



Отделение математических наук

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

**Адаптивный
чебышевский
алгоритм**

Москва 2017

УДК
ББК 22.1
Ж85

Адаптивный Чебышевский алгоритм

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

(ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), – М., РАН, 2017

zhukov@kiam.ru, nn@kiam.ru, feodor@kiam.ru

Работа поддержана РФФИ проект № 14–21–00025–П.

Анотция: Для численного решения трехмерных эллиптических уравнений построен адаптивный чебышевский двухслойный итерационный метод. В адаптивном методе неизвестная нижняя граница спектра уточняется в итерационном цикле, а в качестве верхней границы спектра берется ее оценка по теореме Гершгорина. Расчеты показывают, что такая процедура обеспечивает сходимость построенного адаптивного метода с вычислительными затратами, близкими к затратам стандартного чебышевского метода, использующего точные границы спектра дискретного оператора.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, чебышевские итерации, адаптация

Victor Timofeevich Zhukov, Natalia Dmitrievna Novikova, Olga Borisovna Feodoritova. An Adaptive Chebyshev Method – Moscow, Russian Academy of Sciences, 2017

Abstract: For the numerical solution of three-dimensional elliptic equations an adaptive Chebyshev iterative method is constructed. In the adaptive method, the unknown lower bound of the spectrum is refined in cycle of the outer iterations; the upper bound of the spectrum is taken to be its estimate by the Gershgorin theorem. The calculations show that such procedure ensures the convergence of the constructed adaptive method with computational costs close to the costs of the Chebyshev method, which uses the exact boundaries of the spectrum of the discrete operator.

Key words: elliptic equations, Chebyshev polynomials, adaptive method

ISBN 978-5-906906-63-2

© Российская академия наук, 2017

© В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова,

О.Б. Феодоритова 2017

Введение

В данной работе приведен вариант двухслойного чебышевского итерационного метода для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно-определенной матрицей. Для таких матриц чебышевский метод может быть конкурентноспособным по сравнению с другими известными методами, особенно при параллельной реализации. Внимание к чебышевскому методу напрямую связано с развитием ультра-параллельных вычислений [1–6].

Обычно в качестве недостатка чебышевского метода, ограничивающего его применение в вычислительной практике, называют необходимость оценки спектральных границ дискретного оператора. И если верхняя граница спектра может быть оценена по известной теореме Гершгорина [7], то хорошая оценка нижней границы спектра в общем случае отсутствует. Предлагаемый подход позволяет оценивать нижнюю границу оператора (матрицы) в процессе специально организованных итераций в рамках стандартного чебышевского метода.

Наш первоначальный интерес к этому методу связан с очевидной эффективностью его использования в параллельном варианте многосеточного метода как в качестве сглаживателя, так и для решения системы дискретных уравнений на самом грубом уровне [1–4]. В течение ряда лет нами развивался вариант классического геометрического многосеточного метода применительно к задачам диффузии с анизотропными разрывными коэффициентами для вычислительных систем с экстремальным параллелизмом, см. [1–3], где показана эффективность и необходимость применения процедуры адаптации при использовании полиномиальных сглаживателей на основе оптимальных свойств чебышевских многочленов. В [4] этот же подход применен в алгебраическом многосеточном методе.

В геометрическом и алгебраическом многосеточных методах вычислительный процесс начинается на самой подробной сетке, затем производится редукция задачи на сетку следующего уровня и так далее до самого грубого уровня. На самом грубом уровне решается система линейных уравнений относительно небольшого размера, а затем производится интерполяция обрат-

но на предыдущий уровень и так до самой подробной сетки. Для сглаживания невязки на каждом многосеточном уровне и в процессе решения грубых уравнений нами используется явный чебышевский метод, в котором на каждой многосеточной итерации уточняется оценка нижней границы с помощью процедуры адаптации, описанной в данной работе.

Такая же ситуация возникает, например, при многократном решении системы линейных уравнений с разными правыми частями, при использовании чебышевских итераций для предобуславливания в методе подпространств Крылова, при решении неявных схем для нестационарных уравнений с коэффициентами, независящими или слабо зависящими от времени. Предлагаемый подход может быть применен и в процессе однократного решения линейной системы с симметричной положительно-определенной матрицей.

Рассматриваемая в данной работе процедура адаптации двухслойного чебышевского метода достаточно проста и эффективна. Весь процесс решения разбивается на циклы – назовем их циклами адаптации. В многосеточном методе, например, такой цикл совпадает с одним циклом самого метода. В процессе каждого цикла адаптации выполняется стандартный чебышевский метод с предписанной точностью, которая меньше заданной точности решения исходной линейной системы. Предполагается, что границы спектра каким-то образом сначала грубо оценены. Например, для получения первоначальной оценки минимального собственного значения можно использовать отношение Рэлея-Ритца на достаточно произвольно выбранном векторе. Максимальное собственное значение оценивается по известной теореме Гершгорина. В конце цикла адаптации нижняя граница спектра уточняется на основе анализа норм начальной и результирующей невязок.

Стандартный чебышевский метод

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = g, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad u, g \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

с симметричной положительно-определенной матрицей, спектр которой лежит на отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ вещественной оси, $\lambda_{min} > 0$. Здесь u – вектор неизвестных, g – заданная правая часть.

В пространстве \mathbf{R}^n введено обычное евклидово скалярное произведение (\cdot, \cdot) и ассоциированная с ним норма $\|z\| = (z, z)^{1/2}$, а также энергетическая норма $\|z\|_D = (z, z)_D^{1/2}$, порожденная симметричным положительно-определенным оператором D . Норма линейного оператора D , действующего из пространства \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^n , определяется как $\|D\| = \max \|Dz\|$ при $\|z\| = 1$, и для самосопряженного оператора она равна максимальному по модулю собственному значению.

Запишем для системы (1) явный двухслойный итерационный метод

$$u_{k+1} = u_k + \tau_{k+1} (g - Au_k), \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad (2)$$

где u_0 – заданное начальное приближение, k – номер итерации. Можно рассмотреть и неявный метод, но мы для простоты записи ограничимся явным методом.

Рассмотрим чебышевский метод с оптимальным набором итерационных параметров $\{\tau_k, k = 1, \dots, p\}$ (см. [8]). Итерирующий оператор метода $F_p(A)$ при заданных итерационных параметрах переводит начальное приближение u_0 и ошибку $z_0 = u - u_0$ в новое приближение u_p и ошибку $z_p = u - u_p$, соответственно, согласно операторной форме $u_p = F_p(A) u_0 + [I - F_p(A)] A^{-1} g$, $z_p = F_p(A) z_0$, где I – тождественный оператор.

