее воздействуем), а второе на ψ_n . В результате получим системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}c_n + a_{12}d_n &= (f, \varphi_n), \\ a_{21}c_n + a_{22}d_n &= (g, \psi_n), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{29}$$

$$a_{22}d_0 = (g, \psi_0). \tag{30}$$

Решив эти системы для каждого индекса, найдем решение системы (25):

$$u(\tau) = \frac{a_{22}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (f, \varphi_m) \varphi_m(\tau) - \frac{a_{12}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (g, \psi_m) \varphi_m(\tau), \tag{31}$$

$$v(\tau) = \frac{1}{a_{22}} (g, \psi_0) \psi_0(\tau) + \frac{a_{11}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (g, \psi_m) \psi_m(\tau) - \frac{a_{21}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (f, \varphi_m) \psi_m(\tau). \tag{32}$$

Оператор T ограничен. Далее для любого элемента из пространства $\tilde{H}_{-1/2} \oplus \tilde{H}_{1/2}$ построили функцию по формулам (31) и (32), которая согласно теореме 2 принадлежит пространству $H_{1/2} \oplus H_{-1/2}$. Следовательно, оператор T сюръективен. Он также инъективен, если $f = g = 0$, то непременно $u = v = 0$. Применяя теорему Банаха об обратном операторе, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Оператор T непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H_{1/2} \oplus H_{-1/2}$ на все пространство $\tilde{H}_{-1/2} \oplus \tilde{H}_{1/2}$, и обратный оператор T^{-1} ограничен.*

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Обратный оператор T^{-1} представим в виде операторной матрицы:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}f + R_{12}g \\ R_{21}f + R_{22}g \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где

$$(R_{11}f)(\tau) = \frac{a_{22}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (f, \varphi_m) \varphi_m(\tau), \tag{34}$$

$$(R_{12}g)(\tau) = -\frac{a_{12}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (g, \psi_m) \varphi_m(\tau), \tag{35}$$

$$(R_{21}f)(\tau) = -\frac{a_{21}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (f, \varphi_m) \psi_m(\tau), \tag{36}$$

$$(R_{22}g)(\tau) = \frac{1}{a_{22}} (g, \psi_0) \psi_0(\tau) + \frac{a_{11}}{\Delta} \sum_{m=1}^{+\infty} (g, \psi_m) \psi_m(\tau). \tag{37}$$

Для преобразования формул (34)–(37) поменяем порядок суммирования и интегрирования, затем воспользуемся формулами (см. [16, с. 52])

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \cos(m\varphi) \cos(m\theta) = -\frac{1}{2} \ln |2(\cos \varphi - \cos \theta)|, \tag{38}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \cos(m\varphi) \cos(m\theta) = \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta}. \tag{39}$$

После несложных преобразований получим

$$(R_{11}f)(\tau) = \frac{a_{22}}{\Delta\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln \left| \frac{\tau - t}{1 - \tau t + \sqrt{1 - \tau^2} \sqrt{1 - t^2}} \right| dt, \tag{40}$$

$$(R_{12}g)(\tau) = \frac{a_{12}\sqrt{1 - \tau^2}}{\Delta\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t) dt}{\sqrt{1 - t^2}(\tau - t)}, \tag{41}$$

$$(R_{21}f)(\tau) = -\frac{a_{21}}{\Delta\pi\sqrt{1 - \tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - t^2} f(t) dt}{(\tau - t)}, \tag{42}$$

$$(R_{22}g)(\tau) = \frac{a_{11}}{\Delta\pi\sqrt{1 - \tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - t^2} g'(t)}{\tau - t} dt + \frac{1}{a_{22}\pi \ln 2\sqrt{1 - \tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt. \tag{43}$$

Все операторы $R_{11}: \tilde{H}_{-1/2} \rightarrow H_{1/2}$, $R_{12}: \tilde{H}_{1/2} \rightarrow H_{1/2}$, $R_{21}: \tilde{H}_{-1/2} \rightarrow H_{-1/2}$, $R_{22}: \tilde{H}_{1/2} \rightarrow H_{-1/2}$ являются ограниченными, поскольку они получаются из ограниченного оператора T^{-1} в результате двух операций: сужения на подпространство и проектирования на подпространство. Поэтому имеет место

Теорема 5. *Интегральные операторы (40)–(43) являются ограниченными операторами в соответствующих пространствах.*

Замечание 4. Формулы (40)–(43) правильно передают поведение неизвестных функций на границах отрезка, поскольку решения строятся по функциям, учитывающим поведение на границе или условия Мейкснера на ребре. Кроме того, они несут в себе дополнительную глубокую информацию о неизвестных, с их помощью можно строить численно-аналитические методы решения интегральных уравнений (см. [17]).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оператор T естественным образом возникает в векторной задаче дифракции электромагнитных волн на отрезке цилиндра. После разложения неизвестных функций и правых частей в ряды Фурье система двумерных интегродифференциальных уравнений сводится к системам одномерных уравнений, зависящих от индекса разложения n . Оператор T не зависит от этого индекса, т.е. он един для всех систем. На самом деле оператор T точно также возникает в задаче дифракции на произвольной поверхности вращения (см. [18]).

Оператор указанной выше системы B представляется в виде суммы оператора T и вполне непрерывного оператора K . Обратный к оператору B можно представить в виде суммы оператора T^{-1} и некоторого вполне непрерывного оператора.

Структура вполне непрерывного оператора в базисе (12) для скалярной задачи подробно исследована в [19]. Матрица оператора сильно разрежена, отличны от нуля лишь элементы, расположенные вблизи главной диагонали. Эти результаты могут быть перенесены на векторную задачу. Из этих результатов следует, что свойства неизвестных, поверхностных токов могут быть получены из анализа интегральных операторов, составляющих матрицу оператора T^{-1} . Поэтому формулы (40)–(43) имеют как теоретическое фундаментальное, так и прикладное значение.

В работе получены следующие результаты.

1. Развита метод аналитического обращения операторов дифракции на основе полных ортонормированных систем.

2. Впервые получены формулы аналитического обращения главного непрерывно обратимого оператора задачи дифракции на отрезке цилиндра в виде рядов и в замкнутой форме: элементы обратной матрицы представляют собой интегральные или интегродифференциальные операторы. Как следствие, получены свойства ограниченности указанных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Социлин А.В., Эминов С.И. Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции на толстом вибраторе // Ж. теор. физ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 96–101.
2. Stephan E.P. Boundary Integral Equations for Screen Problem in R^3 // Integral Equations and Operator Theory. 1987. V. 10. P. 236–257.
3. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Интегральные уравнения для задач дифракции волн на экранах // Радиотехн. и электроника. 1994. Т. 39. № 1. С. 23–31.
4. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
5. Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.
6. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
7. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001.
8. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Векторный метод конечных элементов: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001.
9. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Изд-во Мехмат МГУ, 2001.
10. Эминов С.И., Эминова В.С. Обоснование метода Галеркина для гиперсингулярных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 432–440.
11. Эминов С.И. Ортонормированный базис в пространствах Соболева–Слободецкого на отрезке // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 4. С. 558–560.
12. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
14. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
15. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
17. Социлин А.В., Эминов С.И. Численно-аналитический метод решения интегральных уравнений вибраторных антенн // Радиотехн. и электроника. 2008. Т. 53. № 5. С. 553–558.
18. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
19. Эминов С.И. Структура интегральных уравнений дифракции на полосе и отрезке кругового цилиндра // Изв. высш. уч. заведений. Радиофиз. 2017. Т. 60. № 12. С. 1093–1103.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.95

**EXACT SOLUTIONS OF THE KdV EQUATION
WITH DUAL-POWER LAW NONLINEARITY¹⁾**

© 2021 г. Fibay Urbain^{1,*}, N. A. Kudryashov^{2,**}, E. Tala-Tebue^{3,***}, Malwe Boudoue Hubert¹,
S. Y. Doka⁴, Kofane Timoleon Crepin⁵

¹ *Department of Physics, Faculty of Science, The University of Maroua, P.O. Box 814, CITY, Cameroon*

² *Department of Applied Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI, CITY, COUNTRY*

³ *Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Appliquée (LAIA), IUT-FV of Bandjoun,
The University of Dschang, P.O. Box 134, Bandjoun, Cameroon*

⁴ *Department of Physics, Faculty of Science, The University of Ngaoundere, P.O. Box 454, CITY, Cameroon*

⁵ *Department of Physics, Faculty of Science, The University of Yaounde I, P.O. Box 812, CITY, Cameroon*

**e-mail: fibay@gmail.com*

***e-mail: NAKudryashov@mephi.ru*

****e-mail: tebue2007@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.04.2019 г.

Переработанный вариант 20.06.2020 г.

Принята к публикации 16.09.2020 г.

Точные решения уравнения КдВ с двумя степенными нелинейностями. Исследовано КдВ-уравнение с двумя слагаемыми, описывающими нелинейность. Получены общие точные решения типа солитонов в виде бегущей волны, такие как “яркое” солитонное решение, “темное” солитонное решение и периодическое решение. Эти решения имеют целый ряд свободных параметров, что позволяет их использовать для описания моделей во многих физических процессах. Основной результат работы состоит в получении общего решения исходного уравнения с различными значениями параметров задачи. Библ. 17. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнение КдВ, степенная нелинейность, точное солитонное решение, яркий солитон, темный солитон, анти-кинк-солитон.

DOI: 10.31857/S0044466921030066

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И СТРУКТУР РАЗРЫВОВ В ИХ РЕШЕНИЯХ

© 2021 г. И. Б. Бахолдин

125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

e-mail: ibbakh@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.08.2020 г.
Переработанный вариант 20.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Рассмотрены различные варианты записи уравнений двухжидкостной плазмы, называемых уравнениями электромагнитной гидродинамики и представляющих собой обобщение уравнений обычной магнитной гидродинамики посредством добавления дисперсионных членов. Проанализировано применение конечно-разностных методов для решения этих уравнений. Численно решена задача о распаде разрыва и рассмотрены различные типы расширяющихся со временем структур разрывов: быстрых и медленных магнитозвуковых структур и альвеновских структур. При умеренной амплитуде быстрые и медленные магнитозвуковые структуры типичны для теории бездиссипативных разрывов. Установлено, что вследствие исчезновения дисперсии для коротких волн при некоторых начальных данных происходит опрокидывание волны, требующее рассмотрения решений с разрывами или включения дополнительных диссипативных или дисперсионных членов в уравнения. При добавлении газодинамической вязкости обнаружена структура типа ударной волны. Исследованы эволюционность этого разрыва и условия на разрыве. Библ. 18. Фиг. 7.

Ключевые слова: двухжидкостная плазма, электромагнитная гидродинамика, дисперсия, структуры разрывов, задача о распаде разрыва, конечно-разностные численные методы.

DOI: 10.31857/S0044466921030029

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию математических свойств уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики (ЭМГД), возникающих в решениях этих уравнений структур разрывов и численных методов для решения этих уравнений. Под приближением ЭМГД понимается гидродинамическое двухжидкостное приближение плазмы с допущениями квазинейтральности и пренебрежением током смещения в уравнениях Максвелла. В этом случае в уравнениях можно исключить некоторые неизвестные и свести их к одножидкостным уравнениям. Эти уравнения представляют собой уравнения классической магнитной гидродинамики (МГД) [1] с добавленными дисперсионными членами. Эти члены возникают за счет учета ионной и электронной проводимости и инерции электронов при условии квазинейтральности. Здесь используется вариант уравнений с неизвестными скорости и концентрации ионов и исключенным электрическим полем, развиваемый в работах [2]–[9]. Значительное число из этих работ посвящено исследованию уединенных волн. История развития модели представлена в [4]. Имеется еще вариант уравнений с неизвестными массовой скорости и суммарной плотности плазмы и отдельным уравнением для электрического поля [10], [11], ниже даются сравнения. Варианты уравнений с массовой скоростью, но с исключенным электрическим полем и некоторыми приближениями физического характера используются в [12], в частности, там встречается более простой вариант уравнений, используемых здесь, там же есть ссылки на другие исследования на основе МГД с добавленными дисперсионными членами.

Здесь применяется ранее разработанная теория обратимых структур разрывов, используемая для недиссипативных и слабодиссипативных уравнений [5], [13], [14]. Используется ранее разработанный численный метод с центральными пространственными разностями и методом Рунге–Кутты четвертого порядка для аппроксимации временных производных [15]. Для скалярных

уравнений этот метод не ведет к численному росту возмущений и обладает низкой схемной диссипацией, что позволяет в случае добавления слабой диссипации рассчитывать диссипативные и недиссипативные структуры одновременно. Применение этого метода к уравнениям трубы [15] показало его эффективность и возможность наличия опрокидывания волн в бездиссипативном случае. Здесь аналогичные исследования проводятся для уравнений двухжидкостной плазмы и в этом смысле данная статья является продолжением исследований работы [15]. Роль упрощенных уравнений теории разрывов здесь играют как уравнения МГД, так и ЭМГД. Ранее автором проводились исследования только быстрых магнитозвуковых структур [5]–[8], что было связано с недостаточной разработанностью численных методов. Основной целью работы является исследование структур разрывов других типов.

2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Уравнения двухжидкостной плазмы с исключенными неизвестными скорости электронов, а также электрического поля, были выведены из уравнений Максвелла и двухжидкостных гидродинамических уравнений в работах [2], [3] для холодной плазмы, т.е. без учета давления, методика вывода уравнений подробно изложена в [4]. При этом предполагалась квазинейтральность, т.е. совпадение концентраций зарядов ионов и электронов, и пренебрегалось током смещения. В работах [4], [7], [9] в эту модель было включено давление электронного газа (рассматривалась плазма с горячими электронами, но также можно включать и суммарное давление ионов и электронов) и ион-электронное трение:

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}),$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = R_e^{-1} \frac{d}{dt} (n^{-1} \text{rot } \mathbf{B}) + R_e^{-1} [n^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \times \text{grad}] \mathbf{v} -$$

$$- (R_i^{-1} + R_e^{-1}) (n^{-1} \text{rot } \mathbf{B}) \times \text{grad} (n^{-1} \text{rot } \mathbf{B}) + n^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} - b^2 \text{grad } \ln(n) + n^{-1} \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -R_i^{-1} \text{rot } \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \varepsilon \text{rot rot } \mathbf{B},$$

$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \times \nabla$ – полная производная, n – плотность частиц (объемная концентрация) ионов или электронов, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ – напряженность магнитного поля, и $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – скорость ионов. Используются безразмерные величины, определяемые через физические так: $x = \hat{x}/L$, $t = \hat{t}\omega_0$, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}/V_A$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}/|\mathbf{B}_0|$, $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}/|\mathbf{B}_0|$, $n = \hat{n}/n_0$; L , $\omega_0 = V_A/L$, n_0 , $|\mathbf{B}_0|$, $V_A = |\mathbf{B}_0| [4\pi n_0 (m_e + m_i)]^{-1/2}$ – характерная длина, частота, плотность невозмущенной плазмы, модуль вектора невозмущенного магнитного поля, альвеновская скорость. Здесь m_i и m_e – массы ионов и электронов, соответственно, ε – коэффициент магнитной вязкости, связанной с ионно-электронным трением, b^2 – коэффициент сжимаемости электронного газа. По сравнению с предыдущими работами добавлена объемная сила \mathbf{F} , действующая на ионный газ (вязкость, давление). Параметры дисперсии R_i и R_e даются формулами: $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$ и $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где $\omega_{ic} = e|\mathbf{B}_0|/(m_i c)$ и $\omega_{ec} = e|\mathbf{B}_0|/(m_e c)$ – ионная и электронная циклотронные частоты соответственно, e – заряд электрона, c – скорость света. Для удобства расчета мы можем взять L таким, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ic}\omega_{ec}}$, тогда $R_i = R_e^{-1} = \sqrt{m_i/m_e}$. Заряд иона здесь предполагается равным по модулю заряду электрона, если заряд иона равен по модулю нескольким зарядам электрона, то массу иона нужно уменьшить в соответствующее число раз, получатся уравнения для концентрации “доли” ионов. В расчетах далее подразумевается водородная плазма, $R_e^{-1} = 0.02341352$. Уравнения дополняются условием нулевой дивергенции напряженности магнитного поля, являющимся физическим ограничением на начальные данные. Приведем формулы для скорости электронов $\mathbf{v}_e = \hat{\mathbf{v}}_e/V_A$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}/|\mathbf{B}_0|$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - (R_i^{-1} + R_e^{-1}) n^{-1} \text{rot } \mathbf{B},$$

$$\mathbf{E} = \frac{V_A}{c} \left[R_i^{-1} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - n^{-1} \mathbf{F} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \varepsilon \text{rot } \mathbf{B} \right].$$

Формула для электрического поля выведена из уравнения импульсов ионов.

В одномерном случае уравнения (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dn}{dt} &= -n \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{n^{-1} \partial(B_y^2 + B_z^2)}{2} - n^{-1} b^2 \frac{\partial n}{\partial x} + n^{-1} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
 \frac{dv}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + n^{-1} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
 \frac{dw}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + n^{-1} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
 \frac{dB_y}{dt} &= B_x \frac{\partial v}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \\
 \frac{dB_z}{dt} &= B_x \frac{\partial w}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для одномерных движений компонента B_x магнитного поля остается константой все время движения. Здесь включены коэффициенты вязкости ионного газа λ и μ так, как это принято в механике сплошной среды [16]. Вязкость электронного газа может быть учтена также, но для скорости в вязких членах придется использовать формулу (2.2). В одномерном случае условие бездивергентности магнитного поля выполнено всегда.

Уравнения можно привести к форме законов сохранения, имеющих смысл закона сохранения массы ионного газа, законов изменения компонент импульса ионного газа и законов изменения B_y и B_z , являющихся следствиями уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для вычислений с применением центральных разностей более удобна система уравнений, в которой при аппроксимации временных производных требуется только одно неизвестное, если при расчете следующего временного слоя вначале вычислять величину n . Это позволяет применять метод прогонки при неявных аппроксимациях пространственно-временных производных:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial un}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(nv - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \left[B_x \frac{dw}{dt} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - B_z \frac{du}{dx} - R_i^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right] \right\} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(nw - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \left[B_x \frac{dv}{dt} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - B_y \frac{du}{dx} - R_i^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right] \right\} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \left(\frac{\partial u \partial w}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right\} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.6} \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[B_y - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u B_y - B_x v - R_i^{-1} n^{-1} \left[B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + R_e^{-1} \left(\frac{\partial u \partial B_y}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial n^{-1} \partial B_y}{\partial x \partial x} - \varepsilon \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[B_z - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u B_z - B_x w + R_i^{-1} n^{-1} \left[B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - R_e^{-1} \left(\frac{\partial u \partial B_z}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial n^{-1} \partial B_z}{\partial x \partial x} - \varepsilon \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Эта система получается подстановкой выражений для полных производных из (2.4) в правые части (2.5). Более простой вариант уравнений МГД с дисперсией, но без пространственно-временных производных можно получить, положив в (2.6) $R_e^{-1} = 0$, поскольку эта величина мала по сравнению с R_i^{-1} .

В [10] при тех же предположениях (квазинейтральность и пренебрежение током смещения) и на основе тех же базовых уравнений представлена иная форма уравнений, где вместо концентрации ионов и их скорости использовались суммарная плотность плазмы и массовая скорость, а для электрического поля применялось отдельное эллиптическое уравнение без временных производных. В систему уравнений включено было также уравнение для энтропии, т.е. учитывалась зависимость давления от температуры, здесь же для простоты рассматривается баротропный вариант модели (изотермический согласно газовой динамике). Анализ уравнений, приведенных в [10], показывает, что электрическое поле в них можно исключить, как и в случае уравнений, используемых здесь.

В том виде, как система написана здесь, электромагнитную гидродинамику легко интерпретировать как уравнения обычной магнитной гидродинамики с добавленными дисперсионными членами, поэтому можно предположить наличие бездиссипативных структур разрывов.

2.1. Дисперсионное соотношение

Система уравнений выведена из гиперболических уравнений и в значительной степени сохраняет их свойства. Дисперсионное соотношение, получаемое из линеаризованного варианта уравнений (2.4) подстановкой, в которой все неизвестные пропорциональны $\exp(ikx - \omega t)$, в недиссипативном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & (nr + k^2)^2 V_0^6 - \left[n |\mathbf{B}|^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta) + |\mathbf{B}|^2 [r \sin^2 \theta + \cos^2 \theta (R_i^2 + R_e^2)] k^2 + (nr + k^2)^2 b^2 V_0^4 \right] + \\
 & + \cos^2 \theta |\mathbf{B}|^2 [r^2 + 2nr^2 b^2 + (R_e^2 + R_i^2) b^2 k^2] V_0^2 - r^2 \cos^4 \theta b^2 |\mathbf{B}|^4 = 0, \tag{2.7} \\
 & r = R_i R_e, \quad V_0 = \omega/k - u.
 \end{aligned}$$

Здесь θ – угол между вектором напряженности магнитного поля и осью Ox . Инвариантность дисперсионного соотношения относительно преобразования $k \rightarrow -k$ и $V_0 \rightarrow -V_0$ связана с инвариантностями уравнений относительно вращения вокруг оси x , относительно сдвигов по v и w , а также относительно преобразований

$$\begin{aligned}
 & (t, x, u, v, w, B_y, B_z) \rightarrow (-t, -x, u, w, v, B_z, B_y), \\
 & (t, x, u, v, w, B_y, B_z) \rightarrow (t, -x, -u, w, v, -B_y, -B_z).
 \end{aligned}$$

Имеются быстрая и медленная магнитозвуковые и альвеновская ветви дисперсионного соотношения. Графики дисперсионных кривых исследованы в [4]. Скорости распространения быстрых и медленных магнитозвуковых, а также альвеновских волн, для данных уравнений конечны при любых значениях длины волны ($k \in R$). При $k \rightarrow 0$ скорости распространения волн совпадают с соответствующими скоростями в МГД. Очевидно, можно выделить некоторый класс систем

уравнений, не являющихся гиперболическими, но сохраняющих конечную скорость распространения физически осмысленных волн, сюда относятся, в частности, уравнения волн в трубах [15].

2.2. О числе граничных условий

Рассматриваемая ниже задача о распаде произвольного разрыва математически ставится в неограниченной области. Фактический же расчет делается в конечной области с границами, достаточно удаленными от области распада, задаются значения величин на границе и нулевые значения производных, если постановку производных требует численная схема. Поэтому возникает вопрос о корректной постановке краевой задачи. Согласно теории, основанной на анализе дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$ [5], [17], [18], число граничных условий на краях расчетной области должно определяться на левой границе числом корней $k(\omega)$ с $\text{Im } k > 0$ при $\text{Im } \omega > M > 0$, а на правой границе – числом корней с $\text{Im } k < 0$, здесь имеются в виду неподвижные границы; принято говорить, что эти числа определяют число уходящих волн, подробное объяснение такой терминологии есть в [18]. Величина M выбирается достаточно большой так, чтобы значения $k(\omega)$ не пересекали действительную ось. Данные уравнения формально не входят в класс уравнений, описанных в [18], из-за наличия пространственно-временных производных, но будем применять этот критерий. Большим значениям $|M|$ в случае магнитозвуковых и альвеновских волн соответствуют волны с большим $|k|$, при этом $k \approx \omega/V$, $V = V_0 + u \in R$. У быстрых магнитозвуковых волн скорость V при $k \rightarrow \infty$ такая же, как в газовой динамике, если рассматривать первые два уравнения системы (2.4) без включения в них магнитного поля. В этом смысле можно говорить о дозвуковом и сверхзвуковом течении. Скорость альвеновских и медленных магнитозвуковых волн при $k \rightarrow \infty$ равна u . Для корней $k(\omega)$, соответствующих рассмотренным волнам, понятие приходящих и уходящих волн совпадает с этим понятием для гиперболических систем, если рассматривать указанные выше скорости как характеристические. Волна уходящая, если характеристическая скорость положительна для левой границы и отрицательна для правой. Кроме того, имеются еще четыре ветви $k(\omega)$, для которых в соответствии с (2.7) $k_{1,2,3,4} \approx \pm i\sqrt{nR_i R_e}$ при больших значениях $|\omega|$, т.е. две из этих волн всегда приходящие и две уходящие, скорость распространения этих волн может быть сколь угодно большой (при этом k – комплексное число). Таким образом, при сверхзвуковом течении требуется 8 или 2 условия на границах, при дозвуковом – 7 или 3 условия, при $u = 0$, возможно, достаточно трех условий, но это требует дальнейшего исследования.

2.3. Применение конечно-разностных численных методов

В расчетах для устранения схемной диссипации используются схемы с центральными пространственными разностями, поэтому с обеих сторон на границах ставится одинаковое число условий. Ранее проведенные исследования показали, что наличие избыточного числа граничных условий обычно не создает проблем в решении задачи о распаде произвольного разрыва [5]. Стоит обратить внимание на существенное различие при применении конечно-разностных методов к системам (2.4) или (2.5), (2.6) или к системе, приведенной в [10]. В случае систем (2.4) или (2.5) число граничных условий при применении центральных разностей совпадает с числом уравнений, т.е. равно шести, что меньше необходимого числа в общем случае, поставить граничные условия для производных невозможно. Попытка расчета системы (2.4) центральными разностями ранее проводилась автором с применением неявной аппроксимации для пространственно-временных производных, система неявных уравнений успешно разрешалась методом итераций. Но была обнаружена краевая неустойчивость, делавшая применение такого метода невозможным или требовавшая модификации уравнений вблизи границ, например путем введения поглощающих диссипативных зон с производными высокого порядка. При применении систем (2.6) или [10] в случае одномерного баротропного варианта уравнений без учета термодинамики число условий равно 10, что больше, чем нужно и равно общему числу корней $k(\omega)$, поскольку дисперсионное соотношение (2.7) описывается полиномом от k десятой степени. Таким образом, можно было гарантировать достаточное число граничных условий даже без исследования дисперсионного соотношения. В случае расчета (2.6) по сравнению с расчетом (2.4) дополнительно ставятся условия на производные от v , w , B_z , B_y , в случае уравнений [10] дополнительно ставятся два условия на электрическое поле и два условия на производные магнитного поля. Результаты

одномерного расчета системы [10] для холодной плазмы, т.е. без учета давления и без уравнения для энтропии, приведены в [11] для уединенных волн в вакууме. Применялся метод Лакса–Вендроффа. Отметим, что в [11] для упрощения расчетов использовалось представление части уравнений через комплексные переменные, что связано со свойствами инвариантности этих уравнений при перестановке неизвестных. Анализ уравнений из [10] и [11] показывает, что, исключив из них электрическое поле, можно получить систему с пространственно-временными производными от магнитного поля, аналогичную (2.6), но требующую постановки при баротропном варианте или для холодной плазмы только восьми граничных условий.

Для решения системы (2.6) использовалась консервативная численная схема с аппроксимацией временных производных по методу Рунге–Кутты четвертого порядка и центральными разностями для пространственных производных. В работе [15] проводилось исследование такой схемы, было показано, что схемная диссипация в ней пропорциональна шестому порядку от временного шага. Было показано, что, по крайней мере, для скалярных эволюционных уравнений она условно устойчива, показатель степени в условии устойчивости $\tau < ch^q$ определяется показателем роста $\omega(k)$ при $k \rightarrow \infty$ (для скалярных эволюционных уравнений q – порядок старшей производной), при этом роста возмущений нет. Численный эксперимент показывает, что все это подтверждается и при применении ее для данной системы уравнений. Краевой и какой-либо иной неустойчивости при подходящем выборе временного шага обнаружено не было. Все пространственно-временные производные (волны, распространяющиеся с бесконечной скоростью связаны именно с ними) аппроксимируются на каждом шаге с помощью неявных шаблонов, скорости распространения магнитозвуковых и альвеновских волн конечны, поэтому, как и предполагалось, расчеты показали, что для достижения устойчивости при выборе соотношения между пространственным и временным шагом в недиссипативном случае можно ориентироваться на классическое условие Куранта $\tau < Ch$, где τ и h – временной и пространственный шаг, C – константа. Поскольку используемая численная схема обладает очень малой схемной диссипацией, пропорциональной τ^6 , все наблюдаемые схемные эффекты связаны с недиссипативной схемной дисперсией. Они выявляются путем изменения пространственного шага, длина волны при схемных эффектах меняется при изменении шага. Для выявления опрокидывания волны использовалась методика, разработанная в [15]. В случае наличия классического решения амплитуда схемных волн, если они есть, быстро убывает при уменьшении пространственного шага, если уменьшения нет или развивается вычислительный блоуап, то можно предположить отсутствие классического решения.

Построение конечно-разностной схемы, набор и проверку вычислительных операторов значительно упрощает не непосредственная аппроксимация уравнений (2.6), а использование новых переменных для расчета разностных аппроксимаций правых частей последних четырех уравнений системы (2.4) без включения пространственно-временных производных и последующая подстановка этих переменных в консервативные разностные аппроксимации уравнений (2.5). Упрощение дает также использование подпрограммы для расчета v и B_y с использованием ее же для расчета w и B_z путем ссылки в нее R_e^{-1} и R_r^{-1} , взятых с противоположным знаком. В последних четырех уравнениях систем (2.5) и (2.4) при замене $B_z \rightarrow B_y$, $v \rightarrow w$ меняются только знаки при некоторых членах.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУР РАЗРЫВОВ

3.1. Основные элементы теории разрывов и особенности постановки задачи о распаде разрыва

В классической теории разрывов [18] есть понятие упрощенных уравнений, это нелинейные гиперболические уравнения (в данном случае уравнения МГД без диссипации), в которых имеются решения с разрывами, и понятие полных уравнений с диссипацией (в данном случае уравнения МГД с диссипацией), в которых этим разрывам соответствуют гладкие решения с локальными структурами разрывов, т.е. переходами между однородными состояниями. Стационарные структуры разрывов находятся как решения уравнений бегущих волн, т.е. уравнений, описывающих стационарные решения в системе координат, движущейся со скоростью разрыва. В теории бездиссипативных структур разрывов [5], [13], [14] рассматриваются два типа структур, возникающих при решении задачи о распаде произвольного разрыва. Расширяющиеся со временем структуры разделяют однородные состояния, в упорядоченном случае они описываются автомодельными решениями усредненных уравнений, усредненные уравнения в этом случае играют

роль упрощенных уравнений. Другой тип – не расширяющиеся локальные структуры, т.е. переходы между однородными, периодическими или стохастическими состояниями, эти структуры могут быть элементами расширяющихся структур или быть самостоятельными в случае переходов между однородными состояниями. На границах волновых зон могут быть также структуры солитонного типа, т.е. переходы между однородным и периодическим состоянием, в котором краевая волна приближается к уединенной при $t \rightarrow \infty$. Роль полных уравнений в теории недиссипативных разрывов играют недиссипативные уравнения с дисперсией (в данном случае уравнения ЭМГД без диссипации), т.е. с наличием зависимости скорости волн от волнового числа. Здесь под понятием дисперсия подразумевается именно недиссипативная дисперсия. В случае, если в полные уравнения добавляется слабая диссипация, расширяющиеся структуры замещаются протяженными локальными структурами, упорядоченные волновые зоны в них также описываются усредненными уравнениями, локальные стационарные бездиссипативные структуры при этом сохраняются [13].

Согласно теории каждой ветви дисперсионного соотношения, проходящей через начало координат, при решении задачи о распаде разрыва должна соответствовать своя структура или простая волна, и решения могут включать в себя быстрые магнитозвуковые структуры, альвеновские структуры и медленные магнитозвуковые структуры. При длительном расчете решения должны представлять собой комбинации из однородных участков, центрированных простых волн, описываемых уравнениями МГД, и структур разрывов, описываемых уравнениями ЭМГД.

Для сравнения помимо расчетов ЭМГД проводились также расчеты обычной МГД, в которых возникали схемные бездиссипативные структуры, а также расчеты с дополнительными диссипативными членами, в которых возникали классические локальные структуры с диссипацией.

Граничные условия на разрывах для магнитной и электромагнитной гидродинамики получаем из интегральной формы уравнений (2.5), имеющих вид законов сохранения

$$-U[n] + [nu] = 0, \quad (3.1)$$

$$-U[nu] + \left[nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right] = 0, \quad (3.2)$$

$$-U \left[nv + \left\{ R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} \right] + \left[nuv - B_x B_y + \left\{ u R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} \right] = 0, \quad (3.3)$$

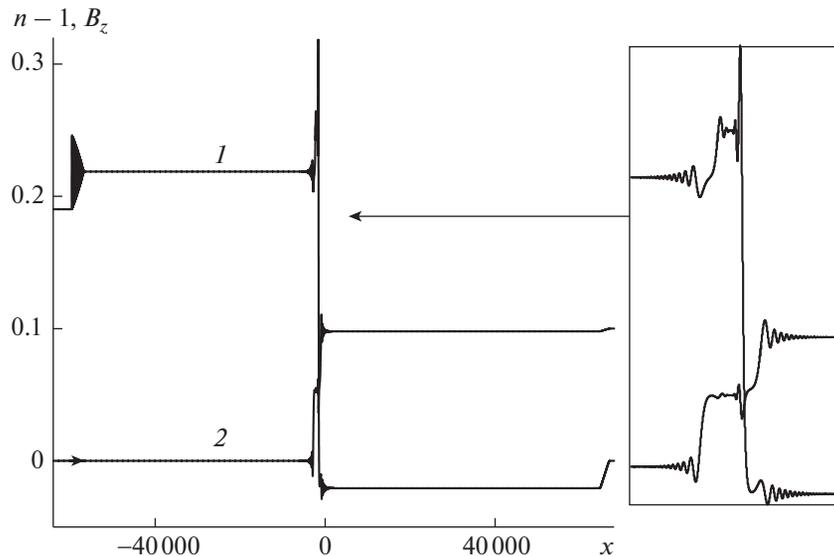
$$-U \left[nw - \left\{ R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \right] + \left[nuw - B_x B_z - \left\{ u R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \right] = 0, \quad (3.4)$$

$$-U \left[B_y - \left\{ R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \right] + \left[u B_y - B_x v - \left\{ u R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \right] = 0, \quad (3.5)$$

$$-U \left[B_z + \left\{ R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \right] + \left[u B_z - B_x w + \left\{ u R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Здесь U – скорость разрыва, квадратные скобки обозначают разность величин по разные стороны разрыва, в случае МГД члены с производными в фигурных скобках не включаются, они включаются, если уравнения ЭМГД рассматриваются в качестве упрощенной системы, когда классического решения не существует. В случае разрыва диссипативного типа коэффициенты при диссипативных членах в уравнениях (2.5) можно считать стремящимися к нулю (см. исследование структуры разрыва ниже), поэтому соответствующие им члены с производными в условия на разрывах в случае ЭМГД не включены. Можно показать в случае ЭМГД, используя условие квазинейтральности и формулу (2.2), что из условий сохранения массы (3.1) и изменения импульса ионов (3.2)–(3.4) следует сохранение полной массы и импульса плазмы на разрыве.

Условия на разрывах для МГД при расчетах задачи о распаде разрыва на основе ЭМГД можно использовать для получения начальных данных для решений с преимущественной структурой определенного типа. Для этого можно задать значение U и значения величин по одну сторону разрыва, а затем найти значения по другую сторону разрыва. В недиссипативном случае для быстрых и медленных магитозвуковых волн при расчете уравнений ЭМГД получаются расширяющиеся со временем структуры, а при включении диссипации – локальные, для которых приведенные выше соотношения выполняются точно. Для расширяющихся структур эти соотношения после исключения U должны выполняться приблизительно для параметров по разные стороны разрыва, но в проведенных расчетах существенных отличий обнаружено не было, видимо,



Фиг. 1.

