Евклидовы Q-шары электронной плотности спина/заряда со сверхпроводящими конденсатами как источник псевдощелевой фазы и высокотемпературной сверхпроводимости

С. И. Мухин

Кафедра теоретической физики и квантовых технологий НИТУ «МИСиС»,
Ленинский просп. 4, 119049 Москва, Россия

- Петр Карпов – **МИСиС & Max-Plank Inst., Dresden**
- Тимур Галимзянов- **МИСиС & ИФХЭ РАН**

- Сергей Бразовский– **Univ. Paris-Sud, Orsay**
- Jan Zaanen - **Leiden University**
- Carlo Beenakker - **Leiden University**
- Константин Ефетов - **RU Bochum**

S.I. Mukhin, Condens. Matter, 3, 39 (2018)
S.I. Mukhin, T.R. Galimzyanov, PRB 100, 081103 (R) (2019)
S.I. Mukhin, Condens. Matter, 7, 31 (2022)
S.I. Mukhin, arXiv:2108.10372v3 14 Feb (2022)

Научный совет РАН «Квантовые технологии»
"Квантовые материалы – 1» 23 июня 2022

1. **Возникновение евклидовых Q-шаров спиновой/зарядовой плотности (ВСП/ВЗП) с конденсатами куперовских/локальных пар (Q – сохраняющийся заряд Нётер) при T=T* в модели Хаббарда с нестингом в антиузельных точках вблизи поверхности Ферми: фазовый переход 1-го рода**
2. **Квазиклассические уравнения Элиашберга в области локального минимума энергии Q-шара при конечной амплитуде ВСП/ВЗП : потенциал куперовского спаривания**
3. **Свойства Q-шара:**
   i) Плотность сверхпроводящего конденсата n_s в Q-шаре линейна по температуре сверхпроводящего перехода Tc
   ii) «газ» Q-шаров имеет диамагнитный момент при Tc<T<T*
   iii) щель g_0 в фермионном спектре Q-шаров в антиузельных точках при T_c<T< T*: $g_0 \sim \sqrt{n_s}$ при T*; $g_0 \sim n_s$ при T_c
4. **Бесконечный перколяционный кластер из Q-шаров и Q-шар бесконечного радиуса: сценарии сверхпроводящего перехода**
5. **Евклидовый Q-шар из ВЗП (ВСП) флуктуации с волновым вектором Q_{DW} определяет сверхпроводящий порядок s (d)-волнового типа в зоне Бриллюэна**

Евклидов Q-шар (Q-ball)

1. Евклидово действие S_M скалярного комплексного поля M(t,r) , U(1) инвариантное по глобальному вращению фазы ϕ, $M \Rightarrow Me^{i\phi}$:

$$S_M = \int_0^\beta \int_V d\tau d^D \mathbf{r} \frac{1}{g} \left\{ |\partial_\tau M(\tau,\mathbf{r})|^2 + s^2 |\partial_\mathbf{r} M(\tau,\mathbf{r})|^2 + \mu_0^2 |M(\tau,\mathbf{r})|^2 + gU_f(|M(\tau,\mathbf{r})|^2) \right\}$$

$\beta = 1/T$

2. Определение D+1-мерной ‘плотности тока’ $\{j_\tau, \vec{j}\}$ скалярного поля $M(\tau,\mathrm{r})$:

$$j_\alpha = \frac{i}{2} \left\{ M^*(\tau,\mathbf{r}) \partial_\alpha M(\tau,\mathbf{r}) - M(\tau,\mathbf{r}) \partial_\alpha M^*(\tau,\mathbf{r}) \right\}$$

3. Сохранение «нётеровского заряда» вдоль оси мацубаровского времени :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_V j_\tau d^D \mathbf{r} = -s^2 \int_V div \vec{j}\, d^D \mathbf{r} = -s^2 \oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0,$$ при условии :

$$M(\tau,\mathbf{r}) = e^{-i\Omega\tau} M \Theta\{\mathbf{r}\}; \quad \Theta(\mathbf{r}) \equiv 1; \mathbf{r} \in V; \Theta(\mathbf{r}) \equiv 0; \mathbf{r} \notin V$$

4. Нётеровский заряд Q-шара сохраняется : $Q = \int_V j_\tau d^D \mathbf{r} = \Omega M^2 V = const$

Следствием является конечный объем Q-шара: $V_Q = \dfrac{Q}{\Omega M^2}$

Rosen (1968), S. Coleman (1985)

Q-шар (Q-ball) в схеме Элиашберга

$$S_M^0 = \int_0^\beta \int_V d\tau d^D\mathbf{r}\frac{1}{g}\left\{|\partial_\tau M|^2 + s^2|\partial_\mathbf{r} M|^2 + \mu_0^2|M|^2\right\}, \quad M \equiv M(\tau, \mathbf{r})$$

Пропагатор 'спаривающего' бозонного поля: D$(\omega, q) \propto < \left|M_{\omega,q}\right|^2 >$

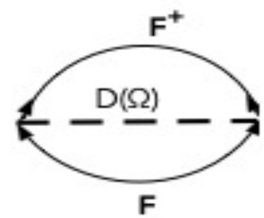
$$S_f = \int_0^\beta \int_V d\tau d^D\mathbf{r}\sum_{\mathbf{q},\sigma}\left[c_{\mathbf{q}\sigma}^+(\partial_\tau + \varepsilon_q)c_{\mathbf{q},\sigma} + \underbrace{\left(c_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}_{\mathbf{DW}},\sigma}^+ M(\tau,\mathbf{r})\sigma c_{\mathbf{q},\sigma} + H.c.\right)}_{\boxed{H_{int}}}\right]$$

$$\mathbf{M}(\tau, \mathbf{r}) = \mathbf{M}e^{-i\Omega\tau}e^{\mathrm{i}Q_{DW}\cdot r} + \mathbf{M}e^{i\Omega\tau}e^{-\mathrm{i}Q_{DW}\cdot r} \qquad \Omega = 2\pi T n$$

$$S_M = \int_0^\beta \int_V d\tau d^D\mathbf{r}\frac{1}{g}\left\{|\partial_\tau M(\tau,\mathbf{r})|^2 + s^2|\partial_\mathbf{r} M(\tau,\mathbf{r})|^2 + \mu_0^2|M(\tau,\mathbf{r})|^2 \underbrace{+ gU_f(|M(\tau,\mathbf{r})|^2)}\right\}$$

