Российская академия наук

А. В. Мельников

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФИНАНСОВ

Москва
2019

УДК 336:51
ББК 65.9(2)26:22.1
М8

Автор:
Мельников А.В.

М48 Мельников, А.В. Курс математических финансов / А.В. Мельников – М.: РАН, 2019. – 225 с.: 25 ил.

ISBN 978-5-907036-53-6

Математические финансы представляют собой основной источник современных количественных методов моделирования и расчетов в финансовой экономике, которая сегодня характеризуется широкой вовлеченностью инновационных инструментов, называемых производными ценными бумагами. Для обеспечения профессионального уровня развития и использования таких продуктов необходимы высоко классные специалисты в теоретической и прикладной частях этой науки с ее нынешними математическими сложностями и абстракциями, которым уже трудно придать краткую форму либо без ущерба для математической корректности, либо без потери широты освещения тематики. Данная книга представляет собой шаг именно в этом направлении как попытка изложить достаточно сложные факты и подходы современных математических финансов в упрощенной математической форме. В книге изучаются, в основном, две классические модели финансового рынка: биномиальная и диффузионная. В рамках этих моделей дается изложение многих принципиальных результатов по расчету и хеджированию производных ценных бумаг и по теории оптимального инвестирования. В книге показывается, как техника совершенного хеджирования преобразуется в технику частичного (среднеквадратического, квантильного и эффективного) хеджирования, применяемую далее к расчетам инновационных схем гибкого страхования жизни. При этом вскрывается связь вычислительных формул и техники, характерных для современных математических финансов и актуарной науки. Включение в книгу указанного материала, безусловно, отличает ее от других изданий по этой тематике. Книга содержит большое количество адаптированных к тексту примеров и список задач с решениями и указаниями, и в этой связи может рассматриваться как университетский курс современных математических финансов со всем многообразием их моделей, понятий, фактов, методов и взаимосвязей. Это предопределяет ее направленность на студенческую, исследовательскую и преподавательскую аудиторию экономико-математических специальностей университетов, что не исключает ее полезность для профессионалов финансово-страховой индустрии.

ISBN 978-5-907036-53-6

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Финансовая экономика сегодня характеризуется широкой вовлеченностью в ее функционирование инновационных рыночных инструментов, называемых *производными ценными бумагами*. Форвардные и фьючерсные контракты, опционы и другие интеллектуально структурированные и гибридные продукты востребованы в ней в качестве привлекательного инструмента инвестирования, а также как возможность гибкого перераспределения рисков. Для обеспечения профессионального уровня использования таких продуктов необходимы специалисты по математическим финансам, представляющих собой источник количественных расчетных методов для финансовой индустрии. Бурное развитие математических финансов за три последние десятилетия в теоретическом и практическом плане во многом объясняется именно этими обстоятельствами.

Основы этой теории были заложены в работе Л. Башелье (1900), а сама теория получила новый мощный импульс к развитию только через 70 лет благодаря статьям Ф. Блэка, М. Шоулса и Р. Мертона (1973). Оттолкнувшись от этих знаменитых работ, математические финансы достигли современного облика благодаря дружественному сочетанию прежде всего собственно финансов и стохастического анализа, а также статистики случайных процессов, дифференциальных уравнений в частных производных, выпуклого анализа, оптимального управления и численных методов. Здесь уместно отдельно упомянуть статью Ф. Блэка «How to use the holes in Black-Scholes» (1989), в которой, по существу, были сформулированы пути будущей эволюции математических финансов.

Сейчас можно констатировать, что развитие математических финансов пришло к своего рода апогею, требующему осмысления создавшейся ситуации и ее многовариантных перспектив. Анализ современных работ показывает, что до сих пор их стержневым направлением остается движение в сторону все больших теоретических обобщений. Однако уже сегодня слишком прямолинейный характер обобщений должен быть скорректирован, поскольку абстрактные и математически безупречные конструкции далеко не всегда вскрывают по-настоящему значимые эффекты. По мнению автора, необходимо не только освоить феноменальный набор моделей и методов, наработанный за предыдущие десятилетия, но и найти важные области приложений с многоаспектной исследовательской проблематикой и принципиальной новизной. При этом, задачи, поставленные таким образом и будучи рассмотренными с помощью наработанной техники в сочетании с технологическими продвижениями в сфере обработки больших данных, искусственного интеллекта и т. д., приобретут совершенно новое оформление, звучание и расширенное применение.

В предлагаемой книге упомянутое выше движение только очерчено в соответствии с чисто прагматическим замыслом автора – изложить достаточно сложные результаты и подходы современной теории хеджирования и инвестирования в упрощенной математической форме с расширением спектра читателей за пределы узкого круга специалистов по стохастическому анализу.

Книга прежде всего должна рассматриваться как весьма непростое введение в указанную область со всем многообразием ее моделей, понятий, фактов и методов. Это в некоторой степени предопределяет направленность книги в первую очередь на студенческую и преподавательскую аудиторию, что не исключает ее полезность для профессионалов в финансовой индустрии.

В книге изучаются, в основном, две классические модели финансового рынка: *биномиальная* (модель Кокса-Росса-Рубинштейна) и *диффузионная* (модель Блэка-Шоулса). В рамках этих моделей дается изложение многих принципиальных результатов по расчету и хеджированию опционов и по теории оптимального инвестирования: фундаментальные теоремы финансовой математики, формулы Кокса-Росса-Рубинштейна, Блэка-Шоулса, Мертона, Маргрейба и т. д.

Далее, к описанным выше перспективным направлениям автор относит схемы гибкого страхования. Изложение материала по таким инновационным финансово-страховым контрактам сопровождается объяснением взаимосвязи классического для актуарной науки дифференциального уравнения Тиля, для страховых резервов с дифференциальным уравнением Блэка-Шоулса, для капитала реплицирующего опцион портфеля.

В книге показывается, как техника *совершенного* хеджирования, являющаяся неизменным атрибутом практически всех учебников, преобразуется в технику *частичного* (среднеквадратического, квантильного и эффективного) хеджирования с привлечением фундаментальной для математической статистики леммы Неймана-Пирсона. При этом вскрывается связь вычислительных формул и техники, характерных для современных математических финансов и актуарной науки. Включение в книгу указанного материала не только выделяет настоящую работу из длинного ряда учебников в этой области, но и расширяет круг читателей от аналитиков и других профессионалов финансовой индустрии до актуариев и профессионалов риск-менеджмента.

В математических финансах уделяется едва ли не самое главное внимание вопросу моделирования эволюции цен базовых активов рынка. Как правило, считается, что адекватное моделирование этих активов является гарантией правильности и адекватности всех остальных расчетов. В этом, как отмечается в упоминаемой выше статье Ф. Блэка, и состоит один из главных побудительных мотивов отхода от классических биномиальной и диффузионной моделей в направлении их обобщений и избавления от целого ряда недостатков. Перечисленные выше вопросы также отражены в книге, в основном, на примере расчетов в рамках моделей Башелье и Блэка-Шоулса со стохастической волатильностью.

Книга содержит большое количество адаптированных к тексту примеров, дающих количественные иллюстрации полученных результатов и/или идеи обобщающих заключений теоретического и прикладного плана. Более того, книга снабжена большим списком задач с решениями и указаниями, которые студенты могут использовать для более детального изучения предмета, а преподаватели к тому же – легко их модифицировать в варианты контрольных и экзаменационных задач и вопросов.

Инициатором публикации предлагаемой работы в рамках научно-издательской деятельности РАН является академик В. В. Козлов, которому автор

выражает самую искреннюю благодарность за возможность академического издания данной книги.

В связи с написанием книги автор весьма признателен и искренне благодарен своим студентам Программы по математическим финансам Университета Альберты: Анне Глазыриной, Чингису Максимову, Андрею Паку и особенно – Илье Васильеву и Дарье Вячкилевой за их помощь в этом кропотливом и трудоемком деле.

Работа над книгой осуществлялась при поддержке грантов автора NSERC 5901 и RES0043487

А. В. Мельников
Университет Альберты, Эдмонтон, Канада

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ: ФИНАНСОВЫЕ РЫНКИ И ФИНАНСОВО-СТРАХОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Первая глава играет роль введения в тематику и основной предмет настоящей книги. В ней даётся общее представление о финансовом рынке, об основных и производных ценных бумагах и о связи со страховой индустрией (см. [18], [4] – [5] и [20]).

1.1 Определение рынка

Рынок, исторически этот термин ассоциируется с организациями, людьми и действиями, необходимыми для осуществления торговли теми или иными ценностями. Будем рассматривать рынок, в котором подобными рыночными ценностями являются ценные бумаги. В этом случае такое место или пространство, снабженное определенной торговой инфраструктурой и где осуществляется торговля ценными бумагами, называется *финансовым рынком.* В качестве агентов финансового рынка могут выступать частные инвесторы, банки, корпорации, инвестиционные фирмы, страховые компании, пенсионные фонды и т. д., что визуально отражено на Рисунке 1.1

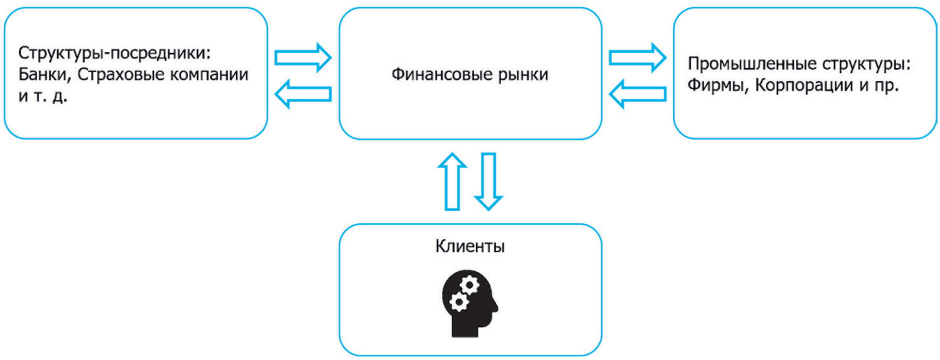


Рисунок 1.1 – Финансовая система

Покупка и продажа, владение и заимствование активов, получение дивидендов и распределение капитала – всё это неполный список возможных действий на финансовом рынке. В наши дни подобные операции требуют решения сложных вычислительных задач, которые не могут быть выполнены без допущений, характеризующих «идеальный» рынок. Например, мы предполагаем, что все операции и транзакции происходят незамедлительно (такой рынок будем называть *ликвидным*), и где отсутствуют операционные издержки (*frictionless market*). Активы в форме ценных бумаг составляют базис финансового рынка. Существует множество различных типов и форм ценных бумаг, но основными, или первичными, являются *акции* и *облигации.*

Акцией называют актив, содержащий долю стоимости компании. Выпуск акций осуществляется, когда компании необходимо привлечь капитал (в основном денежный) для успешного функционирования. Инвестор, покупающий акцию, вместе с ней приобретает долю в компании. Владение данной ценной бумагой даёт её держателю право на участие в управлении компанией, а также получать дивиденды пропорционально количеству акций.

Облигацией называют финансовый инструмент, выпускаемый государством или частными компаниями в целях привлечения средств для различных целей. Покупатель облигации *отдаёт свои деньги в долг* агенту, выпустившему данную ценную бумагу. При этом долг должен и будет возвращен в будущем двумя способами. Прежде всего, в отличие от акций, у любой облигации есть срок истечения обязательства и изначальный объём заимствованных средств – *номинальное значение* (также известное как *основная сумма долга*), которое должно быть выплачено кредитору по истечении контракта. В дополнение к основной сумме долга, на протяжении всего времени существования облигации, покупатель получает *купонные платежи*, размер которых определяется на основании значения ожидаемой доходности, указанной в условиях ценной бумаги. Доходность облигации является важным численным индикатором для финансовых расчётов, который аналогичен банковской процентной ставке как «вознаграждение» за инвестирование денег в банк. Стоит заметить, что облигация без купонных платежей может рассматриваться как размещение денег на банковском депозите.

1.2 Начальное представление о математических моделях финансового рынка

Предположим, в начальный момент времени n=0 Вы располагаете объёмом денежных средств B_0. Тогда Вы можете разместить эти деньги на банковском депозите на определённый срок (месяц, три месяца, год и т. д.), получив гарантию, что по истечению срока договора (момент времени 1), Вы получите строго определенный доход, и Ваше начальное вложение увеличится на ΔB_1. Заметим, что $\Delta B_1 = B_1 - B_0$, в то же время $\Delta B_1 = rB_0$, где r – это коэффициент прибыльности или доходности, называемый банковской *процентной ставкой*.

В зависимости от того, планируете ли Вы реинвестировать (ежемесячно, ежеквартально, ежегодно) только начальную сумму или же начальную сумму вместе с накопленным доходом, после $n = 1,2,3,\ldots$ промежутков времени Вы получите соответственно:

$$B_n = B_{n-1} + rB_0 = B_0(1 + rn) \text{ или } B_n = B_{n-1}(1 + r) = B_0(1 + r)^n. \qquad (1.1)$$

При этом отношение $\frac{\Delta B_n}{B_{n-1}} = \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}}$ равно r и характеризует прибыльность данной депозитной инвестиции.

Зачастую заявленная процентная ставка, рассчитываемая как доходность указанного вложения $nr \cdot 100\%$ в годовом исчислении. Мы можем разделить данный временной промежуток (в данном случае – год) на m меньших периодов и рассчитать доход (ежемесячный, ежеквартальный, полугодовой и т. д.) в конце каждого периода, в соответствии с указанным годовым значением. Чаще всего расчёт по второй, «усложнённой» формуле в (1.1), приводит к большему значению капитала инвестора, а значение $B_n = B_n^{(m)}$ может быть получено следующим образом:

$$B_n = B_n^{(m)} = B_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}. \tag{1.2}$$

Когда мы «измельчаем» разбиение года на меньшие промежутки, другими словами, когда их количество m стремится к бесконечности (а размер к нулю), значение $B_n^{(m)}$ стремится к $B_0 e^{rn}$. Таким образом, «в пределе» сумма средств на банковском счёте составляет величину

$$B_n^{(\infty)} = B_0 e^{rn}. \tag{1.3}$$

Откуда следует, что доходность такого вложения постоянна и равна процентной ставке r.

Представленные выше три метода расчёта дохода называют соответственно: *простой, сложный и непрерывный*. Формулы (1.1) – (1.3) позволяют рассчитать сумму на *банковском счёте* инвестора и выражают зависимость стоимости денег от времени.

С другой стороны, имея банковскую процентную ставку R, у инвестора есть возможность вложить сумму $(1 - R)\ B_1$ в момент времени 1, чтобы, к примеру, получить B_1 спустя год. Это эквивалентно выпуску облигации с номиналом B_1, который будет выплачен покупателю контракта через год. Однако в *настоящий момент* стоимость облигации ниже за счёт размера кредитной ставки R на рассматриваемый период, $m = 1$. Таким образом, текущая цена может быть определена с помощью формулы $(1 - R)\ B_1$, которая отражает *дисконтированную* стоимость $\frac{B_1}{1+r}$. В результате мы можем рассматривать банковский счёт как бескупонную облигацию в качестве *безрискового* актива на финансовом рынке. Отсутствие или пренебрежимо малый размер колебаний процентных ставок характеризует *стабильность* финансовой и экономической систем, для которых соответствующий банковский депозит служит простейшим безрисковым инструментом. На практике данное утверждение демонстрирует границы идеализации математических моделей на финансовом рынке.

Формулы (1.1) – (1.3) показывают *эволюцию временной ценности денег*, внося трудности в расчет *аннуитетных платежей.* Это регулярные платежи, которые будут происходить с определённой периодичностью в будущем (например, арендная плата). Обозначим известные в настоящий момент будущие платежи f_0, f_1,..... f_n. В соответствии с формулой для расчета сложного процента, мы можем рассчитать текущую стоимость $k^{ого}$ платежа как $\frac{f_k}{(1+r)^k}$. Таким образом, общая стоимость всех будущих платежей на текущий момент равна

$$f_0 + \frac{f_1}{(1+r)^1} + \frac{f_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{f_n}{(1+r)^n}.$$

Фактически такого рода *арифметические расчеты*, определяющие аннуитетные платежи, и составляли основной предмет финансовой и страховой математики вплоть до середины 20 века.

Наряду с безрисковым банковским депозитом, вторым базовым элементом финансового рынка является акция, которая представляет собой гораздо более волатильный и, как следствие, более рисковый актив. Обозначим S_n цену акции в момент времени n. Также определим доходность (норму прибыли) акции в течение некоторого промежутка времени как $\rho_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$, где $n = 1, 2,...$ Тогда цена акции удовлетворяет следующему уравнению:

$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n). \tag{1.4}$$

Банковский депозит (1.1), процентная ставка r и цена акции (1.4) с переменной доходностью ρ_n формируют *математическую модель финансового рынка*.

На изменение цены акции S_n влияет множество факторов, которые зачастую бывает сложно определить. Будем говорить об этих факторах как о *неопределенности (случайности)* и идентифицировать S_n (или ρ_n) со *случайной величиной.* Аналогично доходности банковского депозита $r = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}$, ρ_n — это переменная доходность рискового актива (например, акции). Ввиду того, что ρ_n изменяется на каждом промежутке времени (в каждый $n = 1, 2,...$и т. д.), мы можем взять все различные значения μ и вычислить их среднее μ, тогда каждое значение доходности будет больше или меньше среднего. По мере того, как мы будем уменьшать рассматриваемые промежутки времени (например, вместо ежемесячных или еженедельных значений будем рассматривать стоимость акции каждый час, минуту, секунду и т. д.), колебания доходности акции будут становиться всё более и более хаотичными. На приведенном ниже Рисунке 1.2 показано возможное движение доходности акции, когда рассматриваемые временные промежутки разделяются снова и снова, формируя непрерывный временной интервал.

Формально в модели с непрерывным временем в каждый момент времени t значение доходности можно представить в следующем виде:

$$\mu + \sigma \dot{W}_t, \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

где μ – средняя доходность/норма доходности, σ – волатильность/изменчивость, а $\dot{W}$ – гауссовский белый шум – понятие, часто используемое в математике, физике и технике для описания беспорядочного хаотичного движения.

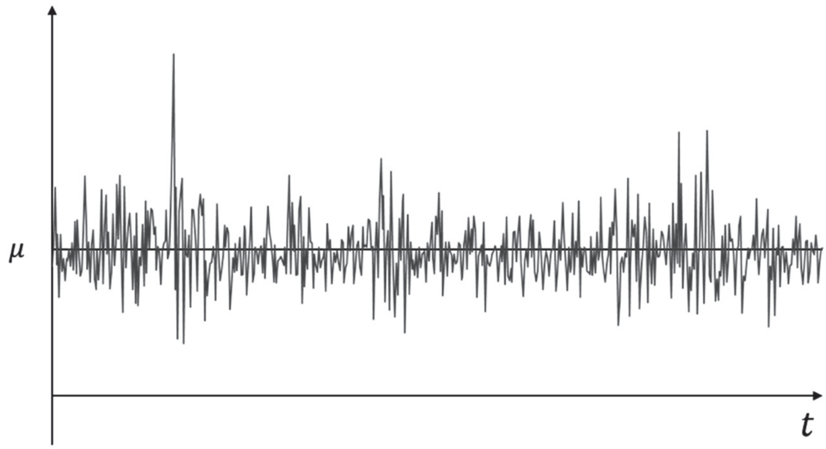


Рисунок 1.2 – Относительная доходность акции

Каждая из пар формул (1.1) и (1.4), и (1.3) и (1.5) представляет соответственно *биномиальную* и *диффузионную* модели финансового рынка, которые часто называют *моделью Кокса-Росса-Рубинштейна* и *моделью Блэка-Шоулса*.

1.3 Производные инструменты и проблематика финансовых расчётов

Участник рынка ценных бумаг может инвестировать свои средства, выбирая определённые количества различных активов, доступных на рынке. Будем называть этот процесс *формированием инвестиционного портфеля инвестора*. Решение о типе и количестве активов в инвестиционном портфеле является основой управления капиталом. Любые изменения в составе портфеля должны минимизировать или ограничивать риск от финансовых операций, влияющих на этот портфель, а сам процесс введения этих изменений называется *хеджированием*.

Среди всех инвестиционных стратегий (инвестиционных портфелей), особое место занимают те, которые приносят прибыль и не требуют начальных вложений капитала. Возможность существования подобных стратегий показывает наличие *арбитража* (арбитражной возможности) на финансовом рынке, что означает нестабильность рынка и, следовательно, его *несправедливость*. Модели, эвристически описанные выше, идеализированы и не допускают существования арбитражных возможностей.

Развитие исследований финансовых рынков позволило их участникам использовать более сложные инструменты, построенные на основе двух базовых активов – акций и облигаций. Такие ценные бумаги (форварды, фьючерсы, опционы и т. д.), называемые *производными ценными бумагами (деривативами)*, привлекают инвесторов своей невысокой ценой. Производные ценные бумаги могут увеличивать ликвидность рынка и выполнять страховую роль в случае потерь из-за неудачных инвестиций.

Например, рассмотрим компанию A, которая планирует приобрести акцию компании B в конце текущего года. Цена акции компании B к концу года может как увеличиться, так и стать меньше. Таким образом, чтобы защитить себя от повышения стоимости покупки, компания A подписывает *форвардный* контракт с компанией B. В соответствии с условиями такого контракта, A обязуется купить акцию B по заранее определённой фиксированной стоимости F в конце года.

Теперь рассмотрим другой случай. Допустим, компания A уже владеет акцией компании B, и A резонно хочет защититься от возможных потерь в случае падения стоимости акций B. Поэтому A приобретает *опцион* на продажу у компании B – соглашение, в соответствии с которым компания A *имеет право* продать акцию компании B по заранее утверждённой цене K в конце года. За эту возможность продажи (но не обязательство) компания A платит компании B *премию,* которую называют стоимостью опциона.

Фьючерсный контракт подобен форвардному соглашению, однако, вместо того чтобы подписывать контракт напрямую друг с другом, компании осуществляют сделку через *клиринговую палату* – отдел *биржи,* специализирующийся на управлении сделками по продаже различных товаров, финансовых инструментов, сервисов и т. п. Все коммерческие операции на бирже проводятся через *брокеров* – посредников, соединяющих вместе индивидуальных инвесторов и фирмы для заключения контрактов. Первая биржа, специализирующаяся на торговле опционами, CBOE (Chicago Board Option Exchange), была открыта 26 апреля, 1973, и к концу первого рабочего дня было подписано 911 контрактов (каждый контракт представляет из себя лот из ста акций). С 1973 года рынок производных ценных бумаг стремительно растёт. Огромный капитал от растущего количества фирм-участников рынка и громадного объёма совершаемых сделок увеличивают волатильность финансового рынка и приводят к объективной необходимости развития *моделей рынка со случайными факторами* для оценки стоимости активов. На сегодняшний день *стохастический анализ и статистика случайных процессов*, или, говоря более традиционно, *теория вероятностей* и *математическая статистика* играют центральную роль в разработке адекватных моделей финансового рынка.

Среди всего многообразия ценных бумаг наиболее важными с математической точки зрения являются *опционы* – производные ценные бумаги, гарантирующие владельцу право купить акцию (*опцион покупателя* или *опцион call*) по заранее определённой цене K в момент истечения срока опциона. Отметим, что право *продать* акцию декларируется *опционом продавца* или *опционом put*. Исполнение опциона call влечёт за собой платёж в размере $(S_T - K)^+ = max(0, S_T - K)$. Соответственно, для опциона put размер платежа определяется как $(K - S_T)^+$. При этом основной задачей как с теоретической, так и с практической точки зрения является ответ на вопрос: какова цена контракта $\mathbb{C}_T$ $(\mathbb{P}_T)$ *на текущий момент времени*? Заметим, что в качестве решения достаточно найти C_T или P_T, поскольку в каждой из указанных выше моделей выполнены *соотношения паритета* $P_T = C_T - S_0 + \frac{K}{(1+r)^T}$ и $P_T = C_T - S_0 + \frac{K}{e^{rT}}$. В дополнение к этому, рассчитанные величины $\mathbb{C}_T$ $(\mathbb{P}_T)$ должны быть справедливыми, не привнося арбитражные возможности в существующую систему рыночных цен (принцип безарбитражности).

В случае биномиальной модели существует два возможных направления изменения стоимости акции: цена либо возрастает с вероятностью p, либо уменьшается с вероятностью $1 - p$ в конце каждого периода. Таким образом, доходность акции p принимает значение b в $p \cdot 100\%$ случаев и значение a в $(1 - p) \cdot 100\%$ случаев, при условии $b > r > a > -1$. Точная стоимость опциона call в биномиальной модели описывается формулой *Кокса-Росса-Рубинштейна* (1976):

$$C_T = S_0 \sum_{k=k_0}^{T} \frac{k!}{T!\,(T-k)!} \tilde{p}^k (1-\tilde{p})^{T-k}$$
$$- K(1+r)^{-r} \sum_{k=k_0}^{T} \frac{k!}{T!\,(T-k)!} (p^*)^k (1-p^*)^{T-k},$$

где $k!$ – произведение всех чисел $1,\ 2,\ \dots,\ k,\ p^* = \frac{r-a}{b-a},\ \tilde{p} = p^* \frac{1+b}{1+r}$, и k_0 – наименьшее целое число j, при котором $S_0(1+a)^T \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^j$ становится больше чем K.

Однако изначально ответ на вопрос о стоимости опциона был найден для диффузионной модели Блэком, Шоулсом и Мертоном в 1973 году:

$$C_T = S_0 \Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ – функция стандартного нормального распределения. Важность этого открытия была отмечена присуждением Р. Мертону и М. Шоулсу Нобелевской Премии в области экономики в 1997 году.

Стоит отметить, что исторически первое строго математическое описание расчёта стоимости опционов было дано Л. Башелье в 1900 году в его знаменитой сейчас работе «*Теория спекуляций*». Однако в то время не было придано большого значения подобным расчётам. Только в середине шестидесятых годов известный экономист Р. Самуэльсон «переоткрыл» работу Башелье и предложил экспоненциальную форму модели Башелье, называемую Геометрическим Броуновским движением и математически эквивалентную модели Блэка-Шоулса.

Как уже было упомянуто выше, опционы и прочие производные ценные бумаги могут выполнять роль страхового контракта. В отличие от традиционного страхового соглашения, при котором клиент «продаёт» свой риск какой-либо страховой компании, *страхование посредством опционов* (хеджирование) предполагает размещение этого риска на финансовом рынке с возможностью следить за ценами акций и иметь возможность реагировать в соответствии со складывающейся ситуацией на рынке. Это один из примеров того, как происходит взаимодействие финансов и страхования.

Анализ рисков, их описание и структурирование – важнейшие задачи в страховании. Раздел страхования, связанный с вычислительным анализом различных страховых продуктов, называется *актуарной наукой,* а профессионалы данной области – *актуариями*. Страховая индустрия является важной частью финансовой системы и, следовательно, неизбежно оказывается в ее тренде. Динамичная финансовая среда подталкивает страховые компании к работе на финансовых рынках. Процесс эволюции заставляет страховые фирмы создавать новые типы контрактов, основанные на рисковых активах финансового рынка. Эти инновационные финансово-страховые инструменты стали для страховой индустрии одними из самых распространённых активов в последние десятилетия и получили название *equity-linked life insurance contracts,* которые мы будем называть *гибкими (смешанными) страховыми контрактами*. Таким образом, чтобы осуществлять адекватные вычисления премий и рисков, необходимо использовать синтез методов математических финансов и актуарной науки.

Глава 2
БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ ИЗ СТОХАСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Во второй главе определяется и всесторонне изучается биномиальная модель рынка. Большое место уделяется вопросам техники стохастического анализа, в рамках которой устанавливается безарбитражность этой модели, мартингальное представление, мартингальная характеризация самофинансируемых стратегий, формула плотности для единственной мартингальной меры (см. [4], [6], [3], [18] а также [27]).

2.1 Определение и первое описание биномиальной модели рынка

Биномиальная модель рынка (B, S), также известная как модель *Кокса-Росса-Рубинштейна,* определяется следующими уравнениями динамики цен на интервале времени до момента N:

$$\Delta B_n = rB_{n-1}, \;\; \Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \quad n = 1,\, 2,\, \dots,\, N, \quad B_0,\, S_0 > 0. \tag{2.1}$$

Здесь $S_0 > 0$ – начальная стоимость акции, B_0 – начальная стоимость единицы банковского депозита B. Для простоты вычислений мы обычно будем считать, что $B_0 = 1$. Неотрицательная константа r обозначает процентную ставку, которая связана со значениями $a < b$ доходности акции ρ_n неравенством $-1 < a < r < b$. Для того чтобы смоделировать рисковость ρ_n (соответственно, S_n), предположим, что $(\rho_n)_{n=1,\, 2,\, \dots,\, N}$ – это последовательность независимых случайных величин с распределением Бернулли, принимающих значения b и a с вероятностью $p \in (0,\, 1)$ и $(1-p)$ соответственно. Параметр p будем называть *параметром Бернулли.* Вероятностное пространство $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ в данной модели определяется следующим образом:

$\Omega = \{a,\, b\}^N$ – пространство последовательностей $\omega = (\omega_1,\, \omega_2,\, \dots,\, \omega_N)$ длины N элементы которых принимают значения a или b ,

$\mathcal{F} = 2^\Omega$ – набор всех возможных подмножеств Ω,

$$P(\omega) = p^{\sum_{i=1}^N I_{\{b\}}(\omega_i)} (1-p)^{\sum_{i=1}^N I_{\{a\}}(w_i)}, \text{ где } I_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in C \\ 0 & \text{если } x \in \Omega \backslash C \end{cases}$$

– индикаторная функция множества C.

Более того, будем описывать динамику цен на рынке (2.1) как информационный поток $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\, 1,\, \dots,\, N}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\, \Omega\}$, где для каждого $n = 1,\, 2,\, \dots,\, N$ семейство $\mathcal{F}_n$ полностью определено $(\rho_k)_{k=1,\, 2,\, \dots,\, n}$ (соответственно, $(S_k)_{k=0,\, 1,\, \dots,\, n}$). Поток информации $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\, 1,\, \dots,\, N}$ также называется *фильтрацией.*

Таким образом, используя введённые обозначения, мы можем говорить, что рынок (2.1) определён на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$, или, другими словами, на *стохастическом базисе* $\big(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}, P\big)$.

Замечание 2.1. Второе уравнение в (2.1) может быть переписано в следующем виде:

$$S_n = (1+\rho_n)\cdot S_{n-1} = \begin{cases} u\cdot S_{n-1} \\ d\cdot S_{n-1} \end{cases}, \tag{2.1'}$$

где $u = 1 + b$ и $d = 1 + a$ отражают движение стоимости акции «вверх (up)» и «вниз (down)». Описание биномиальной модели (2.1) в форме (2.1') широко используется в литературе, и время от времени будет использоваться далее.

2.2 Элементы дискретного стохастического анализа

Понятие стохастического базиса – ключевая концепция стохастического анализа, на основе которой строится эффективная техника для изучения многих аспектов финансовых и страховых контрактов. В связи с этим сделаем несколько важных замечаний.

Рассматривая последовательность случайных величин $(X_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$ на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\le N}, P)$, мы обычно предполагаем, что эволюция этой последовательности согласованна с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)$, что означает:

X_n полностью определена посредством $(\mathcal{F}_n)$, то есть X_n – функция от $\rho_1,\dots,\rho_n$ (соответственно, $S_1,\ \dots,\ S_n$), или X_n – $(\mathcal{F}_n)$-измеримая функция.

В этом случае последовательность (X_n) называют *согласованной с фильтрацией* $(\mathcal{F}_n)$ или просто *стохастической последовательностью*. Стохастическая последовательность $X = (X_n,\ \mathcal{F}_n)$ *предсказуема,* если X_n полностью определяется посредством $\mathcal{F}_{n-1}$, $n = 1,\ 2,\ \dots$.

Помимо предсказуемых последовательностей мы также будем рассматривать другой класс стохастических последовательностей $X = (X_n,\ \mathcal{F}_n)$, называемых *мартингалами.* А именно, стохастическая последовательность $X = (X_n)$ на заданном стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\le N}, P)$ называется *мартингалом* (или P *-мартингалом*), если

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n|\rho_1\dots\rho_{n-1}) = X_{n-1} \quad \text{для всех}\, n = 1,\ 2,\ \dots,\ N.$$

Используя мартингал $M = (M_n)_{n\le N}$, $M_0 = 0$ и предсказуемую последовательность $A = (A_n)_{n\le N}$, $A_0 = 0$, $\Delta A_n \ge 0$, мы можем сконструировать две более сложные последовательности:

$$X_n = X_0 \pm A_n + M_n,\quad n = 0,\ 1,\ \dots. \tag{2.3}$$

В случае $(+)\, E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \ge X_{n-1}$, а в случае $(-)\, E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \le X_{n-1}$. Такие стохастические последовательности называются *субмартингалами* и *супер-*

мартингалами соответственно, а их представления (2.3) называют *разложением Дуба*.

Согласно формуле (2.2), любая вероятностная мера $\tilde{P}$ в модели (2.1) характеризуется параметром Бернулли $\tilde{p} \in (0,\ 1)$. Следовательно, для двух вероятностных мер P и $\tilde{P}$ можно определить положительную случайную величину $\tilde{Z}_N = \tilde{Z}_N(\omega),\ \ \omega \in \Omega$ следующим образом:

$$\tilde{Z}_N(\omega) = \frac{\tilde{P}(\omega)}{P(\omega)} = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\sum_{i=1}^{N} I_{\{b\}}(\omega_i)} \cdot \left(\frac{1-\tilde{p}}{1-p}\right)^{\sum_{i=1}^{N} I_{\{a\}}(\omega_i)}. \qquad (2.4)$$

Случайная величина $\tilde{Z}_N$ в (2.4) позволяет выразить $\tilde{P}(A)$ для любого $A \in \mathcal{F}_N$ как $\tilde{P}(A) = EZ_N \cdot I_A$. Такая величина называется *плотностью меры* $\tilde{P}$ по отношению к P. Используя $\tilde{Z}_N$, несложно доказать, что для любой случайной величины X выполняется следующее *правило замены вероятностной меры в математическом ожидании*:

$$\tilde{E}X = E\tilde{Z}_N \cdot X. \qquad (2.5)$$

Также нетрудно доказать аналогичное (2.5) *правило для условных математических ожиданий*, используя так называемую *локальную плотность* $\tilde{Z}_n = E\big(\tilde{Z}_N \big| \mathcal{F}_n\big),\ \ n = 0,\ 1,\ \dots,\ N$:

$$\tilde{E}(X|\mathcal{F}_{n-1}) = E(X \cdot Z_{n-1}^{-1} \cdot Z_n \big| \mathcal{F}_{n-1}). \qquad (2.5')$$

Используя параметр p модели (2.1), выберем другой параметр Бернулли $\tilde{p}$, удовлетворяющий соотношению: $\tilde{p} = p^* = \frac{r-a}{b-a}$. Этот параметр задаёт как вероятность P^*, так и локальную плотность $(Z_n^*)_{n\le N}$. Обозначим $E\rho_n = bp + a(1-p) = \mu$ и с помощью (2.5) вычислим $E^*\rho_n = EZ_N^*\rho_n = r$. Из последнего равенства следует, что сумма $m_n^r = \sum_{i=1}^{n}(\rho_i - r)$ является P^*- мартингалом. Оказывается, что любой другой P^*- мартингал $M = (M_n)_{n\le N},\ M_0 = 0$, может быть представлен как:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Delta m_k^r\,. \qquad (2.6)$$

Соотношение (2.6) называется *мартингальным представлением*.

Для доказательства (2.6) заметим, что

$$M_n(\omega) = f_n\big(\rho_1(\omega),\ \rho_2(\omega),\ \dots,\ \rho_n(\omega)\big),$$

где $f_n = f_n(x_1,\ \dots,\ x_n)$ – функции от x_k принимающие значения b или $a,\ n = 1,\ 2,\ \dots,\ N$. Соотношение (2.6) может быть представлено в терминах приращений $\Delta m_n^r = m_n^r - m_{n-1}^r$:

$$\Delta M_n(\omega) = \varphi_n(\omega)\Delta m_n^r\,, \qquad (2.7)$$

что эквивалентно системе следующих уравнений:

$$f_n(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega),\ b) - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega)\big) = \varphi_n(\omega)(b-r),$$
$$f_n(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega),\ a) - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega)\big) = \varphi_n(\omega)(a-r).$$

Из этой системы находим, что

$$\varphi_n(\omega) = \frac{f_n(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega),\ b)\ - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega)\big)}{b-r} =$$
$$= \frac{f_n(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega),\ a)\ - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega)\big)}{a-r}.$$

Поскольку $(M_n)_{n\le N} - P^*$ - мартингал, получаем

$$E^*(f_n(\rho_1,\ \dots,\ \rho_n) - f_{n-1}(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1})|\ \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$p^* f_n(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1},\ b) + (1-p^*) f_n(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1},\ a) = f_{n-1}(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1}) \Leftrightarrow$$
$$p^*(f_n(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1},\ b) - f_{n-1}(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1})) + (1-p^*)(f_n(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1},\ a) - f_{n-1}(\rho_1,\ \dots,\ \rho_{n-1})) = 0$$

Разделив полученное уравнение на $p^*(1-p^*)$, мы приходим к равенству:

$$\frac{f_n(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega),\ b) - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega)\big)}{1-p^*} =$$
$$\frac{f_n(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega),\ a) - f_{n-1}\big(\rho_1(\omega),\ \dots,\ \rho_{n-1}(\omega)\big)}{p^*},$$

которое приводит к требуемому результату, поскольку $p^* = \frac{r-a}{b-a}$.

Заметим, что любой P-мартингал (M_n) на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n),\ P)$ допускает похожее представление (2.6), где базовый мартингал m_n^r заменяется другим мартингалом $m_n^\mu = \sum_{k=1}^n (\rho_k - \mu)$.

Опишем другую полезную конструкцию стохастической последовательности $(X_n)_{n=0,\ 1,\ \dots,\ N}$, $X_0 = 1$ порождаемую стохастической последовательностью $(U_n)_{n=0,\ 1,\ \dots,\ \mathrm{N}}$, $U_0 = 0$:

$$\Delta X_n = X_{n-1}\Delta U_n,\ \ n = 0,\ 1,\ \dots,\ N \tag{2.8}$$

Отношение (2.8) представляет собой рекуррентное соотношение, называемое также дискретным стохастическим дифференциальным уравнением. Случайная величина X_n может быть выражена через U_n:

$$X_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta U_k) \equiv \mathcal{E}_n(U)\,,\ \ X_0 = 1. \tag{2.9}$$

Последовательность X_n в форме (2.9) называется *стохастической экспонентой*. Заметим, что стохастическая экспонента обладает следующими свойствами, которые могут быть доказаны с помощью метода математической индукции:

1. $\frac{1}{\mathcal{E}_n(U)} = \mathcal{E}(-U^*)$, где $\Delta U_n^* = \frac{\Delta U_n}{1+\Delta U_n}$, $\Delta U_n \neq -1$;
2. $\left(\mathcal{E}_n(U)\right)_{n\le N}$ мартингал, если $(U_n)_{n\le N}$ мартингал;
3. $\mathcal{E}_n(U)\cdot\mathcal{E}_n(V) = \mathcal{E}(U + V + [U,\ V])$, где $[U,\ V]_n = \sum_{k=1}^{n}\Delta U_k \Delta V_k\,,\ \ [U,\ V]_0 = 0.$

Это свойство называют также *правилом умножения* стохастических экспонент.

Используя стохастическую экспоненту $\mathcal{E}_n(\mathrm{U})$, возможно найти решение неоднородного аналога уравнения (2.8):

$$\Delta X_n = \Delta N_n + X_{n-1}\Delta U_n,\ \ X_0 = N_0,$$

$$\text{в виде } X_n = \mathcal{E}_{\mathrm{n}}(V)\left\{N_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta N_k}{\mathcal{E}_k(V)}\right\}, \tag{2.8'}$$

где $(N_n)_{n\le N}$ заданная стохастическая последовательность.

2.3. Применение стохастического анализа к биномиальной модели

Заметим, что модель (2.1) может быть представлена в экспоненциальной форме:

$$\begin{gathered} B_n = B_0\cdot\mathcal{E}_n(nr), \\ S_n = S_0\cdot\mathcal{E}_n\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k\right),\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots, N\,. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Более того, плотность Z_N^* меры P^* относительно меры P допускает следующее представление через стохастические экспоненты:

$$Z_N^* = \prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2}(\rho_k - \mu)\right) = \mathcal{E}_N\left(-\frac{\mu - r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k - \mu)\right), \tag{2.11}$$

где $\mu = E\rho_n,\ \ \sigma^2 = Var\rho_n.$

Для *доказательства* (2.11) прежде всего отметим, что локальная плотность $(Z_n^*)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$, $Z_0=1$, может быть выражена как $Z_n^*=E(Z_N^*|\mathcal{F}_n)$ и, следовательно, является P-мартингалом. В соответствии с представлением P - мартингалов находим, что

$$\Delta Z_n^*=\varphi_n(\rho_n-\mu)=\varphi_n\Delta m_n^{\mu} \qquad (2.12)$$

для некоторой предсказуемой последовательности $(\varphi_n)_{n=1,\,2,\,\dots,\,N}$.

Поскольку $Z_n^*>0$, $n=0,\,1,\,\dots,\,N$ можно переписать (2.12) в виде следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$\Delta Z_n^*=Z_{n-1}^*\cdot\frac{\varphi_n}{Z_{n-1}^*}\cdot(\rho_n-\mu)=Z_{n-1}^*\cdot\psi_n\cdot(\rho_n-\mu),$$

где $\psi_n=\frac{\varphi}{Z_{n-1}^*}$, $n=1,\,2,\,\dots,\,N$ – предсказуемая последовательность.

Применяя формулу (2.9), получаем, что

$$Z_n^*=\prod_{k=1}^{n}\big(1+\psi_k\cdot(\rho_k-\mu)\big)=\mathcal{E}_n\left(\sum_k\psi_k(\rho_k-\mu)\right). \qquad (2.13)$$

Принимая во внимание, P-мартингальность $\left(\sum_{k=1}^n\psi_k\cdot(\rho_k-\mu)\right)_{n=1,\,\dots,\,N}$, независимость $(\rho_1,\,\dots,\,\rho_N)$, правила (2.5)-(2.5’) и применяя метод математической индукции, получаем для $n=1$, что $\psi_1=-\frac{\mu-r}{\sigma^2}$, а для произвольного n:

$$\begin{aligned}0&=E^*(\rho_n-r|\mathcal{F}_{n-1})=E(Z_{n-1}^{-1}\cdot Z_n^*\cdot(\rho_n-r)|\mathcal{F}_{n-1})=\\&=E\Big(\big(1+\psi_n(\rho_n-\mu)\big)\cdot(\rho_n-r)\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big)=\\&=E(\rho_n-r)+\psi_n\cdot E\big((\rho_n-\mu)\cdot(\rho_n-r)|\mathcal{F}_{n-1}\big)=\\&=(\mu-r)+\psi_n\sigma^2.\end{aligned}$$

Следовательно, $\psi_n=-\frac{\mu-r}{\sigma^2}$, $n=1,\,2,\,\dots,\,N$, и мы приходим к (2.13).

Теперь обратим внимание на то, как ведёт себя отношение $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n=0,\,1,\,\dots,N}$ относительно вероятности P^*. Будем искать вероятностную меру, которая обеспечивает «хорошие» свойства поведения указанного отношения. В данном случае ключевым свойством является мартингальность. Учитывая (2.10) и независимость $(\rho_n)_{n=1,\,\dots,\,N}$, для $n=1,\,2,\,\dots,N$ получаем:

$$\begin{aligned}&E^*\left(\frac{S_n}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)=E^*\left(S_0\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+\rho_k)}{1+r}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)=\\&=\frac{S_0}{(1+r)^n}E^*\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\rho_k)\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)=\frac{S_0}{(1+r)^n}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\rho_k)\cdot E^*(1+\rho_n)=\\&=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\cdot\frac{E^*(1+\rho_n)}{1+r}=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\cdot\frac{1+r}{1+r}=\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}.\end{aligned}$$

Другими словами, *дисконтированная цена* акции $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$ является P^*-мартингалом. Это замечательное свойство P^* позволяет называть вероятность (или вероятностную меру) P^* *мартингальной,* или *риск-нейтральной* вероятностью. Мы также можем задаться здесь вопросом о существовании других мартингальных мер $\tilde{P}$ такого типа.

Для ответа на этот вопрос построим $\tilde{P}$ (с параметром Бернулли $\tilde{p} \in (0,\,1)$), исходя из следующего соотношения:

$$\tilde{E}\,\frac{S_1}{B_1} = S_0 \cdot \tilde{E}\,\frac{1+\rho_1}{1+r} = \frac{S_0[(1+b)\tilde{p} + (1+a)(1-\tilde{p})]}{1+r} = S_0,$$

которое приводит к уравнению для параметра Бернулли $\tilde{p}$:

$$\tilde{p} + b\tilde{p} + 1 + a - \tilde{p} - a\tilde{p} = 1 + r$$

и, следовательно, $\tilde{p} = \frac{r-a}{r-b} = p^*$.

Таким образом, мы можем заключить, что P^* – единственная мартингальная (риск-нейтральная) вероятность для биномиальной модели (2.1).

Как уже было отмечено выше, другая компонента финансового рынка помимо эволюции цен базовых активов сосредоточена вокруг доступных для инвестора операций на рынке. Сформулируем соответствующие определения и результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Инвестиционная (*торговая*) *стратегия,* или *портфель,* – это двумерная стохастическая последовательность $\pi = (\pi_n)_{n \le N} = (\beta_n,\, \gamma_n)_{n \le N}$, элементы которой $\beta_n \in \mathcal{F}_n$ (согласованность) и $\gamma_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ (предсказуемость) интерпретируются как количества соответствующих активов B и S в момент времени $n \le N$ в портфеле.

Стоимость (*капитал*) портфеля π определим как стохастическую последовательность $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \le N}$ с $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$. Класс стратегий π, для которых выполнено соотношение

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0\,, \tag{2.14}$$

называется *классом самофинансируемых стратегий* и обозначается SF (*self-financing*).

В соответствии с (2.14) эволюция стоимости самофинансируемого портфеля π описывается как:

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n. \tag{2.15}$$

Переписывая (2.14) в виде $\Delta\beta_n = B_{n-1}^{-1}(S_{n-1}\Delta\gamma_n)$, можно заключить, что первая компонента $\pi \in SF$ также предсказуема.

Среди всех самофинансируемых стратегий π выделим такие, для которых существует возможность *арбитража* на рынке, а именно:

$X_0^\pi = 0,\;\; X_n^\pi \ge 0\; for\; n = 1,\,2,\;\dots,\;N$

и $X_N^\pi > 0$ с положительной вероятностью.

Обозначим класс таких портфелей SF_{arb}. Финансовая значимость данного определения понятна: арбитражный портфель позволяет получить безрисковую прибыль.

Рассмотрим самофинансируемую стратегию $\pi = (\pi_n)_{n\le N} = \big((\beta_n, \gamma_n)\big)_{n\le N}$ с дисконтированной стоимостью $\frac{X_n^\pi}{B_n}$ в момент времени $n \le N$. Используя предсказуемость (β_n) и (γ_n), а также свойство мартингальной меры, получим

$$E^*\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) = E^*\left(\beta_n + \gamma_n \frac{S_n}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) =$$
$$E^*(\beta_n|\mathcal{F}_{n-1}) + \gamma_n E^*\left(\frac{S_n}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) =$$
$$\beta_n + \gamma_n \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}}\ ,$$

откуда следует, что дисконтированная стоимость самофинансируемой стратегии является P^*-мартингалом. Это свойство часто упоминается в литературе как *мартингальная характеризация самофинансируемых стратегий.*

Наконец, докажем, что множество $SF_{arb} = \emptyset$ в рамках биномиальной модели (2.1) и, следовательно, будет доказано отсутствие арбитража на этом рынке.

Для доказательства предположим, что существует $\tilde{\pi} \in SF_{arb}$. Из этого определения следует, что $E\left(\frac{X_N^{\tilde{\pi}}}{B_N}\right) = \frac{E\left(X_N^{\tilde{\pi}}\right)}{B_N} > 0$. С другой стороны, мартингальное свойство $\left(\frac{X_n^{\tilde{\pi}}}{B_n}\right)$ влечёт:

$$E^*\left(\frac{X_N^{\tilde{\pi}}}{B_N}\right) = E^*\left(\frac{X_0^{\tilde{\pi}}}{B_0}\right) = E^* X_0^{\tilde{\pi}} = 0.$$

Далее, для вероятностей P и P^*, и (2.5) получим соотношения

$$0 = X_0^{\tilde{\pi}} = \frac{X_0^{\tilde{\pi}}}{B_0} = E^*\left(\frac{X_N^{\tilde{\pi}}}{B_N}\right) = \frac{E Z_N^* X_N^{\tilde{\pi}}}{B_N} \ge \frac{\min\limits_{\omega}[Z_N^*(\omega)] \cdot E X_N^{\tilde{\pi}}}{B_N} > 0,$$

которые противоречат предположению, что $SF_{arb} \neq \emptyset$.

Глава 3
РАСЧЁТ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ В БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ. ФОРМУЛА КОКСА-РОССА-РУБИНШТЕЙНА

В третьей главе вводится понятие платёжного обязательства, обсуждается его связь с опционными контрактами, развивается теория совершенного хеджирования и даются формулировки двух фундаментальных теорем математических финансов, выводятся конкретные формулы для расчёта опционов и, в частности, формула Кокса-Росса-Рубинштейна. Даётся также представление о смешанных финансово-страховых контрактах и их оценивании (см. [18], [4], [6], [3], [31] *и* [32]*).*

3.1 Биномиальный рынок и его полнота

В рамках биномиального $(B,\, S)$ рынка (2.1) рассмотрим финансовый контракт с датой исполнения N и функцией выплаты $f = f_N$. Функция f зависит от поведения рынка на временном промежутке $[0,\, N]$. Строго математически, мы можем говорить о функции f как о неотрицательной случайной величине, определённой на стохастическом базисе $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F}_n)_{n=0,\,1,\,\ldots,\,N},\, P\right)$, ассоциированном с (2.1). Мы также будем называть её *платёжным обязательством*.

Как следует из определения, характер платёжного обязательства может быть произвольным, и часто оно трактуется как функция выплаты по финансовому контракту, называемому *Европейским опционом* (*European option)* с *временем исполнения* N. Чтобы стать *держателем* такой производной ценной бумаги необходимо сначала заплатить *эмитенту* определённую стоимость (*премию*) $\mathbb{C}_N(f)$. В этом случае покупатель получает право на исполнение данной ценной бумаги в момент времени N и получение платежа в размере f. *Механизм* соответствующих платежей показан ниже:

Момент времени 0: Покупатель опциона	$\xrightarrow{\mathbb{C}_N(f)}$	Продавец опциона
Момент времени N: Покупатель опциона	$\xleftarrow{f}$	Продавец опциона

Наиболее важным здесь является вопрос размера *премии* или *цены* в момент покупки/продажи опциона.

Как мы знаем, на $(B,\, S)$ рынке (2.1) отсутствуют возможности арбитража в смысле “системы цен базовых активов”. Опцион представляет собой дополнительную ценную бумагу/актив и, следовательно, добавляет ещё одну цену в “систему базовых цен”. Чтобы обеспечить справедливость данного рынка, необходимо установить такую стоимость опциона, чтобы для полученной системы цен по-прежнему отсутствовала возможность арбитража. Более того, формула для расчёта стоимости опциона должна удовлетворять как продавца, который может «получить» требование f на заданном рынке, так и покупателя, который платит минимальную (в определённом смысле) премию продавцу. Если цена $\mathbb{C}_N(f)$ рассчитана с учётом упомянутых принципов, то она называется *справедливой стоимостью* опциона.

Чтобы найти такую цену контракта, применим *методологию хеджирования* платёжных обязательств. Для этого нам потребуются следующие определения.

Начальный капитал x вместе с самофинансируемой стратегией π называется *хеджем* (*совершенным хеджем, хеджирующей стратегией, хеджирующим портфелем*), если

$$X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi \geq f(\omega) \text{ для всех } \omega \in \Omega. \tag{3.1}$$

Множество таких стратегий обозначим $\Pi(x,\ f,\ N)$.

Будем говорить, что хедж является *воспроизводящей (реплицирующей) стратегией,* если в (3.1) *достижимо* равенство. В этом случае будем говорить о *достижимости* платёжного обязательства f, а $(B,\ S)$ рынок называть *полным*, если любое платёжное обязательство на нём может быть воспроизведено посредством самофинансируемой стратегии.

Как уже было установлено выше, из-за *существования* мартингальной меры в модели (2.1), биномиальный рынок, заданный такой моделью, является безарбитражным. Этот факт составляет основу так называемой *первой фундаментальной теоремы* финансовой математики.

Подобная характеризация понятия полноты рынка формулируется в виде *второй фундаментальной теоремы* финансовой математики: единственность мартингальной меры на рынке эквивалентна его полноте.

Докажем, что модель (2.1) является полной. Для упрощения положим $B_n \equiv 1$. Рассмотрим платёжное обязательство f и стохастическую последовательность $(X_n)_{n\leq N}$, где $X_n = E^*(f|\mathcal{F}_n)$. Тогда мы можем представить этот P^* - мартингал в форме:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Delta S_k,$$

где $(\varphi_k)_{k=1,\,2,\,\dots,\,N}$ – предсказуемая последовательность. Далее положим $\gamma_n^* = \varphi_n,\ \ \beta_n^* = X_n - \gamma_n^* S_n,\ \ n \leq N$ и заметим, что вторая компонента стратегии β_n^*

$$\beta_n^* = X_n - \gamma_n^* S_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^* S_k + \gamma_n^*(S_n - S_{n-1}) - \gamma_n^* S_n =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^* S_k - \gamma_n^* S_{n-1},$$

полностью определяется информацией, содержащейся в $\mathcal{F}_{n-1}$, и значит, $(\beta_n^*)_{n\le N}$ – предсказуемая последовательность.

Следовательно, $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*) \in SF$ и $X_n^{\pi^*} = X_n$ для всех $n = 0, 1, \dots, N$. В частности, получим $X_N^{\pi^*} = X_N = f$, то есть произвольное платёжное обязательство f может быть воспроизведено, и рынок (2.1) является *полным*.

Вернёмся к определению стоимости опциона в начальный момент времени.

Хедж π^* с капиталом $X_n^{\pi^*}(\omega) \le X_n^{\pi}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и любого хеджа $\pi \in \Pi(x, f, N)$ называется *минимальным хеджем*. Как видно из Рисунка 3.1, естественно ожидать, что цена $\mathbb{C}_N(f)$, рассчитанная как начальный капитал $X_0^{\pi^*}$, будет искомой справедливой стоимостью опциона. Другими словами:

$$\mathbb{C}_N(f) = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f, N) \neq \emptyset\}. \qquad (3.2)$$

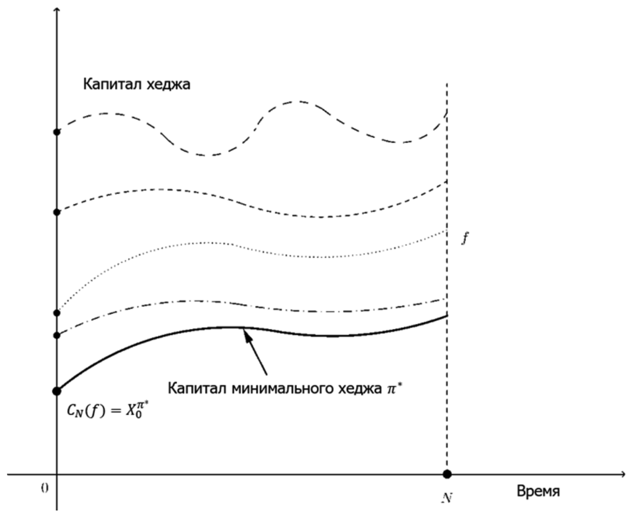


Рисунок 3.1 – Эволюция капиталов хеджирующих стратегий и минимального хеджа

3.2 Расчёты опционов в рамках биномиальной модели. Формула Кокса-Росса-Рубинштейна

Рассмотрим сначала несколько примеров, чтобы продемонстрировать возможные методы расчета стоимости опционов различного типа.

Пример 3.1.

(1) Наиболее используемыми опционами являются опционы п*окупателя (call)* и *продавца (put)*. *Опцион call* представляет собой платёжное обязательство $f = (S_N - K)^+$ в соответствии с которым его держатель обладает возможностью приобрести акцию по фиксированной *цене поставки* K *(strike price)* в момент времени N. Рыночная стоимость акции на этот момент составляет S_N. Понятно, что такой опцион будет исполнен только в случае $S_N \ge K$. *Опцион put* представляет собой контракт, в соответствии с

которым держатель имеет возможность продать акции по фиксированной цене поставки K (strike price), и следовательно, платёжное обязательство имеет вид $f = (K - S_N)^+$.

(2) *Опцион Коллар* (*Collar option)*: $f = \min\{\max(K_1,\ S_N),\ K_2\}$.

(3) *Бостонский опцион* (*Boston option)*: $f = \max\{S_N - K_1,\ 0\} - (K_2 - K_1)$, где $K_1 < K_2$ – положительные константы.

(4) *Look-back call (put) option*: $f = (S_N - K_N)^+$ (соответственно, $(K_N - S_N)^+$), где $K_N = \max\{S_0,\ S_1,\ \ldots S_N\}$.

(5) *Азиатский арифметический опцион call (put)* (*Asian arithmetic call* (*put*) *option)*: $f = (\bar{S}_N - K)^+$ (соответственно, $(K - \bar{S}_N)^+$), где $\bar{S}_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k$ среднее арифметическое $S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_N$.

Заметим, что в Примере 3.1, в случаях (1) – (3), платёжное обязательство полностью определяется стоимостью актива в момент исполнения опциона. Однако в случае (4) – (5) платёжное обязательство может зависеть от всей последовательности $S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_N$ цен, или от какой-то её части.

Пример 3.2.

Рассмотрим 1-шаговую биномиальную модель $(B,\ S)$ рынка с параметрами $B_0 = 1,\ \ S_0 = 100,\ \ r = 10\%$ и

$$S_1 = \begin{cases} 130 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ 80 & \text{с вероятностью } 0.6 \end{cases},$$

а также платёжное обязательство $f = S_1 - \min(S_0,\ S_1)$. Прежде всего, определим “эвристическую” цену в виде

$$E\,(1+r)^{-1} f = \frac{(130-100)}{1.1} \cdot 0.4 + \frac{(80-80)}{1.1} \cdot 0.6 = \frac{12}{1.1} \approx 10.91.$$

Далее найдём воспроизводящую стратегию $\pi = (\beta,\ \gamma)$ как решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} 1.1\beta + 130\gamma = 30 \\ 1.1\beta + 80\gamma = 0, \end{cases}$$

откуда получим, что $\gamma = 0.6$ и $\beta \approx -43.64$. Следовательно, стоимость «минимального хеджа» равняется

$$X_0^{\pi} = 100 \cdot 0.6 - 43.64 \cong 16.36.$$

Наконец, доходность акции в данном случае

$$\rho_1 = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \begin{cases} 0.3 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ -0.2 & \text{с вероятностью } 0.6, \end{cases}$$

и параметр Бернулли для мартингальной вероятности

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0.1-(-0.2)}{0.3-(-0.2)} = 0.6.$$

Таким образом, $E^* \frac{f}{1.1} = \frac{30 \cdot 0.6}{1.1} = 16.36.$

Отметим также, что рассмотренное платёжное обязательство $f \equiv (S_1 - S_0)^+$. Другими словами, данный пример демонстрирует расчет стоимости опциона call с ценой поставки $K = S_0$. Однако наиболее важным для нас является замечание, что стоимость «минимального хеджа» совпадает с «риск-нейтральной» ценой, отличной от эвристической стоимости. Это наблюдение приводит к следующему общему утверждению.

Теорема 3.1. Допустим $(B,\, S)$ рынок определён моделью (2.1). Тогда для Европейского опциона с платёжным обязательством f и датой исполнения N:

• Справедливая стоимость задаётся формулой

$$\mathbb{C}_N(f) = E^* B_N^{-1} f = (1+r)^{-N} E^* f. \tag{3.3}$$

• Существует единственный минимальный $(\mathbb{C}_N(f),\, f,\, N)$ – хедж $\pi^* = (\pi_n^*)_{n \le N} = (\beta_n^*,\, \gamma_n^*)_{n \le N}$, капитал $X_n^{\pi^*}$которого выражается в виде

$$X_n^{\pi^*} = E^*(B_N^{-1} B_n f \big| \mathcal{F}_n). \tag{3.4}$$

• Компоненты π^* удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma_n^* = \frac{\varphi_n^* B_n}{S_{n-1}}, \;\; \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \varphi_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}, \tag{3.5}$$

где $(\varphi_n^*)_{n \le N}$, предсказуемая последовательность из мартингального представления $M_n^* = E^* \left(\frac{f}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right)$:

$$M_n^* = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^* \Delta m_k r = \mathbb{C}_N(f) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^* \cdot (\rho_k - r). \tag{3.6}$$

Доказательство. Определим $M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}$ для $\pi = (\pi_n)_{n \le N} = \big((\beta_n,\, \gamma_n)\big)_{n \le N} \in \Pi(x,\, f,\, N)$ и установим, что

$$\begin{aligned} \Delta X_n^\pi &= \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n = \beta_n r B_{n-1} + \gamma_n \rho_n S_{n-1} = \\ &= \beta_n r B_{n-1} + \gamma_n r S_{n-1} + \gamma_n \rho_n S_{n-1} - \gamma_n r S_{n-1} = \\ &= r(\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}) + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r) = \\ &= r \cdot X_{n-1}^\pi + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r). \end{aligned}$$

Следовательно, X_n^π удовлетворяет неоднородному стохастическому дифференциальному уравнению (2.8’) с $\Delta N_n = \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r)$. Тогда $X_n^\pi = B_n \big\{ x + \sum_{k=1}^n B_k^{-1} \Delta N_k \big\}$ и мартингал M_n^π по отношению к P^* допускает следующее представление:

$$M_n^\pi = x + \sum_{k=1}^{n} B_k^{-1}\gamma_k S_{n-1}(\rho_k - r). \tag{3.7}$$

Как следует из (3.7)

$$x = X_0^\pi = E^* M_N^\pi \geq E^* B_N^{-1} f = B_N^{-1} E^* f,$$

и, применяя (3.2), получаем:

$$\mathbb{C}_N(f) \geq B_N^{-1} E^* f.$$

Теперь докажем существование минимального $(x,\, f,\, N)$-хеджа π^*с $x = \mathbb{C}_N(f)$.

Для мартингала (M_n^*) имеем следующие “граничные” условия

$$M_0^* = E^* B_N^{-1} f \;\text{ и }\; M_N^* = B_N^{-1} f. \tag{3.8}$$

Далее, применяя стратегию $\pi^* \in SF$ из (3.5) и сравнивая (3.6) с (3.7), приходим к заключению (с $x = E^* B_N^{-1} f$), что

$$\frac{X_n^{\pi^*}}{B_n} = M_n^* \;\; \text{для всех}\; n = 0,\ 1,\ \dots,\ N.$$

Как следует из (3.8), π^* — это $(B_N^{-1}E^*f,\ f,\ N)$-хедж. Его минимальность вытекает из следующих соображений. Для любого другого хеджа π при всех $n \leq N$ выполнены соотношения:

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} = E^*\left(\frac{X_N^\pi}{B_N}\middle|\mathcal{F}_n\right) \geq E^*\left(\frac{f}{B_N}\middle|\mathcal{F}_n\right) = M_n^* = \frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}.$$

Таким образом, получаем равенства (3.3) – (3.4) Теоремы 3.1.

Общие формулы (3.3) – (3.4) в Теореме 3.1 допускают дальнейшую спецификацию для опционов с платёжными обязательствами $f = f(S_N)$, называемыми *классическими опционами*.

Введём функции

$$F_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} f\big(x(1+b)^k(1+a)^{n-k}\big)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Заметим, что $\rho_k = a + (b-a)\cdot\delta_k$, $\Delta_n = \sum_{k=1}^{n}\delta_k$ и

$$\prod_{n<k\leq N}(1+\rho_k) = (1+b)^{\Delta_N - \Delta_n}(1+a)^{(N-n)-(\Delta_N-\Delta_n)},$$

где (δ_k) – «стандартная» последовательность Бернулли независимых случайных величин, принимающих в каждый момент времени значения 1 и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Следовательно, с $p^* = \frac{r-a}{b-a}$, имеем

$$E^* f\left(x \cdot \prod_{n<k\leq N}(1+\rho_k)\right) = F_{N-n}(x;p^*)$$

и

$$\begin{aligned} X_n^{\pi^*} &= (1+r)^{-(N-n)} E^*(f(S_N)|\mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^{-(N-n)} E^*\left(f\left(S_n^1 \prod_{n<k\le N}(1+\rho_k)\right)\middle|\rho_1 \dots \rho_n\right) \\ &= (1+r)^{N-n} F_{N-n}(S_n; p^*). \end{aligned} \tag{3.9}$$

В частности,

$$\mathbb{C}_N(f) = X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-N} \cdot F_N(S_0;\ p^*). \tag{3.10}$$

Специфицируя формулы (3.9) – (3.10) в случае $f(x) = (x-K)^+ = \max(x-K,\ 0)$ приходим к формуле Кокса-Росса-Рубинштейна. В этом случае

$$F_N(S_0; p^*) = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}$$
$$\cdot \max\left\{0,\ S_0(1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K\right\}.$$

Обозначим

$$k_0 = \min_{0\le k\le N}\left\{S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k > K\right\} =$$
$$= \left[\ln\frac{K}{S_0(1+a)^N} \Big/ \ln\frac{1+b}{1+a}\right] + 1,$$

где $[x]$ целая часть действительного числа x.

Тогда, в соответствии с (3.10), получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_N((S_N-K)^+) &= (1+r)^{-N} F_N(S_0; p^*) \\ &= S_0 \cdot \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k \\ &- K(1+r)^{-N} \cdot \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Обозначая $\tilde{p} = \frac{1+b}{1+r} p^*$ и $\mathbb{B}(j,\ N; p) = \sum_{k=j}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, можно переписать (3.11) в следующем виде:

$$\mathbb{C}((S_N-K)^+) = S_0 \cdot \mathbb{B}(k_0,\ N,\ \tilde{p}) - K(1+r)^{-N} \mathbb{B}(k_0,\ N,\ p^*). \tag{3.12}$$

Выражение (3.12) представляет собой *формулу Кокса-Росса-Рубинштейна* для Европейского опциона call с ценой поставки K. Поскольку равенство (3.12) является одним из самых широко используемых в математических финансах, приведём его *полное доказательство,* применяя технику стохастических экспонент.

Доказательство формулы (3.12). Используя Теорему 3.1 и определение функции $(x-K)^+$ получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_N \equiv \mathbb{C}_N((S_N-K)^+) &= E^* \frac{(S_N-K)^+}{(1+r)^N} \\ &= (1+r)^{-N} E^*(S_N-K) \cdot I_{\{\omega: S_N \ge K\}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Чтобы вычислить второй член в (3.13), воспользуемся представлением (2.11) для плотности меры Z_N^*:

$$\begin{aligned}E^*(S_N-K)^+ &= EZ_N^*(S_N-K)^+\\ &= E\left\{\mathcal{E}_N\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k-\mu)\right)\cdot(S_N-K)\right.\\ &\qquad\left.\cdot I_{\{\omega:S_N\geq K\}}\right\}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Заметим элементарные соотношения параметров модели (2.1):

$$\begin{gathered}\mu = p(b-a)+a, \qquad \sigma^2=(b-a)^2p(1-p),\\ \frac{p^*}{p}=1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(b-\mu) \ \text{ и } \ \frac{1-p^*}{1-p}=1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(a-\mu).\end{gathered} \tag{3.15}$$

Используя (3.15) вместе с определением k_0, вычислим простейшую компоненту (3.14):

$$\begin{aligned}&E\left\{\mathcal{E}_N\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k-\mu)\right)\cdot K\cdot I_{\{\omega:S_N\geq K\}}\right\}\\ &= K\cdot\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}\left[1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(b-\mu)\right]^k\cdot p^k\cdot\left[1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(a-\mu)\right]^{N-k}\\ &\qquad\cdot(1-p)^{N-k}\\ &= K\cdot\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}\left[\frac{p^*}{p}\right]^k\cdot p^k\cdot\left[\frac{1-p^*}{1-p}\right]^{N-k}\cdot(1-p)^{N-k}\\ &= K\cdot\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}\\ &= K\cdot\mathbb{B}(k_0,\,N;p^*).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Далее отметим два симметричных элементарных равенства для параметров (2.1):

$$\begin{aligned}1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(b-\mu)+b-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(b-\mu)b&=\frac{p^*}{p}(1+b),\\ 1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(a-\mu)+a-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(a-\mu)a&=\frac{1-p^*}{1-p}(1+a).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Применяя представление цен акций в виде стохастических экспонент (2.10), правило умножения стохастических экспонент, (3.17) и обозначения, принятые в (3.12), вычислим вторую, более сложную компоненту в (3.14):

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\mathcal{E}\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k-\mu)\right)\cdot S_N\cdot I_{\{\omega:S_N\geq K\}}\right\}\\
&=S_0E\left\{\mathcal{E}_N\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k-\mu)\right)\cdot\mathcal{E}_N\left(\sum_{k=1}^{N}\rho_k\right)\cdot I_{\{\omega:S_N\geq K\}}\right\}\\
&=S_0E\left\{\mathcal{E}_N\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k-\mu)+\sum_{k=1}^{N}\rho_k-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{N}(\rho_k-\mu)\rho_k\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\cdot I_{\{\omega:S_N\geq K\}}\right\}\\
&=S_0\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}\left[1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(b-\mu)+b-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(b-\mu)b\right]^k\cdot p^k\\
&\qquad\qquad\cdot\left[1-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(a-\mu)+a-\frac{\mu-r}{\sigma^2}(a-\mu)a\right]^{N-k}\\
&\qquad\qquad\cdot(1-p)^{N-k}\\
&=S_0\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}\left[\frac{p^*}{p}(1+b)\right]^k\cdot p^k\cdot\left[\frac{1-p^*}{1-p}(1+a)\right]^{N-k}\cdot(1-p)^{N-k}\\
&=S_0\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}[p^*(1+b)]^k\cdot[(1-p^*)(1+a)]^{N-k}\\
&=S_0(1+r)^N\cdot\sum_{k=k_0}^{N}\binom{N}{k}\left[p^*\frac{1+b}{1+r}\right]^k\cdot\left[(1-p^*)\frac{1+a}{1+r}\right]^{N-k}\\
&=S_0\cdot(1+r)^N\cdot\mathbb{B}(k_0,\,N,\,\tilde{p}).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Подставив (3.16) и (3.18) в (3.13), приходим к формуле *Кокса-Росса-Рубинштейна* (3.12).