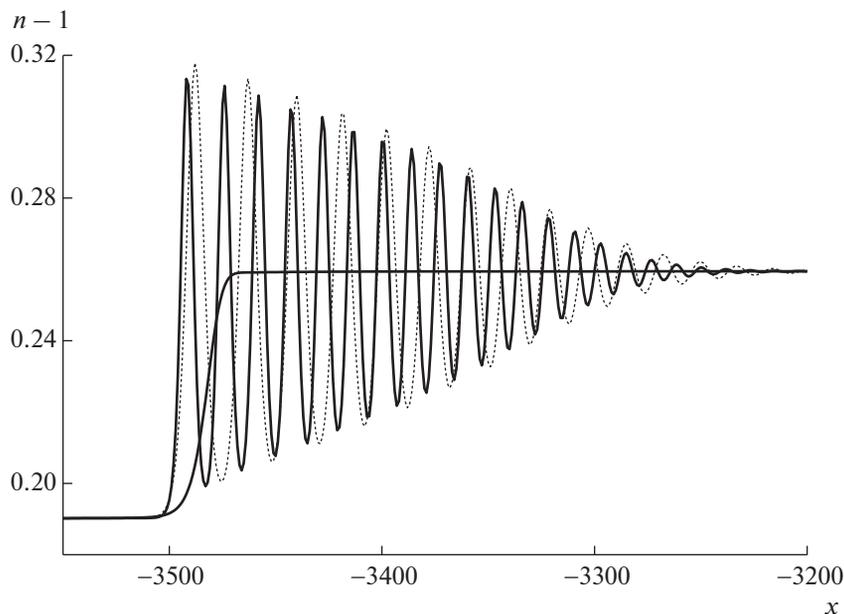
это связано с небольшими амплитудами разрывов. Скорости распространения локальных недиссипативных разрывов на границах волновых зон заметно отличаются от получаемых из (3.1)–(3.6). Для альвеновских волн удобнее использовать известные условия вращения [1] поперечного магнитного поля и поперечной скорости без изменения остальных параметров: $[v] = \pm[B_y]/n^{1/2}$, $[w] = \pm[B_z]/n^{1/2}$, $[B_y^2 + B_z^2] = 0$. В случае отсутствия вращения в начальных данных альвеновские структуры не возникают, хотя альвеновские волны в ЭМГД, но не в МГД модели все же наблюдаются. Начальные данные для всех неизвестных брались в виде сглаженной ступеньки, сглаживание производилось при помощи функции $\tanh(x/l_0)$ с помощью параметра l_0 варьировалась длина переходной зоны.

Программный комплекс был оборудован средствами, позволяющими вырезать некоторый участок решения с целью выделения структуры определенного типа и фиксировать новые граничные условия, а также средствами расширения расчетной области. Кроме того, было включено средство для автоматического периодического расширения области, с одной стороны, и сокращения, с другой. Это нужно для отслеживания волн, движущихся с некоторой скоростью, и это предпочтительнее, чем изменение величины u с целью изменения скорости системы координат наблюдателя, поскольку такое изменение может ухудшать условие устойчивости и усиливать схемные дисперсионные эффекты.

Пример расчета полной задачи о распаде произвольного разрыва для ЭМГД приведен на фиг. 1, показаны графики $n - 1$ – кривая 1 и B_z – кривая 2, $b^2 = 0.25$, $t = 60\,000$, $\theta = 1.555$, $n = 1$, $|V| = 1$ для состояния справа. Имеются слева направо полностью сформировавшаяся быстрая магнитозвуковая структура солитонного типа (первая волна в этом решении стремится к уединенной волне при $t \rightarrow \infty$), формируются альвеновская структура, медленная магнитозвуковая структура и еще одна медленная магнитозвуковая структура, еще одна альвеновская структура, справа имеется полностью сформировавшаяся быстрая магнитозвуковая простая волна. Растянутый по оси x фрагмент графиков формирующихся альвеновских и медленных магнитозвуковых структур показан в рамке. В связи с большими различиями в скорости распространения, характерной длине волны и во времени, необходимым для формирования структуры, вырезка фрагментов с отдельными структурами предпочтительнее.

3.2. Быстрые магнитозвуковые структуры

В случае быстрых магнитозвуковых волн образуются структуры солитонного типа, структуры с излучением и нестационарные структуры хаотического типа. Волновые зоны в упорядоченных магнитозвуковых структурах могут быть описаны усредненными уравнениями. Дисперсионная

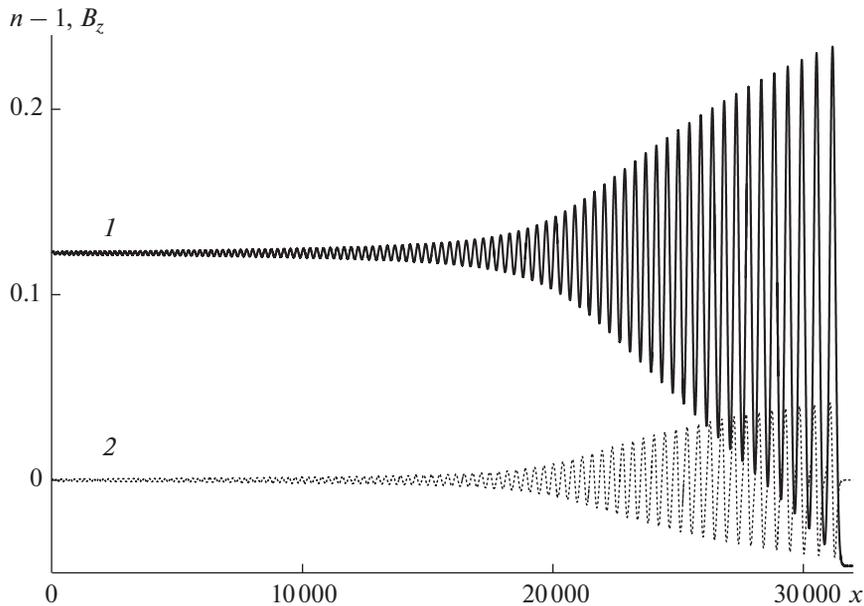


Фиг. 2.

ветвь быстрых магнитозвуковых волн может быть двух типов: с точкой перегиба при $k > 0$ и ростом групповой скорости в окрестности начала координат и без точки перегиба при $k > 0$ с убыванием групповой скорости при $k > 0$ на всей ветви. В первом случае касательная к дисперсионной ветви пересекает эту ветвь при $k > 0$, прогнозируется решение нестационарного типа с двухволновой хаотической зоной, во втором случае — структура солитонного типа. В обоих случаях при увеличении амплитуды разрыва возможен переходный вариант решения — структура с излучением, т.е. структура с локальным разрывом типа перехода между однородным и периодическим состоянием с конечной длиной волны. Эти исследования подробно изложены в работах [4]–[8]. Практически в случае дисперсионной кривой с точкой перегиба, если параметры разрыва не близки к переходным значениям, решение неотлично от решения солитонного типа, только на границе волновой зоны график плотности выглядит как уединенная волна-яма, тогда как в случае без точки перегиба это уединенная волна-горб, кроме того, направление затухания волн в волновой зоне противоположно случаю дисперсионной кривой без точки перегиба.

При добавлении вязкости упорядоченные структуры замещаются стационарными структурами, которые в случае слабой вязкости могут быть описаны усредненными уравнениями. В случае нестационарных хаотических бездиссипативных структур для получения стационарных решений требуются конечные значения вязкости, такое исследование проводилось в [13] для обобщенного уравнения Кортевега–Бюргера с производной пятого порядка. Уравнение Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка — модельное уравнение для быстрых магнитозвуковых волн [3], [5].

В случае уравнений МГД численная схема может сама добавить дисперсию, получаются решения со структурами солитонного типа, качественно неотличимые от решений системы ЭМГД, фиг. 2, показана структура, распространяющаяся влево, аналогичная имеющейся на фиг. 1, сплошная жирная линия — МГД, штриховая — ЭМГД (дисперсионная кривая быстрых магнитозвуковых волн ЭМГД не имеет точки перегиба при $k \neq 0$), тонкая линия — МГД с магнитной вязкостью $\varepsilon = 1$; $b = 0$, $t = 4000$. Отличие между случаями МГД и ЭМГД только в длине волны в волновой зоне, но в случае МГД длина волны привязана к пространственному шагу, при уменьшении шага уменьшается и длина волны по закону, близкому к пропорциональному. При уменьшении пространственного шага имеется сходимость огибающей волновой зоны в решении для МГД, а в случае ЭМГД есть еще сходимость по длине волны и при непродолжительных расчетах можно проверить поточечную сходимость. При большой амплитуде разрыва в случае МГД возможен вычислительный блоуп. Добавление вязкости для МГД приводит к локальным стационарным структурам.

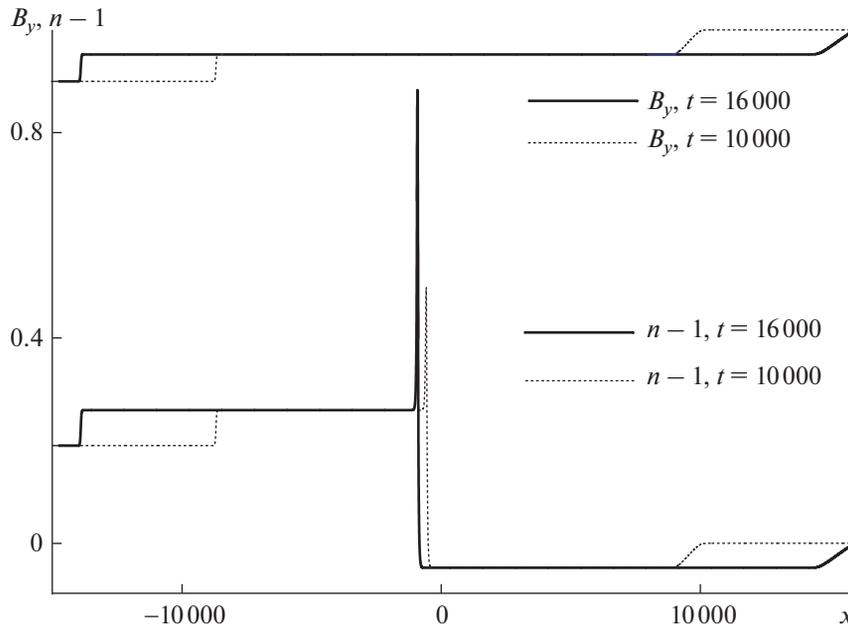


Фиг. 3.

3.3. Медленные магнитозвуковые структуры

Структуры медленных магнитозвуковых волн теоретически должны быть двухволновыми нестационарными [5], поскольку касательная к дисперсионной ветви в начале координат всегда пересекает альвеновскую ветвь [4] (резонанс). Прямая $\omega = U_l k$, соответствующая скорости U_l локального медленного магнитозвукового разрыва тоже пересекает эту ветвь. В случае большой амплитуды разрыва есть еще и пересечение быстрой магнитозвуковой ветви. Это означает, что солитонного решения нет и должны возникать нестационарные двухволновые и трехволновые структуры. Но при не слишком большой амплитуде разрыва в расчетах наблюдаются структуры солитонного типа, поскольку согласно теории амплитуда второй излучаемой волны мала. На фиг. 3 показана структура, распространяющаяся вправо, показаны графики $n - 1$ — кривая 1 и B_z — кривая 2, $b^2 = 0.5$, $t = 85\,000$. В [7] численно исследовалась эволюция приближенного решения ЭМГД для медленных магнитозвуковых волн типа уединенной волны уравнения Кортевега—де Вриза. Наблюдался распад уединенной волны, но излучаемой альвеновской волны обнаружить не удалось, излучались медленные магнитозвуковые волны. Провести расчет с достаточно мелким пространственным шагом, чтобы добиться того, чтобы на длине резонансной излучаемой волны, прогнозируемой теорией, располагалось достаточное количество шагов сетки, не представляется возможным. При увеличении амплитуды разрыва все же выявляются двухволновые решения качественно правильного вида: первая солитоноподобная волна излучает короткую волну малой амплитуды внутрь волновой зоны. Но длина короткой волны меняется с изменением шага сетки, амплитуда ее не уменьшается при уменьшении шага, что указывает на возможность отсутствия классического решения и на недостаточно малую величину пространственного шага, чтобы точно рассчитать короткие волны. В наблюдаемой короткой волне существуют только изменения n и u , т.е. эта волна имеет в основном газодинамический характер. Ее наличие связано с резонансом с быстрой магнитозвуковой ветвью. Можно предположить, что при включении слабой вязкости здесь возникнет гибридная диссипативно-дисперсионная структура с излучением коротких волн, наблюдавшаяся для волн в трубах внутри структуры продольных волн [15].

В холодной плазме ($b = 0$) медленные магнитозвуковые волны вырождаются (обе дисперсионные ветви описываются соотношением $\omega = uk$), в решениях задачи о распаде разрыва наблюдается локальный большой рост плотности со временем (расчеты не позволяют сделать однозначный вывод, идет ли речь о блоуапе или рост может продолжаться сколь угодно долго). Этот рост имеется как в случае МГД, так и ЭМГД уравнений и не устраняется включением магнитной и газодинамической вязкости. При расчетах с $b \rightarrow 0$ получаются решения с двумя медленными



Фиг. 4.

магнитозвуковыми разрывами с $n \rightarrow \infty$ в области между ними. Но в каком-то смысле решение задачи о распаде разрыва для холодной плазмы все же существует. На фиг. 4 показаны графики решения для МГД с $b = 0$, $\theta = 1.555$, $n = 1$, $|\mathbf{V}| = 1$ для состояния справа и включением магнитной вязкости, $\varepsilon = 1$; $B_z = 0$, $w = 0$, альвеновских волн нет. Выясняется, что в области между двумя магнитозвуковыми разрывами $B_y = \text{const}$, из уравнения для B_y системы (2.4) следует, что $B_x v - B_y u = \text{const}$ и что уравнение для v совпадает с уравнением для u , эволюция решения описывается первыми двумя уравнениями газодинамического типа. Область с локальным ростом плотности можно интерпретировать как структуру разрыва, на котором $[B_y] = 0$, $B_x[v] - B_y[u] = 0$. Имеем два условия на рассматриваемом разрыве без включения в них его скорости. Исключив из (3.1)–(3.3), (3.5) на быстром магнитозвуковом разрыве слева скорость разрыва, получим три соотношения. С учетом наличия аналогичных трех соотношений для простой волны (или в случае иных начальных данных для быстрого магнитозвукового разрыва) справа, приходим к выводу, что имеющихся соотношений достаточно, чтобы определить величины n , u , v , B_y на однородных участках.

Отметим, что утверждение об отсутствии в некоторых случаях ограниченного решения при $b = 0$ для уравнений ЭМГД уже делалось в [9]. Предлагалось использовать при расчетах холодной плазмы малые значения b .

3.4. Альвеновские структуры

Вначале расчеты проводились методом вырезки формирующейся альвеновской структуры, выявляемой визуально между быстрой и медленной магнитозвуковой волной. При этом величины u , n , $B_y^2 + B_z^2$, $v^2 + w^2$ по разные стороны структуры оказывались одинаковыми, что позволило в дальнейшем применять в качестве начальных данных решения уравнений МГД типа простой альвеновской волны [1] с углом вращения поперечного магнитного поля пропорциональным $1 - \tanh(x/l_0)$. Расчеты показывают, что структуры альвеновского типа имеют нетипичный вид для теории обратимых структур разрывов. Они расширяются со временем, имеются колебания, но солитонных или локальных структур не образуется. На одном краю альвеновской структуры имеется колебание с максимальной амплитудой, длина волны этого колебания растет со временем, а значения производных уменьшаются, за этим колебанием идут пространственно затухающие колебания. В зависимости от величины θ (для альвеновской структуры эта величина по обе

стороны одинакова) при фиксированных значениях $n = 1$ и $|\mathbf{B}| = 1$ по обоим сторонам структуры направление затухания может быть как вправо, так и влево в зависимости от того, растет или убывает групповая скорость при увеличении k от нулевого значения. Согласно (2.7) при малых k имеем

$$\begin{aligned} \omega &= (u + V_a)k - P/Qk^3 + O(k^5), \\ P &= 2nrV_a^5 - \left\{ |\mathbf{B}|^2 [r \sin^2 \theta + \cos^2 \theta (R_i^2 + R_e^2) + 2nrb^2] \right\} V_a^3 + \cos^2 \theta |\mathbf{B}|^2 (R_e^2 + R_i^2) b^2 V_a, \\ Q &= 6n^2 r^2 V_a^4 - 4[n |\mathbf{B}|^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta) + n^2 r^2 b^2] V_a^2 + 2 \cos^2 \theta |\mathbf{B}|^2 (r^2 + 2nrb^2), \\ V_a &= \cos \theta |\mathbf{B}| / n^{1/2}. \end{aligned}$$

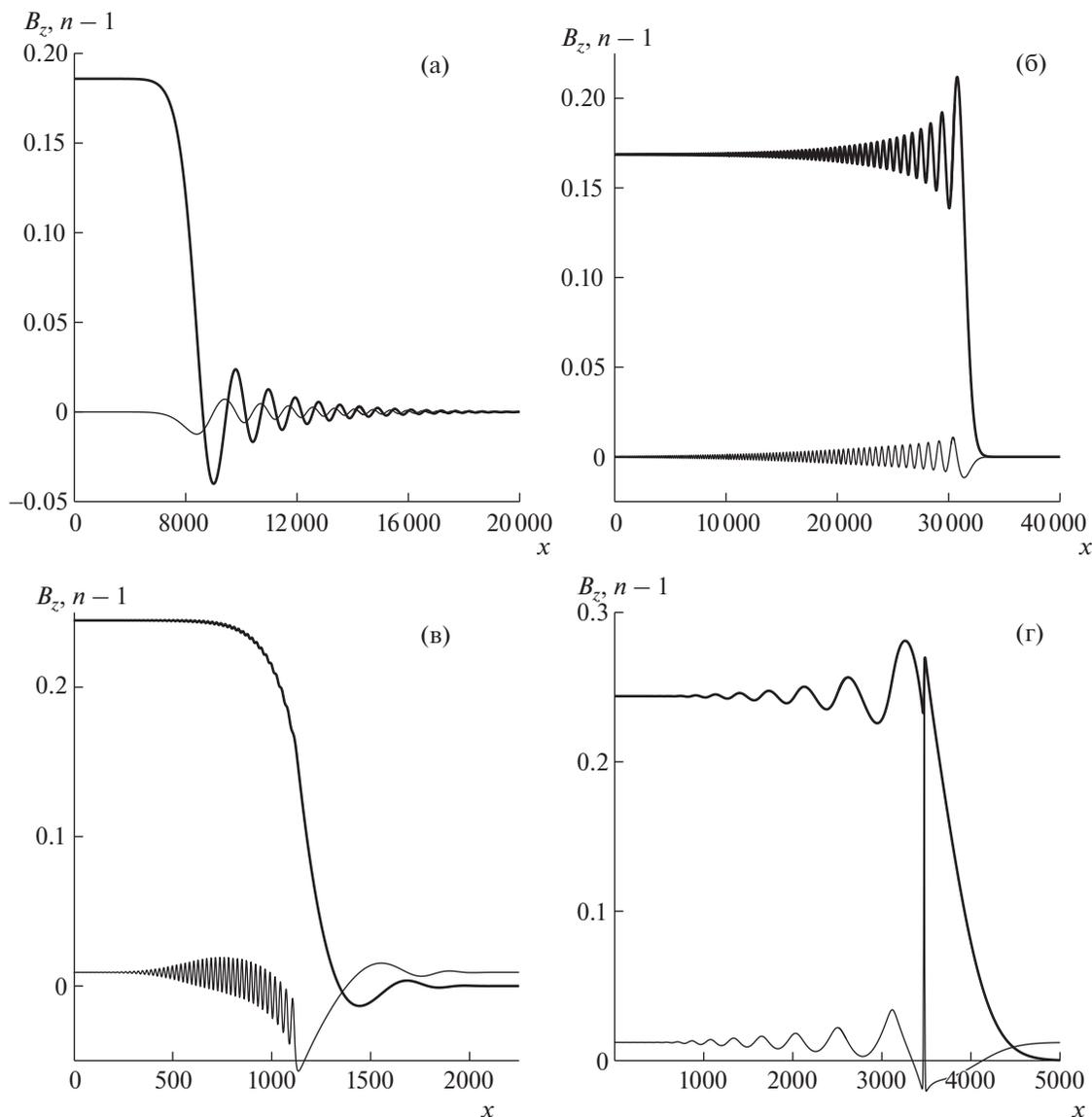
Поскольку R_e – большая величина, то нулевое значение P достигается при $\theta \approx \arccos(bn^{1/2}/|\mathbf{B}|)$.

Примеры обоих вариантов альвеновской структуры показаны на фиг. 5а и фиг. 5б, $b^2 = 0.5$, $t = 500\,000$, даны графики B_z жирной линией и $n - 1$ тонкой линией, фиг. 5а соответствует первому варианту решения, $\theta = 0.85 > \pi/4$, фиг. 5б соответствует второму варианту, $\theta = 0.75 < \pi/4$. В [3] для слабонелинейных альвеновских волн выводилось модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза с кубической нелинейностью (МКДВ). Применение этого уравнения для описания альвеновских структур проблематично. У МКДВ есть нулевой уровень амплитуды, относительно которого можно получить симметрично отраженные решения, любые другие значения амплитуды таким свойством не обладают. Для альвеновских волн тоже можно получить симметрично отраженные решения, но определенного значения угла поворота магнитного поля, относительно которого можно делать отражение, нет. У МКДВ простые волны описываются нелинейным уравнением переноса, они центрированные, их параметры зависят от x/t [5]. Параметры альвеновских простых волн в МГД зависят от $x - Ut$ [1]. В зависимости от знака при дисперсионном члене решения о распаде разрыва для МКДВ имеют вид центрированной простой волны, переходящей в центрированную простую волну огибающей волновой зоны, волна на границе этих участков имеет солитоноподобный вид, или же решения содержат кинк и центрированную простую волну (обычную или волну огибающей) [5], при любом знаке есть также решения с обычными солитонными структурами. В решениях ЭМГД есть длинноволновый медленно расширяющийся участок, близкий к простой волне МГД, но четкой границы у этого участка нет.

Расширение альвеновской структуры сохраняется при добавлении магнитозвуковой или газодинамической вязкости. Включение вязкости, как магнитной, так и газодинамической при расчете полной задачи о распаде разрыва ведет к замещению однородного участка между медленной магнитозвуковой и альвеновской структурой участком с изменяющимися величинами u и n . При этом справа и слева от альвеновской структуры значения u и n не совпадают, т.е. это уже не совсем альвеновская структура. Этот эффект наблюдается как в случае ЭМГД, так и МГД, но мало заметен в случае слабой вязкости.

В случае недостаточно протяженного перехода в начальных данных через некоторое время может возникать опрокидывание альвеновских волн. Опрокидывание выявляется путем обнаружения коротких схемных излучаемых волн аналогичных наблюдавшимся при расчетах магнитозвуковых волн при использовании уравнений МГД, фиг. 5в, $b^2 = 0.5$, $\theta = 0.84675$, $|\mathbf{B}| = 1.0076$, $t = 15000$, первый вариант. В обоих вариантах схемная волна излучается и затухает в левом направлении. По мере расширения структуры эти волны исчезают. Если же в случае варианта 1 на начальном этапе гладкое решение все же существует, то это качественно правильный вид решения, поскольку есть пересечение прямой $U = \omega/k$ с альвеновской ветвью при $k > 0$, а групповая скорость коротких альвеновских волн убывает при росте k . При увеличении шага сетки схемные волны исчезают.

При удлинении переходного участка в начальных данных в случае варианта 2 вместо излучаемых волн возникают локализованные схемные структуры с концентрацией плотности, фиг. 5г, $b^2 = 0.5$, $\theta = 0.76025$, $|\mathbf{B}| = 1.0512$, $t = 120\,000$. Эти структуры движутся вправо и могут со временем уходить из области альвеновской структуры по мере ее расширения, образуя уединенные волны, фиг. 6, $b^2 = 0.5$, $\theta = 0.3834$, $|\mathbf{B}| = 0.9463$. Показанная уединенная волна возникла в ходе расчета структуры медленной магнитозвуковой волны, альвеновской структуры разрыва в этом расчете не было из-за того, что не было вращения поперечного магнитного поля и скорости в на-



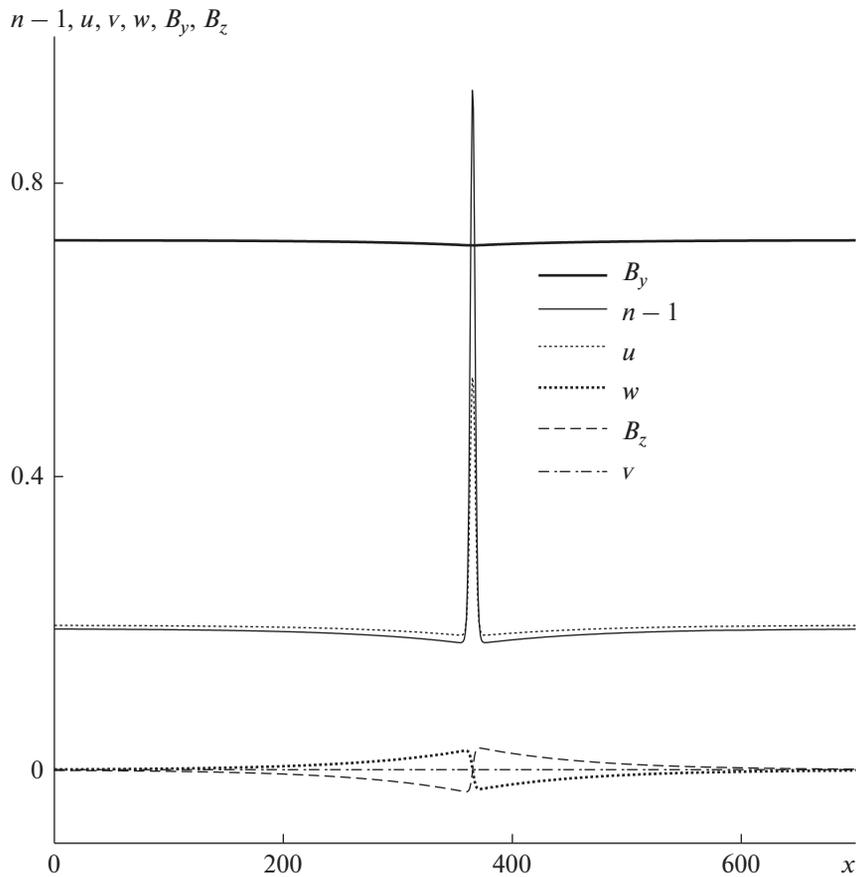
Фиг. 5.

чальных данных, но возникла альвеновская волна колебательного типа, которая опрокинулась. Несколько таких схемных структур не мешают расчету, но в случае большого количества этих структур возникает хаотизация. Увеличение числа схемных структур при опрокидывании волны наблюдается при уменьшении пространственного шага. Наоборот, при увеличении шага эти структуры пропадают. При дальнейшем увеличении длины переходного участка в начальных данных опрокидывание исчезает.

При включении слабой газодинамической вязкости в случае опрокидывания в решении может возникать структура типа ударной волны, фиг. 7, $\lambda = 0.125$, $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, $b^2 = 0.5$, $\theta = 1.0414$, $|\mathbf{B}| = 1.0697$, первый вариант решения, $t = 20000$. Ее амплитуда при расчете альвеновской структуры со временем уменьшается и формируется классическое гладкое решение. Этот тип разрыва рассматривается ниже. Сходимость при уменьшении шага сетки при расчетах с вязкостью есть.

3.5. Анализ разрывов в решениях уравнений электромагнитной гидродинамики

В ходе расчетов было установлено существование структур типа газодинамических ударных волн при включении малой газодинамической вязкости (при этом достаточно включать ее только в уравнение для u), фиг. 7. Включение магнитной вязкости к такой структуре не приводит.



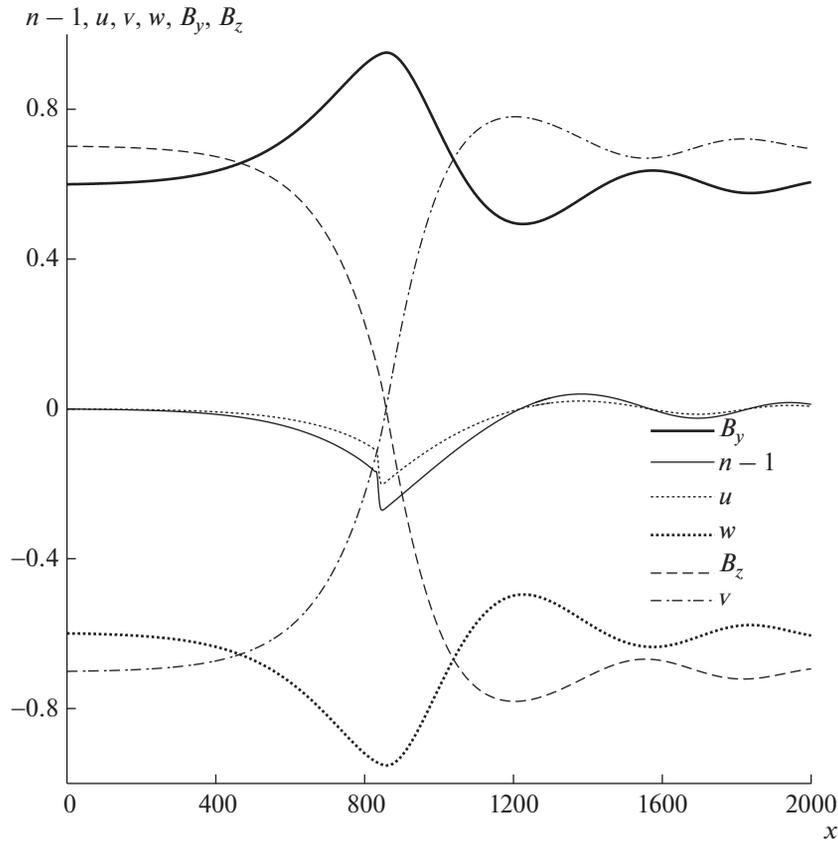
Фиг. 6.

В полученной структуре $[v] = 0$, $[w] = 0$, $[B_y] = 0$, $[B_z] = 0$, это можно рассматривать как четыре дополнительных условия, выявляемые при исследовании структуры разрыва. Это приводит к тому, что скорость разрыва и скачки величин u и n определяются соотношениями (3.1), (3.2), т.е. также как в газовой динамике. Оставшиеся соотношения (3.3)–(3.6) представляют собой условия на производные

$$\left[(u - U) \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[(u - U) \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] = 0,$$

$$\left[(u - U) \left(B_y - R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad \left[(u - U) \left(B_z + R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

Для эволюционности, т.е. математической корректности постановки задачи с разрывом, число условий на разрыве должно быть равно числу уходящих волн по обе стороны разрыва плюс одно условие, используется система координат, движущаяся со скоростью разрыва. В [18] это утверждение сформулировано для гиперболических систем, но по аналогии с условиями на границе, очевидно, оно верно и в общем случае. Напомним, что скорости быстрых магнитозвуковых волн при $k \rightarrow \infty$ совпадают с характеристическими скоростями в газовой динамике, поэтому с обеих сторон одна из быстрых магнитозвуковых волн входящая, а другая с одной стороны входящая, а с другой — уходящая, скорости коротких альвеновских и медленных магнитозвуковых волн равны u , величина $u - U$ на ударной волне определяет направление потока газа через разрыв и не меняет знак по разные стороны разрыва, поэтому если с одной из сторон волна входящая, то с другой она уходящая, среди оставшихся четырех волн из десяти две всегда уходящие и две всегда входящие. Число уходящих волн, как и в случае ударных волн в газовой динамике, здесь на две меньше числа входящих (9 и 11), поэтому условий, получаемых из законов сохра-



Фиг. 7.

нения, плюс четырех условий, обнаруженных в результате анализа структуры разрыва, достаточно для эволюционности.

Обнаруженные структуры в отличие от классической теории структур разрывов с диссипацией не являются точными решениями уравнений бегущих волн

$$\begin{aligned}
 -Un + nu &= c_1, & -Unu + nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2n - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} &= c_2, \\
 -U \left(nv + R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + nuv - B_x B_y + u R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial x} &= c_3, \\
 -U \left(nw + R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + nuw - B_x B_z - u R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \lambda \frac{\partial w}{\partial x} &= c_4, \\
 -U \left(B_y - R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u B_y - B_x v + u R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} &= c_5, \\
 -U \left(B_z + R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u B_z - B_x w + u R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} &= c_6.
 \end{aligned}$$

Здесь $c_{1,2,3,4,5,6}$ — константы. Приближенное решение, описывающее структуру рассматриваемых разрывов, при малых λ и μ находится из первых двух уравнений при условии $B_y^2 + B_z^2 = \text{const}$. Длина газодинамической структуры, т.е. длина области, на которой отклонение n и u от постоянных значений существенно, стремится к нулю при $\lambda + 2\mu \rightarrow 0$, поэтому наличие ненулевых значений производных $\partial v/\partial x$, $\partial w/\partial x$, $\partial B_y/\partial x$, $\partial B_z/\partial x$ оказывает пренебрежимо малое влияние на изменение v , w , B_y , B_z в области структуры. Сходимость к разрыву для величин u и n при $\lambda + 2\mu \rightarrow 0$ проверялась численно посредством решения уравнений в частных производных.

Учет вязкости электронного газа не приводит к принципиальным изменениям, поскольку согласно (2.2) продольные скорости электронов и ионов одинаковы.

Заметим, что в [10] были предложены условия на разрывах решений уравнений ЭМГД, они получались из дивергентного вида уравнений сохранения массы, импульса, энергии и преобразованного обобщенного закона Ома. К ним добавлялись условия отсутствия скачка магнитного поля, скачка касательного к поверхности разрыва электрического поля и скачка нормального тока, эти условия выводились из уравнений Максвелла исходя из отсутствия поверхностных токов и зарядов. Полученные здесь дополнительные условия на разрыве типа ударной волны аналогичные: скачка магнитного поля нет, используя формулу (2.3), можно убедиться, что из условий $[v] = 0$, $[w] = 0$, $[B_y] = 0$, $[B_z] = 0$ следует отсутствие скачка касательного (поперечного) электрического поля. Продольного тока в одномерном случае нет и в качестве условия на разрыве здесь это не используется.

В ходе расчетов без диссипации было выявлено, что при опрокидывании альвеновских волн схемная дисперсия может создавать недиссипативные структуры (кинки), фиг. 5г, фиг. 6. Судя по виду графиков, в этих структурах внутри концентрируется некоторое количество массы и импульса, которое меняется со временем, поэтому в нестационарном случае условия (3.1) и (3.2) могут не выполняться. В работе [10] подобные разрывы со скачком поперечного магнитного поля были исключены из рассмотрения в связи с тем, что такой скачок предполагает конечные значения тока, а значит, заряда и массы в бесконечно малом объеме. При выходе рассматриваемых структур на однородное состояние в их окрестности формируются уединенные волны с внутренним кинком, движущиеся с постоянной скоростью, фиг. 6, здесь выбрано однородное состояние с $B_z = 0$ и $w = 0$. В этих решениях имеется пространственная симметрия для переменных n , u , w , B_y и антисимметрия для переменных v и B_z . В понимании магнитной гидродинамики кинки внутри уединенных волн являются специальными структурами альвеновского разрыва (класс -1 согласно терминологии [14]). Кинки возникают за счет схемной дисперсии, описываемой членами с производными высокого порядка. Они сходны с решениями МКДВ, у этого уравнения в зависимости от знака при дисперсионном члене могут быть решения с симметричными кинками или без них [5]. Длинноволновая часть солитонного решения возникает за счет дисперсии самих уравнений. У этих уединенных волн скорость растет с ростом амплитуды, они обгоняют друг друга без заметного изменения параметров. Рассмотренные структуры – численный эффект, но их наличие показывает, что добавка в уравнения дисперсионных членов с высшими производными может привести к существованию структур такого типа. Даже если не найдется физических эффектов, формирующих такие структуры, это представляет математический интерес и может встречаться в других моделях с дисперсией.