Энергия сверхпроводящей флуктуации внутри Q-шара: gU$_f$=$\Delta\Omega_s/V$

$$VU_f(|M(\tau,\mathbf{r})|) = \Delta\Omega_s = -T\ln\frac{Tr\left\{e^{-\int_0^\beta H_{int}(\tau)d\tau}\mathcal{G}(0)\right\}}{Tr\left\{\mathcal{G}(0)\right\}}$$



Гриновская функция фермионных пар : $F_{q\omega} =< c_{q\sigma}c_{-q-\sigma} >_\omega$

Стабильность Q-шара

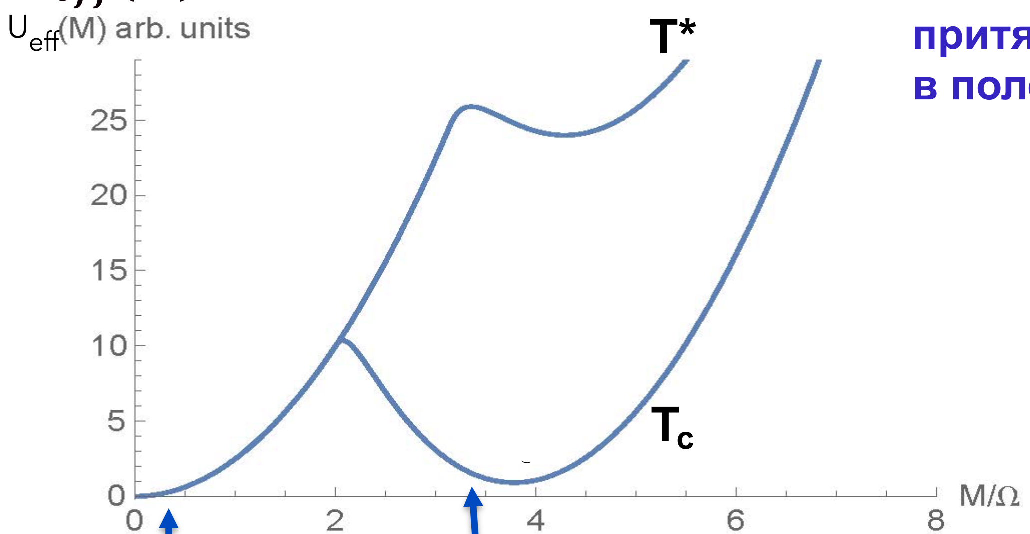
$$\Omega_Q = TS_Q = \frac{1}{g}\left[V|\partial_\tau M|^2 + V\left[\mu_0^2 M^2 + gU_f\,(M)\right]\right]$$

$$\mu_0^2 M^2 + gU_f(M) \equiv U_{eff}(\mathrm{M})$$

Условие стабильности Q-шара :
локальный минимум при конечной амплитуде М

Rosen (1968), S. Coleman (1985)

$U_{eff}(M)$

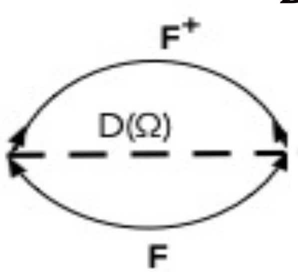


спиновые волны слабая связь

Q-ветви сильная связь

Источник локального минимума:
притяжение (энергия связи) фермионов в поле ВСП/ВЗП

$$D(\Omega) = {M^2}/{T}$$



$\rightarrow$ $gU_f = \Delta\Omega_s/V$

Конечность объема Q-шара

Объем Q-шара минимизирующий евклидово действие (свободную энергию)

$$\boldsymbol{\Omega_Q = TS_Q = \frac{1}{g}\Big[V|\partial_\tau M|^2 + V\big[\mu_0^2 M^2 + gU_f(M)\big]\Big] = \frac{1}{g}\Big[\frac{Q^2}{VM^2} + VU_{eff}\Big]}$$