Полученная формула определяет справедливую стоимость опциона call $(S_N-K)^+$ в момент времени 0. Используя независимость $(\rho_n)_{n\leq N}$ и воспроизводя те же самые преобразования, можно вывести формулу для расчета цены $\mathbb{C}_{N,\,n}$ данного опциона в произвольный момент времени $n\leq N$:

$$\mathbb{C}_{N,\,n}=S_n\cdot\mathbb{B}(k_n,\,N-n,\,\tilde{p})-K(1+r)^{-(N-n)}\cdot\mathbb{B}(k_n,\,N-n,\,p^*),\tag{3.12’}$$

где $k_n=\min\left\{0\leq k\leq N-n: S_n(1+a)^{N-n}\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{-k}>K\right\}$. Как известно из Теоремы 3.1, цена $\mathbb{C}_{N,\,n}$ является стоимостью минимальной хеджирующей стратегии $\pi^*=\left((\beta_n^*,\,\gamma_n^*)\right)_{n\leq N}$ в момент времени $n\leq N$.

Анализируя (3.12’), можно без труда выделить формулы для составляющих такого хеджа:

$$
\begin{aligned}
\gamma_n^*&=\mathbb{B}(k_n,\,N-n,\,\tilde{p}),\\
\beta_n^*&=-K(1+r)^{-(N-n)}\cdot\mathbb{B}(k_n,\,N-n,\,p^*).
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим *Европейский опцион put* с платёжным обязательством $(K-S_N)^+$. Как уже было упомянуто выше, такой опцион наделяет владельца правом *продать* акцию S по фиксированной стоимости K в момент времени N. Обозначим цену данного опциона $\mathbb{P}_N$. Принимая во внимание мартингальное свойство $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\le N}$, а также равенство $(K-S_N)^+=(S_N-K)^+-S_N+K$, получим

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_N = E^*\frac{(K-S_N)}{(1+r)^N} = E^*\frac{(S_N-K)^+}{(1+r)^N} - E^*\frac{S_N}{(1+r)^N} + \frac{K}{(1+r)^N} \\ = \mathbb{C}_N - E^*S_0 + \frac{K}{(1+r)^N} = \mathbb{C}_N - S_0 + \frac{K}{(1+r)^N}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Связь (3.19) между $\mathbb{P}_N$ и $\mathbb{C}_N$ называется *call-put parity (паритетом цен опционов call и put)*. Данное соотношение позволяет выразить цену опциона call через стоимость опциона put и наоборот.

3.3 Применение к расчёту финансово-страховых контрактов

Продемонстрируем элегантное и перспективное использование формулы Кокса-Росса-Рубинштейна (3.12) для оценки *гибких страховых контрактов (equity-linked life insurance)*, где размер платежа на момент исполнения обязательства зависит от стоимости акции на рынке. Контракты такого типа выгодны их покупателям, поскольку акции могут демонстрировать гораздо более быстрый рост чем вклад, размещённый на банковском счёте. Другой привлекательной чертой данных контрактов является минимальный гарантированный размер выплаты, который защищает держателя от обесценивания акции. В дополнение к этому следует отметить, что высокая конкуренция на рынке побуждает страховые компании предлагать инновационные продукты, описанные выше. Следовательно, компании сталкиваются с проблемой оценки таких финансово-страховых инструментов.

В рамках биномиальной модели (B, S) рынка (2.1), страховая компания предлагает *договоры чистого дожития* (*pure endowment)*. В соответствии с условиями данного контракта, его владелец получает выплату $f=f_N=\max\{S_N, K\}$ при условии *доживания до момента времени* N, где S_N – стоимость акции в момент времени N, а K – гарантированная минимальная выплата.

Как и в случае «чисто» финансового контракта, возникает следующий естественный вопрос. Как найти «приемлемую» стоимость для данного страхового соглашения?

Обозначим l_x количество клиентов-держателей контрактов возраста x. Каждый клиент $i,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ l_x$ может быть идентифицирован с положительной случайной величиной T_i, определённой на некотором вероятностном пространстве $(\widetilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$. Эта случайная величина, называемая временем дожития клиента, представляет собой временной интервал между возрастом x и моментом смерти клиента. Обозначим ${}_np_x=\tilde{P}_x\{\widetilde{\omega}: T_i(\widetilde{\omega})>n\}$ условную вероятность того, что держатель контракта проживёт ещё n лет после достижения возраста x. Естественно предположить, что $(T_i)_{i=1,\dots,l_x}$ – независимые, одинаково распределённые случайные величины, поскольку страховая компания формирует список своих клиентов случайным образом. Вместе с тем каждый держатель i с временем дожития T_i не оказывает влияния на поведение финансового рынка. Таким образом, две последовательности $(T_i)_{i=1,\dots,l_x}$ и $(\rho_n)_{n=1,\dots,N}$ могут считаться независимыми, и будет корректно рассматривать представленную страховую схему на Декартовом произведении двух вероятностных пространств $(\tilde{\Omega}\times\Omega,\ \tilde{\mathcal{F}}\times\mathcal{F},\ \tilde{P}\times P)$.

Согласно разработанной выше теории, естественно искать требуемую стоимость $\mathbb{C}$, приравнивая сумму всех премий к средней сумме всех платежей относительно $\tilde{P}\times P^*$:

$$\mathbb{C}\cdot l_x = \tilde{E}\times E^*\left(\sum_{i=1}^{l_x}\frac{f_N}{B_N}I_{\{\tilde{\omega}:T_i(\tilde{\omega})>N\}}\right),$$

где математические ожидания $\tilde{E}$ и E^* рассчитаны относительно $\tilde{p}$ и мартингальной вероятности P^* соответственно.

Учитывая представление $\max\{S_N,\ K\} = K + (S_N - K)^+$, а также независимость T_i и ρ_n, мы можем применить формулу Кокса-Росса-Рубинштейна (3.12) для расчёта цены $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} = \frac{1}{l_x}\sum_{i=1}^{l_x}\tilde{E}\times E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\cdot I_{\{\tilde{\omega}:T_i(\tilde{\omega})>N\}}\right)&\\ = \frac{1}{l_x}\cdot l_x\cdot {}_Np_x E^* B_N^{-1}(K + (S_N - K)^+)&\\ = {}_Np_x\cdot(1+r)^{-N}\cdot K + {}_Np_x&\\ \cdot\,[S_0\mathbb{B}(k_0,\ N,\ \tilde{p}) - (1+r)^{-N}K\mathbb{B}(k_0,\ N,\ p^*)].&\end{aligned}\qquad(3.20)$$

Формула (3.20) демонстрирует, что оценка приемлемого размера премии для контрактов такого гибкого страхования (equity-linked insurance) возможна только при помощи методов математических финансов.

Глава 4
РАСЧЁТЫ ОПЦИОНОВ: НОВЫЕ ВОПРОСЫ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ

В четвертой главе показано, что возможен тип хеджирования, обеспечивающий достижение платёжного обязательства с заданной вероятностью. Более того, в ней в рамках биномиальной модели расширяется класс самофинансируемых стратегий с помощью G-финансируемых и развивается соответствующая теория хеджирования. Наконец, здесь же обсуждается вопрос расчётов платёжных обязательств в неполных рынках и вводится понятие верхних и нижних цен опционов (см. [4], [6] и [3]).

Перед тем, как продолжить погружение в теорию расчёта стоимости опционов, сформулируем следующие наводящие вопросы:

1. Что случится с расчётами опционов, если для их оценки мы не можем использовать весь класс самофинансируемых стратегий?

2. Что случится с расчётами опционов в случае необходимости расширения класса SF?

4.1 Понятие о хеджировании с заданной вероятностью

Ответ на *первый вопрос* уже был частично приведён и ранее, когда мы рассматривали задачу расчёта стоимости и хеджирования платёжных обязательств «достижимых с вероятностью 1». Подход, демонстрируемый ниже, не предполагает, что платёжное обязательство может быть достижимо с полной вероятностью. Такая ситуация возникает в случае, когда имеется бюджетное ограничение начального капитала. При этом, стараясь максимально упростить здесь изложение этого подхода, будем использовать некоторые «искусственные» технические допущения, смысл которых будет более понятен позднее, когда мы вернёмся к решению этой задачи на *строго математическом* уровне, используя *фундаментальную лемму Неймана-Пирсона*.

Предположим, что на биномиальном рынке (2.1) задано платёжное обязательство f с датой исполнения N такое, что $E^*f > 0$, где E^*, как и прежде, – математическое ожидание по отношению к мартингальной мере P^*. С данным платёжным обязательством свяжем следующий класс самофинансируемых стратегий:

$$SF(f,\ N) = \{\pi \in SF : X_N^\pi \geq f - E^*f\}.$$

Зададим некоторый уровень значимости $\alpha \in (0,\ 1)$ и будем говорить, что стратегия $\pi \in SF$ является $\alpha - (x,\ f,\ N)$ хеджем, или просто α-хеджем, если

$$P\{X_N^\pi \geq f\} \text{ и } P^*\{X_N^\pi \geq f\} \geq 1 - \alpha. \tag{4.1}$$

Множество всех α-хеджей обозначим $\Pi(x,\ f,\ N,\ \alpha)$, а α-цену платёжного обязательство f определим следующим образом:

$$\mathbb{C}(f,\ \alpha) = \inf\{x > 0 : \Pi(x,\ f,\ N,\ \alpha) \neq 0\}.$$

Прежде всего, установим, что для любого портфеля $\pi \in SF(f,\ N)$ справедливо следующее неравенство:

$$P^*\{X_N^\pi \geq f\} \leq \frac{X_0^\pi}{\mathbb{C}}, \tag{4.2}$$

где $\mathbb{C} = E^* B_N^{-1}$.

Действительно, неравенство Чебышева, определение класса $SF(f,\ N)$, мартингальное свойство P^* и формула (3.7) приводят к (4.2):

$$P^*\{X_N^\pi \geq f\} = P^*\{X_N^\pi - f + E^* f \geq E^* f\} \leq$$
$$\leq \frac{E^*(X_N^\pi - f + E^* f)}{E^* f} = \frac{E^* X_N^\pi}{E^* f} = \frac{E^* B_N^{-1} X_N^\pi}{E^* B_N^{-1} f} = \frac{X_0^\pi}{\mathbb{C}}.$$

Необходимое условие для того, чтобы стратегия π из класса $SF(f,\ N)$ являлась $\alpha - (x,\ f,\ N)$ хеджем следует из соотношений (4.1) и (4.2):

$$1 - \alpha \leq P^*\{X_N^\pi \geq f\} \leq \frac{x}{\mathbb{C}}$$

или

$$x \geq (1 - \alpha)\mathbb{C}. \tag{4.3}$$

По аналогии с доказательством Теоремы 3.1, построим α-хедж π_α с равенством в (4.3). Для исходной вероятности P и мартингальной меры P^* определим плотность $\frac{dP}{dP^*} = (Z_N^*)^{-1}$. Тогда для некоторого $\lambda = \lambda(\alpha)$ получаем, что

$$P^*\{(Z_N^*)^{-1} \geq \lambda\} = 1 - \alpha, \tag{4.4}$$

где для упрощения предполагается $\lambda \geq 1$.

Рассмотрим следующие мартингалы:

- $M_n^\alpha = E^*\left(I_{\{(Z_N^*)^{-1} < \lambda\}} \middle| \mathcal{F}_n\right)$
- $M_n^{\mathbb{C}} = E^*(B_N^{-1} f | \mathcal{F}_n)$,

которые имеют представление в виде

- $M_n^{\alpha} = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k B_k^{-1} S_{k-1}(\rho_k - r)$,
- $M_n^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* B_k^{-1} S_{k-1}(\rho_k - r)$

с предсказуемыми последовательностями $(\varphi_n)_{n \le N}$ и $(\gamma_n^*)_{n \le N}$.

Для начального капитала $X_0 = (1-\alpha)\mathbb{C}$, определим портфель $\pi_\alpha = (\beta_n^\alpha,\ \gamma_n^\alpha)_{n \le N}$ с помощью следующих соотношений:

$$\gamma_n^\alpha = \gamma_n^* - \varphi_n \mathbb{C}, \quad \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi_\alpha} - \gamma_n^\alpha S_{n-1}}{B_{n-1}}. \tag{4.5}$$

Используя (3.7) и (4.5) получим, что

$$\begin{aligned} B_N^{-1} X_n^{\pi_\alpha} &= (1-\alpha)\mathbb{C} + \sum_{k=1}^{n} B_k^{-1} \gamma_k^\alpha S_{k-1}(\rho_k - r) \\ &= (1-\alpha)\mathbb{C} + \sum_{k=1}^{n} B_k^{-1} S_{k-1} \gamma_k^* (\rho_k - r) - \sum_{k=1}^{n} B_k^{-1} S_{k-1} \varphi_k \mathbb{C}(\rho_k - r) \\ &= (1-\alpha)\mathbb{C} - (1-\alpha)\mathbb{C} + M_n^{\mathbb{C}} - \mathbb{C} M_n^\alpha. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Как следует из (4.6):

$$B_N^{-1} X_n^{\pi_\alpha} = B_N^{-1} f - \mathbb{C} \cdot I_{\{(Z_N^*)^{-1} < \lambda\}}, \tag{4.7}$$

и следовательно,

$$B_N^{-1} X_N^{\pi_\alpha} \ge B_N^{-1} f - \mathbb{C}.$$

Последнее неравенство означает, что $\pi_\alpha \in SF(f,\ N)$.

Далее, из формул (4.4) и (4.7) получаем, что

$$\begin{aligned} &P^*\{X_N^{\pi_\alpha} \ge f\} = P^*\left\{f - \mathbb{C} B_N I_{\{(Z_N^*)^{-1} < \lambda\}} \ge f\right\} \\ &= P^*\left\{I_{\{(Z_N^*)^{-1} < \lambda\}} \le 0\right\} \\ &= P^*\{(Z_N^*)^{-1} \ge \lambda\} = 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Наконец, из (4.4) и (4.8) следует

$$\begin{aligned} &P\{X_N^{\pi_\alpha} \ge f\} = E^* I_{\{X_N^{\pi_\alpha} \ge f\}} (Z_N^*)^{-1} \ge E^* I_{\{X_N^{\pi_\alpha} \ge f\}} \cdot I_{\{(Z_N^*)^{-1} \ge \lambda\}} \cdot \\ &(Z_N^*)^{-1} \ge \lambda(1-\alpha) \ge (1-\alpha). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Соотношения (4.8) – (4.9) демонстрируют, что условие (4.1) выполняется для стратегии π_α. Следовательно, данный портфель – $\alpha - \big((1-\alpha)\mathbb{C},\ f,\ N\big)$ хедж.

Полученный результат демонстрирует возможность хеджирования платёжного обязательства с *заданной вероятностью* $(1-\alpha) < 1$. Кроме того, размер начального капитала может быть снижен на величину $\alpha\mathbb{C}$, порождая дополнительный риск α того, что принятое платёжное обязательство не будет выплачено.

4.2 Расчёты с использованием более широкого класса стратегий по сравнению с классом самофинансируемых стратегий

Для ответа на *второй вопрос* представим более реалистичную ситуацию, в которой изменения в стоимости портфеля сопровождаются в том числе притоками и оттоками капитала на рынке (2.1). Будем моделировать такое поведение с помощью некоторой стохастической последовательности $G = (G_n)_{n \le N}$ и введём класс GF, содержащий G – *финансируемые стратегии* $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$ такие, что

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = -\Delta G_n. \tag{4.10}$$

Определение G – финансируемой стратегии (4.10) может быть получено также из сугубо математических соображений:

$$\begin{aligned}
\Delta X_n^\pi &= X_n^\pi - X_{n-1}^\pi \\
&= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_{n-1} B_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} \\
&= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - \beta_n B_{n-1} - \gamma_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \beta_{n-1} B_{n-1} \\
&\qquad - \gamma_{n-1} S_{n-1} \\
&= (\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n) + (B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Первая компонента $(\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n)$ соотношения (4.11) отвечает за изменение капитала стратегии π в связи с изменениями цен единицы банковского счёта и акции, и является основой свойства самофинансируемости портфеля. *Вторая компонента:* $-\Delta G_n = (B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n)$ формально не имеет такой же простой экономической интерпретации. Она определяет приближенность стратегии к самофинансируемой. Если $\Delta G_n \ge 0$ (соответственно, $\Delta G_n \le 0$), тогда G – финансируемую стратегию π называют *стратегией с потреблением (*соответственно*, стратегией с рефинансированием, дивидендами, или инвестированием).*

Рассмотрим G – финансируемые стратегии с потреблением $(\Delta G_n \ge 0)$). Случай портфелей с рефинансированием может быть рассмотрен аналогично. В соответствии с равенствами (4.10) – (4.11) заметим, что для $\pi \in SF$ капитал $X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} + \Delta G_n$.

Далее, используя (4.10) – (4.11) и эволюцию стоимости базового актива в модели (2.1), получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta X_n^\pi &= \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n - \Delta G_n = \beta_n r B_{n-1} + \gamma_n \rho_n S_{n-1} - \Delta G_n \\
&= \beta_n B_{n-1} r + \gamma_n S_{n-1} r + \Delta G_n r + \gamma_n \rho_n S_{n-1} - \gamma_n r S_{n-1} - \Delta G_n - r\Delta G_n \\
&= r(\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} + \Delta G_n) + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r) - (1+r)\Delta G_n \\
&= r X_{n-1}^\pi + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r) - (1+r)\Delta G_n \\
&= r X_{n-1}^\pi + \Delta N_n,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где $\Delta N_n = \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r) - (1+r)\Delta G_n$.

Соотношение (4.12) показывает, что X_n^π удовлетворяет неоднородному стохастическому дифференциальному уравнению (2.8’), а значит

$$X_n^\pi = B_n\left\{X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} B_k^{-1}\gamma_k S_{k-1}(\rho_k - r) - \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k\right\}. \qquad (4.13)$$

Определяя

$$M_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} B_k^{-1}\gamma_k S_{k-1}(\rho_k - r),$$
$$G_n^B = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k\,,\ \ G_0^B = 0. \qquad (4.14)$$

Получим с помощью (4.13), что

$$B_n^{-1}X_n^\pi = M_n^\pi - G_n^B. \qquad (4.15)$$

Как уже известно из (3.7), стохастическая последовательность $(M_n^\pi)_{n\le N}$ в (4.14) – (4.15) является P^* – мартингалом. Другая стохастическая последовательность $(G_n^B)_{n\le N}$ в (4.14) – (4.15) – предсказуемая и неубывающая, поскольку $\Delta G_n \ge 0$Следовательно, приходим к важному наблюдению, что *для каждой стратегии с потреблением, принадлежащей классу GF, её дисконтированный капитал является супермартингалом относительно мартингальной меры P^**. Данное наблюдение демонстрирует трансформацию *мартингальной характеризацией* самофинансируемых стратегий в *супермартингальную характеризацию* стратегий с потреблением.

Далее, для $(B,\,S)$-рынка (2.1) и заданного платёжного обязательства f с датой исполнения N, определим $G-(B,\,S)$ *– рынок* или, эквивалентно, G *– ограниченный* $(B,\,S)$*-рынок*, а также G *– хедж* для случая, когда мы работаем с классом GF вместо SF. Естественно ожидать, что соотношение ниже, полученное из (4.15) посредством усреднения по мере P^*

$$E^*B_N^{-1}X_N^\pi = X_0^\pi - \sum_{k=1}^{N} E^*B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \qquad (4.16)$$

будет играть ключевую роль в определении так называемой G *– цены* опциона с платёжным обязательством f.

Предположим, что G– финансируемая стратегия π является Европейским $(x,\,f,\,N)$ хеджем (G– хеджем). Из равенства (4.16) следует, что

$$x = X_0 = E^*B_N^{-1}X_N^\pi + \textstyle\sum_{k=1}^{n} E^*B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \ge E^*B_N^{-1}f + \sum_{k=1}^{N} E^*B_{k-1}^{-1}\Delta G_k,$$

и, если данная стратегия минимальна, то

$$x = E^*\left\{B_N^{-1}f + \sum_{k=1}^{N} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k\right\}. \tag{4.17}$$

Покажем, что из выполнения (4.17) вытекает существование минимального G–хеджа. Для этого определим P^* – мартингал M^*:

$$M_n^* = E^*\left(B_N^{-1}f + \sum_{k=1}^{N} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ M_0^* = x. \tag{4.18}$$

Для заданного в (4.18) мартингала можно записать его мартингальное представление в форме

$$M_n^* = x + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(\rho_k - r), \quad n \le N. \tag{4.19}$$

Покажем, что, зная φ_n^* и ΔG_n, можно построить минимальный (x, f, N) – хедж (G–хедж) $\pi^* \in GF$ такой, что стохастическая последовательность

$$M_n^{\pi^*} = B_n^{-1}X_n^{\pi^*} + \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k$$

будет P^* –мартингалом, совпадающим с M^*.

Для начала зададим

$$\gamma_1^* = \varphi_1^* B_1 S_0^{-1}, \;\; \beta_1^* = x - \Delta G_1 \gamma_1^* S_0,$$

и с помощью (4.19) найдём, что

$$M_1^{\pi^*} = B_1^{-1}X_1^{\pi^*} + \Delta G_1 = B_1^{-1}(\beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1) + \Delta G_1 =$$

$$= \beta_1^* + \gamma_1^* B_1^{-1} S_1 + \Delta G_1 = x - \Delta G_1 - \varphi_1^* B_1 + \varphi_1^* \frac{S_1}{S_0} + \Delta G_1 =$$

$$= x + \varphi_1^*(\rho_1 - r) = M_1^*.$$

Продолжая этот процесс, получим G–финансируемую стратегию π^*, такую что $M_n^* = M_n^{\pi^*}$. В результате, используя (4.18), имеем для каждого $n \le N$:

$$\begin{aligned} X_n^{\pi^*} &= M_n^* B_n - B_n \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \\ &= B_n E^*\left(B_N^{-1}f + \sum_{k=1}^{N} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \middle| \mathcal{F}_n\right) - B_n \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \\ &= E^*\left(B_N^{-1}B_n f + \sum_{k=n+1}^{N} B_n B_{k-1}^{-1}\Delta G_k \middle| \mathcal{F}_n\right). \end{aligned} \tag{4.20}$$

В частности, $X_N^{\pi^*} = f$ and $X_0^{\pi^*} = x$, и, следовательно, π^* – минимальный G–хедж. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 4.1. Рассмотрим $G-(B,\ S)$–рынок (2.1). Тогда для Европейского опциона с платёжным обязательством f и датой исполнения N выполнены следующие утверждения:

1. Справедливая стоимость опциона задаётся формулой

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_N(f;G) = E^*\left(B_N^{-1}f + \sum_{k=1}^N B_{k-1}^{-1}\Delta G_k\right);$$

2. Существует минимальный $(\mathbb{C},\ f,\ N)$ хедж $\pi^* = \left((\beta_n^*,\ \gamma_n^*)\right)_{n\le N}$, определяемый формулами:

$$\gamma_n^* = \frac{\varphi_n^* B_n}{S_{n-1}},\quad \beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1} - \Delta G_n}{B_{n-1}},$$

где φ_n^* – может быть найдено с помощью (4.19);

3. Стоимость минимального G–хеджа определяется формулой (4.20).

Следствие 4.1. Рассмотрим $G-(B,\ S)$–рынок (2.1) с заданной стохастической последовательностью $G_n = c\cdot\sum_{k=1}^n S_k$, $G_0 = 0$, $c > 0$, и опцион call $f = (S_N - K)^+$. В соответствии с Теоремой 4.1 можно рассчитать цену минимального G–хеджа в момент времени $n \le N$:

$$\begin{aligned} &E^*\left(B_N^{-1}B_n(S_N-K)^+ + \sum_{k=n+1}^N B_nB_{k-1}^{-1}cS_k \,\middle|\mathcal{F}_n\right)\\ &= E^*(B_N^{-1}B_n(S_N-K)^+|\mathcal{F}_n)\\ &\qquad + \sum_{k=n+1}^{N} E^*\left(cB_{n+1}B_k^{-1}S_k|\mathcal{F}_n\right)\\ &= \mathbb{C}_{N,\,n}^{CRR} + cB_{n+1}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{S_n}{B_n}\\ &= \mathbb{C}_{N,\,n}^{CRR} + c(1+r)(N-n-1)S_n. \end{aligned} \tag{4.21}$$

В ходе преобразований для вывода (4.21) было использовано P^* – мартингальное свойство $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$: $E^*\left(\frac{S_k}{B_k}\middle|\mathcal{F}_n\right) = \frac{S_n}{B_n}$, $k = n+1,\ \ldots,\ N$ Применяя (4.21) в случае $n = 0$, приходим к формуле для G–цены в момент времени $n = 0$

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_N^{CRR} + c(1+r)(N-1)S_0. \tag{4.22}$$

Продемонстрируем пример расчета указанных выше величин.

Пример 4.1. Рассмотрим двухшаговую модель (2.1) с параметрами $S_0 = 200$, $B_0 = 1$, $r = 0.2$ и S_1 со значениями 320 и 120. Рассчитаем CRR – стоимость и G– стоимость (с учётом параметра $c = 0.05$) опциона с платёжным обязательством $f = (S_2 - 210)^+$. Значения доходности определяются из соотношений:

$$b = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{320-120}{200} = \frac{3}{5};\quad a = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{120-200}{200} = -\frac{2}{5}.$$

Следовательно, получаем параметр Бернулли для мартингальной вероятности

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}.$$

Далее, для S_2 и платёжного обязательства выполнено:

$$S_2 = S_1(1+\rho_2) = \begin{cases} 572 \text{ с вероятностью } (p^*)^2 = \dfrac{9}{25} \\ 192 \text{ с вероятностью } 2p^*(1-p^*) = \dfrac{12}{25} \\ 72 \text{ с вероятностью } (1-p^*)^2 = \dfrac{4}{25}. \end{cases}$$

Таким образом, можно рассчитать справедливую стоимость (эквивалентно, CRR – стоимость) в следующем виде:

$$\mathbb{C}_2^{CRR} = E^* \frac{f}{B_2} = \frac{1}{(1.2)^2} \cdot 302 \cdot \frac{9}{25} = 75.5\,.$$

Также и для G – стоимости $\mathbb{C}_2$, используя (4.22), получим

$$\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_2^{CRR} + 0.05 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 200 = 75.5 + 12 = 87.5.$$

4.3 Неполнота рынка и понятия о верхней и нижней ценах опционов

Сосредоточим внимание на области, в которой стратегии с потреблением играют ключевую роль. Начнём с рассмотрения следующего примера.

Пример 4.2. Рассмотрим одно-шаговую модель $(B,\ S)$ – рынка с параметрами $B_0 = 1,\ \ S_0 = 100,\ \ r = 0$ и тремя возможными сценариями для значения стоимости акции S_1 в момент времени 1: 80, 90, 180 с соответствующими вероятностями $\tilde{p}_1,\ \tilde{p}_2,\ \tilde{p}_3$. Возможно ли воспроизвести Европейский опцион call с платёжным обязательством $f = (S_1 - 100)^+$ на заданном рынке?

Для ответа на поставленный вопрос запишем три условия для возможной воспроизводящей стратегии $\pi = (\beta,\ \gamma)$:

$$\beta(1+r) + \gamma S_1 = f \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \beta + 80\gamma = 0 \\ \beta + 90\gamma = 0 \\ \beta + 180\gamma = 80. \end{cases}$$

Данная система уравнений, определяющая параметры β и γ, не имеет решения, поскольку одновременно должно быть выполнено $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.8$. Следовательно, заданный рынок – неполный. Другим эквивалентным доказательством этого факта, согласно второй фундаментальной теореме финансовой математики, является заключение, полученное из анализа множества риск-нейтральных мер.

Риск-нейтральная мера $\tilde{P}$ определена посредством трёх параметров $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$, удовлетворяющих условиям: $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = 1$ и $80\tilde{p}_1 + 90\tilde{p}_2 + 180\tilde{p}_3 = 100$ $\left(\Leftrightarrow \tilde{E}S_1 = S_0\right)$. Очевидно, что указанная система имеет множество решений, что означает множество допустимых риск-нейтральных вероятностных мер для заданной модели рынка.

Пример 4.2 демонстрирует, что полнота рынка нарушается, если стоимость акции может принимать более двух значений. В то же время количество мартингальных вероятностей для такого *мультиномиального* рынка больше 1. Модель (2.1), рассмотренная ранее, была наделена свойством полноты, что означало единственность мартингальной меры. Все финансовые вычисления производились с учётом данного факта. Возникает вопрос возможности аналогичных расчётов в случае *неполного мультиномиального рынка* (2.1), когда мартингальная мера не является единственной. Дадим естественное определение стоимости опциона Европейского типа с платёжным обязательством f и временем исполнения N для данной модели. Участник рынка может выступать как продавцом, так и покупателем опциона. Различные приоритеты покупателя и продавца приводят, в общем случае, к формированию *разных* желаемых цен $\mathbb{C}^*$ и $\mathbb{C}_*$ для покупателя и продавца. Вместе с этим возникает ненулевая разница $\mathbb{C}^* - \mathbb{C}_*$, которая называется *спрэдом цен*. В случае полного рынка существует вероятность совмещения противоположных интересов продавца и покупателя, что выражается в существовании единственной справедливой стоимости $\mathbb{C}_N$.

Говоря более формальным языком, введём следующий класс самофинансируемых стратегий π:

$$\Pi^*(x,\ f,\ N) = \{\pi \in SF : X_N^\pi \geq f,\ X_0^\pi = x > 0\},$$
$$\Pi_*(x,\ f,\ N) = \{\pi \in SF : X_N^\pi \leq f,\ X_0^\pi = x > 0\}.$$

Далее определим цены *ask* и *bid* платёжного обязательства f в виде формул

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^*(f,\ N) = \inf\{x : \Pi^*(x,\ f,\ N) \neq \emptyset\},$$
$$\mathbb{C}_* = \mathbb{C}_*(f,\ N) = \sup\{x : \Pi_*(x,\ f,\ N) \neq \emptyset\}.$$

Как известно (см., например, (3.7)), капитал X_N^π самофинансируемой стратегии $\pi = \left((\beta_n,\ \gamma_n)\right)_{n \leq N}$ может быть представлен в виде

$$X_N^\pi = B_N \left\{ X_0 + \sum_{k=1}^{N} B_{k-1}^{-1} \gamma_k S_{k-1} (\rho_k - r) \right\}.$$

Рассчитывая математическое ожидание данного равенства относительно мартингальной вероятности $\tilde{P}$, получаем:

$$\tilde{E}B_N^{-1}X_N^{\pi} = \tilde{E}X_0 = x.$$

Следовательно, для любой мартингальной меры $\tilde{P}$ выполнено:

$$\mathbb{C}_* \le \tilde{E}B_N^{-1}f \le \mathbb{C}^* \qquad (4.23)$$

Таким образом, для полного рынка справедливо равенство:

$$\mathbb{C}_* = \mathbb{C} = \mathbb{C}^*,$$

другими словами, *полный рынок характеризуется отсутствием спреда.*

Однако в случае неполного рынка из (4.23) получаем, что

$$\mathbb{C}_* \le \inf_{\tilde{P}} \tilde{E}B_N^{-1}f \le \sup_{\tilde{P}} \tilde{E}B_N^{-1}f \le \mathbb{C}^*. \qquad (4.24)$$

Неравенства (4.24) наводят на мысль, что в некоторых случаях левая и правая части неравенств (4.24) становятся равенствами. Обычно супремум строго больше инфимума, следовательно, *неполный рынок характеризуется ненулевым спредом*. Эту идею демонстрирует следующий пример.

Пример 4.3. Рассмотрим следующую 1-шаговую модель (B, S) – рынка (2.1): $B_0 = B_1 = S_0 = 1$, $S_1 = 1 + \rho$, где ρ принимает одно из трёх возможных значений: $\frac{1}{2}$, 0 and $-\frac{1}{2}$ с положительными вероятностями $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = 1$. Мартингальное свойство меры $\tilde{P}$, выраженной триплетом $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ означает, что $\tilde{E}\rho = \frac{1}{2}\tilde{p}_1 - \frac{1}{2}\tilde{p}_3 = 0$ и, следовательно, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_3$. Выразим $\tilde{p}_2$ в следующем виде: $\tilde{p}_2 = 1 - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_3 = 1 - 2\tilde{p}_1$. Это приводит к множеству мартингальных мер $\tilde{P}$. Допустим, платёжное обязательство f имеет следующий вид:

$$f = f(S_1) = (S_1 - 1)^+ = \rho^+.$$

Для вычисления цены покупки (ask) $\mathbb{C}^*$ и продажи bid) $\mathbb{C}_*$ данного обязательства рассмотрим две следующие последовательности мартингальных вероятностей $\tilde{P}_n$ и $\tilde{P}^n$:

$$\tilde{P}_n\left\{\rho = \frac{1}{2}\right\} = \tilde{P}_n\left\{\rho = -\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \ \ \tilde{P}_n\{\rho = 0\} = \frac{1}{n},$$

$$\tilde{P}^n\left\{\rho = \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2n} = \tilde{P}^n\left\{\rho = -\frac{1}{2}\right\}, \quad \tilde{P}^n\{\rho = 0\} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что $\tilde{E}_n\rho^+ = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \uparrow \frac{1}{4}$ and $\tilde{E}_n\rho^+ = \frac{1}{4n} \downarrow 0$, и как следствие (4.24) приводит к $\mathbb{C}_* = 0$, $\mathbb{C}^* = \frac{1}{4}$. Заметим, что предельные значения вероятностей $\tilde{P}_\infty$ и $\tilde{P}^\infty$, сконцентрированные соответственно на значениях $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ и $\{0\}$, *экстремальны* для семейства мартингальных мер данного рынка. Интервал $[\mathbb{C}_*, \mathbb{C}^*]$ содержит все возможные *безарбитражные цены* платёжного обязательства f. Другими словами, цены, которые не являются безрисковыми *одновременно* для обеих сторон контракта. Промежутки $(0, \mathbb{C}_*)$ и $(\mathbb{C}^*, \infty)$ представляют *арбитражные цены* для покупателя и продавца опциона соответственно. Рисунок 4.1 отражает данную структуру цен опциона.

Рисунок 4.1 – Структура цен опциона

Для заданного платёжного обязательства f с, возможно, весьма сложной структурой, может быть трудно получить точное значение величин $\mathbb{C}_*$ и $\mathbb{C}^*$. Данная ситуация побуждает к нахождению относительно простых приближений. Построим такие оценки для Европейского опциона call с платёжным обязательством $f = (S_N - K)^+$. Поскольку S_N неотрицательна, то $(S_N - K)^+ \le S_N$. Используя неравенство Йенсена, а также факт того, что $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n \le N}$ является мартингалом относительно произвольной мартингальной вероятности $\tilde{P}$, получим:

$$\left(S_0 - \frac{K}{B_N}\right)^+ = \left(\tilde{E}\frac{S_N}{B_N} - \frac{K}{B_N}\right)^+ \le \tilde{E}\left(\frac{S_N - K}{B_N}\right)^+ \le \tilde{E}\frac{S_N}{B_N} = \tilde{E}S_0 = S_0.$$

.

Таким образом,

$$(S_0 - (1+r)^{-N} \cdot K)^+ \le \mathbb{C}_* \le \mathbb{C}^* \le S_0.$$

Подытоживая дискуссию о неполных рынках, вернёмся к G – финансируемым стратегиям (стратегии с потреблением) и их супермартингальной характеристике, выраженной разложением (4.15). Такое представление может быть выведено для любой мартингальной вероятности. В каждом случае оно будет являться разложением Дуба дисконтированной стоимости $\frac{X_n^\pi}{B_n}$ стратегии π, а её “мартингальная” часть M_n^π будет зависеть от $\tilde{P}$. Оказывается, можно доказать универсальную по отношению к мартингальным мерам версию такого разложения для любого положительного супермартингала $(X_n)_{n \le N}$ в виде:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right) - C_n, \tag{4.25}$$

где $(\varphi_n)_{n \le N}$ предсказуема, а $(C_n)_{n \le N}$ согласована и неотрицательна.

Разложение (4.25) в литературе называется *опциональным разложением*. Используя предсказуемую последовательности (φ_n) и согласованную последовательность (C_n), можно построить стратегию с потреблением, реплицирующую заданное платёжное обязательство f. В этом случае говорят о *суперхеджировании,* а соответствующая цена опциона называется *суперценой*.

Глава 5
РАСЧЁТ ОПЦИОНОВ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПЛАТЁЖНЫМИ ОБЯЗАТЕЛЬСТВАМИ

В пятой главе вводится класс опционов и платёжных обязательств, называемых американскими и динамическими. Здесь развивается соответствующая теория хеджирования и устанавливается связь оценивания этого класса опционов с задачей об оптимальной остановке (см. [4], [6] и [3]).

5.1 Американские опционы и их расчёты методом обратной индукции

Рассмотренные ранее платёжные обязательства имели *статический характер* в смысле того, что время исполнения N и функция выплаты f были зафиксированы заранее. Класс платёжных обязательств существенно расширяется, если предположить, что $f = (f_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$ является последовательностью неотрицательных случайных величин, согласованных с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$. Такие платёжные обязательства будем называть *динамическими платёжными обязательствами* с максимальной датой исполнения N .

Производные ценные бумаги, для которых держатель имеет право на исполнение в *любой момент времени* $n = 0,\ 1,\ \dots,\ N$ и получение выплаты f_n, естественно связаны с динамическим платёжным обязательством $f = (f_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$. Продавец такого контракта, получающий премию $\mathbb{C}$ в момент продажи (стоимость ценной бумаги), *обязан* распорядиться ею так, чтобы стоимость его портфеля в каждый момент времени n превышала f_n, другими словами, он должен обеспечить *хеджирование* платёжного обязательства. Производные ценные бумаги указанного типа называются *Американскими опционами*. Таким образом, Американские опционы, в отличие от Европейских, предоставляют их держателям большую свободу в выборе момента исполнения. Кроме того, держатель опциона принимает данное решение на основании доступной вплоть до момента исполнения информации на рынке. Следовательно, *время исполнения* τ является *моментом остановки*, или *Марковским моментом*, что означает: $\{\omega: \tau(\omega) \le n\} \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \le N$.

Рассмотрим биномиальный рынок (2.1) и предположим, что $x > 0$ и $f = (f_n)_{n\le N}$ является динамическим платёжным обязательством. Стратегия $\pi = (\pi_n)_{n\le N} \in SF$ называется *Американским* $(x,\, f,\, N)$ *– хеджем*, если для любого $\omega \in \Omega$ выполнены соотношения:

$$X_0^\pi(\omega) = x \text{ и } X_n^\pi(\omega) \geq f_n(\omega) \text{ для всех } n \leq N.$$

В этом случае, определив $X_\tau^\pi = \sum_{k=0}^N X_k^\pi I_{\{\tau=k\}}$ и $f_\tau = \sum_{k=0}^N f_k I_{\{\tau=k\}}$, получим, что $X_\tau^\pi(\omega) \geq f_\tau(\omega)$ для любого Марковского момента $\tau \leq N$.

Соответствующая процедура построения хеджирующей стратегии называется *хеджированием динамических платёжных обязательств*. Обозначим $\Pi(x, f, N)$ множество Американских (x, f, N) хеджей. Будем говорить, что стратегия π *минимальна*, если существует Марковский момент τ такой, что для любого $\omega \in \Omega$ выполнено $X_\tau^\pi(\omega) = f_\tau(\omega)$. Как и в «статическом» случае с Европейскими опционами, будем называть величину $\mathbb{C}_N^{Am}(f)$:

$$\mathbb{C}_N^{Am}(f) = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f, N) \neq \emptyset\}$$

ценой *Американского опциона*.

Пример 5.1. Американский *опцион call* с ценой поставки K определён как производная ценная бумага с платёжным обязательством

$$f = (f_n)_{n \leq N}, \text{ где } f_n = (S_n - K)^+,$$

в то время как Американский *опцион put* с ценой поставки K определяется обязательством $f = (f_n)_{n \leq N}$ с $f_n = (K - S_n)^+$. Если динамическое платёжное обязательство имеет вид $f_n = \sup_{k \leq N} S_k$, тогда такой опцион Американского типа называют *Русским опционом (Russian option)*.

Если держатель опциона решает исполнить его в некоторый Марковский момент τ, тогда продавец, в соответствии с контрактом, должен выплатить сумму f_τ. Для оценки данного опциона, как и прежде, применим процедуру хеджирования. Пусть стратегия $\pi \in SF$, а её капитал $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \leq N}$. Тогда дисконтированный капитал $M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}$ является P^* – мартингалом, а $E^* M_\tau^\pi = M_0^\pi$ для любого Марковского момента $\tau \leq N$. Следовательно,

$$X_0^\pi = E^* B_\tau^{-1} X_\tau^\pi. \tag{5.1}$$

Для $\pi \in \Pi(x, f, N)$ в (5.1) получим, что

$$x \geq \sup_{\tau \leq N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau,$$

где супремум вычисляется на множестве всех возможных Марковских моментов $0 \leq \tau \leq N$.

Если π является минимальным хеджем, тогда

$$x = \sup_{\tau \leq N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau. \tag{5.2}$$

Теперь предположим, что начальный капитал x и платёжное обязательство f удовлетворяют (5.2). Покажем, что в этом случае существует минимальный Американский (x, f, N) – хедж. Для этого определим следующее соотношение:

$$Y_n = \sup_{n \leq \tau \leq N} E^* \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_n \right),$$

где супремум рассчитывается на множестве всех Марковских моментов $n \leq \tau \leq N$, а значит на конечном множестве, поскольку Ω конечно. Таким образом, случайная величина Y_n корректно определена и согласована с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n\le N}$.

Обратим внимание на структуру последовательности $(Y_n)_{n\le N}$. Очевидно, что $Y_0 = x$ и $Y_N = B_N^{-1} f_N$. Чтобы исследовать структуру $(Y_n)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$ для всех n, запишем

$$Y_N = Y_{\tau_N^*} = B_N^{-1} f_N,$$

где $\tau_N^* \equiv N$– единственный Марковский момент в классе моментов остановки с единственным значением N. Далее, для $n = N-1$ имеем

$$Y_{N-1} = \begin{cases} B_{N-1}^{-1} f_{N-1} & \text{, если } \dfrac{f_{N-1}}{B_{N-1}} \ge E^*(B_N^{-1} f_N | \mathcal{F}_{N-1}) \\ E^*(B_N^{-1} f_N | \mathcal{F}_{N-1}), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

что эквивалентно формуле

$$Y_{N-1} = \max\{B_{N-1}^{-1} f_{N-1},\ E^*(Y_N | \mathcal{F}_{N-1})\}.$$

Полагая

$$\tau_{N-1}^* = \begin{cases} N-1, \text{если } B_{N-1}^{-1} f_{N-1} \ge E^*(B_N^{-1} f_N | \mathcal{F}_N) \\ N, \text{в противном случае} \end{cases},$$

получим, что $Y_{\tau_{N-1}^*}$ равняется

$$B_{N-1}^{-1} f_{N-1} \text{ или } E^*(B_N^{-1} f_N | \mathcal{F}_{N-1}).$$

Продолжая процедуру обратной индукции, приходим к тому, что для $n \le N-1$:

$$Y_n = \max\{B_n^{-1} f_n,\ E^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)\}, \tag{5.3}$$

$$\tau_n^* = \inf\{n \le k \le N : Y_k = B_k^{-1} f_k\}. \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) напрямую следует, что

$$Y_n \ge B_n^{-1} f_n \text{ для всех } n \le N, \tag{5.5}$$

и

$$Y_n \ge E^*(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \text{ для } n \le N-1. \tag{5.6}$$

Значит, $(Y_n)_{n\le N}$ супермартингал по отношению к P^*, мажорирующий последовательность $(B_n f_n)_{n\le N}$. Более того, это *наименьший супермартингал* с указанными свойствами (5.5) и (5.6) (*Огибающая или пакет Снелла)*. Из построения следует, что Марковский момент τ_n^* является *оптимальным* в классе моментов остановки $n \le \tau \le N$ в том смысле, что

$$E^*\left(\frac{f_{\tau_n^*}}{B_{\tau_n^*}}\middle|\mathcal{F}_n\right) = \sup_{n\le\tau\le N} E^*\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\middle|\mathcal{F}_n\right).$$

В частности, поскольку $\mathcal{F}_0 = \{\Omega,\ \emptyset\}$, для $\tau^* = \tau_0^*$ имеем:

$$Y_0 = \sup_{0\le\tau\le N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau = E^* B_{\tau^*}^{-1} f_{\tau^*}.$$

С другой стороны, в соответствии с разложением Дуба для супермартингалов известно, что

$$Y_n = M_n - A_n, \tag{5.7}$$

где $M = (M_n)_{n \le N}$, $M_0 = Y_0$, – мартингал, а $A = (A_n)_{n \le N}$, $A_0 = 0$ – предсказуемая неубывающая стохастическая последовательность. Вследствие полноты (B, S) – рынка (2.1), мартингал M в (5.7) допускает представление (4.19), которое можно записать в виде:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^* (\rho_k - r) = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* B_k^{-1} S_{k-1} (\rho_k - r), \tag{5.8}$$

с предсказуемой последовательностью $(\gamma_n)_{n=1,\,2,\,\dots,\,N}$.

Подставляя (5.8) в (5.7), получим, что

$$Y_n = Y_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* B_k^{-1} S_{k-1} (\rho_k - r) - A_n. \tag{5.9}$$

Более того, $Y_n \le M_n$, $n = 1,\, 2,\, \dots,\, N$ и $Y_0 = M_0 = \sup_{\tau \le N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau = x$.

Начиная с $M_0 = x = \beta_0^* B_0 + \gamma_0^* S_0$, сформируем портфель $\pi_1^* = (\beta_1^*,\, \gamma_1^*)$ с γ_1^* из (5.8)-(5.9) и, вследствие того, что данная стратегия является самофинансируемой, получим $\beta_1^* = \frac{x - \gamma_1^* S_0}{B_0}$. Тогда капитал портфеля π^* в момент времени 1 равняется $X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1$, а его дисконтированная стоимость:

$$\begin{aligned} M_1^{\pi^*} &= \frac{X_1^{\pi^*}}{B_1} = \beta_1^* + \gamma_1^* \frac{S_1}{B_1} = \frac{x - \gamma_1^* S_0}{B_0} + \gamma_1^* \frac{S_1}{B_1} = \frac{x}{B_0} + \gamma_1^* \left(\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0} \right) = \\ &= \frac{x}{B_0} + \frac{\varphi_1^* B_1}{S_0} \left(\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0} \right) = \frac{x}{B_0} + \gamma_1^* \frac{B_0(1+r)}{S_0} \left(\frac{S_0(1+\rho_1)}{B_0(1+r)} - \frac{S_0}{B_0} \right) = \\ &= \frac{x}{B_0} + \varphi_1^* (\rho_1 - r) = M_1. \end{aligned}$$

Для произвольного $n \le N$ положим $\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}$ и рассмотрим самофинансируемую стратегию $\pi^* = (\pi_n^*)_{n \le N}$ такую, что

$$X_n^{\pi^*} = M_n^{\pi^*} = M_n = x + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^* B_k^{-1} S_{k-1} (\rho_k - r). \tag{5.10}$$

Таким образом, из (5.9) – (5.10) получим соотношение:

$$\begin{aligned} X_N^{\pi^*} &= M_n^{\pi^*} B_n = M_n B_n = (Y_n + A_n) B_n \ge \\ &\ge Y_n B_n = \sup_{n \le \tau \le N} E^* (B_\tau^{-1} f_\tau | \mathcal{F}_n) \\ &= \sup_{n \le \tau \le N} E^* (B_\tau^{-1} B_n f_\tau | \mathcal{F}_n). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Как следует из (5.11), $X_n^{\pi^*} \geq f_n$ для $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$ и по построению стратегии π^*, её начальный капитал $X_0^{\pi^*} = x = \sup_{\tau \leq N} E^*(B_\tau^{-1} f_\tau)$.

Следовательно, $\pi^* \in \Pi(x,\ f,\ N)$. Также понятно, что для ω и n таких, что $n < \tau^*(\omega)$, $Y_n(\omega) = E^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ и $A_n(\omega) = 0$. На том же множестве $X_n^{\pi^*}(\omega) = \sup_{n \leq \tau \leq N} E^*(B_\tau^{-1} B_n f_\tau | \mathcal{F}_n)$, и, согласно определению τ^*, отмеченному выше мартингальному свойству Y и представлению $\Delta A_n = Y_{n-1} - E^*(Y_n|\mathcal{F}_n)$, имеем, что $A_{\tau^*} = 0$. Следовательно, $X_{\tau^*}^{\pi^*}(\omega) = Y_{\tau^*(\omega)} B_{\tau^*(\omega)} = f_{\tau^*(\omega)}$, что доказывает минимальность построенного хеджа. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы о расчёте Американских опционов.

Теорема 5.1. Предположим Американский опцион с динамическим платёжным обязательством $f = (f_n)_{n \leq N}$ и датой исполнения N доступен для покупки и продажи на $(B,\ S)$ – рынке (2.1). Тогда

1. цена $\mathbb{C}_N^{Am}(f)$ опциона определяется как решение задачи оптимальной остановки

$$\mathbb{C}_N^{Am}(f) = \sup_{0 \leq \tau \leq N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau, \tag{5.12}$$

а Марковский момент $\tau^* = \tau_0^*$ оптимален в смысле $E^* B_{\tau^*}^{-1} f_{\tau^*} = \mathbb{C}_N^{Am}(f)$;

2. множество $\Pi\big(\mathbb{C}_N^{Am}(f),\ f,\ N\big)$ не пусто и содержит все минимальные хеджирующие стратегии.

Доказательство Теоремы 5.1 фактически уже приведено выше. Далее поиск *оптимального* Марковского момента τ^* неразрывно связан с задачей (5.12), а момент остановки *рационален* в том смысле, что для любого портфеля $\pi \in SF$ с начальным капиталом $\mathbb{C}_N^{Am}(f)$ и свойством $X_{\tau^*}^{\pi}(\omega) \geq f_{\tau^*}(\omega)$, $\omega^N \in \Omega$, соблюдается равенство $X_{\tau^*}^{\pi}(\omega) = f_{\tau^*}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Таким моментом остановки и является $\tau^* = \tau_0^*$. В самом деле, если π^* является $\big(\mathbb{C}_N^{Am}(f),\ f,\ N\big)$ – хеджем и τ^* – рациональный момент исполнения опциона, тогда $X_{\tau^*}^{\pi^*} = f_{\tau^*}$, и, согласно (5.1):

$$\mathbb{C}_N^{Am}(f) = X_0^{\pi^*} = E^* B_{\tau^*}^{-1} X_{\tau^*}^{\pi^*} = E^* B_{\tau^*}^{-1} f_{\tau^*}.$$

С другой стороны, если σ – Марковский момент со свойством $E^* B_\sigma^{-1} f_\sigma = \sup_{0 \leq \tau \leq N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau$, $\pi \in SF$ имеет начальную стоимость $\mathbb{C}_N^{Am}(f)$ и $X_\sigma^\pi \geq f_\sigma$, тогда в виду (5.1)

$$X_0^\pi = E^* B_\sigma^{-1} X_\sigma^\pi \geq E^* B_\sigma^{-1} f_\sigma = \sup_{0 \leq \tau \leq N} E^* B_\tau^{-1} f_\tau = \mathbb{C}_N^{Am}(f).$$

Таким образом, $P^*\{X_\sigma^\pi > f_\sigma\} = 0$, и момент остановки σ рационален. Докажем второе утверждение Теоремы 5.1 с помощью предыдущих аргументов.

Будем предполагать, что π^* является $\big(\mathbb{C}_N^{Am}(f),\ f,\ N\big)$ – хеджем, и оптимальный Марковский момент времени τ^* в задаче (5.12) *рационален*. Следовательно, $X_{\tau^*}^{\pi^*} = f_{\tau^*}$ и π^* минимален. Если после уплаты премии $\mathbb{C}_N^{Am}(f)$ держатель опциона исполняет его в момент времени τ, то он получает величину f_τ. Однако на $(B,\ S)$ – рынке может существовать стратегия $\pi \in SF$ такая что $X_0^\pi = \mathbb{C}_N^{Am}(f)$ и $X_\tau^\pi > f_\tau$. Держатель опциона зарабатывает в данной ситуации, но он мог бы получить большую прибыль, если бы сам воспользовался этой стратегией π для создания капитала X_τ^π. Следовательно, поведение клиента на рынке выглядит иррациональным.

5.2 Расчёты американских опционов: связь с задачей об оптимальной остановке и примеры

Как только что было продемонстрировано, сущность расчёта Американских опционов состоит в сведении этого расчёта к подходящей *задаче об оптимальной остановке*, когда для неотрицательной стохастической последовательности $X = (X_n)_{n\geq 0}$ необходимо найти значение капитала $V = \sup\limits_\tau EX_\tau$ и оптимальный Марковский момент τ^* такие, что

$$V = EX_{\tau^*}, \tag{5.13}$$

где супремум берётся по всему множеству Марковских моментов.

Зачастую корректное решение задач типа (5.13), в которых требуется найти значение капитала V и оптимальный момент остановки τ^*, является сложным и трудоёмким процессом. Тем не менее, иногда удаётся применить следующий элегантный приём. Его ключевая идея состоит в том, чтобы найти другую стохастическую последовательность $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$, функцию $g = g(y)$ с единственной точкой максимума y^* и положительный мартингал $M = (M_n)_{n\geq 0}$, $M_0 = 1$ такие, что для любого $n \geq 0$:

$$X_n = g(Y_n) \cdot M_n. \tag{5.14}$$

Из (5.14) понятно, что $X_n \leq g(y^*) \cdot M_n$ для всех $n \geq 0$ и для любого конечного момента остановки τ выполнено следующее неравенство

$$X_\tau \leq g(y^*) \cdot M_\tau,$$
$$EX_\tau \leq g(y^*) EM_\tau = g(y^*).$$

Таким образом, предполагая, что $g(y^*)$ является верхней границей для значения капитала V в задаче (5.13).

Далее введём Марковский момент τ^* такой, что

$$EX_{\tau^*} = Eg(Y_{\tau^*}) M_{\tau^*} = g(y^*).$$

Оптимальный момент остановки τ^* и значение $V = g(y^*)$, найденные указанным способом, часто оказываются такими, что

$$\tau^* = \inf\{n : Y_n = y^*\}.$$

Применим данный подход к задаче расчёта Американского опциона call с динамическим платёжным обязательством $f = ((S_n - K)^+)_{n\leq N}$ в рамках *симметричной биномиальной модели*:

$$\begin{aligned} \Delta B_n &= r B_{n-1},\ \ B_0 > 0, \\ \Delta S_n &= \rho_n S_{n-1},\ \ S_0 > 0,\ \ n = 1,\ 2,\ \dots,\ N. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Предполагается, что параметры для (5.15) определены следующим образом:

$$a = \lambda^{-1} - 1,\ \ b = \lambda - 1,\ \ \lambda > 0.$$

Понятно, что $S_n = S_0 \lambda^{\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n}$, где $(\mathcal{E}_k)_{k=1,\dots,N}$ – последовательность независимых случайных величин, принимающих значения +1 и -1 с вероятностями $p \in (0,\ 1)$ и $1 - p$, соответственно. Согласно (5.13) или (5.12), расчёт стоимости опциона сводится к нахождению

$$\mathbb{C}_N^{Am}(f) = \sup_{0 \le \tau \le N} E^* B_\tau^{-1}(S_\tau - K)^+,$$

где, как обычно, E^*– математическое ожидание относительно мартингальной вероятности P^*, соответствующей параметру $p^* = \frac{r-a}{b-a}$, в модели (5.15).

Предполагая, для простоты, что $B_0 = S_0 = 1$ имеем следующее соотношение:

$$B_n^{-1}(S_n - K)^+ = (S_n - K)^+ S_n^{-1} B_n^{-1} S_n = (S_n - K)^+ S_n^{-1} M_n, \tag{5.16}$$

где $M = (M_n)_{n \le N},\ M_0 = 1,$ – P^* – мартингал. Имея в виду (5.14) и (5.16), рассмотрим неубывающую функцию $g(y) = (y - K)^+ y^{-1}$. Предположим, что $K = \lambda^{N_k},\ |N_k| \le N$. Тогда на «решётке» $\lambda^n,\ n = 0,\ \pm 1,\ \dots,\ \pm N$, максимальное значение функции g достигается в точке $y^* = \lambda^N$ и равняется $g(y^*) = (\lambda^N - \lambda^{N_k})^+ \lambda^{-N}$. Из этого очевидным становится выбор оптимального момента $\tau^* = \inf\{n \le N : S_n = \lambda^N\}$, а именно, $\tau^* = N$. Значит, Американский опцион call совпадает с Европейским опционом в момент исполнения N. Приведём численный пример, иллюстрирующий применение техники расчёта стоимости Американских опционов.

Пример 5.2. Рассмотрим двух-шаговый биномиальный рынок (2.1), где $S_0 = 100,\ \Delta S_i = \rho_i S_{i-1}$ с

$$\rho_i = \begin{cases} 0.5 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ -0.3 & \text{с вероятностью } 0.6, \quad i = 1,\ 2, \end{cases}$$

а процентная ставка $r = 0.2$. Необходимо вычислить стоимость Американского опциона с динамическим платёжным обязательством $f_0 = (S_0 - 90)^+$, $f_1 = (S_1 - 90)$, $f_2 = (S_2 - 120)^+$.

Несложно показать, что риск-нейтральная вероятность определяется параметром Бернулли $p^* = \frac{5}{8}$. В этом случае имеем:

$$Y_2 = \frac{(S_2 - 120)^+}{(1+r)^2} = \frac{(S_1(1+\rho_2) - 120)^+}{(1.2)^2},$$

$$Y_1 = \max\{(1+r)^{-1} f_1,\ E^*(Y_2 | \mathcal{F}_1)\},$$

$$Y_0 = \max\{f_0,\ E^*(Y_1 | \mathcal{F}_0)\}.$$

Рассчитывая

$$E^*(Y_2|\mathcal{F}_1) = \begin{cases} \dfrac{p^*(225 - 120)}{(1+r)^2} = \dfrac{\frac{5}{8} \cdot 105}{(1.2)^2} \cong 46 & \text{на } \{\omega : S_1 = 150\}, \\ 0 & \text{на } \{\omega : S_1 = 70\}, \end{cases}$$

получаем

$$Y_1 = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{150-90}{1.2}, \dfrac{\frac{5}{8}\cdot 105}{(1.2)^2}\right\} = 50 = \dfrac{f_1}{1+r} & \text{на } \{\omega: S_1 = 150\}, \\ 0 & \text{на } \{\omega: S_1 = 70\}. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что $E^*(Y_1|\mathcal{F}_0) = E^*Y_1 = 31$, приходим к соотношению $Y_0 = \max\{0,\ 31\} = 31 \neq 10 = f_0$, и оптимальный момент исполнения

$$\tau^* = \tau_0^* = \tau_1^* = 1.$$

В заключение главы коротко продемонстрируем методологию расчёта цены Американских опционов с использованием G – финансируемых стратегий. Предположим, что $\pi \in SF$ является $(x,\ f,\ N)$ – хеджем Американского опциона с динамическим платёжным обязательством $f = (f_n)_{n\leq N}$. Для любого Марковского момента τ из (4.15) получим, что

$$E^* B_\tau^{-1} X_\tau^\pi = X_0 - E^* \textstyle\sum_{k=1}^{\tau} B_{k-1}^{-1} \Delta G_k = X_0 - E^* G_\tau^B.$$

Следовательно,

$$x = X_0 \geq \sup\nolimits_{0\leq\tau\leq N} E^*[B_\tau^{-1} f_\tau + G_\tau^B],$$

и для минимальной хеджирующей стратегии выполнено:

$$x = \sup_{0\leq\tau\leq N} E^*[B_\tau^{-1} f_\tau + G_\tau^B]. \tag{5.17}$$

Покажем, что при *условии (5.17) существует минимальный Американский $(x,\ f,\ N)$ – хедж $\pi^* \in SF$*. Введём стохастическую последовательность

$$Y_n = \sup_{n\leq\tau\leq N} E^*(B_\tau^{-1} f_\tau + G_\tau^B|\mathcal{F}_n).$$

Используя метод обратной индукции в данном случае, получим, что

$$Y_N = B_N^{-1} f_N + G_N^B, \tag{5.18}$$

$$Y_n = \max\{B_n^{-1} f_n + G_n^B,\ E^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)\} \tag{5.19}$$

для $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$.

Из (5.18) – (5.19) вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &Y_N \geq B_N^{-1} f_N \\ &Y_n \geq E^*(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n),\ \ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Следовательно, построен супермартингал $Y = (Y_n)_{n\leq N}$, мажорирующий $B_n^{-1} f_n + G_n^B$, и момент остановки

$$\tau_n^* = \min\{n \leq k \leq N: Y_k = B_k^{-1} f_k + G_k^B\},\ \ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,$$

оптимален среди Марковских моментов $n \leq \tau \leq N$:

$$E^*\left(B_{\tau_n^*}^{-1} f_{\tau_n^*} + G_{\tau_n^*}^B \middle|\mathcal{F}_n\right) = \sup_{n\leq\tau\leq N} E^*(B_\tau^{-1} f_\tau + G_\tau^B|\mathcal{F}_n).$$

В частности, для $\tau^* = \tau_0^*$ из $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\ \Omega\}$ следует, что

$$Y_0 = \sup\nolimits_{0\leq\tau\leq N} E^*[B_\tau^{-1} f_\tau + G_\tau^B].$$

В соответствии с разложением Дуба для супермартингалов, $Y = (Y_n)_{n \le N}$ может быть представлен в следующей форме:

$$Y_n = M_n - A_n \text{ для } n = 0,\ 1,\ \dots,\ N. \tag{5.21}$$

Используя $x,\ \Delta G_n$ и φ_n^*, построим $(x,\ f,\ N)$ – хедж $\pi^* = (\beta_n^*,\ \gamma_n^*)_{n \le N} \in GF$, начальный капитал x которого определяется формулой (5.17) и такой, что мартингал $M_n^{\pi^*} = \frac{X_n^{\pi^*}}{B_n}$ равняется M_n. Откуда, при помощи (5.20) – (5.21), получим:

$$\begin{aligned} X_n^{\pi^*} &= B_n M_n^{\pi^*} - B_n G_n^B = B_n(Y_n + A_n) - B_n G_n^B \ge \\ &\ge B_n Y_n - B_n G_n^B = B_n \sup_{n \le \tau \le N} E^*(B_\tau^{-1} f_\tau + G_\tau^B | \mathcal{F}_n) - B_n G_n^B \\ &= \sup_{n \le \tau \le N} E^*(B_n B_\tau^{-1} f_\tau + B_n G_\tau^B | \mathcal{F}_n) - B_n G_n^B. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Из (5.22) с $\tau \equiv n$ следует, что $X_n^{\pi^*} \ge f_n$ для всех $n \le N$, и поэтому π является $(x,\ f,\ N)$ – хеджем. Его минимальность, а также рациональность момента остановки $\tau^* = \tau_0^*$ доказывается тем же способом, который был использован ранее.

Глава 6
О ДРУГИХ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТАХ И КРИТЕРИЯХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ

В главе 6 изучаются вопросы оценивания форвардных и фьючерсных контрактов, а также другие формы оптимального инвестирования, связанные со среднеквадратическим хеджированием и функциями полезности (см. [36], [25] и [6]).

6.1 Расчёты форвардных и фьючерсных контрактов

Для начала обсудим *форвардные контракты*. *Механизм* форвардного соглашения (форварда) допускает следующее качественное описание. Компания A планирует купить акции компании B в конце текущего года. Для того, чтобы застраховаться от возможного роста цен на акции компании B, компания A заключает соглашение о форвардной транзакции с B. В соответствии с этой транзакцией, A обязана купить акции B по фиксированной, заранее определённой *форвардной цене* F. Стоит подчеркнуть, что, в отличие от опционной сделки, для покупки форвардного контракта компания A *не платит* премию за контракт.

Среди прочих производных, или вторичных инструментов на финансовом рынке также упомянем следующие.

• *Варрант (warrant)* — это ценная бумага, выпускаемая фирмой в обмен на наличные средства, и дающая её владельцу право купить определённое количество акций фирмы по фиксированной стоимости в любой момент до условленной даты.

• *Конвертируемая облигация (convertible bond)* – это облигация (*долговое обязательство,* выпускаемое государством или некоторой частной фирмой с целью привлечения капитала, реструктурирования долга и т. д.), позволяющая её владельцу, в любой момент времени, предшествующий выкупу, обменять данную ценную бумагу на определённое количество акций компании-эмитента.

• *Своп (swap)* – это частное соглашение двух сторон об обмене потоками платежей, которые будут происходить в определённые моменты времени в будущем. Обмен происходит по заранее предусмотренной формуле.

• *Капс, колларс и флорс (caps, collars, floors)* – это производные ценные бумаги, позволяющие диверсифицировать различные виды кредитов, накладывая верхние, двухсторонние или нижние ограничения на величину плавающей процентной ставки.

• *Форвардный контракт*, или *форвард* (*forward*) – это двухстороннее соглашение, которое должно быть исполнено в виде продажи или покупки определённого актива (акции и т. д.) в заданный момент времени N в будущем по определённой цене F. Такая *цена поставки* называется *форвардной ценой*, а N называют датой исполнения контракта.

При заключении форвардного соглашения одна из его сторон занимает *длинную* позицию (покупатель), а другая – *короткую* позицию (продавец). Завершение транзакции (например, продажа акции) может произойти в любой момент времени $n = 0, \ \dots, N$, и корректно говорить об открытии длинной и короткой позиций, а соответствующие цены поставки обозначить $F_n, \ n = 0, 1, \ \dots, N$, где $F_0 = F$ и $F_N = S_N$.

Ключевая *вычислительная* задача для форвардных соглашений заключается в исследовании структуры последовательности форвардных цен $(F_n)_{n=0,1,\dots,N}$, а также их связи с ценами базовых активов B и S на рассматриваемом рынке, определённом в данном случае с помощью (2.1).

В момент заключения и исполнения контракта размеры платежей равняются, соответственно, нулю (соглашение не предполагает каких-либо платежей на момент подписания) и $S_N - F_n, \ n = 0, 1, \ \dots, N$. Таким образом, с данным контрактом естественно ассоциировать платёжное обязательство с нулевой начальной стоимостью начиная с момента времени $n = 0, 1, \ \dots, N$. В этом отношении введём G – финансируемую стратегию с приращениями, удовлетворяющими условиям:

$$\Delta G_k^{(n)} = \Delta G_k = \begin{cases} 0, & n \le k < N, \\ S_N - F_n, & k = N. \end{cases}$$

В соответствии с формулой (4.20), значение капитала $X_n, \ n = 0, 1, \ \dots, N$, данной стратегии равняется

$$X_n = E^*\left(B_n \sum_{k=n+1}^{N} B_{k-1}^{-1} \Delta G_k \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right) = E^*\left(B_n B_{N-1}^{-1}(S_N - F_n) \middle| \mathcal{F}_n\right) = 0. \qquad (6.1)$$

Поскольку последовательность $(B_n^{-1} S_n)_{n=0,1,\dots,N}$ является P^* – мартингалом, получим из (6.1) для $n = 0, \ \dots, N$, что

$$\begin{aligned} F_n &= B_{N-1} B_n^{-1} E^*\left(B_n B_{N-1}^{-1} S_N \middle| \mathcal{F}_n\right) = B_{N-1} E^*\left((1+r) B_N^{-1} S_N \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= B_N B_n^{-1} S_n. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

В частности, (6.2) приводит к равенству:

$$F = F_0 = B_N B_0^{-1} S_0 = B_N 1 S_0 = B_N E^* S_N B_N^{-1} = E^* S_N. \qquad (6.3)$$

Формулы (6.2) – (6.3) описывают искомую структуру форвардных цен $(F_n)_{n=0,\dots,N}$.

Другим инструментом для осуществления транзакций в будущем являются *фьючерсные контракты*, или *фьючерсы*. Данный тип контракта представляет собой *соглашение, зарегистрированное на бирже*, о проведении двухсторонней торговой операции с некоторым активом (например, покупка акций) в определённый момент времени N со стоимостью поставки для указанного актива равной F^*. Для обеих сторон контракта нет необходимости знать друг друга, поскольку все операции по перерасчёту цен в соглашении осуществляются *клиринговой палатой* (*clearing house)* или отделом биржи. Последнее обстоятельство демонстрирует ключевое различие в структуре последовательности *фьючерсных цен* $(F_n^*)_{n=0,\ldots,N}$. Опишем механизм операций перерасчёта на так называемом *маржинальном счёте*. На момент открытия позиции стороны размещают *начальную маржу*, размер которой обычно составляет 10% от общей суммы сделки. В конце каждого торгового дня позиция клиента перерассчитывается на основании *квотированной стоимости*, установленной клиринговой палатой. Разница между рыночной стоимостью и предшествующей ценой поставки называется *вариационной маржой*, которая перечисляется со счёта «проигравшего» участника на счёт «победившего». Обналичивание фьючерсного контракта означает либо поставку актива, либо закрытие (длинной или короткой) позиции. Более чем 90% фьючерсов обналичиваются до даты поставки.

В соответствии с описанным механизмом, получаем следующую последовательность действий:

$\boldsymbol{n = 0}$**:** стороны договариваются о сделке с будущими транзакциями (по покупке акции) с ценой поставки

$F^* = F_0^*$;

$\boldsymbol{n = i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1}$**:** клиринговая палата анонсирует квотированную цену F_i^*.

• Если $F_i^* > F_{i-1}^*$, тогда продавец акции получает убыток по позиции и размещает вариационную маржу $F_i^* - F_{i-1}^*$ на своём маржинальном счёте.

• Если $F_i^* < F_{i-1}^*$, тогда, напротив, покупатель размещает вариационную маржу на своём счёте.

$\mathbf{n} = \boldsymbol{N}$**:** покупатель платит F_{N-1}^* за акцию, а продавец поставляет её.

Рассмотрим подробнее структуру фьючерсных цен $(F_n^*)_{n=0,1,\ldots,N}$. Будем использовать метод обратной индукции и предполагать, что уровень маржи равен $\alpha \in (0,\ 1)$.

$$f = S_N - F_{N-1}^* + \alpha F_{N-1}^*(1+r) \text{ и } \tilde{f} = F_{N-1}^* - S_N + \alpha F_{N-1}^*(1+r),$$

Рассмотрим одношаговые опционы с функцией выплаты
которая связана с фьючерсным контрактом на покупку и продажу актива S, соответственно.