3.6. Сравнение с результатами для волн в трубах с упругими стенками

Возможность отсутствия классических решений при некоторых начальных данных в системах с дисперсией уже обсуждалась в работе [15], в контексте решения уравнений волн в трубе с упругими стенками. В случае трубы с газом в отличие от системы, рассматриваемой здесь, число ветвей $\omega(k)$ совпадает с числом корней $k(\omega)$, но в случае трубы с жидкостью, как и здесь, уравнения можно привести к форме с пространственно-временной производной, общее число корней $k(\omega)$ на два корня больше, чем число ветвей $\omega(k)$. У этих уравнений, как и у рассматриваемой здесь системы, скорость распространения физически осмысленных волн с $k \in R$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине, т.е. исчезает дисперсия, поэтому волны могут опрокидываться. Было предложено, если непрерывного решения не существует, для расчета таких решений применять дополнительные диссипативные или дисперсионные члены с высшими производными. Были приведены примеры расчетов с возникающими при этом разрывами. Но диссипативные разрывы были элементами решения задачи о распаде произвольного разрыва, а не исчезали со временем как в случае опрокидывания альвеновской волны. Кроме того, использовалась лагранжева неконсервативная форма уравнений, все условия на разрыве в таком случае получаются как результат расчета структуры разрыва. Здесь в отличие от [15] используется именно физическая вязкость, что указывает, что такой разрыв может наблюдаться в реальности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщены уравнения ЭМГД. Проанализированы различные варианты записи уравнений ЭМГД на возможность их расчета конечно-разностным методом. Решена задача о распаде раз-

рыва. Исследованы структуры разрывов различных типов как разделяющие области, описываемые уравнениями МГД, так и разделяющие области, описываемые уравнениями ЭМГД. Для быстрых и медленных магнитозвуковых волн умеренной амплитуды получаются структуры, прогнозируемые теорией бездиссипативных разрывов, при большой амплитуде возможно опрокидывание волны, требующее включения вязкости или дополнительной дисперсии. В случае холодной плазмы две дисперсионные ветви медленных магнитозвуковых волн сливаются друг с другом. Это может приводить с течением времени к неограниченному локальному росту плотности. Вид альвеновских структур нетипичен для теории бездиссипативных разрывов в том смысле, что при их расширении солитонных или локальных структур не образуется. В зависимости от длины переходного участка в начальных данных для альвеновских структур возможно как возникновение сразу гладкого решения, так и опрокидывание волны, требующее на начальных этапах эволюции со временем рассмотрения решения ЭМГД с разрывом или включения дополнительных членов в уравнения. Условия на разрывах получены из уравнений ЭМГД в форме законов сохранения. В случае включения слабой газодинамической вязкости обнаружена структура разрыва решений ЭМГД типа ударной волны. Проанализирована эволюционность разрыва и найдены четыре дополнительные условия на разрыве посредством анализа структуры разрыва. Обнаружено, что при используемой численной схеме с центральными пространственными разностями и применением метода Рунге–Кутты четвертого порядка для аппроксимации временных производных в случае опрокидывания волн в решения могут быть автоматически включены различные структуры бездиссипативного типа или сделано сглаживание решения, что в некоторых случаях может быть полезно при расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
2. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in a cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 1159–1166.
3. Kakutani T., Ono H. Weak nonlinear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
4. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
5. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
6. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы для магнитозвуковой ветви холодной плазмы // Физ. плазмы. 2000. Т. 26. № 1. С. 1–8.
7. Бахолдин И.Б., Жарков А.А., Ильичев А.Т. Распад солитонов в изотермической бесстолкновительной квазинейтральной плазме с изотермическим давлением // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. № 1. С. 125–141.
8. Bakholdin I.B. Magnetosonic solitary waves and jumps in a cold plasma. Advances in plasma physics research. V. 1. New York.: Nova science publishers, 2001. P. 97–106.
9. Бахолдин И.Б., Егорова Е.Р. Исследование магнитозвуковых уединенных волн для уравнений электронной магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 3. С. 515–528.
10. Гавриков М.Б. Двухжидкостная гидродинамика. М.: URSS КРАСАНД, 2018. 578 с.
11. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Взаимодействие уединенных волн в двухжидкостной гидродинамике в продольном магнитном поле // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. естественные науки. 2017. № 1 (70). С. 59–77.
12. Вайнштейн С.И., Быков А.М., Топтыгин И.Н. Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме. М.: Наука, 1989. 313 с.
13. Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // Прикл. матем. и механ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
14. Бахолдин И.Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // Прикл. матем. и механ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 833–852.
15. Бахолдин И.Б. Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1224–1238.
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
17. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // Прикл. матем. и механ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
18. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М.: МИРАН. Лекц. курсы НОЦ, 2010, выпуск 16, 3–120.

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОТОКОВ НЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ¹⁾

© 2021 г. С. Л. Гинзбург, В. Ф. Дьяченко, Л. И. Михайлова¹,
В. М. Чечеткин^{1,2,*}, Н. Н. Фимин^{1,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

² 123056 Москва, 2-я Брестская ул., 19/18, ИАП РАН, Россия

*e-mail: chechetv@gmail.com

**e-mail: oberon@kiam.ru

Поступила в редакцию 10.02.2020 г.

Переработанный вариант 26.09.2020 г.

Принята к публикации 18.11.2020 г.

Трехмерная компьютерная модель взаимодействия плазмы с электромагнитным полем в рамках уравнений Власова–Максвелла применена для расчета движения в вакууме встречных релятивистских электронейтральных потоков плотной плазмы, состоящей из электронов и протонов. Исследуется влияние начальной скорости частиц плазмы и их концентрации на процесс взаимодействия потоков. Библ. 12. Фиг. 29.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнения Максвелла, нейтральная плазма, электромагнитное поле, релятивистские электроны.

DOI: 10.31857/S004446692103008X

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод встречных пучков на ускорителях заряженных частиц (коллайдерах) на долгие десятилетия стал одним из основных инструментов изучения фундаментальных свойств материи, обеспечив колоссальный прогресс в экспериментальных исследованиях физики элементарных частиц и в физике высоких энергий для получения сверхвысоких энергий. Наибольшее распространение получили ускорители на встречных электрон–электронных, электрон–позитронных и протон–протонных пучках.

Настоящая работа является продолжением работ [1]–[5] и содержит описание полученных на 3D-модели результатов расчета встречного однопролетного движения в вакууме с релятивистской скоростью двух нейтрализованных потоков плотной плазмы (плазмOIDов), состоящих из электронов и протонов равной концентрации. На конкретных примерах проиллюстрирована зависимость процесса взаимодействия частиц плазмOIDов через электромагнитное поле от начальной скорости частиц и их концентрации.

Полученные результаты могут быть применены, например, для построения моделей взаимодействующих газопылевых туманностей или сталкивающихся галактик, а также для моделирования процессов в коллайдерах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Взаимодействие бесстолкновительной плазмы с электромагнитным полем описывается 3-мерной системой уравнений Власова–Максвелла [9]–[12]. При указанном ниже выборе единиц измерения эта система имеет вид

$$\frac{\partial f_{e,p}}{\partial t} + \mathbf{v}_{e,p} \cdot \frac{\partial f_{e,p}}{\partial \mathbf{x}} + q_{e,p}(\mathbf{E} + \mathbf{v}_{e,p} \times \mathbf{H}) \cdot \frac{\partial f_{e,p}}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант 20-11-20165.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho,$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

где $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$ – соответственно векторы электрической и магнитной напряженности само-согласованного электромагнитного поля; $f_{e,p}(t, \mathbf{x}, p)$ – функции распределения электронов (e) и протонов (p); $\mathbf{v}_{e,p} = \partial w_{e,p} / \partial \mathbf{p}_{e,p}$ – скорости электронов и протонов; $w_{e,p} = [(m_{e,p})^2 + (\mathbf{p}_{e,p})^2]^{1/2} - m_{e,p}$ – их кинетические энергии; $m_{e,p}$ – массы покоя и $q_{e,p}$ – заряды, соответственно, электронов и протонов плазмы.

Плотности заряда и тока:

$$\rho = \sum q_{e,p} \int f_{e,p} d^3 p, \quad \mathbf{j} = \sum q_{e,p} \int \mathbf{v}_{e,p} f_{e,p} d^3 p$$

с суммированием по сортам частиц.

Здесь и далее используется следующая система единиц: длина L – произвольный размер; скорость $c (=1)$ – скорость света; время – L/c ; масса частицы m – масса покоя электрона; импульс и энергия частицы – mc и mc^2 соответственно; напряженность поля – mc^2/eL , где e – элементарный заряд; концентрация частиц – $mc^2/4\pi e^2 L^2$; функция распределения по энергии – $L/4\pi e^2$. В этих единицах масса электрона $m_e = 1$, протона $m_p = 1836$ и $q_{e,p}$ – заряды, соответственно, электронов $q_e = (-1)$ и протонов $q_p = 1$.

Задача решалась численным методом, основные принципы алгоритма которого (метод макрочастиц для уравнения Власова и разностная схема для уравнений Максвелла с учетом запаздывающих потенциалов) изложены в [6]–[8]. Траектории частиц определяются силовым взаимодействием, обусловленным электромагнитным полем не как одномоментной суперпозицией влияния остальных частиц системы, а как интегральные величины по предшествующему данному моменту промежутку времени, т.е. являются локально-ковариантными функциями 4-потенциалов Льенара–Вихерта системы частиц, так что применение “усредняющих” преобразований Лоренца даже для небольшой группы (кластера), близких в некоторый момент частиц неправомерно (таким образом, в результате возникающей “эффективной рассинхронизации” многочастичных кластеров динамика системы хаотизируется).

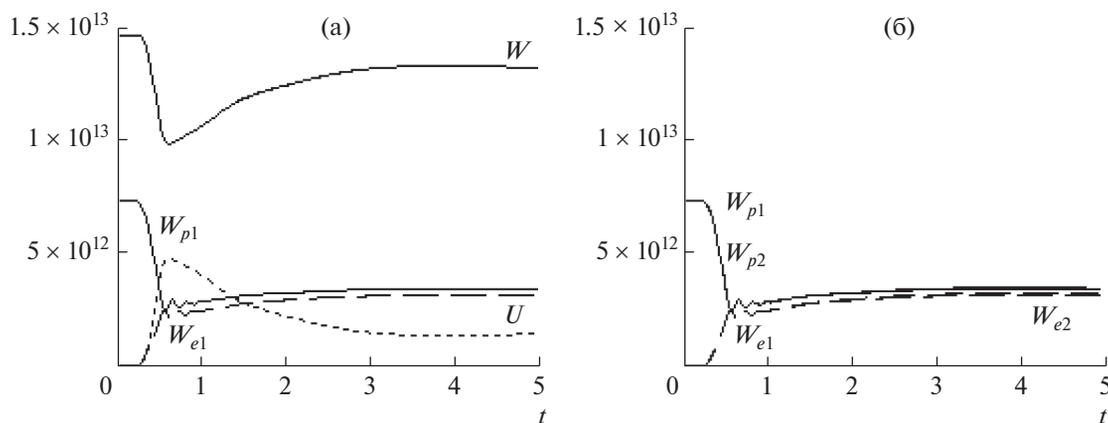
Область расчета определяется параметрами $0 < x < X$, $0 < y < Y$, $0 < z < Z$. По осям x и y заданы периодические граничные условия для компонент электромагнитного поля и координат частиц (выход частицы через границу области расчета влечет за собой ее проникновение в данную область с противоположной границы). Внешние границы закрыты для входа извне частиц и любых видов энергии.

В лабораторной системе координат использована следующая стандартная модель. В начальный момент $t = 0$ электромагнитное поле отсутствует. Электронейтральная плазма, состоящая из электронов и протонов равной концентрации $n_e = n_p$ частиц каждого типа, равномерно заполняет два прямоугольных параллелепипеда (плазмоида) единичной длины вдоль оси z и на расстоянии единица друг от друга вдоль той же оси z , движущихся вдоль этой оси в противоположных направлениях с заданной скоростью $|v_z|$: $0 < x < 0.3$, $0 < y < 0.3$, $3 < z < 4$ и $0 < x < 0.3$, $0 < y < 0.3$, $5 < z < 6$ (граничные значения $X = Y = 0.3$, $Z = 9$). Шаг по пространственным переменным равен 0.005. В расчетах движения любого плазмоида участвуют по 5760000 частиц каждого типа, если не оговорено иное (по 8 частиц электронов и протонов в расчетной ячейке).

Вдоль оси z задана начальная релятивистская скорость частиц. Длительность рассчитываемого процесса ограничена по времени, как правило, пятью (безразмерными) единицами.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Далее приводятся результаты моделирования встречного движения потоков плотной плазмы для трех вариантов начальной скорости электронов и протонов: $|v_z| = 0.99999$, 0.999 или 0.95 с концентрацией частиц $n_e = n_p = 2 \times 10^8$ и варианта $|v_z| = 0.999$ с концентрацией частиц $n_e = n_p = 2 \times 10^7$.



Фиг. 1. (а) W – суммарная кинетическая энергия всех частиц в расчетной области, W_{e1} и W_{p1} – кинетические энергии электронов и протонов первого плазмоида, U – энергия электромагнитного поля; (б) кинетические энергии W_{ei} и W_{pi} электронов и протонов каждого из плазмоидов как функции времени (здесь $i = 1, 2$ – номера плазмоидов).

Вариант 1. Начальная скорость всех частиц плазмоида 1 вдоль оси z : $v_{z1} = 0.99999$, плазмоида 2: $v_{z1} = (-0.99999)$. Кинетическая энергия электрона в этом случае равна 222.6 ($\gamma_e = 223.6$), кинетическая энергия протона равна $408\,707$.

На фиг. 1а представлено поведение во времени суммарной кинетической энергии электронов и протонов обоих плазмоидов W , кинетической энергии электронов W_{e1} и протонов W_{p1} первого плазмоида и энергии возникающего электромагнитного поля U . Энергии поля и частиц, ушедших из расчетной области через границы $z = 0$ и $z = Z$, по величине на несколько порядков меньше значений, изображенных на этом графике. На фиг. 1б дается сравнение кинетических энергий электронов и протонов обоих плазмоидов как функций времени.

Симметричность начальных данных для плазмоидов 1 и 2 приводит практически к совпадению в поведении кинетических энергий их однотипных частиц (см. фиг. 1б). Похожая ситуация наблюдается и в других, рассмотренных ниже, вариантах расчета.

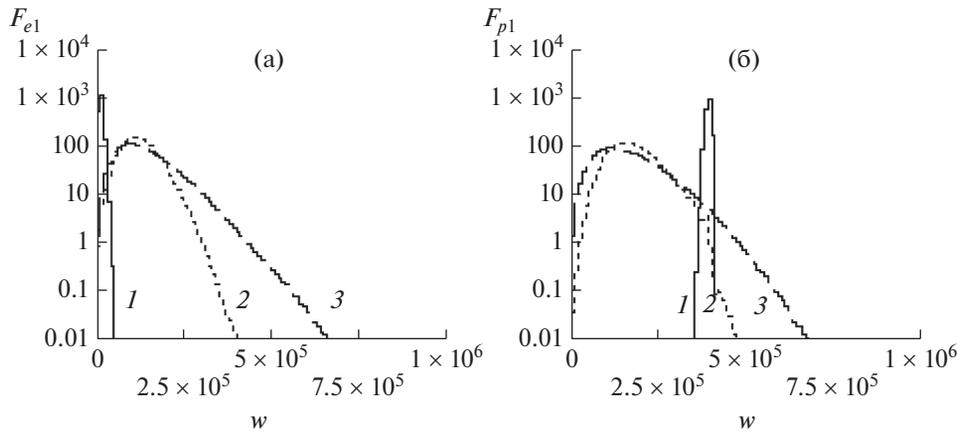
К моменту времени $t_0 = 0.54$ первоначальная суммарная кинетическая энергия протонов обоих плазмоидов распределилась между протонами, электронами и электромагнитным полем таким образом, что все суммарные энергии как электронов, так и протонов каждого из плазмоидов равны между собой. Энергия электромагнитного поля U близка к сумме кинетических энергий электронов и протонов плазмоида.

На фиг. 2 показаны функции распределения по кинетической энергии всего ансамбля электронов F_{e1} и протонов F_{p1} плазмоида 1 на три момента времени. Для каждого типа частиц эти функции заметно отличаются от первоначальных дельта-функций. Очевидно наличие двух процессов: заметное торможение протонов и столь же заметное ускорение электронов. Появляются значительно “убегающие” вперед по энергии частицы обоих типов. Аналогичная картина наблюдается в поведении функций распределения по энергии и для частиц второго плазмоида.

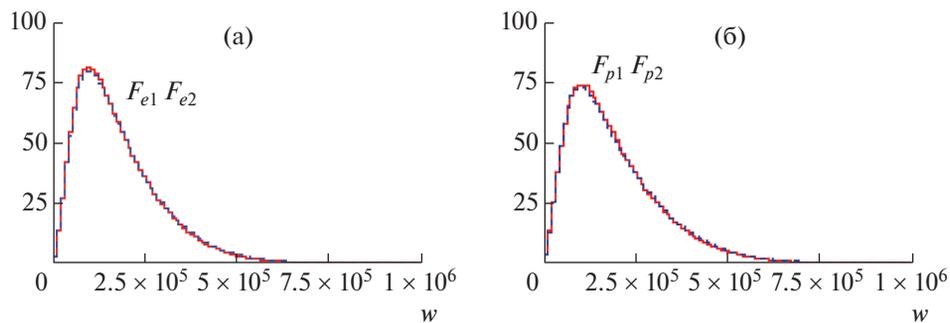
На фиг. 3 изображены функции распределения электронов F_{ei} и протонов F_{pi} плазмоидов 1 и 2 по кинетической энергии w при $t = 5$. Практически распределения по энергии однотипных частиц разных плазмоидов совпадают.

Далее на фиг. 4–10 показана эволюция во времени проекций фазовых портретов (p_x, z) (аналогичных (p_y, z)) и (p_z, z) электронов и протонов обоих плазмоидов ($t = 0, 1, 3, 5$), рассчитанная при участии $720\,000$ частиц каждого типа в любом плазмоиде (по одной частице электрона и протона на расчетную ячейку). На фиг. 4 даны проекции фазовых портретов (p_z, z) электронов и протонов обоих плазмоидов при $t = 0$ ($(p_x, z) = (p_y, z) = 0$).

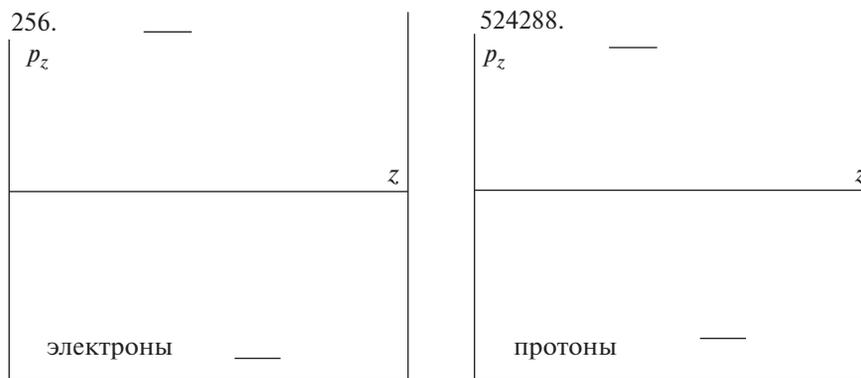
На фиг. 5 показаны проекции фазовых портретов (p_x, z) всех частиц обоих плазмоидов на момент времени $t = 1$.



Фиг. 2. Функции распределения электронов F_{e1} и протонов F_{p1} плазмоида 1 по энергии w на моменты времени 1) $t = 0.3$, 2) $t = 0.5$, 3) $t = 1$ (в логарифмическом масштабе).



Фиг. 3. Функции распределения по энергии w электронов F_{ei} (а) и протонов F_{pi} (б) плазмоидов 1 и 2 при $t = 5$.

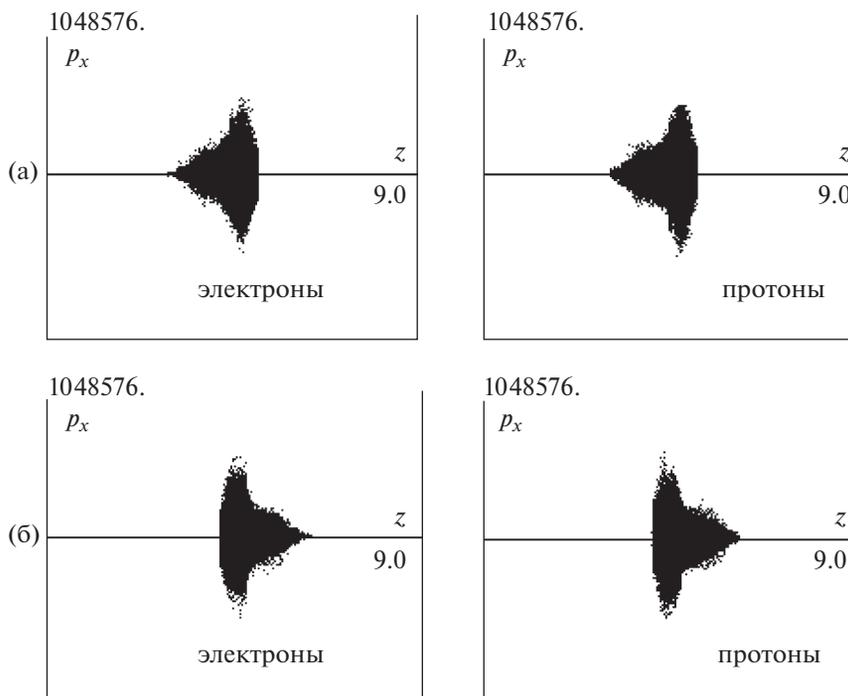


Фиг. 4. Проекция фазовых портретов (p_z, z) электронов и протонов при $t = 0$.

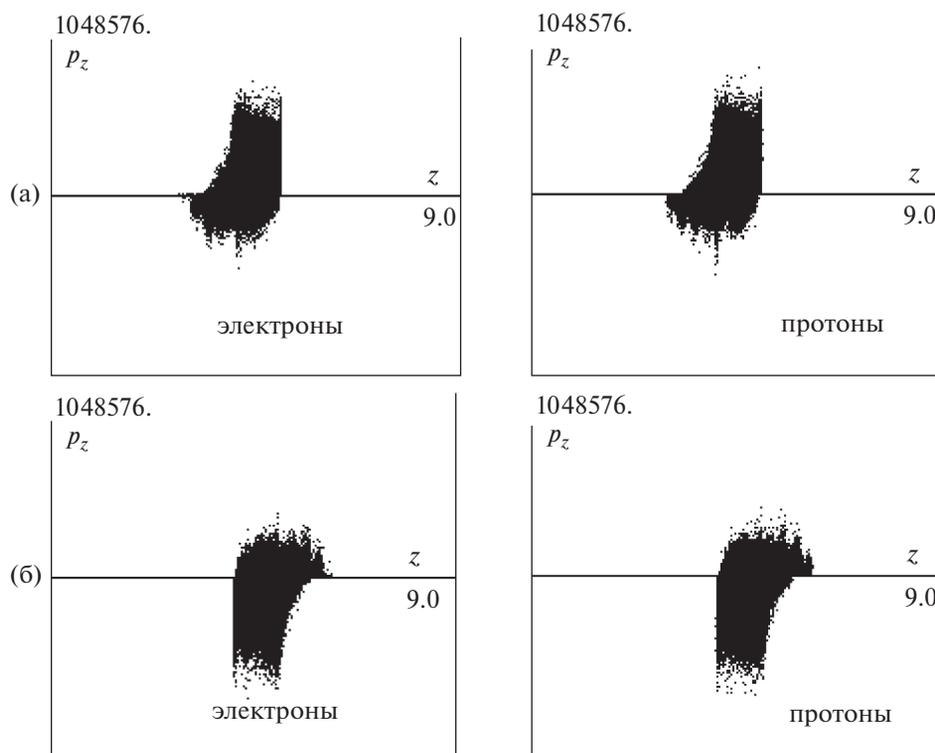
На фиг. 6 представлены проекции фазовых портретов (p_z, z) всех частиц обоих плазмоидов на момент времени $t = 1$.

На фиг. 7 даны проекции фазовых портретов (p_x, z) всех частиц обоих плазмоидов на момент времени $t = 3$.

На фиг. 8 изображены проекции фазовых портретов (p_z, z) всех частиц обоих плазмоидов на время $t = 3$.



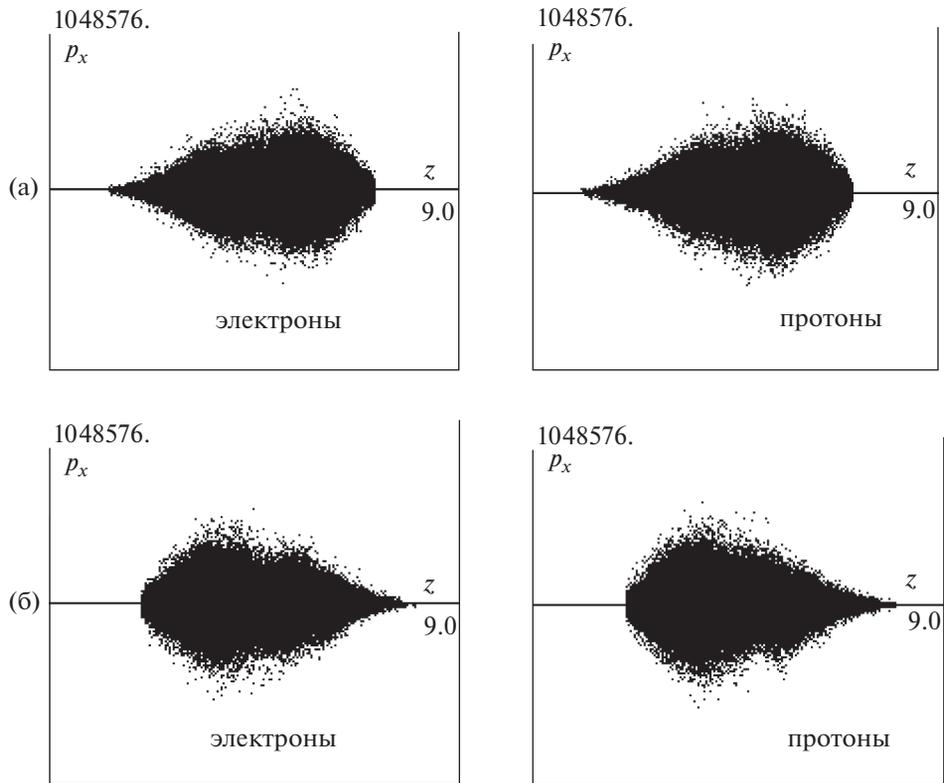
Фиг. 5. Проекция фазовых портретов (p_x, z) электронов и протонов плазмоида 1 (а) и плазмоида 2 (б).



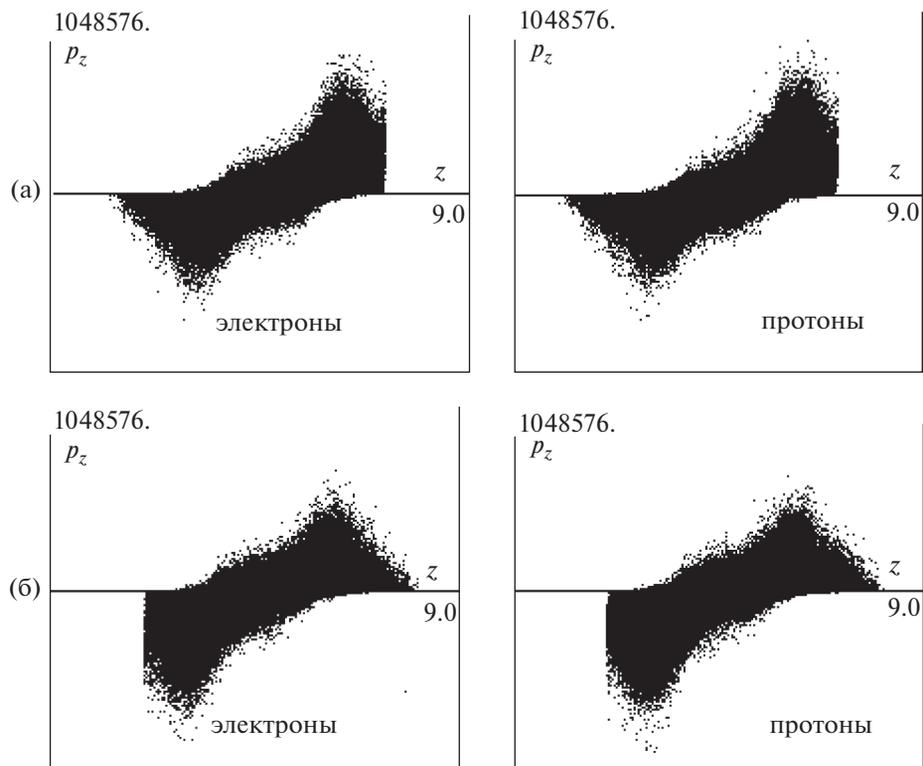
Фиг. 6. Проекция фазовых портретов (p_z, z) электронов и протонов плазмоида 1 (а) и плазмоида 2 (б).

На фиг. 9 показаны проекции фазовых портретов (p_x, z) всех частиц обоих плазмоидов на момент времени $t = 5$.

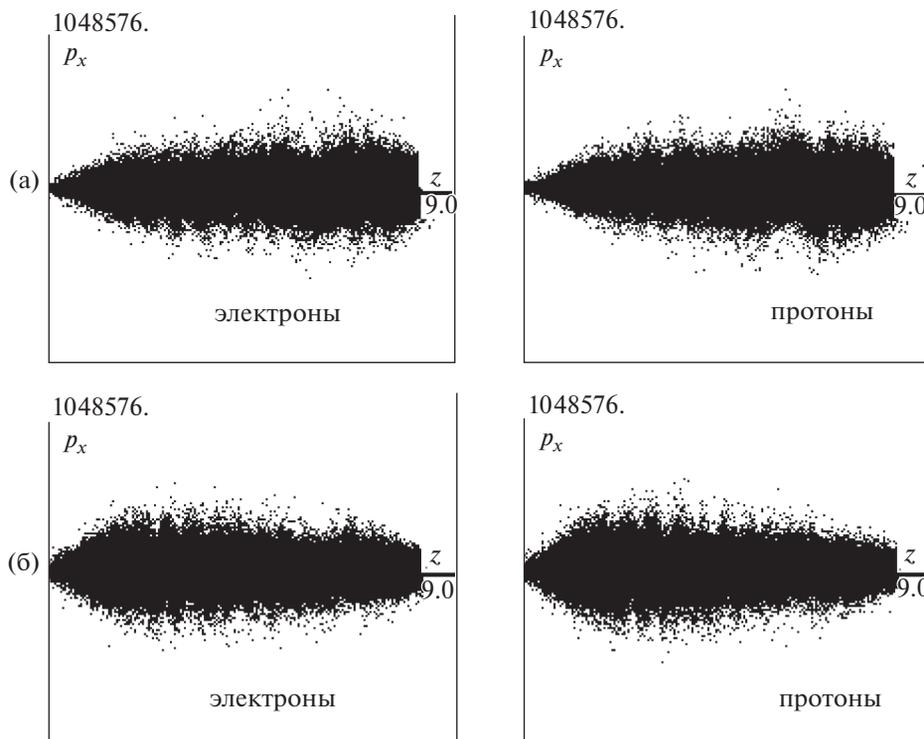
На фиг. 10 представлены проекции фазовых портретов (p_z, z) электронов и протонов обоих плазмоидов на время $t = 5$.



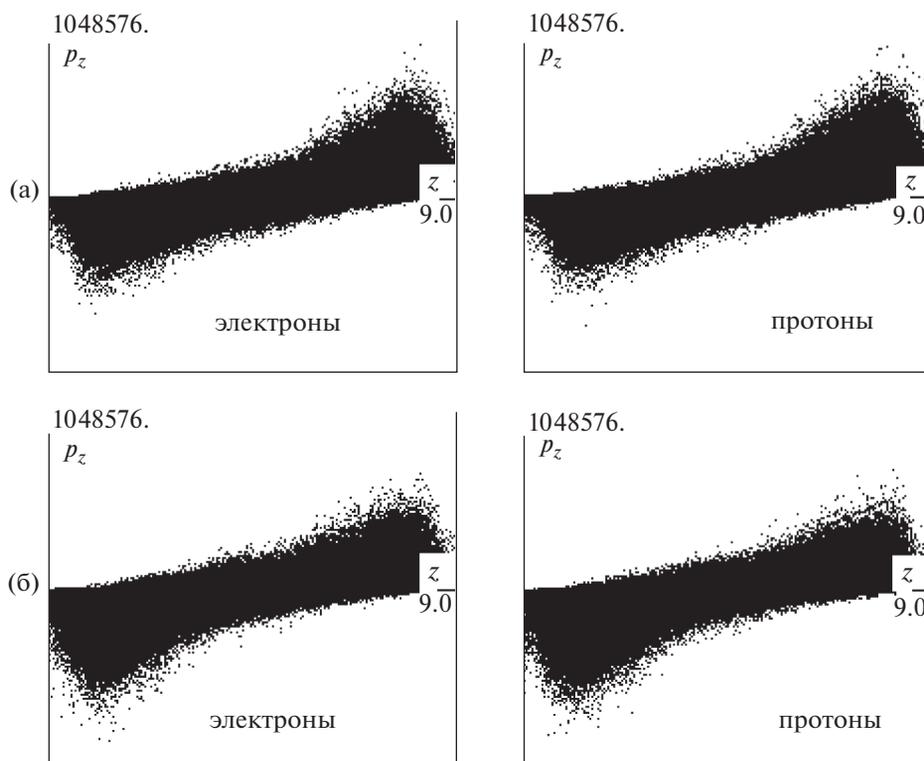
Фиг. 7. Проекция фазовых портретов (p_x, z) электронов и протонов плазмоида 1 (а) и плазмоида 2 (б).



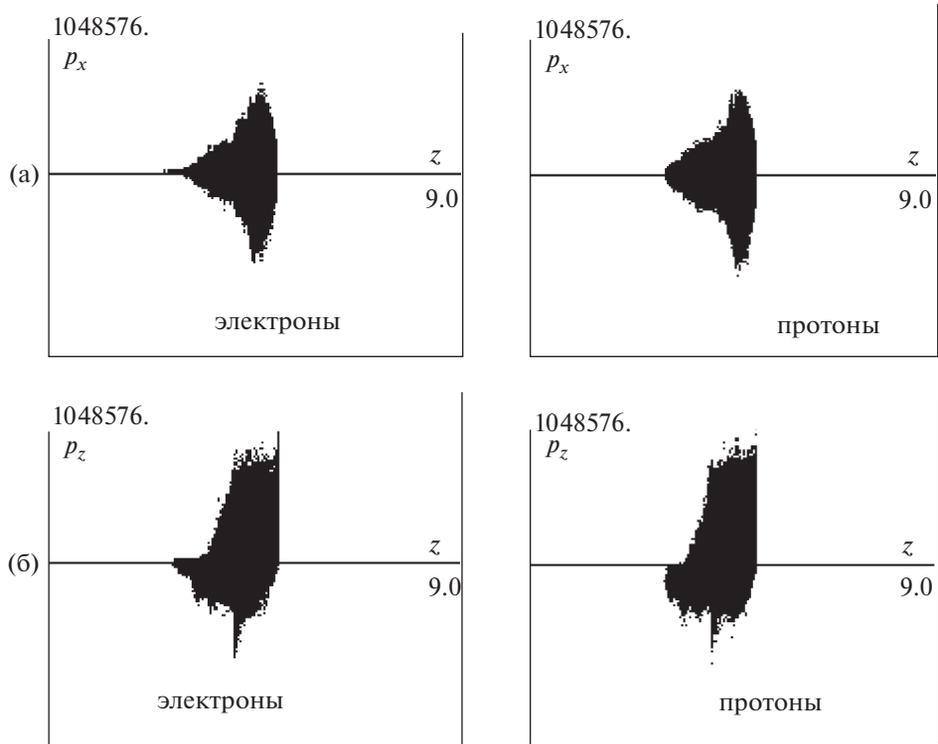
Фиг. 8. Проекция фазовых портретов (p_z, z) электронов и протонов плазмоида 1 (а) плазмоида 2 (б).