$$V|\partial_\tau M|^2 = V\Omega^2 M^2$$

$$Q = \int_V j_\tau d^D\mathbf{r} = \Omega M^2 V = const$$

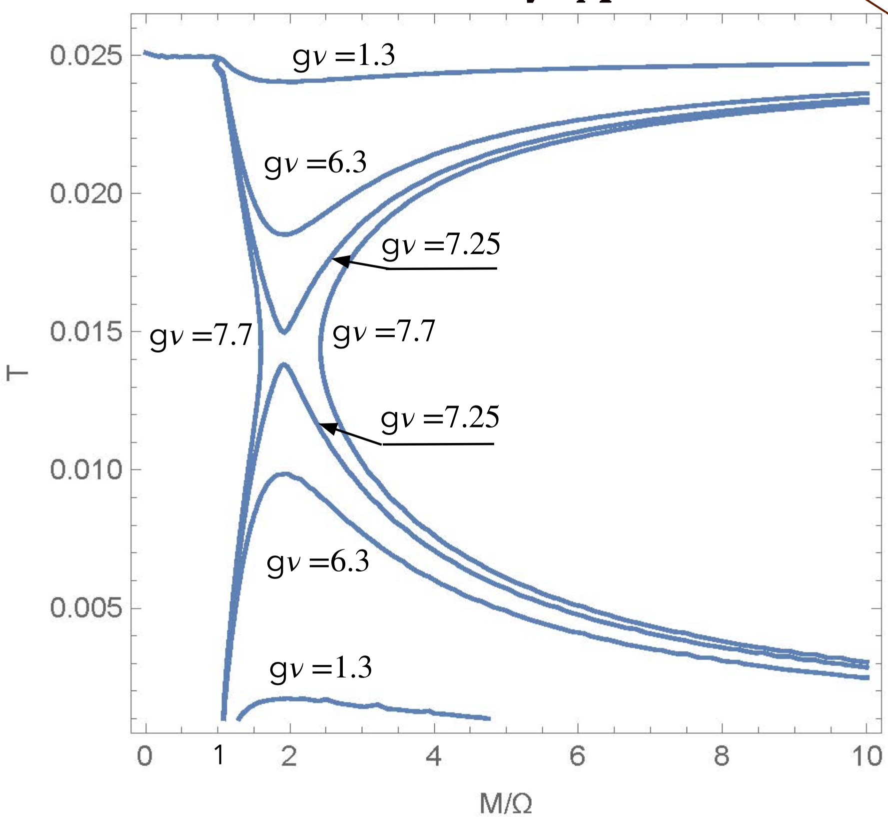
$$\Omega = 2\pi T n$$

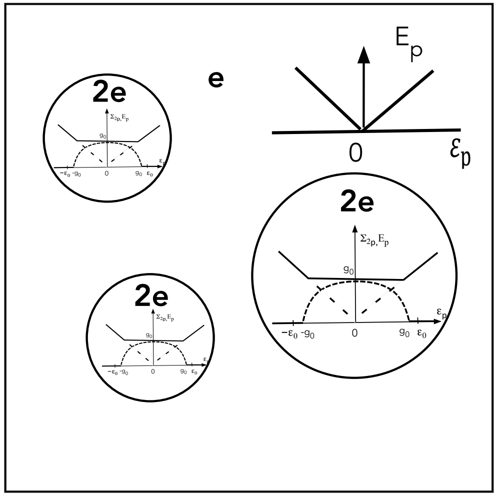
Минимизация энергии по объему Q-шара:

$$\partial\,\Omega_Q/\partial V = 0 = -{Q^2}/{V^2 M^2} + U_{eff}$$

$$\tilde{\mathrm{U}}_{\mathrm{eff}} = -\Omega M^2 + U_{eff}(M) = 0$$

Условие самосогласования для амплитуды M

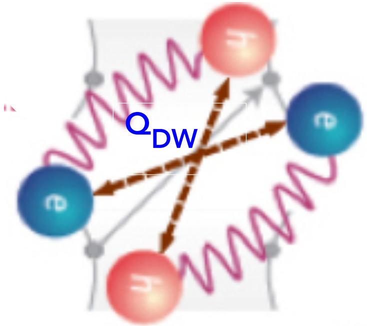


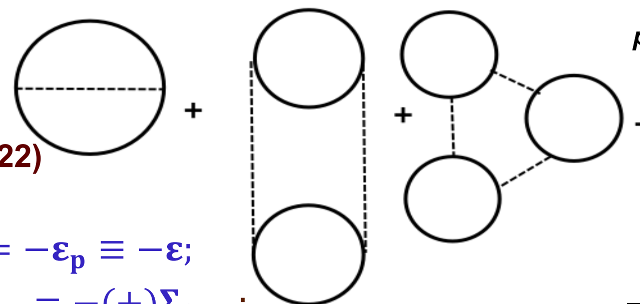


Псевдощелевая фаза с Q-шарами

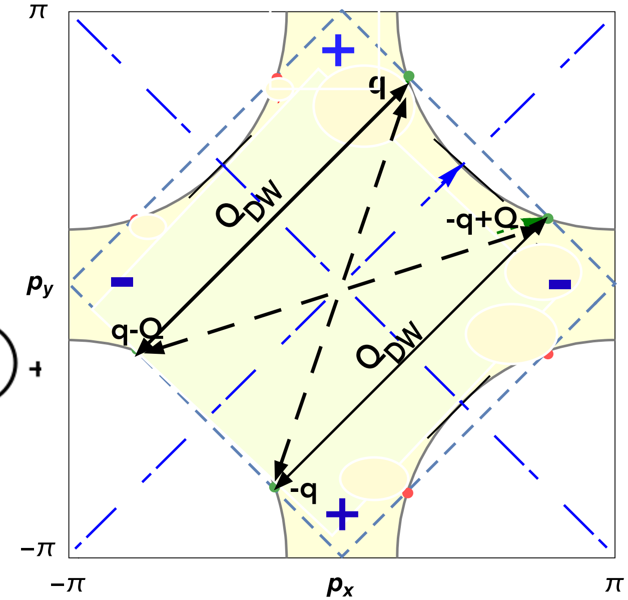
Контуры $\tilde{U}_{eff} = 0$ в осях $\{\,\mathrm{T}, \frac{\mathrm{M}}{\Omega}\}$ при различных значениях константы связи $g\nu$

Природа локального минимума функции $U_{eff}(M)$





Случай ВСП Q-шара



S.I. Mukhin, Condens. Matter, 7, 31 (2022)
S.I. Mukhin, arXiv:2108.10372v3 14 Feb (2022)
S.I. Mukhin, Condens. Matter, 3, 39 (2018)

nesting condition: $\varepsilon_{p-Q_{DW}} = -\varepsilon_p \equiv -\varepsilon;$

d(s) − wave condition: $\Sigma_{2p-Q_{DW},\sigma} = -(+)\Sigma_{2p,\sigma};$

Межфермионный обмен Q-шаровой ВСП/ВЗП модой, с вектором нестинга Q_{DW} , как механизм сверхпроводящего спаривания

$$H_{int} = \int_V d^D r \sum_{q,\sigma} \left(c^+_{q+Q_{DW},\sigma} M(\Omega, Q_{DW}) \sigma c_{q,\sigma} + H.c.\right)$$

$$M(\tau, r) = M\left(e^{-i\Omega\tau} e^{iQ_{DW}\cdot r} + e^{i\Omega\tau} e^{-iQ_{DW}\cdot r}\right)\Theta(r); \quad \Theta(r) \equiv 1;\ r \in V; \Theta(r) \equiv 0;\ r \notin V$$

$$VU_f(|M(\tau, r)|) = \Delta\Omega_s = -T \ln \frac{Tr\left\{e^{-\int_0^\beta H_{int}(\tau)d\tau} G(0)\right\}}{Tr\{G(0)\}} \equiv \Omega_s - \Omega_0; G(0) \equiv e^{-\beta H_0};$$