Операторный многочлен $F_p(A)$ представляется в виде произведения p линейных сомножителей $F_p(A) = (I - \tau_p A) \dots (I - \tau_1 A)$. Ясно, что выполнено условие

нормировки $F_p(0) = I$. Выбор в (2) оптимальных параметров $\{\tau_k\}$ связан с построением алгебраического многочлена степени p , наименее уклоняющегося от нуля на спектральном отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ оператора A и нормированного условием $F_p(0) = 1$.

Задача построения многочлена степени p , наименее уклоняющегося от нуля на стандартном отрезке $[-1; 1]$, решена в [9] – это многочлен Чебышева первого рода $T_p(x)$. Его конструкция хорошо известна

$$T_p(x) = \begin{cases} \cos(p \arccos x), & |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(p \operatorname{arch} x), & |x| > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Многочлен $T_p(x)$ имеет наименьшую норму в пространстве функций $C[-1; 1]$ среди всех алгебраических многочленов степени p со старшим коэффициентом, равным 2^{p-1} . Ясно, что $|T_p(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$. При $|x| > 1$ запись многочлена в виде $T_p(x) = \operatorname{ch}(p \operatorname{arch} x)$ верна с учетом равенства $T_p(-x) = (-1)^p T_p(x)$. На гиперболических ветвях (при $|x| > 1$) функция $|T_p(x)|$ является строго монотонной. Это свойство используется в процессе адаптации чебышевского метода.

С учетом условия нормировки $F_p(0) = 1$ многочлен F_p на спектральном отрезке $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ выражается через многочлен Чебышева T_p на стандартном отрезке $[-1; 1]$ следующим образом

$$F_p(\lambda) = \frac{T_p(x)}{T_p(x_0)}, \quad x_0 = \frac{1+\eta}{1-\eta} > 1, \quad \eta = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}.$$

Величина η является обратной к числу обусловленности матрицы A .

При выводе этих формул использована линейная замена

$$\lambda = 0.5 [(\lambda_{max} + \lambda_{min}) - (\lambda_{max} - \lambda_{min}) x], \quad (4)$$

которая переводит отрезок $[-1;1]$ вещественной оси в отрезок $[\lambda_{min};\lambda_{max}]$, причем точка $x=1$ переходит в точку $\lambda = \lambda_{min}$. При этом отображении точке нормировки $\lambda_0 = 0$ соответствует точка $x_0 = x(\lambda_0) > 1$, где $x = x(\lambda)$ – обратная функция к (4). Запишем многочлен $F_p(\lambda)$ в виде

$$F_p(\lambda) = q_p T_p(x), \quad \text{где } q_p = \frac{2\rho_1^p}{1+\rho_1^{2p}}, \quad \rho_1 = \frac{1+\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}}. \quad (5)$$

Прямым вычислением получаем, что величина q_p имеет вид:

$$q_p = \frac{1}{T_p(x_0)} = \frac{1}{ch(p \operatorname{arch} x_0)}. \quad (6)$$

Оптимальные параметры τ_k определяются нулями β_k многочлена T_p по формуле

$$\tau_k^{-1} = \frac{\lambda_{max} + \lambda_{min}}{2} + \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2} \beta_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad (7)$$

где нули β_k упорядочены для обеспечения устойчивости [8]

$$\beta_k \in \mathbf{K}_p = \left\{ \cos \frac{2i-1}{2p} \pi, \quad i = 1, \dots, p \right\}. \quad (8)$$

Это значит, что из множества \mathbf{K}_p нули выбираются не в их естественном порядке, а в некотором другом.

Для погашения нормы начальной невязки $r_0 = g - Au_0$ в заданное число $1/\varepsilon$ раз, т.е. для достижения неравенства $\|g - Au_p\| < \varepsilon \|g - Au_0\|$ требуется сделать $p = p(\varepsilon, \eta)$ итераций, где число p вычисляется по ε и η с округлением до ближайшего большего целого по формуле

$$p = p(\varepsilon, \eta) \approx \ln \left(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1} \right) / \ln \left((1 + \sqrt{\eta}) / (1 - \sqrt{\eta}) \right). \quad (9)$$

После работы итерационного алгоритма для невязки $r_p = g - Au_p$ получаем в точной арифметике соотношение $r_p = F_p(A)r_0$. Применив к обеим частям этого равенства оператор A^{-1} , получим, что также ведет себя и погрешность приближенного решения $z_p = u_p - u$: $z_p = F_p(A)z_0$. Это значит, что компоненты невязки и ошибки уменьшаются в $\varepsilon^{-1} > 1$ раз равномерно по спектру $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, а демпфирующая функция ω имеет вид $\omega_{Cheb}(\lambda) = F_p(\lambda)$. Эта функция принимает значения $\pm\varepsilon$ в точках экстремума многочлена на отрезке $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ и растет вне этого отрезка (см. (3)). На дискретном уровне сказанное означает, что если начальную невязку разложить по системе собственных функций оператора A , то в конечной невязке амплитуда собственной функции, отвечающей некоторому собственному значению λ , умножится на $F_p(\lambda)$.

К истории создания чебышевского метода

Сделаем краткий исторический экскурс, связанный с работами Р.П. Федоренко, О.В. Локуциевского, В.И. Лебедева, стоявших у истоков современной вычислительной математики. Часть приводимых ниже сведений вошла в англоязычную публикацию [10].

Если в итерационном процессе (2) взять не переменный набор параметров τ_k , а постоянное значение $\tau_k = 2 / (\lambda_{min} + \lambda_{max})$, то получим известный метод простой итерации. Он крайне медленно сходится на краях спектра и хорошо сходится в его средней части. Ричардсоном в работе [11], опубликованной в 1910 году, был предложен способ ускорения сходимости. В этом способе итерационный процесс имел вид (2), но выбор параметров не являлся оптимальным, хотя и был связан со свойствами некоторых алгебраических многочленов. Требования оптимальности обеспечивают полиномы Чебышева, но они не были приведены в [11], несмотря на их широкую к тому времени известность – они были построены П.Л. Чебышевым уже в середине XIX века,

(см. [9]), затем исследования были продолжены его учениками Е.И. Золотаревым и А.А. Марковым.