Применяя теорию расчёта опционов в модели (2.1), приходим к следующим справедливым ценам опционов:

$$\mathbb{C}_{N-1} = E^*(fB_{N-1}B_N|\mathcal{F}_{N-1}) \text{ и}$$
$$\tilde{\mathbb{C}}_{N-1} = E^*\big(\tilde{f}B_{N-1}B_N\big|\mathcal{F}_{N-1}\big).$$

Используя вид платёжного обязательства f, получим

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{N-1} &= E^*(B_N^{-1}S_N|\mathcal{F}_{N-1})B_{N-1} - (1+r)^{-1}F_{N-1}^* + \alpha F_{N-1}^* \\ &= (1+r)^{-1}[E^*(S_N|\mathcal{F}_{N-1}) - F_{N-1}^*] + \alpha F_{N-1}^*.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Поскольку на заданном рынке отсутствует арбитраж, находим, что $\alpha F_{N-1}^* \geq \mathbb{C}_{N-1}$, и тогда по формуле (6.4) получим:

$$F_{N-1}^* \geq E^*(S_N|\mathcal{F}_{N-1}). \tag{6.5}$$

Применяя аналогичную аргументацию к $\tilde{f}$, получим $\tilde{\mathbb{C}}_{N-1} \geq \alpha F_{N-1}^*$ и

$$F_{N-1}^* \leq E^*(S_N|\mathcal{F}_{N-1}). \tag{6.6}$$

Объединяя результаты (6.5) – (6.6) и принимая во внимание, что $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ является P^* – мартингалом, приходим к следующему соотношению:

$$F^*_{N-1} = E^*(S_N|\mathcal{F}_{N-1}) = E^*(S_N B_N^{-1} B_N|\mathcal{F}_{N-1}) = \frac{S_{N-1}}{B_{N-1}} B_N = (1+r)S_{N-1}.$$

Продолжая данный процесс, получаем равенства:

$$F^*_n = (1+r)^{N-n} S_n, \;\; n = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1. \tag{6.7}$$

Понятно, что

$$F^*_N = S_N \text{ и } F^*_0 = B_N S_0 = B_N E^* \frac{S_N}{B_N} = E^* S_N. \tag{6.8}$$

Теперь резюмируем заключения (6.7) – (6.8) о структуре цен (F_n) и (F^*_n) в виде теоремы.

Теорема 6.1. Для форвардных и фьючерсных контрактов на рынке (2.1) форвардные и фьючерсные цены удовлетворяют соотношениям (6.2) – (6.3) и (6.7) – (6.8). В частности, стоимости поставки F_0 и F^*_0 совпадают.

6.2. Конструкция оптимальных инвестиционных стратегий через минимизацию L_2-расстояния и максимизацию усреднённой функции полезности

Исследуем другие типы инвестиционной деятельности на финансовом рынке (2.1), отличные от опционов, форвардов и фьючерсов.

Первый тип относится к возможности достижения «инвестиционной цели f» в смысле метрики пространства L_2.

Второй тип инвестиционной деятельности затрагивает задачу *максимизации функции полезности*.

Допустим, инвестор на рынке (2.1) стремится к созданию капитала X^π_N, максимально близкого к некоторой инвестиционной цели f в момент времени N. Начиная с некоторого исходного капитала $X_0 = x > 0$, он формирует самофинансируемый портфель $\pi = (\beta,\, \gamma)$ стоимость которого к моменту времени N равняется

$$X^\pi_N = B_N\left[x + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k B_k^{-1} S_{k-1}(\rho_k - r)\right]. \tag{6.9}$$

Стратегия $\hat{\pi}$ с начальным капиталом x называется *оптимальной,* если имеет место равенство:

$$E\left(X^{\hat{\pi}}_N - f\right)^2 = \inf_\pi E(X^\pi_N - f)^2, \tag{6.10}$$

где инфимум рассчитывается по множеству всех самофинансируемых стратегий с начальным капиталом x, а f определяется поведением рынка на промежутке до момента времени N (f – случайная величина на стохастическом базисе $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F}_n),\, P)$).

Задача оптимального инвестирования (6.10) отличается от проблемы (совершенного) хеджирования присутствием только одной стороны – инвестора с фиксированным начальным капиталом и заданной инвестиционной целью.

Чтобы найти подходящее решение задачи (6.10), обозначим

$$Y_N^\pi = B_N^{-1} X_N^\pi - x \text{ и } f_N^B = B_N^{-1} f - x.$$

Понятно, что для $\hat{\pi}$ выполнено равенство

$$E\left(Y_N^{\hat{\pi}} - f_N^B\right)^2 = \inf_\pi E(Y_N^\pi - f_N^B)^2, \tag{6.11}$$

которое определяет задачу, эквивалентную (6.10).

Из (6.9) следует, что $(Y_n^\pi)_{n=0,\,\dots,\,N}$ является P^* – мартингалом, а значит,

$$E^* Y_n^\pi = 0 \text{ для всех } n \le N. \tag{6.12}$$

Обозначим $\Phi_0 = \{\varphi\colon \mathrm{E}^*\varphi = 0\}$ и $\hat{\varphi} = f_N^B - Z_N^* \frac{E^* f_N^B}{\|Z_N^*\|^2}$, $\|Z_N^*\|^2 = E(Z_N^*)^2$.

Введённые переменные удовлетворяют соотношению

$$E(\hat{\varphi} - f_N^B)^2 = \inf_{\varphi \in \Phi_0} E(\varphi - f_N^B)^2. \tag{6.13}$$

В самом деле, пусть $\tilde{\varphi} \in \Phi_0$ такое, что

$$E(\tilde{\varphi} - f_N^B)^2 < E(\hat{\varphi} - f_N^B)^2.$$

Тогда $\hat{\varphi} = \tilde{\varphi} - \xi$ и

$$E(\tilde{\varphi} - f_N^B)^2 = E\left(\xi - Z_N^* \frac{E^* f_N^B}{\|Z_N^*\|^2}\right)^2 = E\xi^2 + (E^* f_N^B)^2,$$

поскольку ${}^*\xi = E Z_N^* \xi = E(\tilde{\varphi} Z_N^* - \hat{\varphi} Z_N^*) = E^*\tilde{\varphi} - E^*\hat{\varphi} = 0.$

В то же время,

$$E(\hat{\varphi} - f_N^B)^2 = (E^* f_N^B)^2 < (E^* f_N^B)^2 + E\xi^2 = E(\tilde{\varphi} - f_N^B)^2,$$

откуда вытекает (6.13).

Вследствие (6.12), $Y_N^\pi \in \Phi_0$ для любой $\pi \in SF$. Далее, для произвольного $\varphi \in \Phi_0$ рассмотрим последовательность $Y_n = E^*(\varphi | \mathcal{F}_n)$, которая является P^* – мартингалом. Следовательно, эта последовательность может быть представлена в виде

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k (\rho_k - r), \tag{6.14}$$

где $(\varphi_k)_{k \le N}$ – предсказуемая последовательность.

Используя (6.14), построим соответствующую инвестиционную стратегию:

$$\gamma_k = B_k S_{k-1}^{-1} \varphi_k, \quad \beta_k = \frac{X_{k-1}^\pi - \gamma_k S_{k-1}}{B_{k-1}}. \tag{6.15}$$

Полагая $\varphi = \hat{\varphi}$, получим портфель $\hat{\pi}$, удовлетворяющий (6.15) и являющийся оптимальным для задачи (6.11) ввиду соотношения (6.13).

Как было отмечено ранее, *второй тип* инвестиционной деятельности связан с хорошо известной экономической концепцией «полезности», в основе которой лежит понятие *функции полезности* $U: (0, \infty) \to R^1$ – непрерывно дифференцируемой, неубывающей, вогнутой функции, удовлетворяющей условиям:

$$U'(0+) = \lim_{x\to 0} U'(x) = \infty, \; U'(\infty) = \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

Сформулируем новый критерий сравнения инвестиционных стратегий в терминах функций полезности.

Стремление инвестора максимизировать непосредственно $U(X_N^\pi)$ может привести к неоправданным усложнениям задачи, поскольку капитал X_N^π стратегии π является случайной величиной. Поэтому естественно сравнивать средние полезности и считать, что стратегия π' выгоднее стратегии π, если выполнено соотношение $EU(X_N^{\pi'}) \geq EU(X_N^\pi)$. Ниже будет описана сущность этого подхода, называемого теорией оптимального инвестирования, на примере *логарифмической функции полезности*.

В общем случае, для заданной функции полезности U, рассмотрим самофинансируемую стратегию π^* такую, что

$$\max_{\pi\in SF} EU\big(X_N^\pi(x)\big) = EU\left(X_N^{\pi^*}(x)\right), \tag{6.16}$$

где $X_N^\pi(x)$ – терминальный капитал стратегии $\pi \in SF$ и $X_0^\pi(x) = x > 0$.

Используя $U(x) = \ln x$ в качестве функции полезности в задаче (6.16), можно переписать $\ln X_N^\pi(x)$ в следующем виде:

$$\ln X_N^\pi(x) = \ln \frac{X_N^\pi(x)}{B} + \ln B_N.$$

Таким образом, оптимизационная задача (6.16) сводится к нахождению максимального $E\ln\left(\frac{X_N^\pi(x)}{B_N}\right)$ среди всех $\pi \in SF$.

Положим $Y_n(x) = B_N^{-1} X_N^\pi(x)$ и заметим, что $Y(x) = \big(Y_n(x)\big)_{n=0,\,1,\,\dots,\,N}$ является положительным P^* – мартингалом на рынке (2.1). Следовательно, задача (6.16) может быть переформулирована в виде задачи по нахождению положительного P^* – мартингала $Y^*(x) = (Y_n^*)_{n=0,\,\dots,\,N}$, $Y_0^* = x$ такого, что

$$\max_Y E\ln Y_N\,(x) = E\ln Y_N^*(x), \tag{6.17}$$

где максимум берётся по множеству всех положительных P^* – мартингалов с начальным капиталом x.

Будем строить искомый мартингал Y^* в следующем виде:

$$Y_0^*(x) = x, \; Y_N^*(x) = x \cdot (Z_N^*)^{-1}, \; Y_n^*(x) = E^*(Y_N^*(x)|\mathcal{F}_n), \; n \leq N,$$

где Z_N^* плотность P^* относительно P.

Для любого другого P^* – мартингала $Y(x)$, используя разложение логарифмической функции в ряд Тейлора, получим

$$
\begin{aligned}
E\ln Y_N(x) &= E[\ln x\cdot(Z_N^*)^{-1} + (\ln Y_N(x) - \ln x(Z_N^*)^{-1})]\\
&\le E\ln x(Z_N^*)^{-1} + E\left[\frac{Z_N^*}{x}(Y_N(x) - x(Z_N^*)^{-1})\right]\\
&= E\ln x(Z_N^*)^{-1} + x^{-1}E[Z_N^*(Y_N(x) - x(Z_N^*)^{-1})]\\
&= E\ln x(Z_N^*)^{-1} + x^{-1}[E^*Y_N(x) - Ex]\\
&= E\ln x(Z_N^*)^{-1} + x^{-1}[x - x] = E\ln x(Z_N^*)^{-1} = E\ln Y_N^*(x).
\end{aligned}
$$

Как следует из предыдущего соотношения, $Y^*(x)$ является оптимальным мартингалом в задаче (6.17). Чтобы получить соответствующее решение для задачи (6.16), используем мартингальную характеризацию самофинансируемой стратегии, в соответствии с которой существует $\pi^* = (\pi_n^*)_{n\le N} = (\beta_n^*,\gamma_n^*)_{n\le N} \in SF$ такая, что $Y_n^*(x) = B_n^{-1}X_n^{\pi^*}(x)$. Для нахождения этого портфеля π^*, рассмотрим величину

$$\alpha_n^* = \gamma_n^*\frac{S_{n-1}}{X_{n-1}^{\pi}},$$

называемую *пропорцией* рискового актива в капитале портфеля.

Перепишем $\Delta\frac{X_n^{\pi^*}(x)}{B}$ в терминах α_n^* и (3.7):

$$
\begin{aligned}
\Delta\frac{X_n^{\pi^*}(x)}{B_n} &= B_n\gamma_n^*S_{n-1}(\rho_n - r) = \frac{X_{n-1}^{\pi^*}(x)}{B_{n-1}}\left(\gamma_n^*\cdot\frac{S_{n-1}}{X_{n-1}^{\pi^*}}\right)(1+r)^{-1}(\rho_n - r) =\\
&= \left(\frac{X_{n-1}^{\pi^*}}{B_{n-1}}\right)\cdot\frac{\alpha_n^*}{1+r}\cdot(\rho_n - r).
\end{aligned}
$$

Далее, используя свойства стохастических экспонент, получим, что

$$\frac{X_N^{\pi^*}(x)}{B_N} = x\prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{\alpha_k^*}{1+r}(\rho_k - r)\right). \tag{6.18}$$

С другой стороны, для этого отношения справедливо другое представление

$$\frac{X_N^{\pi^*}(x)}{B_N} = \frac{x}{Z_N^*} = x\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2}(\rho_k - \mu)\right)^{-1}. \tag{6.19}$$

Объединяя (6.18) – (6.19), приходим к следующему уравнению для α_n^*:

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{\alpha_k^*}{1+r}(\rho_k - r)\right)\times\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2}(\rho_k - \mu)\right) = 1.$$

Для $N = 1$ предыдущее уравнение упрощается до вида

$$\left(1 + \tfrac{\alpha_1^*}{1+r}(\rho_1 - r)\right)\times\left(1 - \tfrac{\mu - r}{\sigma^2}(\rho_1 - \mu)\right) = 1.$$

На множестве $\{\omega : \rho_1(\omega) = b\}$ имеем

$$\left(1 + \frac{\alpha_1^*}{1+r}(b - r)\right)\times\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2}(b - \mu)\right) = 1,$$

что приводит к равенству

$$\alpha_1^* = \frac{(1+r)(\mu - r)}{(r-a)(b-r)}. \qquad (6.20)$$

Несложно показать, что на множестве $\{\omega: \rho_1(\omega) = a\}$ получаем абсолютно такое же выражение для α_1^*. Далее предположим, что $\alpha_1^* = \cdots = \alpha_{N-1}^*$, тогда по индукции также получаем формулу (6.20) для α_N^*.

Пример 6.1. Рассмотрим одношаговую модель (B, S) – рынка с годовой процентной ставкой $r = 0.2$ и доходностью рискового актива $S\,(S_0 = 100)$, равной

$$\rho_1 = \begin{cases} 0.5 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ -0.3 & \text{с вероятностью } 0.6. \end{cases}$$

Тогда средняя доходность акции составляет:

$$\mu = E\rho_1 = 0.5 \cdot 0.4 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.02,$$

и следовательно, оптимальная пропорция рискового капитала равна

$$\alpha^* = \frac{1.2 \cdot (-0.18)}{0.5 \cdot 0.3} \cong -1.5.$$

Отрицательное значение пропорции является показателем того, что инвестору следует разместить средства на банковском счёте.

Рассматривая опцион call с $f_1 = (S_1 - 100)^+ = \begin{cases} 50 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ 0 & \text{с вероятностью } 0.6 \end{cases}$ нетрудно рассчитать его справедливую стоимость, которая равняется 26. Рассчитаем терминальный капитал оптимальной инвестиционной стратегии со значением пропорции $\alpha^* = -1.5$ и начальным капиталом $x = x_0^{\alpha^*} = 26$:

$$X_1^{\alpha^*} = X_0^{\alpha^*} + \Delta X_1^{\alpha^*} = X_0^{\alpha^*} + \left(rX_0^{\alpha^*} + \alpha^* X_0^{\alpha^*}(\rho_1 - r)\right)\Big|_{X_0^{\alpha^*}=26} =$$

$$= \begin{cases} 19.5 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ 50.7 & \text{с вероятностью } 0.6 \end{cases} \neq \begin{cases} 50 & \text{с вероятностью } 0.4 \\ 0 & \text{с вероятностью } 0.6 \end{cases}.$$

Таким образом, оптимальная инвестиционная стратегия отличается от минимального хеджа. Следовательно, эти два типа инвестирования приводят к *разным* решениям.

Глава 7
ЗАМЕНА ДИСКОНТИРУЮЩЕГО ПОРТФЕЛЯ И ХЕДЖИРОВАНИЕ ГИБКИХ СТРАХОВЫХ КОНТРАКТОВ

В этой главе теория среднеквадратического хеджирования развивается с помощью другого подхода, основанного на выборе другого дисконтирующего фактора (вместо банковского счёта), называемого дисконтирующим портфелем и позволяющего производить все вычисления относительно исходной вероятностной меры. Даётся применение этой методологии к расчёту гибких страховых контрактов (см. [21], [25] и [8]).

7.1 Понятие о дисконтирующем портфеле и его свойствах

Расчёт и хеджирование платёжных обязательств, представленные в предыдущих главах, были осуществлены с помощью популярной и хорошо развитой мартингальной техники. Этот метод предполагает нахождение эквивалентной мартингальной меры, такой, что дисконтированные стоимости активов являются мартингалами относительно этой меры. В этой главе, вместо перехода к новой вероятностной мере, будем осуществлять расчёт и хеджирование опционов путём определения дисконтирующего портфеля такого, что дисконтированный с учётом него процесс цен на финансовом рынке становится мартингалом относительно *исходной* вероятностной меры.

Рассмотрим финансовый рынок, состоящий из одной единицы рискового актива – акции, и одной единицы безрискового актива – банковского счёта (или облигации). Процессы стоимости акции и облигации обозначим $S = (S_n)_{n\geq 0}$ и $B = (B_n)_{n\geq 0}$ соответственно. Если инвестор удерживает одну акцию и одну облигацию в промежутке от момента времени n до момента $n+1$, то предположим, что их стоимости изменятся с S_n и B_n до

$$S_{n+1} = S_n(1+\rho_{n+1}),\ \ S_0 > 0, \tag{7.1}$$

$$B_{n+1} = B_n(1+r),\qquad B_0 > 0, \tag{7.2}$$

где ρ_{n+1} – доходность акции на протяжении временного промежутка $(n,\ n+1]$, и её значение неизвестно до наступления момента $n+1$; r – безрисковая процентная ставка в течение временного промежутка $(n,\ n+1]$, и её значение заранее известно.

Процессы стоимости S и B определены на стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ P)$ и согласованы с фильтрацией $\mathbb{F}$. Пара $\pi_n = (\xi_n,\ \eta_n)$

где ξ_n обозначает количество акций, а η_n – количество единиц банковского счёта, называется *инвестиционной стратегией* (*портфелем*), удерживаемой в момент времени n. Стоимость (капитал) портфеля инвестора в момент времени n будем обозначать V_n. Процесс стоимости $V = (V_n)_{n\geq 0}$, описывающий эволюцию капитала инвестора, зададим в следующем виде:

$$V_n = \xi_n S_n + \eta_n B_n, \tag{7.3}$$

$$\Delta V_n = \xi_{n-1}\Delta S_n + \eta_{n-1}\Delta B_n + \Delta G_n, \tag{7.4}$$

где $\Delta G_n = G_n - G_{n-1}$ дополнительные инвестиции (потребление) в течение временного промежутка $(n-1,\, n]$.

Если в произвольный момент времени n изменение стоимости портфеля вызвано только лишь доходом от осуществлённых вложений, то есть отсутствует необходимость дополнительного инвестирования, то такой портфель называется самофинансируемым, иначе говоря, $\Delta G_n = 0$ и $V_n = \xi_{n-1}\Delta S_n + \eta_{n-1}\Delta B_n$.

Рассмотрим платёжное обязательство Европейского типа с единственной выплатой, $f(S_N)$, в момент исполнения N. Расчёт такого платёжного обязательства часто подразумевает использование банковского счёта B_n в качестве дисконтирующего портфеля и нахождение новой вероятностной меры P^*, эквивалентной P, относительно которой дисконтированная стоимость актива является мартингалом. Если такая мера существует, то справедливой стоимостью платёжного обязательства является математическое ожидание от его дисконтированной выплаты

$$C_N = E^*\left(\tfrac{f(S_N)}{B_N}\right),\ \ B_0 = 1, \tag{7.5}$$

а капитал самофинансируемой стратегии, такой, что $V_N = f(S_N)$ есть

$$V_n = B_n E^*\left(\frac{f(S_N)}{B_N}\middle|\mathcal{F}_n\right).$$

Другими словами, процесс дисконтированного капитала $\left(\frac{V_n}{B_n}\right)_{n\geq 0}$ является мартингалом относительно P^*.

Как известно, дисконтирование посредством банковского счёта позволяет сравнивать стоимости активов, измеренные в разные моменты времени. Возникает вопрос – возможно ли использовать другой, отличный от банковского счёта, дисконтирующий портфель для осуществления указанной процедуры? С экономической точки зрения, произвольная самофинансируемая стратегия со строго положительным капиталом может использоваться в качестве дисконтирующего портфеля. Таким образом, если мы найдём дисконтирующий портфель с капиталом $X = (X_n)_{n\geq 0}$, такой, что процесс $\frac{V}{X} = \left(\frac{V_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ является мартингалом относительно исходной меры P, то цена платёжного обязательства рассчитывается в следующем виде

$$C = X_0 E\left(\frac{f(S_N)}{X_N}\right),$$

со значением капитала: $$V_n = X_n E\left(\frac{f(S_N)}{X_N}\middle|\mathcal{F}_n\right).$$

Определение 7.1. Самофинансируемая стратегия $\varphi = (\gamma, \beta)$ со строго положительным капиталом $X = (X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = 1$ называется *P-дисконтирующим портфелем*, или просто *дисконтирующим портфелем*, если для любой самофинансируемой стратегии $\pi = (\xi, \eta)$ её процесс дисконтированного капитала $\frac{V}{X} = \left(\frac{V_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ является P-мартингалом (или, эквивалентно, процессы дисконтированной стоимости $\frac{S}{X} = \left(\frac{S_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ и $\frac{B}{X} = \left(\frac{B_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ – P-мартингалы).

Нахождение P-дисконтирующего портфеля позволяет работать исключительно с исходной, или «физической», вероятностной мерой, описывающей природу процесса. Более того, если такой дисконтирующий портфель существует, то он является единственным.

Лемма 7.1. Если P-дисконтирующий портфель $\varphi = (\gamma, \beta)$ с начальным капиталом $X_0 = 1$ существует, то он является единственным.

Доказательство. Пусть $\varphi' = (\gamma', \beta')$ некоторый другой P-дисконтирующий портфель с капиталом $X' = (X'_n)_{n\geq 0}$ и $X'_0 = 1$. Тогда из определения 7.1, $\left(\frac{X_n}{X'_n}\right)_{n\geq 0}$ и $\left(\frac{X'_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ являются P-мартингалами. Следовательно, если $Y_n \coloneqq \frac{X_n}{X'_n}$, то $E(Y_n) = E\ \frac{1}{Y_n} = 1$. Поскольку $\varphi(y) = \frac{1}{y}$, $y > 0$, строго выпуклая вниз функция, из неравенства Йенсена следует, что $Y_n = E(Y_n) = 1$.

Обозначим $k_n = \frac{\gamma_n S_n}{X_n}$ пропорцию рискового капитала в P-дисконтирующем портфеле φ в момент времени n. Тогда из уравнений (7.1) и (7.2) получим:

$$\begin{aligned}\Delta X_n &= \gamma_{n-1}\Delta S_n + \beta_{n-1}\Delta B_n = \\ &= X_{n-1}k_{n-1}\rho_n + X_{n-1}(1 - k_{n-1})r = \\ &= X_{n-1}\big(r + k_{n-1}(\rho_n - r)\big),\end{aligned}$$

и, значит,

$$X_n = X_{n-1}\big(1 + r + k_{n-1}(\rho_n - r)\big). \tag{7.6}$$

Таким образом, капитал $(X_n)_{n\geq 0}$ (с $X_0 = 1$) P-дисконтирующего портфеля задаётся последовательностью $(k_n)_{n\geq 0}$, что демонстрируется в следующей лемме.

Лемма 7.2. Дисконтирующий портфель $\varphi = (\gamma, \beta)$ со строго положительным капиталом $X = (X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = 1$, существует тогда и только тогда, когда существует $\mathbb{F}$-согласованная последовательность $k = (k_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{\gamma_n S_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ такая, что

(1) $1 + r + k_n(\rho_{n+1} - r_n) > 0$ ($P -$ п. н.);

(2) Процесс $M = (M_n)_{n\geq 0}$, определённый в виде

$$M_0 = 0,\ M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k - r}{1 + r + k_{k-1}(\rho_k - r)}, \tag{7.7}$$

является P-мартингалом.

Доказательство.

Необходимость. Рассмотрим P-дисконтирующий портфель $\varphi = (\gamma, \beta)$ со строго положительным капиталом $X = (X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = 1$, и долей рискового капитала $k_n = \frac{\gamma_n S_n}{X_n}$. Поскольку $X_n > 0,\ n \geq 0$, часть (1) леммы следует из уравнения (7.6).

Пусть $\pi = (\xi, \eta)$ – произвольный самофинансируемый портфель с капиталом $V = (V_n)_{n\geq 0}$ и пропорцией $\alpha_n = \frac{\xi_n S_n}{V_n}$. Тогда имеем, что

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V_n}{X_n} &= \xi_{n-1}\Delta\frac{S_n}{X_n} + \eta_{n-1}\Delta\frac{B_n}{X_n}\\ &= \xi_{n-1}\Delta\frac{S_n}{X_n} + \frac{V_{n-1} - \xi_{n-1}S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\frac{B_n}{X_n}\\ &= \frac{V_{n-1}}{X_{n-1}}\left[\frac{X_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\frac{B_n}{X_n} + \alpha_{n-1}\left(\frac{X_{n-1}}{S_{n-1}}\frac{S_n}{X_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}}\frac{B_n}{X_n}\right)\right]\\ &= \frac{V_{n-1}}{X_{n-1}}(\alpha_{n-1} - k_{n-1})\Delta M_n,\end{aligned} \tag{7.8}$$

где

$$\Delta M_n = \frac{X_{n-1}}{S_{n-1}}\frac{S_n}{X_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}}\frac{B_n}{X_n} = \frac{\rho_n - r}{1 + r + k_{n-1}(\rho_n - r)}. \tag{7.9}$$

Второе равенство в (7.9) следует из (7.6), (7.1) и (7.2). Последовательности $\left(\frac{S_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ и $\left(\frac{B_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ являются мартингалами по определению P-дисконтирующего портфеля, и, следовательно, $(\Delta M_n)_{n\geq 1}$ – мартингал-разность.

Достаточность. Введём $\mathbb{F}$-согласованную последовательность $k = (k_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{\gamma_n S_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ такую, что выполнены условия (1) и (2) теоремы.

Тогда $X = (X_n)_{n\geq 0}$ с $X_0 = 1$ и $X_n = X_{n-1}\big(1 + r + k_{n-1}(\rho_n - r)\big)$ является строго положительной $\mathbb{F}$-согласованной последовательностью.

Из определения самофинансируемого портфеля и представления

$$\Delta X_n = X_{n-1}k_{n-1}\rho_n + X_{n-1}r(1 - k_{n-1})$$

следует, что X – капитал самофинансируемой стратегии $\varphi = (\gamma, \beta)$ с $\gamma_n = k_n\frac{X_n}{S_n}$ и $\beta_n = (1 - k_n)\frac{X_n}{B_n}$.

Наконец, из условия (2) и представления (7.8) следует, что для любого самофинансируемого портфеля $\pi = (\xi, \eta)$ с капиталом $V = (V_n)_{n\geq 0}$ последовательность $\frac{V}{X} = \left(\frac{V_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ является P-мартингалом. Следовательно, $\varphi = (\gamma, \beta)$ – P-дисконтирующий портфель.

Таким образом, существование последовательности $(k_n)_{n\geq 0}$ определяет условия для существования P-дисконтирующего портфеля. Далее будем предполагать, что P-дисконтирующий портфель с капиталом

$X = (X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = 1$ существует. Чтобы проиллюстрировать данную идею, рассмотрим следующий пример для двух-шагового биномиального рынка.

Пример 7.1. Предположим, эволюция цен базовых активов задана уравнениями (7.1) и (7.2), где $B_0 = \$1$, $S_0 = \$100$, процентной ставкой $r = 0.12$ и доходностью акции ρ_n, принимающей два значения $b = 0.25$ или $a = -0.1$. Пусть вероятность движения стоимости акции «вверх», p_n, равняется 0.4, тогда вероятность движения «вниз» составляет 0.6. Вычислим стоимость Европейского опциона call с функцией выплаты $f(S_2) = \max(S_2 - K,\ 0)$, и ценой поставки $K = \$110$.

Рисунок 7.1 иллюстрирует двух-шаговое биномиальное дерево для эволюции стоимости акции S. Несложно вычислить цену платёжного обязательства на момент исполнения. Риск-нейтральная вероятность рассчитывается по формуле $p^* = \frac{(r-a)}{(b-a)} = 0.6286$, а цена опциона call в данном случае выражается как дисконтированное математическое ожидание относительно новой вероятности: $C = E^*\left[\frac{f(S_2)}{(1+r)^2}\right] = \$15.50$ Стоимость в момент времени $n = 1$ равняется либо $\$26.79$, либо $\$1.40$. Данные цены показаны на Рисунке 7.1 в скобках.

На Рисунке 7.1 в каждом узле верхнее число обозначает стоимость акции, среднее число в скобках – цену платёжного обязательства, а нижнее, в квадратных скобках, – капитал P- дисконтирующего портфеля.

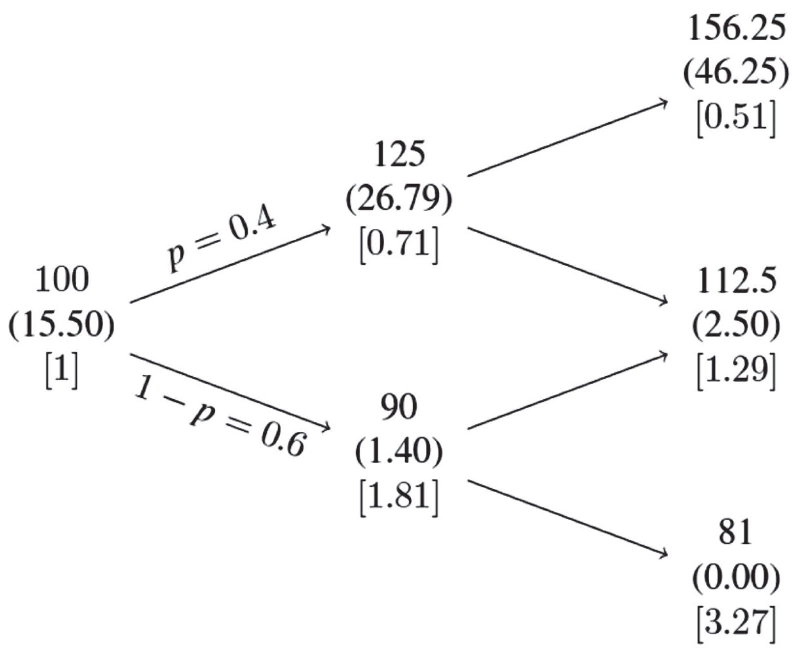


Рисунок 7.1 – Биномиальное дерево стоимости акции, цены опциона call и капитала P-дисконтирующего портфеля

Для решения аналогичной задачи без перехода к новой вероятностной мере зададим дисконтирующий портфель X, как было описано в Лемме 7.2. В данной биномиальной модели пропорция рискового капитала постоянна $k_n = k$ для всех n и выражена формулой

$$k = \frac{(1+r)(\mu - r)}{(b-r)(r-a)}, \text{ где } \mu = E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}),$$

и, следовательно, $k = -3.13$. Дальнейшие расчёты приводят к $X_0 = 1$; $X_1 = 0.71$ в случае движения «вверх», или $X_1 = 1.81$ в случае движения «вниз»; $X_2 = 0.51$ для верхнего узла, 1.29 для среднего и 3.27 для нижнего (указаны в квадратных скобках на Рисунке 7.1). Далее, цена в начальный момент времени $n = 0$ равняется $C = E\left[\frac{f(S_2)}{X_2}\right] = \$15.50$ а в момент времени $n = 1$ равняется $\$26.79$ или $\$1.40$.

Как и ожидалось, оба метода приводят к *одинаковому* результату.

В случае неполного рынка реплицирующие самофинансируемые стратегии могут и не существовать. Примеры неполных рынков включают модели с различными портфельными ограничениями, рынки с «трением», а также рынки, для которых платёжные обязательства включают дополнительные источники (например, риск смертности). В последнем случае платёжное обязательство не может быть идеально захеджировано посредством операций на финансовом рынке. Одним из возможных подходов для решения данной задачи является рассмотрение *несамофинансируемых стратегий*, для которых допускается наличие дополнительных притоков и оттоков капитала. В случае, когда допустимо добавлять или снимать средства и невозможно найти самофинансируемую реплицирующую стратегию, желательно построить портфель, обладающий свойством $E\left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$. Такие стратегии называются самофинансируемыми в среднем.

Определение 7.2. Стратегия $\pi = (\xi, \eta)$ с процессом дополнительного инвестирования $G = (G_n)_{n\geq 0}$ (G-финансируемая) называется *G-финансируемой в среднем*, если

$$E\left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 0,$$

то есть $\left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\right)_{n\geq 1}$ является мартингал-разностью.

Лемма 7.3. Стратегия $\pi = (\xi, \eta)$ с капиталом $V = (V_n)_{n\geq 0}$ является G-финансируемой в среднем тогда и только тогда, когда $\frac{V}{X} = \left(\frac{V_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ – P-мартингал.

Доказательство.

Необходимость. Пусть портфель $\pi = (\xi, \eta)$ с капиталом $V = (V_n)_{n\geq 0}$ – G -финансируемый в среднем. Тогда по аналогии с (3.4) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\frac{V_n}{X_n} &= \xi_{n-1}\Delta\frac{S_n}{X_n} + \eta_{n-1}\Delta\frac{B_n}{X_n} + \frac{\Delta G_n}{X_n} \\ &= \frac{V_{n-1}}{X_{n-1}}(\alpha_{n-1} - k_{n-1})\Delta M_n + \frac{\Delta G_n}{X_n}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

где M_n определен в (7.7).

Согласно Лемме 7.2 и Определению 7.2, последовательность $\left(\Delta \frac{V_n}{X_n}\right)_{n\geq 1}$ является мартингал-разностью.

Достаточность. Допустим $\frac{V}{X} = \left(\frac{V_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ – мартингал. Зададим произвольные последовательности $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ и $\eta = (\eta_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{(V_n - \xi_n S_n)}{B_n}\right)_{n\geq 0}$ такие, что стратегия $\pi = (\xi, \eta)$ имеет капитал V. Тогда из уравнения (7.10) получим, что π – G-финансируемая в среднем.

Следующим важным шагом является нахождение самой «дешёвой» воспроизводящей G-финансируемой в среднем стратегии. Отметим, что дополнительные инвестиции в каждый момент времени, $(\Delta G_n)_{n\geq 1}$, случайны и не склонный к риску инвестор будет стремиться минимизировать неопределённость на протяжении времени действия контракта. Данные рассуждения приводят к концепции минимизации риска посредством минимизации дисперсии будущих потерь.

7.2 Хеджирование в среднеквадратическом и применение к расчёту гибких страховых контрактов

Рассмотрим задачу минимизации риска в общем случае. Среди всех стратегий, для которых выполнено равенство $V_N = f_N$, где f_N – размер выплаты платёжного обязательства, будем искать G-финансируемую в среднем стратегию, минимизирующую дисперсию дополнительных инвестиций на протяжении всего времени существования контракта:

$$\text{минимизировать } R = Var\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta G_n}{X_n}\right), \tag{7.11}$$

$$\text{с учётом } E\left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) = 0. \tag{7.12}$$

Полученный портфель будем называть *риск-минимизирующим*. Согласно условию (7.12), задача (7.11) может быть сведена к минимизации $R = E\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\right)^2$.

Теорема 7.1. Единственная риск-минимизирующая G-финансируемая в среднем хеджирующая стратегия π^* для контракта с выплатой f_N имеет капитал

$$V_n^* = X_n E\left(\frac{f_N}{X_N}\middle|\mathcal{F}_n\right), \ \ 0 \leq n \leq N, \tag{7.13}$$

и структуру

$$\xi_n^* = \gamma_n \frac{V_n^*}{X_n} + \frac{X_n}{S_n} \frac{E\left(\Delta \frac{V_{n+1}^*}{X_{n+1}} \Delta M_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)}{E((\Delta M_{n+1})^2|\mathcal{F}_n)}, \tag{7.14}$$

$$\eta_n^* = \frac{V_n^* - \xi_n^* S_n}{B_n}. \tag{7.15}$$

Риск платёжного обязательства f_N равен

$$R^{\pi^*} = \sum_{n=1}^{N} \left[E\left(\Delta \frac{V_n^*}{X_n}\right)^2 - E\,\frac{E^2\left(\Delta \frac{V_n^*}{X_n} \Delta M_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right)}{E((\Delta M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1})} \right]. \tag{7.16}$$

Доказательство. Ввиду G-финансируемости в среднем (7.12) и Леммы 7.3, $\frac{V^*}{X} = \left(\frac{V_n^*}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ является мартингалом. Также будем полагать, что $V_N^* = f_N$, и следовательно, выполнено уравнение (7.13). Очевидно, что такая стратегия существует, поскольку условие $V_N^* = f_N$ всегда может быть достигнуто, например, посредством подходящего выбора η_N в момент исполнения N.

По аналогии с уравнением (7.10) имеем:

$$\Delta \frac{V_n^*}{X_n} = \frac{S_{n-1}}{X_{n-1}} \left(\xi_{n-1}^* - \gamma_{n-1} \frac{V_{n-1}^*}{X_{n-1}}\right) \Delta M_n + \frac{\Delta G_n}{X_n}. \tag{7.17}$$

Из (7.17) и (7.14) следует, что

$$\frac{\Delta G_n}{X_n} = \Delta \frac{V_n^*}{X_n} - \frac{E\left(\Delta \frac{V_n^*}{X_n} \Delta M_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right)}{E((\Delta M_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1})} \Delta M_n. \tag{7.18}$$

Используя (7.18), получаем выражение (7.16) для риска платёжного обязательства.

Пусть теперь $\pi = (\xi,\, \eta)$ – другая G-финансируемая в среднем хеджирующая стратегия, для которой справедливо равенство $V_0 = V_0^*$. Тогда

$$V_n = X_n E\left(\frac{f_N}{X_N} \middle| \mathcal{F}_n\right) = V_n^*. \tag{7.19}$$

Как и в (7.17), имеем, что

$$\Delta \frac{V_n}{X_n} = \frac{S_{n-1}}{X_{n-1}} \left(\xi_{n-1} - \gamma_{n-1} \frac{V_{n-1}}{X_{n-1}}\right) \Delta M_n + \frac{\Delta G_n}{X_n}. \tag{7.20}$$

Из (7.20), (7.19) и (7.17) получаем

$$\Delta \frac{V_n}{X_n} = \frac{S_{n-1}}{X_{n-1}} (\xi_{n-1}^* - \xi_{n-1}) \Delta M_n + \frac{\Delta G_n}{X_n}. \tag{7.21}$$

Используя уравнение (7.21) и замечая, что в виду (7.18) $\left[\left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\right) \Delta M_n\right]_{n\geq 1}$ является мартингал-разностью, приходим к следующему равенству

$$R^{\pi} = E \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\Delta G_n}{X_n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{N} E\,\frac{S_{n-1}^2}{X_{n-1}^2} (\xi_{n-1}^* - \xi_{n-1})^2\, (\Delta M_n)^2 + R^{\pi^*}.$$

Следовательно, любая другая G-финансируемая в среднем стратегия с таким же начальным капиталом несёт в себе больший риск.

Применим описанный выше подход к расчёту *гибких страховых контрактов* (equity-linked life insurance). В контрактах данного типа величина выплаты, получаемой держателем страхового сертификата в момент исполнения N, при условии его дожития, тесно связана с развитием рыночных цен акций. Например, сумма, выплачиваемая держателю, $f(S_N)$, может быть выражена в виде:

$$f(S_N) = S_N \tag{7.22}$$

или

$$f(S_N) = \max(S_N,\ K). \tag{7.23}$$

Контракт (7.22) называется *гибким страховым контрактом без гарантии*. Для такого соглашения финансовый риск, связанный с изменением цены акции, может быть полностью переложен на клиента. Контракты типа (7.23) известны как *гибкие страховые контракты с гарантией* (здесь K – гарантированная выплата) и являются примером соглашения, при котором держатель и страховая компания разделяют финансовый риск между собой.

Предположим, что n клиентов страховой компании приобрели одинаковые контракты в момент времени 0 в возрасте x лет, а их времена дожития $T_1,\ \dots,\ T_n$ – независимые и одинаково распределённые случайные величины. Будем также предполагать, что времена дожития не зависят от процесса дисконтированной стоимости акции $\frac{S}{X} = \left(\frac{S_n}{X_n}\right)_{n\geq 0}$ (или, другими словами, финансовый рынок не зависит от страхового риска). Случайная величина Y_n обозначает количество клиентов, доживших до времени n. Вероятность дожития застрахованных держателей сертификатов обозначим:

$$P(T_i > n) = {}_n p_x.$$

Количество доживших Y_n может рассматриваться как сумма независимых случайных величин с распределением Бернулли, принимающих значение 1 с вероятностью ${}_n p_x$ или 0 с вероятностью $1 - {}_n p_x$ каждая. Тогда ожидаемое количество клиентов, доживших до времени исполнения контракта N равно

$$E(Y_N) = E\left(\sum_{i=1}^{n} I_{[T_i > N]}\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(I_{[T_i > T]}\right) = n\,{}_N p_x,$$

а дисперсия:

$$Var(Y_N) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_{[T_i > T]}\right) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(I_{[T_i > T]}\right) = n\,{}_T p_x\left(1 - {}_T p_x\right).$$

Таким образом, обязательство страховщика f_N зависит от количества доживших, Y_N, и эволюции цены акции $f(S_N)$ следующим образом: $f_N = Y_N f(S_N)$.

Формально, для того чтобы построить модель, совмещающую страховой риск (неопределённость относительно количества держателей, доживших до момента исполнения) и финансовый риск (неопределённость относительно развития стоимости акции), необходимо начать с двух отдельных вероятностных пространств с заданными фильтрациями на них. Введём $(\Omega_1,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ P_1)$ – пространство, задающее финансовый риск, с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ и содержащее информацию о эволюции финансового рынка, то есть $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1,\ \dots,\ S_n)$. Также пусть $(\Omega_2,\ \mathcal{H},\ \mathbb{H} = (\mathcal{H}_n)_{n\geq 0},\ P_2)$ – пространство, задающее страховой риск, с фильтрацией $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_n)_{n\geq 0}$ и содержащее информацию о клиентах, то есть $\mathcal{H}_n = \sigma(Y_1,\ \dots,\ Y_n)$. Эти две модели затем порождают новое пространство-произведение $(\Omega,\ \mathcal{G},\ \mathbb{G}=(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0},\ P)$, где фильтрация $\mathbb{G}=(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$, определяемая в виде $\mathcal{G}_n=\sigma(\mathcal{F}_n\cup\mathcal{H}_n)$, содержит всю доступную на момент времени n информацию. Таким образом, предполагается, что страховая компания в момент времени n имеет доступ к текущей рыночной информации и количеству доживших клиентов. Фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ и $(\mathcal{H}_n)_{n\geq 0}$ независимы относительно меры P.

Рынок, определённый на описанном пространстве-произведении, всегда является неполным (даже при условии полноты финансовой модели рынка), поскольку платёжное обязательство может зависеть от дополнительного источника риска, независимого от финансового. Следовательно, мы можем рассматривать гибкие страховые контракты как платёжные обязательства на неполном рынке, а значит риск-минимизирующая стратегия для таких контрактов определена аналогичным описанному выше образом.

Пусть $\pi^f=(\xi^f,\ \eta^f)$ обозначает риск-минимизирующую хеджирующую стратегию для финансового контракта с функцией выплаты $f(S_N)$. Капитал π^f задан процессом $V_n^f=X_nE\left(\frac{f(S_N)}{X_N}\middle|\mathcal{F}_n\right)$, где $f(S_N)=V_N^f$. Также обозначим $\pi^*=(\xi^*,\ \eta^*)$ – риск-минимизирующую стратегию для гибкого страхового контракта с обязательством $f_N=V_N^*=Y_NV_N^f$. Вследствие независимости финансового и страхового рисков, риск-минимизирующая G-финансируемая в среднем стратегия π^* имеет процесс стоимости:

$$\begin{aligned} V_n^* &= X_nE\left(\frac{Y_Nf(S_N)}{X_N}\middle|\mathcal{G}_n\right)=X_nE(Y_n|\mathcal{H}_n)E\left(\frac{f(S_N)}{X_N}\middle|\mathcal{F}_n\right)\\ &= Y_{n\,N-n}p_{x+n}V_n^f, \end{aligned} \tag{7.24}$$

и структуру:

$$\begin{aligned} \xi_n^* &= \gamma_n\frac{V_n^*}{X_n}+\frac{X_n}{S_n}\frac{E\left(\Delta\frac{V_{n+1}^*}{X_{n+1}}\Delta M_{n+1}\middle|\mathcal{G}_n\right)}{E((\Delta M_{n+1})^2|\mathcal{G}_n)}\\ &= Y_{n\,N-n}p_{x+n}\left(\gamma_n\frac{V_n^f}{X_n}+\frac{X_n}{S_n}\frac{E\left(\Delta\frac{V_{n+1}^f}{X_{n+1}}\Delta M_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right)}{E((\Delta M_{n+1})^2|\mathcal{F}_n)}\right)\\ &= Y_{n\,N-n}p_{x+n}\xi_n^f, \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\eta_n^*=\frac{V_n^*-\xi_n^*S_n}{B_n}=Y_{n\,N-n}p_{x+n}\eta_n^f,\quad n\geq 0. \tag{7.26}$$

В уравнении (7.24), $E(Y_N|\mathcal{H}_n)=Y_{n\,N-n}p_{x+n}$, поскольку $Y_N|\mathcal{H}_n\sim$ Binomial $(Y_n,\ {}_{N-n}p_{x+n})$ где Y_n – итоговое число доживших до момента времени n, а ${}_{N-n}p_{x+n}$ – условная вероятность дожития до времени N при условии того, что клиент жив на момент времени n. Риск платёжного обязательства $f_N=Y_Nf(S_N)$ вычисляется в виде:

$$R^{\pi^*} = n\,{}_N p_x \sum_{i=1}^{N} \left[{}_{N-i}p_{x+i} E\left(\frac{V_i^f}{X_i}\right)^2 - {}_{N-(i-1)}p_{x+(i-1)} \left(E\left(\frac{V_{i-1}^f}{X_{i-1}}\right)^2 + E\,\frac{E^2\left(\Delta M_i \Delta \frac{V_i^f}{X_i} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)}{E\left((\Delta M)_i^2 \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)} \right) \right] + n(n-1)\,{}_T p_x^2 \sum_{i=1}^{N} \left[E\left(\Delta \frac{V_i^f}{X_i}\right)^2 - E\,\frac{E^2\left(\Delta M_i \Delta \frac{V_i^f}{X_i} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)}{E\left((\Delta M)_i^2 \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)} \right]. \tag{7.27}$$

В случае, когда неполный рынок получается из полного финансового посредством допущения зависимости платёжных обязательств от независимого страхового риска вторая сумма в уравнении (7.27) становится равной 0.

Пример 7.2. Рассмотрим четырёхшаговую модель рынка с 5 датами торговли: $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Например, это может быть год, разделённый на 4 периода (квартала). Длительность каждого периода $\Delta n = \frac{1}{4}$. Предположим, что времена дожития держателей сертификатов – независимые и экспоненциально распределённые величины с коэффициентом смертности (hazard rate) μ, и пусть $\mu = 1$. Тогда вероятность дожития ${}_k p_x = \exp(-\mu k \Delta n) = \exp(-k\Delta n)$.

Размер выплаты клиенту при условии его/её дожития до момента времени N выражается в виде $f(S_N) = \max(S_N,\ K)$, где $K = \$103$. Предположим, что ρ может принимать два значения: $a = -0.1$ и $a = -0.1$ и $b = 0.15$; $r = 0.015$; $p = 0.5$, $S_0 = \$100$; $B_0 = 1$.

Динамика цены акции, выплата по контракту $f(S_N)$ и капитал риск-минимизирующей хеджирующей стратегии наряду с количеством акций в риск-минимизирующем портфеле показаны на Рисунке 7.2. Оптимальный капитал хеджирующей стратегии и оптимальное количество акций приведены для одного клиента, который дожил до рассматриваемого момента времени. Оптимальная структура хеджирующей стратегии в момент времени 0 представлена значениями $\xi_0^* = 0.219$ и $\eta_0^* = 17.9$. В момент времени 1, если держатель всё ещё жив, а цена акции двигается «вверх», оптимальный хеджирующий портфель будет состоять из $\xi_1^* = 0.383$ и $\eta_1^* = 11.4$. Если застрахованный клиент не доживает до момента времени 1, то $\xi_1^* = 0$ и $\eta_1^* = 0$.

Заметим, что стратегия, полученная путём нахождения P-дисконтирующего портфеля, совпадает с той, которую мы получаем, применяя «традиционный» подход.

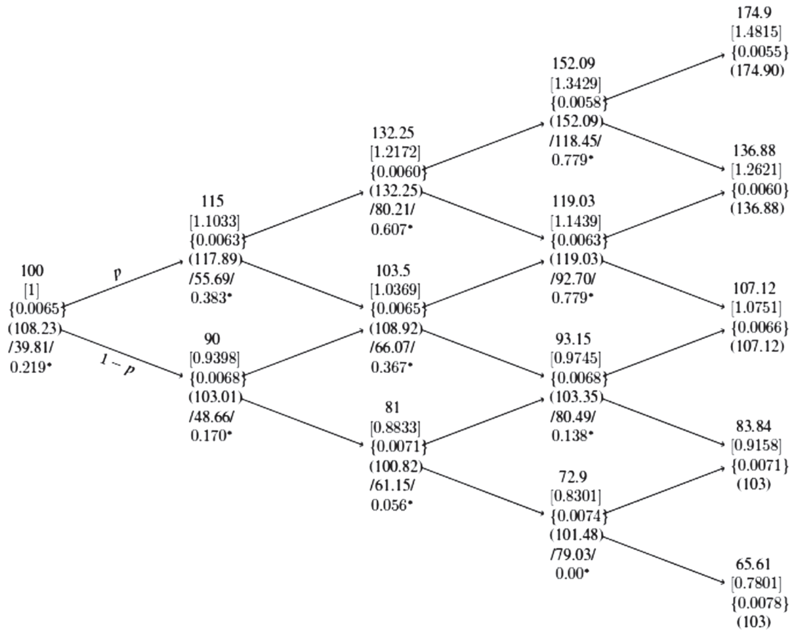


Рисунок 7.2 – Биномиальное дерево для риск-минимизирующего хеджирующего портфеля

На Рисунке 7.2 для каждого узла верхнее число обозначает цену акции; $[X]$ – капитал дисконтирующего портфеля; $\{\gamma\}$ – количество акций в P-дисконтирующем портфеле; (C) капитал хеджирующей стратегии для контракта $\max(S_N,\ K)$; $/V/$ – капитал риск-минимизирующей стратегии; и нижнее число, ξ^*, обозначает количество акций в риск-минимизирующем хеджирующем портфеле.

Глава 8
ПЕРЕХОД ОТ БИНОМИАЛЬНОЙ К ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ: ФОРМУЛА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЛЭКА -ШОУЛСА

Данная глава посвящена выведению с помощью асимптотических теорем теории вероятностей пределов для биномиальной модели и формулы Кокса-Росса-Рубинштейна. На этой основе в данной главе получены первые представления о модели, формуле и дифференциальном уравнении Блэка-Шоулса (см. [22], [18] и [17]).

8.1 Общая конструкция предельного перехода к модели Блэка-Шоулса

В предыдущих главах речь шла о дискретных моделях рынка, в которых время описывалось целыми числами $0,\ 1,\ \dots,\ N$, выражающими некоторые временные промежутки (дни, месяцы, и т. д.). Теперь перейдём к описанию рынка на временном интервале $[0,\ T]$ для некоторого действительного числа $T \geq 0$. Можно разделить данный промежуток на m равных частей, получив временную шкалу с шагом $\Delta = \frac{T}{m} > 0$.

Таким образом, естественно рассматривать следующий $(B,\ S,\ \Delta)$-рынок:

$$B_t^\Delta - B_{t-\Delta}^\Delta = r(\Delta) B_{t-\Delta}^\Delta, \quad B_0^\tau > 0, \ r(\Delta) > 0,$$

$$S_t^\Delta - S_{t-\Delta}^\Delta = \rho_t(\Delta) S_{t-\tau}^\Delta, \quad S_0^\Delta > 0,$$

где $\big(\rho_t(\Delta)\big)$ – стохастическая последовательность независимых доходностей со значениями $a(\Delta)$ и $b(\Delta)$ такими, что $-1 < a(\Delta) < r(\Delta) < b(\Delta)$.

Эта последовательность порождает следующую фильтрацию:

$$\mathcal{F}_t^\Delta = \sigma(\rho_n(\Delta),\ n \leq t), \quad t = 0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ \dots,\ (m-1)\Delta,\ \left[\frac{T}{\Delta}\right]\Delta.$$

Отметим, что данная дискретная модель может быть расширена на весь промежуток $[0,\ T]$ следующим стандартным способом: для $s \in [t,\ t+\Delta)$, где $t = 0,\ \Delta,\ \dots,\ m\Delta$, зададим:

$$B_s^\Delta \equiv B_t^\Delta, \quad S_s^\Delta \equiv S_t^\Delta, \quad \mathcal{F}_s^\Delta \equiv \mathcal{F}_t^\Delta, \quad \rho_s^\Delta \equiv \rho_t^\Delta.$$

Таким образом, все стохастические последовательности становятся *стохастическими процессами*, а полученная модель формально является моделью с непрерывным временем.

Рассмотрим Европейский опцион call на $(B,\ S,\ \Delta)$-рынке. В этом случае $f_T = \left(S_{\left[\frac{T}{\Delta}\right]\Delta} - K\right)^+$, и C_T^Δ обозначим стоимость данного опциона. Рассматривая семейство однопараметрических $(B,\ S,\ \Delta)$-рынков относительно $\Delta > 0$, естественно ожидать, что процессы $\left(B_t^\Delta\right)$, $\left(S_t^\Delta\right)$ и стоимости C_T^Δ должны иметь «приемлемые» предельные значения при $\Delta \to 0$.

Замечание 8.1. Значительную часть современного рынка составляют так называемые «высокочастотные финансы». Например, *тики*, или моменты изменения цены, случаются гораздо чаще, чем раз в секунду. Это приводит к огромным объёмам статистических данных, которые до сих пор не могут быть полностью использованы. В данной ситуации модели рынка с дискретным временем могут быть заменены своими аналогами с непрерывным временем. Приведём строго математическое описание перехода к таким моделям, когда количество тиков стремится к бесконечности.

Предположим, что параметры $(B,\ S,\ \Delta)$-рынка и его предельного аналога удовлетворяют соотношениям

$$1 + r(\Delta) = e^{r\Delta},\ \ 1 + b(\Delta) = e^{\sigma\sqrt{\Delta}},\ \ 1 + a(\Delta) = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}},\ \ r \geq 0,\ \ \sigma > 0.$$

Будем использовать эти равенства для нахождения асимптотических выражений мартингальной вероятности

$$p_\Delta^* = \frac{r(\Delta) - a(\Delta)}{b(\Delta) - a(\Delta)} \ \text{ при } \Delta \to 0.$$

Используя разложение Тейлора, запишем, что

$$e^{r\Delta} \sim 1 + r\Delta \text{ и } e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta}} = 1 \pm \sigma\sqrt{\Delta} + \tfrac{\sigma^2\Delta}{2} \text{ при } \Delta \to 0.$$

Таким образом,

$$p_\Delta^* = \frac{\left(e^{r\Delta} - 1\right) - \left(1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}\right)}{e^{\sigma\sqrt{\Delta}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}} \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right) \ \text{ при } \ \Delta \to 0.$$

Рассмотрим Δ-разбиение промежутка $[0,\ t]$ с $n = \left[\frac{t}{\Delta}\right]$ под-интервалов длины $\Delta > 0$. Идентифицируем S_t^Δ с $S_{n\Delta}^\Delta$, где

$$S_{n\Delta}^\Delta = S_0 \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \rho_k(\Delta)\right) = S_0 e^{-\sum_{k=1}^{n}\xi_k^\Delta}$$

с независимыми случайными величинами $\left(\xi_k^\Delta\right)_{k=1,\ \dots,\ n}$ такими, что

$$\xi_k^\Delta = \begin{cases} \sigma\sqrt{\Delta} & \text{с вероятностью } p_\Delta^* \\ -\sigma\sqrt{\Delta} & \text{с вероятностью } 1 - p_\Delta^* \end{cases}.$$

Идентифицируем также B_t^Δ с $B_{n\Delta}^\Delta$ и

$$B_{n\Delta}^\Delta = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + r(\Delta)\right) = e^{rn\Delta} \sim B_t = e^{rt} \quad \text{при } \Delta \to 0.$$

Для анализа «предельного» поведения S_t^Δ при $\Delta \to 0$ необходимо вычислить $\lim \sum_{k=1}^{n} \xi_k^\Delta$ при $\Delta \to 0$ (или эквивалентно при $n \to \infty$). Для математического ожидания и дисперсии ξ_k^Δ относительно мартингальной вероятности p_Δ^* справедливы следующие асимптотические приближения:

$$E^{*,\Delta}(\xi_k^\Delta) = E^{*,\Delta}(\xi_k^\Delta) = \sigma\sqrt{\Delta}(2p_\Delta^* - 1) \sim \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta \text{ при } \Delta \to 0$$

и

$$Var^{*,\Delta}(\xi_k^*) = E^{*,\Delta}\left(\left(\xi_k^\Delta\right)^2\right) - \left(E^{*,\Delta}(\xi_k^\Delta)\right)^2$$
$$= \sigma^2\Delta - \sigma^2\Delta(2p_\Delta^* - 1)^2 \sim \sigma^2\Delta \text{ при } \Delta \to 0.$$

Используя Центральную Предельную Теорему, приходим к следующему приближению распределения рассматриваемой суммы случайных величин:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^\Delta \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t,\ \sigma^2 t\right).$$

Другими словами, предельное распределение $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^\Delta$ является нормальным, со средним значением $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ и дисперсией $\sigma^2 t$. Таким образом, относительно мартингальной вероятности получаем, что S_t^Δ сходится по распределению при $\Delta \to 0$ к следующей случайной величине

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{\xi}} = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\xi},$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$.

Далее применим такую же аргументацию для случая исходной (физической) вероятностной меры p_Δ, предполагая, что $E(p_k^\Delta) = e^{\mu\Delta} - 1$ для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда S_t^Δ сходится по распределению при $\Delta \to 0$ к случайной величине вида

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t},$$

где $(W_t)_{t \geq 0}$ – семейство Гауссовских случайных величин, обладающих следующими свойствам:

- $W_0 = 0,$
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0,\ t - s)$, и
- $W_{t_2} - W_{t_1}$ и $W_{s_2} - W_{s_1}$ независимы для любых $t_2 > t_1 > s_2 > s_1$.

Данное семейство $(W_t)_{t \geq 0}$ называется *Броуновским движением* или *Винеровским процессом*, а семейство $(S_t)_{t \geq 0}$ обычно упоминается в литературе как *Геометрическое Броуновское Движение*. Соответствующая модель $(B,\ S)$-рынка с непрерывным временем называется *моделью Блэка-Шоулса*, а параметры $r,\ \mu$ и σ обычно обозначают процентную *ставку*, *норму доходности* и *волатильность* соответственно.

8.2 Вывод формулы и уравнения Блэка-Шоулса

Рассмотрим Европейский опцион call на непрерывном рынке с платёжным обязательством $f_T = (S_T - K)^+$. Рассчитаем его стоимость с помощью предельного перехода в формуле Кокса-Росса-Рубинштейна, используя обозначения из оригинальной статьи этих авторов.

Пусть имеется n временных промежутков, на каждом из них стоимость акции может расти с коэффициентом u или убывать с коэффициентом d. Обозначим r_f безрисковую процентную ставку за один период. Напомним формулу Кокса-Росса-Рубинштейна, также известную как Биномиальная формула Расчёта Опционов, для оценки стоимости Европейского опциона call, C_{CRR}, с начальной стоимостью акции S_0, ценой поставки K, и временем исполнения через n периодов:

$$C_{CRR} = S_0\left[\sum_{j=k_0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\left(\frac{u^j d^{n-j}}{r_f^n}\right)\right] - kr_f^{-n}\left[\sum_{j=k_0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\right]. \tag{8.1}$$

Здесь j – количество периодов роста стоимости акции; а $(n-j)$ – количество периодов убывания стоимости акции; k_0 – минимальное количество переходов стоимости акции вверх, необходимое для исполнения опциона call. Данные параметры удовлетворяют неравенству $S_0 u^{k_0} d^{n-k_0} > K$ а $p = \frac{r_f - d}{u-d}$ – риск-нейтральная вероятность роста стоимости акции на каждом промежутке $\left(0 < d < r_f < u\right)$.

Выражение во вторых скобках в (8.1) обозначим $B[k_0; n,\, p]$ и будем называть дополнением биномиальной функции распределения. Выражение в первых скобках также может рассматриваться как дополнение биномиальной функции распределения $B[k_0; n,\, p']$ с $p' = \left(\frac{u}{r_f}\right)p$ и $1 - p' = \left(\frac{d}{r_f}\right)(1-p)$.

Таким образом, можно переписать формулу (8.1) в более коротком виде:

$$C_{CRR} = S_0 B[k_0; n,\, p'] - Kr_f^{-n} B[k_0; n,\, p], \tag{8.2}$$

где k_0 – наименьшее неотрицательное целое число, превышающее $\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 d^n}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}$.

Заметим, что при $k_0 > n$ стоимость опциона $C_{CRR} = 0$.

Следует отметить, что форма (8.2) для записи формулы Кокса-Росса-Рубинштейна широко распространена в финансовой математике.

Приведённая выше биномиальная формула (8.2) часто рассматривается как версия известной формулы Блэка-Шоулса в случае дискретного времени для цены Европейского опциона call, C_{BS}:

$$C_{BS} = S_0\Phi(d_1) - ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{8.3}$$

где

$$d_+ = d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_- = d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

а r – непрерывно накапливаемая безрисковая процентная ставка, σ – волатильность цены базового актива, T – время до исполнения контракта в годах, а $\Phi(\cdot)$ обозначает функцию стандартного нормального распределения.

Сравнивая две модели расчёта, заметим, что в биномиальном случае дата исполнения наступает через n периодов, в то время как для случая Блэка-Шоулса опцион может быть исполнен через T лет. В целом T представляет длительность календарного времени до момента исполнения опциона, которое состоит из n периодов эквивалентной длины, равной $\frac{T}{n}$. Непрерывно накапливаемая безрисковая процентная ставка r связана с безрисковой процентной ставкой за период длины $\frac{T}{n}$ следующим образом: $\exp(rT) = r_f^n$, или $r_f = \exp\left(\frac{rT}{n}\right)$. Подбирая параметры u и d можно вывести формулу Блэка-Шоулса (8.3) как предел формулы Кокса-Росса-Рубинштейна (8.2). Для этого полезной оказывается теорема Муавра-Лапласа, являющаяся специальным случаем Центральной Предельной Теоремы.

Пусть $u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)$ и $d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right)$, тогда

$$B[k_0; n,\ p'] \cong \Phi\left(\frac{np' - (k_0 - 1)}{\sqrt{np'(1-p')}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(d_1) \tag{8.4}$$

и

$$B[k_0; n,\ p] \cong \Phi\left(\frac{np - (k_0 - 1)}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(d_2),$$

а скорость такой сходимости является стандартной для Центральной Предельной Теоремы (ЦПТ) и равна $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Продемонстрируем альтернативные доказательства для соотношений (8.4). Для этого используем следующие известные неравенства Бернштейна:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{\infty} e^{-z^2}dz - \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[6]{2npq}} < P(m \le m_0) < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_2}^{\infty} e^{-z^2}dz + e^{-\sqrt[3]{2npq}},\ \text{ при } m_0 + \frac{3}{2} \le np \tag{8.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_3}^{\infty} e^{-z^2}dz - \frac{e^{-\sqrt[3]{2npq}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[6]{2npq}} < P(m \ge m_0) < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_4}^{\infty} e^{-z^2}dz + e^{-\sqrt[3]{2npq}},\ \text{ при } m_0 - \frac{3}{2} \ge np\ , \tag{8.6}$$

где m имеет биномиальное распределение с параметрами n и p; $q = 1 - p$ ($\mathrm{n}pq \ge 62.5$); m_0 – целое число; z_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ – неотрицательные корни квадратных уравнений:

$$-z_1\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_1^2=m_0-np-\frac{1}{2}, \tag{8.7}$$

$$-z_2\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_2^2=m_0-np+\frac{3}{2}, \tag{8.8}$$

$$z_3\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_3^2=m_0-np+\frac{1}{2}, \tag{8.9}$$

$$z_4\sqrt{2npq}+\frac{q-p}{3}z_4^2=m_0-np-\frac{3}{2}. \tag{8.10}$$

Существует непосредственная связь между доказательством данного замечательного результата и доказательством теоремы Муавра-Лапласа. Классическое доказательство последней теоремы основывается на формуле Стирлинга: при растущем n имеет место приближение

$$\binom{n}{m}p^m q^{n-m}\cong\sqrt{\frac{n}{2\pi n(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Доказано, что для $m=np+z\sqrt{2npq}$,

$$\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-z^2}.$$

Изучая данное приближение, Бернштейн заметил, что назначение вероятности, равной

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}e^{-z^2},$$

целому числу, ближайшему к $np+z\sqrt{2npq}+\frac{z^2(q-p)}{3}$, является более точным. Это наблюдение позволяет построить другую оценку нормального приближения биномиального распределения. Доказательство неравенств Бернштейна подразумевает использование формулы Стирлинга, модификации неравенства Чебышёва и требует значительных вычислительных усилий.

Рассмотрим неравенство (8.5) в случае $m_0+\frac{3}{2}\le np$. Данное условие гарантирует, что по крайней мере один корень каждого из уравнений (8.7) и (8.8) является неотрицательным. Легко показать, что корень

$$z_1=\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{(q-p)(np-m_0+\alpha_i)}{npq}}\right)\frac{3\sqrt{2npq}}{2(q-p)}, \tag{8.11}$$

с $i=1,\ 2;\alpha_1=\frac{1}{2},\ \alpha_2=-\frac{3}{2}$, всегда неотрицателен при указанном условии.

Таким образом, можно выразить биномиальные вероятности в (8.2) через вероятности стандартного нормального распределения:

$$\Phi\left(\sqrt{2}z_2'\right)-c_1'<B[k_0;n,\ p']<\Phi\left(\sqrt{2}z_1'\right)+c_0'$$

и
$$\Phi\left(\sqrt{2}z_2\right) - c_1 < B[k_0; n,\ p] < \Phi\left(\sqrt{2}z_1\right) + c_0\ ,$$
где z_i $(i = 1,\ 2)$ определены в (8.11) при $m_0 = k_0 - 1$; z_i' $(i = 1,\ 2)$ определены в (8.11) при $m_0 = k_0 - 1$ и с заменой параметра p на p', параметра q на q' $(q' = 1 - p')$; $c_0 = \frac{\exp\left(-\sqrt[3]{2npq}\right)}{2\sqrt{\pi}\sqrt[6]{2npq}}$; $c_1 = \exp\left(-\sqrt[3]{2npq}\right)$; c_0' и c_1'вводятся аналогично c_0 и c_1 посредством замены p и q на p' и q', соответственно.

Устремляя n к бесконечности, получаем формулу Блэка-Шоулса. Чтобы продемонстрировать этот переход, напомним, что $p = \frac{r_f - d}{u - d}$,
$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right),\ d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right), \text{ и } r_f = \exp\left(\frac{rT}{n}\right).$$
Раскладывая экспоненциальную функцию в ряд Тейлора, получим:
$$p = \frac{e^{r\frac{T}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} = \frac{\sigma + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{1}{6}\sigma^3\frac{T}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}{2\sigma + \frac{1}{3}\sigma^3\frac{T}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$
Следовательно,
$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$
$$pq = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{\sigma^2}\frac{T}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$
Из (8.7) и (8.8) при $m_0 = k_0 - 1$ имеем:
$$\frac{q - p}{3\sqrt{2npq}}z_i^2 - z_i + \frac{np - (k_0 - 1) + \alpha_i}{\sqrt{2npq}} = 0, \tag{8.12}$$
для $i = 1,\ 2$.

Заменяя z_i в (8.12) на (8.11) приходим к равенству:
$$z_i = \frac{\sqrt{2}\frac{np - (k_0 - 1) + \alpha_i}{\sqrt{npq}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{3}\frac{(q - p)(np - (k_0 - 1) + \alpha_i)}{npq}}},$$
при $i = 1,\ 2$.

Из биномиальной формулы расчёта опционов (8.2) следует, что
$$k_0 - 1 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - n\ln(d)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)} - \epsilon, \tag{8.13}$$
где $\epsilon \in [0,\ 1)$.

Используя (8.13), получим:

$$\frac{np-(k_0-1)+\alpha_i}{\sqrt{npq}}=\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+n\left[\ln(d)+p\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right]+(\epsilon+\alpha_i)\ln\left(\frac{u}{d}\right)}{\sqrt{npq}\ln\left(\frac{u}{d}\right)},$$

при $i=1,\ 2$.

Рассчитывая $\ln\left(\frac{u}{d}\right)$, $\left[\ln(d)+p\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right]n$ и $\sqrt{npq}\ln\left(\frac{u}{d}\right)$, приходим к соотношениям

$$\ln\left(\frac{u}{d}\right)=2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\left[\ln(d)+p\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right]n=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sqrt{npq}\ln\left(\frac{u}{d}\right)=\sigma\sqrt{T}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{np-(k_0-1)+\alpha_i}{\sqrt{npq}}=\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{2(\epsilon+\alpha_i)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{8.14}$$

при $i=1,\ 2$.