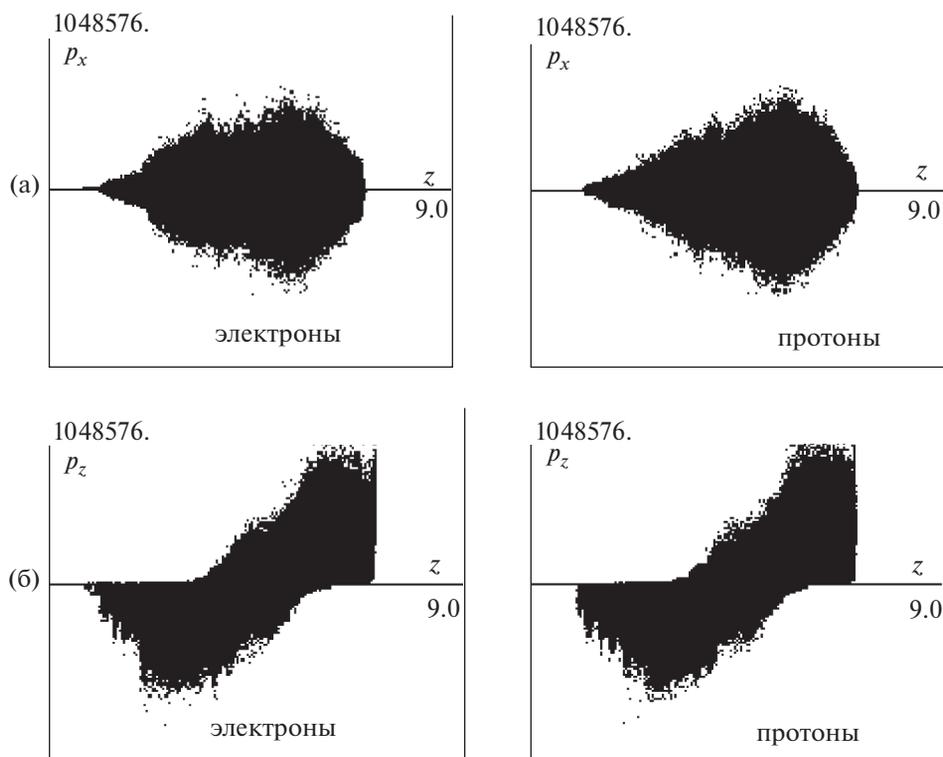
Фиг. 9. Проекция фазовых портретов (p_x, z) электронов и протонов плазмоида 1 (а) и плазмоида 2 (б).



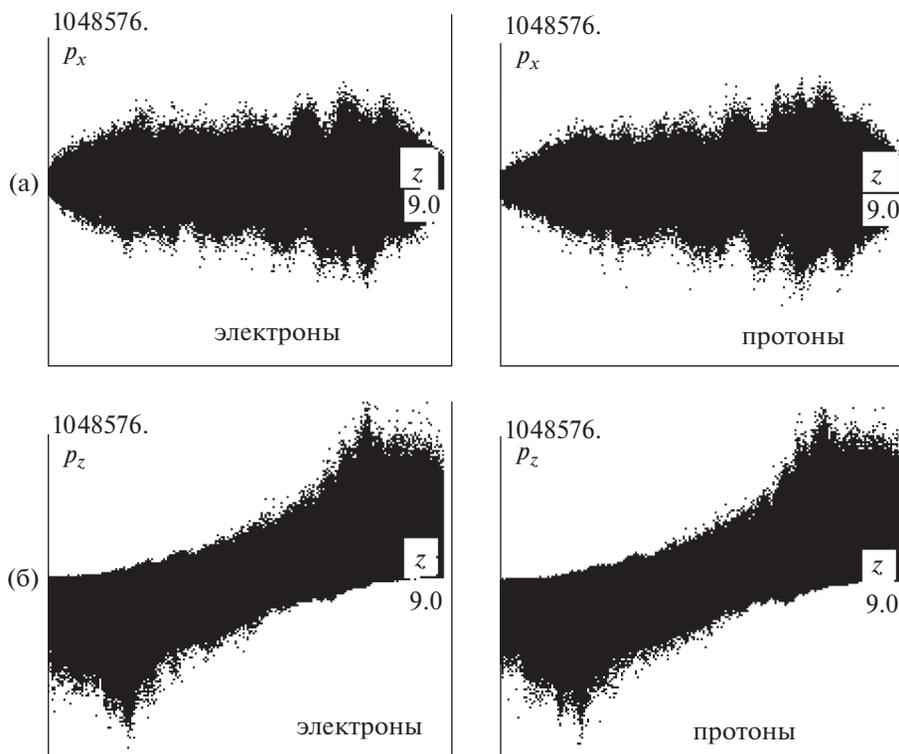
Фиг. 10. Проекция фазовых портретов (p_z, z) частиц плазмоида 1 (а) и плазмоида 2 (б).



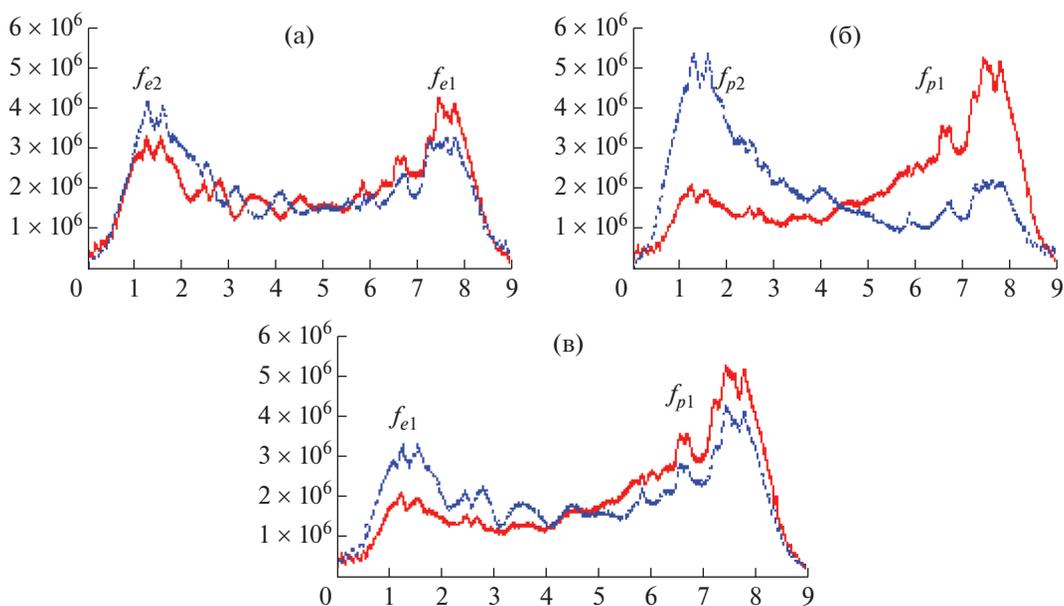
Фиг. 11. Проекция фазовых портретов (p_x, z) (а) и фазовых портретов (p_z, z) (б) частиц плазмоида 1 при $t = 1$.



Фиг. 12. Проекция фазовых портретов (p_x, z) (а) и фазовых портретов (p_z, z) (б) частиц плазмоида 1 при $t = 3$.

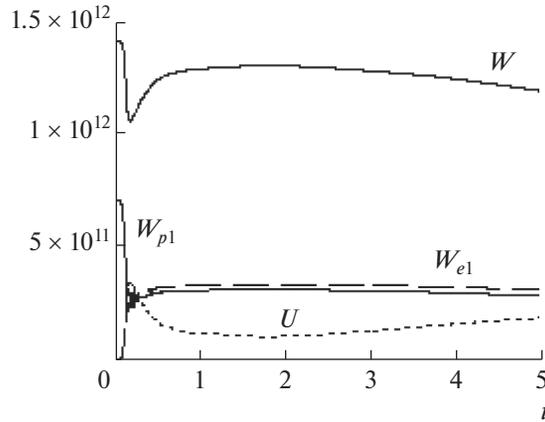


Фиг. 13. Проекция фазовых портретов (p_x, z) (а) и фазовых портретов (p_z, z) (б) частиц плазмоида 1 при $t = 5$.

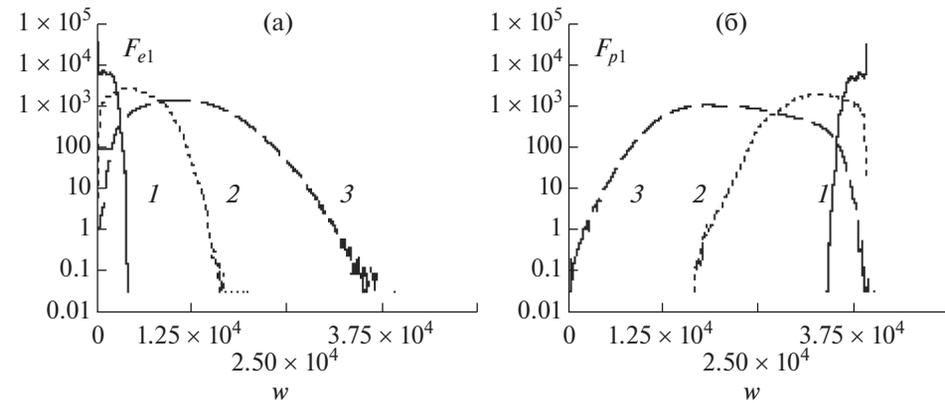


Фиг. 14. Распределения погонной концентрации f_{ei} , f_{pi} (на фиг. 14а и 14б соответственно) макрочастиц обоих плазмоидов ($i = 1, 2$); на фиг. 14в приводятся распределения погонной концентрации f_{e1} , f_{p1} электронов и протонов первого плазмоида при $t = 5$.

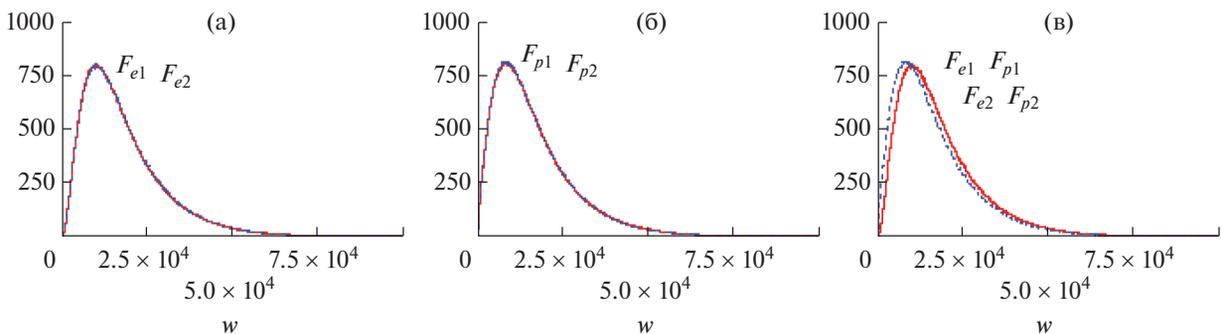
Проекция фазовых портретов на фиг. 11–13 для первого плазмоида и погонные концентрации на фиг. 14 получены при расчетах с 5760000 частицами каждого типа в плазмоиде (т.е. частиц в 8 раз больше, чем для получения фиг. 4–10, так как в расчетной ячейке по 8 частиц каждого типа вместо одной).



Фиг. 15. W – суммарная кинетическая энергия всех частиц в расчетной области, W_{e1} и W_{p1} – кинетические энергии электронов и протонов первого плазмоида, U – энергия электромагнитного поля.

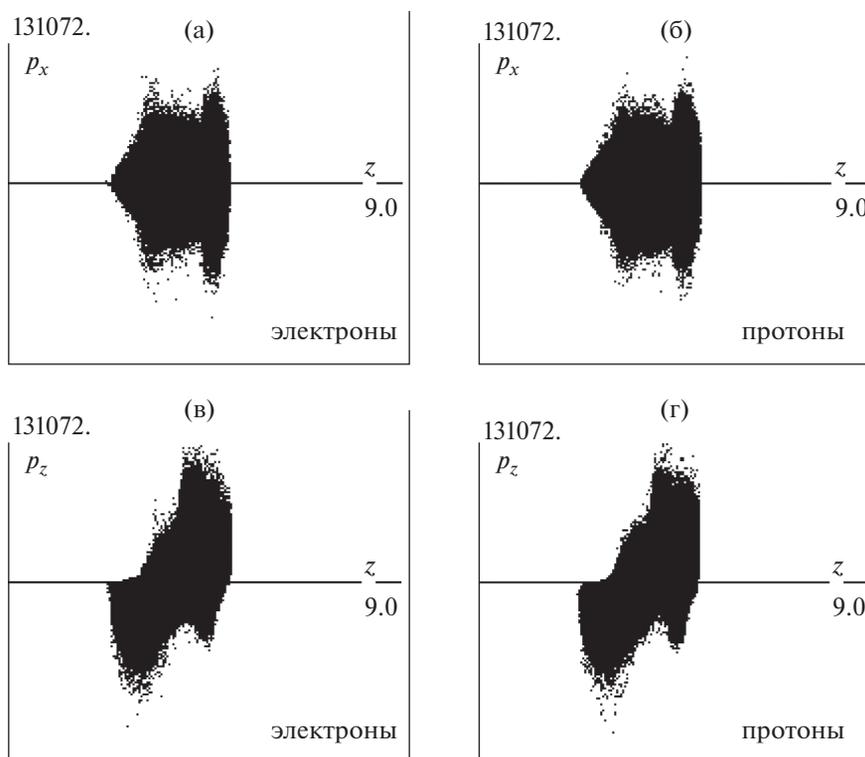


Фиг. 16. Функции распределения электронов F_{e1} (а) и протонов F_{p1} (б) плазмоида 1 по кинетической энергии w на моменты времени 1) $t = 0.075$, 2) $t = 0.1$, 3) $t = 0.125$ (в логарифмическом масштабе).



Фиг. 17. Функции распределения электронов F_{ei} (а), протонов F_{pi} (б) плазмоидов $i = 1$ и $i = 2$ по кинетической энергии w на момент времени $t = 5$; на фиг. 17в показаны сравнительные величины F_{ei} и F_{pi} .

Как показывает сравнение приведенных выше графиков проекций фазовых портретов частиц первого плазмоида на один и тот же момент времени, рассчитанных с разным количеством частиц в расчетной ячейке, их качественные отличия несущественны, что отнюдь не очевидно для других вариантов расчета.



Фиг. 18. Проекция фазовых портретов (p_x, z) для электронов (а) и протонов (б) частиц плазмоида 1 при $t = 1$; проекция фазовых портретов (p_z, z) электронов (в) и протонов (г) частиц этого же плазмоида в этот же момент времени.

На фиг. 14а–б представлена погонная концентрация электронов f_{ei} (где $i = 1, 2$ – номера плазмоидов) и протонов f_{pi} обоих плазмоидов, на фиг. 14в – погонная концентрация электронов и протонов плазмоида 1 вдоль оси z на момент времени $t = 5$.

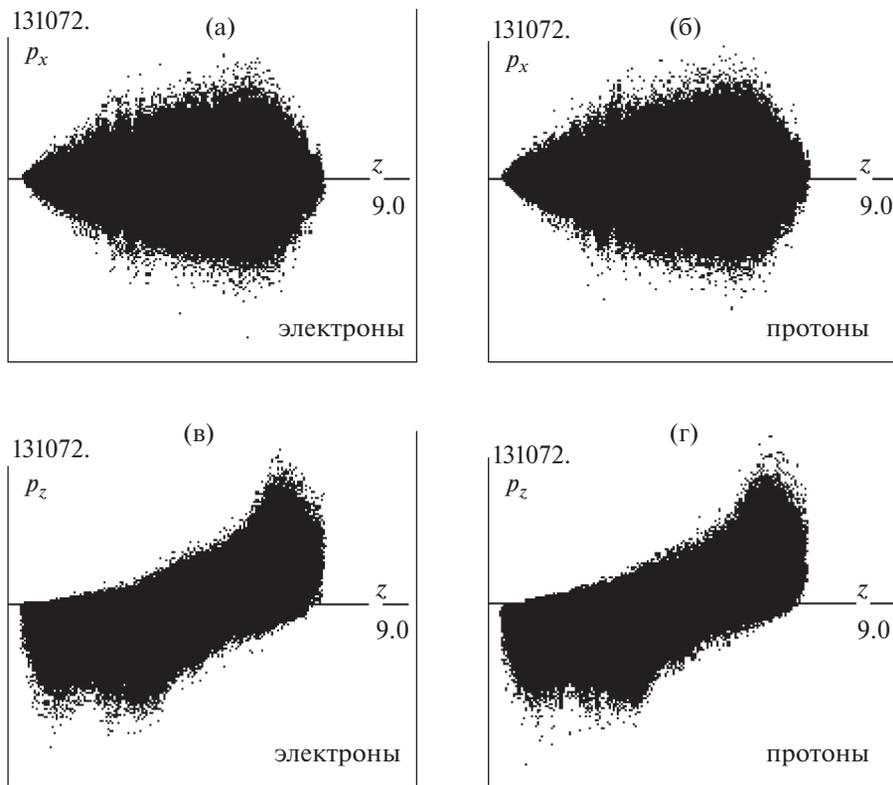
Фигуры проекций фазовых портретов и фиг. 14 демонстрируют взаимопроникновение и смешение частиц обоих плазмоидов. Электроны и протоны плазмы заполняют практически всю расчетную область, причем если электроны со сравнительно близкой концентрацией частиц разных плазмоидов вдоль оси z , то у протонов при одной и той же координате z погонные концентрации прямой частиц разных плазмоидов заметно различаются и примерно симметричны относительно $z = 4.5$. Нечто похожее на симметрию концентраций имеет место и для электронов разных плазмоидов относительно той же прямой $z = 4.5$.

Минимальное время до столкновения пучков в данном варианте расчета и всех следующих можно считать равным $0.5/|v_z|$.

Изменение начальной скорости движения частиц, при прочих равных условиях основного варианта расчета, заметно влияет на картину их поведения в расчетной области, что демонстрируют варианты расчета 2 с $|V_z| = 0.999$ ($\gamma_e = 22.37$) и 3 с $|V_z| = 0.95$ ($\gamma_e = 3.2$). Полная кинетическая энергия системы в начальный момент $t = 0$ существенно уменьшается (примерно в 10 и 100 раз соответственно) по сравнению с аналогичной энергией первого варианта расчета.

Вариант 2. Начальная скорость частиц плазмоидов $|V_z| = 0.999$ (кинетическая энергия электронов равна 21.37, протонов – 39228), начальная концентрация частиц $n_e = n_p = 2 \times 10^8$.

В любом из двух плазмоидов по 5760000 частиц каждого типа, т.е. по 8 частиц электронов и протонов в расчетной ячейке. На фиг. 15 дана зависимость от времени суммарной кинетической энергии электронов и протонов обоих плазмоидов, кинетической энергии электронов и протонов первого плазмоида и энергии возникающего электромагнитного поля. Аналогично первому варианту расчета к моменту времени $t_0 \sim 0.14$ первоначальная кинетическая энергия протонов



Фиг. 19. Проекция фазовых портретов (p_x, z) для электронов (а) и протонов (б) частиц плазмоида 1 при $t = 3$; проекция фазовых портретов (p_z, z) для электронов (в) и протонов (г) частиц этого же плазмоида в этот же момент времени.

перераспределяется между протонами, электронами и электромагнитным полем. Все суммарные энергии протонов или электронов каждого из плазмоидов равны между собой и примерно на 10% меньше энергии электромагнитного поля U . Однако затем электроны в общей сложности получают от протонов небольшую дополнительную кинетическую энергию.

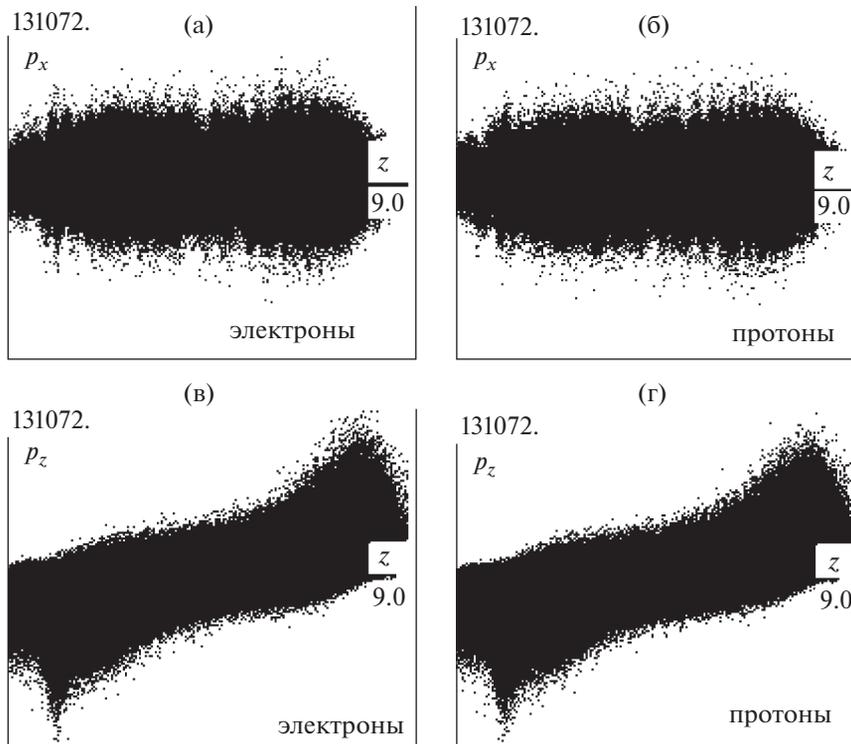
Как показывают дальнейшие расчеты, с уменьшением начальной скорости частиц плазмы это отличие суммарной энергии всех электронов от суммарной энергии всех протонов для $t > t_0$ увеличивается.

На фиг. 16 изображены функции распределения по кинетической энергии w электронов F_{e1} и протонов F_{p1} плазмоида 1 на три момента времени, на фиг. 17 — эти же функции распределения по энергии w для частиц плазмоидов 1 и 2 при $t = 5$. В этом варианте также наблюдается процесс заметного ускорения электронов и торможения протонов, и есть “убегающие” вперед по энергии частицы обоих типов, как электроны, так и протоны.

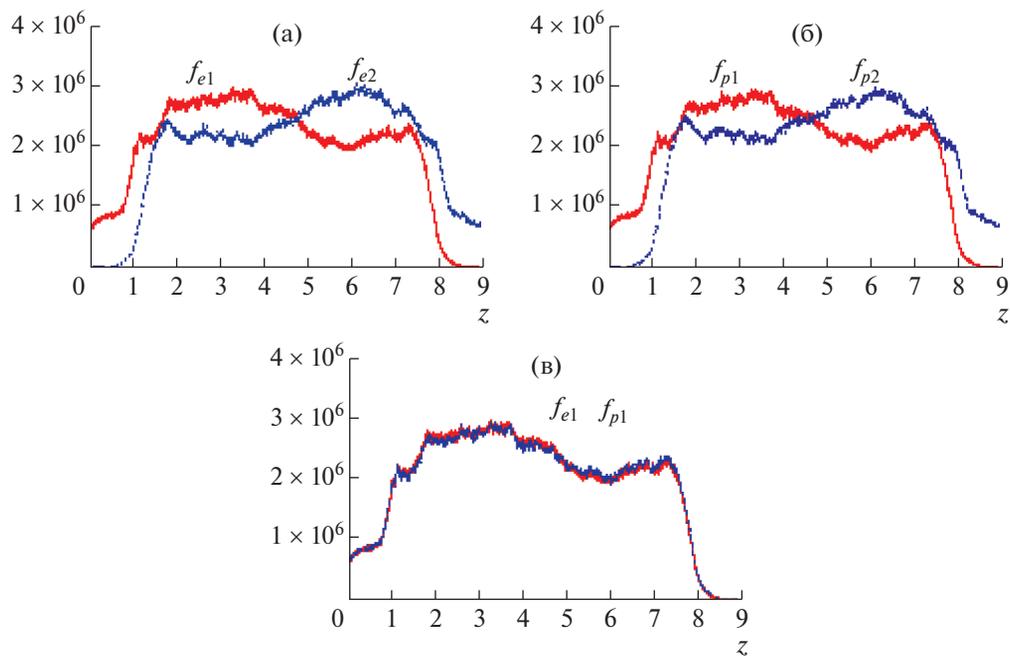
На фиг. 18–20 представлены на три момента времени проекции фазовых портретов (p_x, z) и (p_z, z) электронов и протонов первого плазмоида. Эволюцию проекций фазовых портретов частиц второго плазмоида можно представить как симметричное отражение относительно плоскости $z = 4.5$ соответствующих портретов частиц первого плазмоида.

На фиг. 21а представлена погонная концентрация электронов f_{e1} и протонов f_{p1} обоих плазмоидов вдоль оси z , на фиг. 21б — погонные концентрации f_{e1} и f_{p1} (обе фигуры в момент времени $t = 5$).

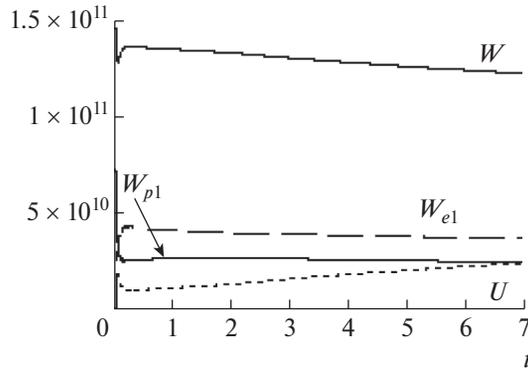
При внешнем сходстве проекций фазовых портретов однотипных частиц на один и тот же момент времени в вариантах расчета 2 и 1 (например, фиг. 20 и фиг. 13) это лишь качественная характеристика распределения частиц, но не количественная, так как распределения погонных



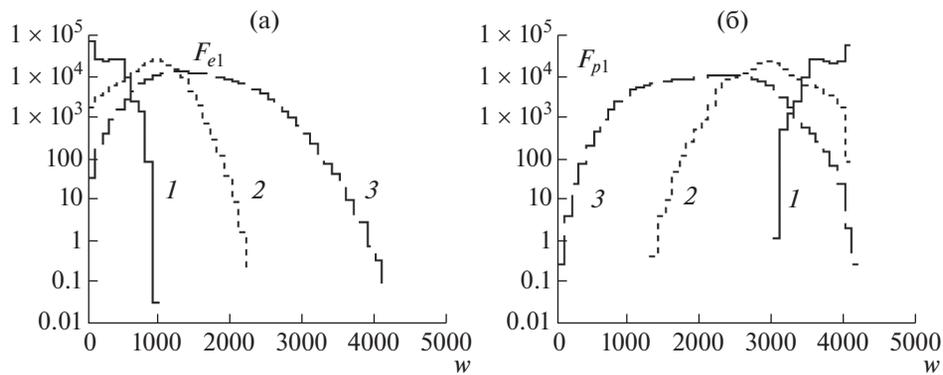
Фиг. 20. Проекция фазовых портретов (p_x, z) для электронов (а) и протонов (б) частиц плазмоида 1 при $t = 5$; проекция фазовых портретов (p_z, z) для электронов (в) и протонов (г) частиц этого же плазмоида в этот же момент времени.



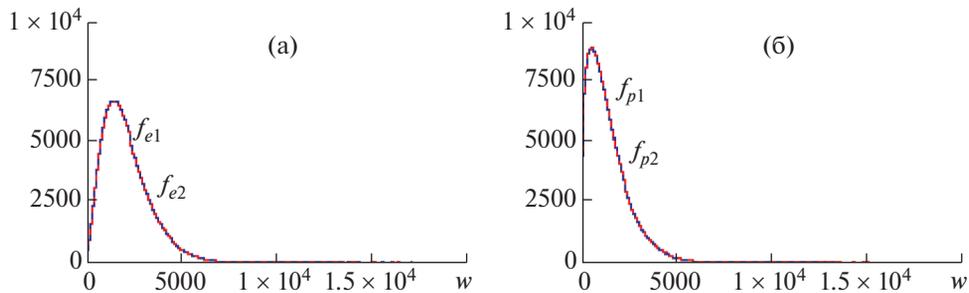
Фиг. 21. Распределение f_{ei} (а) и f_{pi} (б) погонной концентрации частиц обоих плазмоидов при $t = 5$; на фиг. 21в — сравнение распределений погонной концентрации f_{ei} и f_{pi} частиц первого (аналогично второго) плазмоида в этот же момент времени.



Фиг. 22. W – суммарная кинетическая энергия всех частиц в расчетной области, W_{e1} и W_{p1} – кинетические энергии электронов и протонов первого плазмоида, U – энергия электромагнитного поля.

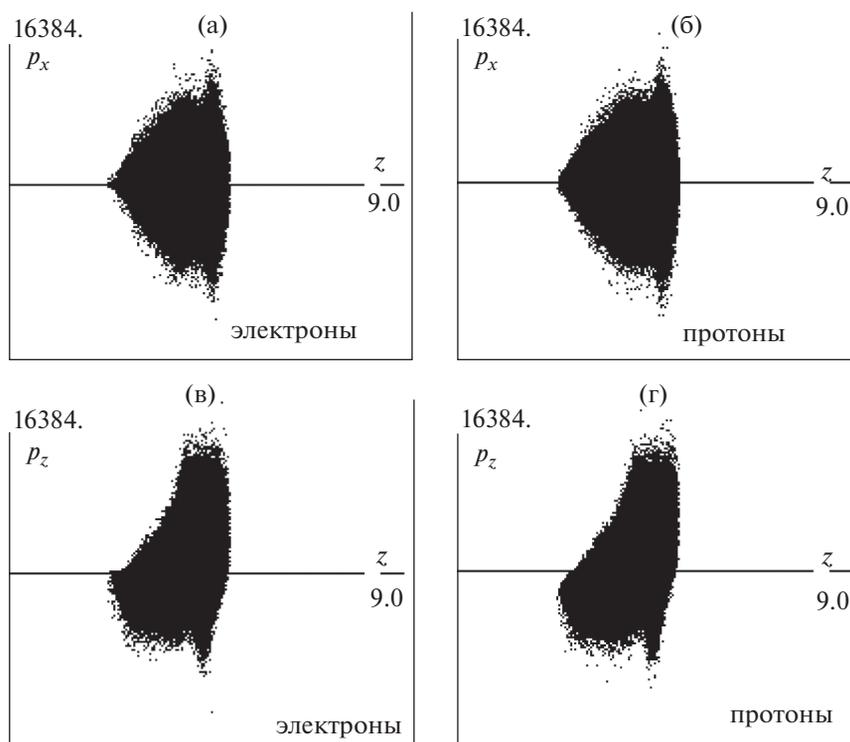


Фиг. 23. Функции распределения электронов F_{e1} (а) и протонов F_{p1} (б) плазмоида 1 по кинетической энергии w на моменты времени 1) $t = 0.0375$, 2) $t = 0.05$, 3) $t = 0.0625$ в логарифмическом масштабе.

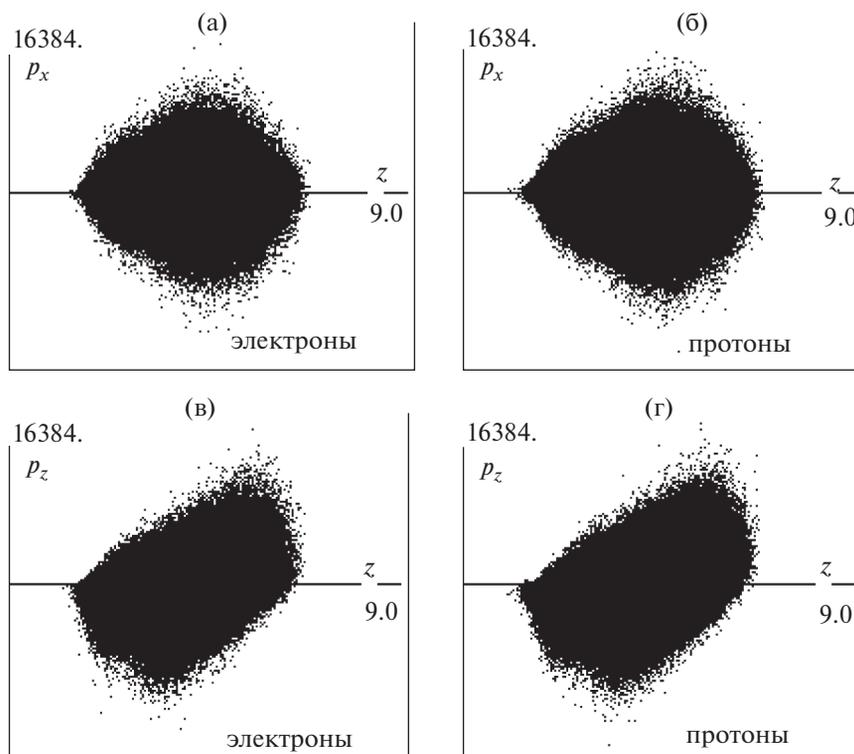


Фиг. 24. Функции распределения электронов f_{ei} (а) и протонов f_{pi} (б) плазмOIDов $i = 1$ и $i = 2$ по кинетической энергии на момент времени $t = 5$.

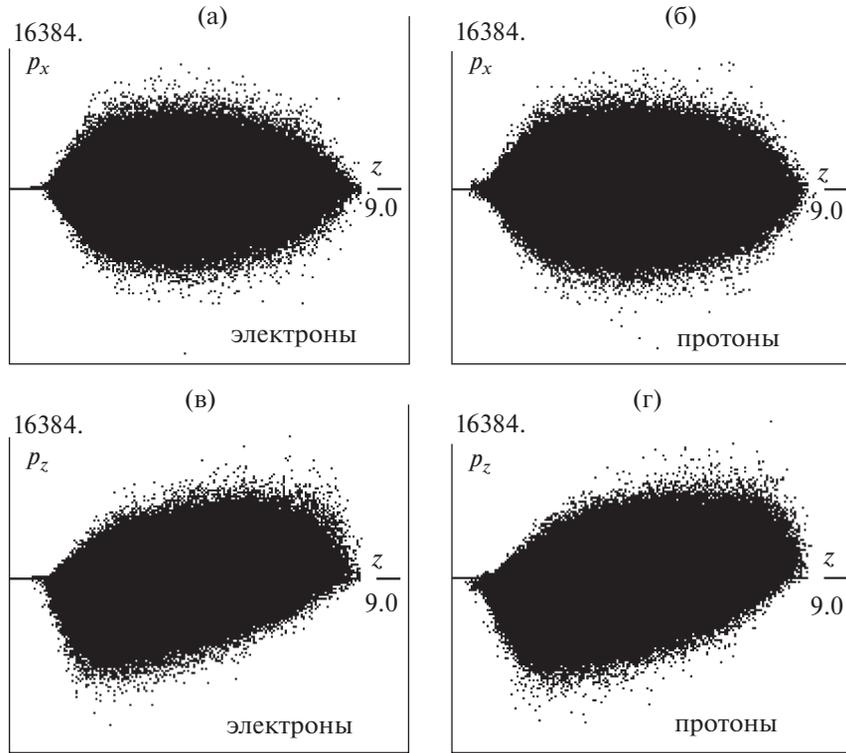
концентраций частиц вдоль оси z на один и тот же момент времени заметно различаются (фиг. 21а и фиг. 14а). К моменту времени $t = 5$ основная масса частиц обоих плазмOIDов сосредоточена на интервале $1.5 \leq z \leq 7.5$ (см. фиг. 21а). Кривые погонных концентраций однотипных частиц разных плазмOIDов симметричны относительно $z \approx 4.5$. Заметен выход частиц из расчетной области в направлении, обратном изначально заданному направлению скорости частиц, но в этом направлении граница по z для частиц заметно ближе.



Фиг. 25. Проекция фазовых портретов (p_x, z) для электронов (а) и протонов (б) частиц плазмоида 1 при $t = 1$; проекция фазовых портретов (p_z, z) для электронов (в) и протонов (г) частиц плазмоида 1 в тот же момент времени.



Фиг. 26. Проекция фазовых портретов (p_x, z) для электронов (а) и протонов (б) частиц плазмоида 1 при $t = 3$; проекция фазовых портретов (p_z, z) для электронов (в) и протонов (г) частиц плазмоида 1 в тот же момент времени.



Фиг. 27. Проекция фазовых портретов (p_x, z) для электронов (а) и протонов (б) частиц плазмоида 1 при $t = 5$; проекция фазовых портретов (p_z, z) для электронов (в) и протонов (г) частиц плазмоида 1 в тот же момент времени.