В первой половине 20 века идея использования полиномов Чебышева для решения систем линейных уравнений витала в воздухе, часто обсуждалась на семинарах, но первые публикации появились в 1950 году. Применение корней многочленов Чебышева для определения итерационных параметров предложили независимо друг от друга М.К. Гавурин [12] и Фландерс в соавторстве с Шортли [13]. В последней работе показано, как использовать чебышевские полиномы при расчете собственных значений, но затем позднее Шортли в [14] использовал чебышевские полиномы при решении системы линейных уравнений. Следует отметить, что метод с оптимальными параметрами, выражающимися через нули чебышевского многочлена, открывался, переоткрывался и улучшался многими авторами. В процессе использования метода было обнаружено, что для не слишком малых степеней многочлена при использовании параметров в их естественном порядке проявляется вычислительная неустойчивость в результате роста ошибок округления в расчетах и в силу некоторых свойства нулей полиномов Чебышева, в частности, сгущения нулей к границам спектра. Не останавливаясь на обсуждении причин неустойчивости чебышевского итерационного процесса, заметим, что для устранения неустойчивости необходимо переставить итерационные параметры в определенном порядке. На необходимость изменить порядок параметров впервые указано Янгом в [15] в 1954 году. Точная постановка задачи о переупорядочивании параметров и строгое решение были получены уже в 1970-е годы В. И. Лебедевым и В. Н. Финогеновым [16], А.А. Самарским и Е.С. Николаевым [17]. Определенные правила упорядочивания предложил в 1958 году Ю. Чжао-дин [18–20], защитивший в том же году кандидатскую диссертацию на механико-математическом факультете МГУ. Он проводил расчеты на ЭВМ Стрела и в расчетах показал эффект найденного им упорядочивания. Его статью [20] в Доклады АН СССР представил С.Л. Соболев, и, по-видимому, Ю. Чжао-дин тесно общался с Л.А. Люстерником и В.К. Саулевым, см. [21].

Начиная с 1980-х годов появился интерес к использованию чебышевских параметров в методах решения нестационарных задач [22–25].

Адаптация чебышевского метода

Как известно, для успешного применения чебышевского метода нужно знать границы спектра $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$. Обычно хорошая оценка нижней границы спектра λ_{min} дискретного оператора отсутствует. Конечно, иногда можно указать такую оценку, однако, в общем случае сделать это затруднительно. Мы предлагаем использовать процедуру итерационного уточнения нижней границы спектра. Анонсированная в [26] процедура уточнения нижней границы основана на другом принципе.

В дальнейшем ниже в тексте под λ_{min} и λ_{max} будем подразумевать точные (обычно неизвестные) нижнюю и верхнюю границы спектра, а под λ_{min}^* и λ_{max}^* – их приближенные оценки. Будем предполагать выполнение соотношений

$$0 < \lambda_{min} \leq \lambda_{min}^* \leq \lambda_{max} \leq \lambda_{max}^* . \quad (10)$$

В качестве λ_{max}^* возьмем оценку, получаемую для максимального собственного значения оператора по теореме Гершгорина о кругах [7]. Условие (10) гарантирует сходимость итераций (2), с упорядоченным набором параметров (7), (8), так как согласно [8] (с.328) для сходимости этого метода с неточным заданием границ спектра необходимое и достаточное условие имеет вид

$$\lambda_{max} \leq \lambda_{max}^* + \lambda_{min}^* . \quad (11)$$

Оценку λ_{min}^* будем уточнять в ходе внешнего итерационного процесса (или цикла адаптации). Обозначим через λ_{min}^* текущее приближенное значение, а через λ_{new}^* – новое приближение к λ_{min} .

Для адаптации нам необходимо задать начальное приближенное значение λ_{min}^* больше искомого точного λ_{min} , $\lambda_{min}^* \geq \lambda_{min}$. Заметим, что λ_{min}^* можно получить, применяя

степенной метод [27, 28] к оператору $B = I - (1/\lambda_{max}^*)A$. Найдя максимальное собственное значение μ_{max} этого оператора, получим $\lambda_{min}^* = (1 - \mu_{max})\lambda_{max}^*$. Можно использовать другую процедуру, а именно, взять $\lambda_{min}^* = k\lambda_{max}^*$, задавая значение $k < 1$ не очень малым или рассчитывая отношение Рэля–Ритца $\lambda_{min}^* = \lambda_{RR} = (Av, v)/(v, v)$ [29] с произвольной ненулевой функцией v . Мы для определенности берем в качестве v правую часть g исходной системы уравнений (1). Согласно известному свойству отношения Рэля–Ритца требуемое соотношение $\lambda_{min}^* \geq \lambda_{min}$ выполнено.

Предлагаемая процедура оценки нижней границы спектра основана на двух предположениях. Во-первых, верхняя граница спектра λ_{max}^* является достаточно хорошей оценкой сверху максимального собственного значения оператора A . В случае определения λ_{max}^* по теореме Гершгорина [7] это предположение верно. Тогда выполнены условия (10) и (11). Во-вторых, в ходе однократного применения итерирующего оператора $F_p(A)$ к невязке r_0 в результирующей невязке r_p ведущей становится гармоника, отвечающая точному собственному значению λ_{min} . Другими словами, для достаточно больших значений p , основные компоненты ошибки лежат в инвариантном подпространстве, ассоциированном с собственными значениями оператора A , принадлежащими отрезку $[\lambda_{min}; \lambda_{min}^*]$.

Алгоритм адаптации имеет следующий вид. Пусть нам нужно решить систему (1) с заданной точностью ε_{tot} . Зададимся меньшей точностью $\varepsilon_1 < \varepsilon_{tot}$. Запишем выполнение одного шага чебышевского алгоритма при заданных входных данных $\lambda_{min}^*, \lambda_{max}^*, \varepsilon_1$ в виде

$$\delta = \|r_p\| / \|r_0\| = S(\lambda_{min}^*, \lambda_{max}^*, \varepsilon_1), \quad r_p = F_p(A)r_0. \quad (12)$$

Здесь δ – точность, достигнутая в текущем цикле адаптации, r_0 и r_p – начальная и конечная невязки. Допустим, что значение δ превышает заданную точность ε_1 . Тогда максимальное собственное значение $\lambda_{\max}(F_p)$ операторного многочлена $F_p(A)$ на отрезке $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ достигается при $\lambda = \lambda_{\min}$: $\lambda_{\max}(F_p) = F_p(\lambda_{\min})$. Следовательно, оно может быть приближенно найдено степенным методом [27, 28]. Таким образом, в качестве приближения к $\lambda_{\max}(F_p)$ возьмем полученное отношение $\delta = \|r_p\| / \|r_0\|$ сеточных L_2 -норм невязок, см. (12). По найденному значению $\lambda_{\max}(F_p)$ находим новое приближение λ_{\min}^* к λ_{\min} (см. ниже) и полагаем $\lambda_{\min}^* = \lambda_{\min}^*$. Если точность ε_{tot} не достигнута, переходим к новому циклу адаптации с данными $\lambda_{\min}^*, \lambda_{\max}^*, \varepsilon_1$, выполняя шаг вида (12). Дополнительным соображением в пользу такого варианта степенного метода, вместо его применения к оператору $B = I - (1/\lambda_{\max}^*)A$, служит свойство многочленов Чебышева стремительно расти вне отрезка наименьшего уклонения от нуля.