Заметив, что $\frac{q-p}{\sqrt{npq}}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, получаем равенство

$$\sqrt{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{np-(k_0-1)+\alpha_i}{\sqrt{npq}}}=1+O\left(\frac{1}{n}\right)\ \text{ при } i=1,\ 2.$$

В результате имеем следующее соотношение:

$$z_i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{2(\epsilon+\alpha_i)}{\sqrt{n}}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\ \text{ для } i=1,\ 2.$$

Наконец, можно записать неравенство:

$$\begin{aligned}\Phi\left[d_2+\frac{2(\epsilon+\alpha_2)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-c_1<B[k_0;n,\ p]\\ <\Phi\left[d_2+\frac{2(\epsilon+\alpha_1)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+c_0.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Аналогичные аргументы приводят также к следующему неравенству

$$\begin{aligned}\Phi\left[d_2+\frac{2(\epsilon+\alpha_2)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]-c_1'<B[k_0;n,\ p']\\ <\Phi\left[d_2+\frac{2(\epsilon+\alpha_1)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]+c_0'.\end{aligned} \tag{8.16}$$

Понятно, что нижняя и верхняя границы неравенства (8.15) стремятся к одинаковому пределу, $\Phi(d_2)$, при $n\to\infty$, в то время как обе границы неравенства (8.16) стремятся к $\Phi(d_1)$. Сохраним $\frac{2(\epsilon+\alpha_i)}{\sqrt{n}}$ и O-члены в целях выявления скорости сходимости «биномиальных» цен опциона к ценам Блэка-Шоулса.

Используя неравенства (8.15) и (8.16) для расчёта биномиальной цены опциона в формуле (8.2), получаем:

$$
\begin{aligned}
&S_0\left[\Phi\left(d_1+\frac{2(\epsilon+\alpha_2)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)-c_1'\right)\right] \\
&\qquad -Ke^{-rT}\left[\Phi\left(d_2+\frac{2(\epsilon+\alpha_1)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)+c_0\right]<C_{CRR} \\
&<S_0\left[\Phi\left(d_1+\frac{2(\epsilon+\alpha_2)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)-c_0'\right)\right] \\
&\qquad -Ke^{-rT}\left[\Phi\left(d_2+\frac{2(\epsilon+\alpha_1)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-c_0\right].
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Применяя разложение в ряд Тейлора функции нормального распределения и замечая, что c_0, c_1, c_0' вместе с c_1' не превышают $O\left(\frac{1}{n}\right)$, неравенства (8.17) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
C_{BS}+S_0\phi(d_1)\frac{2(\epsilon+\alpha_2)}{\sqrt{n}}-ke^{-rT}\phi(d_2)\frac{2(\epsilon+\alpha_1)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)<C_{CRR} \\
<C_{BS}+S_0\phi(d_1)\frac{2(\epsilon+\alpha_1)}{\sqrt{n}}-Ke^{-rT}\phi(d_2)\frac{2(\epsilon+\alpha_2)}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

где $\phi(\cdot)$ обозначает функцию плотность вероятности стандартного нормального распределения.

Используя факт того, что $S_0\phi(d_1)=Ke^{-rT}\phi(d_2)$ и замечая, что $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=-\frac{3}{2}$, приходим к следующим неравенствам:

$$
C_{BS}-4S_0\phi(d_1)\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)<C_{CRR}<C_{BS}+4S_0\phi(d_1)\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right).
$$

Таким образом, применение неравенств Бернштейна (8.5) позволяет показать сходимость биномиальной стоимости опциона к цене Блэка-Шоулса со скоростью $\frac{1}{\sqrt{n}}$, как и в Центральной Предельной Теореме.

Рассмотрим неравенство (8.6), при $m_0-\frac{3}{2}\geq np$. Данное условие гарантирует, что хотя бы один из корней каждого из уравнений (8.9) и (8.10) неотрицателен и равняется:

$$
z_i=\left(-1+\sqrt{1-\frac{2}{3}\frac{(q-p)(np-m_0+\alpha_i)}{npq}}\right)\frac{3\sqrt{2npq}}{2(q-p)},
\tag{8.18}
$$

$$
\text{при } i=3,\ 4;\ \alpha_3=-\tfrac{1}{2},\ \alpha_4=\tfrac{3}{2}.
$$

Далее, биномиальные вероятности в (8.2) могут быть выражены посредством вероятностей стандартного нормального распределения с помощью неравенств Бернштейна (8.6), а именно:

$$\Phi\left(-\sqrt{2}z_3'\right) - c_0' < B[k_0; n, p'] < \Phi\left(-\sqrt{2}z_4'\right) + c_1'$$

и

$$\Phi\left(-\sqrt{2}z_3\right) - c_0 < B[k_0; n,\ p] < \Phi\left(-\sqrt{2}z_4\right) + c_1,$$

где $z_i\ (i = 3,\ 4)$ определены в (8.18); а $z_i'\ (i = 3,\ 4)$ могут быть получены из (8.18) посредством замены параметра p на p' и параметра q на $q'\ (q' = 1 - p')$; $_0 = \frac{\exp\left(-\sqrt[3]{2npq}\right)}{2\sqrt{\pi}\sqrt[6]{2npq}}$; $c_1 = \exp\left(-\sqrt[3]{2npq}\right)$ c_0' и c_1' определяются аналогично c_0 и c_1, заменяя p и q на p' и q'.

Корень уравнения в (8.18) при $m_0 = k_0$ может быть переписан в виде:

$$z_i = -\frac{\sqrt{2}\dfrac{np - k_0 + \alpha_i}{\sqrt{npq}}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{(q-p)(np - k_0 + \alpha_i)}{npq}}} \text{ при } i = 3,\ 4.$$

Аналогично ситуации в неравенстве (8.5), можно показать, что

$$\frac{np - k_0 + \alpha_i}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

и, следовательно,

$$z_i \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ при } i = 3,\ 4.$$

Наконец,

$$B[k_0; n,\ p] \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(-\sqrt{2}z_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \text{ при } i = 3,\ 4.$$

Используя аналогичную аргументацию, получим

$$B[k_0; n,\ p'] \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(-\sqrt{2}z_i'\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \text{ при } i = 3,\ 4.$$

Можно показать, аналогично случаю неравенства (8.5), что биномиальная стоимость опциона сходится к цене Блэка-Шоулса со скоростью $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Формулу Блэка-Шоулса также можно вывести из биномиальной модели расчёта опционов, используя интересное обобщение неравенств Бернштейна, данное Зубковым и Серовым. Доказательство этого обобщения основывается главным образом на формуле Стирлинга.

Положим $H(x,\ p) = x\ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$, $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$ для $x \neq 0$ и $sgn(0) = 0$.

Пусть $\left\{C_{n,\,p}(m_0)\right\}_{m_0=0}^{n}$ – возрастающая последовательность, определённая следующим образом:

$$C_{n,\,p}(0) = (1-p)^n, \quad C_{n,\,p}(n) = 1 - p^n,$$

$$C_{n,\,p}(m_0) = \Phi\left(sgn\left(\frac{m_0}{n} - p\right)\sqrt{2nH\left(\frac{m_0}{n},\ p\right)}\right),\ \ 1 \le m_0 < n. \tag{8.19}$$

,

Таким образом, для каждого $m_0 = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ и любого $p \in (0,\ 1)$ выполнено неравенство
$$C_{n,\,p}(m_0) \le P(m \le m_0) \le C_{n,\,p}(m_0+1),$$
а равенство достигается только при $m_0 = 0$ или $m_0 = n-1$.

Для дальнейшего изложения необходимо, чтобы функция (8.19) была определена для любого m_0, $0 \le m_0 \le n$. Принимая во внимание, что $0^0 = 1$, функция $H\left(\frac{m_0}{n},\ p\right)$ определена для $m_0 = 0$ и $m_0 = n$, и, следовательно, $C_{n,\,p}(m_0)$ в (8.19) может быть рассчитана для $0 \le m_0 \le n$.

Таким образом, для $0 \le m_0 \le n-1$ выполнены следующие неравенства:
$$C_{n,\,p}(m_0) < P(m \le m_0) < C_{n,\,p}(m_0+1) \tag{8.20}$$
с $C_{n,\,p}(m_0)$, определённой в (8.19) для $0 \le m_0 \le n$.

Чтобы убедиться в справедливости (8.20), рассмотрим функции:
$$\psi(p) = P(m \le 0) - C_{n,\,p}(0) = (1-p)^n - \Phi\left(-\sqrt{-2n\log(1-p)}\right) \tag{8.21}$$
и
$$\delta(p) = P(m \le n-1) - C_{n,\,p}(n) = 1 - p^n - \Phi\left(\sqrt{-2\ln(p)}\right). \tag{8.22}$$

Отметим, что (0) = 0.5, $\lim_{p\to 1}\psi(p) = 0$, $\lim_{p\to 0}\delta(p) = 0$, $\delta(1) = -0.5$, и обе функции (8.21) и (8.22) дифференцируемы относительно p:
$$\psi'(p) = -n(1-p)^{n-1} + \Phi\left(-\sqrt{-2n\ln(1-p)}\right)(-2n\ln(1-p))^{-\frac{1}{2}}\frac{n}{1-p}$$
$$\delta'(p) = -np^{n-1} + \Phi\left(\sqrt{2n\ln(p)}\right)(-2n\ln(p))^{-\frac{1}{2}}\frac{n}{p}.$$

Уравнение $\psi'(p) = 0$ имеет единственный корень $p_0 = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\pi n}\right)$ на интервале (0,1); $\psi'(p) > 0$ на $(0,\ p_0)$ и $\psi'(p) < 0$ на $(p_0,\ 1)$. Следовательно, $\psi(p) > 0$.

Уравнение $\delta'(p) = 0$ имеет единственный корень $p_1 = \exp\left(-\frac{1}{4\pi n}\right)$ на (0,1); $\delta'(p) > 0$ на $(0,\ p_1)$ и $\delta'(p) > 0$ на $(p_1,\ 1)$. Следовательно, $\delta(p) < 0$.

Эти наблюдения показывают, что можно использовать неравенства (8.20) для $0 \le m_0 < n$ с $C_{n,\,p}(m_0)$, определённой в (8.19) для всех m_0.

Далее, рассмотрим $x := \frac{m_0 - np}{\sqrt{npq}}$. Тогда можно переписать функцию $H\left(\frac{m_0}{n},\ p\right)$ в следующем виде:
$$H\left(\frac{m_0}{n},\ p\right) = \frac{1}{n}\left[\left(np + x\sqrt{npq}\right)\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + \left(nq - x\sqrt{nqp}\right)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right]. \tag{8.23}$$

Рассмотрим $m_0 = k_0 - 1$, где $k_0 - 1$ определяется из (8.13). Тогда из (8.14) следует, что $x = -\left(d_2 + \frac{2\epsilon}{\sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Допуская, что n достаточно большое, чтобы были выполнены соотношения $\left|x\sqrt{\frac{q}{np}}\right| < 1$ и $\left|x\sqrt{\frac{p}{qn}}\right| < 1$, можно применить разложение логарифмической функции в ряд Тейлора и прийти к следующему виду (8.23):

$$H\left(\frac{m_0}{n},\ p\right) = \frac{1}{n}\left((np + x\sqrt{npq})\left[x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \frac{x^3 q^{\frac{3}{2}}}{3(np)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + (nq - x\sqrt{npq})\left[x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + \frac{x^3 q^{\frac{3}{2}}}{3(np)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

При этом (8.19) приобретает форму:

$$C_{n,\,p}(m_0) = \Phi\left(sgn\left(\frac{m_0}{n} - p\right)\sqrt{x^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \Phi\left(x + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\Phi\left(\frac{(k_0 - 1) - np}{\sqrt{npq}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) < P(m \le k_0 - 1) < \Phi\left(\frac{k_0 - np}{\sqrt{npq}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

для $k_0 = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Таким образом, биномиальные вероятности в формуле (8.2) могут быть оценены следующим образом:

$$\Phi\left[d_2 + \frac{2(\epsilon - 1)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] < B[k_0; n,\ p] < \Phi\left[d_2 + \frac{2\epsilon}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

и

$$\Phi\left[d_1 + \frac{2(\epsilon - 1)}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] < B[k_0; n,\ p'] < \Phi\left[d_1 + \frac{2\epsilon}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Применяя разложение функции нормального распределения в ряд Тейлора, как и в случае неравенств Бернштейна, можно показать сходимость биномиальной стоимости опциона к цене Блэка-Шоулса со скоростью порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$C_{BS} - 2S_0\phi(d_1)\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) < C_{CRR} < C_{BS} + 2S_0\phi(d_1)\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В общем случае важно иметь формулы для расчёта цен опциона для произвольного интервала $[t,\ T]$, где $0 \le t \le T$. В этом случае контракт заключается в момент времени t со временем до его исполнения $T - t$. Такие формулы могут быть получены при замене T на $T - t$ и S_0 на S_t в формуле (8.3). Таким образом, приходим к соответствующей версии формулы Блэка-Шоулса:

$$C(x,\ t) = S_t\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T - t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T - t)\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right). \tag{8.24}$$

Из формулы (8.24), в частности, вытекает, что стоимость опциона C – функция времени и цены актива $S_t = x$. Предположим, что функция $C(\cdot,\ \cdot)$ в (8.24) является непрерывно дифференцируемой относительно t и дважды непрерывно дифференцируемой относительно x. Тогда цена опциона будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению Блэка-Шоулса

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rx\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - rC = 0. \tag{8.25}$$

Чтобы доказать (8.25) рассмотрим $(B,\ S,\ \Delta)$-рынок с параметрами

$$1 + r(\Delta) = e^{r\Delta},\ \ 1 + b(\Delta) = e^{\sigma\sqrt{\Delta}},\ \ 1 + a(\Delta) = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}},\ \ \ \sigma > 0.$$

Используя разложение в ряд Тейлора для $e^{r\Delta}$ и $e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta}}$, получим следующие асимптотические выражения для мартингальной вероятности p_Δ^*:

$$p_\Delta^* = \frac{\left(e^{r\Delta} - 1\right) - \left(1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}\right)}{e^{\sigma\sqrt{\Delta}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}} \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right) \text{ при } \Delta \to 0.$$

Поскольку цены актива S могут принимать только два возможных значения на заданном $(B,\ S,\ \Delta)$-рынке, имеем равенство

$$e^{r\Delta}C(x,\ t) = p_\Delta^* C\left(xe^{\sigma\sqrt{\Delta}},\ t + \Delta\right) + (1 - p_\Delta^*)C\left(xe^{-\sigma\sqrt{\Delta}},\ t + \Delta\right).$$

Используя формулу Тейлора, можно получить, что

$$e^{r\Delta}C(x,\ t) = (1 + r\Delta)C(x,\ t) + o(\Delta),$$

$$C\left(xe^{\sigma\sqrt{\Delta}},\ t + \Delta\right) = C(x,\ t) + \frac{\partial C}{\partial t} + x\sigma\sqrt{\Delta}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Delta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + o(\Delta),$$

$$C\left(xe^{-\sigma\sqrt{\Delta}},\ t + \Delta\right) = C(x,\ t) + \frac{\partial C}{\partial t} - x\sigma\sqrt{\Delta}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Delta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + o(\Delta),$$

при $\Delta \to 0$.

Следовательно,

$$(1 + r\Delta)C(x,\ t) = C(x,\ t) + \Delta\frac{\partial C}{\partial t} + xr\Delta\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Delta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + o(\Delta),$$

что приводит к уравнению (8.25).

Глава 9
СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В КОНТЕКСТЕ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Девятая глава занимает в книге рубежное положение между дискретными и непрерывными по времени моделями финансовых рынков. Она выполняет базовую роль в обеспечении дальнейшего материала элементами техники стохастического анализа с непрерывным временем. В ней вводится понятие стохастического интеграла, перечисляются его свойства, включая формулу Ито, теорему Гирсанова, представления мартингалов. Там же даётся представление об опциональном разложении и приводится общая методология построения мартингальных мер для широкого класса финансовых рынков (см. [36], [17], [30] и [7]).

9.1 Стохастическое исчисление на основе Винеровского процесса

Фундаментальной концепцией современного *стохастического анализа* является *стохастический базис*. Это понятие включает в себя полное вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ с заданной на нём фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, которая является неубывающим непрерывным справа семейством σ- алгебр. При этом часто $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ дополняется множествами P меры нуль, принадлежащими $\mathcal{F}$, а стохастический базис в этом случае называется *стандартным*. Будем предполагать, что все случайные процессы $X = \big(X_t(\omega)\big)_{t\geq 0}$ заданы на стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ P)$ и являются $\mathbb{F}$-согласованными (для каждого фиксированного t, случайная величина X_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$). Более того, почти для всех $\omega \in \Omega$, траектории $X.(\omega)$ принадлежат пространству функций $x(t),\ t \geq 0$, непрерывных справа с конечным пределом слева, принимающих значения в пространстве $\mathbb{R}$. Как правило, это пространство будет являться d-мерным Евклидовым пространством $\mathbb{R}^d,\ d \geq 1$. *Измеримость* X в данном случае эквивалентна измеримости отображения

$$X\colon \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

относительно σ-алгебр $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}_+ = [0,\ \infty)$ и $\mathcal{B}(\cdot)$ – Борелевская σ-алгебра. *Прогрессивную измеримость* X введём как измеримость отображения

$$X\colon \big(\Omega \times [0,\ t],\ \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0,\ t])\big) \to \big(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$$

для любого $t \geq 0$.

Два стохастических процесса являются *модификациями* друг друга, если для любого $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено:

$$P\big(\omega: X_t(\omega) = Y_t(\omega)\big) = 1.$$

Более сильным понятием является *неразличимость* процессов X и Y, выражающаяся в виде условия:

$$P(\omega: X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}_+) = 1.$$

Другая концепция стохастического анализа и теории вероятностей связана с понятиями абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер. Мера $\tilde{P}$ является *абсолютно непрерывной* относительно меры P, если $\tilde{P}(A) = 0$ для любого P-нулевого множества $A \in \mathcal{F}\big(\tilde{P} \ll P\big)$. Данное свойство имеет весьма полезное и важное описание посредством *плотности Радона-Никодима* Z*:* для любого $A \in \mathcal{F},\ \tilde{P}(A) = \tilde{E}1_A = E1_A Z,$ где E и $\tilde{E}$ математические ожидания относительно мер P и $\tilde{P}$, а $EZ = 1,\ Z \geq 0$ (п. н.). Случайная величина Z называется *плотностью* $\tilde{P}$ относительно P. Если $\tilde{P} \ll P$ и $P \ll \tilde{P}$, тогда $Z > 0$ (п. н.), а меры P и $\tilde{P}$ – *эквивалентны*. Применяя описанную выше процедуру к σ-алгебрам $\mathcal{F}_t$ и к ограничениям $\tilde{P}_t$ и P_t мер $\tilde{P}$ и P на $\mathcal{F}_t$, получим процесс $(Z_t)_{t\geq 0}$, называемый *локальной плотностью* меры $\tilde{P}$ относительно P.

Непрерывный процесс W называется *Винеровским процессом*, или *Броуновским движением*, если выполнены следующие условия:

- $W_0 = 0\ (P - \text{п. н.});$
- $W_t - W_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s,\ \ s \leq t$;;
- $W_t - W_s$ имеет нормальное распределение со средним значением 0 и дисперсией $t - s$, то есть $N(0,\ t - s)$.

Важным понятием в ходе нашего описания стохастического анализа является *диффузионный процесс*, который мы рассмотрим с помощью *стохастического интегрирования* относительно Винеровского процесса $W = (W_t,\ \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Рассмотрим *простую* функцию

$$f(t) = \sum_{k=1} f_{k-1} 1_{(t_{k-1},\, t_k]}(t),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T,\ f_{k-1} - \ \mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -измерима, $t \leq T$.

Введём понятие *стохастического интеграла* как суммы:

$$\int\limits_0^t f(s)dW_s = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}\big(W_{t_k\wedge t} - W_{t_{k-1}\wedge t}\big).$$

Данный интеграл обладает следующими свойствами:

- $\int_0^t (\alpha f_s + \beta g_s)dW_s = \alpha \int_0^t f_s dW_s + \beta \int_0^t g_s dW_s$, где α и β – константы, а f и g – простые функции (*линейность*);
- $\mathrm{E}\left(\int_0^T f(s)dW_s \middle| \mathcal{F}_t\right) = \int_0^t f(s)dW_s$; (*мартингальность*);
- $\mathrm{E}\left(\int_0^t f_s dW_s \int_0^t g_s dW_s\right) = E\int_0^t f_s g_s dW_s$ (*изометрия*).

Стохастический интеграл как линейный оператор может быть распространён на множество прогрессивно измеримых функций, таких что $E\int_0^T f_s^2 ds < \infty$ с сохранением указанных выше свойств (линейность, мартингальность и изометрия).

Используя стохастический интеграл, можно построить новый класс случайных процессов (*процессы Ито*), которые будут иметь вид:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(\omega)ds + \int_0^t \sigma_s(\omega)dW_s, \qquad (9.1)$$

где X_0 – случайная величина, $b = \big(b_t(\omega)\big)_{t\geq 0}$ – согласованный и интегрируемый по Лебегу для почти всех $\omega \in \Omega$ случайный процесс, а $\sigma = \big(\sigma_t(\omega)\big)_{t\geq 0}$ – прогрессивно измеримая случайная функция, для которой определён соответствующий стохастический интеграл.

Существует два *важнейших* типа преобразований в классе процессов Ито (9.1): *замена переменной* и *замена меры*.

Если замена переменной описывается функцией $F = F(t,\, x) \in C^{1,\,2}$, тогда новый процесс $Y_t = F(t,\, X_t)$ имеет следующую форму, называемую *формулой Ито*:

$$\begin{aligned} F(t,\, X_t) = F(0,\, X_0)& \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s,\, X_s) + \frac{\partial F}{\partial t}(s,\, X_s)b(s,\, \omega)\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(s,\, X_s)\sigma^2(s,\, \omega)\right] ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,\, X_s)\sigma(s,\, \omega)dW_s. \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Формула (9.2) демонстрирует, что класс процессов Ито инвариантен относительно гладких преобразований.

Замена меры в классе процессов Ито описывается *теоремой Гирсанова*. Рассмотрим прогрессивно измеримый процесс $\beta = \big(\beta_t(\omega)\big)_{t\geq 0}$, для которого определена экспонента Гирсанова

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t \beta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_s^2 ds\right\},\ t \leq T,$$

и $EZ_T = 1$.

Зададим новую меру $\tilde{P} \sim P$ такую, что $\frac{d\tilde{P}}{dP} = Z_T$ и $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta_s\ ds$. Тогда процесс $\widetilde{W} = \big(\widetilde{W}_t\big)_{t\geq 0}$ является Винеровским относительно $\tilde{P}$.

Для оценки размеров класса процессов Ито (9.1), начнём с Винеровского процесса W, заданного на стохастическом базисе $(\Omega.\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ P)$, и двух функций $\tilde{b} = \tilde{b}(t,\, x)$ и $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t,\, x)$, $(t,\, x)$-измеримых и непрерывных по Липшицу относительно x. В этом случае можно доказать, что существует единственный (до неразличимости) $\mathbb{F}$-согласованный непрерывный процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$, такой, что следующее равенство выполнено (п. н.) для любого $t \geq 0$:

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) \int_0^t \tilde{b}_s\big(X_s(\omega)\big)ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s\big(X_s(\omega)\big)dW_s\ . \qquad (9.3)$$

Выражение (9.3) называется *стохастическим дифференциальным уравнением* с коэффициентами $\tilde{b}$ и $\tilde{\sigma}$, а X – его *сильное решение*, известное также как *диффузионный процесс* с параметрами *сноса* $\tilde{b}$ и *диффузии* $\tilde{\sigma}$.

Заметим, что впервые общая конструкция построения диффузионных процессов была дана Колмогоровым в терминах Марковских переходных вероятностей без использования техники стохастического интегрирования. Он также исследовал гладкие преобразования диффузионного процесса, а его формулы для преобразованных коэффициентов сноса и диффузии полностью согласуются с формулой Ито (9.2).

Аналогично тому как класс диффузионных процессов исчерпывается решениями стохастических дифференциальных уравнений, класс случайных процессов M, согласованных с фильтрацией $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$, порождаемой Винеровским процессом W, и таких, что

$$E|M_t| < \infty \text{ и } E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \ (P - \text{п. н.}) \,, \tag{9.4}$$

исчерпывается стохастическими интегралами $\int_0^t \varphi_s dW_s$.

Процесс M, удовлетворяющий (9.4), называется *мартингалом*. Следующая *теорема о мартингальном представлении* играет ключевую роль в дальнейшем изложении:

Мартингал $M = (M_t,\, \mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ может быть представлен в виде

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s dW_s,$$

где φ – прогрессивно измеримый случайный процесс.

Как отмечалось ранее, одним из свойств стохастического интеграла является его мартингальность, а теорема о мартингальном представлении представляет собой лишь утверждение об отсутствии других мартингалов относительно фильтрации $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$.

Приведём также векторную форму процесса Ито (9.1) и формулы Ито (9.2). В частности, (9.2) можно рассматривать как векторное уравнение с $b_t = \left(b_t^1,\ \dots,\ b_t^d\right)$, $\sigma_t = \left(\sigma_t^{ij}\right)_{j=1,\,\dots,\,d_1}^{i=1,\,\dots,\,d}$ и $W_t = \left(W_t^1,\ \dots,\ W_t^d\right)$. В этом случае для гладкой функции $F\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^1$ из класса $C^{1,2}$ формула Ито (9.2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F(t,\, X_t) = F(0,\, X_0) &\\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s,\, X_s) + \sum_{t=1}^{d} b_s^i \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,\, X_s) \right.\\ &\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s,\, X_s) \sum_{k=1}^{d} \sigma_s^{ik}\sigma_s^{jk}\right] ds \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,\, X_s)\sigma_s^{ij} \sum_{k=1}^{d} \sigma_s^{jk} dW_s^j\,.$$

Структура диффузионного процесса, как и процесса Ито, определяется коэффициентами сноса и диффузии. Идея совмещения в структуре процесса низкочастотной компоненты (функция ограниченной вариации) и высокочастотной компоненты (мартингал) приводит к более широкому классу процессов, называемых *семимартингалами*.

9.2 Элементы общей теории случайных процессов

Рассмотрим в качестве дополнения к стохастическому базису $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ P)$ следующие две σ-алгебры на $\mathbb{R}_+ \times \Omega$:

- σ-алгебра $\mathcal{P}$, порождаемая множеством всех $\mathbb{F}$-согласованных непрерывных процессов;
- σ-алгебра $\mathcal{O}$, порождаемая множеством всех $\mathbb{F}$-согласованных непрерывных справа процессов.

Данные σ-алгебры называются *предсказуемой* и *опциональной*, а соответствующие $\mathcal{P}$-измеримые и $\mathcal{O}$- измеримые процессы называют *предсказуемыми* и *опциональными*. Также можно привести другое, более конструктивное описание этих σ-алгебр, используя понятие *моментов остановки*. Напомним, что случайная величина $\tau\colon \Omega \to [0,\ \infty]$ называется *моментом остановки* (*Марковским моментом*), если для каждого $t \geq 0$ выполнено $\{\omega\colon \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Любое подмножество $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ называется *случайным множеством*. Важными примерами таких множеств являются *стохастические интервалы*: для Марковских моментов τ и σ,

$$[\![\sigma,\ \tau[\![= \{(t,\ \omega)\colon \sigma(\omega) \leq t < \tau(\omega) < \infty\},$$

$$[\![\sigma,\ \tau]\!] = \{(t,\ \omega)\colon \sigma(\omega) \leq t \leq \tau(\omega) < \infty\},$$

и т. д., а также их *графики* $[\![\tau]\!]$, $[\![\sigma]\!]$.

Для $A \in \mathcal{F}_0$ определим момент остановки:

$$0_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \in A \\ \infty, & \text{если } \omega \notin A \end{cases}.$$

Тогда σ-алгебры $\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}$ допускают следующее описание в терминах стохастических интервалов:

$$\mathcal{P} = \sigma\{[\![0_A]\!] \text{ и } [\![0,\ \tau]\!]\colon A \in \mathcal{F}_0,\ \tau \text{ момент остановки}\},$$

$$\mathcal{O} = \sigma\{[\![0,\ \tau[\![\colon \tau \text{ момент остановки}\}.$$

Момент остановки τ называется *предсказуемым*, если его график – предсказуемое множество. В данном случае можно найти неубывающую последовательность Марковских моментов $(\tau_n)_{n\geq 1}$, приближающих τ в смысле:

$$\tau(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega),$$

$$\tau_n(\omega) < \tau(\omega), \text{ на } \{\omega\colon \tau(\omega) > 0\}.$$

Для предсказуемого процесса $X = (X_t)_{t\geq 0}$ моменты его скачков $\Delta X_t = X_t - X_{t\_}$ полностью исчерпываются последовательностью предсказуемых моментов остановки $(\tau_n^X)_{n\geq 1}$ с непересекающимися графиками:

$$\{(t,\ \omega)\colon \Delta X_t(\omega) \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1} [\![\tau_n^X]\!].$$

Процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ называется квазинепрерывным *слева*, если он не «нагружает» предсказуемые моменты остановки: для любого предсказуемого Марковского моментаσ выполнено $\Delta X_\sigma = 0$ (п.н.).

Момент остановки σ называется *тотально недостижимым*, если для любого предсказуемого момента остановки τ имеет место соотношение:

$$P\{\omega: \sigma(\omega) = \tau(\omega) < \infty\} = 0.$$

Это означает, что моменты скачков квазинепрерывного слева процесса $X = (X_t)_{t\geq 0}$ полностью исчерпываются последовательностью тотально недостижимых моментов остановки.

Мартингал $M = (M_t)_{t\geq 0}$ является *равномерно интегрируемым* если

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{t\geq 0} E|M_t| 1_{\{\omega:|M_t|>c\}} = 0.$$

Обозначим $\mathcal{M}$ класс равномерно интегрируемых мартингалов с начальным значением 0. Для любого $M \in \mathcal{M}$, существует интегрируемая случайная величина M_∞ такая, что $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ (п. н.), $E|M_t - M_\infty| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и $E(M_\infty|F_t) = M_t$ (п. н.).

Мартингал $M = (M_t)_{t\geq 0}$ является *квадратично интегрируемым* ($M \in \mathcal{M}^2$) если $\sup_t E\,|M_t|^2 < \infty$. Далее, множество процессов с конечной (интегрируемой) вариацией на каждом конечном промежутке обозначается $\mathcal{V}(\mathcal{A})$, а подмножество неубывающих процессов данного класса $\mathcal{V}^+(\mathcal{A}^+)$.

Процесс $M = (M_t)_{t\geq 0}$, $M_0 = 0$ называется *локальным мартингалом* ($M \in \mathcal{M}_{loc}$), если существует последовательность моментов остановки $\tau_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ такая, что $M^{\tau_n} = \left(M_{t\wedge\tau_n}\right)$ принадлежит классу $\mathcal{M}$ для любого n = 1,2,.... Классы $\mathcal{M}^2_{loc}$, $\mathcal{A}^+_{loc}$, $\mathcal{A}_{loc}$ определяются аналогичным способом в соответствии с указанной *процедурой локализации*, а соответствующие процессы называются *локально квадратично интегрируемыми мартингалами*, и т. д.

Процесс $A \in \mathcal{V}^+ \equiv \mathcal{V}^+_{loc}$, может быть представлен в виде суммы чисто непрерывной компоненты A^c и чисто разрывной компоненты A^d:

$$A_t = A^c_t + A^d_t,$$

где $A^d_t = \sum_{n\geq 1} d_n 1_{\{\omega:\tau_n(\omega)\leq t\}}$, а последовательность Марковских моментов $(\tau_n)_{n\geq 1}$ исчерпывает моменты скачков процесса A.

Если в определении мартингала заменить равенство неравенством $E(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$ (п. н.) (соответственно, $E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$ (п. н.)), тогда процесс $M = (M_t,\ \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ называется *субмартингалом* (соответственно, *супермартингалом*). Оказывается, что отмеченные процессы формируются из локальных мартингалов (мартингалов) и возрастающих предсказуемых процессов. Например, любой неотрицательный супермартингал M может быть единственным образом представлен в виде *разложения Дуба-Мейера*: для любого $t \geq 0$

$$M_t = m_t - A_t,$$

где $m \in M_{loc}$, $A \in \mathcal{A}^+_{loc} \cap \mathcal{P}$.

В частности, для $B \in \mathcal{A}^+_{loc}$, существует единственный предсказуемый процесс (*компенсатор*) $\tilde{B} \in \mathcal{A}^+_{loc} \cap \mathcal{P}$, такой, что $B - \tilde{B} \in \mathcal{M}_{loc}$.

Разложение Дуба-Мейера подразумевает, что для любого $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ существует его *квадратическая характеристика* $< M,\ M >$, которая является предсказуемым процессом из класса $\mathcal{A}_{loc}^{+}$ таким, что $M^2 - \langle M, M\rangle \in \mathcal{M}_{loc}$. Для двух мартингалов $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^2$ можно также определить их *совместную квадратическую характеристику* $\langle M, N\rangle \in \mathcal{A}_{loc} \cap \mathcal{P}$, обладающую свойством: $MN - \langle M, N\rangle \in \mathcal{M}_{loc}$. Произвольный $M \in \mathcal{M}_{loc}$ не имеет такой характеристики. Тем не менее, выполнено следующее важное разложение на чисто непрерывную компоненту M^c и чисто разрывную компоненту M^d:

$$M_t = M_t^c + M_t^d,$$

где M^c – непрерывный локальный мартингал ($M^c \in \mathcal{M}_{loc}^c$), а M^d принадлежит классу $\mathcal{M}_{loc}^d$ чисто разрывных локальных мартингалов, который определён условием $KL \in \mathcal{M}_{loc}$ для любых $K \in \mathcal{M}_{loc}^c$ и $L \in \mathcal{M}_{loc}^d$.

Далее, для $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$, введём их *совместную квадратическую характеристику* в следующем виде:

$$[M, N]_t = \langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{0<s\le t} \Delta M_s \Delta N_s.$$

В частности, для $M \equiv N \in \mathcal{M}_{loc}$ имеем

$$[M, M] - \langle M, M\rangle \in \mathcal{M}_{loc}.$$

Предположим, что $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$ и предсказуемый процесс φ такие, что интеграл Лебега-Стилтьеса (для почти всех ω)

$$\varphi^2 \circ \langle M, M\rangle_t = \int_0^t \varphi_s^2 d\langle M, M\rangle_s$$

определён и принадлежит классу $\mathcal{A}_{loc}^{+}$. Тогда *стохастический интеграл*

$$\varphi * M_t = \int_0^t \varphi_s dM_s$$

определяется как процесс из $\mathcal{M}_{loc}^2$ такой, что (п. н.)

$$\Delta(\varphi * M_t) = \varphi_t \Delta M_t \text{ и } \langle \varphi * M, \varphi * M\rangle_t = \varphi^2 \circ \langle M, M\rangle_t.$$

Класс $\mathcal{M}_{loc}^2$ содержит всевозможные стохастические интегралы относительно заданного $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$ как подпространство. Следовательно, любой другой мартингал $N \in \mathcal{M}_{loc}^2$ должен иметь разложение на две соответствующие проекции (на отмеченное подпространство и его дополнение). Данная идея приводит к *разложению Кунита-Ватанабе*:

$$N_t = M_t' + \int_0^t \varphi_s dM_s,$$

где φ – предсказуемый процесс, а $M' \in \mathcal{M}_{loc}^2$ – ортогональный M в смысле $\langle M, M'\rangle = 0$.

Семимартингал определяется как процесс, представимый в виде:

$$X_t = X_0 + A_t + M_t, \tag{9.5}$$

где $A \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{M}_{loc}$, и $X_0 - \mathcal{F}_0$ – измеримая случайная величина.

Класс семимартингалов, как и классы процессов Ито и диффузионных процессов, инвариантен относительно гладкой замены переменной. Данное утверждение составляет основу соответствующего *обобщения формулы Ито*, данного Долеан и Мейером:

Пусть X – семимартингал (9.5) со значениями в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда для всех $t \geq 0$ (п. н.):

$$\begin{aligned} F(X_t) = F(X_0) &+ \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{s-}) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,\, j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d\left\langle X^{c,\, i},\, X^{c,\, j} \right\rangle_s + \\ &+ \sum_{0<s\leq t} \left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_{s-}) \Delta X_s^i \right], \end{aligned} \tag{9.6}$$

где $X^c = M^c$ непрерывная часть локального мартингала M.

Существование стохастического интеграла относительно семимартингала позволяет рассматривать соответствующие стохастические интегральные (дифференциальные) уравнения. Наиболее значимыми для нас являются *линейные стохастические уравнения*:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t Y_{s-} dX_s, \tag{9.7}$$

где X – заданный семимартингал (9.5).

Решение Y уравнения (9.7) определяется с помощью *стохастической экспоненты*:

$$\epsilon_t(X) = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c,\, X^c \rangle_t} \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \tag{9.8}$$

в следующем виде $Y_t = Y_0 \epsilon_t(X)$.

Отметим ключевые *свойства стохастической экспоненты* (9.8):

• $\epsilon_t(X)$ – процесс ограниченной вариации или локальный мартингал, если процесс X является таковым;

- $\epsilon_t^{-1}(X) = \epsilon_t(-X^*)$, где $X_t^* = X_t - \langle X^c,\, X^c \rangle_t - \sum_{s\leq t} \frac{(\Delta X_s)^2}{1 + \Delta X_s}$, $\Delta X_s \neq -1$;
- $\epsilon_t(X)\epsilon_t(X') = \epsilon_t(X + X' + [X,\, X'])$ (правило умножения стохастических экспонент).

Предположим, что помимо исходной меры на стохастическом базисе $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{F},\, P)$ задана другая мера $\tilde{P}$, локально эквивалентная P с локальной плотностью $(Z_t)_{t\geq 0}$. Эквивалентность подразумевает строгую положительность Z_t (P-п. н.) для $t \geq 0$. Таким образом, можно определить локальный мартингал $N = (N_t)_{t\geq 0}$ относительно $P\left(N \in \mathcal{M}_{loc}(P)\right)$ как стохастический интеграл $N_t = \int_0^t Z_{s-}^{-1} dZ_s$, что приводит к представлению Z_t в форме стохастической экспоненты $Z_t = \epsilon_t(N)$. Аналогично диффузионному процессу, наследующему свойства Винеровского процесса при преобразовании меры с помощью экспоненты Гирсанова, заданный семимартингал R приобретает свойства локального мартингала относительно меры $\tilde{P}$ с плотностью Z_t, выраженной в форме стохастической экспоненты:

$$R \in \mathcal{M}_{loc}(\tilde{P}) \Leftrightarrow ZR \in \mathcal{M}_{loc}(P).$$

Существует другая конструкция (локально) эквивалентной меры $\tilde{P}$. Опишем её для исключительно важного подкласса семимартингалов, называемого процессами Леви. Процесс с действительными значениями $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $X_0 = 0$, называется процессом Леви, если выполнены свойства:

- $X_t - X_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s^X = \sigma\{X_u,\ u \leq s\}$ для любых $s \leq t < \infty$;
- $X_{t+s} - X_s$ и X_s имеют одинаковое распределение для всех $s,\ t \geq 0$;
- X *непрерывен по вероятности*, то есть $P\{\omega: |X_t - X_s| > \epsilon\} \to 0$ при $s \to t$ *для любого* $\epsilon > 0$.

Последнее свойство означает, что процесс X должен быть квазинепрерывным слева.

Если $Ee^{\alpha X_t} < \infty$, $\alpha > 0$, то процесс $L_t = \frac{e^{\alpha X_t}}{Ee^{\alpha X_t}}$, $L_0 = 1$, является положительным мартингалом. Данный мартингал порождает (локально) эквивалентную меру $\tilde{P}$ с (локальной) плотностью $\frac{d\tilde{P}_t}{dP_t} = L_t$. Такая конструкция $\tilde{P}$ известна в финансовой математике и актуарной науке как *преобразование Эсшера* (*Esscher transform*).

9.3 Применения к математическим финансам

В дальнейшем изложении часто будет использоваться факт того, что любой мартингал может быть представлен в виде стохастического интеграла относительно некоторого базисного мартингала, а также разложение Дуба-Мейера относительно некоторого семейства мер. Для заданного процесса $X = (X_t)_{t\geq 0}$ обозначим $\mathcal{M}(X,\ P)$ множество всех мер $\tilde{P} \sim P$ таких, что X – локальный мартингал относительно $\tilde{P}$. Данное множество будем называть *семейством мартингальных мер*.

Первое ключевое наблюдение в этом направлении касается структуры неотрицательных процессов, которые являются локальными мартингалами относительно любой $\tilde{P} \in \mathcal{M}(X,\ P)$:

Если $\mathcal{M}(X,\ P) \neq \emptyset$, тогда неотрицательный процесс $M \in \mathcal{M}_{loc}(\tilde{P})$ для любой $\tilde{P} \in \mathcal{M}(X,\ P) \Leftrightarrow$ существует предсказуемый процесс φ такой, что для любого t:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s dX_s. \tag{9.9}$$

Второе ключевое наблюдение приводит к описанию структуры неотрицательных семимартингалов относительно любой $\tilde{P} \in \mathcal{M}(X,\ P)$ (*опциональное разложение* или *равномерное разложение Дуба-Мейера*):

Пусть $\mathcal{M}\ X,\ P\ \neq \emptyset$ и V – неотрицательный процесс. Тогда V является супермартингалом для любой $\tilde{P} \in \mathcal{M}(X,\ P) \Leftrightarrow$ существует предсказуемый процесс φ и неотрицательный опциональный процесс C такие, что для всех $t \geq 0$ выполнено равенство:

$$V_t = V_0 + \int_0^t \varphi_s dX_s - C_t. \tag{9.10}$$

Теперь можно в схематической форме описать важность сформулированной выше техники для математических финансов.

На заданном стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ P)$ определим $(B,\ S)$-рынок как пару положительных семимартингалов B и S. Значения B_t и S_t интерпретируются как цены безрискового актива B и рискового актива S. Пара $\pi_t = (\beta_t,\ \gamma_t)$ случайных процессов с предсказуемой компонентой γ_t определяется как *портфель* или *инвестиционная стратегия*. Для каждого портфеля задан его *капитал* (стоимость)

$$X_t^\pi = X_t^\pi(x) = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{9.11}$$

где $X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = x$.

Для простоты изложения, будем предполагать, что B и S одномерны. Все результаты ниже останутся справедливыми и для d-мерного актива $S = \left(S^1,\ \dots,\ S^d\right)$ с d-мерной стратегией $\gamma = \left(\gamma^1,\ \dots,\ \gamma^d\right)$, если положить $\gamma_t S_t = \sum_{i=1}^d \gamma_t^i S_t^i$.

Отношение $X_t = \frac{S_t}{B_t}$ называется дисконтированной стоимостью, а $\frac{X_t^\pi}{B_t}$ – дисконтированным капиталом стратегии π.

Рассмотрим $\beta, \gamma \in \mathcal{V}$, и с помощью формулы Ито из (9.11) найдём, что

$$\frac{X_t^\pi}{B_t} = \frac{X_0^\pi}{B_0} + \int_0^t d\beta_u + \int_0^t \frac{S_{u-}}{B_{u-}} d\gamma_u + \int_0^t \gamma_u d\left\langle \frac{S}{B} \right\rangle_u. \tag{9.12}$$

Последнее слагаемое в (9.12) имеет понятную экономическую интерпретацию – это накопленные доходы/потери портфеля от изменения цены акции за временной промежуток $[0,\ t]$. Таким образом, разумно выделять портфели π, для которых выполнено соотношение:

$$\frac{X_t^\pi}{B_t} = \frac{X_0^\pi}{B_0} + \int_0^t \gamma_u \frac{dS_u}{B_u}. \tag{9.13}$$

Такие стратегии называются *самофинансируемыми*, и их множество обозначается SF.

Будем говорить, что $(B,\ S)$-рынок допускает арбитраж в момент времени $T > 0$, если существует стратегия $\tilde{\pi} \in SF$ такая, что $X_0^{\tilde{\pi}} = 0,\ X_T^{\tilde{\pi}} \geq 0$, и $P\left(\omega\colon X_T^{\tilde{\pi}} > 0\right) > 0$. В этом случае стратегия $\tilde{\pi}$ называется *арбитражной стратегией*. Известно, что для многих финансовых рынков ($(B,\ S)$-рынков) отсутствие арбитража может быть сформулировано в терминах мартингальных мер следующим образом:

$$\mathcal{M}(X,\ P) \neq \emptyset, \text{ где } X = \frac{S}{B}.$$

Расширим множество SF, определённое с помощью (9.13), сформировав больший класс стратегий π с потреблением C – неотрицательным и неубывающим процессом, для которых

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u - C_t \tag{9.14}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{X_t^\pi}{B_t} = \frac{X_0^\pi}{B_0} + \int_0^t \gamma_u dX_u - D_t, \tag{9.15}$$

где $D_t = \int_0^t B_u^{-1} dC_u$.

Далее отметим естественную интерпретацию суммы второго и третьего членов в (9.12) как накопленного (дисконтированного) потребления.

Оба отмеченных выше класса стратегий допускают следующую *мартингальную характеризацию*:

Если $\mathcal{M}(X,\ P)$ состоит из единственной меры P^* и Y – неотрицательный процесс, то

• Y – дисконтированный капитал самофинансируемой стратегии $\Leftrightarrow$ Y является локальным мартингалом относительно P^*;

• Y – дисконтированный капитал стратегии с потреблением $\Leftrightarrow$ Y является супермартингалом относительно P^*.

В первом случае доказательство следует из теоремы о мартингальном представлении (9.9), а во втором – из разложения Дуба-Мейера или его обобщения (9.10).

Платёжным обязательством с временем исполнения T, будем называть любую неотрицательную $\mathcal{F}_T$-измеримую случайную величину f. Если обязательство f представляет собой функцию выплаты по опциону, тогда опцион называется Европейским.

Стратегию $\pi \in SF$ будем называть *хеджем* (*хеджирующей стратегией*, *совершенным хеджем*) для f (или для опциона с функцией выплаты f), если $X_T^\pi(x) \geq f$ (п. н.) для некоторого начального капитала x.

Если для некоторого класса хеджирующих стратегий π, существует стратегия π^* такая, что $X_t^{\pi^*} \leq X_t^\pi$ (п. н.) для всех $t \in [0,\ T]$, тогда π^* называется *минимальным хеджем* (для данного класса). Очень часто минимальный хедж совпадает с *реплицирующей стратегией* π^*, для которой $X_T^{\pi^*} = f$ (п. н.) . В этом случае f называют *достижимым платёжным обязательством*. Рынок называется *полным,* если любое платёжное обязательство на нём достижимо. Для многих финансовых рынков данное понятие эквивалентно *единственности* меры P^*, то есть $\mathcal{M}(X,\ P) = \{P^*\}$.

Предполагая единственность меры P^* (*полный рынок*) и $E^*\left(\frac{f}{B}\right) < \infty$, можно доказать (с помощью мартингального представления) существование и единственность минимального хеджа $\pi_t^* = (\beta_t^*,\ \gamma_t^*) \in SF$ такого, что

$$\frac{X_t^{\pi^*}}{B_t} = E^*\left(\frac{f}{B_T}\middle|F_t\right) = \frac{X_0^{\pi^*}}{B_0} + \int_0^t \gamma_u^* dX_u\,,\ \ (\text{п. н.}),\ t \in [0,\ T]. \tag{9.16}$$

Из (9.16) следует, что *справедливая* стоимость опциона с функцией выплаты f должна равняться $E^*\left(\frac{f}{B_T}\right)$. Этот подход является методологической базой для расчёта опционов на полных рынках.

В случае *неполного рынка*, когда множество $\mathcal{M}(X,\ P)$ состоит из более чем одного элемента, задачи расчёта и хеджирования могут быть решены в рамках класса стратегий с потреблением (см. (9.14) – (9.15)). А именно, для заданного платёжного обязательства f, удовлетворяющего условию $\sup\limits_{\tilde{P}\in\mathcal{M}(X,\ P)} \tilde{E}\left(\frac{f}{B_T}\right) < \infty$, существует единственный минимальный хедж π^* с дисконтированным потреблением D^* такой, что

$$\frac{X_t^{\pi^*}}{B_t} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tilde{P}\in\mathcal{M}(X,\ P)} \tilde{E}\left(\frac{f}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \frac{X_0^{\pi^*}}{B_0} + \int_0^t \gamma_u^* dX_u - D_t^*. \tag{9.17}$$

Доказательство основывается на опциональном разложении. Из (9.17) следует, что *верхняя* начальная стоимость опциона f равняется $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\tilde{P}\in\mathcal{M}(X,\ P)} \tilde{E}\left(\frac{f}{B_T}\right)$. Эти результаты составляют естественную методологию (*совершенного*) *хеджирования* и расчёта платёжных обязательств на неполных рынках.

Подытоживая приведённые результаты, можно говорить не только о необходимости установить, что класс $\mathcal{M}(X,\ P)$ не пуст, но и о построении мартингальных мер. Продемонстрируем метод нахождения таких мер для общей модели $(B,\ S)$-рынка, цены B_t и S_t в которой удовлетворяют линейному стохастическому дифференциальному уравнению относительно семимартингалов. Большинство финансовых рынков моделируются именно в таком виде, а значит, результаты для других моделей рынка могут быть получены как следствия из общего случая.

Предположим, что $(B,\ S)$-рынок определяется двумя уравнениями:

$$\begin{gathered} B_t = B_0 + \int_0^t B_{u-} dh_u\,,\ \ \Delta h_u > -1, \\ S_t = S_0 + \int_0^t S_{u-} dH_u\,,\ \ \Delta H_u > -1 \end{gathered} \tag{9.18}$$

или

$$B_t = B_0 \epsilon_t(h) \ \text{ и } S_t = S_0 \epsilon_t(H),$$

где h и H – заданные семимартингалы.

Главная задача здесь состоит в нахождении условий, при которых процесс $X = \frac{S}{B}$ является локальным мартингалом относительно меры P^*, эквивалентной P:

$$P^* \in \mathcal{M}(X,\ P) \Leftrightarrow X = \frac{S}{B} \in \mathcal{M}_{loc}(P^*). \tag{9.19}$$

Исследуем (9.19) для рынка (9.18), когда исходная мера P является мартингальной. В соответствии со свойствами стохастических экспонент получим:

$$\begin{aligned}X_t &= X_0\epsilon_t(H)\epsilon_t^{-1}(h) = X_0\epsilon_t(H)\epsilon_t(-h^*)\\ &= \epsilon_t\left(H - h + \langle h^c,\, h^c\rangle + \sum\frac{(\Delta h)^2}{1+\Delta h} - \langle H^c,\, h^c\rangle\right.\\ &\qquad\left. - \sum\frac{\Delta H\Delta h}{1+\Delta h}\right)\\ &= X_0\epsilon_t\left(H - h + \langle h^c,\, h^c - H^c\rangle + \sum\frac{\Delta h(\Delta h - \Delta H)}{1+\Delta h}\right).\end{aligned}\tag{9.20}$$

Обозначим $\Psi_t(h,\, H) = H_t - h_t + \langle h_t^c,\, h^c - H^c\rangle + \sum\limits_{s\le t}\frac{\Delta h_s(\Delta h_s - \Delta H_s)}{1+\Delta h_s}$ и перепишем (9.20) в виде

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t X_{s-}d\Psi_s(h,\, H).$$

Для проверки включения $X \in \mathcal{M}_{loc}(P)$, необходимо установить:

$$\Psi(h,\, H) \in \mathcal{M}_{loc}(P).$$

Чтобы найти подходящие условия для справедливости соотношения (9.19), рассмотрим локальную плотность $Z_t^* = \frac{dP_t^*}{dP_t}$ меры P^* относительно P. Тогда имеем

$$X \in \mathcal{M}_{loc}(P^*) \Leftrightarrow ZX \in \mathcal{M}_{loc}(P) \tag{9.21}$$

и

$$Z_t = \epsilon_t(N), \tag{9.22}$$

где $N_t = \int_0^t Z_{s-}^{-1}dZ_s \in \mathcal{M}_{loc}(P)$.

Таким образом, можно преобразовать (9.21) с помощью (9.22) в следующий вид

$$X \in \mathcal{M}_{loc}(P^*) \Leftrightarrow X\epsilon(N) \in \mathcal{M}_{loc}(P). \tag{9.23}$$

Принимая во внимание (9.20), имеем

$$X_t\epsilon_t(N) = X_0\epsilon_t\big(\Psi(h,\, H)\big)\epsilon_t(N),$$

и, согласно правилу умножения стохастических экспонент, приходим к равенству

$$X_t\epsilon_t(N) = X_0\epsilon_t\big(\Psi(h,\, H,\, N)\big), \tag{9.24}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_t(h,\, H,\, N) = H_t - h_t + N_t + \langle (h-N)^c,\, (h-H)^c\rangle_t\\ + \sum_{s\le t}\frac{(\Delta h_s - \Delta N_s)(\Delta h_s - \Delta H_s)}{1+\Delta h_s}.\end{aligned}$$

Из (9.24) следует, что для проверки (9.23) необходимо определить, когда выполняется соотношение

$$\Psi(h,\, H,\, N) \in \mathcal{M}_{loc}(P). \tag{9.25}$$

Продемонстрируем действенность приведённой методологии для классической модели Блэка-Шоулса:

$$\begin{aligned}dB_t &= rB_tdt,\ \ B_0 = 1\\ dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ \ S_0 > 1,\end{aligned}\tag{9.26}$$

где $r,\ \mu \in \mathbb{R}^+$, волатильность $\sigma > 0$, и $W = (W_t)_{t\ge 0}$ – Винеровский процесс, порождающий фильтрацию $\mathbb{F}$.

В рамках модели (9.26), $h_t = rt$, а $H_t = \mu dt + \sigma dW_t$, и поскольку W является единственным источником неопределённости, естественно искать локальный мартингал N в форме $N_t = \varphi \cdot W_t$. Используя это наблюдение, из (9.24) получаем, что

$$\Psi_t(t,\, H,\, N) = \mu dt + \sigma dW_t - rt + \varphi W_t + \varphi\sigma t = (\mu - r + \varphi\sigma)t + (\sigma + \varphi)W_t.$$

Таким образом, условие (9.25) будет выполнено, если $\mu - r + \varphi\sigma = 0$ или $\varphi = -\frac{\mu - r}{\sigma}$. Используя (9.22), можно построить (локальную) плотность

$$Z_t^* = \frac{dP_t^*}{dP_t} = \epsilon_t(N) = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \tag{9.27}$$

Более того, вследствие теоремы Гирсанова, процесс $W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ будет Винеровским относительно единственной мартингальной меры P^* с плотностью, заданной соотношением (9.27).

Глава 10
МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА С ПОМОЩЬЮ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ФОРМУЛЫ РАСЧЁТА

Данная глава посвящена всестороннему изучению модели Блэка-Шоулса и вопросов хеджирования и оптимального инвестирования. В ней показано, как модель Блэка-Шоулса может быть сделана двумерной с доказательством формулы Маргрейба. Изучаются также вопросы, связанные с расчётами, учитывающими транзакционные издержки, дивиденды, спрэд между ставками кредита и депозита. Наконец, для опционов на облигации выводится формула Джамшидана (см. [36], [6], [14], [17], [33], [11] и [1]).

10.1 Модель Блэка-Шоулса: задачи хеджирования и оптимального инвестирования

Предположим, что на стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ P)$ заданы процессы B_t и S_t в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_t &= e^{rt}, \\ S_t &= S_0 e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t},\ \ S_0>0\,, \end{aligned} \tag{10.1}$$

где $r \geq 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$, а $W_t = (W_t)_{t\geq 0}$ – Винеровский процесс, порождающий фильтрацию $\mathbb{F}$.

Применяя формулу Ито к заданным процессам, имеем

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad \text{при} \quad X_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t,\ \ X_0 = 0\,.$$

И далее получим, что

$$S_t = S_0 + \int_0^t \left[S_0 e^{X_u}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{X_u}\sigma^2\right] du + \int_0^t \sigma S_0 e^{X_u} du$$

$$= S_0 + \int_0^t S_u \mu du + \int_0^t S_u \sigma dW_u = S_0 + \int_0^t S_u(\mu du + \sigma dW_u).$$

Таким образом, модель (10.1) может быть представлена в следующей эквивалентной дифференциальной форме, называемой *моделью Блэка-Шоулса*:

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, \\ dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Параметры $r,\ \mu$ и σ модели (10.2) обозначают *процентную ставку, норму доходности* и *волатильность* $(B,\ S)$-рынка.

На практике параметры μ и σ неизвестны и должны быть оценены, например, на основании статистических данных о S_t. Если временной промежуток между наблюдениями равен t, тогда имеем

$$S_t = S_{t-\Delta} e^{R_t}, \quad \text{где} \qquad R_t \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta,\ \sigma^2\Delta\right),$$

и следовательно, μ и σ могут быть приближенно оценены, используя факт того, что R нормально распределённая величина с параметрами $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta$ и $\sigma^2\Delta,\ \Delta > 0$.

Замечание 10.1. Исторически первой моделью рынка являлась модель *Башелье*, в которой цена акции моделировалась процессом $W = (W_t)_{t\geq 0}$ в следующем смысле:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t,\ \ S_0 > 0. \tag{10.3}$$

Модель (10.3) не удовлетворяла условию положительности цены акции, что побудило П. Самуэльсона к введению модели (10.1), называемой *Геометрическим Броуновским Движением*.

Далее рассмотрим следующее линейное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = X_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \equiv X_t dY_t,$$

где X_0 – конечная (п. н.) случайная величина, и

$$Y_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

Случайные (в общем случае) функции μ_t и σ_t удовлетворяют некоторым условиям интегрируемости (например, μ_t и σ_t являются ограниченными). Введём *стохастическую экспоненту* относительно Y:

$$\varepsilon_t(Y) = \exp\left\{Y_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right\},$$

и получим, что

$$X_t = X_0\varepsilon_t(Y),\ \ t \geq 0.$$

Как и в биномиальном случае, можно переписать модель Блэка-Шоулса в терминах стохастических экспонент:

$$\begin{aligned} B_t &= B_0\varepsilon_t(rt), \\ S_t &= S_0\varepsilon_t(\mu t + \sigma W_t). \end{aligned} \tag{10.4}$$

Представление (10.4) полезно для исследования мартингальных свойств $(S_t)_{t\geq 0}$ и $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)_{t\geq 0}$.

Далее воспроизведем стандартные базовые обозначения, относящиеся к $(B,\,S)$-рынку (10.2). Если процессы $\beta = (\beta_t)_{t\leq T}$ и $\gamma = (\gamma_t)_{t\leq T}$ согласованы с фильтрацией $\mathbb{F}$, тогда $\pi = (\pi_t)_{t\leq T} \coloneqq (\beta_t,\,\gamma_t)_{t\leq T}$ называют *портфелем* или *стратегией* на $(B,\,S)$-рынке. *Капитал* (или *стоимость*) стратегии π в момент времени t определим следующим образом:

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Платёжное обязательство f_T с датой исполнения T определяется как $\mathcal{F}_T$-измеримая неотрицательная случайная величина. Будем говорить, что стратегия π *самофинансируемая*, если выполнено соотношение:

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t.$$

Самофинансируемая стратегия π называется *совершенным хеджем* платёжного обязательства f_T, если

$$X_T^\pi \geq f_T \quad \text{(п. н.)}.$$

Будем говорить, что π *реплицирует* f_T, если

$$X_T^\pi = f_T \qquad \text{(п. н.)}.$$

Хедж π^* называется *минимальным хеджем*, если для любой другой хеджирующей стратегии π и любого $t \leq T$:

$$X_t^{\pi^*} \leq X_t^\pi \qquad \text{(п. н.)}.$$

Цена платёжного обязательства f_T определяется в виде:

$$\mathbb{C}_T = X_0^{\pi^*}.$$

Будем называть $(B,\,S)$--рынок полным, если любое платёжное обязательство f_T, заданное на этом рынке, может быть *реплицировано* некоторой самофинансируемой стратегией. Вероятностная мера P^* является *мартингальной* (*риск-нейтральной*) вероятностью, если $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)_{t\geq 0}$ – мартингал относительно P^*. Как и в дискретном случае, P^* полностью определена плотностью Z_T^*:

$$Z_T^* = \exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T\right\}. \tag{10.5}$$

Согласно *теореме Гирсанова*, в данных условиях процесс

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$$

является Винеровским относительно новой меры P^* и исходной фильтрации $\mathbb{F}$. Это приводит к тому, что вероятность P^* с плотностью (10.5) является мартингальной мерой в модели (10.2), и следовательно, данный рынок является безарбитражным и полным.

Пусть F_Y и F_Y^* обозначают функции распределения случайной величины Y относительно вероятностных мер P и P^*, соответственно. Тогда равенство

$$\mu T + \sigma W_T = rT + \sigma W_T + (\mu - r)T = rT + \sigma\left(W_T + \frac{\mu - r}{\sigma}T\right) = rT + \sigma W_T^*$$

приводит к следующему соотношению

$$F^*_{\mu T + \sigma W_T} = F^*_{rT + \sigma W_T^*} = F_{rT + \sigma \mathrm{W}_T},$$

и следовательно,

$$F^*_{S_T} = F^*_{S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}} = F_{S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}}. \tag{10.6}$$

Согласно общей методологии расчёта платёжных обязательств на полных рынках имеем, что

$$\mathbb{C}_T = E^*\left(\frac{f_T}{B_T}\right)$$

для любого обязательства f_T.

Для Европейского опциона call с $f_T = (S_T - K)^+$, используя (10.6), получим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_T &= E^*\left(\frac{f_T}{B_T}\right) = e^{-rT} E^*\big((S_T - K)\big) \\
&= e^{-rT} E^*\left(\left(S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} - K\right)^+\right) \\
&= e^{-rT} E^*\left(\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^*\right\} - K\right)^+\right) \\
&= e^{-rT} E^*\left(\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} W_1^*\right\} - K\right)^+\right) \\
&= e^{-rT} E^*\left(\left(S_0 e^{rT} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\sqrt{T} W_1^*\right\} - K\right)^+\right) \\
&= e^{-rT} E\left(\left(a e^{b\xi - \frac{b^2}{2}} - K\right)^+\right),
\end{aligned} \tag{10.7}$$

где $a = S_0 e^{rT}$, $b = \sigma\sqrt{T}$, и $\xi \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$.

В данном случае также используется следующее свойство автомодельности Винеровского процесса:

$$W_T = \sqrt{T} W_1.$$

Замечая, что в (10.7)

$$E\left(\left(a e^{b\xi - \frac{b^2}{2}} - K\right)^+\right) = a\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) + \frac{1}{2}b^2}{b}\right) - K\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{1}{2}b^2}{b}\right),$$

приходим к формуле *Блэка-Шоулса*:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_T &= S_0\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) + \frac{1}{2}b^2}{b}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{K}\right) - \frac{1}{2}b^2}{b}\right) \\
&= S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}(d_-),
\end{aligned} \tag{10.8}$$

где

$$d_{\pm} = d_{\pm}(0) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Таким образом, получена «справедливая» безарбитражная цена Европейского опциона покупателя. Как и в случае биномиальной модели, выполнено соотношение *паритета цен покупателя-продавца*:

$$\mathbb{P}_T = \mathbb{C}_T - S_0 + Ke^{-rT}, \tag{10.9}$$

где P_T – цена Европейского опциона продавца.

Соотношение (10.9) позволяет рассчитать $\mathbb{P}_T$, используя (10.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_T &= -S_0\big(1 - \Phi(d_+)\big) + Ke^{-rT}\big(1 - \Phi(d_-)\big) \\ &= S_0\Phi(-d_+) + Ke^{-rT}\Phi(-d_-). \end{aligned} \tag{10.10}$$

Заметим, что цены $\mathbb{C}_T$ и $\mathbb{P}_T$ являются функциями $K,\ \sigma,$ и S_0. Разделив обе части равенства

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$$

на e^{rT} и взяв математические ожидания относительно мартингальной вероятности P^*, получим, что

$$\mathbb{C}_T(K,\ \sigma,\ S_0) - \mathbb{P}_T(K,\ \sigma,\ S_0) = E^*(S_T)e^{-rT} - Ke^{-rT} = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Наконец, используя формулу Блэка-Шоулса (10.8) и (10.10), находим:

$$\mathbb{P}_T(K,\ \sigma,\ S_0) = \mathbb{C}_T(K,\ \sigma,\ S_0) - S_0 + Ke^{-rT} = -S_0\big(1 - \Phi(d_+)\big) + Ke^{rT}\big(1 - \Phi(d_-)\big)$$

$$= (-S_0)\Phi\left(\frac{\ln\left(-\frac{S_0}{(-K)}\right) + T\left(r + \frac{(-\sigma)^2}{2}\right)}{-\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$-(-Ke^{-rT})\Phi\left(\frac{\ln\left(-\frac{S_0}{(-K)}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{-\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$= \mathbb{C}_T(-K,\ -\sigma,\ -S_0),$$

что отражает своеобразную *дуальность* цен Европейских опционов покупателя и продавца.

Также несложно рассчитать цену Европейского опциона покупателя в *произвольный* момент времени $t \in [0,\ T]$:

$$\mathbb{C}(t\, S_t) = \mathbb{C}_T(t,\ S_t) = S_t\Phi\big(d_+(t)\big) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\big(d_-(t)\big), \tag{10.11}$$

где

$$d_{\pm}(t) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T - t)\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

Эти наблюдения приводят к следующей структуре минимальной хеджирующей стратегии π^*:

$$\gamma_t^* = \Phi\big(d_+(t)\big) = \frac{\partial \mathbb{C}_T}{\partial S}(t,\, S_t),$$

$$\beta_t^* = -Ke^{-rT}\Phi\big(d_-(t)\big).$$

Поскольку цена опциона $\mathbb{C}_T(t,\, S_t)$ в (10.11) является функцией времени t, цены S_t, процентной ставки r и волатильности σ, разумно ввести так называемые «Греческие параметры», которые часто используются профессионалами в области риск-менеджмента:

Тета (Theta) –

$$\theta = \frac{\partial \mathbb{C}_T}{\partial t} = \frac{S_t \sigma \varphi\big(y_+(t)\big)}{2\sqrt{T-t}} - Kre^{-r(T-t)}\Phi\big(y_-(t)\big);$$

Дельта (Delta) –

$$\Delta = \frac{\partial \mathbb{C}_T}{\partial S} = \Phi\big(y_+(t)\big);$$

Ро (Rho) –

$$\rho = \frac{\partial \mathbb{C}_T}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi\big(y_-(t)\big);$$

Вега (Vega) –

$$\Upsilon = \frac{\partial \mathbb{C}_T}{\partial \sigma} = S_t \varphi\big(y_+(t)\big)\sqrt{T-t},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Проанализируем связь расчёта опционов с теорией дифференциальных уравнений в частных производных. Для этого рассмотрим модель (10.1) и Европейский опцион с достаточно гладкой функцией выплаты $f_T = f(S_T)$.

Обозначим

$$u(t,\, x) = E^*\left(e^{-r(T-t)} f\left(S_t \exp\left\{r(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\right) \middle| S_t = x\right)$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma y\sqrt{T-t}\right\}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy,$$

где E^* – математическое ожидание относительно мартингальной меры P^* с плотностью (10.5), $W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ – Винеровский процесс относительно меры P^* и $(t,\, x) \in [0,\, T] \times \mathbb{R}$..

Предположим, что $u \in C^{1,\,2}([0,\, T] \times \mathbb{R}$, что справедливо для опциона call вследствие формулы (10.11).

Заметим, что $u(t,\, S_t)$ является капиталом единственной реплицирующей стратегии платёжного обязательства $f(S_T)$ и $u(T,\, x) = f(x)$. Применяя формулу Ито к процессу $\left(\frac{u(t,\, S_t)}{B}\right)$, получим, что

$$\frac{u(t,\, S_t)}{B_t} = u(0,\, S_0) + \int\limits_0^t u'_x(v,\, S_v) d\left(\frac{S}{B}\right)_v +$$

$$+ \int\limits_0^t \Big[u'_t(v,\, S_v) + rS_v u'_x(v,\, S_v) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_v^2 u''_{xx}(v,\, S_v)$$

$$- ru(v,\, S_v)\Big] B_v^{-1} dv.$$

Процессы $\left(\frac{u(t,\, S_t)}{B_t}\right)$ и $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$ являются мартингалами относительно P^*. Следовательно, третий член правой части этого уравнения равняется нулю. Таким образом, получено следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$u'_t(t,\, x) + rxu'_x(t,\, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u''_{xx}(t,\, x) - ru(t,\, x) = 0 \qquad (10.12)$$

с граничным условием $u(T,\, x) = f(x)$.

Как мы видели ранее, данное уравнение есть *уравнение Блэка-Шоулса* и выполняется для целого класса Европейских опционов, включая опционы продавца и покупателя.

Далее рассмотрим *задачу оптимального инвестирования* в рамках модели Блэка-Шоулса (10.2), где оптимальность стратегии π^* определяется соотношением

$$\sup_{\pi \in SF} E(\ln X_T^{\pi}) = E\big(\ln X_T^{\pi^*}\big), \quad X_0^{\pi} = X_0^{\pi^*} = x. \qquad (10.13)$$

Аналогично случаю биномиального рынка, решение данной задачи оптимального инвестирования (10.13) сводится к следующей «мартингальной» задаче:

$$Y_T^*(x) = \sup_Y E(\ln Y_T(x)),$$

где супремум берётся по множеству всех положительных мартингалов относительно P^* с начальным значением x.

Рассмотрим следующий процесс и покажем, что он является *оптимальным* мартингалом в данной задаче:

$$Y_t^*(x) = E^*\left(\frac{x}{Z_T^*}\middle|\mathcal{F}_t\right), \quad t \in [0,\, T],$$

где

$$Z_T^* = \exp\left\{-\frac{\mu - r}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right\}$$

плотность единственной мартингальной меры P^* относительно P.

Как и в случае биномиального рынка, можно показать, что

$$E(\ln Y_T(x)) \le E(\ln Y_T^*(x)).$$

Тогда, используя мартингальную характеризацию самофинансируемой стратегии, получим, что

$$Y_t^* = \frac{X_t^{\pi^*}(x)}{B_t} = X_t^*$$

для некоторой самофинансируемой $\pi^* = (\beta_t^*,\, \gamma_t^*)_{t \le T}$.

Обозначим

$$\alpha_t^* = \frac{\gamma_t^* S_t}{X_t^{\pi^*}}$$

пропорцию рискового капитала в портфеле π^*. Согласно формуле Ито, или применяя (9.13), имеем, что

$$dX_t^* = d\left(\frac{X_t^{\pi^*}}{B_t}\right) = \gamma_t^* d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \gamma_t^* \frac{S_t}{B_t}\sigma\left[d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t\right)\right] =$$

$$= \gamma_t^* \frac{S_t}{B_t}\sigma dW_t^* = \alpha_t^* \sigma X_t^* dW_t^*.$$

Следовательно, $X_T^* = x\exp\left\{\sigma\alpha^* W_T + \alpha^*(\mu - r)T - \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha^*)^2 T\right\}$,

где $\alpha_t^* \equiv \alpha^*$.