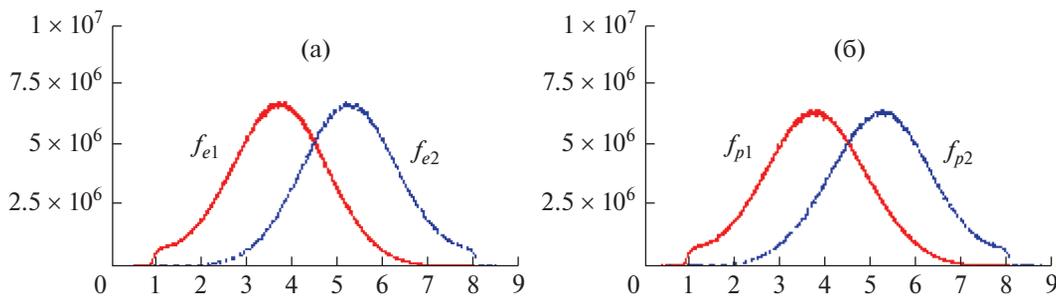
В варианте 2 электроны и протоны любого плазмоида в расчетной области вдоль оси z распределены примерно одинаково (фиг. 21б).

Вариант 3. Далее представлен стандартный для настоящей работы набор графиков по результатам расчета варианта при тех же, что и в варианте 1, значениях основных параметров задачи, включая по 8 электронов и протонов в расчетной ячейке, но с начальной скоростью частиц $|V_z| = 0.95$ и конечным временем расчета $t = 7$. При $t = 0$ кинетическая энергия электронов равна 2.2, протонов – 4039.

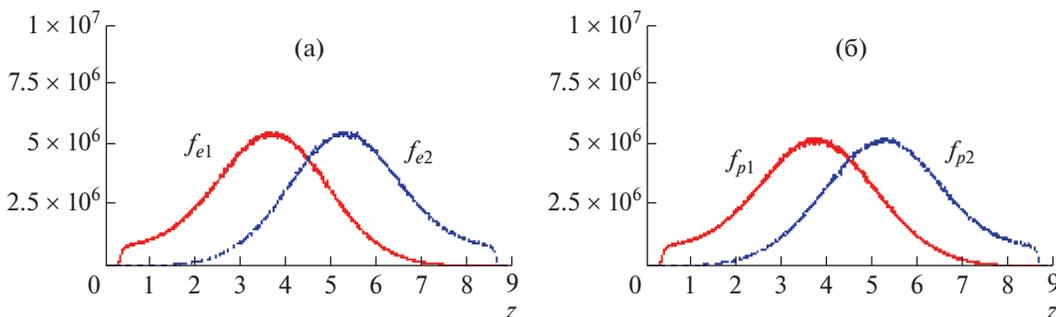
К моменту $t_0 = 0.08$ (см. фиг. 22) суммарные кинетические энергии как электронов, так и протонов каждого из плазмоидов сравнялись между собой, а энергия электромагнитного поля U равна примерно половине этой энергии. В дальнейшем электроны приобрели заметно большую суммарную кинетическую энергию, чем осталась у протонов (см. фиг. 22). Как и в других вариантах расчета, электроны заметно ускоряются, протоны заметно тормозятся (см. фиг. 23). На фиг. 24 представлены функции распределения электронов и протонов каждого из плазмоидов по энергии w на момент времени $t = 5$.

На фиг. 25–27 представлена эволюция во времени проекций фазовых портретов (p_x, z) (аналогичных (p_y, z)) и (p_z, z) электронов и протонов первого плазмоида.

На фиг. 28, 29 представлено распределение погонной концентрации частиц обоих плазмоидов при $t = 5$ и $t = 7$. Они существенно отличаются от аналогичных распределений в предыдущих вариантах расчета с 8 частицами каждого типа в расчетной ячейке. Основная масса частиц сконцентрирована в ограниченной области, довольно близкой к области их первоначального распределения. Важную роль играет взаимодействие частиц через электромагнитное поле, которое определяет структуру распределения заряженных частиц.



Фиг. 28. Распределение погонной концентрации электронов (а) и протонов (б) обоих плазмоидов при $t = 5$.



Фиг. 29. Распределение погонной концентрации электронов (а) и протонов (б) обоих плазмоидов при $t = 7$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе приведены результаты моделирования встречного движения в вакууме электронейтральных потоков плотной ($n_e = n_p = 2 \times 10^8$) плазмы, состоящей из электронов и протонов равной концентрации, с релятивистскими скоростями $|V_z| = 0.99999, 0.999$ и 0.95 и варианта с $|V_z| = 0.999$ и концентрацией частиц $n_e = n_p = 2 \times 10^7$.

Для всех вариантов: 1) характерно практическое отсутствие различия в поведении кинетических энергий однотипных частиц (электронов и протонов) обоих плазмоидов в силу симметричности начальных данных; 2) перераспределение ко времени t_0 начальной суммарной кинетической энергии протонов между протонами, электронами и возникающим электромагнитным полем, суммарные энергии как протонов, так и электронов разных плазмоидов практически совпадают между собой; 3) установлено, что, чем меньше начальная скорость частиц $|V_z|$, при одной и той же начальной концентрации частиц, тем меньше время t_0 и тем большую по сравнению с протонами суммарную кинетическую энергию приобретают электроны в дальнейшем; 4) с уменьшением начальной скорости частиц уменьшается по сравнению с энергией частиц максимальная энергия электромагнитного поля; 5) во всех просчитанных до момента времени $t = 5$ вариантах имеет место различная степень взаимопроникновения потоков.

В первом и втором вариантах расчета частицы обоих плазмоидов ко времени $t = 5$ практически заполнили всю расчетную область; в третьем за то же время $t = 5$ частицы занимают лишь некоторую ограниченную область в окрестности первоначального распределения частиц (это связано с существенной разницей в первоначальной скорости частиц первого/второго и третьего вариантов), и только к моменту $t = 7$ почти заполнили расчетную область.

В силу симметричности начальных данных часть графиков построена по информации только для одного первого плазмоида.

Отметим, что во всех расчетах закон сохранения энергии выполняется с большой точностью (погрешность не более 1%).

Интересным представляется сравнить результаты проведенных расчетов по взаимодействию плазмоидов с использованием формализма самосогласованного поля Власова с возможными

расчетами, основанными на применении уравнений Ландау–Максвелла для электронейтральной системы протонов и электронов. Наиболее вероятными различиями в данном случае, по-видимому, будут следующие: существенное увеличение анизотропии функций распределения частиц при столкновении плазмоидов (что связано с фактическим отсутствием коллективного взаимодействия через электромагнитное поле в плазме на расстояниях больше эффективного радиуса рассеяния частиц друг на друге); значительная перестройка энергетического спектра процесса (это связано с дискретным характером рассеяния системы заряженных частиц данного плазмоида на аналогичной системе встречного плазмоида); электромагнитное поле при расчете взаимодействия плазмоидов с помощью уравнений Ландау будет проявляться в основном в виде тормозного излучения в узком конусе с осью вдоль линии движения встречных пучков.

Относительно интерпретации полученных результатов в астрофизических приложениях можно предварительно отметить следующее: взаимопроникновение релятивистских плазменных образований приводит к возникновению нелинейных эффектов ускорения электронов и перекачки существенной доли кинетической энергии частиц плазмоидов в электромагнитное излучение. Изучение этих эффектов, безусловно, даст толчок к объяснению до сих пор неясных астрофизических феноменов, связанных, среди прочего, с синхротронным излучением, эволюцией газопылевых структур, в частности, в окрестностях сверхновых и активных черных дыр. Другим перспективным направлением моделирования взаимодействия встречных плазмоидов заряженных частиц является физика процессов в коллайдерах при больших плотностях пучков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург С.Л., Дьяченко В.Ф. Численное исследование неустойчивости релятивистского потока плазмы: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2009. № 20. 8 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-20>
2. Дьяченко В.Ф., Гинзбург С.Л. Численное исследование неустойчивости потока плазмы // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 12. С. 151–155.
3. Четкин В.М., Дьяченко В.Ф., Гинзбург С.Л., Палейчик В.В., Фимин Н.Н., Судариков А.Л. К вопросу о механизме возникновения жесткого космического гамма-излучения джетов активных ядер галактик // Астрономический ж. 2009. Т. 86. № 6. С. 546–554.
4. Vereshchagin G., Chechetkin V.M., Dyachenko V.F., Ginzburg S.L., Fimin N.N., Ruffini R., Siutsou I. On kinetic instabilities in collisionless ultrarelativistic streaming cold electron-proton plasma // American Physical Society, 2009, APS April Meeting, May 2–5.
5. Гинзбург С.Л., Дьяченко В.Ф., Четкин В.М. Численное исследование неустойчивости нейтрального потока плотной плазмы: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 87. 13 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-87>
6. Дьяченко В.Ф. О расчетах задач бесстолкновительной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. № 4. С. 611–627.
7. Дьяченко В.Ф. Десять лекций по физической математике. М.: Факториал, 1997.
8. Четкин В.М., Дьяченко В.Ф., Гинзбург С.Л., Орлов Ю.Н., Фимин Н.Н. Моделирование динамики бесстолкновительной ультрарелятивистской электрон-протонной плазмы в самосогласованном электромагнитном поле: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 87. 13 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-87>
9. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Четкин В.М. К вопросу о выводе уравнения Власова–Максвелла–Эйнштейна и его связь с космологическим лямбда-членом // Вестн. МГОУ. Сер. Физика–математика. 2019. № 2. С. 24–48.
10. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Pershin I.S. The Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its cosmological applications // Global J. Sci. Front. Res. A. 2019. V. 4A. P. 11–22.
11. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А. Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
12. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А. Уравнения Лиувилля и Власова. Их микроскопические и гидродинамические следствия. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

ТЕЧЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ СУСПЕНЗИИ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ¹⁾

© 2021 г. О. Б. Гуськов

125040 Москва, Ленинградский пр-т, 7/1, Институт прикладной механики РАН, Россия

e-mail: ogskv@mail.ru

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.
Переработанный вариант 06.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

На основе ранее разработанного метода самосогласованного поля рассмотрена задача о движении любого конечного числа идентичных сферических частиц произвольной плотности в заданном на бесконечности однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости при наличии плоской твердой поверхности. Получены выражения для скоростей частиц и жидкости при заданном начальном расположении частиц в пространстве с учетом коллективного гидродинамического взаимодействия частиц друг с другом и с заданной твердой поверхностью. Для случая статистически равномерного распределения частиц в пространстве получены в аналитическом виде усредненные профили скорости частиц и жидкости, образующих полубезграничную невязкую суспензию, в первом приближении по объемной доле частиц в суспензии. Библ. 27. Фиг. 4.

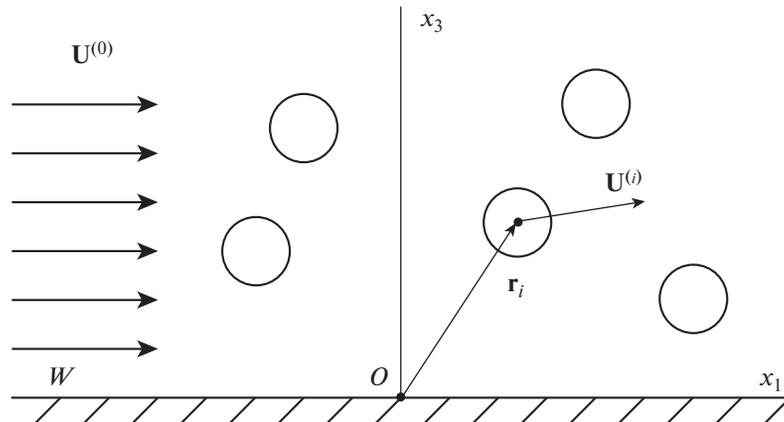
Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие, идеальная жидкость, потенциальное течение, дисперсная частица, суспензия, метод самосогласованного поля.

DOI: 10.31857/S0044466921030091

Одной из ключевых проблем при описании динамики дисперсных потоков с повышенной концентрацией дисперсной фазы является учет эффектов коллективного гидродинамического взаимодействия большого количества дисперсных частиц во внешнем потоке несущей сплошной среды. Исследование этой проблемы для случая идеальной жидкости началось с решения задачи о движении двух сфер [1], [2]. Задача о движении большого количества частиц оказалась чрезвычайно сложной, поскольку является разновидностью известной в науке фундаментальной проблемы многих тел, которая до сих пор не имеет точного решения даже в классической механике. В связи с этим предпринимались попытки приближенного решения этой проблемы на основе построения разного рода физических моделей. Одной из первых была так называемая ячеечная модель, разработанная Каннингэмом [3] применительно к вязкой жидкости, а впоследствии использованная Зубером [4] для определения присоединенной массы газовых пузырьков, образующих в идеальной жидкости безграничную невязкую пузырьковую эмульсию. В рамках этой модели безграничная однородная суспензия (эмульсия) рассматривается как среда, состоящая из множества одинаковых единичных ячеек, каждая из которых содержит одну дисперсную частицу, окруженную жидкой оболочкой, на поверхности которой постулируются те или иные граничные условия. По сути, эта модель носит эвристический характер, поскольку допускает различные формы жидких оболочек и разные виды граничных условий на их поверхности. Результат Зубера [4] впоследствии был уточнен Вейнгаарденом и Джеффри [5] на основе физически более строгой модели, учитывающей гидродинамическое взаимодействие пузырьков в эмульсии. Затем Фельдерхофом было получено [6] обобщение этого результата на случай частиц произвольной массы, однако, решение имеет неявный вид и требует численных расчетов для каждого конкретного значения параметра, характеризующего соотношение плотностей частиц и несущей жидкости.

В середине 1980-х годов научной группой В.В. Струминского был разработан новый метод [7] решения задач о движении многих тел сферической формы в идеальной жидкости на базе известной в физике концепции самосогласованного поля. Метод позволяет описывать эффекты коллективного гидродинамического взаимодействия при движении большой группы частиц в

¹⁾Работа выполнена в рамках Государственного задания, номер гос. регистрации темы: АААА-А19-119012290136-7.



Фиг. 1. Схема течения жидкости вдоль плоской твердой поверхности W при наличии в потоке системы идентичных твердых сферических частиц в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ (ось Ox_2 направлена перпендикулярно плоскости фигуры). $U^{(0)} = \{U_1, 0, 0\}$ – скорость заданного на бесконечности однородного потока, $U^{(i)} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}\}$ – скорость i -й частицы, $r^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\}$ – радиус-вектор центра i -й частицы.

потенциальных потоках идеальной жидкости и определять средние динамические характеристики как пространственно ограниченных дисперсных структур, так и безграничных суспензий. Впоследствии этот метод позволил получить ряд принципиально новых результатов [8]–[14] по динамике невязких суспензий, в том числе при наличии внешних границ, в виде явных аналитических зависимостей от определяющих параметров.

В последнее время получили широкое распространение численные методы исследований динамики дисперсных сред и процессов переноса в них (например, [15]–[19] и др.). Такие методы, очевидно, имеют ряд достоинств по сравнению с чисто теоретическими подходами. К ним можно отнести возможность исследования задач со сложной геометрией потоков и в широком диапазоне значений определяющих гидродинамических критериев (в том числе, по числу Рейнольдса). Однако они имеют и ряд недостатков. Математически априори довольно сложно определить степень достоверности результатов численных расчетов, что нередко приводит к необходимости проведения параллельных экспериментальных исследований. Кроме того, любой расчет производится для дискретного набора значений определяющих параметров. Поэтому выявление зависимостей физических характеристик дисперсных потоков от всего комплекса определяющих параметров является чрезвычайно трудоемкой задачей. В этом плане аналитические результаты теоретических методов более информативны.

Ниже на основе метода самосогласованного поля рассмотрена задача о движении невязкой суспензии сферических частиц вдоль плоской твердой границы в заданном на бесконечности однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости. В результате в аналитическом виде получены зависимости усредненных профилей скорости частиц и жидкости от определяющих параметров задачи.

1. КОНЕЧНАЯ СИСТЕМА ЧАСТИЦ

Рассмотрим систему из любого, но конечного числа N идентичных сферических частиц радиуса a , погруженных в первоначально покоящуюся идеальную несжимаемую жидкость, занимающую полупространство $x_3 > 0$, ограниченное плоской твердой поверхностью W , заданной условием $x_3 = 0$ (см. фиг. 1). Центры частиц имеют координаты $x_\gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, а их скорости $U_\gamma^{(i)}$ первоначально равны нулю. В некоторый момент времени $t = 0$ жидкость на бесконечности из состояния покоя импульсно приводится в состояние движения со скоростью $U_\gamma^{(0)} = \{U^{(0)}, 0, 0\}$ в направлении, параллельном плоскости W .

Классическая постановка этой задачи в предположении потенциальности течения жидкости, как известно, состоит в решении уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ и удовлетворении граничных условий непротекания на границе W и на поверхности всех частиц.

В рамках метода самосогласованного поля [7]–[9] граничные задачи динамики N сфер в идеальной жидкости в предположении потенциальности течения сведены к формальному решению системы уравнений для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$, входящих в полученное точное решение таких задач. Для сформулированной выше задачи точное решение для безразмерного потенциала скоростей φ , описывающего течение жидкости сразу после внешнего воздействия и удовлетворяющего граничным условиям на поверхности частиц и стенки W , как показано в работе [7], имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_n}^{(i)}}{R_i^{2n+1}} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} T_{\beta_1 \gamma_1} \dots T_{\beta_n \gamma_n} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)} \frac{\tilde{X}_{\gamma_1}^{(i)} \dots \tilde{X}_{\gamma_n}^{(i)}}{\tilde{R}_i^{2n+1}}, \quad (1.1)$$

где

$$\varphi_0 = U_{\gamma}^{(0)} x_{\gamma}, \quad X_{\gamma}^{(i)} = x_{\gamma} - x_{\gamma}^{(i)}, \quad \tilde{X}_{\gamma}^{(i)} = x_{\gamma} - T_{\beta\gamma} x_{\beta}^{(i)}, \quad R_i = \sqrt{X_{\gamma}^{(i)} X_{\gamma}^{(i)}},$$

$$\tilde{R}_i = \sqrt{\tilde{X}_{\gamma}^{(i)} \tilde{X}_{\gamma}^{(i)}}, \quad \alpha = a/L, \quad T_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Формула (1.1) является точным решением для потенциала скоростей при условии, что тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют системе уравнений [7]:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_n}} \left\{ (U_{\beta}^{(0)} - U_{\beta}^{(i)}) X_{\beta}^{(i)} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha^{2n+1}}{k+1} C_{\beta_1 \dots \beta_k}^{(j)} \frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_k}^{(j)}}{R_j^{2k+1}} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha^{2n+1}}{k+1} T_{\delta_1 \beta_1} \dots T_{\delta_k \beta_k} C_{\delta_1 \dots \delta_k}^{(j)} \frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_k}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2k+1}} \right\}_{R_i=0}, \quad (\lambda - 1)U_{\beta}^{(i)} = \frac{3}{2} C_{\beta}^{(i)}, \quad (1.2)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, $U_{\beta}^{(0)} = \{1, 0, 0\}$, $U_{\beta}^{(i)}$ – скорость i -й частицы, $\lambda = \rho_p/\rho$, ρ_p и ρ – плотность частиц и жидкости соответственно.

Формулы (1.1) и (1.2) записаны в безразмерном виде. В качестве масштабов величин в них приняты заданная на бесконечности скорость жидкости $U^{(0)}$ и характерное расстояние между центрами соседних частиц L . Здесь и далее приняты тензорные обозначения переменных с условием о суммировании по повторяющимся нижним координатным индексам, принимающим значения от 1 до 3. Это условие не распространяется только на переменную R_i . Верхние индексы относятся к частицам, и чтобы отличать их от показателя степени, они заключены в круглые скобки.

Следует отметить, что структура точного решения уравнения Лапласа для потенциала скоростей жидкости (1.1), полученного в работе [7], такова, что это решение изначально удовлетворяет граничному условию непротекания жидкости на плоской стенке W при любых значениях тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$. В свою очередь, первое равенство в (1.2), напрямую вытекающее из граничных условий на поверхности всех сферических частиц, связывает между собой заранее неизвестные тензорные коэффициенты, относящиеся к разным частицам. С физической точки зрения первое равенство в (1.2) по существу представляет собой условие взаимного согласования между собой гидродинамических полей возмущений от всех частиц в заданном внешнем потоке. Второе равенство в (1.2) представляет собой второй закон Ньютона, в котором для записи гидродинамической силы, действующей на i -ю частицу, использована теорема Бика [20], описывающая движение частиц при известном нестационарном внешнем воздействии на них со стороны жидкости. Таким образом, решение системы (1.2) для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ после их подстановки в выражение (1.1) для потенциала скоростей определяет самосогласованное гидродинамическое поле, возникающее сразу после импульсного приведения жидкости на бесконечности из состояния покоя в состояние движения с заданной постоянной скоростью $U_{\beta}^{(0)} = \{1, 0, 0\}$ и удовлетворяющее граничным условиям непротекания на стенке W и на поверхности всех частиц.

Если принять условие о малости характерного параметра задачи $\alpha \ll 1$, т.е. ограничиться случаем разбавленных суспензий, то при решении системы уравнений (1.2) все неизвестные функции можно искать в виде разложений по степеням этого параметра

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(k)}, \quad U_{\gamma}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k U_{\gamma}^{(i)(k)}, \quad \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \Phi^{(k)}. \tag{1.3}$$

Подстановка (1.3) в (1.2) приводит к следующей системе уравнений:

$$C_{\gamma}^{(i)(0)} = \frac{2(\lambda - 1)}{1 + 2\lambda} U_{\gamma}^{(0)}, \quad U_{\gamma}^{(0)} = \{1, 0, 0\}, \quad C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(0)} = 0 \quad \text{при} \quad m > 1,$$

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(k)} = \left(1 - \frac{3}{1 + 2\lambda} \delta_{lm}\right) \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{n}{n+1} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)(k-2n-1)} D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)}, \quad (\lambda - 1) U_{\gamma}^{(i)(k)} = \frac{3}{2} C_{\gamma}^{(i)(k)},$$

$$D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = (1 - \delta_{ji}) Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} + T_{\delta_{l\beta_1}} \dots T_{\delta_{l\beta_n}} G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \delta_1 \dots \delta_n}^{(j,i)}, \tag{1.4}$$

$$Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_n}^{(j)}}{R_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_j=0},$$

$$G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_n}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_j=0},$$

где δ_{ji} — символ Кронекера, а квадратные скобки над знаком суммы обозначают целую часть числа.

Соотношения (1.4) представляют собой рекуррентную систему алгебраических уравнений, где каждое последующее приближение по малому параметру α для всех функций определяется через предыдущие. Таким образом, зная нулевое приближение, с помощью системы (1.4) можно определить все функции в аналитическом виде в любом заданном приближении по малому параметру и, соответственно, найти решение исходной задачи в этом приближении. Решение системы (1.4) с точностью до $O(\alpha^8)$ для продольных (в проекции на ось Ox_1) компонент скоростей частиц $U_1^{(i)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ и жидкости $U_1(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$U_1^{(i)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) = \frac{3}{1 + 2\lambda} (1 + \alpha^3 U_1^{(i)(3)} + \alpha^6 U_1^{(i)(6)} + \alpha^8 U_1^{(i)(8)}),$$

$$U_1^{(i)(3)} = -\frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \left\{ \frac{1}{(2x_3^{(i)})^3} + \sum_{j \neq i} (B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)}) \right\},$$

$$U_1^{(i)(6)} = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(2x_3^{(i)})^6} + \frac{1}{(2x_3^{(i)})^3} \sum_{j \neq i} (B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)}) + \sum_{j \neq i} \frac{1}{(2x_3^{(j)})^3} (B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq i} \left((B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)})^2 + 9X_1^{(ji)2} X_2^{(ji)2} B_{ij}^{(5)2} + 9X_1^{(ji)2} \left(\frac{X_3^{(ji)}}{R_{ij}^5} + \frac{\tilde{X}_3^{(ji)}}{\tilde{R}_{ij}^5} \right)^2 \right) \right\}, \tag{1.5}$$

$$U_1^{(i)(8)} = -\frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \left\{ \frac{1}{128(x_3^{(i)})^8} + \frac{1}{8(x_3^{(i)})^4} \sum_{j \neq i} \left(-X_3^{(ji)} \left(\frac{1}{R_{ij}^5} - 5 \frac{X_1^{(ji)2}}{R_{ij}^7} \right) + \tilde{X}_3^{(ji)} \left(\frac{1}{\tilde{R}_{ij}^5} - 5 \frac{X_1^{(ji)2}}{\tilde{R}_{ij}^7} \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq i} \left(\frac{2}{R_{ij}^8} - \frac{X_1^{(ji)2}}{R_{ij}^5 \tilde{R}_{ij}^5} + 2 \frac{(\rho_{ij}^2 + 3X_3^{(ji)} \tilde{X}_3^{(ji)})}{R_{ij}^5 \tilde{R}_{ij}^5} - \frac{10}{R_{ij}^7 \tilde{R}_{ij}^5} X_1^{(ji)2} (\rho_{ij}^2 + 3X_3^{(ji)} \tilde{X}_3^{(ji)}) B_{ij}^{(2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{25}{R_{ij}^7 \tilde{R}_{ij}^7} X_1^{(ji)2} (\rho_{ij}^2 - X_3^{(ji)} \tilde{X}_3^{(ji)})^2 + 4 \frac{X_1^{(ji)2}}{R_{ij}^{10}} + 4 \frac{\tilde{X}_3^{(ji)2}}{\tilde{R}_{ij}^{10}} + 60 \frac{X_1^{(ji)2} \tilde{X}_3^{(ji)2}}{\tilde{R}_{ij}^{12}} - 100 \frac{X_1^{(ji)2} \tilde{X}_3^{(ji)4}}{\tilde{R}_{ij}^{14}} \right) \right\},$$

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - \alpha^3 \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) + \frac{\alpha^6}{8} \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{(x_3^{(i)})^3} \times \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) + \frac{\alpha^8}{8} \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(x_3^{(i)})^4} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} - 5X_1^{(i)2} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^7} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^7} \right) \right), \tag{1.6}$$

где приняты обозначения

$$B_{ij}^{(n)} = \frac{1}{R_{ij}^n} + \frac{1}{\tilde{R}_{ij}^n}, \quad X_\gamma^{(ji)} = x_\gamma^{(j)} - x_\gamma^{(i)}, \quad \tilde{X}_\gamma^{(ji)} = x_\gamma^{(j)} - T_{\beta\gamma} x_\beta^{(i)}, \quad \gamma = 1, 2, 3,$$

$$R_{ij} = \sqrt{\rho_{ij}^2 + X_3^{(ji)2}}, \quad \tilde{R}_{ij} = \sqrt{\rho_{ij}^2 + \tilde{X}_3^{(ji)2}}, \quad \rho_{ij} = \sqrt{X_1^{(ji)2} + X_2^{(ji)2}},$$

а переменные $X_\gamma^{(i)}$, $\tilde{X}_\gamma^{(i)}$, R_i и \tilde{R}_i определены в описании формулы (1.1).

Таким образом, если заданы координаты центров всех частиц $\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, формулы (1.5) позволяют вычислить их скорости, а формулы (1.6) – скорость жидкости в любой заданной точке $\{x_1, x_2, x_3\}$ пространства с точностью до $O(\alpha^8)$.

В формулах (1.5) и (1.6) приведены выражения только для одной компоненты скоростей частиц и жидкости в направлении заданного на бесконечности однородного потока. Структура функций, описывающих две другие компоненты этих скоростей таковы, что после применения к ним последующей процедуры усреднения они дают нулевое значение. Поэтому выражения для этих компонент скорости в (1.5) и (1.6) опущены.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА

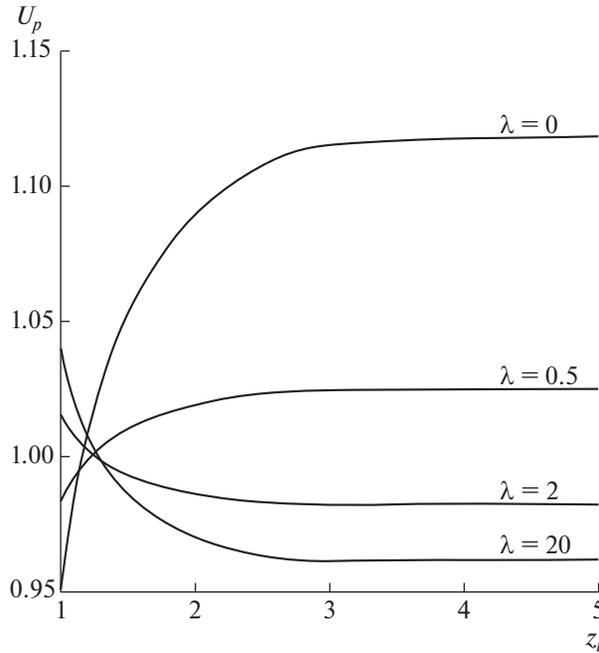
Формулы (1.5) и (1.6) позволяют с высокой точностью вычислять скорости частиц и жидкости для разбавленных дисперсных систем, состоящих из конечного числа частиц. Однако при описании динамики больших систем целесообразен переход к осредненному описанию. В этом случае при вычислении средних значений скоростей с учетом наличия внешней границы W применима процедура осреднения [21]–[23] по различным возможным конфигурациям дисперсных частиц в пространстве. В рамках этой процедуры суммирование известных функций в соотношениях (1.5) и (1.6) фактически заменяется интегрированием по переменным $x_\gamma^{(j)}$ при условии, что частицы не пересекаются друг с другом (либо с точкой пространства, в которой вычисляется среднее значение скорости жидкости) и не выходят за границы объема, занимаемого системой частиц. Весовой функцией в процедуре усреднения является числовая концентрация частиц.

Рассмотрим случай безграничной суспензии, в которой дисперсные частицы статистически равномерно распределены в полупространстве $x_3^{(i)} \geq \alpha$, а их объемная доля ϕ в суспензии мала. В этом случае весовой функцией в процедуре усреднения по объему будет безразмерная числовая концентрация частиц, равная единице при выбранном линейном масштабе задачи L . Если при вычислении средних величин ограничиться первым приближением по объемной доле частиц в суспензии, то при решении системы уравнений (1.4) достаточно учесть лишь члены, описывающие парное взаимодействие частиц. Взаимодействия более высокого порядка в рамках последующей процедуры усреднения вносят вклад только в коэффициенты при более высоких степенях объемной доли. Поэтому в формулах (1.5) и (1.6) они заранее опущены. Для решения задачи с точностью до $O(\phi^n)$ перед процедурой усреднения необходимо при решении системы (1.4) учесть все члены, описывающие взаимодействие частиц до порядка $n + 1$.

Применение процедуры усреднения к правым частям формул (1.5) и (1.6) в итоге с точностью до $O(\phi)$ приводит к следующим выражениям для средних значений скоростей частиц $\langle U_1^{(i)} \rangle$ и жидкости $\langle U_1 \rangle$:

$$\langle U_1^{(i)} \rangle = U_p^{(0)} \left(1 + \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \left(-\frac{1}{8z_i^3} - \frac{1}{128z_i^8} + q_p(z_i)\phi \right) + \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 \left(\frac{1}{64z_i^6} + k_p(z_i)\phi \right) \right), \tag{2.1}$$

$$U_1 = 1 + \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} q_f(z) + \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 k_f(z) \right) \phi,$$



Фиг. 2. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости частиц $U_p = \langle U_1^{(i)} \rangle / U_p^{(0)}$ от их расстояния до стенки z_i при различных значениях параметра $\lambda = \rho_p / \rho$ (см. описание переменных к формулам (1.2) и (2.1)) и заданном значении объемной доли частиц в суспензии $\phi = 0.1$.

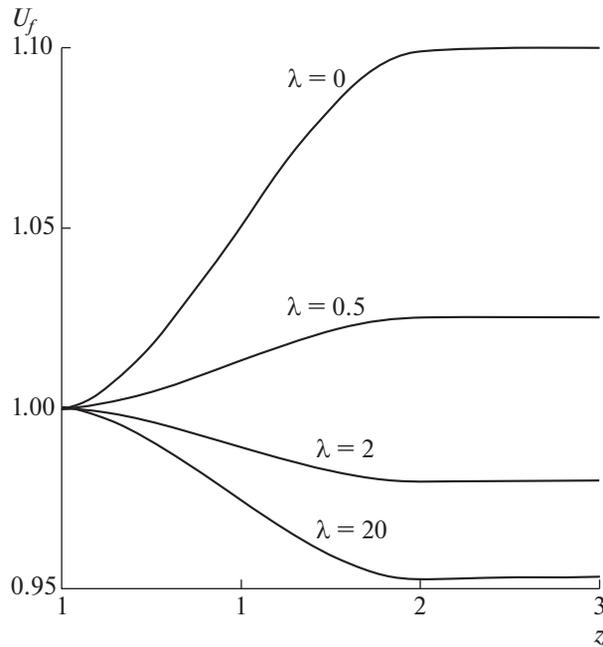
где $U_p^{(0)} = 3 / (1 + 2\lambda)$ – характерная безразмерная величина скорости, которую обретает *одиночная* частица в *безграничной* жидкости при том же внешнем воздействии [24], а $z_i = x_3^{(i)} / \alpha = x_3^{(i)*} / a$ и $z = x_3 / \alpha = x_3^* / a$ – нормированные на радиус частиц расстояния от плоской границы W до центра выбранной частицы $x_3^{(i)*}$ и точки пространства x_3^* соответственно. Выражения для функций $q_p(z_i)$, $k_p(z_i)$, $q_f(z)$ и $k_f(z)$ приведены в приложении ниже.

Из формул (2.1) следует, что вдали от границы величины средних скоростей частиц и жидкости выходят на свое постоянное значение, равное

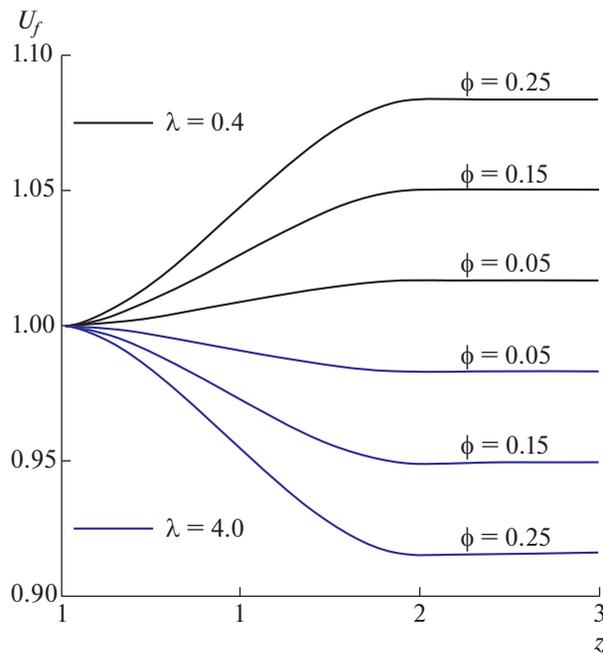
$$\lim_{z_i \rightarrow \infty} \langle U_1^{(i)} \rangle = \frac{3}{1 + 2\lambda} \left(1 + \frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{41 + 2\lambda} \right) \phi \right), \tag{2.2}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U_1 = 1 + \frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \phi.$$

Для иллюстрации полученных результатов (2.1), (2.2) на фиг. 2 и 3 представлены графики зависимости скоростей частиц $U_p(z_i) = \langle U_1^{(i)} \rangle / U_p^{(0)}$ и жидкости $U_f(z) = \langle U_1 \rangle$ от расстояния до границы W , нормированного на радиус частиц, при заданном значении объемной доли частиц $\phi = 0.1$ и разных значениях параметра λ . Как и следовало ожидать, при равенстве плотностей частиц и жидкости ($\lambda = 1$) их скорости во всем пространстве совпадают с заданной на бесконечности скоростью внешнего потока. Из представленных графиков также видно, что характер зависимости скоростей частиц и жидкости в суспензии существенно зависит от значений параметра λ . В случае, если суспензия содержит “легкие” частицы ($0 \leq \lambda < 1$), то скорости частиц и жидкости в основном потоке превышают их скорости вблизи границы W . И наоборот – в случае “тяжелых” частиц в дисперсной фазе ($\lambda > 1$) скорости частиц и жидкости вдали от границы W меньше, чем их скорости вблизи этой границы. В пределе при $\lambda \rightarrow \infty$ скорости частиц (2.1), как и следовало ожидать, равны нулю. В этом случае неподвижные частицы образуют полу-безграничный стационарный зернистый слой, усредненная скорость жидкости в котором вдали от стенки (2.2) имеет значение $U_f(z \rightarrow \infty) = 1 - \phi/2$.