Обсудим детально, как найти по значению δ новое приближение λ_{\min}^* . Ясно, что значение демпфирующей функции $F_p(\lambda) = \delta$ достигается на гиперболической ветви многочлена, т.е. при $0 < \lambda < \lambda_{\min}^*$, что соответствует интервалу $x > 1$ для многочлена $T_p(x)$ (3). Тогда единственный корень уравнения $F_p(\lambda) - \delta = 0$ при $\lambda < \lambda_{\min}^*$ и является новым значением λ_{\min}^{new} .

Для наглядного объяснения алгоритма рассмотрим в единичном кубе на кубической сетке с шагом h дискретный оператор Лапласа с нулевыми граничными значениями. Минимальное и максимальное собственные значения в данном случае известны [8]:

$$\lambda_{\min} = \frac{12}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} \approx 3\pi^2, \quad \lambda_{\max} = \frac{12}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{12}{h^2}.$$

Вместо отрезка $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ рассмотрим нормированный отрезок $[h^2\lambda_{\min}; h^2\lambda_{\max}] \approx [0; 12]$. Демпфирующая функция $\omega_{Cheb}(\lambda) = F_p(\lambda)$ на этом отрезке показана на рис.1. Для иллюстрации процедуры уточнения нижней границы спектра предположим, что начальная оценка минимального собственного значения взята равной $\lambda_{\min}^* = 0.25/h^2 \approx 0.02\lambda_{\max}$, а заданная точ-

ность решения $\varepsilon_1 = 0.25$. Столь большое значение связано с желанием большей наглядности. При указанных данных для чебышевского многочлена в соответствии с (9) получаем, что его степень $p=7$. На рис. 2 график функции $F_p(\lambda)$ дополнен графиком на начальном участке спектра $[0; 1.5]$.

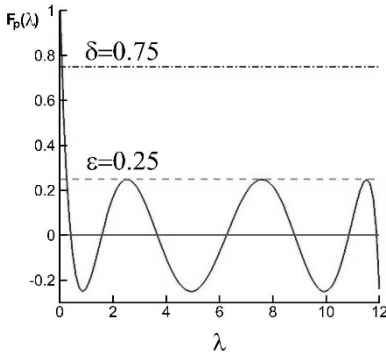


Рис. 1. Демпфирующая функция $F_p(\lambda)$ на отрезке $[h^2\lambda_{min}; h^2\lambda_{max}]$.

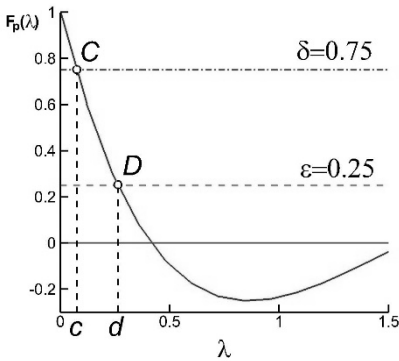


Рис. 2. Демпфирующая функция $F_p(\lambda)$ начальном участке спектра $[0; 1.5]$.

Заданному значению λ_{min}^* на рис. 2 отвечает точка D с координатами (d, ε) , где обозначено $d = \lambda_{min}^*$. Допустим, что в конце одного шага адаптации достигнута точность $\delta = 0.75$ вместо заданной точности ε_1 , что является следствием грубой оценки нижней границы спектра. Значение функции $F_p(\lambda) = \delta$

достигается в точке C с абсциссой $\lambda^* = c$, которая и принимается за новое приближение к минимальному собственному значению.

Нетрудно формализовать предложенную графическую иллюстрацию алгоритма с помощью следующих рассуждений, сделанных в терминах стандартного полинома Чебышева T_p в силу более простой формы записи. Итак, нам надо найти решение уравнения $F_p(\lambda) = \delta$ на интервале $[0; \lambda_{min}^*]$. Это равносильно нахождению решения x^* уравнения $T_p(x^*) = \delta/q_p$ на интервале $[1; x_0]$ в соответствии с формулой (3).

Так как $T_p(1) = 1$ и на отрезке $[1; x_0]$ функция $T_p(x)$ монотонно возрастает, а согласно (5) $T_p(x_0) = 1/q_p$, причем это значение больше δ/q_p , то на $[1; x_0]$ существует точка x^* , такая что $T_p(x^*) = \delta/q_p \equiv y_1$. Точка x^* лежит на гиперболической монотонной ветви многочлена $T_p(x)$. Решая уравнение $ch(p \operatorname{arch} x) = y_1$, находим его единственный корень $x^* = ch(y_2 / p)$, где $y_2 = \operatorname{arch}(y_1)$, или, избегая вычислений обратной гиперболической функции, запишем эту величину в виде $y_2 = \ln\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1}\right)$. Новое приближенное значение λ_{min}^* получаем, возвращаясь от x к переменной λ .

Окончательно получаем следующие формулы для вычисления нового приближения к λ_{min} по входным данным λ_{min}^* , λ_{max}^* , ε_1 и полученной в расчете одного цикла точности δ :

$$\eta = \frac{\lambda_{min}^*}{\lambda_{max}^*}, \quad \rho_1 = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} \quad (1)$$

$$q_p = \frac{2\rho_1^p}{1 + \rho_1^{2p}} \quad (2)$$

$$y_1 = \frac{\delta}{q_p}, \quad y_2 = \ln\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 1}\right) \quad (3)$$

$$x^* = ch(y_2 / p) \quad (4)$$

$$\lambda_{new}^* = \frac{1+\eta}{2} - \frac{1-\eta}{2} x^* \quad (5)$$

$$\lambda_{min}^* = \lambda_{new}^* \quad (6)$$

Заметим, что если $\lambda_{min}^* \leq \lambda_{min}$, то точность гарантированно достигается.

Как уже говорилось, изложенная процедура является степенным методом нахождения максимального собственного значения оператора $F_p(A)$. В расчетах подтверждается успех этой процедуры, что объясняется быстрым ростом чебышевского многочлена $F_p(A)$ на гиперболических ветвях. Упомянутый выше быстрый рост хорошо виден на рис. 2; ординаты точек С и D разделены сильнее, чем их абсциссы. Нетрудно привести строгие оценки роста многочлена $T_p(x)$ на гиперболических ветвях, но такое исследование выходит за рамки данной работы.