С другой стороны, используя формулу для плотности Z_T^*, находим, что

$$X_T^* = \frac{x}{Z_T^*} = x\exp\left\{\frac{\mu - r}{\sigma}W_T + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right\}.$$

Сравнивая две полученные формулы, имеем выражение для оптимальной пропорции рискового капитала в портфеле

$$\alpha^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2},$$

которое называют *точкой Мертона*.

Пример 10.1. Рассчитаем цены Европейских опционов call и put в модели Блэка-Шоулса при $r = 0.02, T = \frac{215}{365}$, $S_0 = 100(\$)$, $K = 110(\$)$, $\mu = r$, $\sigma = 0.2$.

Решение.

Используя формулу Блэка-Шоулса (10.8), находим

$$\mathbb{C}_T = \mathbb{C}_T(K,\, S_0,\, \sigma) = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-)$$

$$= 100\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \frac{215}{365}\left(0.02 + \frac{(0.2)^2}{2}\right)}{0.2\sqrt{\frac{215}{365}}}\right) -$$

$$-110e^{-0.02\frac{215}{365}}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \frac{215}{365}\left(0.02 - \frac{(0.2)^2}{2}\right)}{0.2\sqrt{\frac{215}{365}}}\right) = 2.9484$$

Для вычисления стоимости Европейского опциона put воспользуемся паритетом цен опционов покупателя и продавца:

$$\mathbb{P}_T = \mathbb{P}_T(K,\, S_0,\, \sigma) = \mathbb{C}_T - S_0 + Ke^{-rT} = 2.9484 - 100 +$$
$$110e^{-0.02\frac{215}{365}} = 11.6601$$

10.2 О некоторых обобщениях модели Блэка-Шоулса. Формула Маргрейба

Далее рассмотрим модель, состоящую из банковского счёта B и *двух* рисковых активов S^i, $i = 1,\ 2$:

$$\begin{aligned} &dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \\ &dS_t^i = S_t^i\big(\mu_i dt + \sigma_i dW_t^i\big), \quad S_0^i > 0. \end{aligned} \tag{10.14}$$

В данном случае $\big(W_t^i\big)_{t\geq 0}$, $i = 1,\ 2$ – два стандартных коррелированных Винеровских процесса с $Cov(W_t^1,\ W_t^2) = \rho t,\ -1 < \rho \leq 1$, и постоянными $\mu_i,\ \sigma_i > 0$.

Каждая инвестиционная стратегия на рынке (10.14) состоит из β_t единиц актива B и γ_t^i единиц актива S^i, $i = 1,\ 2$. Будем использовать определения самофинансируемой и хеджирующей стратегий, введённые выше.

Сначала рассмотрим случай, когда $|\rho| < 1$. Будем искать мартингальную меру P^* через её плотность в виде

$$Z_T^* = \varepsilon_T(N),$$

где процесс ${}_t \equiv \varphi_1 W_t^1 + \varphi_2 W_t^2$ с некоторыми параметрами φ_1 и φ.

Чтобы определить данные параметры, воспользуемся фактом того, что процессы $\left(\frac{S_t^i}{B_t}\right)_{t\geq 0}$, $i = 1,\ 2$, должны быть мартингалами относительно P^* с плотностью Z_T^*. Таким образом, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &(\mu_1 - r)t + \sigma_1\varphi_1 t + \sigma_1\varphi_2\rho t = 0, \\ &(\mu_2 - r)t + \sigma_2\varphi_2 t + \sigma_2\varphi_1\rho t = 0. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Решая данную систему уравнений, получим следующие выражения для φ_1 и φ_2 в терминах параметров модели (10.14):

$$\varphi_1 = \frac{r(\sigma_2 - \sigma_1\rho) + \rho\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)},$$

$$\varphi_2 = \frac{r(\sigma_1 - \sigma_2\rho) + \rho\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)}.$$

Используя найденные параметры, получим явную формулу для плотности мартингальной вероятности

$$Z_T^* = \exp\left\{\varphi_2 W_T^1 + \varphi_2 W_T^2 - \frac{\sigma_\varphi^2}{2}T\right\}, \tag{10.16}$$

где

$$\sigma_\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\rho\varphi_1\varphi_2.$$

Заметим, что рынок (10.14) не обязательно является полным если один из рисковых активов *не торгуется на рынке*. В этом случае система (10.15) сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и допускает бесконечное количество решений, а следовательно, *бесконечное количество мартингальных мер*.

Пусть теперь $\rho = 1$. Данное условие подразумевает, что $W_t^1 = W_t^2 = W_t$. Для предотвращения существования арбитражных возможностей в модели (10.14), предположим, что

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma}. \tag{10.17}$$

При условии (10.17) мартингальная вероятность P^* определяется единственным образом посредством следующей формулы:

$$Z_T^* = \exp\left\{-\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}\right)^2 T\right\}.$$

Рассмотрим Европейский опцион *обмена* S^1 *на* S^2. Для расчёта данного опциона необходимо вычислить

$$E^*\left(\frac{(S_T^1 - S_T^2)^+}{B_T}\right). \tag{10.18}$$

Для этого потребуется следующий полезный факт для Гауссовских случайных величин.

Пусть $(X_1, \ \dots, X_n, Z)$ – совместно нормально распределены со средними значениями $(\mu_1, \ \dots, \mu_n, \mu_z)$, дисперсиями $(\sigma_1^2, \ \dots, \sigma_n^2, \sigma_z^2)$ и корреляциями $\{\rho_{ij}\}$ и $\{\rho_{iz}\}$. Выведем формулу для следующего математического ожидания

$$I = E\left[e^{-Z} \prod_{i=1}^{n} I(X_i < x_i)\right]. \tag{10.19}$$

Для начала преобразуем (10.19) к форме, в которой все средние значения = 0, а все дисперсии = 1:

$$I = e^{-\mu_z} E\left[e^{-\sigma_z\left(\frac{Z-\mu_x}{\sigma_x}\right)} \prod_{i=1}^{n} I\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} < \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right]$$

$$= e^{\mu_z} E\left[e^{-\sigma_z \tilde{Z}} \prod_{i=1}^{n} I\big(\tilde{X}_i < \tilde{x}_i\big)\right],$$

где

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}, \quad \tilde{z} = \frac{z - \mu_z}{\sigma_z}$$

и совместное распределение $\big(\tilde{X}_1, \ \dots, \tilde{X}_n, \tilde{Z}\big)$ является нормальным с нулевыми средними значениями, единичными дисперсиями и корреляциями $\{\rho_{ij}\}$ и $\{\rho_{iz}\}$.

Пусть $\boldsymbol{P}$ – корреляционная матрица, структурированная в виде

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{\rho}_{1z} \\ \boldsymbol{\rho}_{1z} & 1 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{P}_{11} = \big(\rho_{ij}\big)_{i,\, j=1,\, \dots,\, n}$, а $\boldsymbol{\rho}_{1z} = (\rho_{1z}, \ \dots, \rho_{nz})^*$.

Рассчитаем математическое ожидание в несколько этапов. Во-первых, в силу свойств условных математических ожиданий, заметим, что

$$I = e^{-\mu_z} E_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}\left[\psi\big(\widetilde{\boldsymbol{X}}; \boldsymbol{P}\big) \cdot \prod_{i=1}^{n} I\big(\tilde{X}_i < \tilde{x}_i\big)\right], \tag{10.20}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \left(\tilde{X}_1,\ \dots,\ \tilde{X}_n\right),$$

$$\psi\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}; \boldsymbol{P}\right) = E\left\{e^{-\sigma_z \tilde{Z}} \middle| \widetilde{\boldsymbol{X}}\right\}.$$

Воспользуемся фактом, заимствованным из теории многомерного статистического анализа, что условное распределение $\tilde{Z}$, при $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{x}}$, является нормальным, со средним значением $\mu_{\tilde{Z}|\widetilde{\boldsymbol{X}}} = \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{x}}$ и дисперсией $\sigma^2_{\tilde{Z}|\widetilde{\boldsymbol{X}}} = 1 - \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{1z}$. Следовательно, для случайной величины $Y \sim N(\mu_Y,\ \sigma_Y^2)$ находим, что

$$E\left[e^{tY}\right] = e^{\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}}.$$

В результате получим соотношение

$$\psi(\widetilde{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{P}) = e^{\mu_{\tilde{Z}|\widetilde{X}} t + \sigma^2_{\tilde{Z}|\widetilde{X}} \frac{t^2}{2}} = -\sigma_z = \exp\left\{-\sigma_z \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{x}} + \frac{\sigma_z^2\left(1 - \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{1z}\right)}{2}\right\},$$

что приводит к следующей форме равенства (10.20):

$$\begin{aligned} I &= e^{-\mu_z} E_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}\left[\exp\left\{-\sigma_z \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{x}} + \frac{\sigma_z^2\left(1 - \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{1z}\right)}{2}\right\} \right. \\ &\qquad \left. \cdot \prod_{i=1}^{n} I\left(\tilde{X}_i < \tilde{x}_i\right)\right] \qquad (10.21) \\ &= e^{-\mu_z + \frac{\sigma_z^2\left(1 - \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{1z}\right)}{2}} E_{\widetilde{\boldsymbol{X}}}\left[e^{-\sigma_z \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11} \widetilde{\boldsymbol{x}}} \prod_{i=1}^{n} I\left(\tilde{X}_i < \tilde{x}_i\right)\right]. \end{aligned}$$

Плотность Гауссовского случайного вектора $\widetilde{\boldsymbol{X}}$, при $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \dots,\ x_n)^*$, задаётся формулой $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{P}_{11}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{x}}$. Таким образом, математическое ожидание в уравнении (10.21) равняется интегралу:

$$\int_{-\infty}^{\tilde{x}_1} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{x}_n} e^{-\sigma_z \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11} \widetilde{\boldsymbol{x}}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{P}_{11}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{x}} dx_n \cdots dx_1. \qquad (10.22)$$

Далее перепишем экспоненту в указанном интеграле в следующем виде:

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{x} - \sigma_z \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\rho}_{1z}\sigma_z)^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\rho}_{1z}\sigma_z)\right) + \frac{1}{2}\sigma_z^2 \boldsymbol{\rho}_{1z}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{\rho}_{1z}.$$

Подставляя данное выражение в (10.22), а затем полученное выражение в (10.21), имеем равенство:

$$I = e^{-\mu_z + \frac{\sigma_z^2}{2}} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{P}_{11}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\rho}_{1z}\sigma_z)^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\rho}_{1z}\sigma_z)\right)} dx_n \cdots dx_1.$$

Наконец, произведём замену переменной $y_i = x_i + \rho_{iz}\sigma_z$ в интеграле выше и придём нужной формуле для I:

$$I = e^{-\mu_z + \frac{\sigma_z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\tilde{x}_1 + \rho_{1z}\sigma_z} \cdots \int_{-\infty}^{\tilde{x}_n + \rho_{nz}\sigma_z} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{P}_{11}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P}_{11}^{-1} \boldsymbol{y})} dy_n \cdots dy_1$$
$$= e^{-\mu_z + \frac{\sigma_z^2}{2}} \Phi\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} + \rho_{1z}\sigma_z, \ \dots, \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n} + \rho_{nz}\sigma_z; \boldsymbol{P}_{11}\right), \tag{10.23}$$

где $\Phi(y_1, \ \dots, y_n; \boldsymbol{P}_{11})$ – функция распределения случайного вектора $Y = (Y_1, \ \dots, Y_n)$ с нулевыми средними, единичными дисперсиями и корреляционной матрицей $\boldsymbol{P}_{11}$.

Сформулируем (10.23) в виде частной леммы, которая будет использоваться в дальнейших главах.

Лемма 10.1. Пусть X и Y – Гауссовские случайные величины со средними μ_X и μ_Y, соответственно, и ковариационной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$E\left[1_{\{X \le x\}} \exp\{-Y\}\right] = \exp\left\{\frac{\sigma_Y^2}{2} - \mu_Y\right\} \Phi(\tilde{x}), \tag{10.24}$$

где
$$\tilde{x} = \frac{x - (\mu_X - \rho_{XY})}{\sigma_X},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy \quad \text{and} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Далее рассчитаем цену (10.18):

$$E^*\left(\frac{(S_T^1 - S_T^2)^+}{B_T}\right) = E^*\left(\left(\frac{S_T^1}{B_T} - \frac{S_T^2}{B_T}\right) \cdot I_{\left\{\frac{S_T^1}{S_T^2} \ge 1\right\}}\right)$$
$$= E^*\left(\frac{S_T^1}{B_T}\right) - E^*\left(\frac{S_T^2}{B_T}\right) - E^*\left(\frac{S_T^1}{B_T} - \frac{S_T^2}{B_T}\right) I_{\left\{\frac{S_T^1}{S_T^2} \le 1\right\}}. \tag{10.25}$$

Первые два члена в (10.25) равны S_0^1 и S_0^2, соответственно, поскольку $\left(\frac{S_t^i}{B_t}\right)_{t \ge 0}$, $i = 1, \ 2$, являются мартингалами относительно P^*. Чтобы рассчитать третью составляющую, вычислим для $i = 1, \ 2$:

$$E^*\left(\frac{S_T^i}{B_T}\cdot I_{\left\{\frac{S_T^1}{S_t^2}\le 1\right\}}\right)$$
$$=$$
$$= E^*\left(S_0^i \exp\left\{\left(\mu_i - r - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i W_T\right\}\cdot I_{\left\{\frac{\exp\left\{\left(\mu_1 - r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + \sigma_1 W_T\right\}}{\exp\left\{\left(\mu_2 - r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + \sigma_2 W_T\right\}}\le\frac{S_0^2}{S_0^1}\right\}}\right)$$
$$= E^*\left(S_0^i \exp\left\{-\frac{\sigma_i^2}{2}T + \sigma_i W_T^*\right\}\cdot I_{\left\{\exp\left\{\left(-\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + (\sigma_1-\sigma_2)W_T^*\right\}\le\frac{S_0^2}{S_0^1}\right\}}\right).$$

Обозначим
$$Y_i = -\left(-\frac{\sigma_1^2 T}{2} + \sigma_i W_T^*\right) \quad \text{и} \quad X = \left(-\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + (\sigma_1-\sigma_2)W_T^*.$$

Заметим, что данные случайные величины являются Гауссовскими (относительно меры P^*). Используя (10.25) и (10.24), приходим к следующей *формуле Маргрейба* ($\sigma_1 > \sigma_2$):

$$E^*\left(\frac{(S_T^1 - S_T^2)^+}{B_T}\right) = S_0^1\Phi\left(b_+(S_0^1,\, S_0^2,\, T)\right) - S_0^2\Phi\left(b_-(S_0^1,\, S_0^2,\, T)\right), \tag{10.26}$$

где
$$b_\pm(S_0^1,\, S_0^2,\, T) = \frac{\ln\frac{S_0^1}{S_0^2} \pm (\sigma_1-\sigma_2)^2\frac{T}{2}}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}.$$

Используя аналогичный метод, можно доказать формулу Маргрейба для модели (10.14) при $|\rho| < 1$.

Другой способ обобщения модели Блэка-Шоулса состоит в разделении банковского счёта с процентной ставкой r на два счёта: сберегательный счёт B^1 и кредитный B^2 с процентными ставками r^1 и r^2 ($r^1 < r^2$), соответственно. Таким образом, приходим к (B^1, B^2, S)-рынку в виде:

$$\begin{aligned} dB_t^i &= r^i B_t^i dt, \quad B_0^i = 1,\ i = 1,\ 2,\\ dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 > 0. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Допустимая стратегия $\pi_t = (\beta_t^1,\, \beta_t^2,\, \gamma_t)$ имеет капитал $X_t^\pi = \beta_t^1 B_t^1 + \beta_t^2 B_t^2 + \gamma_t S_t$, и является самофинансируемой, если

$$dX_t^\pi = \beta_t^1 dB_t^1 + \beta_t^2 dB_t^2 + \gamma_t dS_t.$$

Для исключения возможности арбитража на рынке, будем полагать, что $\beta_t^1 \ge 0$ и $\beta_t^2 \le 0$. Используя пропорцию $\alpha_t = \frac{\gamma_t S_t}{X_t^\pi}$, получим, что

$$dX_t^\pi(x) = X_t^\pi(x)[(1-\alpha_t)^+ r^1 - (1-\alpha_t)^- r^2 + \alpha_t S_t^{-1} dS_t]$$
$$= X_t^\pi(x)[(1-\alpha_t)^+ r^1 - (1-\alpha_t)^- r^2 + \alpha_t(\mu dt + \sigma dW_t)]$$

с $X_0^\pi = X_0^\pi(x) = x > 0$.

Предположим, что $f_T = f(S_T)$ – платёжное обязательство на рынке (10.27).

Введём *вспомогательный рынок Блэка-Шоулса* с тем же самым рисковым активом S и банковским счётом B^d с процентной ставкой $r^d = r_1 + d,\ d \in [0,\ r^2 - r^1]$, и $B_0^d = 1$. Обозначим P^d соответствующую мартингальную вероятность на этом *полном* рынке. Тогда цена f_T определена единственным образом в следующем виде

$$\mathbb{C}_T(f_T,\ r^d) = E^d\left(\frac{f_T}{B_T^d}\right).$$

Пропорция α_t определяет две самофинансируемые стратегии $\pi(\alpha)$ и $\pi(\alpha,\ d)$ на $(B^1,\ B^2,\ S)$-рынке и $(B^d,\ S)$-рынке, соответственно. Несложно вывести связь между капиталами данных стратегий:

Если $X_0^{\pi(\alpha)} = X_0^{\pi(\alpha,\ d)}$, тогда следующие два условия эквивалентны

$$X_t^{\pi(\alpha)} = X_t^{\pi(\alpha,\ d)} \quad \text{для всех} \quad t \le T$$

и

$$(r^2 - r^1 - d)(1-\alpha_t)^- + d(1-\alpha_t)^+ = 0.$$

Данные соотношения позволяют сравнивать капиталы самофинансируемых стратегий с заданной пропорцией α_t в обеих моделях рынка. Следовательно, величины

$$\inf_d \mathbb{C}_T(f_T,\ r^d) \quad \text{и} \quad \sup_d \mathbb{C}_T(f_T,\ r^d)$$

являются естественными *границами* для множества безарбитражных цен обязательства f_T на $(B^1,\ B^2,\ S)$-рынке.

Применяя данную методологию к расчёту Европейского опциона call $f_T = (S_T - K)^+$ и используя монотонность цены Блэка-Шоулса относительно процентной ставки, получим следующие соотношения:

$$\mathbb{C}_T(r^i) = S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r^i + \frac{\sigma}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-r^i T}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r^i - \frac{\sigma}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad i = 1,\ 2$$

в качестве нижнего ($i = 1$) и верхнего ($i = 2$) граничных значений интервала безарбитражных цен для данного опциона в модели (10.27).

Далее рассмотрим ситуацию, в которой владелец актива S получает *дивиденды*. Обозначим $\tilde{S}_t$ процесс, представляющий капитал владельца актива S, и пусть $\delta S_t,\ \delta > 0$, отражает полученные дивиденды. Тогда эволюция $\tilde{S}_t$ описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$d\left(\frac{\tilde{S}_t}{B_t}\right) = d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) + \delta\frac{S_t}{B_t}dt, \quad \delta \ge 0. \tag{10.28}$$

Используя

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

и $$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}\big((\mu - r)dt + \sigma W_t\big),$$

получаем

$$d\left(\frac{\tilde{S}_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t}\big((\mu - r + \delta)dt + \sigma dW_t\big).$$

Используя аналогию

$$\overline{W}_t \coloneqq W_t + \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}t \quad \text{с} \quad W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t,$$

и плотности

$$\bar{Z}_T \coloneqq \exp\left\{-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}W_T^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right\}$$

с плотностью Z_T^*, определим новую меру $\bar{P}_T$ с плотностью Z_T^*.

Согласно теореме Гирсанова, $(\overline{W}_t)_{t\le T}$ является Винеровским процессом относительно $\bar{P}_T$. Функции распределения заданы следующими соотношениями

$$\bar{F}_{\mu T + \sigma W_T} = \bar{F}_{(r-\delta)T + \sigma \overline{W}_T} = F_{(r-\delta)T+\sigma W_T}$$

и $$\bar{F}_{S_T} = F_{S_0 \exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}}.$$

Вычислим теперь цену Европейского опциона call для модели (10.28) следующим образом:

$$\mathbb{C}_T(\delta) = \bar{E} = e^{-rT}\bar{E}\left(\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T} - K\right)^+\right)$$

$$= e^{-rT}E\left(\left(S_0 e^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T} - K\right)^+\right)$$

$$= e^{-rT}E\left(\left(S_0 e^{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}W_1} - K\right)^+\right)$$

$$= S_0 e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+T\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+T\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Далее исследуем задачу расчёта опциона в модели Блэка-Шоулса с *транзакционными издержками*. Для простоты изложения положим, что $B_t \equiv 1,\ t \le T$, а капитал портфеля $\pi = (\beta,\ \gamma)$ перераспределяется в дискретные моменты времени $t_i = \frac{iT}{N},\ i \le N$.

Пусть ограничения на перераспределение капитала $X_t^\pi = \beta_t + \gamma_t S_t$ портфеля заданы в форме *пропорциональных транзакционных издержек* с параметром $\lambda \ge 0$::

$$\Delta X_t^\pi = \gamma_t \Delta S_t - \lambda S_t |\Delta\gamma_t|.$$

Рассмотрим Европейский опцион покупателя, который будем хеджировать в классе стратегий, описанном выше. Обозначим $C^{BS}(t_i, S_{t_i})$, $i \le N$, капитал стратегии Блэка-Шоулса. Тогда, как было предложено Леландом, подходящая хеджирующая стратегия π должна иметь капитал X_t^{π} такой, что

$$X_{t_i}^{\pi} = C^{BS}(t_i, S_{t_i}), \quad i \le N,$$

и приближенно (с точностью до членов высшего порядка малости Δt) удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial X^{\pi}(t, S_t)}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S_t \frac{\partial^2 X^{\pi}(t, S_t)}{\partial s^2} = 0$$

с параметром

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + \lambda \sqrt{\frac{8}{\sigma^2 \pi \Delta t}}\right) > \sigma^2.$$

Таким образом, для расчёта Европейских опционов call в данном случае можно использовать формулу Блэка-Шоулса с *увеличенной волатильностью*. Однако следует подчеркнуть, что данный метод имеет определённые границы допустимости его использования.

10.3 Опционы на рынке облигаций. Формула Джамшидана

До данного момента рисковыми активами на исследуемых рынках являлись исключительно акции. Обратим теперь наше внимание на *рынок облигаций*.

Рассмотрим *бескупонную облигацию* с датой погашения $T < T^*$, то есть обязательство, по которому выплачивается \$1 в момент времени T. Пусть $B(t, T)$ – цена облигации в момент времени $t \in [0, T]$. Очевидно, для всех $t \le T$ выполнены соотношения $B(T, T) = 1$ и $B(t, T) < 1$.

Стоимость $B(t, T)$ может быть записана в трёх эквивалентных формах:

$$B(t, T) = \exp\{-r(t, T)(T - t)\},$$

$$B(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t, s)ds\right\},$$

$$B(t, T) = \exp\{-(T - t)\ln(1 + \rho(T - t, t))\}.$$

Функции $r(\cdot, T)$ и $\rho(T - \cdot, \cdot)$ называются *доходностью* и *доходностью до погашения* соответственно. Функция $f(t, s)$ называется *форвардной процентной ставкой* и выражает текущую процентную ставку в момент времени $t \le s$ для заимствования в момент времени s.

Приняв некоторые допущения, получим следующие соотношения:

$$r(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T - t}, \quad f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial t}\ln B(t, T) = r(t, T) + (T - t)\frac{\partial}{\partial t} r(t, T).$$

Обозначим $r_t = f(t,\ t)$ *рыночную процентную ставку* в момент времени t. Данная процентная ставка может быть случайным процессом. Таким образом, облигации следует рассматривать как рисковый актив, поскольку их цены в этом случае зависят от (случайных) процентных ставок.

Пусть $r = (r_t)_{t\geq 0}$ – случайный процесс на некотором стохастическом базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ P)$. Определяя банковский счёт в виде

$$B_t = \exp\left\{\int_0^t r_s ds\right\},$$

приходим к понятию *рынка облигаций* в смысле семейства $\big(B_t,\ B(t,\ T)\big)_{t\leq T\leq T^*}$. Как и в случае результатов, полученных ранее для $(B,\ S)$-рынка (рынка акций), рассмотрим дисконтированную стоимость облигации:

$$\bar{B}(t,\ T) =. \frac{B(t,T)}{B_t}.$$

Построим вероятностную меру P^* эквивалентную исходной мере P, такую что процесс $\bar{B} = \big(\bar{B}(t,\ T)\big)_{t\geq 0}$ является мартингалом относительно P^*. Если такая мера существует, то будем говорить, что рынок является *безарбитражным*.

Допуская, что $B(T,\ T) = 1$, получим, что

$$E^*(B_T^{-1}|\mathcal{F}_t)_, = \frac{B(t,T)}{B_t},$$

и, следовательно, имеем представление

$$B(t,\ T) = E^*\left(\exp\left\{-\int_0^t r_s ds\right\}\Big|\mathcal{F}_t\right),$$

которое позволяет исследовать структуру цен $B(t,\ T)$ посредством процесса $r = (r_t)_{t\geq 0}$. Существуют несколько подобных моделей. В данной главе рассмотрим одну из наиболее распространённых – *модель Васичека*:

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \gamma dw_t, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

В соответствии с данной моделью, значение процентной ставки колеблется в окрестности отношения $\frac{\alpha}{\beta}$: процентная ставка r_t, имеет положительный снос, если $r_t < \frac{\alpha}{\beta}$, и отрицательный, если $r_t > \frac{\alpha}{\beta}$. Заметим, что данная модель в теории случайных процессов носит название процесса Орнштейна-Уленбека.

Применяя формулу Ито, получим, что

$$r_t = e^{-\beta t}\left[r_0 + \int_0^t \alpha e^{\beta t} ds + \int_0^t \gamma e^{\beta t} dw_s\right].$$

Используя Марковское свойство r_t, можно записать

$$B(t,\,T)=E\left(\exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\}\Big|\mathcal{F}_t\right)=E\left(\exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\}\Big|r_t\right)$$
$$=\exp\left\{\frac{\gamma^2}{2}\int\limits_t^T\left(\int\limits_s^T e^{-\beta(u-s)}du\right)^2 ds-\alpha\int\limits_t^T\int\limits_t^u e^{-\beta(u-s)}dsdu\right.$$
$$\left.-r_t\int\limits_t^T e^{-\beta(u-t)}du\right\} \tag{10.29}$$
$$\equiv\exp\{a(t,\,T)-r_t b(t,\,T)\},$$

где

$$a(t,\,T)\coloneqq\frac{\gamma^2}{2}\int\limits_t^T\left(\int\limits_s^T e^{-\beta(u-s)}du\right)^2 ds-\alpha\int\limits_t^T\int\limits_t^u e^{-\beta(u-s)}dsdu$$

$$b(t,\,T)\coloneqq\int\limits_t^T e^{-\beta(u-t)}du.$$

Эти формулы позволяют описать структуру цен облигаций.

Далее, в рамках модели Васичека исследуем Европейский опцион покупателя с датой исполнения $T'\le T\le T^*$ и функцией выплаты

$$f=(B(T',\,T)-K)^+$$

где K – стоимость поставки.

Цена такого опциона задается *формулой Джамшидана*:

$$\mathbb{C}(T',\,T)=B(0,\,T)\Phi(d_+)-KB(0,\,T')\Phi(d_-), \tag{10.30}$$

где

$$d_\pm=\frac{\ln\dfrac{B(0,\,T)}{KB(0,\,T')}\pm\dfrac{1}{2}\sigma^2(T',\,T)\left(\int_{T'}^T e^{-\beta(u-T')}du\right)^2}{\sigma(T',\,T)\int_{T'}^T e^{-\beta(u-T')}du},$$

$$\sigma(T',\,T)=\left(\int\limits_{T'}^T\left(\int\limits_s^T\gamma \mathrm{e}^{-\beta(u-s)}du\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы доказать (10.30), необходимо вычислить

$$\mathbb{C}(T',\,T)=E\left(e^{-\int_0^{T'}r_u du}(B(T',\,T)\right.$$
$$\left.-K)^+\right)$$
$$=E\left(I_{\{\omega:B(T',\,T)>K\}}e^{-\int_0^{T'}r_u du}B(T',\,T)\right)-KE\left(I_{\{\omega:B(T',\,T)>K\}}e^{-\int_0^{T'}r_u du}\right).$$

Заметим, что
$\{\omega\colon B(T',T)>K\}=\{\omega\colon (a(T',T)-r_{T'}b(T',T))>\ln K\}=\{\omega\colon r_{T'}\le r'\}$,

где
$$r'=\frac{\ln K-a(T',T)}{-b(T',T)}.$$

Полагая
$$\xi=r_{T'},\quad \eta=\int_0^T r_u du,\quad \zeta=\int_0^{T'} r_u du,$$
приходим к равенству:
$$\mathbb{C}(T',T)=E\left(I_{\{\omega:\xi\le r'\}}e^{-\eta}\right)-KE\left(I_{\{\omega:\xi\le r'\}}e^{-\zeta}\right). \qquad (10.31)$$

Чтобы найти конечное выражение для цены опциона, используем (10.31) и Лемму 10.1. Для этого отметим, что численные характеристики случайных величин ξ, η и ζ определяются равенствами:

$$\mu_\xi=E(r_{T'})=e^{-\beta T'}\left(r_0+\int_0^{T'} e^{-\beta_s}ds\right),$$

$$\mu_\eta=E\left(\int_0^T r_u du\right)=r_0\int_0^T e^{-\beta_u}du+\alpha\int_0^T\int_0^u e^{-\beta(u-s)}ds\,du,$$

$$\mu_\zeta=E\left(\int_0^{T'} r_u du\right)=r_0\int_0^{T'} e^{-\beta_u}du+\alpha\int_0^{T'}\int_0^u e^{-\beta(u-s)}ds\,du,$$

$$\sigma_\xi^2=V(r_{T'})=\gamma^2\int_0^{T'} e^{-2\beta(T'-s)}ds$$

$$\sigma_\eta^2=V\left(\int_0^T r_u du\right)=\gamma^2\int_0^T\left(\int_s^T e^{-\beta(u-s)}du\right)^2 ds,$$

$$\sigma_\zeta^2=V\left(\int_0^{T'} r_u du\right)=\gamma^2\int_0^{T'}\left(\int_s^{T'} e^{-\beta(u-s)}du\right)^2 ds,$$

$$\rho_{\xi\zeta}=cov\left(r_T,\ \int_0^{T'} r_u du\right)=\gamma^2\int_0^{T'} e^{-\beta(T'-s)}\int_s^{T'} e^{-\beta(u-s)}du\,ds,$$

$$\rho_{\xi\eta}=cov\left(r_T,\ \int_0^{T} r_u du\right)=\rho_{\xi\zeta}+\sigma_\xi^2\int_{T'}^{T} e^{-\beta(u-T')}du.$$

Таким образом, в соответствии с (10.31) и (10.24), получим:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(T',\,T) &= E\left(I_{\{\omega:\xi\le r'\}}e^{-\eta}\right)\\ &\quad - KE\left(I_{\{\omega:\xi\le r'\}}e^{-\zeta}\right)\\ &= \exp\left\{\frac{\sigma_\eta^2}{2}-\mu_\eta\right\}\Phi\left(\frac{r'-\left(\mu_\xi-\rho_{\xi\eta}\right)}{\sigma_\xi}\right)\\ &\quad - K\exp\left\{\frac{\sigma_\zeta^2}{2}-\mu_\zeta\right\}\Phi\left(\frac{r'-\left(\mu_\xi-\rho_{\xi\zeta}\right)}{\sigma_\xi}\right).\end{aligned}$$

Заменяя выражения для μ_ξ, μ_η, μ_ζ, σ_ξ^2, σ_η^2, σ_ζ^2, $\rho_{\xi\zeta}$ и $\rho_{\xi\eta}$ в последней формуле, приходим к конечному выражению для стоимости $\mathbb{C}(T',\,T)$ в виде (10.30).

Используя равенство

$$\left(K-B(T',\,T)\right)^+ = (B(T',\,T)-K)^+ - B(T',\,T)+K,$$

можно рассчитать цену Европейского опциона продавца на $\left(B_t,\,B(t,\,T)\right)$-рынке:

$$\mathbb{P}(T',\,T) = KB(0,\,T')\Phi(-d_-) - B(0,\,T)\Phi(-d_+).$$

Глава 11
МОДЕЛЬ БЛЭКА-ШОУЛСА: РАСЧЁТ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ С УЧЁТОМ ФАКТОРА СМЕРТНОСТИ

В одиннадцатой главе обсуждаются вопросы взаимосвязи финансовых и страховых контрактов в рамках модели Блэка-Шоулса. Здесь же техника среднеквадратического хеджирования применяется для расчётов гибких страховых схем (см. [31], [36] и [5]).

11.1 Элементы страхования жизни: связь финансовых и страховых расчётов

Изученные ранее производные ценные бумаги, или, эквивалентно, финансовые контракты, такие как форварды, фьючерсы, опционы и т. д. построены на основе первичных ценных бумаг. Привлекательность производных ценных бумаг состоит в том, что для их приобретения требуется значительно меньший начальный капитал, чем в сделках с первичными активами. Вместе с тем, покупка и продажа производных ценных бумаг также интересна инвесторам в качестве эффективного инструмента для страхования от возможных потерь.

Традиционные страховые контракты предполагают, что одна из сторон соглашения (*клиент страховой компании*) за определённую плату (*премию*) получает услуги от второй стороны (*страховщика*) в случае возможных потерь. Застрахованное лицо подвергается риску и, следовательно, стремится защитить себя в форме *страхового полиса*. Одной из главных задач для страховой компании является расчёт размера *страховой премии* (страхового взноса). Фундаментальным законом для расчёта таких премий является *принцип эквивалентности*, в соответствии с которым общие суммы премий и страховых обязательств должны быть в среднем равны между собой.

В данной главе исследуем случай *страхования жизни*, в котором соответствующая специфика расчёта премий и резервов страховой компании проистекают из *смертности* застрахованных компанией клиентов. Все расчёты в области традиционного страхования жизни проводятся на основании «демографической истории» страховых случаев: заболеваемость, смерть, и т. д. Для этого можно использовать так называемые *таблицы смертности*, демонстрирующие структуру вероятностей указанных событий.

Таблицы смертности представляют собой свод статистических данных о продолжительности жизни людей, сгруппированных на основании различных критериев (пол, географическое расположение, профессия, и т. д.). Они также содержат некоторое количество переменных и индикаторов, характеризующих спад в численности обозреваемых групп и уровень смертности за различные временные промежутки. Таблицы, основанные исключительно на данных о возрасте, позволяют исследовать общую динамику смертности, поэтому их называют *общими* таблицами. Если помимо возраста рассматриваются и другие параметры, тогда такие таблицы называют *специальными* (*селективными*).

Таблицы смертности отражают в вероятностных терминах ту общую реальность, в которой оперирует страховая компания, а также дают представление о физической мере смертности.

В рамках традиционного подхода задача страхования заключается в расчёте премии на момент заключения контракта (*единовременная* премия, если она уплачивается в момент подписания соглашения, и *периодическая* премия – в случае оплаты по заранее определённой схеме платежей за период действия контракта). Расчёт *единовременной* премии предполагает приравнивание премий к сумме выплат, которые могут произойти в будущем в соответствии с условиями страхового контракта в среднем, относительно «физической» вероятности, полученной из таблиц смертности.

Предположим, что страховая компания заключает контракт «*чистого дожития*» с группой, состоящей из l_x клиентов в возрасте T на период до момента времени T. Соответствующие полисы предоставляют держателям право получить платёж в размере f в случае дожития до даты T.

Для расчёта единовременной индивидуальной премии ${}_TU_x$, в соответствии с данным соглашением, обозначим $T_1, \dots, T_{l_x}$ оставшееся время жизни (время дожития) членов рассматриваемой группы в качестве независимых одинаково распределённых случайных величин. Тогда для каждого $i = 1, \dots, l_x$ платежи страховой компании имеют вид $f \cdot I_{\{T_i > T\}}$.

Из принципа эквивалентности следует, что

$$ {}_TU_x = Ef \cdot I_{\{T_i > T\}} = f \cdot {}_Tp_x, \tag{11.1}$$

где ${}_Tp_x = P(T_i > T)$, $i = 1, \ \dots, \ l_x$.

Допуская ненулевую процентную ставку r, получим дисконтированную сумму платежей и соответствующую формулу:

$$ {}_TU_x = e^{-rT} f \cdot {}_Tp_x. \tag{11.2}$$

В случае *срочного страхования*, при котором платёж в размере f осуществляется в случае смерти клиента до наступления даты T, соответствующая формула для расчёта премии $U(x, T)$ следует из (11.1) – (11.2):

$$U(x, T) = \left(1 - {}_Tp_x\right) f \quad \text{и} \quad U(x, T) = \left(1 - {}_Tp_x\right) e^{-rT}. \tag{11.3}$$

Формулы стоимости (11.1) и (11.3) были получены с учётом допущения, что f является детерминированной величиной, а единственным источником случайности является смертность клиентов в данной группе.

Продемонстрируем переход от рассмотренных контрактов к соглашениям, в которых размер выплаты зависит от стоимости рискового актива S_t на финансовом рынке Блэка-Шоулса (10.1) – (10.2), заданном, как обычно, на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.

Пусть $N_t = \sum_{i=1}^{l_x} I_{\{T_i \le t\}}$ – *процесс смертности (счётчик смертности)* на другом пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{P})$ с $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(N_u, u \le t)$. Предположим, что вероятность дожития имеет представление

$$ {}_t p_x = \tilde{P}(T_i > t) = \exp\left\{ -\int_0^t \mu_{x+s} ds \right\} $$

с некоторой плотностью μ_{x+s} (*уровень* или *сила смертности*).

Разумно предположить, что данные два источника неопределённости независимы друг от друга. Тогда вся модель определена на вероятностном пространстве-произведении $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{F}}, \bar{P}) = (\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{F} \times \tilde{\mathbb{F}}, P \times \tilde{P})$.

Рассмотрим контракт чистого дожития с выплатой $f = \max\{S_T, K\}$, где K – неотрицательная константа, которая выражает *гарантированную* выплату клиенту. Выведем формулу для премии ${}_T U_x$ исходя из принципа эквивалентности относительно $\bar{P}^* = P^* \times \tilde{P}$, где P^* – мартингальная мера в модели Блэка-Шоулса. Такая замена меры в принципе эквивалентности обычно объясняется с помощью закона больших чисел.

Из свойства независимости имеем, что

$$ {}_T U_x = E^* \times \tilde{E} e^{-rT} \max\{S_T, K\} \cdot I_{\{T_i > T\}} = {}_T p_x \cdot E^* e^{-rT} \max\{S_T, K\}. \tag{11.4} $$

Поскольку

$$ \max\{S_T, K\} = K + \max\{S_T - K, 0\}, $$

из (11.4) и формулы Блэка-Шоулса получим, что

$$ {}_T U_x = {}_T p_x \left[K e^{-rT} + S_0 \Phi\big(d_+(0)\big) - K e^{-rT} \Phi(d_-) \right], \tag{11.5} $$

где $d_\pm(t) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

Аналогично, в случае срочного контракта, размер индивидуальной премии равен:

$$ U(x, T) = \int_0^T \left[S_0 \Phi\big(d_+(t)\big) - K e^{-rT} \Phi\big(d_-(t)\big) \right] {}_t p_x \mu_{x+t} dt. \tag{11.6} $$

Формулы (11.5) и (11.6) называются *ценой Бреннана-Шварца*.

Периодическая премия характеризуется плотностью $p(t)$. Уравнивая премии, приходим к соотношению:

$$ {}_T U_x = \int_0^T p(t) e^{-rt} \cdot {}_t p_x dt. \tag{11.7} $$

Понятно, что в каждый момент времени t страховая компания должна поддерживать некоторый *резервный капитал* для выплаты по возникающим требованиям о выплате по обязательствам. Определим *резервы* $V(t)$ в виде условного математического ожидания разности между дисконтированными (до момента времени t) выплатами и будущими премиями. Условное *усреднение* необходимо, поскольку будущие платежи и премии неизвестны в настоящий момент времени.

В случае контракта чистого дожития выплата по обязательству составляет $f = \max\{S_T, K\}$. Рассчитывая математическое ожидание для (11.7) относительно риск-нейтральной меры $\bar{P}^*$, получим следующее равенство

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t} E^*(f|\mathcal{F}_t) - \int_t^T p(u) e^{-r(u-t)} \cdot {}_{u-t}p_{x+t} du. \qquad (11.8)$$

Далее, пусть $\pi_t^*(T) = E^*(f|\mathcal{F}_t) e^{-rt}$, тогда (11.8) можно переписать в виде

$$V(t) = {}_{T-t}p_{x+t} \pi_t^*(T) e^{rt} - \int_t^T p(u) e^{-r(u-t)} \cdot {}_{u-t}p_{x+t} du. \qquad (11.9)$$

Обозначая $\psi(t) = \frac{e^{-rt}}{{}_{T-t}p_{x+t}}$ и предполагая, что π_t^*, $V(t)$, и ${}_{u-t}p_x$ достаточно гладкие, приходим к следующим соотношениям

$$\frac{\partial\, {}_{u-t}p_{x+t}}{\partial t} = \mu_{x+t} \cdot {}_{u-t}p_{x+t}, \quad u \geq t,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = -(\mu_{x+t} + r)\psi(t),$$

$$\frac{\partial \pi_t^*}{\partial S} = \psi(t)\frac{\partial V}{\partial S}, \quad \frac{\partial^2 \pi_t^*}{\partial S^2} = \psi(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

$$\frac{\partial \pi_t^*}{\partial t} = \psi(t)\left(\frac{\partial V}{\partial t} - (\mu_{x+t} + r)V(t) - p(t)\right).$$

Тогда из (11.9) следует, что

$$\pi_t^*(T) = \psi(t)\left[V(t) + \int_t^T p(u) e^{-r(u-t)} \cdot {}_{u-t}p_{x+t} du\right]. \qquad (11.10)$$

Используя (11.10), представление

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t\right) = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*$$

и формулу Ито, получим, что для любого $s \geq t$ выполнено равенство:

$$\pi_s^*(T) = \pi_t^*(T) + \int_t^s \psi(u)\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S_u dW_u^* + \int_t^s \psi(u)\left[\frac{\partial V}{\partial S} rS_u + \frac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (\mu_{x+u} + r)V(u) + \frac{\partial V}{\partial u} - p(u)\right] du. \qquad (11.11)$$

Поскольку $\pi_t^*(T)$ является мартингалом относительно меры P^*, третий член правой части в (11.11) должен быть равен нулю, что приводит к *обобщению уравнения Тиля* для резервов $V(t)$, широко известного в области экономики страхования:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = p(t) + (\mu_{x+t} + r)V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS_t \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{11.12}$$

В случае, когда резервы не зависят от S_t, (11.11) превращается в *классическое уравнение Тиля*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = p(t) + (\mu_{x+t} + r)V(t), \tag{11.13}$$

описывающее динамику резервов страховой компании, не зависящую от полученных премий, уровня смертности и процентной ставки.

Уравнение (11.13) было открыто только в 1875 и долгое время данного результата было достаточно для решения задач в области страхования жизни. Однако интенсивное развитие финансовых рынков оказало сильное влияние на структуру страховых продуктов, а именно, среди них появился широкий спектр гибких страховых контрактов. Таким образом, соответствующие резервы получили ещё одно измерение риска, связанное с активами на финансовом рынке, что учтено в уравнении (11.12). Более того, устанавливая $p(t)$ и μ_{x+t} (нефинансовые параметры) равными нулю, получим, что (11.12) превращается в уравнение Блэка-Шоулса.

11.2 Среднеквадратическое хеджирование в применении к контрактам страхования жизни

Вернёмся к формулам (11.4) – (11.5) и посмотрим на них под другим углом. Обозначив $f = f_T = \max\{S_T, K\}$, найдём, что безарбитражная цена $F(t, S)$ и реплицирующая стратегия $\pi^f = (\beta^f, \gamma^f) \in SF$ определены единственным образом из теории Блэка-Шоулса:

$$f_T = F(0, S) + \int_0^T \beta_u^f dB_u + \int_0^T \gamma_u^f dS_u, \tag{11.14}$$

$$F(t, S) = E^*\left(e^{-r(T-t)} f_T \middle| \mathcal{F}_t\right), \tag{11.15}$$

Применяя формулу Блэка-Шоулса (10.11) в (11.15) найдём, что

$$\begin{aligned} F(t, S) &= E^*\left(e^{-r(T-t)} \max\{S_T, K\} \middle| \mathcal{F}_t\right) = \\ &= E^*\left(e^{-r(T-t)}[K + (S_T - K)^+] \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= Ke^{-r(T-t)} + E^*\left(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= Ke^{-r(T-t)} + S_t\Phi\big(d_+(t)\big) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\big(d_-(t)\big) \\ &\qquad = Ke^{-r(T-t)}\Phi\big(-d_-(t)\big) + S_t\Phi\big(d_+(t)\big). \end{aligned} \tag{11.16}$$

Следовательно, начальная стоимость $F(0, S)$ может быть найдена с помощью (11.16) в следующем виде

$$F(0, S) = Ke^{-rT}\Phi\big(-d_-(0)\big) + S_0\Phi\big(d_+(0)\big), \tag{11.17}$$

а реплицирующая стратегия задаётся соотношениями:

$$\gamma_t^f = \begin{cases} \Phi\big(d_+(t)\big), & t < T, \\ I_{\{S_T > K\}}, & t = T; \end{cases} \tag{11.18}$$

$$\beta_t^f = \begin{cases} Ke^{-rT}\Phi\big(-d_-(t)\big), & t < T, \\ Ke^{-rT} \cdot I_{\{S_T \le K\}}, & t = T. \end{cases} \tag{11.19}$$

Таким образом, финансовый риск, аккумулируемый контрактом $f_T = \max\{S_T, K\}$ может быть полностью управляем ввиду существования единственной начальной цены (11.17) и хеджирующей стратегии (11.18) – (11.19).

Далее, при рассмотрении подобного контракт с компонентой смертности $\max\{S_T, K\} \cdot I_{\{T_i < T\}}$, уже была получена цена Бреннана-Шварца (11.5). Но подход Бреннана-Шварца оставляет открытым вопрос о численном измерении и управлении комбинацией финансового риска и риска смертности, то есть открытым остаётся вопрос – до какой степени возможно хеджировать данный «комбинированный» риск на финансовом рынке. Эти вопросы мотивируют к исследованию комбинированных контрактов, используя другие подходы. Рассмотрим гибкий страховой контракт для группы из l_x клиентов в возрасте x с временами дожития $T_1, \ \dots, T_{l_x}$. Дисконтированная сумма выплат по данным соглашениям равна

$$H = \sum_{i=1}^{l_x} I_{\{T_i > T\}} f \cdot e^{-rT}. \tag{11.20}$$

Обозначим $V_t^\pi = \frac{X_t^\pi}{B_t}$ дисконтированный капитал стратегии $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$, где компонента γ является предсказуемой. Введём *процесс издержек* C_t^π в следующем виде

$$C_t^\pi = V_t^\pi - \int_0^t \gamma_u d\left(\frac{S}{B}\right)_u = V_t^\pi - \int_0^t \gamma_u dS_u^*. \tag{11.21}$$

Стратегия π называется *самофинансируемой в среднем*, если процесс издержек C_t^π является $\bar{P}^*$-мартингалом.

Будем называть такой портфель *риск-минимизирующим,* если $V_T^\pi = H$ (п. н.) и условное математическое ожидание квадрата оставшихся издержек $R_t^\pi = \bar{E}^*((C_T^\pi - C_t^\pi)^2 | \mathcal{F}_t)$ минимально.

Начальная стоимость R_0^π рискового процесса (R_t^π) имеет вид

$$R_0^\pi = \bar{E}^*(C_T^\pi - C_0^\pi)^2 = \bar{E}^*\left[\left(H - \int_0^T \gamma_u dS_u^* - C_0^\pi\right)^2\right]. \tag{11.22}$$

Из (11.22) следует, что риск R_0^π минимален, если $C_0^\pi = \bar{E}^* H$ и выбор γ должен соответствовать минимальному значению $\bar{E}^*[(C_T^\pi - \bar{E}^* C_T^\pi)^2]$.

Для определения такой *оптимальной* стратегии, рассмотрим $\bar{P}^*$ – мартингал $V_t = \bar{E}^*(H|\bar{\mathcal{F}}_t)$ и его *представление через разложение Кунита-Ватанабе*

$$V_t = \bar{E}^* H + \int_0^t \gamma_u^H dS_u^* + L_t^H, \tag{11.23}$$

где L^H – $\bar{P}^*$-мартингал с нулевым средним, ортогональный S^*, а γ^H – предсказуемый квадратично интегрируемый процесс.

Определим стратегию $\pi_t^H = (\beta_t^H = V_t - \gamma_t^H S_t^*,\ \gamma_t^H)$, и найдём, что её процесс риска допускает следующее представление:

$$R_t^\pi = \bar{E}^*\left[(L_T^H - L_t^H)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{11.24}$$

Равенство (11.23) вместе с (11.24) идентифицируют π^H как единственную риск-минимизирующую стратегию, состоящую из следующих компонент:

$$\gamma_t^H = (l_x - N_{t^-}) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot F_S'(t,\ S_t) = (l_x - N_{t^-}) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot \gamma_t^f, \tag{11.25}$$

$$\begin{aligned}\beta_t^H &= (l_x - N_t) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot e^{-rt} F(t,\ S_t) - (l_x - N_{t^-}) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \\ &\quad \cdot \Phi\big(d_+(t)\big) S_t e^{-rt} \\ &= (l_x - N_t) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot \beta_t^f - (N_t - N_{t^-}) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot \gamma_t^f S_t e^{-rt},\end{aligned} \tag{11.26}$$

где β^f, γ^f, $F(t,\ s)$ определяются из соотношений (11.14) – (11.19).

Для данной оптимальной (в среднеквадратическом смысле) стратегии π^H имеем

$$V_t^{\pi^H} = (l_x - N_t) \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot F(t,\ S),$$

и следовательно,

$$V_0^{\pi^H} = l_x \cdot {}_Tp_x \cdot F(0,\ S).$$

Последнее равенство совпадает с ценой Бреннана-Шварца (11.5) для кумулятивных контрактов чистого дожития (11.20).

Рассмотрим ситуацию, в которой цена (11.5) уплачивается периодически N раз на протяжении действия контракта в течение $[0,\ T]$, и каждый раз клиент платит страховой компании некоторую сумму c. .Определим $\boldsymbol{C}$ исходя из принципа эквивалентности. Для этого определим t^* из равенства $T = Nt^*$ и $t_i = it^*,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$. Суммируя дисконтированные значения, умноженные на соответствующие вероятности дожития, получим

$$c + {}_1p_x c B_1^{-1} + \cdots + {}_{N-1}p_x c B_{N-1}^{-1} = {}_TU_x, \tag{11.27}$$

где $\mathrm{B}_k = e^{rkt^*},\ k = 0,\ 1,\ \ldots, N-1$..

Решая (11.27) относительно c, имеем

$$c = \frac{{}_TU_x}{\sum_{i=0}^{N-1} {}_ip_x B_i^{-1}}. \tag{11.28}$$

Помимо периодической премии c, выраженной формулой (11.28), также необходимо определить стратегию, реплицирующую платёжное обязательство.

Введём следующие *веса*:

$$\delta_k = \frac{{}_k p_x B_k^{-1}}{\sum_{i=0}^{N-1} {}_i p_x B_i^{-1}}, \tag{11.29}$$

где $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$..

Обозначим $F^p(t,\ S_t) = F(t,\ S_t) \cdot \sum_{k=p}^{N-1} \delta_k I_{\{t_k \le t\}}$, где $F(t,\ S)$ определяется из (11.16). С помощью (11.25) – (11.26) находим следующую «периодическую» оптимальную стратегию $\pi_t^p = \left(\beta_t^p,\ \gamma_t^p\right)$:

$$\begin{aligned} \gamma_t^p &= \gamma_t^H \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i I_{\{t_i \le t\}}, \\ \beta_t^p &= \beta_t^H \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \delta_i I_{\{t_i \le t\}}. \end{aligned} \tag{11.30}$$

В соответствии с (11.14) – (11.19), портфель (11.30) реплицирует кумулятивное платёжное обязательство (предполагая при этом $N_{T^-} = N_T$), поскольку его терминальное значение равняется

$$(l_x - N_{T^-})\left(S_T I_{\{S_T > K\}} + K I_{\{S_T \le K\}}\right) = (l_x - N_T) \max\{S_T,\ K\}.$$

Пример 11.1. Рассмотрим контракт чистого дожития с гарантией $f = \max\{S_T,\ K\}$. Для простоты изложения предположим, что $l_x = 1, T = 15,\ x = 45$, лет, а уровень смертности (*модель Гомпертц-Макхейма*)

$$\mu_{x+t} = 0.0005 + 0.000075858 \cdot 1.09144^{x+t}, \quad t \ge 0, \tag{11.31}$$

где t и x указаны в годах. Для отдельного клиента (мужчины) с указанным уровнем смертности, вероятность дожития составляет ${}_{15}p_{45} = 0.8796$. В качестве параметров модели Блэка-Шоулса возьмём $r = 6\%,\ S_0 = B_0 = 1$ и волатильности $\sigma = 0.25$ (регулярная волатильность), $\sigma = 0.15$ (низкая волатильность) или $\sigma = 0.35$ (высокая волатильность). Тогда можно рассчитать премии для такого контракта в каждом указанном случае. Результаты данных расчётов приведены в таблице ниже.

Таблица 1 – Премии для контрактов чистого дожития с гарантией

σ	K	${}_T U_x$
0.15	0	0.8796
0.15	$0.5e^{rT}$	0.8996
0.15	e^{rT}	1.0806
0.15	$2e^{rT}$	1.7992
0.15	0	0.8796
0.15	$0.5e^{rT}$	0.9580
0.15	e^{rT}	1.2066
0.15	$2e^{rT}$	1.9160
0.35	0	0.8796
0.35	$0.5e^{rT}$	1.0255
0.35	e^{rT}	1.3212
0.35	$2e^{rT}$	2.0510

Глава 12
МОДЕЛЬ БЛЭКА-ШОУЛСА: МЕТОДОЛОГИЯ КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ

В главе 12 представлена методология квантильного хеджирования в рамках модели Блэка-Шоулса и с использованием фундаментальной статистической леммы Неймана-Пирсона. Там же выведены формулы квантильных цен и стратегий (см. [24], [36], [23] и [6]).

12.1 Описание методологии квантильного хеджирования

Помимо среднеквадратического хеджирования, изученного нами ранее, существуют и другие типы хеджирования, которые не предполагают, что платёжное обязательство будет захеджировано с вероятностью единица. В этой главе рассмотрим один из таких видов *частичного хеджирования*, при котором хеджирование осуществляется с вероятностью строго меньше единицы. В этом случае можно рассмотреть два типа задач.

К *первому типу* относится задача, в которой фиксируется значение вероятности успешного хеджирования и минимизируется стоимость хеджирующей стратегии.

Ко *второму типу* относится задача максимизации вероятности успешного хеджирования при ограничении начальной стоимости хеджирующей стратегии.

Таким образом, задача хеджирования, сформулированная указанным способом, методологически связана с задачами статистической оценки доверительных интервалов. Одной из ключевых концепций общей теории оценок является *квантиль*, или граница области оценки с некоторой заданной вероятностью. По этой причине метод хеджирования с вероятностью меньше единицы получил название *квантильного хеджирования*.

Рассмотрим модель Блэка-Шоулса (10.2). Напомним, что *допустимая* стратегия определяется как самофинансируемый портфель $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ с капиталом

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$$

таким, что $X_t^\pi \geq 0$ для любого $t \geq 0$.

Обозначим дисконтированную стоимость портфеля $Y_t = Y_t^\pi = \frac{X_t^\pi}{B_t}$. Тогда, используя формулу Ито, получим, что

$$dY_t = \phi_t dW_t^*, \quad Y_0 = X_0^\pi, \tag{12.1}$$

где $\phi_t = \sigma\gamma_t \frac{S_t}{B_t}$ и $W_t^* = W_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t$ – стандартный Винеровский процесс относительно меры $\boldsymbol{P}^*$.

Как и ранее, *платёжным обязательством* с датой исполнения T будем называть $\mathcal{F}_T$–измеримую случайную величину.

Множество успешного хеджирования обязательства f для стратегии π с начальным капиталом x определим в виде:

$$A = A(x,\ \pi,\ f) = \{\omega: X_T^\pi(\omega) \geq f\} = \left\{\omega: Y_T \geq \frac{f}{B_T}\right\}. \tag{12.2}$$

Теория совершенного хеджирования позволяет найти хеджирующую стратегию с начальным капиталом $X_0 = \boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T}$ и $\boldsymbol{P}(A) = 1$. Однако возможна ситуация, когда инвестор не имеет возможности вложить начальную сумму X_0, необходимую для совершенного хеджирования платёжного обязательства f. В этом случае перед ним возникают следующие возможности:

• среди всех допустимых стратегий выбрать ту, которая минимизирует риск потерь, связанный с исполнением обязательства f,

• среди всех допустимых стратегий выбрать ту, которая максимизирует вероятность того, что капитал портфеля X_T^π в момент исполнения платёжного обязательства *не меньше* размера выплаты в соответствии с соглашением, то есть

$$\boldsymbol{P}\big(A(x,\ \pi,\ f)\big) \to \max \tag{12.3}$$

при бюджетном ограничении

$$x \leq x_0 < \boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T} = X_0, \tag{12.4}$$

где x_0 – начальный капитал в распоряжении инвестора.

Выражения (12.3) – (12.4) представляют математическую формулировку задачи квантильного хеджирования, являющуюся объектом исследования в данной главе.

Лемма 12.1. Пусть $\tilde{A} \in \mathcal{F}_T$ – решение следующей экстремальной задачи:

$$P(A) \to \max, \tag{12.5}$$

$$\boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T} I_A \leq x. \tag{12.6}$$

Тогда совершенный хедж $\tilde{\pi}$ с начальным капиталом x для платёжного обязательства $\tilde{f} = f \cdot I_{\tilde{A}}$ является решением задачи (12.3) – (12.4), а множество успешного хеджирования $A = A(x,\ \tilde{\pi},\ f)$ совпадает с $\tilde{A}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную допустимую стратегию π с начальным капиталом $x \leq \boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T} = X_0$. Из (12.1) следует, что её дисконтированная стоимость

$$Y_t = x + \int_0^t \phi_s dW_s^* \tag{12.7}$$

является неотрицательным (локальным) мартингалом относительно $\boldsymbol{P}^*$, и, следовательно, супермартингалом. Для множества успешного хеджирования $A = A(x,\ \pi,\ f)$ из (12.7) получим, что

$$Y_T \geq \frac{f}{B_T} \cdot I_A \quad (\boldsymbol{P} - \text{п. н.}).$$

Тогда
$$x = \boldsymbol{E}^* Y_T \geq \boldsymbol{E}^* \left(\frac{f}{B_T} \cdot I_A \right),$$
и следовательно, условие (12.6) выполнено.

Более того, в виду (12.5) для $\tilde{A}$ имеем, что $\boldsymbol{P}(A) \leq \boldsymbol{P}(\tilde{A})$.

Теперь предположим, что стратегия $\tilde{\pi}$ является совершенным хеджем для платёжного обязательства $f \cdot I_{\tilde{A}}$ с начальным капиталом, удовлетворяющим неравенству

$$\boldsymbol{E}^* \left(\frac{f}{B_T} \cdot I_{\tilde{A}} \right) \leq x,$$

где x определён с помощью (12.4).

Покажем, что портфель $\tilde{\pi}$ является оптимальным для задачи (12.3) – (12.4). Для этого сначала заметим, что стратегия $\tilde{\pi}$ – допустима, поскольку

$$x + \int_0^t \tilde{\phi}_s dW_s^* \geq \boldsymbol{E}^* \left(\frac{f}{B_T} \cdot I_{\tilde{A}} \right) + \int_0^t \tilde{\phi}_s dW_s^* = \boldsymbol{E}^* \left(\frac{f}{B_T} \cdot I_{\tilde{A}} \middle| \mathcal{F}_t \right) \geq 0.$$

Пусть
$$A' = \left\{ x + \int_0^T \tilde{\phi}_s dW_s^* \geq \frac{f}{B_T} \right\}$$

является множеством успешного хеджирования для $\tilde{\pi}$ в задаче (12.3) – (12.4). Поскольку $\tilde{\pi}$ – *совершенный хедж* для обязательства $f \cdot I_{\tilde{A}}$, имеем следующие включения

$$A' \supseteq \{f \cdot I_{\tilde{A}} \geq f\} \supseteq \tilde{A},$$

и следовательно, получаем, что $\boldsymbol{P}(A') \geq \boldsymbol{P}(\tilde{A})$.

Из определения множеств $A' = A$, можно заключить, что $A = \tilde{A}$ $(\boldsymbol{P} - \text{п. н.})$. Однако $\tilde{A}$ – множество успешного хеджирования для портфеля $\tilde{\pi}$, а значит, $\tilde{\pi}$ – оптимальная стратегия в задаче (12.3) – (12.4).

Лемма 12.1 показывает, что для построения максимального множества успешного хеджирования естественно обратиться к *фундаментальной лемме Неймана-Пирсона*, которая позволяет определить наиболее мощный статистический тест в задаче выбора двух простых гипотез при ограничении величины ошибки первого рода.

Далее будем предполагать, что распределение $\boldsymbol{Q}^*$ соответствует гипотезе H_0, а распределение $\boldsymbol{P}$ – альтернативной гипотезе H_1. Более того, пусть $\alpha = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}^*}\phi$ – вероятность ошибки первого рода, а $\beta = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}\phi$ – мощность теста, соответствующие *критической функции* ϕ. Тест Неймана-Пирсон, имеющий структуру

$$\phi = \begin{cases} 1, & \dfrac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} > c \\ 0, & \dfrac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} < c \end{cases}, \tag{12.8}$$

является наиболее мощным, то есть максимизирующим β при условии, что вероятность ошибки первого рода не превышает заданного уровня α. В (12.8) c – константа, а значение критической функции ϕ (1 или 0) показывает, какая из двух гипотез, H_1 или H_0 должна быть принята.

Вернёмся к задаче (12.5) – (12.6) и определим вероятностную меру $\boldsymbol{Q}^*$ из отношения

$$\frac{d\boldsymbol{Q}^*}{d\boldsymbol{P}^*} = \frac{f}{B_T \cdot \boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T}} = \frac{f}{\boldsymbol{E}^* f}. \tag{12.9}$$

Тогда ограничение (12.6) принимает вид:

$$\boldsymbol{Q}^*(A) = \int_A \frac{d\boldsymbol{Q}^*}{d\boldsymbol{P}^*} d\boldsymbol{P}^* \le \frac{x}{\boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T}} = \alpha. \tag{12.10}$$

Лемма 12.2. Решением задачи (12.5) – (12.6) является множество

$$\tilde{A} = \left\{\omega : \frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} > c\right\} = \left\{\omega : \frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{P}^*} > c\frac{f}{\boldsymbol{E}^* f}\right\}, \tag{12.11}$$

где $c = \inf\left\{a : \boldsymbol{Q}^*\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} > a\right) \le \alpha\right\}$..

Доказательство напрямую следует из фундаментальной леммы Неймана-Пирсона вследствие равенств $\alpha = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}^*}\phi = \boldsymbol{Q}^*(\tilde{A})$ и $\beta = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{P}}\phi = \boldsymbol{P}(\tilde{A}) = \max$.

Применяя Лемму 12.1 и Лемму 12.2, приходим к следующей теореме.

Теорема 12.1. Оптимальная стратегия π в задаче (12.3) – (12.4) совпадает с совершенным хеджем для платёжного обязательства $f \cdot I_{\tilde{A}}$, где максимальное множество успешного хеджирования $\tilde{A}$ определяется из (12.11).

Замечание 12.1. Если $\boldsymbol{Q}^*\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} = c\right) \ne 0$, тогда для выполнения равенства $\alpha = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}^*}\phi$ для ошибки первого рода, необходимо использовать *рандомизированную* критическую функцию ϕ, $0 \le \phi \le 1$, в виде

$$\phi = I_{\left\{\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} > c\right\}} + \gamma I_{\left\{\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} = c\right\}}, \quad \gamma = \frac{\alpha - \boldsymbol{Q}^*\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} > c\right)}{\boldsymbol{Q}^*\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*} = c\right)}.$$

В данном случае оптимальный портфель π совпадает с совершенным хеджем для обязательства $f \cdot \phi$.

Замечание 12.2. В модели Блэка-Шоулса $\boldsymbol{Q}^*\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}} = c\right) = 0$ вследствие непрерывности распределения.

Рассмотрим ситуацию, в которой инвестор соглашается принять на себя некоторый риск при исполнении платёжного обязательства. А именно, решим задачу нахождения минимального начального капитала, необходимого для исполнения платёжного обязательства с вероятностью по крайней мере $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0,\ 1)$.

Данная проблема является *дуальной* для задачи (12.3) – (12.4) и может быть выражена математически в следующем виде:

$$x \to \min, \tag{12.12}$$

$$\boldsymbol{P}\big(A(x,\ \pi,\ f)\big) \geq 1 - \varepsilon, \tag{12.13}$$

или, эквивалентно,

$$\boldsymbol{E}^*\left(\frac{f}{B_T} \cdot I_{\bar{A}}\right) \to \min, \tag{12.14}$$

$$\mathrm{P}\big(A(x,\ \pi,\ f)\big) \geq 1 - \varepsilon. \tag{12.15}$$

Обозначим $\bar{A} = \Omega \backslash A$ дополнение множества A:

$$\bar{A} = \left\{\omega : Y_T(x) < \frac{f}{B_T}\right\}.$$

Тогда можно сформулировать задачу, дуальную к (12.14) – (12.15), в таком виде:

$$\boldsymbol{E}^*\left(\frac{f}{B_T} \cdot I_{\bar{A}}\right) \to \max, \tag{12.16}$$

$$\boldsymbol{P}(\bar{\boldsymbol{A}}) \leq \varepsilon. \tag{12.17}$$

С помощью (12.9), перепишем (12.16) в форме

$$\boldsymbol{E}^* \frac{f}{B_T} \cdot \boldsymbol{Q}^*(\bar{A}) \to \max,$$

и следовательно, задача (12.16) – (12.17) эквивалентна соотношениям:

$$\boldsymbol{Q}^*(\bar{A}) \to \max, \tag{12.18}$$

$$\boldsymbol{P}(\bar{\boldsymbol{A}}) \leq \varepsilon. \tag{12.19}$$

Таким образом, задача (12.12) – (12.13) сводится к нахождению критического множества $\bar{A}$.

Из фундаментальной леммы Неймана-Пирсона следует, что решение в данном случае имеет вид (см. Лемму 12.2):

$$\bar{A} = \left\{\omega : \frac{d\boldsymbol{Q}^*}{d\boldsymbol{P}} > a\right\},$$

где $a = \inf\left\{s : \boldsymbol{P}\left(\frac{d\boldsymbol{Q}^*}{d\boldsymbol{P}} > s\right) \leq \varepsilon\right\}$.

В данном случае оптимальная стратегия в задаче (12.18) – (12.19) является *совершенным хеджем* для платёжного обязательства $f \cdot I_{\bar{A}}$.

Также заметим, что *совершенный хедж* для платёжного обязательства $f \cdot I_A$ где $A = \Omega \backslash \bar{A}$ – оптимальная стратегия в задаче (12.12) – (12.13), дуальной к задаче (12.18) – (12.19).

12.2 Формулы квантильного хеджирования для опциона покупателя

Рассмотрим проблему квантильного хеджирования стандартного опциона покупателя с функцией выплаты $f=(S_T-K)^+$ в модели Блэка-Шоулса. Как было показано ранее, начальный капитал совершенного хеджа в данном случае определяется формулой Блэка-Шоулса

$$X_0=S_0\Phi(d_+)-Ke^{-rT}\Phi(d_-). \tag{12.20}$$

где $d_\pm=\frac{\ln(S_0/K)+T\left(r\pm\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}$, а $\Phi(x)$ – функция нормального распределения

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Предположим, что начальный капитал инвестора составляет $x\le x_0<X_0$. В соответствии с Теоремой 12.1 оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем платёжного обязательства $f\cdot I_A$, где множество A имеет вид:

$$A=\left\{\omega:\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}^*}>c\right\}=\left\{\omega:\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{P}^*}>const\cdot f\right\}. \tag{12.21}$$

Используя факт того, что плотность мартингальной меры $\boldsymbol{P}^*$ относительно $\boldsymbol{P}$ равна

$$\frac{d\boldsymbol{P}_T^*}{d\boldsymbol{P}_T}=\exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^*-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right\},$$

то в соответствии с теоремой Гирсанова, (12.21) можно переписать в форме:

$$\begin{aligned}
A&=\left\{\exp\left(\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^*+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right)>\mathrm{const}\cdot(S_T-K)^+\right\}\\
&=\left\{\exp\left(\frac{\mu-r}{\sigma^2}\left(\ln S_0+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sigma W_T^*\right)\right)\times\exp\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\left(\ln S_0+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T\right.\\
&\qquad\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right)>\mathrm{const}\cdot(S_T-K)^+\right\}\\
&=\left\{S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}}exp\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\left(ln\,S_0+\frac{\mu+r-\sigma^2}{2}\right)T\right)\right.\\
&\qquad\left.>const\cdot(S_T-K)^+\right\}\\
&=\{f_1(S_T)>f_2(S_T)\}.
\end{aligned} \tag{12.22}$$

Далее необходимо рассмотреть два отдельных случая.