Фиг. 3. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_f = \langle U_1 \rangle$ от расстояния до стенки z при различных значениях параметра $\lambda = \rho_p/\rho$ (см. описание переменных к формулам (1.2) и (2.1)) и заданном значении объемной доли частиц в суспензии $\phi = 0.1$.



Фиг. 4. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_f = \langle U_1 \rangle$ от расстояния до стенки z для случаев “легких” ($\lambda = 0.4$) и “тяжелых” ($\lambda = 4.0$) частиц при различных значениях объемной доли частиц в суспензии $\phi = 0.05, 0.15$ и 0.25 .

Описанные выше характерные особенности зависимостей усредненных скоростей частиц и жидкости для случаев “легких” и “тяжелых” частиц становятся лишь более выраженными с ростом объемной доли частиц в суспензии. Это проиллюстрировано на фиг. 4 на примере зависи-

мостей скорости жидкости от расстояния до стенки W для двух значений параметра $\lambda = 0.4$ (“легкие” частицы) и $\lambda = 4.0$ (“тяжелые” частицы) при разных значениях объемной доли частиц в суспензии.

Функции, описывающие скорости частиц и жидкости, выходят на свое асимптотическое значение (2.2) на расстоянии от границы W порядка размера дисперсных частиц. Это означает, что в потоке суспензии существует узкая приграничная область, в которой наблюдаются сравнительно большие градиенты скоростей частиц и жидкости.

Следует также отметить, что решение системы (1.4) для скорости частиц (1.5) и жидкости (1.6) получено с точностью до $O(\alpha^8)$. Как показывает анализ членов $o(\alpha^8)$ в представлениях вида (1.5) и (1.6), после применения процедуры осреднения их вклад в результат (2.1) во всем интервале значений аргументов функций не превышает величины 5%.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически исследована задача о течении невязкой суспензии вдоль плоской поверхности в заданном однородном потоке идеальной жидкости с учетом коллективного гидродинамического взаимодействия частиц. Для случая статистически равномерного распределения частиц в пространстве получено аналитическое решение для усредненных профилей скоростей частиц и жидкости в первом приближении по объемной доле частиц в суспензии с учетом влияния внешней плоской границы. Показано, что характер полученных зависимостей существенно зависит от соотношения плотностей частиц и жидкости в суспензии.

Следует отметить, что в записи решений (1.5) и (1.6), полученных с точностью до $O(\alpha^8)$, учтены только те функции, которые описывают парное взаимодействие частиц, так как при осреднении только они дают вклад в коэффициент перед первой степенью объемной доли частиц в суспензии ϕ в формулах (2.1). Для получения решения вида (2.1) с точностью до более высоких степеней объемной доли ϕ необходимо в формулах (1.5) и (1.6) учитывать также функциональные члены, описывающие взаимодействия частиц более высокого порядка. Это возможно в рамках метода [7], [8], что может быть предметом дальнейших исследований.

Использованная в работе модель идеальной жидкости для несущей сплошной среды, как известно, приближенно описывает течение жидкостей и газов при больших числах Рейнольдса. Кроме того, результат (2.1) получен в первом приближении по объемной доле частиц в дисперсной среде, т.е. для малых значений этого параметра. Однако реальная точность и пределы применимости результата (2.1) по числу Рейнольдса и по объемной доле дисперсной фазы могут быть установлены только экспериментально.

Следует также отметить, что использованный в работе подход применим для теоретического исследования достаточно широкого класса задач динамики невязких дисперсных сред. К ним относятся задачи динамики как пространственно ограниченных ансамблей свободных дисперсных частиц, так и безграничных суспензий, в том числе при наличии внешних границ [7], [8]. Метод дает возможность исследовать задачи динамики жестких кластерных структур [12], задачи о движении тел произвольного размера сквозь дисперсную среду [10], [11], задачи о движении шероховатых тел в идеальной жидкости [14] и ряд других.

В работе для поставленной гидродинамической задачи в рамках модели идеальной жидкости получено *аналитическое решение* одного из классических уравнений, которое имеет отношение не только к гидродинамике, но и к целому ряду других областей физики. Полученное в работе *аналитическое решение гидродинамической задачи* может быть напрямую использовано, например, для теоретического исследования процессов переноса в дисперсной среде с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц, так как решение такого рода задач также основано на решении уравнения Лапласа. Возможность такого подхода была обоснована Фельдерхофом в 1991 г. (см. [6]). В рамках такого подхода в работах Б.В. Бошенятова (например, [25]–[27]) были получены коэффициенты переноса (теплопроводности, электропроводности) для дисперсных сред (в том числе, сложноструктурированных) с учетом эффектов коллективного взаимодействия частиц. В этих работах были напрямую использованы результаты решения соответствующих гидродинамических задач в рамках модели идеальной жидкости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для функций $q_p(z_i)$, $k_p(z_i)$, $q_f(z)$ и $k_f(z)$, входящих в формулы (2.1) для усредненных скоростей частиц и жидкости суспензии:

$$q_p(z_i) = \begin{cases} q_{p1}(z_i), & 1 \ll z_i < 3, \\ q_{p2}(z_i), & 3 \ll z_i < \infty, \end{cases} \quad k_p(z_i) = \begin{cases} k_{p1}(z_i), & 1 \ll z_i < 3, \\ k_{p2}(z_i), & 3 \ll z_i < \infty, \end{cases}$$

$$q_{p1}(z_i) = \frac{406933}{573440} + \frac{z_i(547 + 189z_i - 63z_i^2)}{2048} - \frac{19 + 27z_i + 15z_i^2 + 3z_i^3}{1024(z_i + 1)^5} + \frac{1}{3440640z_i^8} (107520 -$$

$$- 1843200z_i - 1106700z_i^2 + 703878z_i^3 - 1117200z_i^4 + 1702365z_i^5 - 362600z_i^6 + 17535z_i^7) -$$

$$- \frac{\sqrt{z_i + 1}}{215040z_i^8} (6720 - 118560z_i - 7080z_i^2 + 31308z_i^3 - 43884z_i^4 +$$

$$+ 113148z_i^5 - 72625z_i^6 + 44030z_i^7 + 49875z_i^8 - 840z_i^9) + \frac{(75 + 1301z_i^2)}{8192z_i^7} \ln(z_i + 1),$$

$$q_{p2}(z_i) = \frac{15}{16} + \frac{5}{16z_i^5} \ln(z_i - 1) + \frac{3(25 + 7z_i^2)}{4096z_i^7} \ln\left(\frac{z_i + 1}{z_i - 1}\right) +$$

$$+ \frac{4480 - 76800z_i - 47425z_i^2 + 28672z_i^3 - 1610z_i^4 + 71680z_i^5 - 770z_i^6}{71680z_i^8} +$$

$$+ \frac{311 + 2632z_i^2 + 1302z_i^4 - 32z_i^6 + 11z_i^8}{1024(z_i^2 - 1)^5},$$

$$k_{p1}(z_i) = \frac{267}{512} + \frac{3(3 + 2z_i)}{128(z_i + 1)^3} - \frac{z_i(18 + 33z_i - 43z_i^2)}{1024} - \frac{64 + 20z_i^3 + 30z_i^4 + 15z_i^5}{1024z_i^6} +$$

$$+ \frac{\sqrt{z_i + 1}}{1024z_i^6} (64 - 32z_i + 24z_i^2 - 40z_i^3 + 32z_i^4 - 24z_i^5 - 336z_i^6 + 108z_i^7 + 30z_i^8 - 45z_i^9) -$$

$$- \frac{9z_i^2(12 - 5z_i^2)}{2048} \ln\left(\frac{(1 + \sqrt{z_i + 1})^2}{z_i + 2}\right) - \frac{3}{512z_i^3} \ln(z_i + 1) + \frac{3}{128} \ln(1 + \sqrt{z_i + 1}),$$

$$k_{p2}(z_i) = \frac{73}{256} - \frac{3}{64(z_i - 2)} - \frac{3(27 + 44z_i^2 + z_i^4)}{128(z_i^2 - 1)^3} - \frac{64 - 12z_i^4 + 45z_i^8}{512z_i^6} +$$

$$+ \frac{3}{128} \ln\left(\frac{z_i}{z_i - 2}\right) - \frac{3}{256z_i^3} \ln\left(\frac{z_i + 1}{z_i - 1}\right) - \frac{9z_i^2(12 - 5z_i^2)}{2048} \ln\left(\frac{z_i^2}{z_i^2 - 4}\right),$$

$$q_f(z) = \begin{cases} q_{f1}(z), & 0 \ll z < 2, \\ q_{f2}(z), & 2 \ll z < \infty, \end{cases} \quad k_f(z) = \begin{cases} k_{f1}(z), & 0 \ll z < 2, \\ k_{f2}(z), & 2 \ll z < \infty, \end{cases}$$

$$q_{f1}(z) = \frac{13 + 138z + 768z^2 - 176z^3 - 3349z^4 - 1274z^5 + 3780z^6 + 2520z^7}{64(z + 1)^2} +$$

$$+ \frac{67 + 182z - 1071z^2 - 2672z^3 + 5618z^4 + 16548z^5 - 6720z^6 - 20160z^7}{64(4z + 1)^{3/2}} -$$

$$- \frac{3}{32} \ln(z + 1) - \frac{3}{32} (1 - 60z^2 + 350z^4 - 420z^6) \ln\left(\frac{2z + 1 + \sqrt{4z + 1}}{2(z + 1)}\right) + \frac{(1 - (1 - 2z + 6z^2)\sqrt{4z + 1})}{16z^3},$$

$$q_{f2}(z) = 1 + \frac{1}{8z^3} - \frac{3}{16} \ln\left(\frac{z}{z - 1}\right) + \frac{15}{16} z^2 (6 - 35z^2 + 42z^4) \ln\left(\frac{z^2}{z^2 - 1}\right) +$$

$$+ \frac{19 + 29z - 489z^2 - 495z^3 + 1680z^4 + 1680z^5 - 1260z^6 - 1260z^7}{32(z-1)(z+1)^2},$$

$$k_{f1}(z) = \frac{3}{64}(5 - 20z - 29z^2 + 60z^3) - \frac{3(3z+1)}{64\sqrt{4z+1}}(5 - 21z - 10z^2 + 40z^3) +$$

$$+ \frac{3}{32} \ln(z+1) + \frac{3}{32}(1 - 18z^2 + 30z^4) \ln\left(\frac{2z+1+\sqrt{4z+1}}{2(z+1)}\right),$$

$$k_{f2}(z) = \frac{3(-5 + 3z + 30z^2 - 30z^3)}{32(z-1)} + \frac{3}{16} \ln\left(\frac{z}{z-1}\right) - \frac{9}{16} z^2(3 - 5z^2) \ln\left(\frac{z^2}{z^2-1}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hicks W.M.* On the motion of two spheres in a fluid // *Phil. Trans.* 1880. V. 171. P. 455–492.
2. *Basset A.B.* On the motion of two spheres in a liquid, and allied problems // *Proc. London Math. Soc.* 1886. V. 18. P. 369–377.
3. *Cunningham E.* On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium // *Proc. Roy. Soc. (London)*. 1910. Ser. A. V. 83. P. 357–365.
4. *Zuber N.* On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime // *Chem. Engng. Sci.* 1964. V. 19. P. 897–917.
5. *Wijngaarden L., Jeffrey D.J.* Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. Issue 1. P. 27–44.
6. *Felderhof B.U.* Virtual mass and drag in two-phase flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. P. 177–196.
7. *Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А.* Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 290. № 4. С. 820–824.
8. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *Докл. АН*. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
9. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Лобачевского*. 2011. № 4–3. С. 740–741.
10. *Гуськов О.Б.* О присоединенной массе тела, движущегося в суспензии сферических частиц // *Докл. АН*. 2012. Т. 442. № 1. С. 50–53.
11. *Гуськов О.Б.* Присоединенная масса сферы в суспензии сферических частиц // *Прикл. матем. и механ.* 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 134–139.
12. *Гуськов О.Б.* О движении кластера сферических частиц в идеальной жидкости // *Прикл. матем. и механ.* 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 186–193.
13. *Гуськов О.Б.* Концепция самосогласованного поля применительно к динамике невязких суспензий // *Материалы X междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2014)*. 22–31 мая 2014 г. Алушта. М.: МАИ, 2014. С. 87–89.
14. *Гуськов О.Б.* О присоединенной массе шероховатой сферы // *Прикл. матем. и механ.* 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 471–482.
15. *Zaripov S.K., Vanyunina M.V., Osiptsov A.N., Skvortsov E.V.* Calculation of concentration of aerosol particles around a slot sampler // *Atmospheric Environment*. 2007. V. 41. Issue 23. P. 4773–4780.
16. *Shuyan Wang, Jin Sun, Qian Yang, Yueqi Zhao, Jinsen Gao, Yang Liu.* Numerical simulation of flow behavior of particles in an inverse liquid–solid fluidized bed // *Powder Technology*. 2014. V. 261. P. 14–21.
17. *Shuai Wang, Huilin Lu, Qinghong Zhang, Guodong Liu, Feixiang Zhao, Liyan Sun.* Modeling of Bubble-Structure-Dependent Drag for Bubbling Fluidized Beds // *Ind. Engng. Chem. Res.* 2014. V. 53. Issue 40. P. 15776–15785.
18. *Shuyan Wang, Xiaoxue Jiang, Ruichen Wang, Xu Wang, Shanwen Yang, Jian Zhao, Yang Liu.* Numerical simulation of flow behavior of particles in a liquid–solid stirred vessel with baffles // *Advanced Powder Technology*. 2017. V. 28. P. 1611–1624.
19. *Wen-rui Wang, Zhao Li, Jia-ming Zhang, Han-lin Li.* Simulation study of particle–fluid two-phase coupling flow field and its influencing factors of crystallization process // *Chemical Papers*. 2018. V. 72. Issue 12. P. 3105–3117.
20. *Beek P. van.* A counterpart of Faxen's formula in potential flow // *Int. J. Multiphase Flow*. 1985. V. 11. № 6. P. 873–879.
21. *Batchelor G.K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. Pt. 2. P. 245–268.
22. *Beenakker C.W.J., Mazur P.* Is sedimentation container-shape dependent? // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. No. 11. P. 3203–3206.

23. Гуськов О.Б., Золотов А.В. Об осаждении суспензии сферических частиц в цилиндре // Прикл. матем. и механ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 968–972.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
25. Бошнятов Б.В. К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // Докл. АН. 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.
26. Boshenyatov B.V. The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. 2016. V. 7. № 2. С. 95–104.
27. Бошнятов Б.В. Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкости // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 3. С. 17–24.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА
ЧЕРЕЗ ГРАНУЛИРОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ
С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ¹⁾**

© 2021 г. Н. А. Луценко^{1,2,*}, С. С. Фецов^{1,2,**}

¹ 690041 Владивосток, ул. Радио, 5, Институт автоматизации и процессов управления, ДВО РАН, Россия

² 690091 Владивосток, ул. Суханова, 8, Дальневосточный федеральный университет, Россия

*e-mail: NickL@inbox.ru

**e-mail: fetc95@mail.ru

Поступила в редакцию 17.12.2019 г.
Переработанный вариант 20.01.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Предложены математическая модель и численный метод для исследования двумерных плоских течений газа через тепловые аккумуляторы на основе гранулированного или капсулированного материала с фазовым переходом. Рассматриваемые объекты моделируются как пористые среды с фазовыми переходами в конденсированном компоненте, при этом используются методы механики сплошных многокомпонентных сред, а процессы внутри отдельных частиц не детализируются. Предложенный численный метод, основанный на комбинации явных и неявных конечно-разностных схем, подробно описан, проведен экспериментальный анализ его сходимости. Исследован нагрев тепловых аккумуляторов плавно сужающейся и плавно расширяющейся формы, состоящих из гранулированного материала с фазовым переходом, и показано, что в таких объектах разогрев вблизи наклонных стенок происходит медленнее, чем в центральной части, даже при отсутствии теплообмена через боковые стенки. Библ. 27. Фиг. 3. Табл. 4.

Ключевые слова: теплоаккумулирующий материал, фазовый переход, пористые среды, газ, конечно-разностный метод.

DOI: 10.31857/S0044466921030133

ВВЕДЕНИЕ

Постоянно возрастающий мировой спрос на электроэнергию в условиях ограниченных энергоресурсов стимулирует не только развитие нетрадиционной энергетики, но и более рациональное использование произведенной энергии. Одним из направлений для повышения эффективности энергетических систем является использование хранилищ энергии (см. [1]), которые позволяют накапливать излишки энергии и отдавать их при пиковом энергопотреблении. Особенно необходимыми такие устройства становятся при использовании нетрадиционной энергетики (солнечной, ветряной), которая отличается сильно неравномерным производством энергии. Вместе с тем использование хранилищ энергии в комбинации с традиционными электростанциями также позволяет существенно повысить их эффективность. Перспективным способом хранения энергии являются воздушно-аккумулирующие газотурбинные электростанции (ВАГТЭ) (см. [2]). В них избыточная электроэнергия направляется на компрессоры, которые закачивают сжимаемый воздух в специальные резервуары, а при пиковом энергопотреблении сжатый воздух выходит из резервуаров и раскручивает турбины, вырабатывающие электроэнергию. ВАГТЭ характеризуются высокой надежностью, экономичностью и низким воздействием на окружающую среду; они могут быть как малогабаритные, так и крупномасштабные. Однако в этих устройствах образующееся при сжатии воздуха тепло не используется, при этом на нагрев расширяющегося воздуха, выходящего из резервуаров, расходуется топливо. Данные недостатки

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы “Дальний Восток” 2018–2020 (проект 18-5-064) и программы Президиума РАН № 27 “Фундаментальные проблемы решения сложных практических задач помощью суперкомпьютеров”.

устраняются в разрабатываемых ВАГТЭ нового типа – бестопливных адиабатических, в которых тепло сжатого воздуха сохраняется и используется при его расширении (см. [3]). Адиабатичность можно достичь за счет использования в ВАГТЭ накопителей тепловой энергии на основе гранулированного или капсулированного теплоаккумулирующего материала (ТАМ) с фазовым переходом, в частицах которого происходит плавление и кристаллизация вещества без нарушения их целостности (см. [4]). Гранулированные ТАМ выпускаются в промышленных масштабах (см. [5]) и представляют собой неорганические несущие матрицы размером несколько миллиметров, внутри которых содержится органическое вещество, претерпевающее фазовые переходы (плавление/кристаллизация), но не вытекающее в жидком состоянии за счет адсорбции. Заметим, что указанные гранулированные или капсулированные ТАМ могут применяться не только в составе перспективных ВАГТЭ, но и в иных энергетических системах, и являются весьма перспективными материалами для различных приложений (см. [6]).

Настоящая работа посвящена численному моделированию течений газа через слой гранулированного или капсулированного материала с фазовым переходом. Такие материалы при относительно малых размерах составляющих их частиц могут описываться, с точки зрения механики, как сплошные многокомпонентные среды. Использование подхода взаимодействующих взаимопроникающих континуумов подразумевает пространственное осреднение и позволяет отказаться от детального описания процессов в каждой частице (см. [7]); данный подход прекрасно зарекомендовал себя при моделировании различных гранулированных и пористых сред. Фазовые превращения в гранулированных ТАМ не могут описываться классической задачей Стефана (см. [8]), так как в таких материалах отсутствует четко выраженная граница фазовых переходов. Из-за интенсивного теплообмена между протекающим газом и твердым пористым каркасом в гранулированных и капсулированных ТАМ зона фазового перехода становится не поверхностной, а протяженной областью – двухфазной зоной (см. [9], [10]), в которой присутствует плавящееся вещество в двух фазах. Особенности процессов в ТАМ с газовым теплоносителем, таким образом, затрудняют применение при их моделировании известных численных методов (см. [11]). Вместе с тем актуальность задачи стимулировала активные исследования в области численного моделирования гранулированных или капсулированных ТАМ (см. [12]–[15]). В [16], [17] были предложены и апробированы математическая модель и оригинальный численный метод для исследования одномерных течений газа через слой гранулированного материала с фазовым переходом. Анализ сходимости численного метода и сравнение результатов расчета с известными экспериментами, подробно описанные в [17], показали работоспособность предложенной численной модели даже при расчете малоразмерных теплоаккумуляторов. В [18] исследовано влияние сжимаемости газа при моделировании процессов в гранулированных плавящихся ТАМ и показано, что распространенное пренебрежение сжимаемостью при моделировании указанных ТАМ может приводить к значительным неточностям в решении задачи, а также не может гарантировать верхнюю или нижнюю оценку для реального времени протекания процесса. Заметим, что предложенные в [16], [17] модель и метод расчета являются модификацией моделей и алгоритмов для исследования как нестационарных процессов охлаждения пористых саморазогревающихся объектов при заданном давлении газа на их открытых границах (см. [19], [20]), так и нестационарных процессов фильтрационного горения твердых пористых сред в условиях естественной конвекции и принудительной фильтрации (см. [21], [22]).

В настоящей работе для моделирования двумерных плоских нестационарных течений газа через гранулированные материалы с фазовым переходом предложены математическая модель и численный метод, являющиеся развитием модели и метода, подробно описанных в [17]. На последовательности сгущающихся сеток экспериментально исследована сходимость метода. Рассмотрены задачи о нагреве теплового аккумулятора на основе гранулированного материала с фазовым переходом, имеющего боковые границы плавно сужающейся и плавно расширяющейся формы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим пористый объект, имеющий как открытые, так и непроницаемые границы. Конденсированная среда в этом объекте представляет собой засыпку частиц гранулированного теплоаккумулирующего материала, в которых происходит плавление/кристаллизация без нарушения их целостности. Указанный фазовый переход протекает при определенной фиксированной температуре. Газ втекает в объект через открытую границу при заданных температуре и давлении, проходит через гранулированную засыпку и вытекает через проницаемую поверхность в открытое пространство с заданным давлением. Отметим, что при плавлении и затвердевании ма-

териалов в общем случае меняются их плотность и размеры. Однако в реальных теплоаккумулирующих материалах, используемых в накопителях тепловой энергии, такие изменения, как правило, малы, поэтому изменением пористости, плотности конденсированной фазы, а также ее движением можно пренебречь.

Математическая модель описанного процесса строится в рамках модели взаимодействующих взаимопроникающих континуумов (см. [7]) и включает в себя уравнения неразрывности, движения и внутренней энергии газа, уравнение внутренней энергии теплоаккумулирующего материала, а также уравнение состояния совершенного газа. В уравнении энергии ТАМ учитываются его теплопроводность, контактный теплообмен с газом, который полагается пропорциональным разнице их температур в рассматриваемой точке среды, а также поглощение/выделение энергии в результате плавления/кристаллизации материала, интенсивность которого пропорциональна скорости изменения доли расплавленного вещества материала по аналогии с теорией двухфазной зоны (см. [9], [10], [23], [24]). В уравнении внутренней энергии газа учитываются теплопроводность и теплообмен с теплоаккумулирующим материалом. Для описания динамики газа используется уравнение сохранения импульса для пористых сред (см. [7]), которое может рассматриваться как обобщение классического закона Дарси. Так как в [25] было показано, что учет температурной зависимости динамической вязкости при моделировании течения газа через пористые тепловыделяющие объекты может изменять решение не только качественно, но и количественно, то в настоящей работе также будем полагать, что вязкость газа зависит от его температуры по формуле Сазерленда. Так как теплоаккумулирующий материал полагается неподвижным и с постоянной плотностью, то уравнения движения и неразрывности для него вырождаются. Таким образом, система уравнений, описывающая нестационарные течения газа через гранулированные материалы с фазовым переходом, в общем случае может быть записана следующим образом:

$$(1-a)c_c\rho_c\frac{\partial T_c}{\partial t} = -\alpha(T_c - T_g) + (1-a)\lambda_c\Delta T_c - (1-a)Q\rho_c\frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$c_{gp}\rho_g\left(a\frac{\partial T_g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_g\right) = \alpha(T_c - T_g) + a\lambda_g\Delta T_g, \quad (1.2)$$

$$\frac{1+(1-a)\chi}{a^2}\rho_g\left(a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \rho_g\mathbf{g} - \frac{\mu}{k_1}\mathbf{u} - \rho_g k_2|\mathbf{u}|\mathbf{u}, \quad (1.3)$$

$$a\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_g\mathbf{u} = 0, \quad p = R\rho_g T_g, \quad (1.4)$$

$$\mu = c_{s1}\frac{T_g^{1.5}}{c_{s2} + T_g}, \quad f = \begin{cases} 0, & T_c < T_{ph}, \\ [0 \dots 1], & T_c = T_{ph}, \\ 1, & T_c > T_{ph}, \end{cases} \quad (1.5)$$

где a – пористость, c – удельная теплоемкость, c_{s1} , c_{s2} – константы в формуле Сазерленда, f – доля жидкой фазы в теплоаккумулирующем материале, \mathbf{g} – ускорение силы тяжести, k_1 – коэффициент проницаемости пористой среды, k_2 – коэффициент инерционного сопротивления пористой среды, p – давление газа, Q – удельная теплота плавления материала, R – газовая постоянная, T – температура, t – время, \mathbf{u} – скорость фильтрации газа, α – константа, определяющая интенсивность межфазного теплообмена, Δ – оператор Лапласа, λ – коэффициент теплопроводности, μ – коэффициент динамической вязкости газа, ρ – плотность, χ – коэффициент, учитывающий инерционное взаимодействие сред при их относительном ускоренном движении (см. [7]), ∇ – оператор набла. Индексы в обозначениях указывают на следующее: c – теплоаккумулирующий (конденсированный) материал, g – газ, p – значение при постоянном давлении, ph – значение при фазовом переходе.

Далее при описании двумерных плоских течений газа в гранулированном материале будем использовать эйлеровы декартовы координаты x_i и обозначать индексом 1 – горизонтальную компоненту, а индексом 2 – вертикальную компоненту векторных величин. Введем безразмерные переменные следующим образом: $\tilde{x}_i = x_i/H$, $i = 1, 2$, $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/u_*$, $\tilde{t} = t/t_*$, $\tilde{p} = p/p_*$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_*$, $\tilde{T}_c = T_c/T_*$, $\tilde{T}_g = T_g/T_*$, где H – высота рассматриваемого пористого объекта, u_* , t_* – характерные значения скорости фильтрации газа и времени соответственно, p_* , ρ_* , T_* – значения давления,

плотности и температуры газа при “нормальных” условиях. Подставляя новые переменные в (1.1)–(1.5) и опуская тильду, можем переписать систему (1.1)–(1.5) в безразмерном виде в декартовых координатах:

$$(1 - a) \text{Sh} \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\text{St}_1 (T_c - T_g) + \frac{1 - a}{\text{Pe}_1} \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_2^2} \right) - (1 - a) \frac{\text{Sh}}{\text{Ste}} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.6)$$

$$\rho_g \left(a \text{Sh} \frac{\partial T_g}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_g}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T_g}{\partial x_2} \right) = \text{St}_2 (T_c - T_g) + \frac{a}{\text{Pe}_2} \left(\frac{\partial^2 T_g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_g}{\partial x_2^2} \right), \quad (1.7)$$

$$\frac{1 + (1 - a)\chi}{a^2} \rho_g \left(a \text{Sh} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\text{Eu} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{u_1}{\text{Re} \Pi_1 c_{s2} + T_g} T_g^{1.5} - \rho_g \Pi_2 (u_1^2 + u_2^2)^{0.5} u_1, \quad (1.8)$$

$$\frac{1 + (1 - a)\chi}{a^2} \rho_g \left(a \text{Sh} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = -\text{Eu} \frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\rho_g}{\text{Fr}} - \frac{u_2}{\text{Re} \Pi_1 c_{s2} + T_g} T_g^{1.5} - \rho_g \Pi_2 (u_1^2 + u_2^2)^{0.5} u_2, \quad (1.9)$$

$$a \text{Sh} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_g u_2}{\partial x_2} = 0, \quad p = \rho_g T_g, \quad f = \begin{cases} 0, & T_c < T_{ph}, \\ [0 \dots 1], & T_c = T_{ph}, \\ 1, & T_c > T_{ph}. \end{cases} \quad (1.10)$$

В системе (1.6)–(1.10) используются следующие параметры подобия:

$$\begin{aligned} \text{Eu} &= p / \rho_* u_*^2, & \text{Fr} &= u_*^2 / gH, & \text{Pe}_1 &= u_* \rho_* c_c H / \lambda_c, & \text{Pe}_2 &= u_* \rho_* c_{gp} H / \lambda_g, \\ \text{Re}_2 &= \rho_* u_* \sqrt{k_1} / c_{s1} \sqrt{T_*}, & \text{Sh} &= H / u_* t_*, & \text{St}_1 &= \alpha H / \rho_* c_c u_*, & \text{St}_2 &= \alpha H / \rho_* c_{gp} u_*, \\ \text{Ste} &= T_* c_c / Q, & \Pi_1 &= \sqrt{k_1} / H, & \Pi_2 &= k_2 H. \end{aligned}$$

Расчет фазового перехода в системе (1.6)–(1.10) происходит следующим образом. Уравнение внутренней энергии теплоаккумулирующего материала (1.6) при решении распадается на два уравнения, последовательно используемых для определения двух функций: T_c и f . Когда температура материала не равна температуре его плавления, слагаемое $s f$ обнуляется, и мы получаем следующее уравнение, из которого определяется функция T_c :

$$(1 - a) \text{Sh} \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\text{St}_1 (T_c - T_g) + \frac{1 - a}{\text{Pe}_1} \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_2^2} \right). \quad (1.11)$$

Когда температура материала достигает точки плавления/кристаллизации, начинается фазовый переход. При постоянной температуре фазового перехода левая часть уравнения энергии материала обнуляется, и мы получаем следующее уравнение для определения функции f :

$$(1 - a) \frac{\text{Sh}}{\text{Ste}} \frac{\partial f}{\partial t} = -\text{St}_1 (T_{ph} - T_g) + \frac{1 - a}{\text{Pe}_1} \left(\frac{\partial^2 T_c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial x_2^2} \right). \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) используется, пока f не достигнет своих экстремальных значений, соответствующих окончанию фазового перехода: 0 – при кристаллизации и 1 – при плавлении. Далее возвращаемся к уравнению (1.11). Представленный подход позволяет описывать процессы при произвольной скорости фазового превращения и не требует наличия четкой границы фазовых переходов.

Граничные условия для системы (1.6)–(1.10) следующие. На входе в пористый объект (т.е. на открытой границе, через которую газ втекает в объект) известны давление и температура газа, на выходе (т.е. на открытой границе, через которую газ вытекает из объекта) известно давление газа. На открытых и непроницаемых границах также известны условия теплообмена. Таким образом, граничные условия для системы (1.6)–(1.10) могут быть записаны в виде

$$p|_{G_1} = p_0, \quad T_g|_{G_1} = T_{g0}, \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla T_c|_{G_1} = \text{Bi}_o (T_c - T_a)|_{G_1 \cup G_2}, \quad (1.13)$$

$$p|_{G_2} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T_g|_{G_2} = 0, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{G_3} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T_g|_{G_3} = 0, \quad -\mathbf{n} \cdot \nabla T_c|_{G_3} = \text{Bi}_w (T_c - T_a)|_{G_3}. \quad (1.15)$$

Здесь G_1 и G_2 – соответственно открытые границы, через которые газ втекает и вытекает из объекта, G_3 – непроницаемые границы объекта, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе объекта, p_0 , T_{g0} – заданные значения давления и температуры газа на входе в пористый объект соответственно, T_a – температура внешней среды, $Bi_o = \beta_o H / \lambda_c$, $Bi_w = \beta_w H / \lambda_c$, где β_o и β_w – коэффициенты, определяющие интенсивность теплообмена с внешней средой через открытые и непроницаемые границы соответственно.

Для решения системы (1.6)–(1.10) с условиями (1.13)–(1.15) необходимо задать значения искомых величин в начальный момент времени.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений (1.6)–(1.10), описывающая двумерное плоское течение газа через слой гранулированного материала с фазовым переходом, является нелинейной смешанной гиперболически-параболической системой уравнений и в общем случае не может быть решена аналитически. Для ее решения предлагается численный метод, основанный на комбинации явных и неявных конечно-разностных схем. В соответствии с идеей метода уравнения внутренней энергии и движения газа преобразовываются в явные конечно-разностные уравнения, из которых определяются температура и компоненты скорости фильтрации газа соответственно. Уравнение энергии теплоаккумулирующего материала также преобразовывается в конечно-разностное уравнение, из которого по явной схеме определяются функции T_c и f , согласно описанному в предыдущем разделе алгоритму. Уравнение неразрывности преобразуется в неявное конечно-разностное уравнение, из которого методом прогонки (см. [26]) с учетом уравнения состояния совершенного газа определяется давление. Далее из уравнения состояния совершенного газа определяется плотность газа.