Численные эксперименты

Рассмотрим возможности предложенного метода на примере задачи анизотропной диффузии с разрывными коэффициентами [30]. Область расчета – куб $\Omega = [0; 1]^3$, разделенный на четыре подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$ (см. рис. 3).

$$\begin{array}{l|l} \Omega_1 = \{(x, y, z) \in \Omega; y \leq 0.5, z \leq 0.5\} & \Omega_2 = \{(x, y, z) \in \Omega; y > 0.5, z \leq 0.5\} \\ \Omega_3 = \{(x, y, z) \in \Omega; y > 0.5, z > 0.5\} & \Omega_4 = \{(x, y, z) \in \Omega; y \leq 0.5, z > 0.5\} \end{array}$$

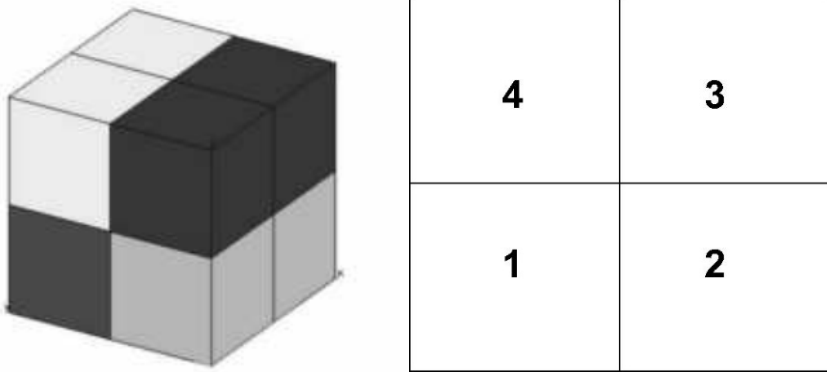


Рис. 3. Разбиение куба и нумерация подобластей в сечении Oyz .

Диагональные элементы тензора диффузии $k(x, y, z) = \text{diag}(k_x, k_y, k_z)$ терпят разрыв на плоскостях $y = 0.5$ и $z = 0.5$, разбивающих куб на четыре подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$, и постоянны в каждой из них:

$$\begin{aligned} k_x(x, y, z) &= \{k_x^i, i = 1, \dots, 4\}; \quad k_x^1 = k_x^2 = k_x^3 = k_x^4 = 1 \\ k_y(x, y, z) &= \{k_y^i, i = 1, \dots, 4\}; \quad k_y^1 = 10, k_y^2 = 0.1, k_y^3 = 0.01, k_y^4 = 100 \\ k_z(x, y, z) &= \{k_z^i, i = 1, \dots, 4\}; \quad k_z^1 = 0.01, k_z^2 = 100, k_z^3 = 10, k_z^4 = 0.1. \end{aligned}$$

Точное решение $u(x, y, z)$ в каждой подобласти Ω_i , $i = 1, \dots, 4$ имеет вид

$$u(x, y, z) = \alpha_i \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z). \quad (13)$$

Условия непрерывности решения и потока на поверхностях разрыва коэффициентов обеспечиваются при выборе в указанных областях значений

$\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = 100$, $\alpha_4 = 0.01$. На внешних границах области поставлены краевые условия Дирихле, которые, как и правая часть уравнения, определяются из точного решения.

Возьмем в области Ω декартову сетку $\Omega_h = \{(x, y, z)_n \in \Omega, 0 \leq n \leq N\}$ с сеточной границей Γ_h .

Пусть сетка является равномерной по каждому координатному направлению с числом узлов $N = N_x \times N_y \times N_z$. Рассмотрим стандартную схему, построенную методом конечных объемов. Свяжем с каждым узлом сетки Ω_h дуальную ячейку в виде прямого параллелепипеда, грани которого проходят через середины ребер сетки Ω_h . Обозначим объемы дуальных ячеек как V_n , $0 \leq n \leq N$. Схему вида $A_h u_h = f_h$ записываем на основе закона сохранения, интегрируя исходное уравнение по всем дуальным ячейкам, за исключением ячеек, у которых вершины лежат на границе Γ_h и в них записано краевое условие Дирихле. В итоге получаем систему линейных уравнений вида (1) с оператором $A = A_h$ и правой частью $f = f_h$.

Скалярное произведение в пространстве функций U_h , заданных на сетке Ω_h (и обращающихся в нуль в узлах Γ_h с условием Дирихле), вводится стандартным образом: $(u, w) = \sum u_n w_n V_n$, где сумма берется по всем узлам сетки. Это скалярное произведение определяет сеточную L_2 -норму.

Коэффициенты разностной схемы ограничены снизу и сверху величинами $k_{\min} = 0.01$, $k_{\max} = 100$. В качестве априорной

оценки точного минимального значения λ_{min} оператора A можно взять величину (см., например, [8])

$$\lambda_{min}^* = 8k_{min} \left(1/l_x^2 + 1/l_y^2 + 1/l_z^2 \right),$$

что приводит в данном конкретном случае к оценке $\lambda_{min}^* = 0.24$.

Можно взять более точную оценку

$$\lambda_{min}^* = 8 \left(\min k_x(x, y, z)/l_x^2 + \min k_y(x, y, z)/l_y^2 + \right. \\ \left. + \min k_z(x, y, z)/l_z^2 \right) \approx 8, \quad (14)$$

где минимум берется по всей сеточной области Ω_h . Здесь мы воспользовались сеточной природой оператора в предположении его расщепления по координатным направлениям, записав оценку (14) для прямого параллелепипеда с ребрами l_x, l_y, l_z . Забегая вперед, скажем, что в расчетах с адаптацией получена оценка $\lambda_{min}^* \approx 140 - 170$. Грубость априорной оценки (14) связана с переменностью коэффициентов исходного дифференциального уравнения.

Зададим относительную точность расчета $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$. Вычислительные затраты будем оценивать полным числом итераций N_{iter}^{total} . Самая затратная часть на каждой итерации состоит в вычислении невязки, что практически эквивалентно однократному применению оператора A к сеточной функции. Приведем результаты решения этой задачи чебышевским итерационным методом в нескольких вариантах.

Расчет 1 демонстрирует результат решения поставленной задачи стандартным чебышевским методом при значении $\lambda_{min}^* = 140$ и оценке λ_{max}^* по теореме Гершгорина. Выбранное значение λ_{min}^* близко к точному минимальному собственному числу λ_{min} (оно неизвестно, но в данном случае мы это значение подтвердили расчетом). Число итераций N_{iter}^{total} , затраченное на достижение точности $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$, приведено в

табл. 1. Как и ожидалось, с удвоением N_h происходит удвоение числа итераций.

Табл. 1. Число итераций N_{iter}^{total} . Расчет 1, без адаптации, $\lambda_{min}^* = 140$.

Сетка, N_h^3	16^3	32^3	64^3	128^3
Число итераций, N_{iter}^{total}	386	771	154	3082

Расчет 2 отличается от предыдущего заданием грубой оценки нижней границы спектра. В качестве минимального собственного числа выбрано заниженное значение $\lambda_{min}^* = 10$, полученное округлением величины (14). Число затраченных итераций для достижения точности $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$ в зависимости от размера сетки указано в табл. 2.