Случай 1. Предположим, что $\frac{\mu-r}{\sigma^2} \le 1$. Вследствие (12.22) множество A может быть записано в виде (см. Рисунок 12.1) с некоторыми константами b и d:

$$A = \{S_T < d\} = \{W_T^* < b\} = \left\{S_T < S_0\, exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + b\sigma\right)\right\} \tag{12.23}$$

при ограничении $$\boldsymbol{E}^*\left(\frac{f}{B_T} \cdot I_A\right) = x_0.$$

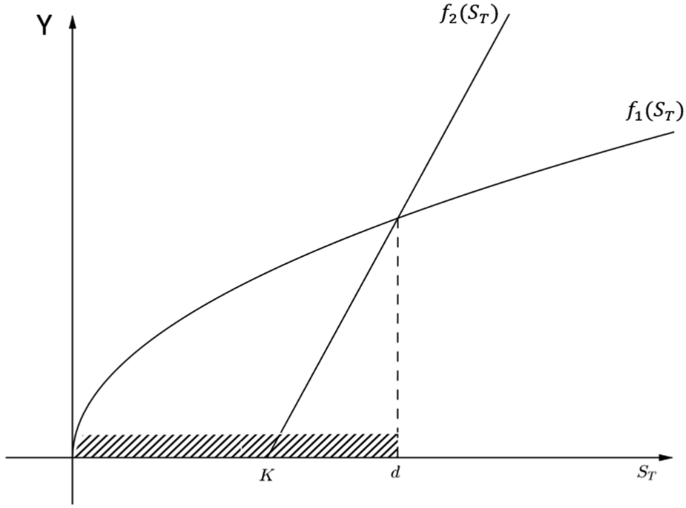


Рисунок 12.1 – Графики функций f_1, f_2 и структура хеджирующего множества

Из (12.23) находим, что $\boldsymbol{P}(A) = \Phi\left(\dfrac{b - \frac{\mu - r}{\sigma}T}{\sqrt{T}}\right)$,

и для нахождения константы b воспользуемся условием

$$x_0 = \boldsymbol{E}^*(e^{-rT} f \cdot I_A) = e^{-rT} F_T^*(S_T),$$

где

$$F_T^*(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b/\sqrt{T}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma\sqrt{T}y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_0}^{b/\sqrt{T}} \left(S_0 \exp\left\{\sigma\sqrt{T}y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\} - K\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

$$d_0 = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}x_0 &= S_0\left[\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-d_0\right)-\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right]\\ &\qquad - Ke^{-rT}\left[\Phi(-d_0)-\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right]\\ &= S_0\left[\Phi(d_+)-\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right]-Ke^{-rT}\left[\Phi(d_-)-\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right].\end{aligned}\tag{12.24}$$

Заметим,чтовслучаедуальнойзадачисограничением$\boldsymbol{P}(A) = 1-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<1$, постоянная b вычисляется по формуле:

$$b = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+\frac{\mu-r}{\sigma}T, \tag{12.25}$$

а соответствующий капитал минимального хеджа может быть рассчитан из (12.24).

Случай 2. Предположим, что $\frac{\mu-r}{\sigma^2}>1$. В этом случае множество A имеют структуру, показанную на Рисунке 12.2 и может быть выражено в терминах W^* в следующем виде:

$$A = \{W_T^*<b_1\}\cup\{W_T^*>b_2\}.$$

Решение задачи квантильного хеджирования имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{P}(A) = \Phi\left(\frac{b_1-\frac{\mu-r}{\sigma}T}{\sqrt{T}}\right)+\Phi\left(\frac{b_2+\frac{\mu-r}{\sigma}T}{\sqrt{T}}\right),$$

где для определения констант b_1 и b_2 используется условие

$$x_0 = \boldsymbol{E}^*[e^{-rT}f\cdot I_A] = e^{-rT}F_T^*(S_T),$$

при

$$\begin{aligned}F_T^*(S_T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{b_1}{\sqrt{T}}} f\left(S_0\exp\left\{\sigma\sqrt{T}y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{b_2}{\sqrt{T}}}^{\infty} f\left(S_0\exp\left\{\sigma\sqrt{T}y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy.\end{aligned}$$

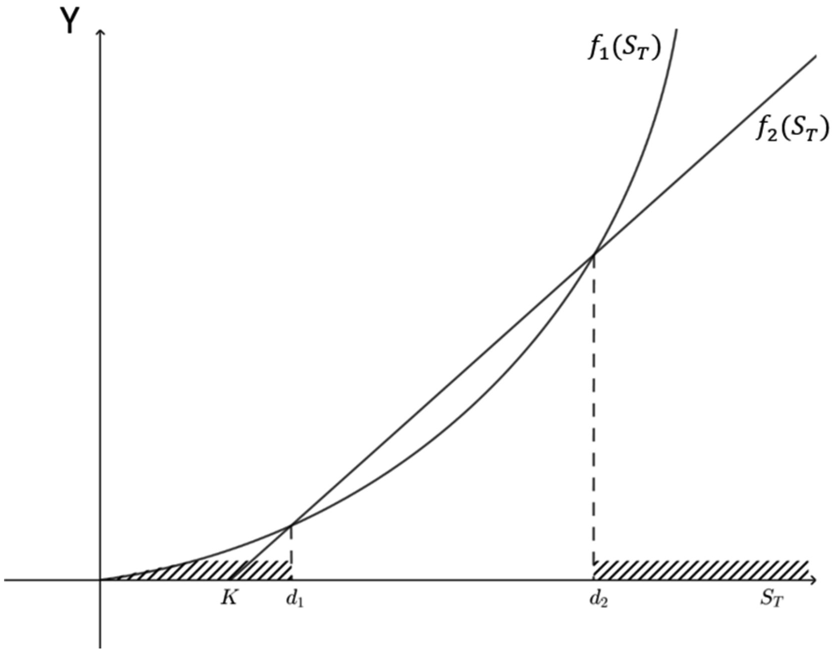


Рисунок 12.2 – Графики функций f_1,f_2 и структура хеджирующего множества

По аналогии со случаем $\frac{\mu-r}{\sigma^2} \leq 1$, получаем

$$x_0 = S_0\left[\Phi(d_+) - \Phi\left(\sigma\sqrt{T} - \frac{b_1}{\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(\sigma\sqrt{T} - \frac{b_2}{\sqrt{T}}\right)\right]$$

$$- Ke^{-rT}\left[\Phi(d_-) - \Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T}}\right)\right].$$

Численно проиллюстрируем, как принятие разных уровней риска влияет на ограничение объёма начального капитала.

Пример 12.1. Рассмотрим модель Блэка-Шоулса и опцион call с параметрами: $\mu = 0.08; r = 0; \sigma = 0.3; S_0 = 100; T = 0.25$ (3 месяца). Зафиксируем три уровня финансового риска $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1$. Для таких параметров имеем $\mu - r = 0.08 < 0.09 = (0.3)^2 = \sigma^2$, и следовательно, можно использовать (12.24) – (12.25) для определения b и x_0. Обычно отношение x_0 к цене Блэка-Шоулса называют коэффициентом потерь при хеджировании. Рассчитывая этот коэффициент потерь для указанных выше уровней риска ε, получим его значения: 0.89; 0.59; 0.34. Следовательно, цена Блэка-Шоулса может быть снижена на 10%, 41% и 66%, если инвестор принимает соответствующие уровни риска.

Глава 13
МОДЕЛЬ БЛЭКА-ШОУЛСА: КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ГИБКИХ СТРАХОВЫХ КОНТРАКТОВ

В этой главе квантильное хеджирование излагается в контексте гибких финансово-страховых контрактов с постоянной и стохастической гарантиями. Здесь же проиллюстрировано на примерах, как осуществляется «квантильный» риск-менеджмент таких контрактов (см. [24], [6] и [31]).

13.1 Квантильное хеджирование финансово-страховых контрактов с постоянной гарантией

В контрактах, которые будут рассмотрены в этой главе, присутствуют два источника риска: рыночная неопределённость цен базовых активов и смертность застрахованных клиентов. Эти источники практически не коррелируют, поэтому, как и в Главе 11, можем рассматривать их на произведении вероятностных пространств

$$\left(\overline{\Omega},\ \bar{F},\ \bar{P}\right) = \left(\Omega \times \widetilde{\Omega},\ F \times \tilde{F},\ P \times \tilde{P}\right),$$

где пространство $(\Omega,\ F,\ P)$ – вероятностная база финансового рынка, а в пространстве $\left(\widetilde{\Omega},\ \tilde{F},\ \tilde{P}\right)$ осуществляется моделирование смертности клиентов.

Страховая компания может выпускать контракты страхования жизни с будущими выплатами f. Размер f зависит от эволюции рискового актива финансового рынка в течение периода действия контракта $[0,\ T]$ Рассмотрим два возможных условия исполнения, указанного выше обязательства:

• когда застрахованный клиент всё ещё жив на момент времени T, и

• когда наступил страховой случай смерти клиента до момента T.

Первый из них соответствует случаю контракта «чистого дожития», а второй – контракту «срочного страхования». Ввиду симметричности их условий будем рассматривать только контракты чистого дожития.

Обозначим $T(x)$ оставшееся время жизни клиента в возрасте x. Тогда на основании страхового соглашения будущая выплата по обязательству равна

$$f \cdot I_{\{T(x)>T\}}. \tag{13.1}$$

Предположим, что страховая компания выпускает l_x контрактов для однородной группы держателей полисов в возрасте x. В соответствии с традиционным актуарным подходом, суммарная выплата для страховой компании принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{l_x} f \cdot I_{\{T_i(x)>T\}}\,, \qquad (13.2)$$

где $T_1(x),\ \dots,\ T_{l_x}(x)$ – независимые одинаково распределённые *(как* $T(x)$*)* случайные величины на пространстве $(\tilde{\Omega},\ \tilde{F},\ \tilde{P})$.

В соответствии с контрактом (13.1) – (13.2), каждый держатель страхового полиса получает выплату в размере:

$$f = \max(S_T,\ K)\,, \quad K = const,$$

при доживании до даты T. Данный тип соглашения называется *страховым контрактом чистого дожития с фиксированной гарантией*. Главной задачей в данной ситуации является расчёт стоимости контракта, или его премии.

При анализе этой задачи, уместны следующие замечания.

Во-первых, ключевым является расчёт ${}_TU_x$ для *одного контракта*, поскольку для группы численностью l_x имеем соотношение $U(T,\ l_x) = l_x \cdot {}_TU_x$. Помимо этого, для любого фиксированного $t \le T$, можно повторить те же логические шаги для интервала $[t,\ T]$ и определить соответствующую премию в виде произведения:

$$(l_x - N_t^x) \cdot {}_{T-t}U_x,$$

где $N_t^x = \sum_{i=1}^{l_x} I_{\{T_i(x)>t\}}$ – процесс, считающий количество смертей в исследуемой группе, а ${}_{T-t}U_x$ – размер премии для одного контракта, подписанного в момент времени t на срок $T-t$.

Во-вторых, премия $U(T,\ l_x)$ (и соответственно, ${}_TU_x$), по-видимому, не может быть размещена на банковском счёте. Компания должна инвестировать средства в более сложные инструменты финансового рынка, чтобы обеспечить будущую выплату f, зависящую от поведения рискового актива на протяжении контрактного периода.

В-третьих, структура премий, рассчитанная в Главе 11, такова, что значение ${}_TU_x$ меньше соответствующей справедливой стоимости данного «чисто финансового» платёжного обязательства f. Следовательно, невозможно построить совершенный хедж для f, имея начальный капитал ${}_TU_x$. Поэтому необходимо использовать другой подход при решении этой задачи.

Учитывая предыдущие замечания, воспользуемся методологией квантильного хеджирования, описанной в предыдущей Главе 12 для расчёта заданных страховых инструментов. Продемонстрируем как эта методология реализуется в рамках модели Блэка-Шоулса и страховых контрактов чистого дожития с гарантией. Для упрощения изложения будем полагать, что процентная ставка $r = 0$, и пусть цена акции задаётся моделью Блэка-Шоулса:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)\,, \qquad (13.3)$$

где $S_0 > 0$, μ – норма доходности акции, σ – волатильность, а $W = (W_t)_{t\ge0}$ стандартный Винеровский процесс на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{F},\ P)$.

Контракт «чистого дожития с гарантией» может быть идентифицирован со следующей функцией выплаты:

$$\begin{aligned} H\big(T(x)\big) &= f \cdot I_{\{T(x)>T\}} = \max\{S_T,\ K\} \cdot I_{\{T(x)>T\}} \\ &= K \cdot I_{\{T(x)>T\}} + (S_T - K)^+ \cdot I_{\{T(x)>T\}}. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Как известно, в модели финансового рынка (13.3) существует единственная мартингальная мера P^* с плотностью

$$\frac{dP_T^*}{d\hat{P}_T} = e^{-\frac{\mu}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 T},$$

где P_T^* и P_T – ограничения P^* и P на $\mathcal{F}_T$. Из Главы 11 известно, что для модели (13.3) начальная стоимость контракта ${}_TU_x$ вследствие (13.4) задана соотношением:

$$\begin{aligned} {}_TU_x &= H_0\big(T(x)\big) = {}_Tp_x \cdot E^*(S_T - K)^+ + {}_Tp_x \cdot K \\ &= {}_Tp_x\big(K + X_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)\big), \end{aligned} \tag{13.5}$$

где ${}_Tp_x = \tilde{P}\{\omega: T(x) > T\}$ – вероятность дожития,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

$$d_\pm = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\frac{K}{X_0} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

Удобно переписать (13.5) в виде доступного начального капитала для связанного с этой задачей опциона call $(S_T - K)^+$ и называемого *вложенным опционом*:

$$\begin{aligned} H_0^c\big(T(x)\big) &= {}_TU_x - {}_Tp_x \cdot K \\ &= {}_Tp_x \cdot \hat{E}^*(X_T - K)^+. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Соотношения (13.5) – (13.6) показывают, что можно построить максимальное множество успешного хеджирования A^* для опциона call $(S_T - K)^+$, начиная со стартового капитала $H_0^c\big(T(x)\big)$ вместо соответствующего множества A^* для исходной задачи с начальным капиталом $H_0\big(T(x)\big) = {}_TU_x$. Используя Теорему 12.1 и определение совершенного хеджа, из (13.5) – (13.6) заключаем, что

$${}_Tp_x = \frac{E^*(S_T-K)^+ \cdot I_{A^*}}{E^*(S_T-K)^+}. \tag{13.7}$$

Отношение (13.7) называется *балансовым уравнением*. Как и в Главе 12, рассмотрим два естественных случая:

Случай 1: $\mu < \sigma^2$. Множество $A^* = \{W_T^* < b\}$, где b – константа, и $W_t^* = W_t + \frac{\mu}{\sigma}t$ – Винеровский процесс относительно P^*. Если ${}_Tp_x$ известна, то можно определить b с помощью (13.7). Используя уравнение (12.24), перепишем (13.7) в терминах начальных параметров модели (13.1):

$$
\begin{aligned}
{}_T p_x &= \frac{S_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-) - S_0\Phi\left(\frac{-b+\sigma T}{\sqrt{T}}\right) + K\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)}{S_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)} \\
&= 1 - \frac{S_0\Phi\left(\frac{-b+\sigma T}{\sqrt{T}}\right) - K\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)}{S_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)}.
\end{aligned}
\tag{13.8}
$$

Далее, определяя актуарный параметр ${}_T p_x$ из таблиц смертности (см. Бауэрс и др. (1997)), можно построить соответствующее максимальное множество успешного хеджирования A^*. Вследствие Теоремы 12.1, полученные выше соотношения приводят к решению задачи о минимизации риска для исследуемых гибких страховых контрактов. С другой стороны, страховая компания может принимать на себя некоторый уровень риска $\epsilon \in (0,\ 1)$ такой, что

$$
1 - \epsilon = P^*(A^*). \tag{13.9}
$$

Ввиду структуры множества успешного хеджирования:

$$
A^* = \{W_T^* < b\}
$$

можно рассчитать его вероятность

$$
P(A^*) = \Phi\left(\frac{b - \frac{\mu T}{\sigma}}{\sqrt{T}}\right). \tag{13.10}
$$

Совмещая (13.9) и (13.10), приходим к следующим значениям b, аналогичным (12.25):

$$
b = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\epsilon) + \frac{\mu}{\sigma}T. \tag{13.11}
$$

Можно также проанализировать балансовое уравнение (13.7) с другой точки зрения, которая подразумевает определение актуарного значения ${}_T p_x$ для получения уровня риска ϵ. Таким образом, у риск-менеджера страховой компании есть выбор. Используя таблицы смертности, он может выбрать подходящий возраст x клиента и срок контракта в соответствии с этим уровнем риска.

Случай 2: $\mu > \sigma^2$. Множество успешного хеджирования имеет вид (см. Главу 12):

$$
A^* = \{W_T^* < b_1\} \cup \{W_T^* > b_2\},\ \ b_1 < b_2.
$$

Константы b_1 и b_2 определяются также, как и в предыдущем случае. Соответствующее балансовое уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
{}_T p_x &= 1 \\
&- \frac{S_0\left[\Phi\left(\frac{-b_1+\sigma T}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{-b_2+\sigma T}{\sqrt{T}}\right)\right] - K\left[\Phi\left(-\frac{b_1}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T}}\right)\right]}{S_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)}.
\end{aligned}
\tag{13.12}
$$

Соотношение (13.12) позволяет провести анализ, аналогичный предыдущему случаю, что приводит к решению задачи о минимизации риска в случае контрактов чистого дожития с фиксированной гарантией.

Рассмотрим актуарный анализ риска в отношении гибких страховых контрактов на наглядном примере, который является продолжением Примера 12.1.

Пример 13.1. Зафиксируем некоторый уровень риска $\epsilon = 0.01$ и зададим остальные параметры модели (13.3) и контракта «чистого дожития» с фиксированной гарантией (13.4) в следующем виде:

$$\mu = 0.08; \sigma = 0.3; S_0 = 100; T = 1 \text{ и } 5 \text{ (лет)}; K = 110.$$

Применяя (13.8) – (13.12), рассчитаем соответствующие вероятности дожития: ${}_1p_x = 0.930095$ и ${}_5p_x = 0.9551055$. Используя наглядные таблицы смертности (см. Бауэрс и др. (1997)), можно определить подходящий для данного контракта возраст клиента: $x \geq 78$ (лет) и $x \geq 53$ (лет) соответственно.

Если волатильность возрастает до значения $\sigma = 0.4$,, тогда та же самая процедура приводит к следующим вероятностям дожития: ${}_1p_x = 0.914122$ и ${}_5p_x = 0.913937$. Соответственно, возраст застрахованного клиента должен составлять $x \geq 81$ (лет) и $x \geq 61$ (лет). Таким образом, страховая компания должна компенсировать возросшие финансовые риски. Действенным способом для этого является уменьшение страхового риска, путём привлечения группы клиентов с меньшими вероятностями дожития. В обоих случаях страховая компания может осуществлять торговлю *краткосрочными* (1 год) контрактами только для группы достаточно пожилых клиентов (возраст ≥ 78 (лет) и 81 (лет)). Однако *долгосрочные* (5 лет) контракты могут быть проданы большей группе клиентов (возраст ≥ 53 (лет) и 61 (лет)).

13.2 Квантильное хеджирование финансово-страховых контрактов со стохастической гарантией

Исследуем метод квантильного хеджирования в рамках двухфакторной диффузионной модели рынка:

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma_i dW_t), \ i = 1, 2, \ t \leq T. \tag{13.13}$$

Для простоты расчётов предположим, что процентная ставка $r = 0$. Страховая компания, оперирующая на финансовом рынке, осуществляет выпуск контрактов, привязанных к эволюции рисковых активов S^1 и S^2, где S^1 предполагается более рисковым, или $\sigma_1 > \sigma_2$. Определим выплату f в виде $\max\{S_T^1, S_T^2\}$. Тогда S^2 играет роль *гибкой*, или *стохастической*, гарантии.

Как и прежде будем использовать случайную величину $T(x)$ на некотором вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ для выражения оставшегося времени жизни застрахованного клиента в возрасте x. Рассмотрим контракт чистого дожития с функцией выплаты:

$$H\big(T(x)\big) = f \cdot I_{\{T(x)>T\}}. \tag{13.14}$$

Чтобы найти начальную стоимость контракта (13.14), рассчитаем его математическое ожидание относительно $P^* \times \tilde{P}$ и получим цену Бреннана-Шварца:

$$\begin{aligned} {}_TU_x &= E^* \times \tilde{E}\big[H\big(T(x)\big)\big] = E^*[f] \cdot \tilde{E} I_{\{T(x)>T\}} \\ &= E^*[f] \cdot {}_Tp_x = S_0^2\, {}_Tp_x + E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ \cdot {}_Tp_x. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Разность ${}_TU_x - S_0^2\, {}_Tp_x$ из (13.15) может рассматриваться как граница начальной стоимости хеджирующей стратегии для *вложенного опциона* $(S_T^1 - S_T^2)^+$. Таким образом, применяя метод квантильного хеджирования (13.14) к вложенному опциону, имеем следующий аналог балансового уравнения (13.7):

$${}_Tp_x = \frac{E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ \cdot I_{A^*}}{E^*(S_T^1 - S_T^2)^+}, \tag{13.16}$$

где A^* – максимальное множество успешного хеджирования для $(S_T^1 - S_T^2)^+$.

Заметим, что в модели (13.13) второй рисковый актив S^2 может быть выражен посредством S^1 в следующем виде:

$$S_T^2 = (S_0^1)^{-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} S_0^2 \exp\left\{\left[\mu_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{\sigma_2}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right]T\right\}(S_T^1)^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}. \tag{13.17}$$

Для того, чтобы S^1 и S^2 являлись мартингалами относительно P^*, предположим, что выполнено следующее условие:

$$\sigma_2\mu_1 - \sigma_1\mu_2 = 0. \tag{13.18}$$

Такая мера P^* при условии (13.18) задаётся плотностью

$$Z_T = \exp\left\{-\frac{\mu_1}{\sigma_1}W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 T\right\}. \tag{13.19}$$

Сведём задачу расчёта (13.14) к расчёту другого контракта –

$$(S_T^1 - S_T^2)^+ \cdot I_{\{T(x)>T\}},$$

и воспроизведём аналогичную методологию квантильного хеджирования, используя представление W_T со *свободным* параметром γ, который будет выбран позднее:

$$\begin{aligned} &= (1+\gamma)W_T - \gamma W_T \\ &\frac{+\gamma}{\sigma_1}\left[\sigma_1 W_T + \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}T\right)\right] - \frac{\gamma}{\sigma_2}\left[\sigma_2 W_T + \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T\right] \\ &-\frac{1+\gamma}{\sigma_1}\left[\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}T\right] + \frac{\gamma}{\sigma_2}\left[\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right]T. \end{aligned} \tag{13.20}$$

Согласно лемме Неймана-Пирсона, множество A^* имеет следующую структуру:

$$A^* = \{Z_T^{-1} \geq a(S_T^1 - S_T^2)^+\} = \left\{(Z_T S^2)^{-1} \geq a\left(\frac{S_T^1}{S_T^2} - 1\right)^+\right\}, \tag{13.21}$$

где a – константа.

Используя (13.17), (13.19) – (13.20), выразим $Z_T S_T^2$ в (13.21) в виде:

$$Z_T S_T^2 = Y_T^{\alpha} G,$$

где $Y_T = \dfrac{S_T^1}{S_T^2}$,

$$\begin{aligned} {}^{1}_{0})^{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{(\sigma_1)^2}} & (S_0^2)^{\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}} \\ & \times \exp\left\{-\frac{1+\gamma}{\sigma_1}\left[\mu_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1)^2\right]T \right. \\ & \left. - \frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}\left[\mu_2 - \frac{1}{2}(\sigma_2)^2\right]T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 T\right\}, \end{aligned} \qquad (13.22)$$

$$\frac{(1+\gamma)\mu_1}{(\sigma_1)^2} = -\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2} - 1.$$

Полагая $0 < \sigma_1 - \sigma_2 \ll \sigma_1$ и σ_2, выберем $\gamma = \sigma_2 - \sigma_1$ и получим следующее достаточное условие для (13.22):

$$\mu_1 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2}{\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}. \qquad (13.23)$$

Далее рассмотрим следующее вспомогательное уравнение:

$$x^{-\alpha} = G \cdot \alpha \cdot (x-1)^{+}. \qquad (13.24)$$

Вследствие (13.23), получим, что

$$-\alpha = \frac{\sigma_2 + (\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_2}{\sigma_2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2} < 1,$$

и следовательно, уравнение (13.24) имеет единственное решение c.

Сформулируем теорему, отражающую главный результат применения методологии квантильного хеджирования в случае гибких страховых контрактов со стохастической гарантией.

Теорема 13.1. Рассмотрим финансовый рынок с двумя рисковыми активами в соответствии с моделью (13.13), для которых выполнены условия (13.18) и (13.23), а также гибкий страховой контракт с функцией выплаты $(S_T^1 - S_T^2)^{+} \cdot I_{\{T(x) > T\}}$. Тогда для вероятности дожития клиента выполнено следующее соотношение:

$$= 1 - \frac{S_0^1 \Phi\left(b_+(S_0^1,\, cS_0^2,\, T)\right) - S_0^2 \Phi\left(b_-(S_0^1,\, cS_0^2,\, T)\right)}{S_0^1 \Phi\left(b_+(S_0^1,\, S_0^2,\, T)\right) - S_0^2 \Phi\left(b_-(S_0^1,\, S_0^2,\, T)\right)}. \qquad (13.25)$$

Доказательство. Рассмотрим множество $A^* = \{Y_T \le c\}$. Переписав (13.13) в экспоненциальной форме Геометрического Броуновского Движения, выразим Y_T в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
Y_T &= \frac{S_0^1}{S_0^2}\exp\left\{(\sigma_1-\sigma_2)W_T + \left[(\mu_1-\mu_2) - \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{2}\right]T\right\} \\
&= \frac{S_0^1}{S_0^2}\exp\left\{(\sigma_1-\sigma_2)W_T^* - \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T}{2}\right\},
\end{aligned}
$$

где $W_t^* = W_t + \frac{\mu_1}{\sigma_1}t$ – Винеровский процесс относительно P^*.

Из полученной выше формулы для Y_T следует, что $\ln(Y_T)$ нормально распределён

$$
N\left(\ln\frac{S_0^1}{S_0^2} - \frac{(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T}{2},\ (\sigma_1-\sigma_2)^2T\right) = N\big(\mu_{\ln Y_T},\ \sigma^2_{\ln Y_T}\big)
$$

относительно P^*, и имеет следующее распределение

$$
N\left(\ln\frac{S_0^1}{S_0^2} + \left[\mu_1-\mu_2 - \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{2}\right]T,\ (\sigma_1-\sigma_2)^2T\right)
$$

относительно P.

Следовательно, фиксируя $P(A^*) = 1-\epsilon$, $\epsilon > 0$, приходим к следующему уравнению для c, используя свойства нормального распределения с параметрами μ и σ^2:

$$
1-\epsilon = P(A^*) = P\{ln\,Y_T \le ln\,c\} = \Phi_{\mu,\,\sigma^2}(ln\,c). \tag{13.26}
$$

Знаменатель в (13.16) определяется с помощью формулы Маргрейба (10.26):

$$
\mathbb{C}^{Mar}(S_0^1,\ S_0^2,\ T) = S_0^1\Phi\Big(b_+(S_0^1,\ S_0^2,\ T)\Big) - S_0^2\Phi\Big(b_-(S_0^1,\ S_0^2,\ T)\Big). \tag{13.27}
$$

Для числителя в (13.16) получим, что

$$
\begin{aligned}
&E^*[(S_T^1-S_T^2)^+I_{A^*}] = E^*\big[(S_T^1-S_T^2)^+I_{\{Y_T\le c\}}\big] \\
&= E^*[(S_T^1-S_T^2)^+] - (S_0^1-S_0^2) + E^*\big[(S_T^1-S_T^2)I_{\{Y_T\le c\}}\big].
\end{aligned} \tag{13.28}
$$

Чтобы определить $E^*S_T^iI_{\{Y_T\le c\}}$, $i = 1,\ 2$, в (13.28), воспользуемся Леммой 10.1, которая вместе с (13.27) приводит к (13.25).

Замечание 13.1. Представленный в рамках модели (13.13) метод квантильного хеджирования также может быть распространён на случай модели (10.14).

13.3 Общая схема квантильного риск-менеджмента

Изложение материала в этой части будет основано на следующем примере.

Пример 13.2. Пусть модель (13.13) задана параметрами

$$
\mu_1 = 0.0481, \quad \sigma_1 = 0.2232;
$$

$$
\mu_2 = 0.0417, \quad \sigma_2 = 0.2089.
$$

Заметим, что условия (13.18) и (13.23) при $\gamma = \sigma_2 - \sigma_1$ удовлетворены с достаточной точностью. Положим, что начальные стоимости обоих активов равны. Используя формулы (13.25) и (13.26) с $T = 1, 5, 10$ и $\epsilon = 0.01,\ 0.025,\ 0.05$, рассчитаем значения соответствующих вероятностей дожития ${}_Tp_x$ (см. Таблицу 13.1). Далее можно найти подходящий возраст клиентов (см., например, Бауэрс и др. (1997)). Полученные результаты отражены в Таблице 13.2.

Таблица 13.1 – Вероятности дожития

	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.025$	$\epsilon = 0.05$
$T = 1$	0.9447	0.8774	0.7811
$T = 3$	0.9511	0.8910	0.8041
$T = 5$	0.9549	0.8989	0.8174
$T = 10$	0.9605	0.9108	0.8378

Таблица 13.2 – Возраст застрахованных клиентов (лет)

	$\epsilon = 0.01$	$\epsilon = 0.025$	$\epsilon = 0.05$
$T = 1$	78	87	94
$T = 3$	61	71	79
$T = 5$	53	63	71
$T = 10$	41	50	58

При возрастании уровня риска ϵ, страховая компания должна ограничить группу застрахованных, привлекая клиентов с бóльшим возрастом. В результате компания уменьшает страховую компоненту риска, чтобы компенсировать прирост в финансовой рисковой составляющей. Выпуск контрактов с бóльшим сроком T позволяет компании снизить страховой риск при фиксированном ϵ. Следовательно, страховая фирма может позволить себе работать с группами более молодых клиентов.

Покажем, как страховая компания может диверсифицировать риск смертности, объединяя однородных клиентов в группу. Рассмотрим кумулятивное обязательство $l_{z+T}(S_T^1 - S_T^2)$, где l_{x+T} – количество доживших застрахованных на момент окончания действия контракта из начального размера группы l_x. Обозначим $\pi = \pi_\epsilon$ квантильный хедж с уровнем риска ϵ, начальной (квантильной) ценой C_ϵ и терминальным капиталом X_T^π такими, что

$$P(X_T^\pi \geq (S_T^1 - S_T^2)^+) = 1 - \epsilon. \qquad (13.29)$$

Максимальное множество успешного хеджирования инвариантно относительно операции умножения на положительную константу β. Таким образом, обязательство $\beta(S_T^1 - S_T^2)^+$ может быть захеджировано при таком же уровне риска ϵ с начальной стоимостью βC_ϵ. Приведём аргументы в пользу совмещения финансового и страхового рисков. Пусть $\beta = \frac{n_\delta}{l_x}$, где n_δ определена из уравнения

$$P(l_{x+T} \leq n_\delta) = 1 - \delta. \tag{13.30}$$

Параметр $\delta \in (0,\ 1)$ характеризует риск смертности для компании, а вероятность в (13.30) может быть рассчитана с помощью биномиального распределения с параметром Бернулли ${}_T p_x$. Используя независимость l_{x+T} и рыночных активов S^1 и S^2, с помощью (13.29) и (13.30) получим, что

$$P \times \tilde{P}(l_x X_T^\pi \geq l_{x+T}(S_T^1 - S_T^2)^+)$$
$$\geq P \times \tilde{P}\left(X_T^\pi \geq \frac{l_{x+T}}{l_x}(S_T^1 - S_T^2)^+\right)$$
$$\geq P\left(X_T^\pi \geq \frac{n_\delta}{l_x}(S_T^1 - S_T^2)^+\right) \cdot \tilde{P}(l_{x+T} \leq n_\delta) \geq (1-\epsilon)(1-\delta) \geq 1 - (\epsilon + \delta).$$

Пусть $T = 1, 5, 10$ (лет), зафиксируем параметры $\epsilon = \delta = 0.025$, и рассмотрим контракт для группы размера $l_x = 100$. Вследствие (13.31) диверсификация риска смертности позволяет страховой компании сократить стоимость каждого контракта на 12% – 18% в сравнении с ценой Маргрейба, в то время как соответствующая квантильная цена уменьшается только на 9% – 12%.

Наконец, проиллюстрируем рассмотренную методологию квантильного хеджирования с помощью Рисунков 13.1 и 13.2 ниже. Рисунок 13.1 демонстрирует роль формул Блэка-Шоулса и Маргрейба при расчёте гибких страховых контрактов. Рисунок 13.2. отражает схему «квантильного» риск-менеджмента в случае гибких страховых контрактов.

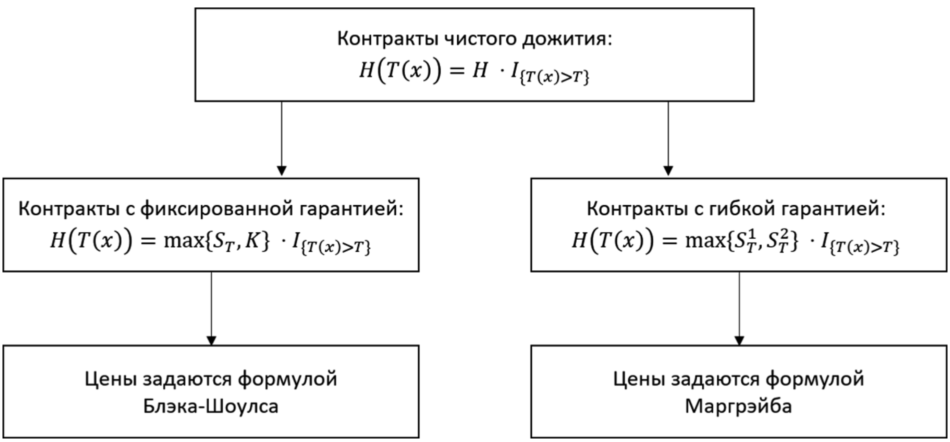


Рисунок 13.1 – Использование формул Блэка-Шоулса и Маргрейба при расчёте гибких страховых контрактов с фиксированной или стохастической гарантиями

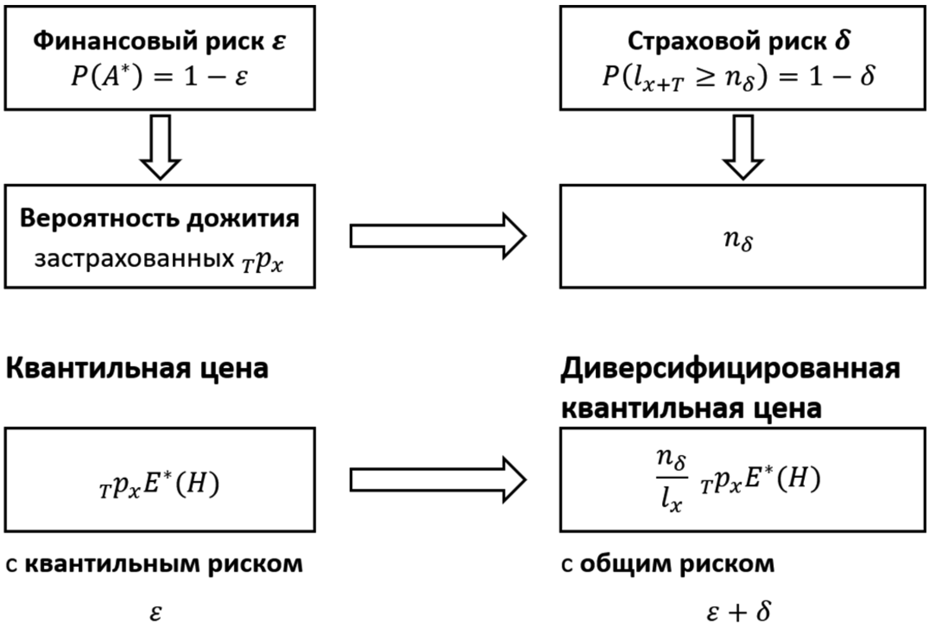


Рисунок 13.2 – Схема квантильного хеджирования

Глава 14
МОДЕЛЬ БЛЭКА-ШОУЛСА: ЭФФЕКТИВНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ГИБКИХ СТРАХОВЫХ КОНТРАКТОВ

В данной главе методология эффективного хеджирования излагается в аспекте расчёта гибких финансово-страховых схем. Представлены примеры и показано, как осуществляется эффективный риск-менеджмент таких контрактов (см. [26] и [23]).

14.1 О понятии эффективного хеджирования

Исследуем методологию эффективного хеджирования для расчёта теоретической цены и вероятности дожития в случае гибких страховых контрактов со стохастической/гибкой гарантией. Все наблюдения будем проводить в рамках модели (13.13). Соответствующее описание рассматриваемых контрактов представлено формулой (13.14). В отличие от задачи, поставленной в Главе 13, эмитент контракта с датой исполнения T с некоторой вероятностью может иметь потери, являющиеся результатом несоответствия между суммой выплаты H и капиталом стратегии X_T, полученным в результате начальной инвестиции. Эта разность $(H - X_T)^+$ называется *шортфолом*.

Чтобы сформулировать задачу *эффективного хеджирования,* введём понятие *функции потерь* $l = l(x)$, $x \geq 0$, с $l(0) = 0$ и будем рассматривать *степенную функцию потерь*

$$l(x) = \text{const} \cdot x^p, \;\; p > 0, \;\; x \geq 0. \tag{14.1}$$

Проанализируем три возможных сценария для p: $p = 1$, $p > 1$, $0 < p < 1$.

Определим *риск шортфола* в виде $E(l(H - X_T)^+)$. Цель эффективного хеджирования заключается в нахождении оптимальной стратегии π^*, которая минимизирует риск шортфола при ограничении на размер начального капитала x допустимой стратегии π:

$$E\left(l\left(H - X_T^{\pi^*}\right)\right) = \inf_{\pi} E(l(H - X_T^{\pi})^+), \tag{14.2}$$

где $x = X_0^{\pi} \leq x_0 < E^* H e^{-rT}$.

Стратегия π^* называется *эффективным хеджем*.

Построив эффективный хедж, установим начальную стоимость контракта равной его исходному капиталу $X_0^{\pi^*}$. Задача (14.2) может быть переформулирована в следующем виде:

найти $\mathcal{F}_T$-измеримую функцию (*решающее правило*) $\varphi: \Omega \to [0, 1]$, минимизирующую величину

$$E(l((1-\varphi)H)) \text{ при ограничении } E^*\varphi H \le x_0. \tag{14.3}$$

Задача (14.3) и, соответственно, (14.2) могут быть решены с помощью фундаментальной леммы Неймана-Пирсона. Сформулируем результат, полученный Фёльмером и Лейкертом, в виде следующей леммы.

Лемма 14.1. Рассмотрим платёжное обязательство с выплатой H и шортфолом от его хеджирования, взвешенном степенной функцией потерь (14.1). Тогда эффективный хедж π^*, удовлетворяющий (14.2), существует и совпадает с совершенным хеджем модифицированного обязательства H_p, имеющего структуру:

$$\begin{aligned} &H_p = H - a_p Z_T^{\frac{1}{p-1}} \wedge H \text{ при } p > 1,\ \text{const} = \frac{1}{p}, \\ &H_p = H I_{\{Z_t^{-1} > a_p H^{1-p}\}} \text{ при } 0 < p < 1,\ \text{const} = 1, \\ &H_p = H I_{\{Z_t^{-1} > a_p\}} \text{ при } p = 1,\ \text{const} = 1, \end{aligned} \tag{14.4}$$

где константа a_p определяется из условия для начального капитала $E^* H_p e^{-rT} = x_0$, а Z_T определена в (13.19).

Степенная функция является лишь одним из примеров функции потерь: её выпуклость демонстрирует рисковые предпочтения риск-менеджера и меняется при разных значениях p.

В случае $p > 1$, l выпукла вниз, а инвестор не склонен к риску: для разности $(H - X_T)$ размером ϵ, ожидаемая потеря больше ϵ. Целью инвестора является получение как можно меньшей величины потери.

Сравним предыдущую ситуацию со случаем $0 < p < 1$: здесь l выпукла вверх, и ожидаемые потери меньше, чем ϵ. Таким образом, их минимизация имеет не такое важное значение для инвестора, в отличие от предыдущего сценария, что означает готовность инвестора к принятию риска.

При $p = 1$ инвестор безразличен к риску.

В соответствии с рассмотренными сценариями поведения степенной функции потерь проанализируем три возможных значения p по отдельности и, используя полученные результаты, получим структуру решения в каждом случае.

Рассмотрим контракт с функцией выплаты $H = (S_T^1 - S_T^2)^+$, обуславливая это возможностью смертности клиента. Выплата по данному контракту осуществляется только при условии дожития клиента до даты исполнения T. Если же клиент умирает до наступления даты T, договор перестаёт существовать. Понятно, что в данной ситуации присутствуют два источника риска: волатильность рисковых активов (финансовый риск) и смертность клиентов (страховой риск). Представим выплату по такому *смешанному* контракту в виде

$$(S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{T(x) > T\}}, \tag{14.5}$$

где $T(x)$ время дожития клиента в возрасте x.

Из развитой ранее теории расчёта опционов известно, что начальная стоимость контракта является математическим ожиданием дисконтированной выплаты по контракту относительно риск-нейтральной меры (в данном случае, P^*). Рассчитаем начальную цену Бреннана-Шварца ${}_TU_x$ контракта (14.5):

$$ {}_TU_x = E^* \times \tilde{E}\left[e^{-rT}(S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{T(x)>T\}}\right] = E^*[e^{-rT}(S_T^1 - S_T^2)^+] \cdot {}_Tp_x. $$

Ранее упоминалось, что смертность клиента, выраженная через ${}_Tp_x$, является причиной снижения стоимости контракта:

$$ (S_T^1 - S_T^2)^+ \cdot {}_Tp_x < (S_T^1 - S_T^2)^+ \text{ означает, что} $$

$$ e^{-rT}E^*[(S_T^1 - S_T^2)^+] \cdot {}_Tp_x < e^{-rT}E^*[(S_T^1 - S_T^2)^+] = X_0. $$

Следовательно, выплаченная клиентом премия недостаточна для совершенного хеджирования. Тем не менее страховая компания может использовать методологию эффективного хеджирования, чтобы минимизировать риск шортфола.

Объединяя общую теорию расчёта опционов и эффективного хеджирования (см. Лемму 14.1), получим, что

$$ {}_TU_x = E^*[e^{-rT}(S_T^1 - S_T^2)^+] \cdot {}_Tp_x = E^*\left[e^{-rT}(S_T^1 - S_T^2)_p^+\right]. \tag{14.6} $$

Равенство (14.6) позволяет вывести следующее выражение для вероятности дожития ${}_Tp_x$ (*балансовое уравнение*):

$$ {}_Tp_x = \frac{E^*\left[(S_T^1 - S_T^2)_p^+\right]}{E^*[e^{-rT}(S_T^1 - S_T^2)]} \tag{14.7} $$

где модифицированная выплата $(S_T^1 - S_T^2)_p^+$ зависит от значения p степенной функции потерь.

Балансовое уравнение (14.7) является ключевым в предлагаемом актуарном анализе, поскольку оно позволяет численно связать между собой страховую и финансовую компоненты риска в данном контракте. Более того, (14.7) показывает, что, если страховая компания принимает на себя слишком большой финансовый риск, то она может компенсировать его, допуская меньший страховой риск (например, подписывая контракты с более пожилыми клиентами), и наоборот. В конце данной главы будет рассмотрена численная иллюстрация такого типа актуарного анализа.

Стоит подчеркнуть и другое важное наблюдение. До данного момента рассматривалась только задача минимизации риска шортфола при ограничении начального капитала. Однако, если страховая компания соглашается принять на себя некоторый риск в обмен на снижение цен контракта для привлечения большего числа клиентов, тогда можно рассчитать начальную цену, которую необходимо взымать с покупателей полиса исходя из уровня риска, допустимого для данной компании. Более того, используя (14.7), можно также восстановить подходящий возраст клиентов, с которыми следует заключать указанные контракты.

14.2 Эффективное хеджирование гибких страховых контрактов со стохастической гарантией

Рассмотрим финансовый рынок, состоящий из безрискового актива $B_t = e^{rt}$, $r \geq 0$, $t \geq 0$ и двух рисковых активов S^i:

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i\, dt + \sigma_i\, dW_t), t \leq T, \quad i = 1,2 \tag{14.8}$$

где $W = (W_t)_{t \leq T}$ – Винеровский процесс, определённый на стандартном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}, P)$, T – дата исполнения контракта. В целях упрощения изложения предположим, что $r = 0$ и следовательно, $B_t = 1$ для любого t.

Также пусть $\mu_1 > \mu_2$, $\sigma_1 > \sigma_2$. Данные условия необходимы, поскольку S^2 предполагается гибкой гарантией и, следовательно, должен быть менее рисковым чем S^1. Пусть также начальные значения обоих активов равны $S_0^1 = S_0^2 = S_0$ и являются начальными инвестициями на финансовом рынке.

Модель (14.8) здесь удобно представить в виде Геометрического Броуновского Движения:

$$S_t^i = S_0^i \exp\left\{\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) + \sigma_i W_t\right\} \quad i = 1,\ 2. \tag{14.9}$$

Определим вероятностную меру P^*, имеющую следующую плотность относительно начальной меры P:

$$Z_T = \exp\left\{-\frac{\mu_1}{\sigma_1} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}. \tag{14.10}$$

Оба процесса, S^1 и S^2, являются мартингалами относительно меры P^* при выполнении следующего технического условия:

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{\mu_2}{\sigma_2}. \tag{14.11}$$

Следовательно, чтобы предотвратить существование возможности арбитража на рынке, предположим, что рисковые активы удовлетворяют техническому условию (14.11). Тогда, в соответствии с теоремой Гирсанова, процесс

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu_1}{\sigma_1} t = W_t + \frac{\mu_2}{\sigma_2} t$$

является Винеровским относительно P^*, определяемой плотностью (14.10).

Отметим следующее полезное представление гарантии S_t^2 через базовый рисковый актив S_t^1:

$$
\begin{aligned}
S_t^2 = S_0^2 \exp\left\{\sigma_2 W_t + \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) t\right\} \\
&= S_0 \exp\left\{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\sigma_1 W_t + \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) t\right)\right. \\
&\left. - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) t + \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) t\right\} \\
= (S_0)^{1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} (S_1)^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \exp\left\{-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) t + \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) t\right\}.
\end{aligned}
\tag{14.12}
$$

Соотношение (14.12) показывает, что введённая модель эквивалентна финансовому рынку, состоящему из единственного рискового актива и стохастической гарантии, являющейся функцией цены этого актива.

Как и прежде будем называть процесс $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t^1, \gamma_t^2)_{t\geq 0}$, согласованный с эволюцией цен $\mathcal{F}_t$, стратегией/портфелем. Определим его капитал в виде суммы $X_t^\pi = \beta_t + \gamma_t^1 S_t^1 + \gamma_t^2 S_t^2$. Также будем рассматривать только самофинансируемые стратегии, удовлетворяющие следующему условию:

$$
dX_t^\pi = \beta_t + \gamma_t^1 dS_t^1 + \gamma_t^2 dS_t^2,
$$

где все стохастические дифференциалы корректно определены.

Рассмотрим случайную величину $T(x)$ на вероятностном пространстве $\left(\widetilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}\right)$ в качестве обозначения времени дожития человека в возрасте x. Пусть ${}_T p_x = \tilde{P}\{T(x) > T\}$ – вероятность дожития.

Исследуем контракты чистого дожития с гибкой/стохастической гарантией, выплата по которым происходит в дату исполнения при условии, что клиент всё ещё жив. Вследствие независимости «финансовой» и «страховой» составляющих контракта, будем рассматривать пространство-произведение $\left(\Omega \times \widetilde{\Omega}, \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}, P \times \tilde{P}\right)$ и введём платёжное обязательство аналогично (13.14):

$$
H\big(T(x)\big) = \max\{S_T^1, S_T^2\} \cdot I_{\{T(x)>T\}}. \tag{14.13}
$$

Известно, что стратегия с терминальным капиталом, равным выплате $H = \max\{S_T^1, S_T^2\}$ в момент T является совершенным хеджем для контракта, а его стоимость равна $E^* H$.

Перепишем финансовую компоненту (14.13) в следующем виде:

$$
H\big(T(x)\big) = \max\{S_T^1, S_T^2\} \cdot I_{\{T(x)>T\}} = (S_T^2 + (S_T^1 - S_T^2)^+) \cdot I_{\{T(x)>T\}}. \tag{14.14}
$$

Используя (14.14) сведём расчёт цены обязательства (14.13) к расчёту опциона покупателя $(S_T^1 - S_T^2)^+$ при условии, что $\{T(x) > T\}$.

В соответствии с теорией расчёта опционов, оптимальная стоимость традиционно рассчитывается как математическое ожидание приведённой стоимости платежей относительно риск-нейтральной вероятностной меры. Заметим, однако, что «страховая» часть контракта (14.13) не обязана иметь поправку на риск, поскольку риск смертности существенно не систематичен.

Это значит, что страховой риск может быть достаточно эффективно контролируем путём увеличения количества одинаковых страховых полисов. Как уже известно, данные наблюдения приводят к цене Бреннана-Шварца для (14.13):

$$ {}_TU_x = E^* \times \tilde{E}H\big(T(x)\big) = {}_Tp_x E^*(S_T^2) + {}_Tp_x E^*(S_T^1 - S_T^2)^+, \qquad (14.15) $$

где $E^* \times \tilde{E}$ – математическое ожидание относительно $P^* \times \tilde{P}$.

Страховая компания выступает на финансовом рынке в роли хеджера обязательства H. Из (14.15) следует, что начальная стоимость H строго меньше цены совершенного хеджа, поскольку вероятность дожития всегда меньше 1, или

$$ {}_TU_x < E^*(S_T^2 + (S_T^1 - S_T^2)^+) = E^*H. $$

Следовательно, совершенное хеджирование H с начальной стоимостью хеджа, ограниченной справедливой стоимостью E^*H невозможно и необходимо использовать альтернативные методы хеджирования. Будем искать стратегию π^* с некоторым бюджетным ограничением, такую, что её капитал $X_T^{\pi^*}$ на момент исполнения контракта максимально близок к H в смысле задачи (14.2) со степенной функцией потерь (14.1). Стратегия π^* называется *эффективным хеджем*.

Построив эффективный хедж, установим цену гибкого страхового контракта (14.13) равной начальной стоимости $X_0^{\pi^*}$ и сделаем вывод о подходящем балансе между финансовым и страховым рисками.

Используя Лемму 14.1, сведём построение эффективного хеджа для обязательства H в (14.2) к более простому построению совершенного хеджа модифицированного обязательства (14.4). Будем применять эффективное хеджирование к гибким страховым контактам.

Рассмотрим гибкий страховой контракт с функцией выплаты (14.13). Вследствие (14.14), обратим внимание на компоненту $(S_T^1 - S_T^2)^+ \cdot I_{\{T(x)>T\}}$, ассоциированную с опционом покупателя. Отметим следующее равенство, которое следует из определений совершенного и эффективного хеджей, а также Леммы 14.1:

$$ X_0 = {}_Tp_x E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ = E^*(S_T^1 - S_T^2)^+_{p,\, p\geq 0}, \qquad (14.16) $$

где $(S_T^1 - S_T^2)^+_p$ определяется в (14.4).

Используя (14.16) можно разделить страховую и финансовую компоненты контракта:

$$ {}_Tp_x = \frac{E^*(S_T^1 - S_T^2)^+_p}{E^*(S_T^1 - S_T^2)^+}. \qquad (14.17) $$

Левая часть равенства (14.17) равна вероятности дожития застрахованного клиента, которая представляет риск смертности для страховой компании. В то же время правая часть (14.17) относится к чисто финансовому риску, поскольку её члены зависят только от эволюции цен на финансовом рынке. Таким образом, уравнение (14.17) может рассматриваться как ключевое балансовое уравнение, совмещающее риски, связанные с выполнением контракта (14.13).

Будем использовать методологию эффективного хеджирования, представленную в Лемме 14.1 для нахождения числителя в правой части уравнения (14.17) и формулу Маргрейба (10.26) или (13.27) для её знаменателя.

Начнём с рассмотрения знаменателя правой части равенства (14.17). Имеем следующее соотношение:

$$E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ = S_0\{\Phi(b_+(1,\,1,\,T)) - \Phi(b_-(1,\,1,\,T))\}, \qquad (14.18)$$

где $b_\pm(1,\,1,\,T) = \frac{\ln 1 \pm (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \frac{T}{2}}{(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{T}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

Для расчёта числителя правой части (14.17), необходимо выразить его в терминах $Y_T = \frac{S_T^1}{S_T^2}$. Перепишем W_T с помощью свободного параметра γ в виде:

$$\begin{aligned} W_T &= (1+\gamma)W_T - \gamma W_T \\ &= \frac{1+\gamma}{\sigma_1}\left(\sigma_1 W_T + \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T\right) - \frac{\gamma}{\sigma_2}\left(\sigma_2 W_T + \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T\right) \\ &\qquad - \frac{1+\gamma}{\sigma_1}\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + \frac{\gamma}{\sigma_2}\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T. \end{aligned} \qquad (14.19)$$

Используя (14.10) и (14.19), получим следующее представление для плотности Z_T:

$$Z_T = G \cdot (S_T^1)^{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2}} (S_T^2)^{\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}}, \qquad (14.20)$$

где

$$G = (S_0^1)^{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2}} (S_0^2)^{\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2}\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T - \frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 T\right\}.$$

Далее рассмотрим три сценария в соответствии с (14.4) и выберем подходящие значения параметра γ для каждого случая. Полученные результаты приведены в следующей теореме.

Теорема 14.1. Рассмотрим страховую компанию, взвешивающую свои риски потерь с помощью степенной функции (14.1) с некоторым параметром $p > 0$. Для гибких страховых контрактов с выплатой (14.13), выпущенных данной страховой компанией, имеет место балансовое уравнение (14.17). Форма этого уравнения зависит от значения параметра p следующим образом:

Случай 1: $p > 1$

Для $p > 1$ имеем, что

$$
{}_Tp_x = \frac{\Phi\big(b_+(1,\, C,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, C,\, T)\big)}{\Phi\big(b_+(1,\, 1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, 1,\, T)\big)} + \frac{(C-1)^+}{C^{\alpha_p}} \exp\left\{\alpha_p\big(1-\alpha_p\big)\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{2}T\right\} \times \\ \times \frac{\Phi\big(b_-(1,\, C,\, T) + \alpha_p(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}\big)}{\Phi\big(b_+(1,\, 1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, 1,\, T)\big)}, \tag{14.21}
$$

где C находится из условий

$$
\alpha_p G^{\frac{1}{p-1}} C^{\alpha_p} = C - 1 \quad \text{и} \quad \alpha_p = -\frac{\mu_1}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)(\rho-1)} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}
$$

Случай 2: $0 < p < 1$

Обозначим $\alpha_p = \frac{\sigma_1\sigma_2(1-\rho)-\mu_1}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}$.

Если $-\alpha_p \leq 1 - p$ $\left(\text{или } \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} \leq 1 - \rho\right)$, то

$$
{}_Tp_x = 1 - \frac{\Phi\big(b_+(1,\, C,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, C,\, T)\big)}{\Phi\big(b_+(1,\, 1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, 1,\, T)\big)}, \tag{14.22}
$$

где C определяется из уравнения

$$
C^{\alpha_p} = a_p \cdot G \cdot ((C-1)^+)^{1-p}. \tag{14.23}
$$

Если $\alpha_p > 1 - p$ $\left(or\ \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} > 1 - p\right)$, то

- Если (14.23) не имеет решений, то ${}_Tp_x = 1$.
- Если (14.23) имеет одно решение C, то ${}_Tp_x$ определяется посредством (14.22).
- Если (14.23) имеет два решения $C_1 < C_2$ то

$$
{}_Tp_x = 1 - \frac{\Phi\big(b_+(1,\, C_1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, C_1,\, T)\big)}{\Phi\big(b_+(1,\, 1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, 1,\, T)\big)} + \frac{\Phi\big(b_+(1,\, C_2,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, C_2,\, T)\big)}{\Phi\big(b_+(1,\, 1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, 1,\, T)\big)}. \tag{14.24}
$$

Случай 3: $p = 1$

Для $p = 1$ имеем, что

$$
{}_Tp_x = 1 - \frac{\Phi\big(b_+(1,\, C,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, C,\, T)\big)}{\Phi\big(b_+(1,\, 1,\, T)\big) - \Phi\big(b_-(1,\, 1,\, T)\big)}, \tag{14.25}
$$

где $\quad C = \big(Ga_p\big)^{\frac{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}{\mu_1}} \quad$ и $\quad \alpha_p = -\frac{\mu_1}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}.$

Прежде чем привести доказательство (14.21), (14.22), (14.24) и (14.25), полезно сделать следующее замечание.

Замечание 14.1. Для расчёта C (или C_1 и C_2) в (14.22), (14.23) и (14.24) можно предложить также следующий подход. Зафиксируем вероятность множества $\{Y_T \leq C\}$ (или $\{Y_T \leq C_1\} \cup \{Y_T > C_2\}$):

$$\begin{gathered} P(Y_T \leq C) = 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0, \\ P(\{Y_T \leq C_1\} \cup \{Y_T > C_2\}) = 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0 \end{gathered} \tag{14.26}$$

и рассчитаем C (или C_1 и C_2), используя лог-нормальность Y_T. Заметим, что множество, для которого справедливо условие (14.26), совпадает с $\{X_T^\pi \geq H\}$. Последнее имеет наглядную финансовую интерпретацию: фиксируя вероятность на уровне $1 - \epsilon$, можно задать уровень финансового риска, который страховая компания готова принять или, другими словами, вероятность ϵ того, что фирма не сможет построить совершенный хедж для обязательства.

Доказательство Теоремы 14.21.

В соответствии с (14.20), справедливо следующее равенство:

$$Z_T^{\frac{1}{p-1}}(S_T^2)^{-1} = G^{\frac{1}{p-1}} \cdot (S_T^1)^{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2(\rho-1)}}(S_T^2)^{-1+\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2(\rho-1)}} = G^{\frac{1}{p-1}} \cdot Y_T^{\alpha_p} \tag{14.27}$$

при

$$\alpha_p = -\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2(\rho-1)} = 1 - \frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2(\rho-1)}. \tag{14.28}$$

Уравнение (14.28) имеет единственное решение:

$$\gamma = \gamma_p = \frac{\sigma_1^2\sigma_2(\rho-1) + \mu_1\sigma_2}{\mu_1(\sigma_1 - \sigma_2)}. \tag{14.29}$$

Из (14.29) следует, что $\gamma_p > 0$ и, значит, применяя (14.28), можно заключить, что $\alpha_p < 0$ и уравнение

$$\alpha G^{\frac{1}{p-1}} y^{\alpha_p} = (y-1)^+, \quad y \geq 1 \tag{14.30}$$

имеет единственное решение $C = C(p) \geq 1$. Используя (14.27) – (14.30), выразим $(S_T^1 - S_T^2)_p^+$ в следующем виде

$$\begin{aligned} (S_T^1 - S_T^2)_p^+ &= S_T^2(Y_T - 1)^+ - \left(a_p G^{\frac{1}{p-1}} Y_T^{\alpha_p} S_T^2\right) \\ &\quad \wedge S_T^2(Y_T - 1)^+ \\ &= S_T^2\left((Y_T - 1)^+ - \left(a_p G^{\frac{1}{p-1}} Y_T^{\alpha_p}\right) \wedge (Y_T - 1)^+\right) \\ &= S_T^2\left((Y_T - 1)^+ - (Y_T - 1)^+ I_{\{Y_T \leq C(p)\}} - a_p G^{\frac{1}{p-1}} Y_T^{\alpha_p} I_{\{Y_T > C(p)\}}\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что ${}_{\{Y_T>C(p)\}} = 1 - I_{\{Y_T\le C(p)\}}$, получим равенство:

$$\begin{aligned} E^*(S_T^1 - S_T^2)_p^+ &= E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ - E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T\le C(p)\}} \\ &-\alpha_p G^{\frac{1}{p-1}}\left(E^* S_T^2 Y_T^{\alpha_p} - E^* S_T^2 Y_T^{\alpha_p} I_{\{Y_T\le C(p)\}}\right). \end{aligned} \tag{14.31}$$

Заметим, что при $C(p) \ge 1$, имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ - E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T\le C(p)\}} &= E^*(S_T^1 - S_T^2) I_{\{Y_T> C(p)\}} \\ &= E^*(S_T^1 - S_T^2) - E^*(S_T^1 - S_T^2) I_{\{Y_T\le C(p)\}}. \end{aligned} \tag{14.32}$$

Используя (14.32), рассчитаем разность между первым и вторым членами (14.31) и получим нижеследующее соотношение:

$$\begin{aligned} E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ &- E^*(S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T\le C(p)\}} \\ &= S_0\left\{\Phi\left(b_+(1,\, C,\, T)\right) - \Phi\left(b_-(1,\, C,\, T)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{14.33}$$

Для расчёта двух других членов (14.31), представим произведение $S_T^2 Y_T^{\alpha_p}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_T^2 Y_T^{\alpha_p} &= S_0 \times \exp\left\{\left(\sigma_1\alpha_p + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right) W_T^* \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2\alpha_p + \sigma_2^2\left(1-\alpha_p\right)\right) T\right\} \\ &= S_0 \times \exp\left\{\left(\sigma_1\alpha_p + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right) W_T^* \right. \\ &\qquad - \frac{1}{2}\left(\sigma_1\alpha_p + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right)^2 T + \frac{1}{2}\left(\sigma_1\alpha_p \right. \\ &\qquad \left. \left. + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right)^2 T - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2\alpha_p + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right)^2 T\right\} \\ &= S_0 \times \exp\left\{\left(\sigma_1\alpha_p + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right) W_T^* \right. \\ &\qquad - \frac{1}{2}\left(\sigma_1\alpha_p + \sigma_2\left(1-\alpha_p\right)\right)^2 T - \alpha_p\left(1 \right. \\ &\qquad \left. \left. - \alpha_p\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \frac{T}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{14.34}$$

Взяв математическое ожидание в соотношении (14.34) относительно P^*, находим, что

$$E^* S_T^2 Y_T^{\alpha_p} = S_0 \exp\left\{-\alpha_p\left(1-\alpha_p\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \frac{T}{2}\right\}. \tag{14.35}$$

Используя (14.34) – (14.35), получим соотношение:

$$\begin{aligned} -\alpha_p G^{\frac{1}{p-1}}&\left(E^* S_T^2 Y_T^{\alpha_p} - E^* S_T^2 Y_T^{\alpha_p} I_{\{Y_T\le C(p)\}}\right) \\ &= -\alpha_p G^{\frac{1}{p-1}} S_0 \exp\left\{-\alpha_p\left(1-\alpha_p\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \frac{T}{2}\right\} \\ &\times \Phi\left(b_-(1,\, C,\, T) + \alpha_p(\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{T}\right). \end{aligned} \tag{14.36}$$

Объединяя (14.17), (14.18), (14.33), и (14.36), приходим к (14.21).

Теперь докажем равенства (14.22) и (14.24). Рассматривая структуру $(S_T^1 - S_T^2)_p^+$ в (14.4), выразим произведение $Z_T(S_T^2)^{1-p}$ с помощью свободного параметра γ (см. (14.19), (14.20), (14.27) – (14.30)) и получим соотношение:

$$Z_T(S_T^2)^{1-p} = G(S_T^1)^{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2}}(S_T^2)^{\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}}(S_T^2)^{1-p} = GY_T^{\alpha_p}, \qquad (14.37)$$

где
$$\alpha_p = -\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2} = -\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2} - (1-p)$$

и следовательно,

$$\gamma = \gamma_p = \frac{\sigma_2(\mu_1 - (1-p)\sigma_1^2)}{\mu_1(\sigma_1 - \sigma_2)},$$

$$-\alpha_p = \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}\left(1 + \frac{\sigma_2(\mu_1 - (1-p)\sigma_1^2)}{\mu_1(\sigma_1 - \sigma_2)}\right) \qquad (14.38)$$
$$= \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - (1-p)\right).$$

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$y^{-\alpha_p} a_p G((y-1)^+)^{1-p}, \quad y \geq 0. \qquad (14.39)$$

Если $-\alpha_p > 1-p$, то, в соответствии с (14.38), выполнено соотношение

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - (1-p)\right) > 1-p \text{ или } \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} > 1-p > 0. \qquad (14.40)$$

В этом случае уравнение (14.39) имеет одно, два или вовсе не имеет решений. Все эти случаи могут быть рассмотрены аналогично Случаю 1.

• Если (14.39) не имеет решений, то $I_{\{Z_T^{-1} > \alpha_p H^{1-p}\}} \equiv 1$ и, следовательно, ${}_Tp_x = 1$.

• Если уравнение (14.39) имеет только одно решение $C = C(p)$, то $(S_T^1 - S_T^2)_p^+ = (S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T \leq C(p)\}}$ и, вследствие (14.17), приходим к (14.21).

• Если существует два решения $C_1(p) < C_2(p)$ уравнения (14.39), то структура модифицированного обязательства описывается равенством $(S_T^1 - S_T^2)_p^+ = (S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T \leq C_1(p)\}} + (S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T > C_2(p)\}}$, что приводит к соотношению (14.24).

Если $-\alpha_p \leq 1-p$, то $\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} \leq 1-p < 1$ и, следовательно, уравнение (14.39) имеет только одно решение $C = C(p)$. Это эквивалентно предыдущему случаю с единственным решением и, повторяя предыдущие шаги, приходим к (14.22).

Наконец, докажем (14.25). В соответствии с (14.20), представим плотность Z_T в следующем виде:

$$Z_T = G(S_T^1)^{\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2}}(S_T^2)^{\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}} = GY_T^{\alpha_p}, \qquad (14.41)$$

где
$$\alpha_p = -\frac{(1+\gamma)\mu_1}{\sigma_1^2} = -\frac{\gamma\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}$$

и, следовательно,
$$\gamma = \gamma_p = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)},$$
$$-\alpha_p = \frac{\mu_1}{\sigma_1\sigma_2}\gamma_p = \frac{\mu_1}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)},\ \ \sigma_1 > \sigma_2.$$

С помощью (14.20) и (14.41) находим, что
$$(S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\left\{Y_T^{-\alpha_p} > G\alpha_p\right\}} = (S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\left\{Y_T^{\frac{\mu_1}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}} > G\alpha_p\right\}} \\ = (S_T^1 - S_T^2)^+ I_{\{Y_T > C\}}, \tag{14.42}$$

где $\quad C = \left(G\alpha_p\right)^{\frac{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}{\mu_1}}$.

Используя (14.17), (14.18), (14.32), (14.33) и (14.42), приходим к (14.25).

Замечание 14.2. Можно распространить подход эффективного хеджирования и результаты Теоремы 14.1 на случай модели (10.14).

14.3 Количественная иллюстрация метода эффективного хеджирования для риск-менеджмента

Продемонстрируем применение метода эффективного хеджирования в риск-менеджменте, используя (14.26) и Замечание 14.1. Функция потерь с параметром $p > 1$ соответствует компании, избегающей риск. При этом, чем больше p, тем меньше компания расположена к принятию риска. Случай $0 < p < 1$ подходит для организаций, которые готовы принять на себя некоторый риск. Покажем, как страховая компания, принимающая риск, может использовать эффективное хеджирование для управления своими финансовыми и страховыми рисками. В целях демонстрации рассмотрим экстремальный случай, когда $p \to 0$. Хотя влияние степени p близкой к нулю на процесс эффективного хеджирования уже указывалось ранее, приведём другую интерпретацию и применение, которые больше подходят здесь для реализации наших целей. При этом ограничимся рассмотрением частного случая, в котором уравнение (14.22) имеет только одно решение. Это сделано для большей наглядности, поскольку константы $C,\ C_1$ и C_1 в остальных случаях могут требовать слишком сложных вычислений.

Как было отмечено ранее, характеристическое уравнение (14.22) с $p \le 1 + \alpha_p$, эквивалентно, $p \le 1 - \frac{\mu_1}{\sigma_1^2}$, имеет только одно решение C, которое в дальнейшем будет использоваться для определения модифицированного платёжного обязательства (14.4) в следующем виде:
$$H_p = H \cdot I_{\{Y_T \le C\}},$$

где $H = (S_T^1 - S_T^2)^+$, $Y_T = \frac{S_T^1}{S_T^2}$, и $0 < p < 1$.

Обозначим эффективный хедж для H через π^*, а его начальный капитал через $x = X_0$. Из Леммы 14.1 следует, что π^* – совершенный хедж для $H_p = (S_T^1 - S_T^2)_p^+$.

Поскольку неравенство $((a-b)^+)^p \leq a^p$ выполняется для любых положительных a и b, имеем, что

$$\begin{aligned} &E\left(\left(\left(H - X_T^{\pi^*}(x)\right)^+\right)^p\right. \\ &\quad = E\left[\left(H_p - X_T^{\pi^*}(x)\right)^+ \cdot I_{\{Y_T \leq C\}} + \left(H - X_T^{\pi^*}(x)\right)^+ \right. \\ &\quad \left. \cdot I_{\{Y_T > C\}}\right]^p = E\left[\left(H - X_T^{\pi^*}(x)\right)^+ \cdot I_{\{Y_T > C\}}\right]^p \\ &\quad = E\left[\left(H - X_T^{\pi^*}(x)\right)^+\right]^p \cdot I_{\{Y_T > C\}} \leq EH^p \cdot I_{\{Y_T > C\}}. \end{aligned} \tag{14.43}$$

Вычисляя предел в (14.43) при $p \to 0$ и применяя классическую теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим соотношение:

$$EH^p \cdot I_{\{Y_T > C\}} \underset{p \to 0}{\longrightarrow} EI_{\{Y_T > C\}} = P\{Y_T > C\}. \tag{14.44}$$

Следовательно, можно зафиксировать вероятность $P\ Y\ > C\ = \epsilon$, измеряющую финансовый риск и равную вероятности неудачного хеджирования H на момент исполнения контракта.

Пример 14.1. Используя предыдущие аргументы, рассмотрим случай, когда $p \to 0$ и уравнение (14.23) имеет только одно решение. Определим параметры рисковых активов:

$$\mu_1 = 5\%, \quad \sigma_1 = 23\%,$$

$$\mu_2 = 4\%, \quad \sigma_2 = 19\%.$$

Условие (14.11) практически выполнено, что исключает арбитражные возможности в рассматриваемом случае. Поскольку $1 - \frac{\mu_1}{\sigma_1} \cong 0.05$ то $p \leq 0.05$, что даёт возможность считать p достаточно малым. Тогда можно использовать (14.44) и применять (14.22) согласно Теореме 14.1. Для вероятностей дожития используем иллюстративные Таблицы смертности из (Бауэрс и др.). Далее предположим, что гибкий страховой контракт имеет начальную стоимость $S_0 = 100$. Рассмотрим различные даты его исполнения: $T = 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25$ лет. Размер однородной группы застрахованных составляет $l_x = 100$.