Рассмотрим равномерную прямоугольную сетку с шагом по пространству h и шагом по времени $\tau = rh^2$. Для сокращения записей здесь и далее будем полагать, что открытые границы объекта являются только горизонтальными, а непроницаемые границы – только вертикальными (для других случаев все соотношения можно выписать по аналогии с данным случаем). Заменяя частные производные в (1.6)–(1.10) конечными разностями и обозначая продвижение по временной координате верхними индексами, а продвижение по пространственным координатам – нижними, выпишем следующую систему конечно-разностных уравнений, аппроксимирующую исходную систему (1.6)–(1.10):

$$T_{cl,m}^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau St_1}{(1-a)Sh}\right) T_{cl,m}^n + \frac{\tau St_1}{(1-a)Sh} T_{gl,m}^n + \frac{r}{ShPe_1} (T_{cl+1,m}^n + T_{cl,m+1}^n - 4T_{cl,m}^n + T_{cl-1,m}^n + T_{cl,m-1}^n), \quad \text{если } T_{cl,m}^n \neq T_{ph}, \quad (2.1)$$

$$f_{l,m}^{n+1} = f_{l,m}^n - \frac{\tau St_1 Ste}{(1-a)Sh} (T_{ph} - T_{gl,m}^n) + \frac{r Ste}{ShPe_1} (T_{cl+1,m}^n + T_{cl,m+1}^n - 4T_{ph} + T_{cl-1,m}^n + T_{cl,m-1}^n), \quad \text{если } 0 < f_{l,m}^n < 1, \quad (2.2)$$

$$T_{gl,m}^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau St_2}{aSh\rho_{gl,m}^n}\right) T_{gl,m}^n + \frac{\tau St_2}{aSh\rho_{gl,m}^n} T_{cl,m}^n - \frac{rh}{2aSh} u_{l,m}^n (\pm T_{gl,m}^n \mp T_{gl\mp 1,m}^n \pm T_{gl\mp 2,m}^n) - \frac{rh}{2aSh} u_{2l,m}^n (\pm T_{gl,m}^n \mp T_{gl,m\mp 1}^n \pm T_{gl,m\mp 2}^n) + \frac{r}{ShPe_1 \rho_{gl,m}^n} (T_{gl+1,m}^n + T_{gl,m+1}^n - 4T_{gl,m}^n + T_{gl-1,m}^n + T_{gl,m-1}^n), \quad (2.3)$$

$$u_{l,m}^{n+1} = \left(1 - \frac{rh}{2aSh} (u_{l+1,m}^n - u_{l-1,m}^n) - \frac{a\tau}{[1 + (1-a)\chi] Sh Re \Pi_1 \rho_{gl,m}^n c_{s2} + T_{gl,m}^n}\right) u_{l,m}^n - \frac{rh}{2aSh} u_{2l,m}^n (u_{l,m+1}^n - u_{l,m-1}^n) - \frac{arhEu}{2[1 + (1-a)\chi] Sh \rho_{gl,m}^n} (p_{l+1,m}^n - p_{l-1,m}^n) - \frac{a\tau \Pi_2}{[1 + (1-a)\chi] Sh} \left((u_{l,m}^n)^2 + (u_{2l,m}^n)^2 \right)^{0.5} u_{l,m}^n - \omega_3 - \omega_4, \quad (2.4)$$

$$u_{2l,m}^{n+1} = \left(1 - \frac{rh}{2aSh} (u_{2l,m+1}^n - u_{2l,m-1}^n) - \frac{a\tau}{[1 + (1-a)\chi] Sh Re \Pi_l \rho_{gl,m}^n c_{s2} + T_{gl,m}^n} (T_{gl,m}^n)^{1.5} \right) u_{2l,m}^n - \frac{rh}{2aSh} u_{1l,m}^n (u_{2l+1,m}^n - u_{2l-1,m}^n) - \frac{arhEu}{2[1 + (1-a)\chi] Sh \rho_{gl,m}^n} (p_{l,m+1}^n - p_{l,m-1}^n) - \frac{a\tau \Pi_2}{[1 + (1-a)\chi] Sh} \left((u_{1l,m}^n)^2 + (u_{2l,m}^n)^2 \right)^{0.5} u_{2l,m}^n - \frac{a\tau}{[1 + (1-a)\chi] Sh Fr} - \omega_5 - \omega_6, \tag{2.5}$$

$$-\frac{rh}{2} \frac{u_{2l,m-1}^{n+1}}{T_{gl,m-1}^{n+1}} p_{l,m-1}^{n+1} + \frac{aSh}{T_{gl,m}^{n+1}} p_{l,m}^{n+1} + \frac{rh}{2} \frac{u_{2l,m+1}^{n+1}}{T_{gl,m+1}^{n+1}} p_{l,m+1}^{n+1} = aSh \rho_{gl,m}^n - \frac{rh}{2} (u_{1l+1,m}^n \rho_{gl+1,m}^n - u_{1l-1,m}^n \rho_{gl-1,m}^n) - \omega_1 - \omega_2, \tag{2.6}$$

$$\rho_{gl,m}^{n+1} = \frac{p_{l,m}^{n+1}}{T_{gl,m}^{n+1}}. \tag{2.7}$$

Система конечно-разностных уравнений (2.1)–(2.7) аппроксимирует исходную систему (1.6)–(1.10) со вторым порядком точности по h и первым порядком по τ , в чем несложно убедиться с помощью разложения искомых функций в ряд Тейлора. В уравнении (2.3) вариация знака при аппроксимации конвективной производной температуры газа обусловлена направлением скорости фильтрации газа: при положительном значении соответствующей компоненты скорости фильтрации выбирается верхний знак, при отрицательном значении – нижний. Для схем четного порядка точности типично преобладание дисперсионной ошибки (см. [26]), которая может приводить к осцилляциям решения и потере устойчивости. Поэтому в уравнения (2.4)–(2.6) добавлены демпфирующие члены, которые имеют четвертый порядок и не изменяют формальную точность метода. Эти слагаемые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\omega_1^*} (p_{l+2,m}^n - 4p_{l+1,m}^n + 6p_{l,m}^n - 4p_{l-1,m}^n + p_{l-2,m}^n), & \omega_1^* &= \text{const}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{\omega_2^*} (p_{l,m+2}^n - 4p_{l,m+1}^n + 6p_{l,m}^n - 4p_{l,m-1}^n + p_{l,m-2}^n), & \omega_2^* &= \text{const}, \\ \omega_3 &= \frac{1}{\omega_3^*} (u_{1l+2,m}^n - 4u_{1l+1,m}^n + 6u_{1l,m}^n - 4u_{1l-1,m}^n + u_{1l-2,m}^n), & \omega_3^* &= \text{const}, \\ \omega_4 &= \frac{1}{\omega_4^*} (u_{1l,m+2}^n - 4u_{1l,m+1}^n + 6u_{1l,m}^n - 4u_{1l,m-1}^n + u_{1l,m-2}^n), & \omega_4^* &= \text{const}, \\ \omega_5 &= \frac{1}{\omega_5^*} (u_{2l+2,m}^n - 4u_{2l+1,m}^n + 6u_{2l,m}^n - 4u_{2l-1,m}^n + u_{2l-2,m}^n), & \omega_5^* &= \text{const}, \\ \omega_6 &= \frac{1}{\omega_6^*} (u_{2l,m+2}^n - 4u_{2l,m+1}^n + 6u_{2l,m}^n - 4u_{2l,m-1}^n + u_{2l,m-2}^n), & \omega_6^* &= \text{const}. \end{aligned}$$

Краевые условия для сеточных функций получим из (1.13)–(1.15), используя для аппроксимации производных по координатам конечные разности второго порядка. На открытых границах объекта при определении температур газа и теплоаккумулирующего материала будем использовать трехточечную аппроксимацию производной по вертикальной координате

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)_{l,m} = \frac{\pm 3\varphi_{l,m} \mp 4\varphi_{l,m\mp 1} \pm \varphi_{l,m\mp 2}}{2h}, \tag{2.8}$$

где вместо φ подставляется соответствующая сеточная функция, верхний знак выбирается при наибольшем значении индекса m , нижний знак – при наименьшем.

Добавим также фиктивные точки (узлы сетки), расположенные за пределами открытых границ. Компоненты скорости фильтрации газа на открытых границах и в фиктивных точках, а так-

же температура газа в фиктивных точках определяются из условия равенства нулю их первых производных по вертикальной координате в соответствующих узлах сетки, аппроксимированных по формуле (2.8). Давление газа в фиктивных точках будем определять из условия равенства нулю на границе его второй производной по вертикальной координате, которую аппроксимируем по формуле

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\right)_{l,m} = \frac{p_{l,m+1} - 2p_{l,m} + p_{l,m-1}}{h^2}.$$

Для нахождения температур газа и теплоаккумулирующего материала на непроницаемых стенках используется аналогичная (2.8) формула для определения производной по горизонтальной координате

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{l,m} = \frac{\pm 3\varphi_{l,m} \mp 4\varphi_{l\mp 1,m} \pm \varphi_{l\mp 2,m}}{2h}, \quad (2.9)$$

где вместо φ подставляется соответствующая сеточная функция, верхний знак выбирается при наибольшем значении индекса l , нижний знак — при наименьшем. Добавим также дополнительные условия для давления и вертикальной (тангенциальной) компоненты скорости фильтрации газа на непроницаемых стенках, которые задаются исходя из равенства нулю их первых производных по нормали, записанных в виде (2.9). В добавляемых фиктивных точках, расположенных за пределами непроницаемой границы, задаются давление, температура газа и компоненты скорости фильтрации, которые определяются, согласно условию отражения (см. [26]), из их значений в приграничных узлах сетки.

Опишем алгоритм нахождения искомого сеточных функций из системы (2.1)–(2.7) на каждом временном слое. Пусть в начальный момент времени значения температуры в пористом объекте отличаются от температуры плавления теплоаккумулирующего материала. Фиксируя индекс l и последовательно меняя индекс m , решаем уравнения (2.1), (2.3)–(2.5); затем из граничных условий определяем значения искомого функций на открытых границах. Далее методом прогонки решаем уравнение (2.6), затем тривиально решаем уравнение (2.7). Выполнив описанную процедуру для всех “внутренних” значений индекса l , определяем значения всех искомого функций на боковых стенках и в фиктивных точках. Таким образом, задавая начальные условия и последовательно продвигаясь по временным слоям, найдем значения всех искомого функций в требуемый момент времени.

Когда при выполнении описанного алгоритма в каком-то узле сетки температура ТАМ переходит через точку плавления, алгоритм корректируется следующим образом: в данном узле сетки температура ТАМ приравнивается температуре фазового перехода и учитывается энергия, которая в данном узле на данном временном шаге должна быть затрачена на совершение фазового перехода:

$$f_{l,m}^{n+1} = f_{l,m}^n + \text{Ste} (T_{cl,m}^{n+1} - T_{ph}),$$

где $f_{l,m}^n$ равно 0 — при плавлении и 1 — при кристаллизации. Далее алгоритм нахождения искомого функций аналогичен описанному выше, но уравнение (2.1) теперь заменяется уравнением (2.2).

Когда при выполнении алгоритма в каком-то узле сетки доля жидкой фазы переходит через свое допустимое экстремальное значение (1 — при плавлении и 0 — при кристаллизации), алгоритм снова корректируется: в данном узле сетки значение доли жидкой фазы приравнивается соответствующему экстремальному значению и учитывается энергия, которая в данном узле на данном временном шаге должна быть затрачена на нагрев либо охлаждение ТАМ:

$$T_{cl,m}^{n+1} = T_{ph} + \frac{1}{\text{Ste}} (f_{l,m}^{n+1} - f_{ex}),$$

где f_{ex} равно 1 — при плавлении и 0 — при кристаллизации. Затем уравнение (2.2) заменяется уравнением (2.1). Дальнейший процесс отыскания неизвестных величин идентичен описанному выше.

Система разностных уравнений (2.1)–(2.7) может применяться для моделирования нестационарных течений газа в тепловых аккумуляторах на основе гранулированного или капсулированного материала с фазовым переходом, конфигурация которых позволяет описывать их в рамках двумерного плоского приближения. Достоинством предложенного численного метода явля-

ется то, что он не требует наличия четких границ раздела фаз, позволяя описывать процессы при произвольной скорости фазового перехода, а также позволяет избежать решения сложных систем уравнений, благодаря чему возможно распараллеливание алгоритма путем геометрической декомпозиции.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Доказать аналитически сходимость численного решения системы (2.1)–(2.7) к точному решению системы (1.6)–(1.10) не представляется возможным. Отметим, что так как система (1.6)–(1.10) является нелинейной, то доказательство устойчивости, если бы такое было возможным, также не гарантировало бы сходимость. Экспериментальное исследование сходимости показало, что сходимость имеет место при некотором ограничении на r .

Численный эксперимент показал, что точность предлагаемого метода зависит от геометрии пористого объекта. В случае, когда задача может быть сведена к одномерной нестационарной, результаты вычислений были сопоставлены с решением, полученным из описанного в [17] численного метода для одномерного течения, и показано полное совпадение. В [17] точность метода была подтверждена сравнением с экспериментальными данными из [14], [27], а также проверкой сходимости на последовательности сгущающихся сеток. Данная проверка показала, что описывающий одномерные течения метод имеет первый порядок сходимости, но при этом порядок сходимости во внутренних точках может приближаться ко второму. Соответственно, точно такой же порядок сходимости имеет предлагаемый в настоящей работе метод при расчете одномерных течений.

Для пористых объектов иных конфигураций исследования сходимости проводились на последовательности сгущающихся сеток. Такой численный анализ показал, что значительной чувствительностью к шагу сетки обладают локальные экстремумы компонент скорости фильтрации газа, которые могут возникать при огибании газом горизонтальных препятствий. Погрешности вычислений таких пиковых значений на грубых сетках может оказаться достаточно большой. Однако, если основной интерес представляет нахождение распределений температур, плотности, давления, доли жидкой фазы, то для объектов таких форм грубые сетки позволяют получить достаточно точный результат вычислений данных величин. В случае же отсутствия горизонтальных препятствий для движения газа в пористом объекте, как правило, можно использовать достаточно грубые сетки ($h = 0.025$). Но заметим, что при наличии больших градиентов каких-либо величин (например, температур в пристеночных областях при сильном внешнем теплообмене через эти стенки) может оказаться, что грубая сетка не в состоянии корректно учесть эти градиенты, что может привести к существенным погрешностям в таких локальных областях. Однако, если первоочередная задача состоит в определении каких-либо интегральных параметров, то в этом случае грубые сетки позволяют получить достаточно точный результат.

При проверке порядка сходимости предложенного численного метода было обнаружено, что общий порядок сходимости, который определяется скоростью сходимости времени полного плавления ТАМ и скоростью сходимости искомых функций в узлах сетки, близок к первому, как и в одномерных задачах (см. [17]). Однако порядок сходимости для внутренних точек сетки может быть выше. Продемонстрируем это на ряде модельных задач. Рассмотрим функцию $t_{ml} = t_{ml}(x_1, x_2)$ – время расплавления ТАМ в точке (x_1, x_2) , т.е. время, когда функция f в точке (x_1, x_2) становится равной 1. Рассмотрим также отклонения этой функции:

$$(\delta t_{ml})_k = |t_{ml}[h_k] - t_{ml}[h_{k-1}]|, \tag{3.1}$$

где $t_{ml}[h_k]$ – значение времени плавления ТАМ в точке (x_1, x_2) , полученное на сетке с шагом $h_k = h_0 2^{-k}$, $h_0 = 0.05$. По определению сходимости введенные в (3.1) отклонения должны удовлетворять соотношению

$$\delta_k = b_0 h_k^b, \tag{3.2}$$

где параметр b_0 и скорость сходимости b не зависят от h .

Рассмотрим течение газа в пористом объекте, который имеет форму прямоугольного параллелепипеда с проницаемыми горизонтальными и непроницаемыми вертикальными стенками, при этом две боковые параллельные друг другу стенки теплоизолированы, а другие две – нет. Расстояние между вертикальными стенками, через которые может осуществляться теплообмен с внешней средой, обозначим через L . Течение газа в таком объекте может считаться плоским и

Таблица 1. Результаты численных расчетов на последовательности сгущающихся сеток с теплоизолированными боковыми стенками

		$h = 5 \times 10^{-2}$	$h = 2.5 \times 10^{-2}$	$h = 1.25 \times 10^{-2}$	$h = 6.25 \times 10^{-3}$	b	b_0
(0.25, 0.25)	t_{ml}	1.033	1.015	1.009	1.006	—	—
	δt_{ml}	—	1.84×10^{-2}	0.631×10^{-2}	0.285×10^{-2}	1.344	2.504
(0.25, 0.5)	t_{ml}	1.979	1.957	1.949	1.945	—	—
	δt_{ml}	—	2.25×10^{-2}	0.816×10^{-2}	0.359×10^{-2}	1.323	2.869
(0.25, 0.75)	t_{ml}	2.992	2.962	2.953	2.949	—	—
	δt_{ml}	—	3.014×10^{-2}	0.901×10^{-2}	0.403×10^{-2}	1.452	5.977
(0.25, 1)	t_{ml}	3.841	3.923	3.962	3.98	—	—
	δt_{ml}	—	8.202×10^{-2}	3.89×10^{-2}	1.77×10^{-2}	1.106	4.885

описываться системой (1.6)–(1.10) с условиями (1.13)–(1.15). Зададим следующие значения безразмерных параметров:

$$a = 0.4, \quad \text{Bi}_o = 1, \quad c_{s2} = 0.37, \quad \text{Eu} = 8.3 \times 10^4, \quad \text{Fr} = 10^{-2}, \quad p_0 = 1.5, \quad \text{Pe}_1 = 3.4 \times 10^7, \\ \text{Pe}_2 = 5.45 \times 10^5, \quad \text{Re} = 4.75, \quad \text{Sh} = 3 \times 10^{-3}, \quad \text{St}_1 = 1.5 \times 10^{-2}, \quad \text{St}_2 = 41.7, \quad \text{Ste} = 6.75, \quad (3.3) \\ T_{g0} = 1.33, \quad T_{ph} = 1.17, \quad \Pi_1 = 10^{-5}, \quad \Pi_2 = 0, \quad \chi = 0.5,$$

которые соответствуют значениям размерных параметров

$$c_c = 2.25 \times 10 \text{ Дж}/(\text{кг К}), \quad c_{gp} = 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг К}), \quad c_{s1} = 1.46 \times 10^{-6} \frac{\text{кг}}{(\text{м с } \sqrt{\text{К}})}, \quad g = 9.81 \text{ м}/\text{с}^2, \\ H = 10 \text{ м}, \quad k_1 = 10^{-8} \text{ м}^2, \quad p_* = 10^5 \text{ Па}, \quad Q = 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}, \quad R = 287 \text{ Дж}/(\text{кг К}), \\ T_* = 300 \text{ К}, \quad t^* = 3.6 \times 10^3 \text{ с}, \quad u_* = 1 \text{ м}/\text{с}, \quad \alpha = 5 \times 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \text{ К}), \quad \beta_o = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}), \\ \lambda_c = 10^2 \text{ Вт}/(\text{м К}), \quad \lambda_g = 2.2 \times 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м К}), \quad \rho_c = 1.5 \times 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3, \quad \rho_{g*} = 1.2 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Пусть $L = 0.5$. В начальный момент времени $T_c = T_g = 1$, $f = u_1 = u_2 = 0$, а p и ρ_g соответствуют условиям равновесия газа в пористом объекте. Рассмотрим два предельных типа граничных условий для температур ТАМ на непроницаемой поверхности G_3 . Первое условие соответствует адиабатической стенке ($\partial T_c / \partial n|_{G_3} = 0$) и может быть получено из (1.15) при $\text{Bi}_w = 0$, а второе – изотермической стенке, оно может быть получено из (1.15) как предел при $\text{Bi}_w \rightarrow \infty$, из которого получаем $T_c|_{G_3} = T_a$, где положим $T_a = 1$.

Таблицы 1 и 2 демонстрируют значения времен плавления в разных точках и их отклонений, а также значения b_0 и b , полученные для (3.2) методом наименьших квадратов. Заметим, что параметры течения газа в описанном пористом объекте с адиабатическими стенками не изменяются по оси x_1 , поэтому в табл. 1 представлены данные только для плоскости симметрии объекта. Из табл. 1 и 2 видно, что порядок сходимости b может значительно отличаться в разных точках расчетной области, причем порядок сходимости во внутренних точках в среднем близок к 1.5, а в точках, принадлежащих границе области, – к 1. Это соответствует выводу, сделанному в [17] при исследовании одномерных задач, о том, что общий порядок сходимости численного метода близок к 1, хотя во внутренних точках он может быть выше.

Далее рассмотрим течение газа в пористом объекте на основе гранулированного ТАМ с фазовым переходом с теплоизолированными боковыми стенками, но имеющими более сложную, чем в предыдущем случае, конфигурацию. Пусть горизонтальные поверхности объекта проницаемы, две боковые непроницаемые стенки параллельны, а другие две боковые непроницаемые стенки им ортогональны, параллельны только в нижней и верхней областях, а в средней части плавно сужаются либо плавно расширяются по направлению движения газа (фиг. 1). Течения газа через такие объекты могут быть описаны системой (1.6)–(1.10) с условиями (1.13)–(1.15). При решении указанной системы будем использовать значения параметров (3.3) и $\text{Bi}_w = 0$. Пусть в

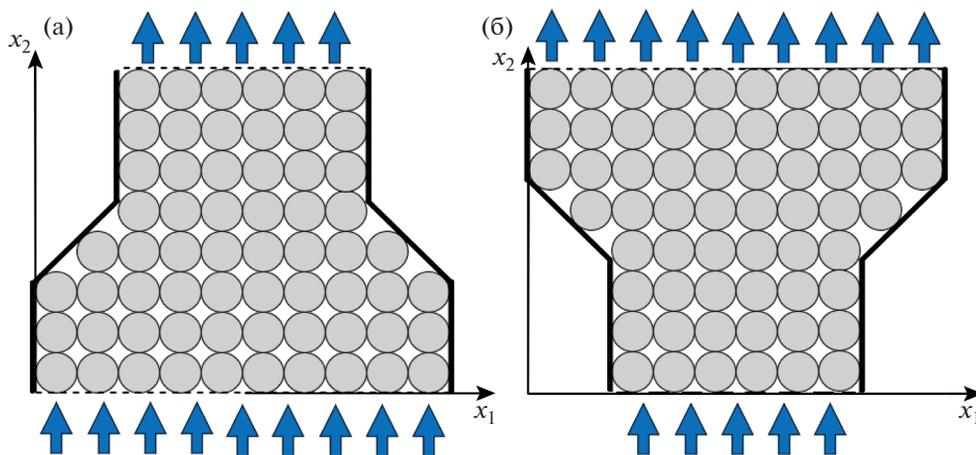
Таблица 2. Результаты численных расчетов на последовательности сгущающихся сеток с постоянной температурой на боковых стенках

		$h = 5 \times 10^{-2}$	$h = 2.5 \times 10^{-2}$	$h = 1.25 \times 10^{-2}$	$h = 6.25 \times 10^{-3}$	b	b_0
(0.1, 0.25)	t_{ml}	1.042	1.019	1.012	1.009	—	—
	δt_{ml}	—	2.334×10^{-2}	0.732×10^{-2}	0.28×10^{-2}	1.53	6.387
(0.1, 0.5)	t_{ml}	2.043	1.995	1.981	1.976	—	—
	δt_{ml}	—	4.842×10^{-2}	1.4×10^{-2}	0.492×10^{-2}	1.649	20.563
(0.1, 0.75)	t_{ml}	3.188	3.1	3.078	3.07	—	—
	δt_{ml}	—	8.849×10^{-2}	2.166×10^{-2}	0.828×10^{-2}	1.709	44.843
(0.25, 0.25)	t_{ml}	1.034	1.016	1.01	1.007	—	—
	δt_{ml}	—	1.838×10^{-2}	0.597×10^{-2}	0.252×10^{-2}	1.434	3.494
(0.25, 0.5)	t_{ml}	1.986	1.962	1.955	1.952	—	—
	δt_{ml}	—	2.342×10^{-2}	0.74×10^{-2}	0.296×10^{-2}	1.493	5.547
(0.25, 0.75)	t_{ml}	3.011	2.978	2.97	2.966	—	—
	δt_{ml}	—	3.357×10^{-2}	0.805×10^{-2}	0.345×10^{-2}	1.641	12.985
(0.25, 1)	t_{ml}	3.877	3.957	3.997	4.016	—	—
	δt_{ml}	—	7.939×10^{-2}	4.087×10^{-2}	1.862×10^{-2}	1.046	3.841

начальный момент времени $T_c = T_g = 1$, $f = u_1 = u_2 = 0$, а p и ρ_g соответствуют условиям равновесия газа в пористом объекте.

Геометрию пористого объекта с плавно сужающимися стенками определим следующим образом. Пусть расстояние L_1 между стенками на высоте $x_2 = 1$ в два раза меньше расстояния L_0 между ними на высоте $x_2 = 0$, плоскость $x_1 = L_0/2$ является плоскостью симметрии объекта, плавное сужение стенок начинается с высоты $x_2 = 0.25$ и заканчивается при $x_2 = 0.75$. Таким образом, боковые стенки имеют наклон $\pi/4$ к оси x_1 . Значения времен плавления ТАМ и его отклонений в разных точках при разных шагах сетки, а также значения b и b_0 из (3.2) для такого объекта при $L_0 = 2$ представлены в табл. 3.

Рассмотрим также течение газа в плавно расширяющемся пористом объекте. Пусть теперь $L_0 = L_1/2$, плоскостью симметрии объекта является плоскость $x_1 = L_1/2$, плавное расширение стенок начинается с высоты $x_2 = 0.25$ и заканчивается при $x_2 = 0.75$. Таким образом, боковые стенки имеют наклон $-\pi/4$ к оси x_1 . Значения времен плавления ТАМ и его отклонений в разных



Фиг. 1. Схема плавно сужающегося (а) и плавно расширяющегося (б) пористого объекта.

Таблица 3. Результаты численных расчетов на последовательности сгущающихся сеток в плавно сужающемся пористом объекте

		$h = 5 \times 10^{-2}$	$h = 2.5 \times 10^{-2}$	$h = 1.25 \times 10^{-2}$	$h = 6.25 \times 10^{-3}$	b	b_0
(0.5, 0.25)	t_{ml}	1.243	1.306	1.336	1.349	—	—
	δt_{ml}	—	6.337×10^{-2}	3.048×10^{-2}	1.224×10^{-2}	1.186	5.193
(1, 0.25)	t_{ml}	1.065	1.115	1.138	1.148	—	—
	δt_{ml}	—	4.961×10^{-2}	2.327×10^{-2}	0.964×10^{-2}	1.182	3.966
(0.5, 0.5)	t_{ml}	2.623	2.716	2.754	2.764	—	—
	δt_{ml}	—	9.291×10^{-2}	3.735×10^{-2}	1.082×10^{-2}	1.551	29.962
(1, 0.5)	t_{ml}	2.072	2.132	2.156	2.164	—	—
	δt_{ml}	—	6.067×10^{-2}	2.36×10^{-2}	0.869×10^{-2}	1.402	10.786
(1, 0.75)	t_{ml}	3.014	3.082	3.106	3.115	—	—
	δt_{ml}	—	6.84×10^{-2}	2.401×10^{-2}	0.879×10^{-2}	1.48	15.948
(1, 1)	t_{ml}	3.726	3.896	3.97	4.003	—	—
	δt_{ml}	—	17.006×10^{-2}	7.364×10^{-2}	3.305×10^{-2}	1.182	13.22

Таблица 4. Результаты численных расчетов на последовательности сгущающихся сеток в плавно расширяющемся пористом объекте

		$h = 5 \times 10^{-2}$	$h = 2.5 \times 10^{-2}$	$h = 1.25 \times 10^{-2}$	$h = 6.25 \times 10^{-3}$	b	b_0
(0.5, 0.25)	t_{ml}	0.818	0.86	0.881	0.89	—	—
	δt_{ml}	—	4.252×10^{-2}	2.046×10^{-2}	0.945×10^{-2}	1.085	2.343
(0.5, 0.5)	t_{ml}	1.707	1.733	1.747	1.751	—	—
	δt_{ml}	—	2.665×10^{-2}	1.346×10^{-2}	0.467×10^{-2}	1.257	2.927
(1, 0.5)	t_{ml}	1.686	1.744	1.769	1.779	—	—
	δt_{ml}	—	5.725×10^{-2}	2.495×10^{-2}	1.075×10^{-2}	1.207	4.915
(0.5, 0.75)	t_{ml}	3.032	3.079	3.093	3.096	—	—
	δt_{ml}	—	4.743×10^{-2}	1.418×10^{-2}	0.29×10^{-2}	2.015	85.48
(1, 0.75)	t_{ml}	2.781	2.849	2.874	2.884	—	—
	δt_{ml}	—	6.805×10^{-2}	2.547×10^{-2}	0.969×10^{-2}	1.406	12.122
(1, 1)	t_{ml}	3.799	4.011	4.101	4.14	—	—
	δt_{ml}	—	21.113×10^{-2}	9.008×10^{-2}	3.958×10^{-2}	1.208	18.073

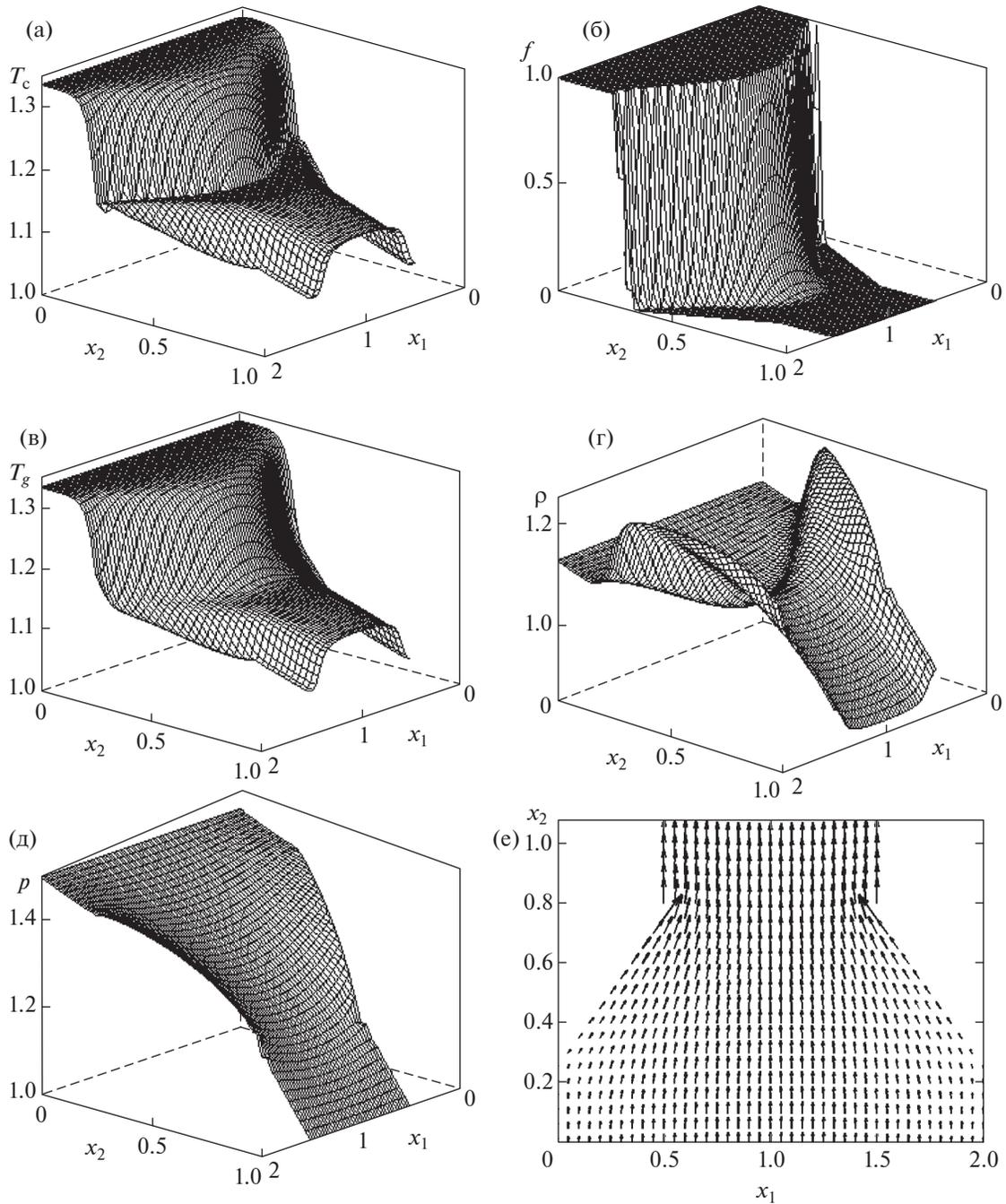
точках при разных шагах сетки и значения параметров b и b_0 из (3.2) при $L_1 = 2$ представлены в табл. 4.

Из табл. 3 и 4 видно, что так же, как и в рассмотренных выше случаях, скорость сходимости решения задачи выше во внутренних точках расчетной области, чем в граничных точках, причем на границе b в среднем близко к 1, а внутри — к 1.5. В ходе вычислительных экспериментов было обнаружено, что при течении газа через пористые объекты сложной геометрической конфигурации порядок сходимости в некоторых граничных точках может быть и ниже 1. Проведенные расчеты подтверждают сделанный ранее вывод о том, что скорость сходимости предлагаемого численного метода во внутренних точках выше, чем на границе.

Таким образом, общий порядок сходимости предложенного численного метода близок к первому, но во внутренних точках пористого объекта скорость сходимости может быть выше.

4. ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПЛАВНО СУЖАЮЩИЕСЯ И ПЛАВНО РАСШИРЯЮЩИЕСЯ ПОРИСТЫЕ ОБЪЕКТЫ С ГРАНУЛИРОВАННЫМ ПЛАВЯЩИМСЯ ТАМ

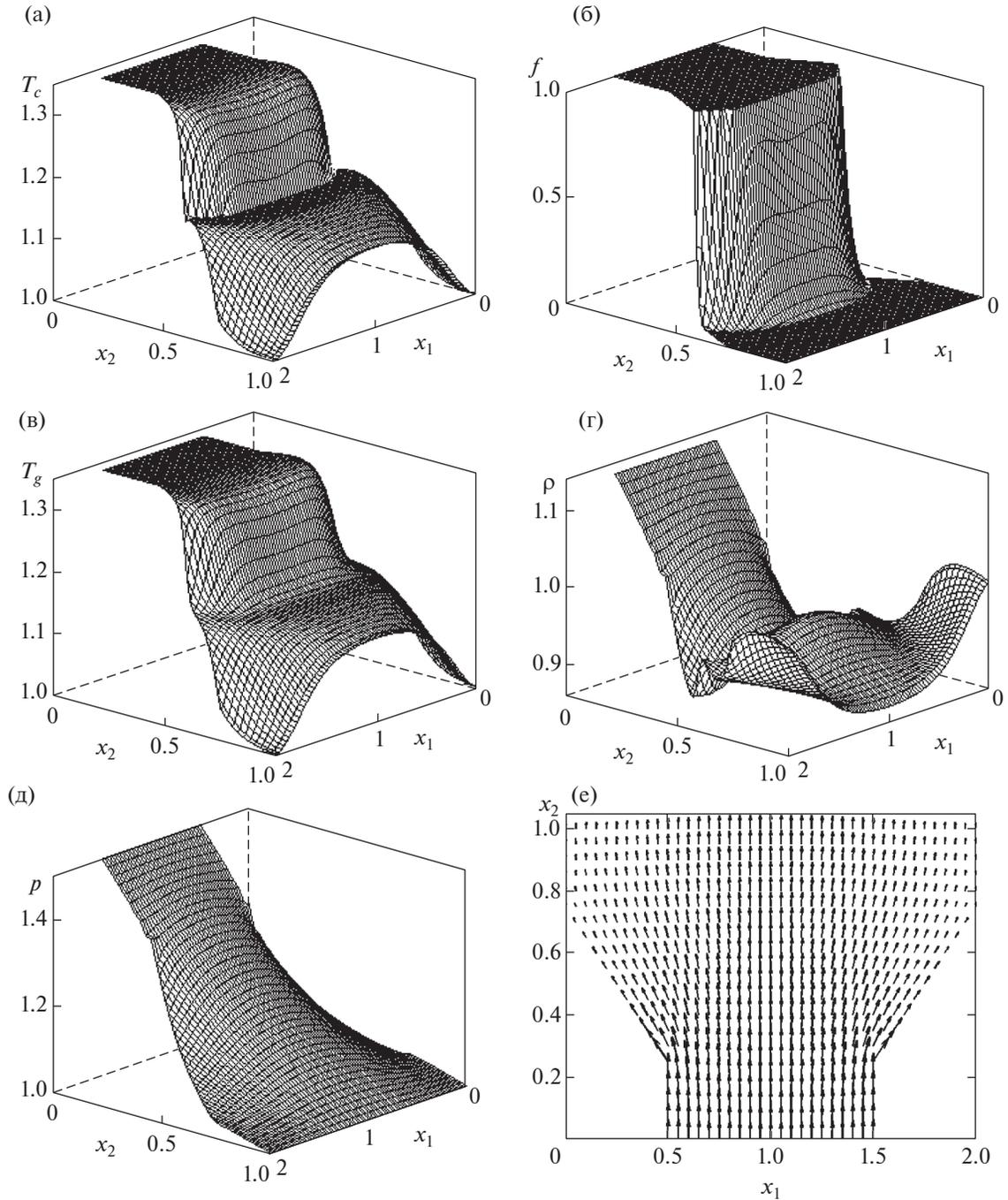
Для демонстрации работы предложенного численного метода рассмотрим течение газа через пористые объекты плавно сужающейся и плавно расширяющейся формы, описанные в преды-



Фиг. 2. Распределение температуры ТАМ (а), доли жидкой фазы в ТАМ (б), температуры (в), плотности (г), давления (д) газа и поля скоростей фильтрации газа (е) в пористом объекте с плавно сужающимися боковыми стенками в момент времени $t = 2$.

душем разделе и схематично изображенные на фиг. 1. Систему (1.6)–(1.10) и условия (1.13)–(1.15) также будем рассматривать при значениях параметров (3.3), $Bi_w = 0$ и при следующих начальных условиях: $T_c = T_g = 1$, $f = u_1 = u_2 = 0$, p и ρ_g соответствуют условиям равновесия газа в пористом объекте. Заметим, что такая постановка задачи соответствует процессу “зарядки” теплового аккумулятора, при котором в нем происходит накопление энергии.

На фиг. 2 приведены распределения искомых величин в плавно сужающемся пористом объекте при $L_0 = 2$ через время $t = 2$. Для лучшей визуализации все графики кроме поля скоростей развернуты на 180° ; длина стрелки на фиг. 2е пропорциональна модулю скорости. Из фиг. 2 сле-



Фиг. 3. Распределение температуры ТАМ (а), доли жидкой фазы в ТАМ (б), температуры (в), плотности (г), давления (д) газа и поля скоростей фильтрации газа (е) в плавно расширяющемся пористом объекте в момент времени $t = 2$.