Самосогласованное решение для амплитуды Q-шаровой ВСП/ВЗП моды и волновой функции сверхпроводящего конденсата F

Уравнения Элиашберга и связанные состояния вдоль оси мацубаровского времени

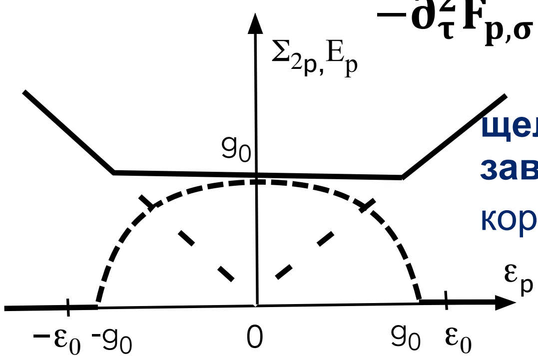
$$\Sigma_{2p,\sigma}(\omega) = -T\sum_{\pm\Omega}\frac{D_{Q_{DW}}(\Omega)\Sigma_{2,p-Q_{DW},\sigma}(\omega-\Omega)}{\left|i(\omega-\Omega)-\varepsilon_{p-Q_{DW}}-\Sigma_{1p-Q_{DW},\sigma}(\omega-\Omega)\right|^2+\left|\Sigma_{2p-Q_{DW},\sigma}(\omega-\Omega)\right|^2}$$

$$D_{Q_{DW}}(\Omega)\equiv\frac{M^2}{T};\quad D_{Q_{DW}}(\tau)=2M^2\cos\left(\Omega\tau\right);\quad \Sigma_{2p-Q_{CDW},\sigma}=-\Sigma_{2p,\sigma}$$ (случай ВСП)

$$F_{p,\sigma}(\omega)=\frac{-\Sigma_{2p,\sigma}}{|i\omega-\varepsilon_p-\Sigma_{1p,\sigma}(\omega)|^2+|\Sigma_{2p,\sigma}(\omega)|^2},\quad \omega=\pi(2n+1)T;\quad n=0,\pm1,\ldots$$

Следствием данных уравнений с нестингом на векторе Q_{DW} является уравнение Матье для функции Грина F (волновой функции) сверхпроводящих пар (!):

$$-\partial_\tau^2 F_{p,\sigma}(\tau)-2M^2\cos(\Omega\tau)\,F_{p,\sigma}(\tau)=-g_0^2F_{p,\sigma}(\tau);\quad F_{p,\sigma}\left(\tau+\frac{1}{T}\right)=-F_{p,\sigma}(\tau)$$



щель g_0 в фермионном спектре E_p Q-шаров - сплошная линия
зависимость собственной энергии $\Sigma_{2p,\sigma}$ от энергии ферми-частиц – короткая штриховая линия

$$g_0^2\equiv\varepsilon_p^2+\left|\Sigma_{2p,\sigma}(\omega)\right|^2$$

Следовательно, мы ищем собственное значение первого возбужденного состояния уравнения Матье, приводящее к самосогласованному решению для сверхпроводящей «щели»:

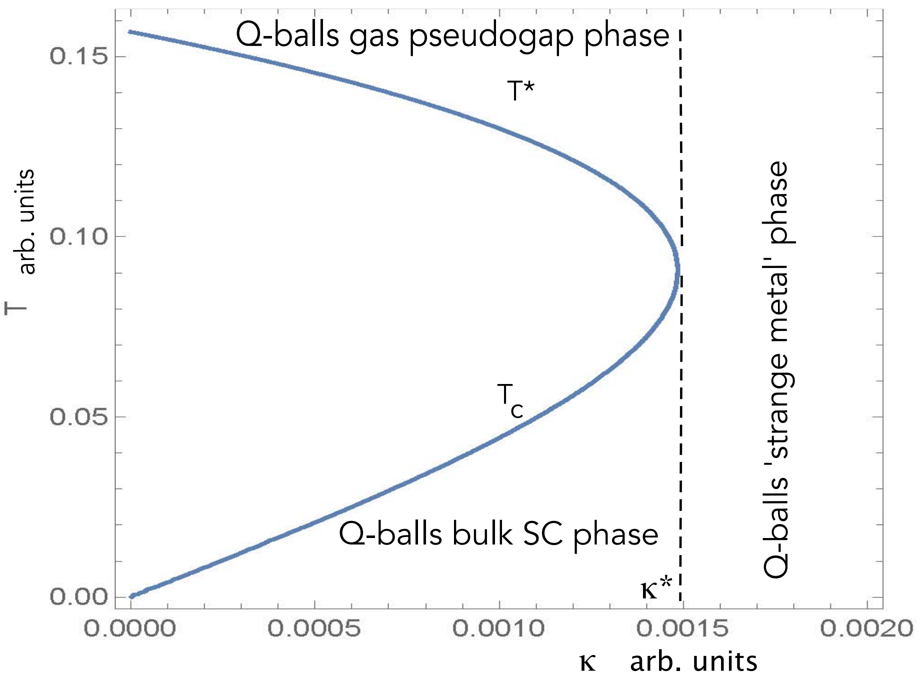
$$g_0^2\approx 2M\left(M-\Omega\right)\ ;\quad \Omega=2\pi Tn;\ n=1,2,\ldots$$