Табл. 2. Число итераций N_{iter}^{total} . Расчет 2, без адаптации, $\lambda_{min}^* = 10$.

Сетка, N_h^3	16^3	32^3	64^3	128^3
Число итераций, N_{iter}^{total}	1422	2883	5766	11531

Использование в расчете 2 грубой априорной оценки $\lambda_{min}^* = 10$ приводит к четырехкратному росту вычислений, так как в соответствии с (9) число итераций прямо пропорционально $\sqrt{\lambda_{max}^* / \lambda_{min}^*}$.

В следующей серии расчетов 3 покажем качество процедуры адаптации и зависимость ее эффективности от некоторых ее внутренних параметров. Таковыми являются точность решения на каждом цикле адаптации ε_1 и начальная оценка λ_{min}^* . Для характеристики процесса сходимости вместо λ_{min}^* удобно использовать величину обратную числу обусловленности $\eta = \lambda_{min}^* / \lambda_{max}^*$.

Процедура адаптации состоит из двух вложенных циклов: на каждом внешнем цикле выполняется N_{iter}^{adapt} итераций внутреннего цикла, на котором задача решается с небольшой относительной точностью ε_1 и находится новая уточненная нижняя граница спектра λ_{min}^* . Процесс завершается при достижении заданной точности $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$.

Сравним три варианта, отличающихся относительной точностью ε_1 и начальным значением $\eta_0 = \lambda_{min}^* / \lambda_{max}^*$. Первый вариант характеризуется набором $\varepsilon_1 = 10^{-2}, \eta_0 = 0.0166$. Во втором варианте нижняя граница спектра оценивается согласно отношению Релея-Ритца, т.е. взяты параметры $\varepsilon_1 = 10^{-2}, \eta_0 = \eta_{RR}$. И, наконец, для оценки характера сходимости при изменении точности ε_1 предпринят третий вариант с набором параметров $\varepsilon_1 = 10^{-3}, \eta_0 = \eta_{RR}$. Значения $\eta_0 = \eta_{RR}$ зависят от размера сетки и приведены в табл. 3.

Табл. 3. Серия расчетов 3. Зависимость $\eta_0 = \eta_{RR}$ от сетки.

Сетка, N_h^3	16^3	32^3	64^3	128^3
Значения $\eta_0 = \eta_{RR}$	$2.0 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$

Результаты расчетов для каждого из объявленных вариантов приведены в таблицах 4–6 соответственно. В таблицах указаны значения суммарного числа итераций N_{iter}^{total} в зависимости от размера сетки N_h^3 , оценка минимального собственного значения λ_{min}^* и число внутренних итераций N_{iter}^{adapt} на каждом шаге адаптации. При выходе величины λ_{min}^* на стационарное значение число внутренних итераций уже не меняется, поэтому оно указано с мультипликативным сомножителем (например,

4*73). Число итераций на каждом следующем шаге адаптации возрастает в силу уменьшения λ_{\min}^* . Таблицы 4–6 показывают, что независимо от точности ε_1 и начального приближения для нижней границы спектра алгоритм сходится на каждой сетке к одному и тому же значению λ_{\min}^* . Динамика выхода на стационарное значение зависит от начального приближения, но не принципиально. Из таблиц виден ресурс повышения эффективности алгоритма: после выхода числа внутренних итераций на стационарное значение можно определить новое значение ε_1 , чтобы завершить расчет за один шаг.

Табл. 4. Серия расчетов 3, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.0166$.

Сетка, N_h^3	Число итераций, N_{iter}^{total}	λ_{\min}^*	Число внутренних итераций N_{iter}^{adapt}
16^3	504	138	7,23,36,45,56,4*73
32^3	945	152	7,41,68,89,90,99,137,3*138
64^3	1824	164	7,78,131,178,182,190,260,3*266
128^3	3575	172	7,153,260,357,364,374,500,3*520

Табл. 5. Серия расчетов 3, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$.

Сетка, N_h^3	Число итераций, N_{iter}^{total}	λ_{\min}^*	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}
16^3	481	138	19,32,44,45,50,72,3*73
32^3	926	152	38,64,88,90,96,136,3*138
64^3	1827	164	75,129,177,182,258,3*266
128^3	3561	172	151,258,356,364,374,498,3*520

Табл. 6. Серия расчетов 3, $\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\eta_0 = \eta_{RR}$.

Сетка, N_h^3	Число итераций, N_{iter}^{total}	λ_{min}^*	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}
16^3	516	138	27, 48, 64, 66, 102, 104, 105
32^3	943	152	97, 128, 131, 190, 198, 199
64^3	1949	164	108, 196, 259, 263, 359, 2 * 382
128^3	3831	172	216, 392, 519, 525, 691, 2 * 746

Табл. 5 и 6 показывают слабую зависимость объема вычислений (выражается числом итераций) от относительной точности внутренних итераций ε_1 .

Сведем в табл. 7 значения полного числа итераций N_{iter}^{total} в трех расчетах с адаптацией, в «идеальном» случае (расчет 1), когда задана точная оценка, и «плохом» случае с $\lambda_{min}^* = 10$ (см. (14)). Видим, что число итераций N_{iter}^{total} в расчетах с адаптацией не слишком превосходят затраты в идеальном случае.

Табл. 7. Число итераций N_{iter}^{total} при различных параметрах $\varepsilon_1, \eta_0, \varepsilon_{tot} = 10^{-12}$.

Сетка, N_h^3	без адаптации		с адаптацией		
	$\lambda_{min}^* = 140$	$\lambda_{min}^* = 10$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$ $\eta_0 = 0.0166$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$ $\eta_0 = \eta_{RR}$	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$ $\eta_0 = \eta_{RR}$
16^3	386	1422	504	481	516
32^3	771	2883	945	926	943
64^3	1541	5766	1824	1827	1949
128^3	3082	11531	3575	3561	3831

В следующей серии расчетов 4 изменим постановку задачи, для чего расширим область расчета. Возьмем прямой параллелепипед $\Omega = \Omega^* = [-0.25; 1.25] \times [0; 1] \times [0; 1]$ и на двух его гранях $x = -0.25$ и $x = 1.25$ зададим однородное условие Неймана, т.е. нулевой поток по нормали к грани. В этом случае априорная оценка минимального собственного значения имеет вид $\lambda_{min}^* \approx 8(\min k_y(x, y, z)/l_y^2 + \min k_z(x, y, z)/l_z^2) = 0.16$.

Таким образом, число обусловленности данной разностной краевой задачи на каждой сетке заметно увеличивается по сравнению с предыдущей задачей с условием Дирихле.

На рис. 4 показана зависимость процесса адаптации в этой серии расчетов для параметров $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.166$ на сетках $N_h^3 = 16^3, 32^3, 64^3, 128^3$. Задача решалась с точностью $\varepsilon_{tot} = 10^{-12}$.