Как видно из Рисунка 14.1, финансовый и страховой риски компенсируют друг друга. Поскольку совершенное хеджирование невозможно, страховщик будет подвержен финансовому риску, выраженному в виде вероятности того, что компания не сможет захеджировать обязательство (14.14) с вероятностью 1. В то же время страховая компания сталкивается с риском смертности, или вероятностью того, что застрахованный клиент будет жив на момент исполнения контракта, и фирма должна будет осуществить платёж (14.14) в момент исполнения.

Объединяя оба риска вместе, можно заключить, что при высоком финансовом риске, страховая компания может предпочесть меньший риск смертности своих клиентов. С другой стороны, если обязательство (14.14) может быть захеджировано с большей вероятностью, страховая компания имеет возможность использовать более широкие границы допустимости риска смертности. Следовательно, существует взаимосвязь между финансовым и страховым рисками, которой страховая компания может манипулировать: фиксируя один из рисков, можно рассчитать подходящий уровень другого риска. На Рисунке 14.1 получены вероятности дожития при использовании (14.22) для разных уровней финансового риска ϵ, а также определены соответствующие возрасты клиентов на основании таблиц смертности. Несмотря на возрастание риска неудачного хеджирования для страховой компании, рекомендуемый данной методологией возраст клиентов также растёт. В результате компания снижает страховую компоненту риска, привлекая более пожилых и, следовательно, более «надёжных» с её точки зрения клиентов для того, чтобы компенсировать растущий финансовый риск. Также отметим, что при более длительном сроке контракта, компания может расширить сферу его действия на более молодых клиентов, поскольку риск смертности, выраженный вероятностью дожития в данном случае, убывает со временем.

На Рисунке 14.2 показано, как устроены цены гибких страховых контрактов при различных комбинациях финансового риска ϵ и страхового риска δ (см. (13.29) – (13.31)).

Следующим шагом является построение таблицы соответствия, позволяющей страховой компании определить подходящий уровень финансового риска для клиентов любого возраста. Ограничимся рассмотрением групп клиентов в возрасте 30, 40, 50, и 60 лет. Полученные результаты представлены в Таблице 14.1. Вычисленный финансовый риск отражает вероятность неудачного хеджирования выплаты, которая будет компенсирована риском смертности клиентов определённого возраста. Цены контрактов для тех же групп клиентов приведены в Таблице 14.2. Заметим, что цена контракта является функцией финансового и страхового рисков, ассоциированных с этим контрактом. Уровень страхового риска выбран $\delta = 2.5\%$. В последней строке таблицы цены Маргрейба сравниваются со стоимостями гибких страховых контрактов.

Снижение цен оказывается возможным по двум причинам:

• Риска смертности отдельного клиента (вероятности того, что клиент не доживёт до момента исполнения контракта и, следовательно, не потребуется осуществление платежа);

• Возможности диверсифицировать общий риск смертности, объединяя однородных клиентов вместе.

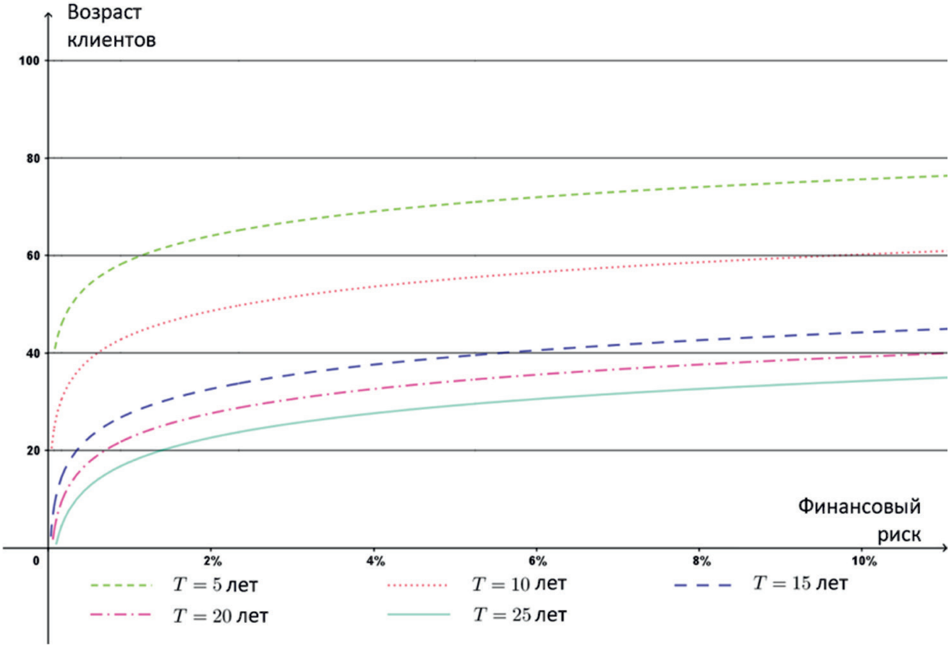


Рисунок 14.1 – Компенсирование финансового и страхового рисков

Таблица 14.1 – Подходящий финансовый риск, компенсирующий риск смертности для отдельного клиента

Возраст клиентов	$T = 5$	$T = 10$	$T = 15$	$T = 20$	$T = 25$
30	0.05%	0.13%	0.25%	0.45%	0.8%
40	0.1%	0.25%	0.55%	1.2%	2.3%
50	0.2%	0.7%	1.8%	3.7%	7%
60	0.8%	2.5%	5.5%	10.5%	18.5%

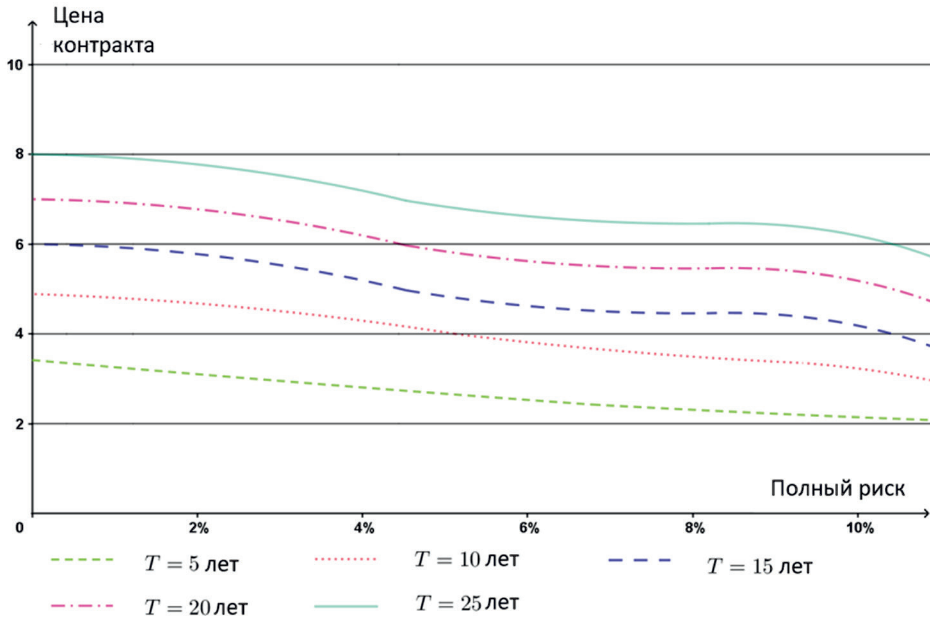


Рисунок 14.2 – Цены $100, проинвестированных в гибкие страховые контракты

Таблица 14.2 – Цены контрактов с общим риском смертности δ = 2,5%

Возраст клиентов	$T = 5$	$T = 10$	$T = 15$	$T = 20$	$T = 25$
30	3.45	4.86	5.87	6.66	7.22
40	3.45	4.79	5.69	6.25	6.45
50	3.39	4.56	5.11	5.10	4.53
60	3.17	3.84	3.76	2.99	1.70
Цена Маргрэйба	3.57	5.04	6.17	7.13	7.97

Глава 15
РАСЧЁТ ФИНАНСОВО-СТРАХОВЫХ КОНТРАКТОВ В МОДЕЛЯХ С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИМИСЯ РЕЖИМАМИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В главе 15 изучается модель Башелье, а затем модифицированная её версия, когда волатильность изменяется между двумя режимами с помощью Пуассоновского процесса. В рамках модифицированной модели Башелье (а затем и модели Блэка-Шоулса) даются приближенные вычисления границ цен опциона покупателя с дальнейшими расчётами страховых контрактов (см. [5]).

15.1 Модель и формула Башелье

Начнём рассмотрение с уже известной читателю *модели Башелье* для $(B,\ S)$-рынка:

$$\begin{aligned} &B_t \equiv 1, \\ &S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \le T, \end{aligned} \tag{15.1}$$

где $W = (W_t)$ стандартный Винеровский процесс на заданном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)$.

В рамках модели (15.1) существует единственная мартингальная мера P^*, определяемая плотностью

$$Z_T^* = \exp\left\{-\frac{\mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 T\right\}. \tag{15.2}$$

Для расчёта единственной цены опциона покупателя $(S_T - K)^+$ следует вычислить математическое ожидание:

$$\mathbb{C}_T^B = E^*(S_T - K)^+.$$

Для этого заметим, что, согласно теореме Гирсанова, распределение S_t относительно P^* – такое же как распределение $S_0 + \sigma W_t$ относительно P. Тогда, обозначив $a = S_0 - K,\ b = \sigma\sqrt{T}$, получим *формулу Башелье*:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_T^B &= E^*(S_0 + \mu T + \sigma W_T - K)^+ = E(S_0 - K + \sigma W_T)^+ \\
&= E\big(S_0 - K + \sigma\sqrt{T} W_1\big)^+ = \int_{-a/b}^{\infty} (a + bx) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) + b \int_{-a/b}^{\infty} x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) - b \int_{-\frac{a}{b}}^{\infty} d\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) = a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) + b\varphi\left(\frac{a}{b}\right) \\
&= (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right),
\end{aligned} \tag{15.3}$$

где $(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ и $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$ – плотность стандартного нормального распределения и кумулятивная функция распределения соответственно.

Капитал минимальной хеджирующей стратегии $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ может быть рассчитан аналогичным (15.3) способом вследствие независимости приращений W:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_T^B(t, S) = X_t^{\pi^*} &= E^*((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= E^*([(S_t - K) + (S_T - S_t)]^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= a\Phi\left(\frac{a}{b}\right) + b\varphi\left(\frac{a}{b}\right),
\end{aligned} \tag{15.4}$$

где $a = S_t - K$ и $b = \sigma\sqrt{T - t}$.

Применяя формулу Ито к $\mathbb{C}_T^B(t, S_t)$ в (15.4), приходим к следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$d\mathbb{C}_T^B(t, S_t) = \frac{\partial \mathbb{C}_T^B}{\partial S} dS_t + \left(\frac{\partial \mathbb{C}_T^B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}_T^B}{\partial S^2}\right) dt. \tag{15.5}$$

Используя мартингальную характеризацию самофинансируемых стратегий, из (15.5) получим, что

$$\frac{\partial \mathbb{C}_T^B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}_T^B}{\partial S^2} = 0, \tag{15.6}$$

$$\gamma_t^* = \frac{\partial \mathbb{C}_T^B}{\partial S}(t, S_t) = \Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\right). \tag{15.7}$$

Вторая компонента β^* данной стратегии выводится из уравнения баланса

$$\mathbb{C}_T^B(t, S_t) = \beta_t^* + \gamma_t^* S_t,$$

и следовательно,

$$\beta^* = \mathbb{C}_T^B(t,\, S_t) - \gamma_t^* S_t = -K\Phi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varphi\left(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{15.8}$$

15.2 Модель Башелье со стохастической волатильностью и границы цен опционов

Чтобы получить обобщённую формулу Башелье, можно ввести помимо Винеровского процесса (W_t)другой процесс (N_t), называемый процессом Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$. Это случайный процесс с независимыми приращениями такой, что $N_0 = 0$ (п. н.) и для любых $s < t$ случайная величина $N_t - N_s$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda(t - s)$.

Зададим модель Башелье со стохастической волатильностью на стандартном стохастическом базисе $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\, P)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} dB_t &\equiv 0 \\ dS_t &\equiv r dt + \sigma_t dW_t, \end{aligned} \tag{15.9}$$

где $B_0 = 1,\ \sigma_t^2 = \sigma^2 + (-1)^{\Pi_t}\Delta\sigma^2$.

Заметим, что результаты для расчёта опциона call, приведённые ниже, не зависят от λ, поэтому положим $\lambda = 1$.

Используя мартингальную характеризацию стратегий с потреблением (см. Главу 9), можно выбрать капитал минимального хеджа в форме

$$V_t = v(t,\, S_t), \tag{15.10}$$

где гладкая функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению Бэллмана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|\Delta\sigma^2 = 0. \tag{15.11}$$

Замечание 15.1. Очевидно, что (15.9 - 15.11)представляют собой обобщение модели Башелье (15.1) и уравнения (15.5), если взять $\Delta\sigma^2 = 0$.

Далее будем предполагать, что колебания волатильности малы по сравнению с её абсолютным значением:

$$\Delta\sigma^2 \ll \sigma^2. \tag{15.12}$$

Вследствие условия (15.12), можно использовать метод малых возмущений для нахождения подходящего решения (15.11). Применяя данный метод, представим $v(t,\, x)$ в виде ряда:

$$v(t,\, x) = v_0(t,\, x) + v_1(t,\, x)\Delta\sigma^2 + v_2(t,\, x)(\Delta\sigma^2)^2 + \cdots. \tag{15.13}$$

Найдём приближение первого порядка (относительно $\Delta\sigma^2$) в (15.11). Подставляя (15.13) в (15.11) получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial(v_0 + v_1\Delta\sigma^2 + \cdots)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(v_0 + v_1\Delta\sigma^2 + \cdots)}{\partial x^2} + \\ + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2(v_0 + v_1\Delta\sigma^2 + \cdots)}{\partial x^2}\right|\Delta\sigma^2 \\ = 0, \tag{15.14}$$

$$v_0(T,\, x) + v_1(T,\, x)\Delta\sigma^2 + \cdots = g(x) = (x - K)^+.$$

Следовательно, из (15.14) получаем, что

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, \quad v_0(T,\, x) = g(x), \tag{15.15}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right| = 0, \quad v_1(T,\, x) = 0\,. \tag{15.16}$$

Решая (15.15) – (15.16), приходим к первому приближению «верхней» цены опциона покупателя:

$$\mathbb{C}_T^{B^*}(S_0,\, \Delta\sigma^2) \cong v_0(S_0,\, 0) + v_1(S_0,\, 0)\Delta\sigma^2. \tag{15.17}$$

Таким образом, необходимо установить коэффициенты в (15.17). Для этого можно воспользоваться известной формулой решения параболического уравнения:

$$v_0(t,\, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T - t)}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\xi. \tag{15.18}$$

Чтобы определить v_1, обозначим

$$f(t,\, x) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v_0(t,\, x)}{\partial x^2}\right|$$

и, используя замену времени $s = T - t$ в (15.16), для $v_1^*(s,\, x) = v_1(T - t,\, x)$ получим, что

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial s} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right|, \\ v_1^*(0,\, x) = 0. \tag{15.19}$$

Как и в (15.18), получаем аналогичное выражение:

$$v_1^*(s,\ x) = \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(T-\tau,\ \xi)}{\sigma\sqrt{2\pi(s-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(s-\tau)}} d\xi\, d\tau. \qquad (15.20)$$

Осуществляя обратную замену времени в (15.20), приходим к следующему выражению для $v_1(t,x)$:

$$v_1(t,\ x) = \int_0^{T-t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(T-\tau,\ \xi)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi\, d\tau. \qquad (15.21)$$

Далее, чтобы уточнить приближение $f(t,\ x)$, рассчитаем $\frac{\partial v_0(t,\ x)}{\partial t}$ с помощью (15.18) и (15.15):

$$\begin{aligned} f(t,\ x) &= \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 v_0(t,x)}{\partial x^2}\right| = \frac{1}{\sigma^2}\left|\frac{\partial v_0(t,\ x)}{\partial t}\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\sigma^5(T-t)^2\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}} [\sigma^2(T-t) \right. \\ &\quad \left. - (x-\xi)^2] d\xi \right|. \end{aligned} \qquad (15.22)$$

Используя (15.21) – (15.22), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} v_1(t,\ x) &= \int_0^{T-t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(T-\tau,\ \xi)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi\, d\tau \\ &= \int_0^{T-t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^{-2}\left|\frac{\partial v_0(T-t,\ \xi)}{\partial t}\right|}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi\, d\tau = \\ &= \int_0^{T-t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{-\frac{(\eta-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} [\sigma^2\tau - (\eta-\xi)^2] d\eta\right|}{4\pi\sigma^6\tau^2\sqrt{\tau(T-t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi\, d\tau. \end{aligned} \qquad (15.23)$$

Подставляя в (15.18) конкретное выражение для $g(x) = (x-K)^+$, имеем, что

$$\begin{aligned} v_0(t,\ x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi-K)^+ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)}} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_K^{\infty} (\xi-K) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\xi. \end{aligned} \qquad (15.24)$$

С помощью замены переменных $y = \frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d\xi = \sigma\sqrt{T-t}\,dy$ из (15.24) получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
v_0(t,\,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}} \left(\sigma\sqrt{T-t}y + x - K\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{x-K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= (x-K)\Phi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned} \tag{15.25}$$

Из (15.25) находим, что

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_0(t,\,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left((x-K)\Phi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right) \\
&= (x-K)\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{x-K}{2\sigma(T-t)\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\qquad + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\left(-\frac{(x-K)^2}{2\sigma^2(T-t)^2}\right) = \\
&= -\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned} \tag{15.26}$$

Используя (15.23), приходим к равенству:

$$\begin{aligned}
v_1(0,\,x) &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^{-2}\left|\frac{\partial v_0(T-\tau,\,\xi)}{\partial t}\right|}{\sigma\sqrt{2\pi(T-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)}} d\xi\, d\tau \\
&= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{\xi-K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi\tau(T-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)}} d\xi\, d\tau \\
&= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)} - \frac{(\xi-K)^2}{2\sigma^2\tau}} d\xi\, d\tau \\
&= \int_0^T \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau(T-\tau)}\left[\left(x^2+\xi^2-2x\xi\right)\tau + \left(\xi^2-2K\xi+K^2\right)(T-\tau)\right]} d\xi\, d\tau \\
&= \int_0^T \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\xi - \frac{x\tau+K(T-\tau)}{T}\right)^2}{2\sigma^2\frac{\tau(T-\tau)}{T}} + \frac{\left(x\tau+K(T-\tau)\right)^2 - T\left(x^2\tau+K^2(T-\tau)\right)}{2\sigma^2\tau T(T-\tau)}} d\xi\, d\tau.
\end{aligned}$$

Вследствие того что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(\xi-b)^2}{2a^2}} d\xi = a\sqrt{2\pi}$, имеем, что

$$\begin{aligned} v_1(0,\, x) &= \int_0^T \frac{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\frac{\tau(T-\tau)}{T}}}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}} e^{\frac{\left(x\tau+K(T-\tau)\right)^2-T\left(x^2\tau+K^2(T-\tau)\right)}{2\sigma^2\tau T(T-\tau)}} d\tau \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{\left(x\tau+K(T-\tau)\right)^2-T\left(x^2\tau+K^2(T-\tau)\right)}{2\sigma^2\tau T(T-\tau)}} d\tau \\ &= \int_0^T \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x-K)^2}{2\sigma^2 T}} d\tau = \frac{\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-K)^2}{2\sigma^2 T}} \\ &= \frac{\sqrt{T}}{2\sigma}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \tag{15.27}$$

Подставляя (15.26) и (15.27) в (15.17), получаем подробную формулу для $\mathbb{C}_T^{B^*}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_T^{B^*}(S_0,\, \Delta\sigma^2) \approx (S_0-K)\Phi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ + \frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \tag{15.28}$$

Можно также применить аналогичную аргументацию для получения следующих формул приближения для капитала минимального хеджа и его компонент:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_T^{B^*}(t,\, S_t) \cong (S_t-K)\Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ + \frac{\sqrt{T-t}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned} \tag{15.29}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t^{B^*} &= \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{C}_T^{B^*}(t,\, S_t) \\ &= \Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\qquad - \frac{(S_t-K)\Delta\sigma^2}{2\sigma^3\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - \frac{(S_t-K)\Delta\sigma^2}{2\sigma^3\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned} \tag{15.30}$$

Также можно привести аналог формулы (15.28) тем же способом для «нижней» цены этого опциона:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{T^*}^{B}(0,\, S_0) \approx (S_0-K)\Phi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ - \frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \tag{15.31}$$

15.3 Применение к расчёту гибких страховых схем

Применим формулы (15.28) – (15.31) для нахождения приближений «верхней» и «нижней» цен контрактов чистого дожития с выплатой $\max(S_T,\ K)$ и найдём, что

$$\begin{aligned} {}_T U_x^{B^*} &= {}_T p_x \cdot \left[\mathbb{C}_T^{B^*}(0,\ S_0) + K\right] \\ &= {}_T p_x \left[K + (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right. \\ &\left. + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right], \end{aligned} \tag{15.32}$$

$$\begin{aligned} \left({}_T U_x^{B}\right)_* &= {}_T p_x \cdot \left[\mathbb{C}_{T^*}^{B}(0,\ S_0) + K\right] \\ &= {}_T p_x \left[K + (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right. \\ &\left. + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{15.33}$$

Вполне естественно привести пример расчётов цен, заданных формулами (15.32) – (15.33), и сравнить результаты со справедливой стоимостью (15.3) в модели Башелье.

Пример 15.1. Рассмотрим контракт чистого дожития с гарантией $f = \max\{S_T,\ K\}$ в рамках модели (15.9). Предположим, что выполнены те же условия и выбраны те же параметры, что и в Примере 11.1.

Введём следующий коэффициент возмущений $\delta = \frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}$, который может рассматриваться в качестве численной меры рыночной неполноты, то есть при $\delta \to 0$ рынок «стремится» к полному рынку (модель Башелье (15.1)).

Рассмотрим два случая: $S_0 = K$ и $S_0 = 1$.

В первой ситуации $S_0 = K$ формулы (15.32) и (15.33) сводятся к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \left({}_T U_x^{B}\right)^* &= {}_T p_x \left[K + \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\right] \\ &= {}_T p_x \left[K + \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\delta\right], \end{aligned} \tag{15.34}$$

$$\begin{aligned} \left({}_T U_x^{B}\right)_* &= {}_T p_x \left[K + \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\right] \\ &= {}_T p_x \left[K + \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\delta\right]. \end{aligned} \tag{15.35}$$

Можно напрямую рассчитать цену такого контракта в модели (15.1):

$$\left({}_TU_x^B\right) = {}_Tp_x\left(K + \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right). \tag{15.36}$$

Сравнивая (15.36) с (15.34) – (15.35), найдём, что (15.36) соответствует «пределу» (15.34) – (15.35) с $\delta = 0$. Результаты расчётов цен для регулярной $\sigma = 0.25$, низкой ($\sigma = 0.15$) и ($\sigma = 0.35$) волатильностей приведены в таблицах ниже.

Таблица 15.1 – Цены в модели с регулярной волатильностью 0.25

δ	K	$\left({}_TU_x^B\right)^*$	$\left({}_TU_x^B\right)_*$	${}_TU_x(\delta = 0)$
0.1	1	1.2873	1.1514	1.2194
0.1	2	2.1669	2.0310	2.0990
0.2	1	1.3553	1.0835	1.2194
0.2	2	2.234	1.9631	2.0990

Таблица 15.2 – Цены в модели с низкой волатильностью 0.15

δ	K	$\left({}_TU_x^B\right)^*$	$\left({}_TU_x^B\right)_*$	${}_TU_x(\delta = 0)$
0.1	1	1.1514	1.0155	1.0835
0.1	2	2.0310	1.8951	1.9631
0.2	1	1.2194	0.9476	1.0835
0.2	2	2.0990	1.8272	1.9631

Таблица 15.3 – Цены в модели с высокой волатильностью 0.35

δ	K	$\left({}_TU_x^B\right)^*$	$\left({}_TU_x^B\right)_*$	${}_TU_x(\delta = 0)$
0.1	1	1.4232	1.2873	1.3553
0.1	2	2.3028	1.1669	2.2349
0.2	1	1.4912	1.2194	13553
0.2	2	2.3708	2.0990	2.239

Численные значения во всех таблицах 15.1, 15.2, 15.3 демонстрируют нечто подобное флуктуациям с коэффициентом δ вокруг стоимости, указанной в правом столбце каждой из таблиц.

Во втором случае $S_0 = 1$ рассмотрим K равной 0 или 2 (заметим, что $K = 1$ соответствует сценарию $S_0 = K = 1$рассмотренному ранее). Результаты вычисления стоимостей приведены ниже.

Таблица 15.4 – Цены в модели с регулярной волатильностью 0.25

δ	K	$\left({}_TU_x^B\right)^*$	$\left({}_TU_x^B\right)_*$	${}_TU_x(\delta = 0)$
0.1	0	0.9562	0.9363	0.9462
0.1	2	1.8358	1.8159	1.8258
0.2	0	0.9662	0.9263	0.9462
0.2	2	1.8458	1.8059	1.8258

Таблица 15.5 – Цены в модели с низкой волатильностью 0.15

δ	K	$\left({}_TU_x^B\right)^*$	$\left({}_TU_x^B\right)_*$	${}_TU_x(\delta = 0)$
0.1	0	0.8908	0.8862	0.8885
0.1	2	1.7704	1.7658	1.7681
0.2	0	0.8931	0.8838	0.8885
0.2	2	1.7727	1.7634	1.7681

Таблица 15.6 – Цены в модели с высокой волатильностью 0.35

δ	K	$\left({}_TU_x^B\right)^*$	$\left({}_TU_x^B\right)_*$	${}_TU_x(\delta = 0)$
0.1	0	1.0575	1.0212	1.0393
0.1	2	1.9371	1.9008	1.9189
0.2	0	1.0756	1.0031	1.0393
0.2	2	1.9552	1.8827	1.9189

Заметим, что в случае высокой волатильности обобщенная модель Башелье отражает реальный рынок намного точнее, чем классическая модель Башелье.

15.4 Модель Блэка-Шоулса со стохастической волатильностью и границы цен опционов

Завершая данную главу, рассмотрим следующее обобщение модели Блэка-Шоулса:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t), \quad S_0 > 0, \tag{15.37}$$

где волатильность является случайным процессом, удовлетворяющим условиям

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + (-1)^{\Pi_t}\Delta\sigma^2, \quad \Delta\sigma^2 \ll \sigma^2 \ , \tag{15.38}$$

и $(\Pi_t)_{t\geq 0}$ – процесс Пуассона с единичной интенсивностью.

Опишем интервал безарбитражных цен для Европейского опциона call $(S_T - K)^+$ в модели (15.37).

Как и в (15.9) – (15.11), введём капитал минимального хеджа $V_t = v(t,\ S_t)$, где функция $v(t,\ x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению Бэллмана:

$$\begin{gathered} v_t' + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}'' + \frac{1}{2}\Delta\sigma^2 |v_{xx}''| = 0, \\ v(T,\ x) = (x-K)^+,\ \ x \in R_+. \end{gathered} \tag{15.38'}$$

Если $\Delta\sigma^2 = 0$, то уравнение (15.38) превращается в дифференциальное уравнение Блэка-Шоулса. Можно построить решение (15.38) на основании решения уравнения Блэка-Шоулса с некоторыми поправками на значение $\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}$ как «малого» параметра. Действительно, заменяя переменные в (15.38)

$$\xi = \ln x - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \ \text{ и } \ \theta = \sigma^2(T-t),$$

получим следующие частные производные для $v(t,\ x) = V(\theta,\ \xi)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sigma^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \theta}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} - \frac{\partial V}{\partial \xi}\right).$$

Следовательно, приходим к следующему уравнению для $V(\theta,\ \xi)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} - \frac{\partial V}{\partial \xi}\right|, \\ V(0,\ \xi) = \left(e^{\xi} - K\right)^+. \end{gathered} \tag{15.39}$$

Поиск аналитического решения уравнения (15.39) является весьма сложной задачей. Будем искать, как и ранее, достаточное приближение решения:

$$V(\theta,\ \xi) \approx V_0(\theta,\ \xi) + \Delta\sigma^2 V_1(\theta,\ \xi) + o(\Delta\sigma^2). \tag{15.40}$$

Подставляя (15.40) в (15.39), получим, что

$$\frac{\partial V_0}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2}, \quad V_0(0,\, \xi) = \left(e^{-\xi} - K\right)^+, \tag{15.41}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\left|\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial V_0}{\partial \xi}\right|, \quad V_1(0,\, \xi) = 0. \tag{15.42}$$

Соотношение (15.41) является уравнением Блэка-Шоулса, а его решение имеет вид:

$$V_0(\theta,\, \xi) = e^{\xi + \frac{\theta}{2}}\Phi\left(\frac{\xi + \theta - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right) - K\Phi\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right). \tag{15.43}$$

С помощью (15.43) получим следующие частные производные:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \xi} = e^{\xi + \frac{\theta}{2}}\left[\Phi\left(\frac{\xi + \theta - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\theta}}\varphi\left(\frac{\xi + \theta - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right)\right] - \frac{K}{\sqrt{\theta}}\varphi\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} = e^{\xi + \frac{\theta}{2}}\left[\Phi\left(\frac{\xi + \theta - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right) + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\theta}} - \frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right)\varphi\left(\frac{\xi + \theta - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{K}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right)\varphi\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right).$$

Тогда, воспользовавшись равенством

$$\varphi\left(\frac{\xi + \theta - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right) = Ke^{-\xi + \frac{\theta}{2}}\varphi\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right),$$

получим следующее выражение для нелинейного члена в (15.42):

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial V_0}{\partial \xi} = \frac{K}{\sqrt{\theta}}\varphi\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right) \geq 0.$$

Таким образом,

$$V_1(\theta,\, \xi) = \frac{K\sqrt{\theta}}{2\sigma^2}\varphi\left(\frac{\xi - \ln K}{\sqrt{\theta}}\right)$$

и, следовательно,

$$v(0,\, S_0) \approx S_0\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K\Phi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$+ \frac{K\Delta\sigma^2}{2\sigma^2}\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Данная формула определяет «верхнюю» границу безарбитражных цен опциона call.

Глава 16
МОДЕЛЬ БЛЭКА-ШОУЛСА: РАСЧЁТ АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ

В данной главе даётся изложение расчёта опционов Американского типа в рамках модели Блэка-Шоулса, в том числе с помощью введения дуальной мартингальной меры (см. [36] и [2]).

16.1 Общая схема и примеры расчёта опционов Американского типа

Как и в главе 9, рассмотрим *семимартингальный* $(B,\, S)$-рынок, заданный на некотором стохастическом базисе $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{F},\, \boldsymbol{P})$. Аналогично случаю с дискретным временем, рассмотренному в Главе 5, *динамическое* платёжное обязательство с последней датой исполнения $T<\infty$ определяется как произвольный неотрицательный опциональный *процесс* $f=(f_t)_{0\le t\le T}$.

Стратегия с потреблением $(\pi,\, C)$ называется *хеджирующей* для f (или *хеджем* для f) на промежутке $[0,\, T]$, если

$$X_t^{\pi,\, C} \geq f_t \quad (\mathbf{P}-\text{п.н.}) \tag{16.1}$$

для любого хеджа $(\pi,\, C)$ и любого $t \le T$.

Заметим, что неравенство (16.1) выполняется и для Марковских моментов $\tau \in \mathcal{M}_0^T$ наряду с детерминированными моментами времени t.

Минимальный хедж определим как хеджирующий портфель $(\pi^*,\, C^*)$ такой, что

$$X_t^{\pi^*,\, C^*} \le X_t^{\pi,\, C} \qquad (\mathrm{P}-\text{п.н.})$$

для любого хеджа $(\pi,\, C)$ и любого $t \le T$.

Начальный капитал минимального хеджа, при условии существования последнего, обозначим $\mathbb{C}_T^*(f)$ и будем называть его (верхней) *ценой* платёжного обязательства f.

Математическая задача осуществления указанных расчётов в данном случае заключается в нахождении цены $\mathbb{C}_T^*(f)$ и минимальной хеджирующей стратегии $(\pi^*,\, C^*)$.

Как и в Главе 5, введём понятие *Американского опциона* как производной ценной бумаги со сроком действия $[0,\, T]$, дающей её держателю право исполнить её в любой момент времени $\tau \le T$ и получить платёж в размере f_τ. Момент времени τ заранее не известен и определяется на основе текущей рыночной информации $\mathbb{F}$. Следовательно, τ – момент остановки относительно $\mathbb{F}$. Вследствие очевидной взаимосвязи между динамическими платёжными обязательствами и Американскими опционами, поставленная задача имеет эквивалентную формулировку нахождения цены $\mathbb{C}_T^*(f)$ и минимального хеджа (π^*, C^*) для Американского опциона с *функцией выплаты* $f = (f_t)_{t\le T}$.

Ключевая идея *общей методологии* решения этой задачи заключается в следующем.

Рассмотрим динамическое платёжное обязательство f на (B, S)-рынке такое, что

$$\sup_{\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\mathcal{M}\left(\frac{S}{B},\,\boldsymbol{P}\right)} \widetilde{\boldsymbol{E}} B_\tau^{-1} f_\tau < \infty. \tag{16.2}$$

При условии (16.2) неотрицательный процесс

$$Y_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{M}_t^T,\, \widetilde{\boldsymbol{P}}\in\mathcal{M}\left(\frac{S}{B}\right)} \widetilde{\boldsymbol{E}}(B_\tau^{-1} f_\tau | \mathcal{F}_t)$$

корректно определён и является неотрицательным супермартингалом.

Опциональное разложение (9.10) позволяет представить Y в форме

$$Y_t \equiv Y_0 + \int_0^t \gamma_u^* d\left(\frac{S}{B}\right)_u - D_t^* \tag{16.3}$$

с предсказуемым процессом γ_u^* и опциональным неубывающим процессом D^*.

В соответствии с Главой 9, супермартингал Y является дисконтированным капиталом некоторой стратегии с потреблением, чья структура определяется из соотношения (16.3). Обозначив (π^*, C^*) найденную стратегию с потреблением, можно также заметить, что она является минимальным хеджем, и

$$\mathbb{C}_T^*(f) = \sup_{\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\mathcal{M}\left(\frac{S}{B},\,\boldsymbol{P}\right),\, \tau\in\mathcal{M}_0^T} \widetilde{\boldsymbol{E}} B_\tau^{-1} f_\tau, \tag{16.4}$$

$$X_t^{\pi^*,\,C^*} \equiv X_t^* = \operatorname*{ess\,sup}_{\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\mathcal{M}\left(\frac{S}{B},\,\boldsymbol{P}\right),\, \tau\in\mathcal{M}_t^T} \widetilde{\boldsymbol{E}}(B_\tau^{-1} f_\tau | \mathcal{F}_t), \tag{16.5}$$

$$B_t^{-1} X_t^* = \mathbb{C}_T^*(f) + \int_0^t \gamma_u^* d\left(\frac{S}{B}\right)_u - \int_0^t B_u^{-1} dC_u^*. \tag{16.6}$$

Полученные формулы (16.4) – (16.6) определяют общую методологию (совершенного) хеджирования Американских опционов.

Исследуем предложенный метод более детально для случая модели Блэка-Шоулса (10.2). В этом случае $\mathcal{M}\left(\frac{S}{B}, \boldsymbol{P}\right)$ состоит из *единственной* мартингальной меры $\boldsymbol{P}^*$ с плотностью Z^* (см. (10.5)).

Как было отмечено ранее, при расчёте Американского опциона необходимо найти как его стоимость, так и момент исполнения данного контракта. В этом контексте уместно сделать следующее замечание.

Замечание 16.1. Предположим, что Американский опцион с функцией выплаты $f = (f_t)_{t \le T}$ был приобретён по цене $\mathbb{C}_T^*(f)$ и исполнен в момент времени $\tau \in \mathcal{M}_0^T$, когда капитал хеджирующей стратегии $X_\tau^{\pi,\,C}$ строго превосходил f_τ с некоторой положительной вероятностью. *Иррациональность* использования опциона на рынке очевидна, поскольку имея начальный капитал $\mathbb{C}_T^*(f)$ можно использовать непосредственно стратегию $(\pi,\ C)$. Это генерирует (с той же положительной вероятностью) чистый доход, равный $X_\tau^{\pi,\,C} - f_\tau$ как и при покупке опциона.

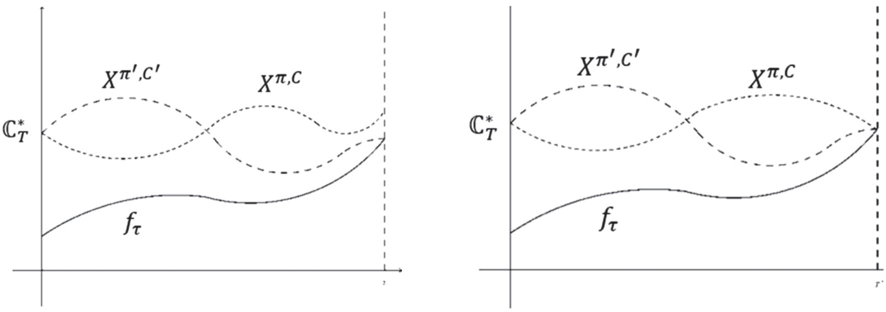


Рисунок 16.1 – Рациональное и иррациональное время исполнения опциона

Момент исполнения τ^* называется *рациональным*, если для любой допустимой стратегии $(\pi,\ C)$ с начальным капиталом $X_0^{\pi,\,C} = \mathbb{C}_T^*(f)$ неравенство $X_{\tau^*}^{\pi,\,C} \ge f_{\tau^*}$ ($\boldsymbol{P}$-п. н.) влечёт равенство ${}_{\tau^*}^{\pi,\,C} = f_{\tau^*}$ ($\boldsymbol{P}$-п. н.) (см. Рисунок 16.1).

Теорема 16.1. Предположим, что на $(B,\ S)$-рынке (10.2) определено динамическое платёжное обязательство $f = (f_t)_{t \le T}$ такое, что

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^T} \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau} f_\tau < \infty. \tag{16.7}$$

Тогда существует минимальная хеджирующая стратегия $(\pi^*,\ C^*) = (\beta^*,\ \gamma^*,\ C^*)$ с потреблением, определённая соотношениями:

$$\mathbb{C}_T^*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^T} \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau} f_\tau, \tag{16.8}$$

$$X_t^* = X_t^{\pi^*,\,C^*} = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \boldsymbol{E}^*\left(e^{-r(\tau - t)} f_\tau \middle| \mathcal{F}_t\right), \tag{16.9}$$

$$e^{-rt} X_t^* = \mathbb{C}_T^*(f) + \int_0^t \gamma_u^* d(e^{-ru} S_u) - \int_0^t e^{-ru} dC_u^*. \tag{16.10}$$

$$\beta_t^* = \frac{X_t^* - \gamma_t^* S_t}{e^{rt}}.$$

Момент остановки $\tau^* \in \mathcal{M}_0^T$ рационален тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{C}_T^*(f) = \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau^*} f_{\tau^*}. \tag{16.11}$$

Кроме того,

$$\tau^* = \inf\{t \le T : X_T^* \ge f_t\}, \tag{16.12}$$

если $\Delta f_t \geq 0$ для всех $t \leq T$ и семейство $\{e^{-r\tau} f_\tau\}_{\tau \in \mathcal{M}_0^T}$ равномерно интегрируемо.

Доказательство. Соотношения (16.8) – (16.10) следуют из (16.4) – (16.6), вследствие условия (16.7) выполнено соотношение (16.2).

Кроме того, если τ^* – рациональный момент исполнения, то разница $c = \mathbb{C}_T^*(f) - \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau} f_{\tau^*}$ неотрицательна. Введём неотрицательный супермартингал

$$Y_t = c + \boldsymbol{E}^*\left(e^{-r\tau^*} f_{\tau^*} \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

и найдём, что $Y_t = e^{-rt} X_t^{\pi,\,C}$ для некоторой стратегии $(\pi,\, C)$ с потреблением, а $X_0^{\pi,\,C} = Y_0 = \mathbb{C}_T^*(f)$. Более того, «рациональность» τ^* подразумевает, что

$$X_{\tau^*}^{\pi,\,C} = e^{r\tau^*} Y_{\tau^*} = f_{\tau^*} + c e^{r\tau^*} = X_{\tau^*}^{\pi,\,C} + c e^{r\tau^*}. \quad (\text{п. н.})$$

Следовательно, $c = 0$ и (16.11) верно.

С помощью (16.11) можно доказать, что τ^* является рациональным моментом остановки. Рассмотрим стратегию $(\pi,\, C)$ с потреблением такую, что $X_0^{\pi,\,C} = \mathbb{C}_T^*(f)$ и $X_{\tau^*}^{\pi,\,C} \geq f_{\tau^*}$ (п. н.). Тогда ввиду свойства супермартингальности дисконтированного капитала такой стратегии, получим, что

$$\mathbb{C}_T^*(f) = X_0^{\pi,\,C} \geq \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau^*} X_{\tau^*}^{\pi,\,C} \geq \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau^*} f_{\tau^*} = \mathbb{C}_T^*(f),$$

и следовательно, $X_{\tau^*}^{\pi,\,C} = f_{\tau^*}$.

Для доказательства (16.12) установим, что для любого $\varepsilon > 0$:

$$\boldsymbol{E}^* e^{-t\tau_\varepsilon} f_{\tau_\varepsilon} \geq \mathbb{C}_T^*(f) - \varepsilon, \tag{16.13}$$

где $\tau_\varepsilon = \inf\{t\colon f_t \geq X_t^* - \varepsilon\}$.

Неравенство (16.13) может быть доказано с помощью следующих аргументов. По определению наименьшей верхней границы, существует последовательность моментов остановки $\sigma_n \in \mathcal{M}_0^T$ такая, что $\boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} \uparrow \mathbb{C}_T^*(f)$ при $n \uparrow \infty$. Кроме того, из последовательности очевидных соотношений

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} &= \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n < \tau_\varepsilon\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n \geq \tau_\varepsilon\}} \\
&\leq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n}\left(X_{\sigma_n}^* - \varepsilon\right) + \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} X_{\sigma_n}^* I_{\{\sigma_n \geq \tau_\varepsilon\}} \\
&\leq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} X_{\sigma_n}^* - \varepsilon \boldsymbol{P}^*\{\sigma_n < \tau_\varepsilon\} \\
&\leq \mathbb{C}_T^*(f) - \varepsilon \boldsymbol{P}^*\{\sigma_n < \tau_\varepsilon\}
\end{aligned}$$

и определения $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ следует, что $\boldsymbol{P}^*\{\sigma_n < \tau_\varepsilon\} \to 0$ при $n \uparrow \infty$.

Определим $\tau_n = \sigma_n \wedge \tau_\varepsilon$ и заметим, что для любого $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} &= \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n \leq \tau_\varepsilon\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_\varepsilon} f_{\tau_\varepsilon} I_{\{\sigma_n > \tau_\varepsilon\}} \\
&\geq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n \leq \tau_\varepsilon\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_\varepsilon} X_{\tau_\varepsilon}^* I_{\{\sigma_n > \tau_\varepsilon\}} - \varepsilon \\
&\geq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n \leq \tau_\varepsilon\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} X_{\sigma_n}^* I_{\{\sigma_n > \tau_\varepsilon\}} - \varepsilon \\
&\geq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n \leq \tau_\varepsilon\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} I_{\{\sigma_n > \tau_\varepsilon\}} - \varepsilon \\
&\leq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} - \varepsilon.
\end{aligned} \tag{16.14}$$

На основании (16.14) имеем, что

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_\varepsilon} f_{\tau_\varepsilon} &= \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} I_{\{\tau_\varepsilon<\sigma_n\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_\varepsilon} f_{\tau_\varepsilon} I_{\{\tau_\varepsilon\geq\sigma_n\}} \\ &= \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} - \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_n} f_{\tau_n} I_{\{\tau_\varepsilon\geq\sigma_n\}} + \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_\varepsilon} f_{\tau_\varepsilon} I_{\{\tau_\varepsilon\geq\sigma_n\}} \\ &\geq \boldsymbol{E}^* e^{-r\sigma_n} f_{\sigma_n} - \varepsilon - \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau_n} f_{\tau_n}.\end{aligned} \tag{16.15}$$

Переходя к пределу в (16.15) при $n \uparrow \infty$ и используя свойство равномерной интегрируемости $\{e^{-r\tau} f_\tau\}_{\tau\in\mathcal{M}_0^T}$, получим неравенство (16.13).

Теперь предположим, что $\varepsilon_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ и $\tilde{\tau}_n \equiv \tau_{\varepsilon_n} \uparrow \tilde{\tau}$, где $\tilde{\tau}$ – некоторый момент остановки такой, что $\tilde{\tau} \leq \tau^*$. Поскольку $\Delta f_t \geq 0$, можно утверждать, что $f_{\tilde{\tau}} \geq \lim\limits_{n\to\infty} f_{\tilde{\tau}_n}$. Тогда, вследствие леммы Фату и условия равномерной интегрируемости, выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T} \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau} f_\tau = \mathbb{C}_T^*(f) \leq \limsup_{n\to\infty} \boldsymbol{E}^* e^{-r\tilde{\tau}_n} f_{\tilde{\tau}_n} \leq \boldsymbol{E}^* e^{-r\tilde{\tau}} f_{\tilde{\tau}}\ .$$

Значит, $\mathbb{C}_T^*(f) = \boldsymbol{E}^* e^{-r\tilde{\tau}} f_{\tilde{\tau}}$, а равенство $X_{\tilde{\tau}}^* = f_{\tilde{\tau}}$ следует из факта того, что $X_{\tilde{\tau}}^* \geq f_{\tilde{\tau}}$. В итоге определение момента остановки τ^* приводит к равенству $\tilde{\tau} = \tau^*$. Таким образом, $X_{\tau^*}^* = f_{\tau^*}$, а τ^* – рационален.

Теорема 16.1 доказана.

Замечание 16.2. Следует отметить, что утверждение теоремы о существовании рационального момента остановки неверно в общем случае без введения условия равномерной интегрируемости и неотрицательности скачков Δf_t.

Теорема 16.1. позволяет свести задачу поиска цены $\mathbb{C}_T^*(f)$ и момента исполнения τ^* Американского опциона с функцией выплаты f к экстремальной задаче (16.8), (16.12), называемой *задачей об оптимальной остановке*.

Суть данной задачи заключается в том, чтобы для некоторого неотрицательного случайного процесса $(X_t)_{t\geq 0}$ на базисе $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ \boldsymbol{P})$ найти супремум $\sup\limits_\tau \boldsymbol{E} X_\tau$ и *оптимальный* момент остановки τ^*, на котором достигается этот супремум (см. Главу 5 в дискретном случае).

Одним из интересных и эффективных подходов к решению данной задачи является нахождение вспомогательного случайного процесса $(Y_t)_{t\geq 0}$ такого, что

$$X_t = g(Y_t) M_t, \tag{16.16}$$

где g – функция с единственной точкой максимума, а $(M_t)_{t\geq 0}$ – неотрицательный мартингал с $M_0 = 1$.

Если удалось отыскать представление (16.16), то $X_t = g(Y_t)M_t \leq g(y^*)M_t$, где $y^* = \arg\max\limits_y g(y$, и для любого момента остановки τ справедливо неравенство

$$\boldsymbol{E} X_\tau \leq g(y^*). \tag{16.17}$$

Представление (16.16) и неравенство (16.17) приводят к естественному определению момента остановки в виде:

$$\tau^* = \inf\{t : Y_t \geq y^*\}.$$

Оптимальность τ^* для непрерывных процессов в данной задаче следует из неравенств

$$\boldsymbol{E} X_{\tau^*} = \boldsymbol{E} g(Y_{\tau^*}) M_{\tau^*} I_{\{\tau^*<\infty\}} = g(y^*) \boldsymbol{E} M_{\tau^*} I_{\{\tau^*<\infty\}} = g(y^*).$$

Воспользуемся данным подходом в рамках модели Блэка-Шоулса (10.2) для расчёта цены Американского опциона покупателя на бесконечном временном интервале $[0, \infty)$.

В целях упрощения вычислений предположим, что норма доходности μ и процентная ставка r равны. Следовательно, мартингальная мера $\boldsymbol{P}^*$ совпадает с исходной вероятностью $\boldsymbol{P}$, а динамическое поведение цены акции S_t задано формулой

$$S_t = \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}, \quad S_0 = 1. \tag{16.18}$$

Пусть функция выплаты опциона задана в виде $f_t = e^{-\delta t}(S_t - K)^+$, где константы K, δ положительны. В соответствии с Теоремой 16.1:

$$\mathbb{C}_\infty^*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^\infty} \boldsymbol{E} e^{-\lambda\tau}(S_\tau - K)^+,$$

где $\lambda = r + \delta$.

Мартингал M_t в разложении (16.16) будем искать в форме $e^{-\lambda t}S_t^\alpha$, $\alpha > 0$. Применяя формулу Ито к $e^{-\lambda t}S_t^\alpha$ и используя (16.18) вместе с мартингальностью произведения, получим, что

$$\frac{(\alpha\sigma)^2}{2} + \alpha\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) = \lambda,$$

$$\alpha = -\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{16.19}$$

и следовательно,
$$M_t = \exp\left\{\alpha\sigma W_t - \frac{(\alpha\sigma)^2}{2}t\right\}.$$

Кроме того,

$$e^{-\lambda t}(S_t - K)^+ = (S_t - K)^+ S_t^{-\alpha} M_t = g(S_t)M_t,$$

где $g(y) = (y - K)^+ y^{-\alpha}$.

Прямые вычисления показывают, что $g(y)$ достигает максимума в точке $y^* = \frac{\alpha}{\alpha - 1}K$ и $g(y^*) = (\alpha - 1)^{-1}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^\alpha K^{1-\alpha}$.

Для доказательства оптимальности момента остановки $\tau^* = \inf\{t: S_t = y^*\}$ достаточно показать, что

$$\boldsymbol{E} M_{\tau^*} I_{\{\tau^* < \infty\}} = 1.$$

Обозначим $\boldsymbol{Q}$ меру с локальной плотностью $\frac{d\boldsymbol{Q}_t}{d\boldsymbol{P}_t} = M_t$. Процесс $\widetilde{W}_t = W_t - \alpha\sigma t$ является Винеровским относительно введённой меры.

С помощью (16.18) получим, что относительно меры $\boldsymbol{Q}$ снос $\log S_t$ равняется:

$$r - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2\alpha = \sigma^2\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} + \left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

и $\boldsymbol{Q}(\tau^* < \infty) = 1$ и $\boldsymbol{P}(\tau^* < \infty) = 1$ поскольку $\log y^* > 0$.

В результате приходим к следующим формулам для цены и момента исполнения данного опциона:

$$\mathbb{C}^*_\infty\left(e^{-\delta t}(S_t-K)^+\right)=(\alpha-1)^{-1}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

$$\tau^*=\inf\left\{t\colon S_t\geq\frac{\alpha}{\alpha-1}K\right\},$$

где α определяется из (16.19).

16.2 Расчёты Американских опционов с помощью перехода к дуальной мартингальной мере

Теперь займёмся выводом более детальных аналитических формул для расчёта опционов. Для этого будем использовать метод замены дисконтирующего портфеля.

Пусть $\widehat{\boldsymbol{P}}$ – вероятностная мера на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ \boldsymbol{P})$ такая, что:

1. $\boldsymbol{P}$ и $\widehat{\boldsymbol{P}}$ взаимно эквивалентны;
2. Процесс $\left(\frac{B_t}{S_t}\right)_{0\leq t\leq T}$ – локальный мартингал относительно $\widehat{\boldsymbol{P}}$.

Можно показать, что локальная плотность меры $\widehat{\boldsymbol{P}}$ относительно $\boldsymbol{P}$ равна

$$\hat{Z}_t=\exp\left(\frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}W_t-\frac{(r-\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}t\right),\quad 0\leq t\leq T,$$

и

$$\widehat{W}_t=W_t-\frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}$$

является Винеровским процессом относительно $\widehat{\boldsymbol{P}}$.

Также отметим, что локальная плотность $\widehat{\boldsymbol{P}}$ относительно *мартингальной меры* $\boldsymbol{P}^*$, определённой в (10.5), имеет вид:

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{P}}_t}{d\boldsymbol{P}^*_t}=\exp\left(\sigma W_t-\left(r-\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)=\frac{S_t}{S_0}e^{-rt}. \qquad 16.20$$

Заменяя вероятностную меру, приходим к следующему аналогу Теоремы 16.1, в котором даются *дуальные* представления минимального хеджирующего портфеля и момента исполнения опциона. Соответственно, мера $\boldsymbol{P}$ называется *дуальной мартингальной мерой*.

Теорема 16.2. Пусть на $(B,\ S)$-рынке (10.2) задано динамическое платёжное обязательство $f=(f_t)_{t\leq T}$ такое, что

$$\sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T}\widehat{\boldsymbol{E}}\frac{f_\tau}{S_\tau}<\infty.$$

Тогда существует минимальная хеджирующая стратегия $\left(\hat{\pi},\ \hat{C}\right)=\left(\hat{\beta},\ \hat{\gamma},\ \hat{C}\right)$ с потреблением, заданная следующими соотношениями:

$$\mathbb{C}_T(f)=S_0\sup_{\tau\in\mathcal{M}_0^T}\widehat{\boldsymbol{E}}\frac{f_\tau}{S_\tau}, \qquad 16.21$$

$$\hat{X}_t = X_t^{\hat{\pi},\hat{C}} = S_t \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{M}_t^T} \hat{\boldsymbol{E}}\left(\frac{f_\tau}{S_\tau}\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

$$\frac{\hat{X}_t}{S_t} = \hat{\mathbb{C}}_T(f) + \int_0^t \hat{\beta}_u d\left(\frac{e^{ru}}{S_u}\right) - \int_0^t \frac{d\hat{C}_u}{dS_u}, \qquad 16.22$$

$$\hat{\gamma}_t = \frac{\hat{X}_t - \hat{\beta}_t e^{rt}}{S_t}.$$

Момент остановки $\hat{\tau} \in \mathcal{M}_0^T$ рационален тогда и только тогда, когда

$$\hat{\mathbb{C}}_T(f) = S_0 \hat{\boldsymbol{E}} \frac{f_{\hat{\tau}}}{S_{\hat{\tau}}}.$$

Кроме того,

$$\hat{\tau} = \inf\{t \le T \colon \hat{X}_t \ge f_t\},$$

если $\Delta f_t \ge 0$ для всех $t \le T$ и семейство $\left\{\frac{f_\tau}{S_\tau}\right\}_{\tau \in \mathcal{M}_0^T}$ – равномерно интегрируемо.

Используя (16.20), находим, что

$$\hat{\mathbb{C}}_T(f) = S_0 \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^T} \hat{\boldsymbol{E}} \frac{f_\tau}{S_\tau} = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0^T} \boldsymbol{E}^* e^{-r\tau} f_\tau = \mathbb{C}_T^*(f).$$

Теорема 16.3. Справедливая (рациональная) стоимость $\mathbb{C}_\infty^*(f)$ Американского опциона с функцией выплаты

$$f_t = e^{-\lambda t}\left(\int_0^t S_u^n du + (s_0\psi_0)^n\right)^{\frac{1}{n}},$$

при $r + \lambda > 0$, и моментами исполнения со значениями в интервале $[0, \infty)$ задаётся формулой

$$\mathbb{C}_\infty^*(f) = \begin{cases} \psi_0, & \psi_0 \ge \tilde{\psi}, \\ u(\psi_0)\dfrac{\tilde{\psi}}{u(\tilde{\psi})}, & \psi_0 < \tilde{\psi}, \end{cases}$$

где функция $u(\psi)$ имеет следующее интегральное представление:

$$u(\psi) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2y}{n^2\sigma^2}\right) y^{-\gamma_1 - 1}(1 + y\psi^n)^{\gamma_2} dy,$$

с $\gamma_1 < \gamma_2$, являющимися корнями уравнения

$$\frac{\sigma^2}{2} n^2\gamma^2 - \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) n\gamma - \lambda = 0,$$

а $\tilde{\psi}$ определяется из соотношения

$$u(\psi) = \psi u'(\psi).$$

Рациональный момент исполнения опциона выражается в виде:

$$\tau^* = \inf\{t \ge 0 \colon \psi_t \ge \tilde{\psi}\},$$

где

$$\psi_t = \frac{1}{S_t}\left(\int_0^t S_u^n du + (s_0\psi_0)^n\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad 16.23$$

Приведём ключевые идеи доказательства Теоремы 16.3. Прежде всего заметим, что относительно меры $\widehat{\boldsymbol{P}}$ процесс $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$, определённый в (16.23), является Марковским диффузионным процессом, удовлетворяющим следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$d\psi_t = -\psi_t\big(rdt + \sigma d\widehat{W}_t\big) + \frac{1}{n\psi_t^{n-1}}dt.$$

Используя Теорему 16.2 о характеризации минимальной хеджирующей стратегии, приходим к стандартной задаче об оптимальной остановке диффузионного процесса $\psi = (\psi_t)_{t\geq 0}$:

$$\mathbb{C}_\infty^*(f) = S_0 \sup_{\tau\leq\infty} \widehat{\boldsymbol{E}} e^{-\lambda\tau}\psi_\tau.$$

В соответствии с общей теорией решения таких задач оптимальный момент τ^* имеет структуру:

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: \psi_t \geq \tilde{\psi}\},$$

где $\tilde{\psi}$ – константа.

Обозначим $\tilde{V}(\psi) = \sup_\tau \widehat{\boldsymbol{E}} e^{-\lambda\tau}\psi_\tau$ и предположим, что функция $\tilde{V}(\psi)$ достаточно гладкая (например, принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}_+)$). В соответствии с общей теорией, уравнение

$$L\tilde{V}(\psi) = \lambda\tilde{V}(\psi)$$

должно быть выполнено в области $\tilde{C} = \{\psi: \psi_t < \tilde{\psi}\}$ «продолжения наблюдений», где

$$L = \left(-r + \frac{1}{n\psi^n}\right)\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}$$

является производящим оператором процесса ψ.

Общее решение задачи (16.21) будем искать в виде

$$V(\psi) = x^{n\gamma_1}\big(C_1 M(a,\, b,\, z) + C_2 U(a,\, b,\, z)\big),$$

где $a = -\gamma_1$, $b = 1 - \gamma_1 + \gamma_2$, $z = \frac{2}{n^2\sigma^2 x^n}$, $\gamma_1 < \gamma_2$ – корни уравнения

$$\frac{\sigma^2}{2}n^2\gamma^2 - \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)n\gamma - \lambda = 0,$$

а C_1, C_2 – неизвестные постоянные. Компоненты $M(a,\, b,\, z)$ и $U(a,\, b,\, z)$ являются так называемыми *гипергеометрическими функциями Куммера* и имеют следующее интегральное представление:

$$M(a,\, b,\, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 \exp(zt)\, t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}dt,$$

$$U(a,\, b,\, z) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \exp(-zt)t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}\, dt.$$

Заметим, что по самому смыслу поставленной задачи, её решение должно быть ограничено. Следовательно, в данном случае константа C_1 равна 0, поскольку иначе $\tilde{V}(\psi) \to \infty$ при $\psi \to 0$.

Таким образом, имеются два неизвестных параметра $C_2 = C$ и $\tilde{\psi}$, которые могут быть определены с помощью следующих условий:

1. $\tilde{V}(\tilde{\psi}) = \tilde{\psi}$, которое означает, что на границе, разделяющей области «продолжения» и «остановки» наблюдений функция должна оставаться непрерывной;
2. $\tilde{V}'(\tilde{\psi}) = 1$, известное в литературе как условие «гладкого склеивания».

Используя эти два дополнительных условия, решение поставленной выше задачи задаётся формулой (16.22). Помимо этого, также необходимо доказать, что полученное решение совпадает с $\mathbb{C}^*_\infty(f)$. Для этого достаточно установить следующие два свойства:

Для любого конечного $(\widehat{\boldsymbol{P}} - \text{п. н.})$ Марковского момента τ

$$\widehat{\boldsymbol{E}} e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda\tau} \psi_\tau \leq \tilde{V}(\psi), \quad \psi \geq 0$$

(такого, что $\mathbb{C}^*_\infty \leq \tilde{V}(\psi)$);

Момент времени $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq \tilde{\psi}\}$ конечен $\widehat{\boldsymbol{P}}$-п. н., и

$$\widehat{\boldsymbol{E}} e^{-\lambda\tau^*} \psi_{\tau^*} = \tilde{V}(\psi).$$

Эти утверждения могут быть доказаны путём применения формулы Ито к процессу $\left(e^{-\lambda t} \tilde{V}(\psi_t)\right)_{t \geq 0}$.

Глава 17
ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФИНАНСОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЁТОВ

В настоящей главе обсуждаются вопросы статистического оценивания параметров модели Блэка-Шоулса. Особое внимание уделяется оцениванию (точечному и интервальному) волатильности и эффекту «улыбки» волатильности. В ней большое внимание уделяется вопросу о том, как моменты большего порядка чем 2 (коэффициенты скошенности и вытянутости распределения доходностей акций) влияют на моделирование и опционные расчёты. С этой целью даётся представление о модели Грама-Шарлье и её полиномиально-гауссовской версии (см. [13], [19], [15], [16] и [10]).

17.1 Оценивание параметров в модели Блэка-Шоулса. Эффект «улыбки» волатильности

Вначале обсудим вопрос оценивания параметров моделей финансовых рынков. Если рассматривать классическую модель Блэка-Шоулса, то здесь удобно оперировать ею в форме Геометрического Броуновского Движения

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}, S_0 = s_0 > 0$$

Ясно, что в этом случае величины $x_j = ln\frac{S_j}{S_{j-1}}$ являются независимыми $N(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$-распределёнными случайными величинами. Следовательно, в качестве оценок волатильности и нормы доходности можно взять стандартные статистические величины:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{1-t}\sum_{j=1}^{t}\left(x_j - \bar{x}\right), \;\; \bar{x} = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} x_j.$$

Эти формулы используют цены акций как статистический материал. Но как было показано, на акции могут быть выпущены производные инструменты. Следовательно, можно использовать эти дополнительные статистические данные для оценивания самого важного здесь параметра волатильности, используя, например, формулу Блэка-Шоулса.

Пусть $\mathbb{C}^{\text{рын}}(t, S_t, K, T)$ обозначает цену некоторого торгуемого опциона (покупателя) в момент времени $t, 0 \le t \le T$. Здесь S_t – цена акции в этот момент времени, K – цена исполнения, а T – момент исполнения опциона.

Пусть $\mathbb{C}^{\text{теор}}(t, S_t, K, T, \sigma)$ – цена опциона с теми же характеристиками и волатильностью σ, вычисленная теоретическим способом исходя из предположений модели. Тогда оценка волатильности, называемая также *внутренней (вложенной) волатильностью*, определяется из соотношения

$$\mathbb{C}^{\text{теор}}(t, S_t, K, T, \hat{\sigma}) = \mathbb{C}^{\text{рын}}(t, S_t, K, T).$$

Следует отметить, что полученная таким образом оценка волатильности $\hat{\sigma}$ является функцией параметров опционного контракта $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(t, S_t, K, T)$ и при различных K и T оценки волатильности, вообще говоря, не совпадают. Так, например, в случае стандартного опциона покупателя при фиксированных t, S_t, T оценки волатильности как функции цены исполнения $\hat{\sigma}(K)$ образуют кривую, напоминающую *улыбку* (*smile, smile effect*). При этом чем меньше время до исполнения опциона, тем острее становится «улыбка». Таким образом, волатильность имеет, как говорят, «временную структуру», и это следует учитывать при построении моделей волатильности.

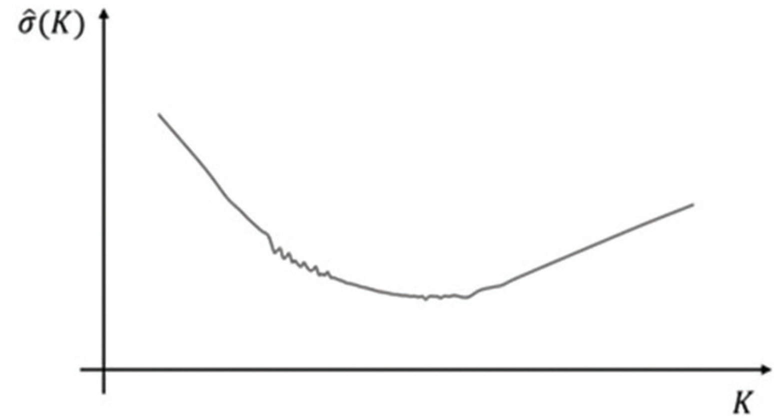


Рисунок 17.1 – «Улыбка волатильности» по данным finance.yahoo.com для двухмесячных опционов call на акции AMZN с датой исполнения 16 Августа 2019

Обратимся теперь к формуле Блэка-Шоулса, считая, что *случайность* возникает вследствие ошибки оценивания *неизвестной* волатильности и изучим статистические свойства цены Блэка-Шоулса $\mathbb{C}(t, S_t, K, T, \sigma) = \mathbb{C}(\sigma)$.

Предположим, имеется последовательность цен акции $S_0, \dots, S_n, n = 1,2, \dots$ (например, последовательность цен закрытия акции за $n+1$ дней). Как было отмечено ранее, в силу того, что случайные величины $x_j = \ln \frac{S_j}{S_{j-1}}$ являются независимыми, $N(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$-распределёнными случайными величинами, несмещённой оценкой моментов для σ^2 является

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x}\right)^2,$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} x_j$.

Хорошо известно, что статистика $\hat{\sigma}_n^2$ распределена как $\sigma^2 \cdot \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}$, где случайная величина χ_m^2 имеет распределение хи-квадрат с m степенями свободы и функцию плотности

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} e^{\frac{x}{2}}, \qquad x > 0.$$

Таким образом,

$$P(\hat{\sigma}_n^2 < \sigma_0^2) = P\left(\chi_{n-1}^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)\right). \tag{17.1}$$

Поскольку цена Блэка-Шоулса является возрастающей функцией параметра σ, то из (17.1) вытекает, что

$$P(\mathbb{C}(\hat{\sigma}_n) < \mathbb{C}(\sigma_0)) = P\left(\chi_{n-1}^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}(n-1)\right). \tag{17.2}$$

Следовательно, соотношение (17.2) задаёт функцию распределения цены Блэка-Шоулса, что может быть использовано для построения доверительного интервала цены опциона $\mathbb{C}(\sigma)$. Для этого выберем число $1-\alpha$ – *доверительный уровень* ($(0 < \alpha < 1$) и найдём константы χ_* и χ^* так, чтобы

$$P(\chi_* \leq \chi_{n-1}^2 \leq \chi^*) = 1 - \alpha.$$

Тогда для этих констант имеем, что

$$P\left(\chi_* \leq \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}(n-1) \leq \chi^*\right) = 1 - \alpha,$$

и следовательно,

$$P\left(\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\chi^*}(n-1) \leq \sigma^2 \leq \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\chi^*}(n-1)\right) = 1 - \alpha. \tag{17.3}$$

Используя монотонность цены Блэка-Шоулса, получаем соотношение:

$$P\left(\mathbb{C}\left(\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\chi^*}(n-1)}\right)\right) \leq \mathbb{C}(\sigma_0) \leq P\left(\mathbb{C}\left(\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\chi_*}(n-1)}\right)\right) = 1 - \alpha. \tag{17.4}$$

Следовательно, $(1-\alpha) \cdot 100\%$ – доверительный интервал для $\mathbb{C}(\sigma)$ имеет вид

$$\left(\mathbb{C}\left(\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\chi^*}(n-1)}\right), \mathbb{C}\left(\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\chi_*}(n-1)}\right)\right). \tag{17.5}$$

Таким образом, формулы (17.3) – (17.5) дают представление о том, насколько точно могут быть оценены σ и $\mathbb{C}(\sigma)$. Далее, поскольку цена опциона нелинейно зависит от волатильности, то её несмещённая оценка не приводит к несмещённой оценке цены опциона. Это может быть одним из возможных объяснений наблюдаемого на практике *эффекта «улыбки» волатильности*.

17.2 Полиномиально-гауссовское распределение для моделирования финансового рынка и расчёта опционов. Модель Грама-Шарлье

Ранее были рассмотрены некоторые *статистические* вопросы, в основном, связанные с волатильностью и её влиянием на цены акций и опционов.

Обратимся теперь к *вероятностным* аспектам, касающимся влияния моментов более высокого порядка на поведение цен акций и опционов.

Пусть $R_T = \ln\frac{S_T}{S_0}$ – логарифмическая доходность акции. В случае модели Блэка-Шоулса $R_T \sim N(m, \tilde{\sigma}^2)$, и относительно мартингальной меры P^* эти параметры сдвига и масштаба определяются формулами $m = rT - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}, \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 T$.

Следующими параметрами, характеризующими симметрию и вытянутость распределения случайной величины X, являются коэффициенты *скошенности* $\xi = \frac{E(X-EX)^3}{(E(X-EX)^2)^{\frac{3}{2}}}$ и *вытянутости* $k = \frac{E(X-EX)^4}{(E(X-EX)^2)^2}$.

Известно, что для нормального распределения $\xi = 0$ и $k = 3$, и этот факт даёт возможность исследовать, насколько модель Блэка-Шоулса адекватна финансовой статистике доходностей акции.

Как показывают многочисленные исследования, параметры коэффициентов симметрии и вытянутости доходностей часто отличаются от Гауссовских параметров 0 и 3. Так возникла идея подобрать вероятностное распределение, которое снимает этот вопрос и обеспечивает более качественную калибровку по сравнению с моделью Блэка-Шоулса.

Опишем сущность подхода, состоящего в расширении гауссовского распределения в полиномиально-гауссовское. При этом будем предполагать, что относительно мартингальной меры P^* плотность $f(x) = f_{R_t}(x)$ логарифмической доходности R_T имеет следующий факторизованный вид:

$$f_{R_T}(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x-m}{\tilde{\sigma}}\right)p\left(\frac{x-m}{\tilde{\sigma}}\right)}{\tilde{\sigma}}, \tag{17.6}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$ – плотность стандартного нормального распределения, параметры сдвига m и масштаба $\tilde{\sigma}$ предопределяются мартингальностью меры P^*: $E^* S_T = S_0 e^{rT}$, p – полином степени $N \geq 0$.