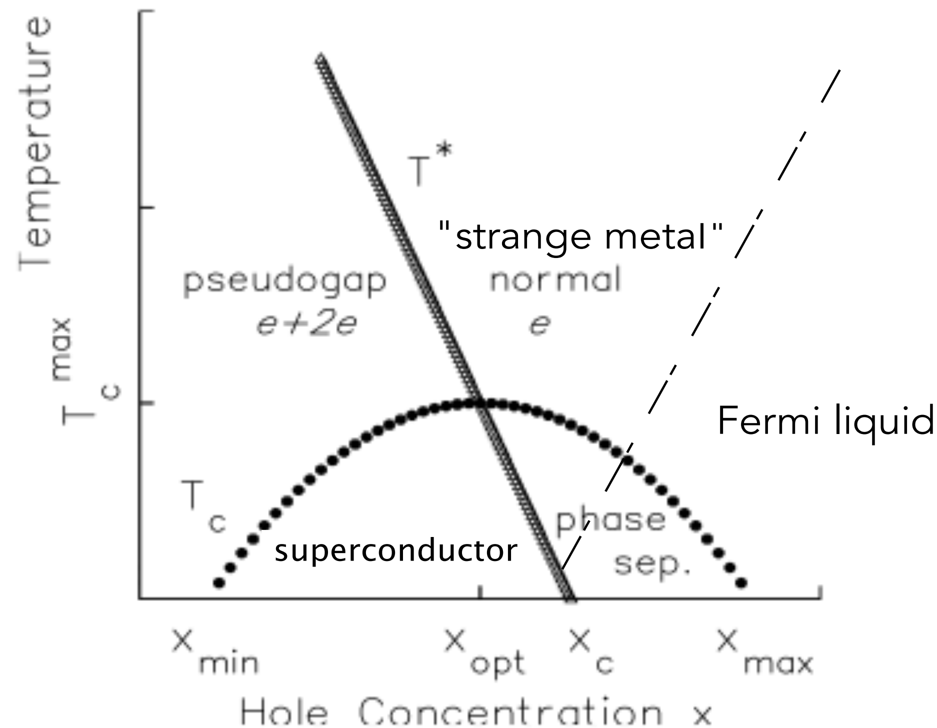
Контурные линии решений уравнения самосогласования и фазовая диаграмма ВТСП в Q-шаровой модели

$U_{eff} - \Omega M^2 = 0$ $\Rightarrow$ уравнение самосогласования (*) в численно полученном приближении :

$\mu_0^2 M^2 + gU_f(M) \equiv U_{eff}$ (*) ; $\left(\mu_0^2 - \Omega^2\right) - \frac{\kappa}{\Omega} = 0;\ \kappa \equiv c\frac{4g\nu\varepsilon_0}{3};\ c \approx 0.01$

Q-шаровая фазовая диаграмма



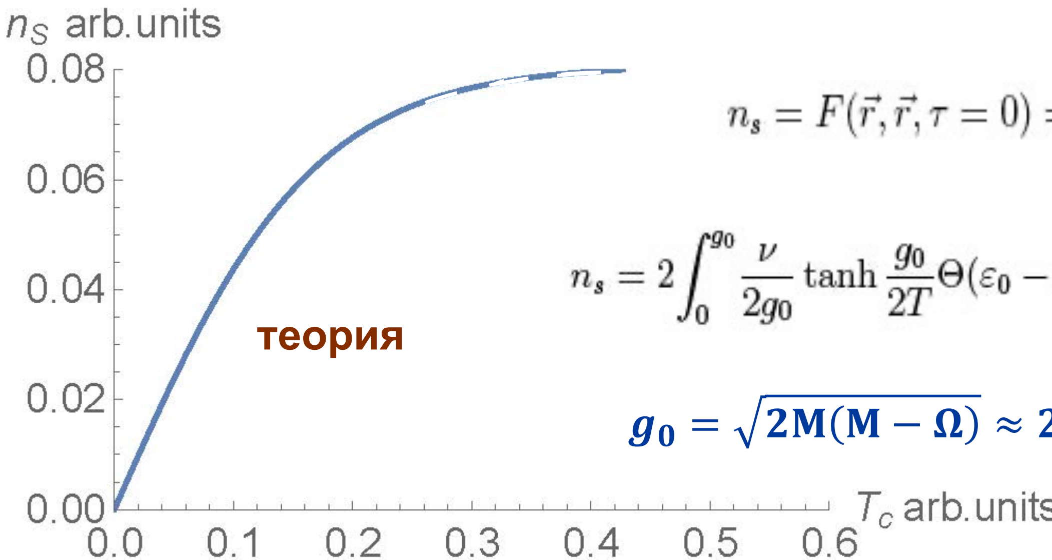


$\kappa^* = \frac{2\mu_0^3}{3^{3/2}}$; $T_c = T^* = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{3}}$; $\mu_0 \sim 100 - 200$ meV ; $\Rightarrow T_c(opt) \sim 100 \div 200$ K

Tranquada, J.M.et al. Nature, 429, 534 (2004).

$\kappa = \rightarrow 0$; $T_c(\kappa) = \frac{\kappa}{2\pi\mu_0^2}$; $T^*(\kappa) \rightarrow T^*_{max} = \frac{\mu_0}{2\pi}$ $\Rightarrow T^*_{max} \sim 200 \div 400$K

График Уэмуры (‘Uemura plot’)



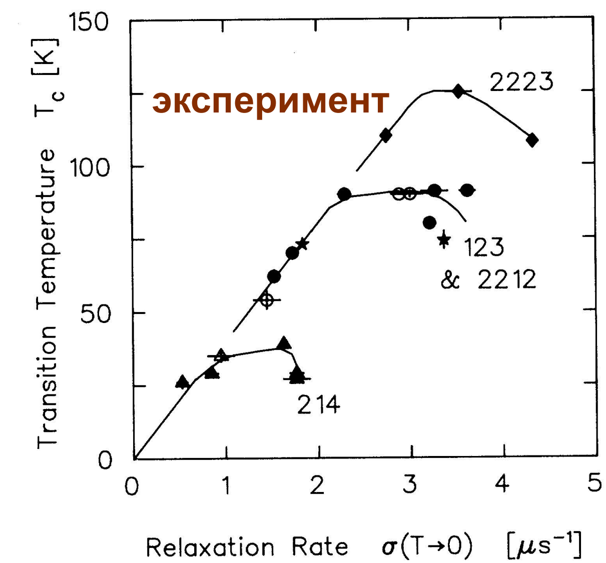
$$n_s = F(\vec{r},\vec{r},\tau=0) = T\sum F_p(\omega) = \sum \frac{\sqrt{g_0^2-\varepsilon_p^2}}{2g_0}\tanh\frac{g_0}{2T}$$