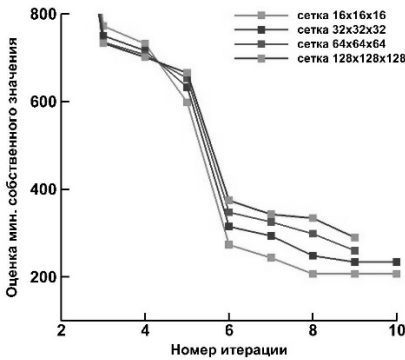


Рис. 4. Процесс адаптации в серии расчетов 4: $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.166$ на сетках $N_h^3 = 16^3, 32^3, 64^3, 128^3$.

Из соображений наглядности графики ограничены величиной 10^4 . Полученная оценка нижней границы в этой серии расчетов меняется в диапазоне от 207 до 290. Такой результат в данной задаче мы считаем удовлетворительным, так как коэффициенты диффузии являются разрывными и анизотропными, поэтому разностные аппроксимации на сетках с указанным числом узлов не являются достаточными для разрешения градиентов решения в окрестности поверхностей разрыва.

На рис. 5 проиллюстрировано влияние относительной точности внутренних итераций ε_1 на сходимость приближений λ_{min}^* . Начальная граница $\eta_0 = 0.166$, что соответствует начальной оценке $\lambda_{min}^* = \eta_0 \lambda_{max} \approx 0.166 * 6.59 \times 10^6 \approx 1.1 \cdot 10^5$,

а относительная точность ε_1 принимала значения

$$\varepsilon_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}.$$

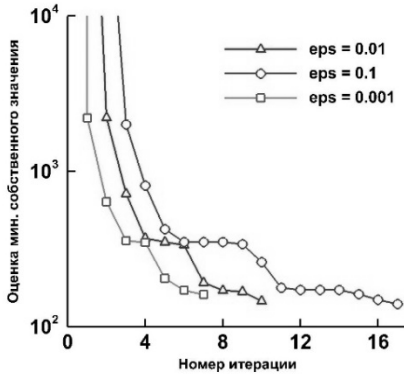


Рис. 5. Зависимость процесса адаптации от относительной точности ε_1 . Сетка $N = 128^3$. $\eta_0 = 0.166$, $\varepsilon_1 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$.

В табл. 8 показаны значения суммарного числа итераций N_{iter}^{total} в расчетах с адаптацией и без нее при указанных различных начальных параметрах ε_1, η_0 . Во всех вариантах, за исключением варианта 3, начальные значения параметра $\eta = \eta_0$ зависят от размера сетки. В варианте 3 это значение постоянно $\eta = \eta_0 = 0.166$. Принципиального влияния параметр η_0 на процесс адаптации не оказывает, важно, чтобы выполнялось условие (10).

Табл. 8. Число итераций N_{iter}^{total} при различных параметрах ε_1, η_0 .

Сетка, N_h^3	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
	без адаптации		с адаптацией		
	$\lambda_{min}^* = 0.16$	$\lambda_{min}^* = 0.16$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$	$\varepsilon_1 = 10^{-2}$	$\varepsilon_1 = 10^{-3}$
16^3	455	11364	533	592	540
32^3	909	22727	980	1120	1027
64^3	1819	45453	1859	1853	1984
128^3	3637	90907	3591	3605	3858

Эффективность адаптации оцениваем вычислительными затратами, которые практически прямо пропорциональны числу итераций N_{iter}^{total} . Видим, затраты в расчетах с адаптацией превышают идеальные значения на 15–40% в зависимости от числа шагов сетки, причем чем больше сетка, тем меньше разница. По сравнению с «плохим» случаем (Вариант 2) преимущество расчетов с адаптацией многократное. Зависимость от входных параметров метода (точности ε_1 и начальной оценки λ_{min}^*) довольно слабая, что подтверждается многочисленными расчетами.

Дополнительно графически (см. рис. 6) проиллюстрируем процедуру адаптации для уравнения Пуассона $\Delta u = 4$ в области $\Omega = \Omega^*$ (см. выше описание серии расчетов 4), для которой известно точное значение нижней границы спектра $\lambda_{min} = 24$. Краевые условия Дирихле взяты из точного решения $u(x, y, z) = x^2 + y^2$. Видим, что на всех сетках процесс адаптации дает практически точное значение $\lambda_{min} = 24$.

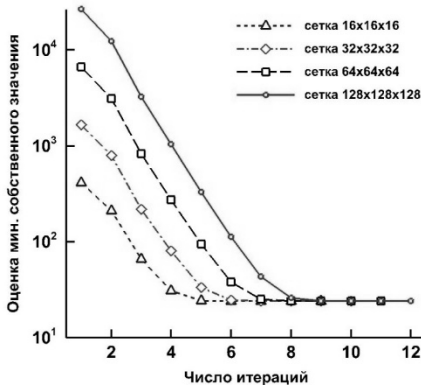


Рис. 6. Процесс адаптации при решении уравнения Пуассона на сетках $N_h^3 = 16^3, 32^3, 64^3, 128^3$, $\varepsilon_1 = 10^{-2}, \eta_0 = 0.166$.

Обсудим эффективность степенного метода при его применении для нахождения максимального собственного значения

μ_1 оператора $B = I - (1/\lambda_{max}^*)A$ в предположении, что второе собственное значение $\mu_2 < \mu_1$. При заданном начальном приближении $x^{(0)}$ запишем итерационный процесс в виде $x^{(n)} = Bx^{(n-1)}$. Скорость сходимости приближений $\mu_1^{(n)}$ к μ_1 является квадратичной: $\mu_1^{(n)} = \mu_1 + O(|\mu_2/\mu_1|^{2n})$ [23]. Обозначим λ_{min}^* как λ_1 , а ближайшее к нему следующее собственное число как $\lambda_2 > \lambda_1$. Имеем $\mu_1 = 1 - \lambda_1/\lambda_{max}^*$, $\mu_2 = 1 - \lambda_2/\lambda_{max}^*$, и, следовательно $\mu_2/\mu_1 \approx 1 - (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{max}^*$. Поэтому скорость сходимости приближений к λ_1 медленная: $|\mu_2/\mu_1|^{2n} \approx [1 - (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{max}^*]^{2n} \approx 1 - 2n \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{max}^*$.

Для большей ясности упростим ситуацию – рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega = [0; \pi]^3$ с однородными краевыми условиями. Первые собственные числа разностного оператора Лапласа мало отличаются от собственных значений дифференциального оператора Лапласа, которые в данном случае являются целыми числами $\lambda = k^2 + l^2 + m^2$. На сетке $N_h^3 = 128^3$ можно полагать, что разностные собственные значения равны $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, а максимальное собственное значение $\lambda_{max} \approx 12 N_h^2 \approx 2 \cdot 10^4$. Поэтому $|\mu_2/\mu_1|^{2n} \approx 1 - 2n \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_{max}^* \approx 1 - 3 \cdot 10^{-4} n$.