Анализ полиномиально-гауссовского распределения (17.6) начнём с введения *ортогональных полиномов Эрмита* $(H_k)_{k\geq 0}$: $H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)}$, через которые удобно выразить полином $p(x)$ в виде:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k H_k(x). \tag{17.7}$$

В представлении (17.7) коэффициенты можно идентифицировать следующим образом: $b_0 = 1$, поскольку f – плотность распределения, $b_1 = b_2 = 0$ ввиду того, что идентификация распределения осуществляется однозначно через $(m, \tilde{\sigma}, b_2, \dots, b_N)$, где $m = E^* R_T$ и $\tilde{\sigma} = Var^*(R_T)$.

Сначала рассмотрим один из наиболее важных случаев распределения (17.6) с $N = 4$, для которого

$$p(x) = 1 + \frac{\xi}{6} H_3(x) + \frac{\kappa - 3}{24} H_4(x), \tag{17.8}$$

где ξ и k – коэффициенты скошенности и вытянутости распределения R_T.

В этом случае (17.6) – (17.8) называется *моделью Грама-Шарлье*, а взаимосвязь параметров сдвига и масштаба в ней описывается соотношением

$$m = \mu T - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} - \ln(p(\tilde{\sigma})).$$

Обозначим $y = \frac{x-m}{\tilde{\sigma}}$ и перепишем (17.6) в виде

$$f_{R_T}(x) = \frac{\varphi(y)\left(1+\frac{\xi}{6}H_3(y)+\frac{\kappa-3}{24}H_4(y)\right)}{\tilde{\sigma}}.$$

Для того, чтобы определить область (ξ, k), в которой $1+\frac{\xi}{6}H_3(y)+\frac{\kappa-3}{24}H_4(y) \geq 0$ для каждого y. При этом достаточно описать границу такой области. Если (ξ_0, k_0) находится на границе, то функция $1+\frac{\xi_0}{6}H_3(y)+\frac{\kappa_0-3}{24}H_4(y)$ должна быть касательной к оси $x=0$. Поэтому уравнение $1+\frac{\xi_0}{6}H_3(y)+\frac{\kappa_0-3}{24}H_4(y)=0$ имеет многозначные корни. Пусть y_0 – такой корень, тогда пара (ξ_0, k_0) должна быть решением системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \left.\left(1+\dfrac{\xi_0}{6}H_3(y)+\dfrac{\kappa_0-3}{24}H_4(y)\right)\right|_{y=y_0} = 0, \\ \left.\dfrac{d}{dy}\left(1+\dfrac{\xi_0}{6}H_3(y)+\dfrac{\kappa_0-3}{24}H_4(y)\right)\right|_{y=y_0} = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\big(\xi(y), k(y)\big) = \left(\frac{-24H_3(y)}{4H_3^2(y)-3H_4(y)H_2(y)}, 3+\frac{-72H_2(y)}{4H_3^2(y)-3H_4(y)H_2(y)}\right).$$

Замечание 17.1 В связи с приведёнными выше теоретическими формулами, описывающими область (ξ, k), в которой «плотность» Грам-Шарлье является реальной плотностью, то есть положительной функцией, отметим следующие полезные рекомендации. Для обеспечения ограничений положительности коэффициент вытянутости должен принимать значения между нулём и четырьмя. При этом для выбранного таким образом коэффициента вытянутости существует некоторый симметричный интервал для выбора коэффициента скошенности. Параметры подходящего интервала можно определить с помощью численных подсчётов, и обычно его границы находятся между $\pm 1{,}05$.

В случае общей полиномиально-гауссовской модели можно применить аналогичный метод идентификации полинома $p(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n H_n(x)$ и его неотрицательности. Далее, в рамках модели (17.6) – (17.7) для произвольного $N \geq 0$ имеет место формула безарбитражной цены опциона покупателя с ценой поставки K:

$$C = -Ke^{-rT}\left(\Phi(-D_2)+\sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(D_2)\varphi(D_2)\right)+S_0\Phi(-D_1)+ \frac{S_0\varphi(D_1)}{p(\tilde{\sigma})}\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} H_{j-1}(D_1)\tilde{\sigma}^{k-j}, \tag{17.9}$$

где

$$D_1 = \frac{ln(S_0/K)-rT-\tilde{\sigma}^2/2+ln(p(\tilde{\sigma}))}{\tilde{\sigma}},$$

$$D_2 = \frac{ln(S_0/K)-rT+\tilde{\sigma}^2/2+ln(p(\tilde{\sigma}))}{\tilde{\sigma}}.$$

Отметим наиболее важный для нас частный случай формулы (17.9) для модели Грам-Шарлье:

$$\tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{T}, \quad m = \ln S_0 + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T - \ln\left\{1+\frac{1}{6}\xi\sigma^3T^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{24}(k-3)\sigma^4T^2\right\}$$

и $$\mathbb{C} = S_0\Phi(D_1) - Ke^{-rT}\Phi(D_2) + Ke^{-rT}\left\{\sigma\sqrt{T}c_1\Phi'(D_2) + c_1\Phi''(D_2) + c_2\Phi^{(3)}(D_2)\right\},$$

где $$D_1 = d_1 - \frac{\ln\left(1+\sigma^2 T c_1\right)}{\tilde{\sigma}}, \quad D_2 = D_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$$c_1 = \frac{1}{6}\xi\sigma\sqrt{T} + \frac{1}{24}(k-3)\sigma^2 T, c_2 = \frac{1}{24}(k-3)\sigma\sqrt{T}.$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Для подсчёта цены опциона продавца воспользуемся паритетом цен опционов покупателя и продавца:

$$P = -Ke^{-rT}\left(\Phi(-D_2) + \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(D_2)\varphi(D_2)\right) - S_0\Phi(D_1) + \frac{S_0\varphi(D_1)}{p(\tilde{\sigma})}\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} H_{j-1}(D_1)\tilde{\sigma}^{k-j}. \tag{17.10}$$

Приведём также формулы греческих параметров риск-менеджмента:

$$\Delta_{call} = \frac{\partial}{\partial S_0} e^{-rT}\int_{\ln(K/S_0)}^{+\infty}(S_0e^x - K)f(x)dx$$

$$= e^{-rT}\int_{\ln(K/S_0)}^{+\infty} e^x f(x)\,dx + e^{-rT}(S_0e^x - K)f(x)\Big|_{x=\ln(S_0/K)}$$

$$= e^{-rT}\int_{\ln(K/S_0)}^{+\infty} e^x f(x)\,dx$$

Вычисляя производную уравнения паритета цен опционов $C - P = S_0 - Ke^{-rT}$, получаем соотношение $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$, и найдём дельты для опционов покупателя и продавца:

$$\Delta_{call} = \Phi(-D_1) + \frac{S_0\varphi(D_1)}{p(\tilde{\sigma})}\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\tilde{\sigma}^{k-j}H_{j-1}(D_1), \tag{17.11}$$

$$\Delta_{put} = -\Phi(D_1) + \frac{S_0\varphi(D_1)}{p(\tilde{\sigma})}\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\tilde{\sigma}^{k-j}H_{j-1}(D_1). \tag{17.12}$$

Другие греческие параметры могут быть рассчитаны аналогичным способом.

Для доказательства формулы (17.9) – (17.10) отметим сначала хорошо известные свойства полиномов Эрмита:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \varphi(x) H_i(x) H_j(x) dx = \begin{cases} 0 \text{ если } i \neq j \\ i! \text{ если } i = j \end{cases}$$

$$H_n'(x) = nH_{n-1}'(x)$$

$$H_n(x+t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \binom{n}{i} H_i(t).$$

Далее имеем, что

$$\begin{aligned}
C &= e^{-rT} E^*(S_T - K)^+ \\
&= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^x - K)^+ \varphi\left(\frac{x-m}{\tilde{\sigma}}\right) p\left(\frac{x-m}{\tilde{\sigma}}\right) \frac{1}{\tilde{\sigma}} dx \\
&= S_0 e^{-rT} \int_{D_2}^{\infty} \left(e^{\tilde{\sigma} y + m} - \frac{K}{S_0}\right) \varphi(y) p(y) dy \\
&= S_0 e^{-rT} \int_{D_2}^{\infty} e^{\tilde{\sigma} y + m} \varphi(y) p(y) dy - K e^{-rT} \int_{D_2}^{\infty} \varphi(y) p(y)\, dy \\
&= -K e^{-rT} \left(\Phi(y) - \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(y) \varphi(y)\right)\Bigg|_{D_2}^{+\infty} \\
&\qquad + S_0 e^{-rT + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} + m} \int_{D_2}^{\infty} \varphi(y - \tilde{\sigma}) p(y) dy \\
&= \ -K e^{-rT} \left(\Phi(-D_2) - \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(D_2) \varphi(D_2)\right) \\
&\qquad + S_0 e^{-\ln(p(\tilde{\sigma}))} \int_{D_1}^{\infty} \varphi(z) p(z + \tilde{\sigma}) dz \\
&= -K e^{-rT} \left(\Phi(-D_2) - \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(D_2) \varphi(D_2)\right) \\
&\qquad + \frac{S_0}{p(\tilde{\sigma})} \int_{D_1}^{\infty} \varphi(z) \left(1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \tilde{\sigma}^{k-j} H_j(z)\right) dz \\
&= -K e^{-rT} \left(\Phi(-D_2) - \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(D_2) \varphi(D_2)\right) \\
&+ \frac{S_0}{p(\tilde{\sigma})} \left\{\Phi(-D_1) + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\tilde{\sigma}^k \Phi(-D_1) + \varphi(D_1) \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} H_{j-1}(D_1) \tilde{\sigma}^{k-j}\right)\right\} \\
&= -K e^{-rT} \left(\Phi(-D_2) - \sum_{k=1}^{n} b_k H_{k-1}(D_2) \varphi(D_2)\right) + S_0 \Phi(-D_1) \\
&\qquad + \frac{S_0 \varphi(D_1)}{p(\tilde{\sigma})} \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \tilde{\sigma}^{k-j} H_{j-1}(D_1).
\end{aligned}$$

Для греческих параметров Δ (Дельта) в полиномиально-гауссовской модели имеем, что

$$\Delta_{call} = \frac{\partial C}{\partial S_0} = \Phi(-D_1) + \frac{\varphi(D_1)}{p(\tilde{\sigma})} \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} H_{j-1}(D_1) \tilde{\sigma}^{k-j}$$

для опциона call

$\Delta_{put} = \Delta_{call} - 1$ для опциона put.

СПИСОК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ

1. Вычислить дисперсию стохастического интеграла

$$X_t = \int_0^t (W_s + s)^2 dW_s,$$

где W – Винеровский процесс.

Решение:

Используя изометрию стохастического интеграла, получаем, что

$$V(X_t) = Var(X_t) = E\left(\int_0^t (W_s + s)^4 ds\right) = \int_0^t E[W_s^4 + 4sW_s^3 + 6W_s^2 + 4s^3 W_s + s^4]ds$$

Далее, по формуле Ито получаем

$$dW_s^4 = 4W_s^3 dW_s + 6W_s^2 ds \text{ and } dW_s^3 = 3W_s^2 dW_s + 3W_s ds$$

Следовательно, $EW_s^4 = 3s^2$ и $EW_s^3 = 0$, и значит

$$V(X_t) = \int_0^t 3s^2 ds + 6\int_0^t s^3 ds + \int_0^t s^4 ds = t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5$$

2. Используя формулу Ито, найти стохастический дифференциал случайного процесса $X_t = \cos(tW_t)$, где W – Винеровский процесс.

Решение:

По формуле Ито имеем, что

$$dX_t = -W_t \sin(tW_t)dt - t\sin(tW_t)dW_t - \frac{1}{2}t^2 \cos(tW_t)\, dt =$$

$$= -\left(W_t \sin(tW_t) + \frac{t^2}{2}\cos(tW_t)\, dt - t\sin(tW_t)\, dW_t\right).$$

3. Пусть $(W_t)_{t\geq 0}$ – Винеровский процесс. Определим следующие случайные процессы:

$$X_t = 2 + t + e^{W_t} \quad \text{и} \quad X_t = e^{0.5t}\cos(W_t).$$

Являются ли эти процессы процессами Ито и/или мартингалами относительно фильтрации, порожденной Винеровским процессом (W_t)?

Решение:

Представим X_t следующим образом: $X_t = f(t, W_t) = 2 + t + e^{W_t}$ (соответственно, $X_t = f(t, W_t) = e^{0.5t}\cos(W_t)$). Далее, применяя формулу Ито, имеем, что

$$df(t,W_t)=f_t'dt+f_x'dW_t+\frac{1}{2}f_{xx}''dt=dt+e^{W_t}dW_tdW_t+\frac{1}{2}e^{W_t}dt=$$
$$=\frac{1}{2}(X_t-t)dt+(X_t-2-t)dW_t.$$

Следовательно, этот процесс – процесс Ито, но не мартингал, поскольку $0<1+\frac{1}{2}e^{W_t}=\frac{1}{2}(X_t-t)\cdot$

Аналогично,

$$df(t,W_t)=d(e^{0.5t}\cos(W_t))=(0.5e^{0.5t}\cos W_t)dt-$$
$$e^{0.5t}(\sin W_t)dW_t-0.5e^{0.5t}(\cos W_t)\,dt=-e^{0.5t}(\sin W_t)dW_t.$$

Это означает, что рассматриваемый процесс – процесс Ито и одновременно мартингал как стохастический мартингалотносительно W_t.

4. Пусть $(N_t)_{t\geq 0}$- Пуассоновский процесс с интенсивностью 1. Определить параметры a и b, при которых процессы

$$X_t^1=(N_t-at)^2-bt \quad \text{и} \quad X_t^2=(N_t-at)^2-bN_t$$

являются мартингалами относительно фильтрации, порожденной данным Пуассоновским процессом.

Решение:

Мы имеем, что

$$(Var(N_t-N_s)=E(N_t-N_s)=t-s,\lambda-\text{интенсивность } N_t)$$

$$E(X_t^1|\mathcal{F}_s)=E((N_t-at)^2|\mathcal{F}_s)-bt=E(N_t^2-2atN_t+a^2t^2|\mathcal{F}_s)-bt=$$
$$=E(N_t^2|\mathcal{F}_s)-2atE(N_t|\mathcal{F}_s)+a^2t^2-bt=$$
$$=E((N_t-N_s)^2|\mathcal{F}_s)+2E\big((N_t-N_s)N_s\big|\mathcal{F}_s\big)+E(N_s^2|\mathcal{F}_s)-2atE(N_t-t|\mathcal{F}_s)-$$
$$-2at^2+a^2t^2-bt=\lambda(t-s)+(N_s-as)^2-bs-b(t-s)+$$
$$+2\big(\lambda(t-s)-a(t-s)\big)(N_s-as)=$$
$$=(N_s-as)^2-bs+(\lambda-b)(t-s)+2(N_s-as)(t-s)(\lambda-a)=$$
$$=X_s^1+I_1+I_2.$$

Далее, если $I_1=I_2=0$, то мартингальное свойство выполняется, и значит, $\lambda=b$ и $\lambda=a$. В частности, для $1=\lambda=b=a$.

Во втором случае мы имеем полностью аналогичную цепочку рассуждений: N_t-t - мартингал и, значит, bN_t-bt – также мартингал. Заметим, что $X_t^2=X_t^1-b(N_t-t)$. Следовательно, X^2 – мартингал как сумма двух мартингалов.

5. Пусть процесс цен акций $(S_t)_{t\geq 0}$ следует модели Блэка и Шоулса с начальным значением $S_0 = 100$, нормой доходности $\mu = 0$ и волатильностью $\sigma = 0.8$. Найти вероятность того, что цена акции S_1 превысит 120.

Решение:

Используя экспоненциальное представление цены акции в модели Блэка и Шоулса, имеем, что

$$P(S_1 > 120) = P\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_1} > 120\right) = P\left(100 \cdot e^{-\frac{(0.8)^2}{2} + 0.8W_1} > 120\right) =$$

$$= P(e^{-0.32+0.8W_1} > 1.2) = P(-0.32 + 0.8W_1 > 0.18232)$$

$$= P(W_1 > 0.6279) = 1 - \Phi(0.6279)\ \big(\text{поскольку } W_1 \sim N(0,1)\big),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy$.

Здесь можно использовать таблицы квантилей нормального распределения и определить $\Phi(0.6279)$. Однако можно воспользоваться следующей полезной аппроксимацией нормального распределения:

$$\Phi(x) = 1 - \varphi(x) \sum_{i=1}^{5} c_i k^i \text{ для } x \geq 0\,,$$

и равенством $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ для отрицательных x, где

$$k = \frac{1}{1+0.2316419x},\ c_1 = 0.319381530,\ c_2 = -0.356563782,$$

$c_3 = 1.781477937, c_4 = -1.821255978, c_5 = 1.330274429$
(см. Ruey S. Tsay, Analysis of Financial Time Series (2002), стр. 253) и найти

$$\Phi(0.6279) = 1 - \varphi(0.6279) \textstyle\sum_1^5 c_i k^i = 1 - \varphi(0.32757) \sum_1^5 c_i k^i = 0.73496.$$

Следовательно, $P(S_1 > 120) = 0.26504 \cong 26\%$.

6. Пусть цены акций следуют модели $S_1 = S_0 \exp(R_1)$, где возврат R_1 является нормально распределенной случайной величиной with параметрами среднего и дисперсии $\mu = 0.9$ и $\sigma^2 = 0.64$. Вычислить $VaR(R_1)$.

Решение:

По определению VaR и используя нормальность распределения с заданными параметрами, имеем, что

$$0.05 = P\big(R_1 < VaR_{0.05}(R_1)\big) = P\left(\frac{R_1 - 0.9}{\sqrt{0.64}} \leq \frac{VaR_{0.05}(R_1) - 0.9}{\sqrt{0.64}}\right) \text{ и}$$

$$R_1 \sim N(0.9, 0.64), \frac{R_1 - 0.9}{\sqrt{0.64}} \sim N(0,1).$$

Используя таблицы квантилей нормального распределения, находим, что $\frac{VaR_{0.05}(R_1) - 0.9}{0.8} = -1.645$. Следовательно, $VaR_{0.05}(R_1) = -1.645 \cdot 0.8 + 0.9 = -0.416$ и мы можем с 95%-й вероятностью можем утверждать, что падение цены акции в момент $t = 1$ произойдет на 41.6%.

7. Предположим, что логарифмические возвраты акций R_t принимают при $t = 0, 1, \dots, 9$ *значения:*
$0.0016;\ -0.0018;\ -0.0050; 0.0050;\ -0.0025; 0.0012;\ -0.0012;\ -0.0060; 0.0080; 0.0018.$

Предполагая $R \sim N(m, \sigma^2)$, оценить параметры модели и найти $VaR_{0.05}(R)$
.

Решение:

Применяя стандартные формулы для оценивания среднего и дисперсии $\widehat{m} = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} R_i$ and $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=0}^{9}(R_i - \widehat{m})^2}$, находим $\widehat{m} = 0.00011$ и $\hat{\sigma} = 0.0043211$.

Далее, $P\big(R < VaR_{0.05}(R)\big) = P\left(\frac{R-m}{\sigma} \le \frac{VaR_{0.05}(R)-m}{\sigma}\right) = 0.05$ и

$$\frac{R-m}{\sigma} \sim N(0,1), \frac{VaR_{0.05}(R)-m}{\sigma} = -1.645$$

согласно таблиц нормальных чисел.

Наконец, $VaR_{0.05}(R) = m - 1.645\sigma = 0.007$, и мы с 95% уровнем доверия можем утверждать, что потери составят по крайней мере 0.07%.

8. Пусть $(W_t)_{t \ge 0}$ – Винеровский процесс. Используя формулу Ито, найти стохастический дифференциал следующего случайного процесса $X_t = \sin(t^2 W_t)$. Что можно сказать о мартингальном свойстве этого процесса?

Решение:

Обозначим $f(t, W_t) = \sin(t^2 W_t)$. По формуле Ито находим, что стохастический дифференциал этого процесса имеет вид:

$$dX_t = f_t' dt + f_{W_t}' dW_t + \frac{1}{2} f_{W_t W_t}''(dW_t)^2 =$$
$$= \cos(t^2 W_t)\, 2W_t t dt + \cos(t^2 W_t)\, t^2 dW_t + \frac{1}{2}(-\sin(t^2 W_t)) t^2 t^2 (dW_t)^2 =$$
$$= \left[2tW_t \cos(t^2 W_t) - \frac{1}{2} t^4 \sin(t^2 W_t)\right] dt + t^2 \cos(t^2 W_t)\, dW_t.$$

Поскольку в вышеприведенной формуле член в скобках не равен нулю, то можно утверждать, что процесс X_t не может быть мартингалом.

9. Пусть (W_t) – Винеровский процесс. Применяя формулу Ито, вывести стохастические дифференциальные уравнения для следующих процессов:

$$X_t = W_t^8, \;\; Y_t = t^4 W_t.$$

Что можно сказать о мартингальном свойстве указанных процессов?

Решение: По формуле Ито находим, что

$$X_t = F(t, W_t) = W_t^8 \Longrightarrow dX_t = \left(F_t' + \frac{1}{2}F_{WW}''\right)dt + F_W' dW_t =$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2}8 \cdot 7 \cdot W_t^6\right)dt + 8W_t^7 dW_t.$$

Таким образом, $28W_t^6 \neq 0$ и, значит, X_t не может быть мартингалом. Аналогично,

$$Y_t = F(t, W_t) = t^4 W_t \Longrightarrow dY_t = \left(F_t' + \tfrac{1}{2}F_{WW}''\right)dt + F_W' dW_t =$$

$$(4t^3 W_t + 0)dt + t^4 dW_t = 4t^3 W_t dt + t^4 dW_t.$$

Заметим, что $4t^3 W_t \neq 0$ и потому Y_t – не мартингал.

10. Пусть модель Блэка и Шоулса определяется параметрами $r = 0.04, S_0 = 100, \mu = 0.08, \sigma = 0.4$. Найти цену опциона покупателя с контрактными параметрами $K = 90$ и $T = \frac{108}{365}$.

Решение:

В соответствии с формулой Блэка и Шоулса находим, что

$$\mathbb{C}_T^{BS} = S_0 \Phi(y_+) - Ke^{-rT}\Phi(y_-)$$

$$y_+ = \frac{\ln\dfrac{S_0}{K} + T\left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\dfrac{100}{90} + \dfrac{108}{365}\left(0.04 + \dfrac{(0.04)^2}{2}\right)}{0.4\sqrt{\dfrac{108}{365}}} = 0.64742$$

$$y_- = y_+ - \sigma\sqrt{T} = 0.64742 - 0.4\sqrt{\frac{108}{365}} = 0.42984.$$

Из таблиц нормальных чисел находим, что $\Phi(0.64742) = 0.74131$ и $\Phi(0.42984) = 0.66634$. Таким образом,

$$\mathbb{C}_T^{BS} = 100 \cdot 0.74131 - 90\exp\left(-0.04 \cdot \frac{108}{365}\right) \cdot 0.66634 = 14.87.$$

11. Предполагая, что рынок определяется моделью Блэка и Шоулса со стохастической волатильностью и используя параметры Задачи 10 и $\Delta\sigma^2 =$0.05, найти цену опциона покупателя.

Решение:

Для модели Блэка и Шоулса со стохастической волатильностью цена опциона покупателя определяется формулой

$$\mathbb{C}_T = \mathbb{C}_T^{BS} + \frac{K}{2}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\sigma\sqrt{T}\varphi(y_-),$$

где φ – плотность стандартного нормального распределения. Таким образом, мы имеем, что $\mathbb{C}_T^{BS} = 14.87$, $y_- = 0.42984$,

$$\varphi(y_-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y_-)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{0.42984^2}{2}\right\} = 0.36374,$$

И, следовательно, $\mathbb{C}_T = 14.87 + \frac{90}{2}\frac{0.05}{0.4^2}0.4\sqrt{\frac{108}{365}}0.36374 = 15.98.$

12. Найти квантильную цену опциона покупателя в рамках модели Задачи 10, предполагая уровень финансового риска $\varepsilon = 0.05$ и $\varepsilon = 0.01$ На этой основе сделать заключение о зависимости цены от уровня риска.

Решение:

Используя параметры модели рынка, находим, что $\frac{\mu - r}{\sigma^2} = \frac{0.08-0.04}{(0.04)^2} = 0.25 < 1$. Далее,

$$d_0 = \frac{\ln\frac{K}{S_0} - T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{90}{100} - \frac{108}{365}\left(0.04 - \frac{0.4^2}{2}\right)}{0.4\sqrt{\frac{108}{365}}} = -0.42984.$$

Для $\varepsilon = 0.05$ мы имеем

$$b = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \frac{\mu - r}{\sigma}T = \sqrt{\frac{108}{365}}\Phi^{-1}(1-0.05) + \frac{0.08-0.04}{0.4}\cdot\frac{108}{365} = 0.9244$$

Тогда квантильная цена определяется следующим образом:

$$X_0 = S_0\left[\Phi\left(\sigma\sqrt{T} - d_0\right) - \Phi\left(\sigma\sqrt{T} - \frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right] - Ke^{-rT}\left[\Phi(-d_0) - \Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right] =$$

$$= 100[\Phi(0.64742) - \Phi(-1.4818)]$$

$$- 90e^{-0.04\cdot\frac{108}{365}}[\Phi(0.42984) - \Phi(-1.6994)] = 11.92.$$

Значит, на 95%-м уровне риска рациональная цена опциона равна 11.92.

Для $\varepsilon = 0.01$ мы имеем

$b = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \frac{\mu - r}{\sigma}T = \sqrt{\frac{108}{365}}\Phi^{-1}(1-0.01) + \frac{0.08-0.04}{0.4} - \frac{108}{365} = 1.2943$, и квантильная цена вычисляется следующим образом:

$$X_0 = 100\cdot[\Phi(0.64742) - \Phi(-2.16183)]$$

$$- 90e^{-0.04\cdot\frac{108}{365}}[\Phi(0.42984) - \Phi(-2.3794)] = 14.11.$$

Таким образом, предполагая больший риск, мы можем уменьшить цену опциона.

13. Найти квантильную цену опциона покупателя в модели Блэка и Шоулса с параметрами $r = 0.05, S_0 = 100, \mu = 0.15, \sigma = 0.8, K = 110, T = \frac{108}{365}$, предполагая уровень финансового риска $\varepsilon = 0.05$.

Решение:

Используя формулу Блэка и Шоулса, находим

$$\mathbb{C}_{BS} = 100\Phi\left(\frac{\ln\frac{100}{110}+\frac{108}{365}\left(0.05+\frac{0.8^2}{2}\right)}{0.8\sqrt{\frac{108}{356}}}\right) - 110e^{-0.05\cdot\frac{108}{365}}\Phi\left(\frac{\ln\frac{100}{110}+\frac{108}{365}\left(0.05-\frac{0.8^2}{2}\right)}{0.8\sqrt{\frac{108}{356}}}\right) =$$

$$100\Phi(0.0326) - 110e^{-0.0148}\Phi(-0.4026) = 14.06.$$

Далее мы получаем $\frac{\mu-r}{\sigma} = \frac{0.15-0.05}{0.8^2} = 0.156 < 1$. В этом случае мы имеем, что

$$b = \sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + \frac{\mu-r}{\sigma}T = \sqrt{\frac{108}{365}}\Phi^{-1}(0.95) + \frac{0.15-0.05}{0.8}\cdot\frac{108}{365} = 0.9318\,,$$

$$d_0 = \frac{\ln\frac{110}{100}-\frac{108}{365}\left(0.05-\frac{(0.8)^2}{2}\right)}{0.8\sqrt{\frac{108}{365}}} = 0.4026.$$

Следовательно, 95%-я квантильная цена вычисляется следующим образом:

$$\mathbb{C}_{quantile} = S_0\left[\Phi\left(\sigma\sqrt{T}-d_0\right) - \Phi\left(\sigma\sqrt{T}-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right]$$

$$-Ke^{-rT}\left[\Phi(-d_0) - \Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right] =$$

$$= 100\left[\Phi\left(0.8\sqrt{\frac{108}{365}} - 0.4026\right) - \Phi\left(0.8\sqrt{\frac{108}{365}} - \frac{0.9318}{\sqrt{\frac{108}{365}}}\right)\right] -$$

$$-110e^{-0.05\cdot\frac{108}{365}}\left[\Phi(-0.4026) - \Phi\left(-\frac{0.9318}{\sqrt{\frac{108}{365}}}\right)\right]$$

$$= 100(0.5129 - 0.10065) - 110e^{-0.05\cdot\frac{108}{365}}(0.34362 - 0.04336) = 8.69\,.$$

Отметим также, что $\frac{8.69}{14.06} \cong 62\%$ дает процентную составляющую квантильной цены в цене Блэка и Шоулса.

14. Предполагая, что модель рынка как в Задаче 13 и со стохастической волатильностью с $\Delta\sigma^2 = 0.4$, вычислить цену опциона покупателя.

Решение:

В соответствии с Задачей 13 мы имеем

$$y_- = \frac{\ln\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = -0.4026 \text{ и } \varphi(y_-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_-)^2}{2}} = 0.36267,$$

and $\mathbb{C}_{BS} = 14.06$. Поскольку $\Delta\sigma^2 \ll \sigma^2$, мы находим требуемую цену:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{BS} + \frac{K}{2}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\sigma\sqrt{T}\varphi(y_-) = 14.06 + \frac{110}{2}\cdot\frac{0.4}{0.8^2}\cdot 0.8\cdot\sqrt{\frac{108}{365}}\cdot 0.36267 \cong 19.48.$$

15. Рассмотрим следующее функциональное преобразование вероятностной меры P_T в другую меру $dP_T^* = \exp\{aW_T + bT + c\}dP_T$, где W – Винеровский процесс. При каких значениях параметров $a, b,$ and c это преобразование приводит к вероятностной мере?

Решение:

Прежде всего, вычислим среднее $EZ_T = Ee^{aW_T+bT+c}$, которое должно быть равным 1. Мы имеем, что $EZ_T = e^{bT+c}\cdot Ee^{aW_T} = e^{bT+c}\cdot e^{\frac{1}{2}a^2T} = e^{bT+\frac{1}{2}a^2T+c} = 1 = e^0$, и следовательно, $\frac{1}{2}a^2T + bT + c = 0$. Поскольку T произвольно, то необходимо положить $c = 0$, что приводит к нужному нам соотношению $b = -\frac{1}{2}a^2$.

16. Рассмотрим полиномиальное преобразование Винеровского процесса W: $P_n(t)Q_m(W_t)$, где P_n и Q_m *полиномы степени n и m* соответственно. Выяснить условия, при которых такое преобразование приводит к мартингалу.

Решение:

Обозначим $f(t, W_t) = P_n(t)Q_m(W_t)$ и заметим, что это гладкая функция. Тогда можно применить формулу Ито и легко определить, что $f(t, W_t)$ – мартингал, если $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. Вычислим соответствующие производные

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q_m(W_t)(a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}) = Q_mP_n'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P_n(t)(b_1 + 2b_2W_t + \cdots + mb_mW_t^{m-1}) = P_mQ_n'$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(P_n(t)(b_1 + 2b_2W_t + \cdots + mb_mW_t^{m-1})\Big) =$$

$$= P_n(t)(2b_2 + 3\cdot 2\cdot b_3W_t + \cdots + m(m-1)b_mW_t^{m-1}).$$

Тогда мы получаем, что

$$Q_m(W_t)P_n'(t) + \frac{1}{2}P_n(t)Q_m''(W_t) = 0.$$

Из полученного соотношения вытекает, в частности, что при $m = 0, m = 1 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow f(t, W_t) = a_0b_0 + a_0b_1W_t$ - мартингал.

17. Найти условное математическое ожидание $E(\xi|\eta)$ для двух случайных величин $\xi(\omega) = 8\omega^3$ и

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, \omega \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

на вероятностном пространстве $([0,1], \mathcal{B}(0,1), mes)$.

Решение:

Обозначим $D_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $D_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, где $\eta = 0$ and $\eta = 1$ correspondently. Заметим, что $\mathcal{F}^\eta = \sigma\{\eta\} = \sigma\{D_0, D_1\}$ и найдем

$$E(\xi|D_0) = \frac{E\left(\xi I_{D_0}\right)}{P(D_0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} 8x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$E(\xi|D_1) = \frac{E\left(\xi I_{D_1}\right)}{P(D_1)} = \frac{1}{1/2} \int_{\frac{1}{2}}^{1} 8x^3 dx = \frac{15}{4}.$$

Это приводит к нужному выражению для $E(\xi|\eta) = E(\xi|\mathcal{F}^\eta) = \frac{1}{4} I_{D_0} + \frac{15}{4} I_{D_1}$

18. Пусть $(\xi_n)_{n\geq 1}$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $\left(-\frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{4}{3}\right)$ с вероятностями $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$ соответственноо. Положим $X_n = \sum_1^n \xi_k$. Необходимо исследовать мартингальное свойство новой последовательности относительно фильтрации $F_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Если окажется, что это не мартингал, то показать, как преобразовать (X_n) в мартингал (Y_n).

Решение:

Прежде всего, найдем среднее

$$E\xi_k = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \neq 0\,.$$

И найдем, что (X_n) не является мартингалом. Рассмотрим $Y_n = \sum_1^n \left(\xi_k - \frac{1}{12}\right)$ и найдем, что $E(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Y_{n-1} + E\left(\xi_n - \frac{1}{12}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) = Y_{n-1}$.

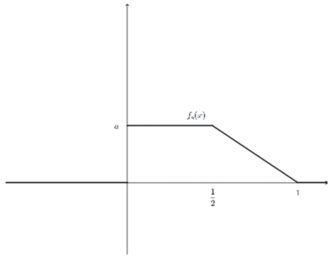
Еще один способ состоит в том, чтобы рассмотреть другое распределение:

$$\xi_n = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & p = \frac{4}{5} \\ \frac{4}{3}, & q = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Тогда $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} + E\xi_n = X_{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = X_{n-1}.$

19. Пусть $(X_n)_{n\geq 1}$ – последовательность независимых неотрицательных случайных величин с плотностью

$$f_a(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \in [0,1) \\ -ax + 2a, & x \in [1,2] \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$



Образуем стохастические последовательности $Y_n = \sum_1^n X_k$ и $Z_n = \prod_1^n X_k$. Существует ли положительный параметр a такой, что (Y_n) and/or (Z_n) становятся мартингалами относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$?

Указание: Прежде всего, необходимо использовать тот факт, что

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(x)dx = S_\Delta + S_\blacksquare = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a \Rightarrow a = \frac{4}{3},$$

а далее вычислить $EX_k = a \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} a(2-x)dx = \frac{4}{3}$ и т.д.

20. Пусть $(X_n)_{n\geq 1}$ – последовательность неотрицательных случайных величин со следующей плотностью:

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a\sin(bx), & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим новую стохастическую последовательность $Z_n = \prod_1^n X_k$. Существуют ли такие положительные параметры a и b, что (Z_n) – мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

Указание:

Первое условие для определения параметров a и b следует из соотношения для плотности $1 = \int_0^{\pi} a\sin(bx)\,dx = \frac{a}{b}(1-\cos b\pi)$.

Второе условие $EX_k = 1$ следует из обеспечения мартингальности Z_n:

$$1 = EX_k = -\frac{a}{b}\pi\cos(\pi b) + \frac{a}{b^2}\sin(b\pi).$$

Система этих условий, по-видимому, не имеет решений.

21. Доказать, что для каждой измеримой функции $\varphi(\eta)$ имеет место неравенство

$$E\big(\xi - \varphi(\eta)\big)^2 \geq E\big(\xi - E(\xi|\eta)\big)^2,$$

т. е. $E(\xi|\eta)$ представляет наилучшую в среднем квадратическом оценку на основе наблюдения за случайной величиной η.

Решение:

Используя свойства условных математических ожиданий, имеем, что

$$E(\xi-\varphi(\eta))^2 = E([\xi - E(\xi|\eta)] + [E(\xi|\eta) - \varphi(\eta)])^2$$

$$= E(\xi - E(\xi|\eta))^2 + E(E(\xi|\eta) - \varphi(\eta))^2$$

$$+ 2E\{[\xi - E(\xi|\eta)] \cdot [E(\xi|\eta) - \varphi(\eta)]\} =$$

$$= E(\xi - E(\xi|\eta))^2 + E(E(\xi|\eta) - \varphi(\eta))^2 + 2EE\{[\quad] \cdot [\quad]|\mathcal{F}^\eta\}$$

$$=$$

$$= E(\xi - E(\xi|\eta))^2 + E(E(\xi|\eta) - \varphi(\eta))^2$$

$$+ 2E\{[E(\xi|\eta) - \varphi(\eta)] \cdot E(\xi - E(\xi|\eta)|\mathcal{F}^\eta)\} =$$

$$= E(\xi - E(\xi|\eta))^2 + E(E(\xi|\eta) - \varphi(\eta))^2 \geq E(\xi - E(\xi|\eta))^2.$$

22. Пусть совместное распределение случайных величин задается следующей таблицей

η/ξ	–1	0	1
1	0.1	0	0.3
2	0.4	0.2	0

Найти $E(\xi|\eta)$.

Решение:

Для нахождения $E(\xi|\eta)$ найдем маржинальные распределения

$$P(\xi=-1)=0.5; P(\xi=0)=0.2; P(\xi=1)=0.3$$

$$P(\eta=1)=0.4; P(\eta=2)=0.6$$

и поэтому $E\xi = -0.5+0.3 = 0.2$.

Следовательно,

$$P(\xi=-1)=0.5; P(\xi=0)=0.2; P(\xi=1)=0.3$$

и потому, $E(\xi|\eta) = \frac{1}{2}$ на $\{\eta=1\}$ и $-\frac{2}{3}$ на $\{\eta=2\}$ Заметим также, что

$$EE(\xi|\eta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10} - \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10} = -0.2 = E\xi.$$

Заметим, что $E(\xi|\eta)$ можно найти, используя предыдущую задачу, когда условное ожидание ищется в виде $a \cdot I_{\{\eta=1\}} + b \cdot I_{\{\eta=2\}}$, а параметры определяются из минимизации $E(\xi - E(\xi|\eta))^2 \to \min$. Этот путь приводит к тому же ответу для $E(\xi|\eta) = \frac{1}{2}\cdot I_{\{\eta=1\}} - \frac{2}{3}\cdot I_{\{\eta=2\}}$.

23. Доказать, что любой мартингал на стандартном стохастическом базисе допускает непрерывную справа модификацию.

Решение:

Для субмартингала X с непрерывным справа математическим ожиданием EX_t находим, что

$$EX_t \cdot I_A \le EX_{t_+} I_A = E \lim_{s\downarrow t} X_s \cdot I_A = \lim_{s\downarrow t} E(X_s \cdot I_A) = EX_t \cdot I_A, A \in \mathcal{F}_t.$$

Пусть $Y_t = \left(X_{t_+} \middle| \mathcal{F}_t\right)$и найдем для $s > t, B \in \mathcal{F}_t$, *что*

$$E \lim_{s\downarrow t} Y_s I_B = \lim_{s\downarrow t} EX_{s_+} \cdot I_B = \lim_{s\downarrow t} EX_s \cdot I_B = EX_{t_+} \cdot I_B.$$

Далее, $\lim\limits_{s\downarrow t} Y_s - \mathcal{F}_{t_+} = \mathcal{F}_t$ – измерим и $\lim\limits_{s\downarrow t} Y_s = E\left(X_{t_+} \middle| \mathcal{F}_t\right) = Y_t$ *(п.н.)*, и поэтому $X_t = Y_t\ (a.s.)$.

В частности, для мартингала $X_t = M_t$ его $EM_t = EM_0 = const$.

24. Рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения $dX_t^i = f^i\left(X_t^i\right)dt + dW_t$, где W – Винеровский процесс, $X_0^i = x, i = 0, 1$. Предполагая, что $f'(y) > f^2(y)$ для всех $y \in R'$, доказать $X_t' \ge X_t^2$ *(п.н.)*. Это утверждение носит название теоремы сравнения для решений стохастических дифференциальных уравнений.

Решение:

Введем следующие процессы Ито X^α со сносом $f^\alpha(x) = f^0(x) + \alpha[f'(x) - f^0(x)], \alpha \in [0, 1]$ и проверим, что $X^\alpha(t)$ – дифференцируемая функция по параметру α и $P\left\{\frac{\partial X^\alpha(t)}{\partial \alpha} > 0\right\} = 1$.

Очевидно, что $P\left(\max\limits_t \lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \left|X_t^\alpha - X_t^0\right| > 0\right) = 0$ и $P\left(\max\limits_t \lim\limits_{\alpha\uparrow 1} |X_t^\alpha - X_t'| > 0\right) = 0$. Более того,

$$\frac{\partial X_t^\alpha}{\partial \alpha} = \int\limits_0^t \left\{f'(X_s^\alpha) - f^0(X_s^\alpha) + \left[\frac{f^0(X_s^\alpha)}{\partial x} + \alpha\left[\frac{\partial f'(X_s^\alpha)}{\partial x} - \frac{\partial f^0(X_s^\alpha)}{\partial x}\right]\frac{\partial X_s^\alpha}{\partial \alpha}\right]\right\} ds$$

$$= \int\limits_0^t [f'(X_s^\alpha) - f^0(X_s^\alpha)] e^{\int_s^\delta \left[\left[\frac{\partial f^0(X_u^d)}{\partial x}\right] + \alpha\left[\frac{\partial f'(X_s^\alpha)}{\partial x} - \frac{\partial f^0(X_s^\alpha)}{\partial x}\right]\right] du} ds > 0.$$

Следовательно, $P\left\{\frac{\partial X_t^\alpha}{\partial \alpha} \ge 0\right\} = 1$ для всех $t \ge 0$, что гарантирует монотонность по α, *и значит, (п.н.)* $X_t' - X_t^0 = \int_0^1 \frac{\partial X_t^\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \ge 0$ для всех $t \ge 0$.

25. Рассмотрим одношаговый биномиальный $(B,\ S)$-рынок с параметрами $B_0=1$, $S_0 = 100$, $r = 0.2$.

$$S_1 = \begin{cases} 150 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 80 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}.$$

Предположим, что инвестор имеет начальный капитал X=200. Цель инвестора состоит в нахождении оптимальной инвестиционной стратегии, максимизирующей ожидаемую логарифмическую полезность терминального капитала. Найти описанную оптимальную стратегию и ее терминальный капитал.

Решение:

Найдем сначала доходность $\rho = \begin{cases} 0.5 \\ -0.2 \end{cases}$ и ее среднее $E(\rho) = 0.5 \cdot 0.7 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.29$, что позволяет далее вычислить пропорцию рискового капитала в портфеле α по формуле:

$$\alpha = \frac{(1+r)(\mu-r)}{(b-r)(r-a)} = \frac{1.2(0.29-0.2)}{(0.5-0.2)(0.2+0.2)} = 0.9.$$

Используя соотношение $\alpha^* = \gamma^* \frac{S_0}{X_0^{\pi^*}}$, получим, что $\gamma^* = \alpha^* \cdot 2 = 1.8$.

Поскольку $\pi^* \in SF, \beta^* + \gamma^* \cdot 200 = X_0^{\pi^*} = 200$, то $\beta^* = 20$.

Наконец, определяем терминальный капитал:

$$X_1^{\pi^*} = \begin{cases} 20 \cdot 1.2 + 1.8 \cdot 150 = 294 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 20 \cdot 1.2 + 1.8 \cdot 80 = 168 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}.$$

26. Рассмотрим одно-шаговый биномиальный (B, S)-рынок с параметрами $B_0 = 1$, $S_0 = 100$, $r = 0.2$, и доходностью

$$\rho_1 = \begin{cases} 0.8 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ -0.6 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}.$$

Рассмотрим опцион с функцией выплат $f_1 = \min\{110, S_1\}$. Необходимо найти:

a) эвристическую цену f_1;
b) справедливую цену, используя мартингальную вероятность;
c) арбитражные потери/доходы, если в качестве цены контракта принята его эвристическая цена.

Решение:

a) $E\left(\frac{f_1}{B_1}\right) = \frac{110 \cdot 0.7 + 40 \cdot 0.3}{1.1} = 80.91.$

b) Найдем мартингальную вероятность $p^* = \frac{0.1 + 0.6}{0.8 + 0.6} = 0.5$, и далее справедливую цену $E^*\left(\frac{f_1}{B_1}\right) = \frac{110(0.5) + 40(0.5)}{1.1} = 68.18.$

c) Тогда арбитражные потери/доходы равны 80.91-68.18=12.73.

27. Рассмотрим одно-шаговый биномиальный (B, S)-рынок с параметрами $B_0 = 1$, $S_0 = 100$, $r = 0.2$ и

$$S_1 = \begin{cases} 150, & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 80, & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}.$$

Инвестор оптимизирует свою стратегию, максимизируя ожидаемую логарифмическую полезность терминального капитала стратегии. Рассмотрим опцион на этом рынке с функцией выплат $f_1 = \max(110, S_1) - \min(110, S_1)$. Можно ли рассматривать оптимальную инвестиционную стратегию как хеджирующую стратегию, воспроизводящую функцию выплат этого опциона?

Решение:

Сначала найдем, что $\rho = \begin{cases} 0.5 \\ -0.2 \end{cases}$,

$$f_1 = \min\{110, S_1\} - \min\{110, S_1\} = \begin{cases} 150-110 \\ 110-80 \end{cases} = \begin{cases} 40 \\ 30 \end{cases}$$

.

Определяя мартингальную вероятность $p^* = \frac{0.2+0.2}{0.5+0.2} = \frac{4}{7}$, находим справедливую цену $E^*\left(\frac{f_1}{B_1}\right) = \frac{40 \cdot 4/7 + 30 \cdot (1-4/7)}{1.2} = 29.7619$. Принимая во внимание, что

$\mu = E(\rho) = 0.5(0.7) + (-0.2)(0.3) = 0.29$,

$$\alpha^* = \frac{(1+r)(\mu - r)}{(r-\alpha)(b-r)} = \frac{(1+0.2)(0.29-0.2)}{(0.2+0.2)(0.5-0.2)} = 0.9 \text{ и } \alpha^* = 0.9 = \frac{\gamma^* S_0}{X_0^{\pi^*}},$$

находим $\gamma^* = \frac{0.9X_0^{\pi^*}}{S_0} = \frac{0.9(29.7619)}{100}$ и ее численное значение

$\gamma^* = \frac{1}{B_0}(X_0^{\pi^*} - \gamma S_0) = 1(29.7619 - 0.2679(100)) = 2.9762.$

Сравнивая терминальный капитал оптимальной стратегии $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ со значением выплаты по опциону f_1, находим, что

$$X_1^{\pi^*} = \gamma^* S_1 + \beta^* B_1 = \begin{cases} 0.2679(150) + 2.9762(1.2) \\ 0.2679(80) + 2.9762(1.2) \end{cases} = \begin{cases} 43.76 \\ 25 \end{cases} \neq f_1 = \begin{cases} 40 \\ 30 \end{cases}$$

Таким образом, репликация опциона невозможна с помощью найденной инвестиционной стратегии.

28. Рассмотрим одношаговый биномиальный (B, S)-рынок с параметрами $B_0 = 1$, $S_0 = \pi/2$, $r = 0.1$, и доходность акции принимает значения $a = -1/3$ и $b = 0.5$. Найти:

a) риск-нейтральную вероятность,
b) справедливую цену с выплатами $f = |\sin S_1$.

Решение:

Мартингальная вероятность определяется формулой:

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0.1+1/3}{0.5+1/3} = 0.52.$$

Заметим, что $f = |\sin S_1| = \begin{cases} 0.7071 & p = 0.52 \\ 0.8660 & q = 0.48 \end{cases}$ и поэтому справедливая цена равна:

$$E^*\left(\frac{f_1}{B_1}\right) = \frac{0.7071 \cdot 0.52 + 0.8660 \cdot 0.48}{1.1} = 0.7122 \cdot$$

29. Рассмотрим двухшаговую биномиальную модель (B, S) – рынка с параметрами $B_0 = 1$, $S_0 = \pi$, $r = 0.1$, и с доходностями ρ_1 и ρ_2, равными

$$\begin{cases} 0.5 \text{ с вероятностью } 0.6 \\ -0.5 \text{ с вероятностью } 0.4 \end{cases}.$$

Рассмотрим опцион с функцией выплат $f_2 = |\cos S_2|$. Найти:

a) эвристическую цену f_2;
b) справедливую цену опциона;
c) арбитражные потери/доходы, если взята в качестве опционной цены эвристическая цена.

Решение:
Прежде всего, найдем терминальные значения цены акции

$$S_2 = \begin{cases} \frac{9}{4}\pi \text{ с вероятностью } 0.36 \\ \frac{3}{4}\pi \text{ с вероятностью } 0.48. \\ \frac{1}{4}\pi \text{ с вероятностью } 0.16 \end{cases}$$

Тогда эвристическая, или наивная, цена опциона равна

$$C^{naive}(f) = E\left(\frac{f_2}{B_2}\right) = \frac{0.36\left|\cos(\frac{9}{4}\pi)\right| + 0.48\left|\cos(\frac{3}{4}\pi)\right| + 0.16\left|\cos(\frac{1}{4}\pi)\right|}{1.1} = \frac{1}{1.1 \cdot \sqrt{2}} = 0.6428.$$

Найдем теперь мартингальную вероятность p^* из соотношения: $p + (-0.5)(1-p)=0.1$, $p = 0.6$. Поскольку мартингальная вероятность совпадает с исходной, то $C = C^{naive} = 0.6428$ и, следовательно, арбитражные потери и доходы отсутствуют.

30. Рассмотрим модель Блэка и Шоулса (B, S)-рынка. Сравнить оптимальную инвестиционную стратегию с минимальным хеджем для Европейского опциона покупателя с функцией выплат $f_T = (S_T - K)^+$.

Решение:
Пропорция рискового капитала оптимального инвестиционного портфеля дается формулой:

$$\alpha^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

Заметим, что если $\mu = r$, то $\gamma_t^* = 0$ для всех $t \le T$. С другой стороны, для минимального хеджа мы имеем из формулы Блэка и Шоулса, что

$$\gamma_t = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

В частности, если $S_0 > K$, то

$$\gamma_0 = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) > \frac{1}{2} > \gamma_0^* = 0,$$

что свидетельствует о несовпадении стратегий минимального хеджирования и оптимального инвестирования.

31. В рамках модели Блэка и Шоулса (B, S) –рынка рассмотрим инвестиционную стратегию π с начальным капиталом x. Оценить асимптотическую доходность стратегии π:

$$\lim_{T\to\infty} \sup \frac{1}{T} \ln E\left(X_T^\pi(x)\right)^\delta, \delta \in (0,1].$$

Решение:

Вначале заметим, согласно неравенству Ляпунова, что

$$E\left(X_T^\pi(x)\right)^\delta \le \left(EX_T^\pi(x)\right)^\delta.$$

Пусть начальная мера P является мартингальной, а стратегия π – самофинансируемой. Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{T}\ln E\left(X_T^\pi(x)\right)^\delta \le \delta \lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{T}\ln E\left(X_T^\pi(x)\right) = \delta \lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{T}\ln\left[E\left(\frac{X_T^\pi(x)}{B_T}\right)B_T\right] =$$

$$= \delta \lim_{T\to\infty}\sup \frac{1}{T}\left(\ln a + \ln B_T\right) = \delta \lim_{T\to\infty}\sup \frac{rT}{T} = \delta r,$$

где a – некоторая положительная константа.

Далее, если инвестирование происходит только в безрисковый актив *B*, то $X_T^\pi(x) = xB_0e^{rT}$ и $\ln E\left(X_T^\pi(x)\right)^\delta = \ln\left[x^\delta B_0^\delta e^{\delta Tr}\right] = b + \delta Tr$ для некоторой постоянной b.

Таким образом, $\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T} ln\, E\left(X_T^{\pi}(x)\right)^{\delta} \ge \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}[b+\delta Tr]=\delta r$, и следовательно,

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E\left(X_T^{\pi}(x)\right)^{\delta}=\delta r,$$

при этом предел не зависит от начального капитала x.

32. Рассмотрим одношаговую и двухшаговую модели биномиального (B, S) – рынка с $B_0 = 1$, $S_0 = 120$, $r = 10\%$. Доходность рискового актива определяется соотношением:

$$\rho = \begin{cases} 0.6 & \text{с вероятностью } 0.7, \\ -0.6 & \text{с вероятностью } 0.3. \end{cases}$$

Определим два опциона с выплатами $f_i = \max(110, S_i) - \min\{110, S_i\}, i = 1,2$. В обоих случаях требуется найти эвристическую и справедливую цены. Возможно ли реплицирование этих опционов с помощью стратегии инвестирования, максимизирующей ожидаемую логарифмическую полезность?

Решение:

Вычислим значения цены акции при движении вверх и вниз:

$$u = 1 + b = 1.6 \Rightarrow S_1^u = 1.6(120) = 192$$

$$d = 1 + a = 0.4 \Rightarrow S_1^d = dS_0 = 0.4(120) = 48,$$

и

$$S_1 = \begin{cases} 192 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 48 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}.$$

Найдем теперь мартингальную вероятность p^*:

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{0.1-(-0.6)}{0.6-(-0.6)} = \frac{7}{12}.$$

Для выплаты f мы имеем, что

$$f_i = \max(110, S_i) - \min\{110, S_i\}$$

и

$$f_u = \max(110, 192) - \min(110 - 192) = 192 - 110 = 82$$

$$f_d = \max(110, 48) - \min(110 - 48) = 110 - 48 = 62.$$

Найдем теперь эвристическую и справедливую цены:

$$\text{Эвристическая цена} = E\left(\frac{f}{1+r}\right) = \frac{82}{1.1}(0.7) + \frac{62}{1.1}(0.3) = 69.09.$$

$$\text{Справедливая цена} = E^*\left(\frac{f}{1+r}\right) = \frac{82}{1.1}\left(\frac{7}{12}\right) + \frac{62}{1.1}\left(1-\frac{7}{12}\right) = 66.97.$$

Вычисляя среднюю доходность акции,

$$\mu = E(\rho_1) = (0.6\cdot 0.7) + (-0.6\cdot 0.3) = 0.24,$$

находим, что она больше $r = 0.1$, и можно вычислить пропорцию

$$\alpha^* = \frac{(1+r)(\mu - r)}{(r-a)(b-r)} = \frac{(1+0.1)(0.24-0.1)}{\big(0.1-(-0.6)\big)(0.6-0.1)} = 0.44.$$

Определим терминальный капитал инвестиционного портфеля с $\alpha^* = 0.44$ и начальным значением $X_0^{\alpha^*} = 66.97$:

$$X_1^{\alpha^*} = X_0^{\alpha^*} + \left(rX_0^{\alpha^*} + \alpha^* X_0^{\alpha^*}(\rho_1 - r)\right)\Big|_{X_0^{\alpha^*}=66.97}.$$

Для $\rho_1 = 0.6$ имеем:

$$X_1^{\alpha^*} = 66.97 + \big(0.1(66.97) + 0.44 \cdot 66.97 \cdot (0.6-0.1)\big) = 88.40$$

Для $\rho_1 = -0.6$ имеем:

$$X_1^{\alpha^*} = 66.97 + \big(0.1(66.97) + 0.44 \cdot 66.97 \cdot (-0.6-0.1)\big) = 53.04$$

$$\cong \begin{cases} 88 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 53 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases} \neq \begin{cases} 82 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 62 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}.$$

Это показывает, что на поставленный в задаче вопрос о репликации следует ответить отрицательно.

33. Решить Задачу 32 для двухшагового (B, S) – рынка.

Решение:

Продолжая вычисления Задачи 32, находим, что:

для $S_1 = 192$

$$u = 1 + b = 1.6 \Rightarrow uS_1 = 1.6(192) = 307.2,$$
$$u = 1 + b = 1.6 \Rightarrow S_2^d = dS_1 = 0.4(192) = 76.8\,;$$

для $S_1 = 48$

$$d = 1 + a = 0.4 \Rightarrow S_2^d = uS_1 = 1.6(48) = 76.8,$$
$$d = 1 + a = 0.4 \Rightarrow S_2^d = dS_1 = 0.4(48) = 19.2.$$

Тогда имеем, что $S_2 = \begin{cases} 307.2 & \text{с вероятностью } 0.49 \\ 76.8 & \text{с вероятностью } 0.42 \\ 19.2 & \text{с вероятностью } 0.09 \end{cases}.$

Далее вычислим значения f:

$$f_i = \max(110, S_i) - \min\{110, S_i\}\,.$$

И получаем, что

$$f_1^u = \max(110, 307.2) - \min(110 - 307.2) = 307.2 - 110 = 197.2;$$

$$f_1^m = \max(110, 76.8) - \min(110 - 76.8) = 110 - 76.8 = 33.2\,;$$

$$f_1^d = \max(110, 19.2) - \min(110 - 19.2) = 110 - 19.2 = 90.8\,.$$

Вычислим теперь эвристическую и справедливую цену:

$$\text{Эвристическая цена} = E\left(\frac{f}{(1+r)^2}\right)$$

$$= \frac{197.2}{1.1^2}(0.49) + \frac{33.2}{1.1^2}(0.42) + \frac{90.8}{1.1^2}(0.09) = 98.1\,;$$

$$\text{Справедливая цена} = E^*\left(\frac{f}{(1+r)^2}\right)$$

$$= \frac{197.2}{1.1^2}\left(\frac{7}{12}\right)^2 + \frac{33.2}{1.1^2}(2)\left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{5}{12}\right) + \frac{90.8}{1.1^2}\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 81.82.$$

Найдем капитал стратегии с пропорцией α^*=0.44, начальным значением $X_0^{\alpha^*} = 81.82$ и $\rho_1 = 0.6, -0.6$:

$$X_1^{\alpha^*} = X_0^{\alpha^*} + \left(rX_0^{\alpha^*} + \alpha^* X_0^{\alpha^*}(\rho_1 - r)\right)$$

$$X_1^{\alpha^*} = \begin{cases} 107.99 & \text{с вероятностью } 0.7 \\ 64.79 & \text{с вероятностью } 0.3 \end{cases}$$

и

$$X_2^{\alpha^*} = X_1^{\alpha^*} + \left(rX_1^{\alpha^*} + \alpha^* X_0^{\alpha^*}(\rho_2 - r)\right)$$

но

$$X_2^{\alpha^*} = \begin{cases} 142.54 & \text{с вероятностью } 0.49 \\ 85.53 & \text{с вероятностью } 0.42 \\ 51.31 & \text{с вероятностью } 0.09 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 142.54 & \text{с вероятностью } 0.49 \\ 85.53 & \text{с вероятностью } 0.42 \\ 51.31 & \text{с вероятностью } 0.09 \end{cases} \neq \begin{cases} 197.2 & \text{с вероятностью } 0.49 \\ 33.2 & \text{с вероятностью } 0.42 \\ 90.8 & \text{с вероятностью } 0.09 \end{cases}.$$

Последнее неравенство свидетельствует о невозможности репликации.

34. Пусть X_t – процесс Ито

$$X_t = u + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

$b_t \geq 0$ и

$$\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$$

Доказать неравенство типа Крамера-Лундберга для вероятности разорения:

$P(\tau < \infty) < e^{-R_0 u}$, *где* R_0 – некоторая постоянная.

Решение:

Рассмотрим следующий процесс Ито:

$$R_t = R_0 + \int_0^t r_s(1) ds + \int_0^t r_s(2) dW_s,$$

где $R_0 > 0, r_t(1)$ и $r_t(2)$ будут подобраны позднее.

Введем такой процесс:

$$M_t(R) = \frac{e^{-R_t X_t}}{e^{G_t(R)}},$$

где $G_t(R) = \int\limits_0^t \left[\frac{1}{2}(X_s r_s(2) + R_s\sigma_s)^2 - X_s r_s(1) - b_s R_s - \sigma_s r_s(2)\right] ds.$

Очевидно, что $M_t(R)$ – положительный локальный мартингал, и, следовательно, супермартингал.

Применяя супермартингальное свойство вместе с теоремой Дуба, имеем, что

$$e^{-uR_0} = EM_0(R) \geq EM_{t\wedge\tau}(R) \geq E\left(\frac{M_\tau(R)}{\tau} \leq t\right) P(\tau \leq t).$$

Поскольку $X_\tau \leq 0$, по неравенству Йенсена получаем, что

$$P(\tau \leq t) \geq e^{uR_0} E^{-1}\left(\frac{e^{-G_t(R)}}{\tau} \leq t\right) \leq e^{uR_0 + E\left(\frac{G_t(R)}{\tau} \leq t\right)}.$$

Подберем теперь процесс Ито R_t такой, что $R_0 > 0$ и $G_t(R) \leq 0 \left(\text{или } E\left(\frac{G_t(R)}{\tau} \leq t\right) \leq 0\right)$, т.е. необходимо найти $R_0 > 0, r_t(1)$ и $r_t(2)$ такие, что

$$E\left(\int\limits_0^t \left[\frac{1}{2}(X_s r_s(2) + R_s\sigma_s)^2 - X_s r_s(1) - b_s R_s - \sigma_s r_s(2)\right] ds/\tau \leq t\right) \leq 0.$$

Если $\frac{b_s}{\sigma_s^2} \geq c > 0$, тогда достаточно взять $R_0 = c, r_1(s) = 0$, $r_2(s) = 0$ для получения неравенства

$$P(\tau < \infty) < e^{-cu}$$

35. Рассмотрим модели Башелье и Блэка-Шоулса с нулевой процентной ставкой:

$$dS_t^B = S_0^B \sigma\, dW_t \text{ и } dS_t^{BS} = S_t^{BS} \sigma\, dW_t.$$

Пусть $\mathbb{C}_T^B$ и $\mathbb{C}_T^{BS}$ – цены опциона покупателя в этих моделях с ценой поставки $K = S_0$.

Доказать, что
$$0 \leq \mathbb{C}_T^B - \mathbb{C}_T^{BS} \leq \frac{S_0}{12\sqrt{2\pi}} \sigma^3 T^{\frac{3}{2}} = O\left(\left(\sigma\sqrt{T}\right)^3\right).$$

Решение:

Для $K = S_0$ имеем, что

$$\mathbb{C}_T^B = \frac{S_0\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T} \text{ и} \mathbb{C}_T^{BS} = S_0\left[\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\sqrt{T}\right)\right].$$

Следовательно,

$$0 \leq \mathbb{C}_T^B - \mathbb{C}_T^{BS} = \left.\left(\frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} x - S_0\left[\Phi\left(\frac{x}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right)\right|_{x=\sigma\sqrt{T}}$$

$$\leq \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \left.\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{y^2}{2} dy\right|_{x=\sigma\sqrt{T}} = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left.\frac{x^3}{12}\right|_{x=\sigma\sqrt{T}} = \frac{S_0}{12\sqrt{2\pi}} \sigma^3 T^{\frac{3}{2}} = O\left(\left(\sigma\sqrt{T}\right)^3\right),$$

поскольку $e^y \geq 1 + y$ для всех y и, значит, $\frac{y^2}{2} \geq 1 - e^{-\frac{y^2}{2}}$ для всех y.

36. Доказать, что процесс

$$X_t = (t + W_t) \exp\left\{-\frac{t}{2} - W_t\right\}$$

является мартингалом относительно фильтрации, порождённой Винеровским процессом $W = (W_t)_{t \geq 0}$.

Указание:

Применить формулу Ито к процессу $(X_t)_{t \geq 0}$.

37. Доказать, что цена $\mathbb{C}_T$ опциона покупателя с датой исполнения T и ценой поставки K в рамках модели Блэка-Шоулса с процентной ставкой r заключена в следующих границах:

$$(S_0 - e^{-rT}K)^+ \leq \mathbb{C} \leq S_0$$

Указание:

Воспользоваться неравенством $(x - K)^+ \leq x$ для всех x, $K \geq 0$, мартингальностью $\frac{S_t}{e^{rt}}$ и неравенством Йенсена.

38. Рассмотрим в рамках модели Блэка-Шоулса платёжное обязательство $f = f(S_T)$, являющееся *гладкой* функцией цены акции. Можно ли выразить цену опциона с такой функцией выплат через цены опционов покупателя (продавца)?

Решение:

Применяя формулу Тейлора, получим, что

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdot\int_0^{\infty} (x - y)^+ f'(y)\, dy.$$

Подставим в это равенство $x = S_T$ с дальнейшим делением на e^{rT} и усреднением относительно мартингальной меры P^* и получим, что

$$\mathbb{C}_T(f) = e^{-rT} f(0) + S_0 f'(0) + \int_0^{\infty} \mathbb{C}_T^{BS}(\sigma, y) f''(y)\, dy.$$

Следовательно, цену $\mathbb{C}_T(f)$ можно выразить через цены опциона call.

39. Можно ли в задаче 38 заменить модель Блэка-Шоулса на модель Кокса-Росса-Рубинштейна?

40. Доказать с помощью соотношений (17.2) – (17.5) справедливость границ цен опциона покупателя, приведенных в задаче 37.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andreasen, J., Jensen, B., & Poulsen, R.* (1998). Eight valuation methods in financial mathematics: the Black-Scholes formula as an example. Mathematical Scientist, 23(1), 18-40.

2. *Bachelier, L.* (1900). Theorie de la speculation. Annales Sci. de l'Ecole Normale Superiemre, 3, стр. 21-86.

3. *Black, F.* (1989). How to use the holes in Black-Scholes. Journal of Applied Corporate Finance, 1(4), стр. 67-73.

4. *Black, F., & Scholes, M.* (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81, 637-654.

5. *Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C.* (1986). Actuarial Mathematics. Schaumburg: IL: Society of Actuaries.

6. *Brennan, M. J., & Schwartz, E. S.* (1976). The pricing of elli policies with an asset value guarantee. Journal of Fin. Economics, 3, стр. 195-213.

7. *Cohen, S. N., & Elliot, R. J.* (2015). Stochastic Calculus and Applications. New York: Springer Science + Business Media.

8. *Cox, J. C., & Ross, R. A.* (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of Fin. Economics, 3, стр. 145-166.

9. *Cox, J. C., Ross, R. A., & Rubinstein, M.* (1979). Option pricing: a simplified approach. Journal of Fin. Economics, 7(3), стр. 229-263.

10. D*elbaen, F., & Schachermayer, W.* (2006). The Mathematics of Arbitrage. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlog.

11. *Folmer, H., & Leukert, P.* (1999). Quantile hedging. Finance and Stochastics, 3, стр. 251-273.

12. *Folmer, H., & Leukert, P.* (2000). Efficient hedging: cost versus shortfall risk. Finance and Stochastics, 4, стр. 117-146.

13. *Folmer, H., & Schied, A.* (2002). Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time. Berlin - N. Y.: Walter de Gruyter.

14. *Folmer, H., & Sondermann, D.* (1986). Hedging of non-redundand contingent claims. (W. Hildenbrandt, & A. Mas-Colell, Ред.) Contributions in Math. Economics, стр. 205-223.

15. *Glazyrina, A., & Melnikov, A.* (2016). Bernstein's inequalities and their extensions for setting the Black-Scholes option pricing formula. Statistics and Probability Letters, 111, 86-92.

16. *Glazyrina, A., & Melnikov, A.* (2017). Quadratic hedging of equity-linked life insurance contracts under the real-world measure in discrete time. Risk and Decision Analysis, 6(2), 167-175.

17. *Hardy, M.* (2003). Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for elli. Hoboken, New Jersey: J. Wiley & Sons.

18. *Hi, H., Choi, B., Chang, K., & Lee, M.* (2005). Option pricing under extended normal distribution. Journal of Future Markets, 25(9), 845-871.

19. *Hull, J. C.* (2006). Options, Futures, and other Derivatives, 6th edition. New Jersey: Prentice Hall, Upper Saddle River.

20. *Hunt, P. J., & Kennedy, J. E.* (2002). Financial Derivatives in Theory and Practice, Revised Edition. J. Wiley & Sons.

21. *Jarrow, R., & Rudd, A.* (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. Journal of Fin. Economics, 10(3), 347-369.

22. *Jondeau, E., & Rockinger, M.* (2001). Gram-Charlier densities. Journal of Economic Dynamics and Control, 25(10), 1457-1483.

23. Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transaction costs. Journal of Finance, 40(5), стр. 1283-1301.

24. *Li, H., & Melnikov, A.* (2012). On the polynomial-normal model and option pricing. (S. Cohen, & et all, Ред.) Advances in Statistics, Probability and Actuarial Science, 285-302.

25. *Melnikov, A.* (March 2003 г.). Mathematics in Today's Financial Markets. Pi in the Sky, стр. 21-23.

26. *Merton, R. C.* (1973). Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, стр. 141-183.

27. *Rachev, S. T., Hochstotter, M., Fabozzi, F. J., & Focardi, S. M.* (2010). Probability and Statistics for Finance. Hoboken, New Jersey: J. Wiley & Sons.

28. *Schachermayer, W., & Teichmann, J.* (2003). How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black-Scholes? Math. Finance, 18, стр. 155-170.

29. *Vecer, J.* (2011). Stochastic Finance: A Numeraire Approach. CRC Press, Boca Raton.

30. *Бернштейн, С. Н.* (1943). Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа. Изв. АН СССР. Сер. матем., 7(1), 3-16.

31. *Зубков, А. М., & Серов, А. А.* (2012). Полное доказательство универсальных неравенств для функции распределения биномиального закона. Теория вероятн. и ее примен., 57(3), 597-602.

32. *Круглов, В. М.* (2013). Случайные процессы. Москва: Академия.

33. *Мельников, А. В.* (1997). Финансовые рынки: стохастический анализ и расчёт производных ценных бумаг. Москва: ТВП.

34. *Мельников, А. В.* (2015). Анализ риска в финансах и страховании. Москва: АНКИЛ.

35. *Мельников, А. В., & Молибога, М.* (2003). Расчёты в гибких страховых схемах. Экон. Журнал ГУ ВШЭ, 7, стр. 139-172.

36. *Мельников, А. В., Волков, С. Н., & Нечаев, М. Л.* (2001). Математика финансовых обязательств. Москва: ГУ ВШЭ.

37. *Ширяев, А. Н., Кабанов, Ю. М., Крамков, Д. О., & Мельников, А. В.* (1994). К теории расчётов опционов европейского и американского типов. I. Дискретное время. Теория вероятностей и её применение, 39(1), стр. 21-79.

38. *Ширяев, А. Н., Кабанов, Ю. М., Крамков, Д. О., & Мельников, А. В.* (1994). К теории расчётов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время. Теория вероятностей и её применение, 39(1), стр. 80-120.

А.В. Мельников

Курс математических финансов

Монография

Формат 60x84 1/8
Гарнитура Times
Усл.-п. л. 26,16. Уч.-изд. л. 16,07
Тираж 300 экз.

Издатель – Российская академия наук
Публикуется в авторской редакции
Отпечатано в экспериментальной цифровой типографии РАН

Издается по решению Научно-издательского совета
Российской академии наук (НИСО РАН)
и распространяется бесплатно