$$n_s = 2\int_0^{g_0}\frac{\nu}{2g_0}\tanh\frac{g_0}{2T}\Theta(\varepsilon_0-\varepsilon)\sqrt{g_0^2-\varepsilon^2}\,d\varepsilon \approx \frac{\nu\varepsilon_0}{2}\tanh\frac{g_0}{2T}\tanh\frac{\pi g_0}{4\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{g_0 = \sqrt{2M(M-\Omega)} \approx 2\Omega_c;\, n_s \approx \frac{2\pi\nu}{3}T_c}$$

$$M = \Omega\left(1+\left(\frac{T_n^*-T}{\mu_0}\right)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{15\mu_0^2}{4\sqrt{2}g\nu}\right)^{\frac{2}{5}}\right),\quad T_n^* = \frac{\mu_0}{2\pi n};$$

$$g_0^2 = \left(T_n^*-T\right)^{\frac{2}{5}}\Omega^2\left(\frac{15\mu_0}{g\nu}\right)^{\frac{2}{5}} \Rightarrow n_S \propto g_0^2$$



Y. J. Uemura, et al., Universal correlations between Tc and n_s/m^* in high-Tc cuprate superconductors, PRL **62**, 23 (1989).

Q-шаровое решение в пространстве: M(r)

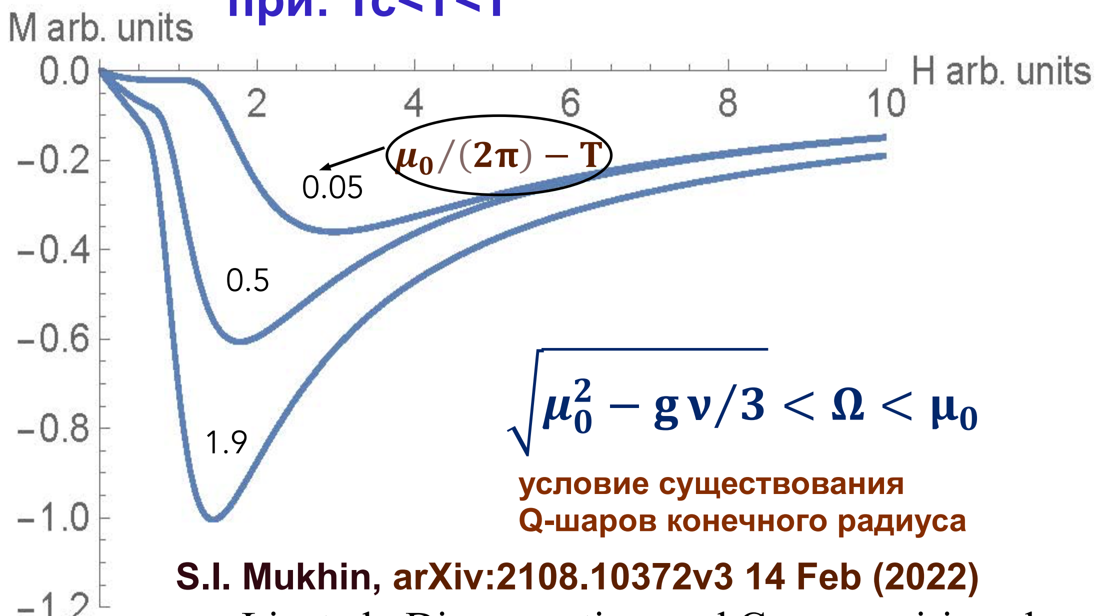
$$M(r) \equiv \frac{\chi(r)}{r} = \begin{cases} \dfrac{\sin kr}{r}\dfrac{\Omega R}{\sin kR}; \; 0 < r \le R; \\ \dfrac{\Omega R}{r}\exp\{\lambda(R-r)\}; \; R < r < \infty; \end{cases}$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{g\nu}{3} + \Omega^2 - \mu_0^2}\,;$$

$$\lambda = \frac{1}{s}\sqrt{\mu_0^2 - \Omega^2}\,;$$

$$R = \frac{1}{k}\tan^{-1}\frac{k}{\lambda}$$

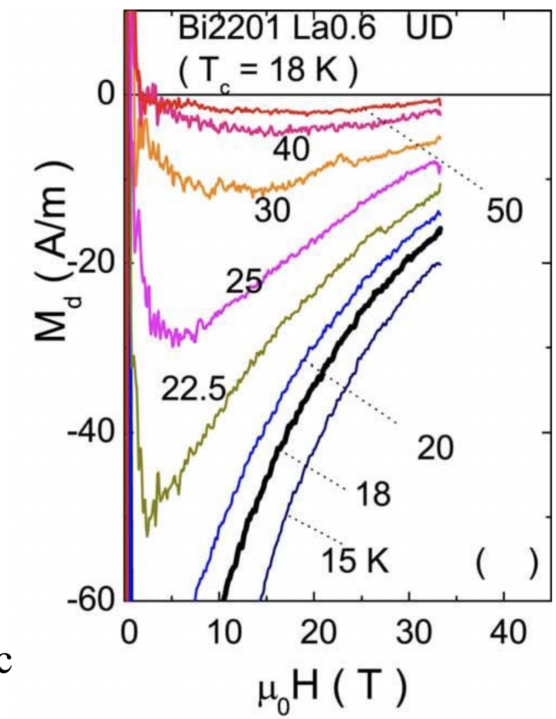
Диамагнитный момент ‘газа’ Q-шаров при: Tc<T<T*



$$\sqrt{\mu_0^2 - g\,\nu/3} < \Omega < \mu_0$$

условие существования Q-шаров конечного радиуса

S.I. Mukhin, arXiv:2108.10372v3 14 Feb (2022)