Как уже указывалось выше, предложенная адаптационная процедура представляет собой степенные итерации вида $x^{(n)} = F_p(A)x^{(n-1)}$. В табл. 9 приведены характеристики сходимости λ_{min}^* к точному минимальному собственному значению $\lambda_1 = 3$ в процессе адаптаций. Видим, что сходимость достаточно быстрая, а полное число итераций составляет ≈ 800 .

В данной простейшей задаче результат по точности и числу итераций практически не зависит от входных данных.

Табл. 9. Адаптация для уравнения Пуассона, $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\eta_0 = 0.166$.

Номер шага адаптации	Число внутренних итераций, N_{iter}^{adapt}	Достигнутая точность, δ	Оценка, λ_{min}^*
1	7	0.210	3307.007
2	10	0.452	1532.265
3	19	0.385	405.1740
4	33	0.398	129.7234
5	59	0.363	40.92577
6	100	0.321	14.03311
8	162	0.152	5.361031
9	212	0.016	3.126278
10	216	0.0099	3.000035

Заключение

Приведен адаптивный чебышевский итерационный метод решения эллиптических уравнений. В этом методе неизвестная нижняя граница спектра уточняется во внешнем итерационном цикле, а верхняя граница оценивается по теореме Гершгорина. Показана сходимость метода с вычислительными затратами, близкими к затратам стандартного чебышевского метода, использующего точные границы спектра дискретного оператора. Область применения адаптивного метода – многократное решение эллиптических уравнений с разными правыми частями, что типично для многих задач и алгоритмов: для многосеточного метода, для алгоритмов решения уравнений динамики несжимаемой жидкости, для алгоритмов преобуславливания в методе подпространств Крылова, при решении неявных схем для нестационарных уравнений с коэффициентами, слабо зависящими от времени.

Список литературы

1. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для анизотропных уравнений диффузии на основе адаптации чебышевских сглаживателей // Матем. моделирование. 2014. Т.26, № 9. С. 126–140.
2. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для эллиптических уравнений с анизотропными разрывными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1168–1182.
3. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. О решении эволюционных уравнений многосеточным и явно-итерационным методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, №8. С. 1305–1319.
4. Жуков В.Т., Краснов М.М., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Алгебраический многосеточный метод с адаптивными сглаживателями на основе многочленов Чебышева // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 113. 32 с. doi:10.20948/prepr-2016-113. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-113>
5. Baker A., Falgout R., Gamblin T., Kolev T., Schulz M., Yang U. Scaling Algebraic Multigrid Solvers: On the Road to Exascale // In: Competence in High Performance Computing 2010, C. Bischoff et al., eds., Springer-Verlag (2012), Schwetzingen Germany. LLNL-PROC-463941.
6. Baker A., Falgout R., Kolev T., Yang U. Multigrid smoothers for ultra-parallel computing. SIAM J. Sci. Comput. 33, 2864–2887 (2011).
7. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. – М.: Наука, 1966, 576 с.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978, 592 с.
9. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. – СПб.: Сочинения, т.1, 1899.
10. Shvedov A.S., Zhukov V.T. Explicit iterative difference schemes for parabolic equations // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 13 (1998), No. 2, с.133–148. [In English]

11. *Richardson L.F.* The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. // *Roy. Soc. Philos. Trans.* (1910) 210A, P. 307–357.

12. *Гавурин М.К.* Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов // *Успехи математических наук.* 1950. Т. 5, вып.3(37). С. 156–160.

13. *Flanders D., Shortley G.* Numerical determination of fundamental modes. // *J. Appl. Phys.* (1950) 21, No. 12, P.1326–1332.

14. *Shortley G.H.* Use of Tschebyscheff–polynomial operators in the solution of boundary value problems // *J. Appl. Phys.* . 24 (1953) 392–396

15. *Young D.M.* On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices. // *Math. Phys.* (1954) 32, No. 4, 243–255.

16. *Лебедев В.И., Финогенов С.А.* О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом методе // *ЖВМ и МФ*, 1971, т.11, № 2. 425–438.

17. *Николаев Е.С., Самарский А.А.* Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 12:4 (1972), 960–973 .

18. *Юань Чжао-дин.* Некоторые разностные схемы решения первой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными // *Дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук*, – М.: МГУ, 1958 г.

19. *Юань Чжао-дин.* Некоторые разностные схемы численного решения дифференциального уравнения параболического типа // *Матем. сборник*, 1960, т. 50 (92), № 4, с. 391–422.

20. *Юань Чжао-дин.* Об устойчивости разностных схем для решения дифференциальных уравнений параболического типа // *ДАН СССР*, 1957, т. 117, № 4. 578–581.

21. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / Ред. Люстерник Л.А. – М.: Физматгиз, 1960, 324 с.

22. *Локуцевский В.О., Локуцевский О.В.* О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 291, № 3. С. 540 – 544.

23. Жуков В.Т., Забродин А. В., Феодоритова О.Б. Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т.33, № 8. С. 1240–1250; *Comput. Math. Math. Phys.*, 33:8 (1993), 1099–110

24. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 10 . С. 127–158; *Math. Models Comput. Simul.*, 3:3 (2011), 311–332

25. Лебедев В.И. Явные разностные схемы для решения жестких задач с комплексным или разделимым спектром // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 12. С. 1801–1812.

26. Попов М.В., Повещенко Ю.А., Гасилов В.А. Колдоба А.В., Повещенко Т.С. Применение метода Рундсона при неизвестной нижней границе спектра задачи // Матем. Моделирование. 2017. Т. 29, № 5. С. 96–108.

27. Люстерник Л.А. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1947. Т. 20. С. 49–64.

28. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.– М.: Наука, 1987, 600 с.

29. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001, 430 с.

30. R. Eymard, G. Henry, R. Herbin, F. Hubert, R. Kloforn, et al. 3D Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids. J. Fort, J. Furst, J. Halama, R. Herbin, F. Hubert. *Finite Volume for Complex Applications VI.* – Praha, Czech Republic. Springer, 2011, pp.895–930.

Отделение математических наук

С.Ю. Гуськов, Н.В. Змитренко, О.Р. Рагимли

Адаптивный чебышевский алгоритм

Формат 60 x 84/16
Гарнитура Таймс
Усл. печ. л. 1,86. Усл. изд. л. 0,9
Тираж 20 экз.

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати
Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано на оборудовании Управления делами РАН

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением
президиума Российской академии наук
от 24 октября 2017 г. №10106-765,
распространяется бесплатно.