дует, что, охлаждаясь в результате движения через объект, газ хуже нагревает гранулированный ТАМ, поэтому по направлению к выходу из объекта температуры газа и ТАМ падают. Более эффективный нагрев ТАМ происходит в центральной части объекта (в окрестности плоскости симметрии $x_1 = L_0/2$), так как здесь газ движется более быстро, чем у боковых стенок, сужение которых создает дополнительное сопротивление потоку и приводит к замедлению движения газа вблизи них. Из-за этого в пристеночных областях наблюдается заметное отставание температуры ТАМ, доли жидкой фазы и температуры газа от их значений в центральной части объекта.

Встречая на своем пути наклонные стенки, газ стремится обогнуть их, поэтому вблизи сужающихся стенок наблюдается повышенное давление газа, а плотность увеличивается значительно. В самом конце сужающейся зоны наблюдаются пиковые значения скорости фильтрации газа. Попадая вновь в зону с параллельными стенками, газ стремится течь вертикально вверх, а давление газа стремится выровняться по горизонтальной оси.

Далее рассмотрим течение газа в плавно расширяющемся пористом объекте. На фиг. 3 приведены распределения искомых величин в описанном пористом объекте при $L_1 = 2$ через время $t = 2$. Для лучшей визуализации все графики кроме поля скоростей повернуты на 180° . Из фиг. 3 следует, что так же, как в рассмотренном выше случае, более эффективный нагрев ТАМ происходит в центральной части объекта (в окрестности плоскости симметрии $x_1 = L_1/2$), так как здесь газ движется быстрее, чем у боковых стенок. Входя в расширяющуюся часть объекта, газ стремится заполнить увеличивающееся пространство, перетекая от центральной части к боковым стенкам, вблизи которых наблюдается пониженное давление. В самом начале расширяющейся зоны скорость фильтрации газа имеет пиковые значения. Аналогично рассмотренному выше случаю, в пристеночных областях наблюдается заметное отставание температуры ТАМ, доли жидкой фазы и температуры газа от их значений в центральной части объекта. Попадая после расширяющейся части в зону с параллельными стенками, газ стремится течь вертикально вверх, а давление газа стремится выровняться по горизонтальной оси. Нагрев ТАМ вблизи боковых стенок возле выхода из объекта происходит намного хуже, чем в предыдущем случае, из-за чего плотность в этих областях падает очень медленно и долго остается достаточно высокой.

Таким образом, при течении горячего газа как через сужающиеся, так и через расширяющиеся пористые объекты на основе гранулированных ТАМ с фазовым переходом нагрев вблизи наклонных стенок объекта происходит медленнее, чем в его центральной части, даже при отсутствии теплообмена через боковые стенки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для моделирования двумерных плоских течений газа через тепловые аккумуляторы на основе гранулированных или капсулированных материалов с фазовым переходом предложены математическая модель и численный метод. Экспериментальное исследование сходимости метода показало, что общий порядок сходимости близок к первому, однако во внутренних точках расчетной области скорость сходимости может быть выше. С использованием предложенной численной модели решена задача о течении горячего газа через пористые плавно сужающиеся и плавно расширяющиеся объекты, состоящие из гранулированного материала с фазовым переходом. Показано, что как при сужении, так и при расширении объекта нагрев теплоаккумулирующего материала и его плавление вблизи боковых стенок происходят медленнее, чем в центральной части объекта.

Вычисления проведены на оборудовании ЦКП “Дальневосточный вычислительный ресурс” ИАПУ ДВО РАН. Авторы выражают благодарность В.А. Левину за оказанную поддержку при проведении настоящего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Luo X., Wang J., Dooner M., Clarke J. Overview of current development in electrical energy storage technologies and the application potential in power system operation // Appl. Energy. 2015. V. 137. P. 511–536.
2. Ольховский Г.А., Казарян В.А., Столяревский А.Я. Воздушно-аккумулирующие газотурбинные электростанции. Ижевск: ИКИ, 2011. 360 с.
3. Venkataramani G., Parankusam P., Ramalingam V., Wang J. A review on compressed air energy storage – A pathway for smart grid and polygeneration // Renew. Sust. Energy Rev. 2016. V. 62. P. 895–907.
4. Zalba B., Marin J.M., Cabeza L.F., Mehling H. Review on thermal energy storage with phase change: materials, heat transfer analysis and applications // Appl. Therm. Eng. 2003. V. 23. P. 251–283.
5. rubitherm.eu
6. Rehman T.U., Ali H.M., Janjua M.M., Sajjad U., Yan W-M. A critical review on heat transfer augmentation of phase change materials embedded with porous materials/foams // Int. J. Heat Mass Trans. 2019. V. 135. P. 649–673.
7. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

9. *Борисов В.Т.* Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. № 3. С. 583–586.
10. *Авдонин Н.А.* Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 180 с.
11. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
12. *Nagano K., Takeda S., Mochida T., Shimakura K.* Thermal characteristics of a direct heat exchange system between granules with phase change material and air // Appl. Therm. Eng. 2004. V. 24. P. 2131–2144.
13. *Arkar C., Medved S.* Influence of accuracy of thermal property data of a phase change material on the result of a numerical model of a packed bed latent heat storage with spheres // Thermohim. Acta. 2005. V. 438. P. 192–201.
14. *Rady M.* Granular phase change materials for thermal energy storage: Experiments and numerical simulations // Appl. Therm. Eng. 2009. V. 29. P. 3149–3159.
15. *Peng H., Li R., Ling X., Dong H.* Modeling on heat storage performance of compressed air in a packed bed system // Appl. Energy. 2015. V. 160. P. 1–9.
16. *Левин В.А., Луценко Н.А., Фецов С.С.* Моделирование движения газа через слой гранулированного теплоаккумулирующего материала с фазовым переходом // Докл. РАН. 2018. Т. 479. № 4. С. 386–389.
17. *Lutsenko N.A., Fetsov S.S.* Numerical model of time-dependent gas flows through bed of granular phase change material // Int. J. Comput. Methods. 2019. V. 16. P. 1–17.
18. *Lutsenko N.A., Fetsov S.S.* Influence of gas compressibility on gas flow through bed of granular phase change material // Int. J. Heat Mass Trans. 2019. V. 130. P. 693–699.
19. *Левин В.А., Луценко Н.А.* Нестационарные течения газа через осесимметричные пористые тепловыделяющие объекты // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 3. С. 26–44.
20. *Луценко Н.А.* Численное моделирование трехмерных нестационарных течений газа через пористые объекты с источниками энерговыделения // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9 № 3. С. 331–344.
21. *Левин В.А., Луценко Н.А.* Двумерные течения газа при гетерогенном горении твердых пористых сред // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 30–34.
22. *Lutsenko N.A.* Numerical model of two-dimensional heterogeneous combustion in porous media under natural convection or forced filtration // Combust. Theor. Model. 2018. V. 22. Issue 2. P. 359–377.
23. *Ентов В.М., Максимов А.М., Цыпкин Г.Г.* Об образовании двухфазной зоны при кристаллизации смеси в пористой среде // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 3. С. 621–624.
24. *Александров Д.В.* К теории затвердевания с квазиравновесной двухфазной зоной // Докл. РАН 2000. Т. 375. № 2. С. 172–176.
25. *Левин В.А., Луценко Н.А.* Течение газа через пористую тепловыделяющую среду при учете температурной зависимости вязкости газа // Инженерно-физ. журн. 2006. Т. 79. № 1. С. 35–40.
26. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
27. *Izquierdo-Barrientos M.A., Sobrino C., Almendros-Ibanez J.A.* Thermal energy storage in a fluidized bed of PCM // Chem. Eng. J. 2013. V. 230. P. 573–583.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.633

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ВЛИЯНИЯ МАЛОЙ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ
НА ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЕ¹⁾

© 2021 г. А. В. Нестеров

117997 Москва, Стремянный пер., 36, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Россия

e-mail: andrenesterov@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2020 г.
Переработанный вариант 20.05.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Строится формальное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений, описывающих процесс переноса с диффузией в многофазной среде в случае, когда обмен между фазами происходит намного быстрее процессов переноса и диффузии. Рассматривается случай взаимного влияния диффузионных потоков компонент друг на друга. При принятых на данные задачи условиях главный член асимптотики описывается многомерным обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де Вриза. При выполнении ряда дополнительных условий приведена оценка остаточного члена по невязке. Библ. 8.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение, обобщенное многомерное уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза.

DOI: 10.31857/S0044466921020095

ВВЕДЕНИЕ

Строится асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малой нелинейностью и диффузионными слагаемыми

$$\varepsilon^2 \left(U_t + \sum_{i=1}^m D_i U_{x_i} \right) = AU + \varepsilon F(U) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_i U_{x_i x_i}, \quad (1)$$

$$|x_i| < \infty, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t > 0,$$

$$U(\bar{x}, 0) = H\omega\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right). \quad (2)$$

Здесь $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ – решение, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый положительный параметр, D_i – диагональные матрицы:

$$D_i = \{d_{i,lp}, d_{i,lp} = 0 \quad \forall l \neq p, 1 \leq i \leq m, 1 \leq l, p \leq k\},$$

где первый индекс относится к пространственным переменным, пара второй–третьей – к компонентам решения, $F(U)$ – достаточно гладкая, $\omega(\bar{z})$ – быстро убывает вместе со всеми своими производными при $\|\bar{x}\| \rightarrow \infty$:

$$|\omega^{(k)}(\bar{z})| < C e^{-\kappa \|\bar{z}\|^2} \quad \forall \bar{z}, C, \kappa > 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Константы C, κ могут зависеть от номера k . Матрицы коэффициентов диффузионного обмена B_i описывают диффузионные потоки по пространственным переменным x_i : $B_i = \{b_{i,lp}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq l, p \leq k\}$, где первый индекс относится к пространственным переменным, пара второй–тре-

¹⁾Работа выполнена при поддержке гранта РЭУ им. Г.В. Плеханова по теме “Интеллектуальная система анализа спутниковых данных с целью прогнозирования экономических последствий динамики глобального распределения запасов питьевой воды и пожарной опасности”.

тий — к компонентам решения. Соответственно диффузионный поток l -й компоненты вдоль оси x_i имеет вид

$$J_{i,l} = \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^k b_{i,lp} u_{p,x_i x_i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq l \leq k.$$

На данные задачи наложим условия.

Условие I. Матрица A имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому отвечает собственный вектор h_0 , вектор h_0^* есть собственный вектор матрицы A^T , отвечающий нулевому собственному значению; остальные ненулевые собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i=1, 2, \dots, k-1$. Ниже, для сокращения некоторых выкладок, будем считать, что остальные собственные значения матрицы A однократные (что не ограничивает общности).

Условие II. Потребуем, чтобы

$$(F(Z), h_0^*) = 0.$$

Условие III. Коэффициенты B_i удовлетворяют условиям: при любых фиксированных индексах i транспонированные по индексам l, p матрицы B_i^T имеют нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор h_0^* : $B_i^T h_0^* = 0 \quad \forall Z, 1 \leq i \leq m$.

Условие IV. Система (1) является параболической (см. [1]).

Легко показать, что из условий I–III следует закон сохранения

$$\int_{R^m} (U, h_0^*) d\bar{x} = \text{const.} \quad (4)$$

Начальные условия (2), имеющие вид асимптотически узкой “шапочки”, выбраны таким образом для того, чтобы исследовать асимптотику решения в наиболее интересных зонах больших градиентов начальных условий.

Настоящая работа является продолжением работ [2], [3]. Основная цель — получение формального асимптотического разложения решения задачи (1), (2) по малому параметру и определение задач, описывающих главный член разложения, представляющий в прикладных областях основной интерес.

Система уравнений (1) может описывать процессы переноса в многофазной среде в случае многих пространственных переменных, когда процессы обмена между фазами (описываемые слагаемым AU) проходят намного быстрее, чем процессы переноса, и отклонения от линейного режима малы. Поскольку в многофазной среде диффузионный перенос одной фазы может влиять на диффузионный перенос других фаз, то в слагаемых со вторыми пространственными производными матрицы B_{ij} , описывающие диффузионный перенос компонентов, не являются диагональными. Подобного типа задачи могут встречаться в теории коагуляции, тепло- и массопереноса и в других прикладных областях.

Асимптотическое разложение (АР) решения начальной задачи строится методом пограничных функций (см. [4]) и имеет вид

$$U(\bar{x}, t) = S(\zeta, t) + \Pi(\xi, \tau) + R_N = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, t) + \Pi_i(\bar{\xi}, \tau)) + R_N = U_N + R_N, \quad (5)$$

$$\zeta_i = (x_i - V_i t)/\varepsilon, \quad \xi_i = x_i/\varepsilon, \quad \tau = t/\varepsilon^2, \quad V_i = (D_i h_0, h_0^*)/(h_0, h_0^*).$$

Порядок разложения N определяется гладкостью входных данных.

Построение АР подробно описано в [2], [3] и др. В соответствии с погранслоинным методом А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова (см. [4]) нелинейная функция $F(U)$ представляется в виде

$$F(U) = F(\bar{U} + S + \Pi + R) = F(\bar{U}) + (F(\bar{U} + S) - F(\bar{U})) + (F(\bar{U} + \Pi) - F(\bar{U})) + (F(\bar{U} + S + \Pi + R) - F(\bar{U} + S) - F(\bar{U} + \Pi) + F(\bar{U})) = \bar{F} + SF + \Pi F + RF. \quad (6)$$

В этом представлении член \bar{U} играет вспомогательную роль.

1. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

Наличие нулевого собственного значения у матрицы A относит сингулярно возмущенную систему (1) к так называемому критическому случаю (см. [4]).

1.1. Построение регулярной части AP

Регулярная часть AP решения задачи (1) при условиях (2) равна нулю, но для дальнейшего изложения необходимо выписать задачу, из которой определяется главное слагаемое регулярной части

$$\bar{U}(\bar{x}, t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(\bar{x}, t). \tag{7}$$

Подставляя разложение (7) в систему (8):

$$\varepsilon^2 \left(\bar{U}_t + \sum_{i=1}^m D_i \bar{U}_{x_i} \right) = A \bar{U} + \varepsilon(\bar{U}) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_i \bar{U}_{x_i}, \tag{8}$$

$$|x_i| < \infty, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t > 0,$$

стандартным способом из [4] получаем соотношения для определения членов разложения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : A \bar{u}_0 &= 0, \\ \varepsilon^1 : A \bar{u}_1 &= -F(\bar{u}_0), \\ \varepsilon^2 : A \bar{u}_2 &= \bar{u}_{0,t} + \sum_{i=1}^m D_i \bar{u}_{0,x_i} - F'_u(\bar{u}_0) \bar{u}_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Система для определения \bar{u}_0 , очевидно, разрешима, система для определения \bar{u}_1 так же разрешима в силу условия II $(F(Z), h_0^*) = 0 \quad \forall Z$, откуда имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(x, t) &= u_0(x, t) h_0, \\ \bar{u}_1 &= u_1(x, t) h_0 - GF(\bar{u}_0), \end{aligned}$$

где G – псевдообратный к A оператор, $u_0(x, t)$ и $u_1(x, t)$ – пока не определенные скалярные функции.

Условие разрешимости системы для u_2 с учетом условия II преобразуется к форме

$$\bar{u}_{0,t} + \sum_{i=1}^m V_i \bar{u}_{0,x_i} = 0,$$

где

$$V_i = (D_i h_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*). \tag{9}$$

Полученные выражения для коэффициентов V_i существенны для дальнейших построений.

При поставленных начальных условиях, зависящих только от растянутой переменной x/ε , начальные условия для u_0 нулевые, поэтому

$$\bar{u}_0(\bar{x}, t) \equiv 0 \quad \forall \bar{x}, t$$

и все остальные \bar{u}_i тоже равны нулю.

1.2. Построение функции S

Функция S , зависящая от растянутых переменных, строится в виде

$$S(\bar{\zeta}, t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i s_i(\bar{\zeta}, t), \quad \bar{\zeta}_i = (x_i - V_i t) / \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{10}$$

Здесь V_i найдены выше в (9). Функция S есть решение системы

$$\varepsilon^2 \left(S_t + \sum_{i=1}^m D_i S_{x_i} \right) = AS + \varepsilon SF + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m SB_i S_{x_i x_i}, \quad (11)$$

$$|\bar{\zeta}| < \infty, \quad t > 0.$$

Переходя к переменным $(\bar{\zeta}, t)$ и принимая во внимание $\bar{U} = 0$, получаем

$$\varepsilon^2 S_t + \varepsilon \sum_{i=1}^m (D_i - V_i) S_{\zeta_i} = AS + \varepsilon F(S) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_i S_{\zeta_i \zeta_i}. \quad (12)$$

Подставляя разложение (10) в систему (12) стандартным способом из [4], получаем соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : AS_0 &= 0, \\ \varepsilon^1 : AS_1 &= \tilde{S}_1, \\ \varepsilon^2 : AS_2 &= s_{0,t} + \tilde{S}_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \sum_{i=1}^m (D_i - V_i) s_{0, \zeta_i} - F(s_0) - \sum_{i=1}^m B_i s_{0, \zeta_i \zeta_i}, \\ \tilde{S}_2 &= \sum_{i=1}^m (D_i - V_i) s_{1, \zeta_i} - F'_u(s_0) s_1 - \sum_{i=1}^m B_i s_{1, \zeta_i \zeta_i}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Имеем

$$s_0(\bar{\zeta}, t) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0. \quad (13)$$

Легко показать, что система уравнений для s_1 разрешима в силу условий II и III, поэтому s_1 можно записать в виде

$$s_1(\bar{\zeta}, t) = \varphi_1(\bar{\zeta}, t) h_0 + G \tilde{S}_1. \quad (14)$$

Запишем условие разрешимости системы уравнений для определения s_2 :

$$(s_{0,t} + \tilde{S}_2, h_0^*) = 0.$$

Подставляя сюда $s_0 = h_0 \varphi_0$, \tilde{S}_2 , исключая φ_1 с помощью соотношения (14), принимая во внимание условия I–III и легко проверяемое равенство $((D_i - V_j) h_0, h_0^*) = 0$, получаем замкнутое уравнение для определения φ_0 . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_i &= (D_i - V_i), \\ M_{ii} &= (\Psi_i G \Psi_i h_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*), \\ M_{ij} &= ((\Psi_i G \Psi_j h_0, h_0^*) + (\Psi_j G \Psi_i h_0, h_0^*)) / (2(h_0, h_0^*)), \\ F_{i,\text{eff}} &= -(\Psi_i G F(\varphi_0 h_0), h_0^*) / (h_0, h_0^*), \\ B_{ik,\text{eff}} &= -(\Psi_k G B_i h_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда уравнение для определения φ_0 может быть записано в компактной форме

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0, \zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F_{i,\text{eff}}(\varphi_0))'_{\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0, \zeta_i \zeta_k} = 0. \quad (16)$$

Наложим условие диссипативности.

V. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^m M_{ij}z_i z_j$ является отрицательно знакоопределенной (или полу- знакоопределенной):

$$\sum_{i,j=1}^m M_{ij}z_i z_j \leq 0 \quad \forall \sum_{i=1}^m z_i^2 > 0.$$

Не затрагивая вопросы существования, единственности и свойств решений уравнения (16), формально построим остальные члены разложения (10).

Уравнения для остальных членов разложения (10) получаются стандартно (см. [4]). Выпишем члены порядка ϵ , ϵ^2 и ϵ^3 :

$$\begin{aligned} \epsilon^1 : As_1 &= \tilde{S}_1, \\ \epsilon^2 : As_2 &= s_{0,t} + \tilde{S}_2, \\ \epsilon^3 : As_3 &= s_{1,t} + \tilde{S}_3, \end{aligned}$$

где \tilde{S}_3 получается из \tilde{S}_2 (см. выше) заменой ϕ_1 на ϕ_2 . Из первого и второго соотношений получаем

$$\begin{aligned} s_1 &= h_0 \phi_1(\bar{\zeta}, t) + G\tilde{S}_1, \\ s_2 &= h_0 \phi_2(\bar{\zeta}, t) + G\tilde{S}_2, \end{aligned}$$

где ϕ_1, ϕ_2 – пока произвольные функции.

Записывая условие разрешимости системы уравнений для s_3 :

$$(s_{1,t} + \tilde{S}_3, h_0^*) = 0,$$

после исключения s_2 , получаем уравнение для определения ϕ_1 .

Вводя обозначение

$$F1_{i,\text{eff}} = (\Psi_i GF(\phi_0 h_0) h_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*),$$

и принимая во внимание обозначения (15), введенные выше, запишем это уравнение в виде

$$\phi_{1,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \phi_{1,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F1_{i,\text{eff}} \phi_1)_{\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \phi_{1,\zeta_i \zeta_k} = \Psi_1(\bar{\zeta}, t), \tag{17}$$

где Ψ_1 выражается через ϕ_0 .

Уравнения для остальных членов разложения получаются аналогично и имеют аналогичный вид (с заменой индекса у ϕ и Ψ с 1 на n , при этом Ψ_n выражается через $\phi_j, j < n$).

Построенная выше функция S ни в каком приближении не может удовлетворить начальным условиям. Для удовлетворения начальным условиям строится функция Π :

$$\Pi(\bar{\xi}, \tau) = \sum_{i=0}^N \epsilon^i p_i(\bar{\xi}, \tau), \quad \bar{\xi} = \bar{x}/\epsilon, \tau = t/\epsilon^2. \tag{18}$$

Построение функции Π делается стандартно (см. [4]). Функция Π есть решение системы

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left(\Pi_t + \sum_{i=1}^m D_i \Pi_{x_i} \right) &= A\Pi + \epsilon \Pi F + \epsilon^3 \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \Pi_{x_i x_j}, \\ |\bar{x}| < \infty, \quad \tau > 0, \end{aligned} \tag{19}$$

совместно с функцией S должна удовлетворять начальным условиям и быть функцией погранслоя:

$$\begin{aligned} S(\bar{\zeta}, 0) + \Pi(\bar{\xi}, 0) &= H\omega\left(\frac{\bar{x}}{\epsilon}\right), \\ \Pi(\bar{\xi}, \tau) &\rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

Построение уравнений, из которых определяются члены разложения (18), проводится стандартно (см. [4]), описано во многих работах и здесь не приводится.

Главный член разложения (18) есть решение системы

$$p_{0,\tau} = Ap_0, \quad |\bar{\xi}| < \infty, \quad \tau > 0. \quad (21)$$

Начальные условия для s_0 и p_0 ставятся совместно с условием p_0 при $\tau \rightarrow \infty$:

$$p_0 + s_0|_{t=0} = U(\bar{x}, 0) = H\omega\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right), \quad p_0(\bar{\xi}, \infty) < \infty. \quad (22)$$

Из условий (22) с учетом $s_0 = h_0\varphi_0(\zeta, t)$ легко получаются начальные условия для φ_0 и p_0 . В силу условия I на собственные значения матрицы A функция p_0 имеет вид

$$p_0 = C_0(\bar{\xi})h_0 + \sum_{i=1}^{N-1} C_i(\bar{\xi})h_i e^{\lambda_i t}. \quad (23)$$

Из условий $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N-1$ и $p_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ получаем $C_0 = 0$.

Соответственно начальные условия (22) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_i(\bar{\xi})h_i + \varphi_0(\bar{\zeta}, 0)h_0 = H\omega(\bar{\xi}),$$

откуда однозначно находятся все $C_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ и $\varphi_0(\zeta, 0)$:

$$\varphi_0(\bar{\zeta}, 0) = q\omega(\bar{\xi}), \quad (24)$$

где q – константа.

Начальные условия для $\varphi_0(\zeta, t)$ определены.

Тем самым, функция p_0 однозначно определена и, очевидно, удовлетворяет оценке

$$\|p_0(\bar{\xi}, \tau)\| < C \exp(-\kappa(\|\bar{\xi}\|^2 + \tau)), \quad \kappa > 0. \quad (25)$$

Убывание p_0 по пространственным переменным является следствием требований, наложенных на начальные условия (2).

Остальные $p_i (i \geq 1)$ определяются из неоднородных СОДУ:

$$p_{i,\tau} = Ap_i + P_i, \quad i \geq 1, \quad |\bar{\xi}| < \infty, \quad \tau > 0. \quad (26)$$

Здесь P_i выражаются через найденные ранее $p_j, j < i$.

Начальные условия для функций φ_i и p_i получаются аналогично (см. [4]):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, 0) + p_i(\bar{\xi}, 0)) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i p_i(\bar{\xi}, \tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty$$

что дает

$$s_i(\bar{\zeta}, 0) + p_i(\bar{\xi}, 0) = 0,$$

$$p_i(\bar{\xi}, \tau) \rightarrow 0 \quad \forall i > 0. \quad (27)$$

Из условий (26) получаются начальные условия для φ_i и p_i .

Решения СОДУ (26) с начальными условиями (27) существуют и удовлетворяют аналогичным оценкам:

$$\|p_i(\bar{\xi}, \tau)\| < C \exp(-\kappa(\|\bar{\xi}\|^2 + \tau)), \quad \kappa > 0. \quad (28)$$

2. ОЦЕНКА S-ФУНКЦИЙ

К сожалению, автору не удалось найти в литературе исчерпывающих результатов, касающихся вопросов существования, единственности и оценок решений начальных задач для уравнений типа (16).

Легко получить (совершенно аналогично оценкам для одномерного уравнения Бюргера–Кортвега–де Вриза), что при выполнении условия диссипативности V, интегрируемости с квадратом и быстрого убывания начальных условий на бесконечности, выполняется оценка

$$\frac{d}{dt} M(t) < 0,$$

где

$$M(t) = \int_{R^n} \varphi_0^2(\bar{\zeta}, t) d\bar{\zeta}.$$

В [2], [3] показано, что множество матриц A, для которых выполняется условие диссипативности V и условия I на собственные значения, не пусто, и что матрицы соответствующего вида могут возникать в физических задачах.

В [5]–[7] показано, что при начальных данных, удовлетворяющих оценке $|u(x, 0)| < Ce^{-\kappa x^2}$, $\kappa > 0$, решение уравнения Бюргера–Кортвега–де Вриза

$$u_t + 2uu_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0$$

удовлетворяет оценке

$$u(x, t) = At^{-1/2} e^{-\xi^2} + O(t^{-1}), \quad \xi = \frac{x}{(2\sqrt{t})}. \quad (29)$$

Отметим, что, согласно замечанию 3, на стр. 76 работы [5], остаток в (29) не зависит от ξ . Но, очевидным образом, он зависит не только от переменной t , но и от x , причем, как и все решение, интегрируем по x с квадратом. К сожалению, асимптотическое поведение остатка при $|x| \rightarrow \infty$ в [5] не исследовано.

Ввиду обстоятельств, изложенных выше, придется оперировать с, по сути, не проверяемыми условиями на данные задачи.

Будем считать выполненными условие 1 и условие 2.

Условие 1. Пусть выполнены условия I–V и функция $F(U)$, матрицы $B(U)$ таковы, что решение задачи (15), (23) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$ и на этом промежутке выполняется оценка

$$|\varphi_0(x, t)| < Ce^{-\kappa t^2} \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad C > 0, \quad \kappa > 0,$$

где C и κ – положительные постоянные.

Условие 2. Решения всех задач (16), (26) до номера N существуют, единственны и удовлетворяют на том же промежутке оценке

$$|\varphi_i(x, t)| < Ce^{-\kappa t^2} \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad C > 0, \quad \kappa > 0.$$

Результаты из [5]–[7] дают основания полагать, что множества функций $F(U)$ и матриц $B(U)$, при которых выполняются условие 1 и условие 2, не пусты и в многомерном случае.

3. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Общие теоремы существования и единственности (см. [1]) при выполнении условия IV гарантируют существование и единственность решения исходной задачи (1), (2) лишь на асимптотически малом промежутке времени. Поэтому будем считать выполненным Условие 3, так же не проверяемое непосредственно по данным задачи.

Условие 3. Пусть решение задачи (1), (2) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ не зависит от ε .

Оценка остаточного члена проводится по невязке.

Теорема. Если справедливы условия I–V и условия 1–3, то решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$U(\bar{x}, t) = S_N(\bar{\zeta}, t) + \Pi_N(\bar{\xi}, \tau) + R_{N+3} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, t) + \Pi_i(\bar{\xi}, \tau)) + R_N = U_N + R_N,$$

где $S + \Pi$ есть построенное AP , и остаточный член удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2 \left(R_t + \sum_{i=1}^m D_i R_{x_i} \right) = AR + \varepsilon RF + \varepsilon^3 \sum_{i,j=1}^m B_{ij} R_{x_i x_j} + r, \quad |\bar{x}| < \infty, \quad t > 0,$$

$$R(\bar{x}, 0) = 0, \quad r = O(\varepsilon^N).$$

Доказательство. Существование самой величины R следует из условия 3. Оценка $r = O(\varepsilon^N)$ непосредственно вытекает из оценок (25), (28), оценок в условиях 1, 2 и алгоритма построения AP .

ВЫВОДЫ

1. Главный член AP при $t > t_0$, где $t_0 > 0$ – любое фиксированное (не зависящее от ε) число, имеет вид

$$U(\bar{x}, t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, t) + \Pi_i(\bar{\zeta}, \tau)) + R_N = s_0(\bar{\zeta}, t) + O(\varepsilon) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t)h_0 + O(\varepsilon). \tag{30}$$

В разложении (30) $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ есть решение уравнения (15), которое в развернутой форме имеет вид

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m F'_{i,\text{eff}}(\varphi_0) \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0 \tag{31}$$

(обобщенное уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза (см. [7])). Для квадратичной функции $F(u)$ уравнение (31) становится прямым обобщением уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза на многомерный случай:

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m k_i \varphi_0 \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0. \tag{32}$$

В случае одной пространственной переменной уравнение (32) отличается от уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза (см. [8]) только коэффициентами.

Можно привести пример системы (1) двух уравнений с двумя пространственными переменными и квадратичной нелинейностью, которая удовлетворяет всем условиям, наложенным выше:

$$\varepsilon^2 (u_t + D_{1,x} u_x + D_{1,y} u_y) = -au + bv + \varepsilon(eu^2 + fuv + gv^2) + \varepsilon^3 (cu_{xx} - dv_{xx} + k(cu_{yy} - dv_{yy})),$$

$$\varepsilon^2 (v_t + D_{2,x} v_x + D_{2,y} v_y) = au - bv - \varepsilon(eu^2 + fuv + gv^2) + \varepsilon^3 (-cu_{xx} + dv_{xx} - k(cu_{yy} - dv_{yy})).$$

Здесь коэффициенты $a, b, c, d, k > 0$.

Переменные ζ_1, ζ_2 имеют вид

$$\zeta_1 = (x - V_x t) / \varepsilon, \quad \zeta_2 = (y - V_y t) / \varepsilon,$$

$$V_x = \frac{bD_{1,x} + aD_{2,x}}{a + b}, \quad V_y = \frac{bD_{1,y} + aD_{2,y}}{a + b}.$$

Уравнение (32) приобретает вид

$$\varphi_{0,t} + M_{11} \varphi_{0,\zeta_x \zeta_x} + 2M_{12} \varphi_{0,\zeta_x \zeta_y} + M_{22} \varphi_{0,\zeta_y \zeta_y} = k_1 (\varphi_0^2)_{\zeta_x} + k_2 (\varphi_0^2)_{\zeta_y} + B_{11,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_1 \zeta_1} + B_{12,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_1 \zeta_2} + B_{21,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_2 \zeta_1} + B_{22,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_2 \zeta_2}. \tag{33}$$

Коэффициенты уравнения (33) равны

$$M_{11} = -\Delta x^2 r, \quad M_{12} = -\Delta x \Delta y r, \quad M_{22} = -\Delta y^2 r,$$

где

$$r = \frac{ab}{(a + b)^3}, \quad \Delta x = D_{1,x} - D_{2,x}, \quad \Delta y = D_{1,y} - D_{2,y}.$$

Остальные коэффициенты равны

$$k_1 = k\Delta x \frac{b}{(a+b)^2}, \quad k_2 = k\Delta y \frac{b}{(a+b)^2}, \quad k = e + f \frac{a}{b} + g \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Коэффициенты при третьих производных равны

$$B_{11,\text{eff}} = \Delta x q, \quad B_{12,\text{eff}} = \Delta x k q, \quad B_{21,\text{eff}} = \Delta y q, \quad B_{22,\text{eff}} = \Delta y k q, \\ q = \frac{-cb + ad}{(a+b)^2}.$$

2. Можно отметить, что для главного члена асимптотики так же выполняется закон сохранения (4):

$$\int_{R^m} (s_0(\bar{\zeta}, t), h_0^*) d\bar{\zeta} = \int_{R^m} \varphi_0(\bar{\zeta}, t) (h_0, h_0^*) d\bar{\zeta} = \text{const},$$

так как при условиях

$$|\varphi_0^{(k)}(\bar{\zeta}, t)| < C e^{-\kappa \|\bar{\zeta}\|^2} \quad \forall \bar{\zeta}, C, \quad \kappa > 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

получаем

$$\int_{R^m} \left(\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m k_i \varphi_0 \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,j,k=1}^m B_{ijk,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j \zeta_k} \right) d\bar{\zeta} = 0 = \frac{d}{dt} \int_{R^m} \varphi_0 d\bar{\zeta} + \\ + \frac{d}{dt} \int_{R^m} \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{R^m} \sum_{i=1}^m k_i (\varphi_0)_{\zeta_i}^2 d\bar{\zeta} + \frac{d}{dt} \int_{R^m} \sum_{i,j,k=1}^m B_{ijk,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j \zeta_k} d\bar{\zeta} = \frac{d}{dt} \int_{R^m} \varphi_0 d\bar{\zeta},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \int_{R^m} \varphi_0(\bar{\zeta}, t) d\bar{\zeta} = 0.$$

3. Таким же образом можно строить асимптотики решений задач Коши в случае, когда начальные условия имеют вид не “шапочки” (2), а сглаженной “ступеньки”. Построение асимптотик начально-краевых задач возможно лишь для главного члена.

4. При иной расстановке степеней малого параметра, а так же при изменении условий на функцию F и матрицы A, B асимптотика решения может иметь совершенно иной вид.

5. Условие IV параболичности системы (1) легко проверяется в случае, когда все матрицы B_i приводятся к диагональной форме одним преобразованием $\tilde{B}_i = C^{-1} B_i C = \text{diag}\{\tilde{b}_{i,jj}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m\}$ (например, в случае $B_i = q_i B$, где $q_i > 0$ – скаляры). Тогда из условия $\tilde{b}_{i,jj} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m$, будет следовать параболичность системы (1).

В качестве примера можно привести старшую пространственную часть оператора в случае трех пространственных переменных и трех неизвестных

$$B(q_1 U_{xx} + q_2 U_{yy} + q_3 U_{zz}), \quad q_1, q_2, q_3 > 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} a+b & -c & -e \\ -a & c+d & -f \\ -b & -d & e+f \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f > 0.$$

6. Формально алгоритм остается в силе и при наличии в правой части системы (1) смешанных вторых производных, а так же недиагональных матрицах D_i .

7. Очень интересные свойства части пространственного оператора, содержащей вторые производные (связь между размерностью системы и размерностью пространства), описаны в [1]. Квадратичная форма, отвечающая вторым производным в уравнении (16),

$$\sum_{i,j=1}^m M_{ij} z_i z_j,$$

может быть вырожденной, причем степень вырождения зависит от соотношения между числом уравнений k и пространственных переменных m .

Было бы интересно выявить аналогичные свойства у полной дифференциальной части (содержащей третьи производные) уравнения (16).

8. С помощью асимптотического анализа сингулярно возмущенная исходная система k уравнений по сути свелась к одному не возмущенному уравнению (16), исследование которого существенно проще, чем исходной системы (1), и при численном решении требует существенно меньших машинных ресурсов. Так же выявлены неочевидные закономерности поведения решения исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
2. *Нестеров А.В.* О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными в дальней зоне // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 4. С. 639.
3. *Нестеров А.В., Шулико О.В.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 2. С. 268.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978. С. 106.
5. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Асимптотика решения уравнения Уизема при больших временах // *Матем. моделирование.* 1990. Т. 2. № 3. С. 72.
6. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Об асимптотике при $t \rightarrow \infty$ решений нелинейных уравнений с диссипацией // *Матем. заметки.* 1989. Вып. 4. С. 118.
7. *Намкин П.И., Шишмарев И.А.* Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де-Вриза–Бюргера // *Функц. анализ и его приложения.* 1991. Т. 25. Вып. 1. С. 21.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 624.