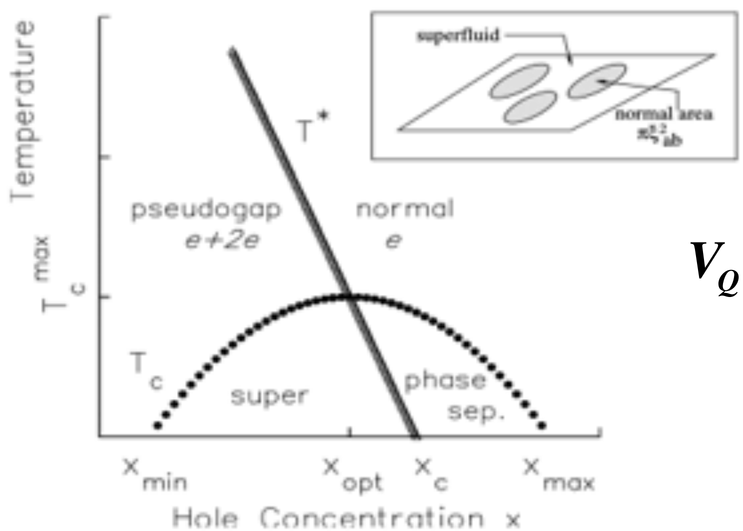


Li, et al., Diamagnetism and Cooper pairing above Tc in cuprates, Phys. Rev. B 81, 054510 (2010).

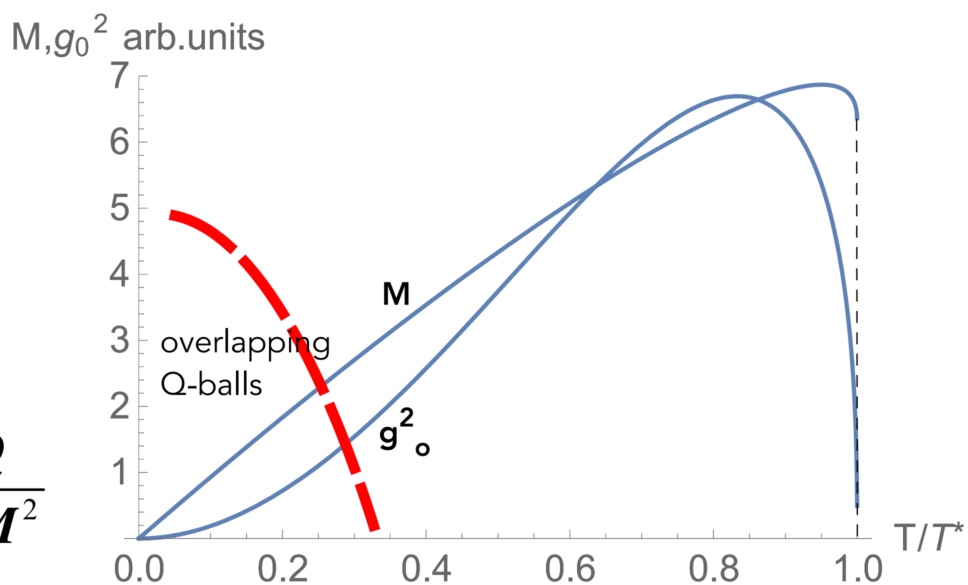
T* и псевдощелевая фаза
Аналитические решения уравнений самосогласования

$$M = \Omega\left(1+\left(\frac{T_n^* - T}{\mu_0}\right)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{15\mu_0^2}{4\sqrt{2}g\nu}\right)^{\frac{2}{5}}\right), \quad T_n^* = \frac{\mu_0}{2\pi n}; \qquad \left(\frac{15\mu_0^2}{4\sqrt{2}g\nu}\right) << 1$$

$$g_0^2 = \left(T_n^* - T\right)^{\frac{2}{5}}\Omega^2\left(\frac{15\mu_0}{g\nu}\right)^{\frac{2}{5}}$$



$$V_Q = \frac{Q}{\Omega M^2}$$



Ограничения конечности размера на минимальный «заряд Нётер» Q и удельная теплоемкость Q-шарового ‘газа'

Линеаризованное уравнение Гинзбурга-Ландау для параметра сверхпроводящего порядка Ψ для Q-шара радиуса R в сферических координатах

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\ddot{\chi} = bg_0^2\chi\,; \quad \Psi(\rho) = \frac{C\chi(\rho)}{\rho}\,; \quad \Psi(R) = 0$$

Решение: $\chi \propto \sin(k_n\rho)\,; \quad Rk_n = \pi n,\,; \quad n = 1,2,...,$

Отсюда наименьший радиус R_m Q-шара и соответствующий объем V_{Q_m} должны удовлетворять следующим условиям :

$$\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{\pi}{R_m}\right)^2 \le bg_0^2\,, \rightarrow V_Q^{1/3} \ge V_{Q_m}^{1/3} = \left(\frac{Q_m}{\Omega M^2}\right)^{1/3} \equiv R_m = \pi\sqrt{\frac{\hbar^2}{4mbg_0^2}}$$

Но при температуре T* g_0 обращается в нуль и, следовательно, минимальный размер Q-шара расходится :

$$g_0^2 = \left(T_n^* - T\right)^{\frac{2}{5}}\Omega^2\left(\frac{15\mu_0}{g\nu}\right)^{\frac{2}{5}}$$

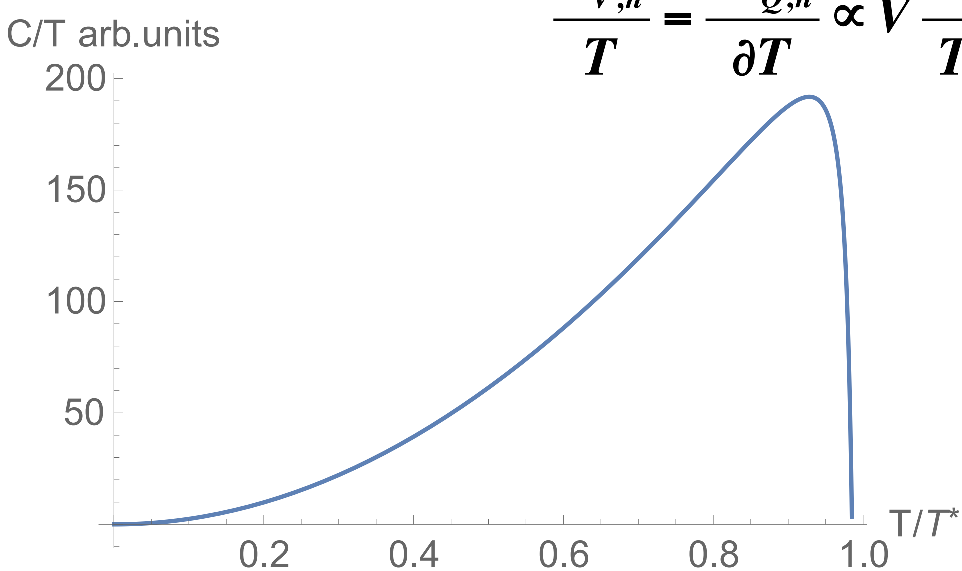
Ограничения конечности размера на минимальный «заряд Нётер» Q и удельная теплоемкость Q-шарового 'газа'

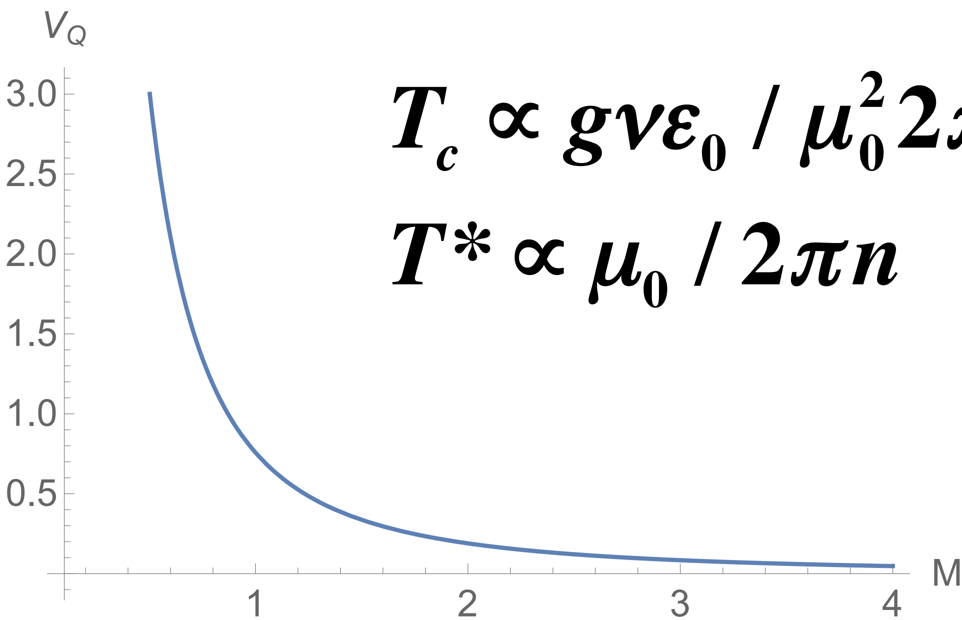
Вклад Q-шаров в теплоемкость находится путем использования для их энтропии выражения из термодинамики больцмановского газа :

$$S_Q = \sum_{Q,n} G_{Q,n} \overline{n_{Q,n}} \ln \frac{e}{\overline{n_{Q,n}}}; \quad \overline{n_{Q,n}} = \exp\left\{-\frac{E_{Q,n}}{k_B T}\right\} = \exp\left\{-\frac{2Q\Omega}{g k_B T}\right\}, G_{Q,n} = \frac{V}{V_Q},$$

Вклад Q-шаров в энтропию и теплоемкость системы находится суммированием по заряду $Q>Q_{min}$:

$$\frac{C_{V,n}}{T} = \frac{\partial S_{Q,n}}{\partial T} \propto V \frac{\Omega^3}{T}\left(1 - \frac{C\Omega}{5g(T_n^* - T)^{8/5}}\right)\exp\left\{-\frac{C2\pi n}{g(T_n^* - T)^{3/5}}\right\}$$



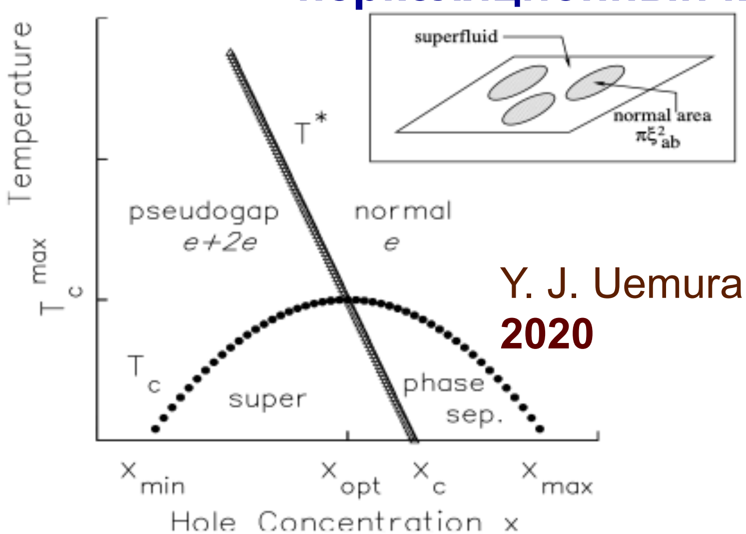


$$T_c \propto g\nu\varepsilon_0 / \mu_0^2 2\pi n$$

$$T^* \propto \mu_0 / 2\pi n$$

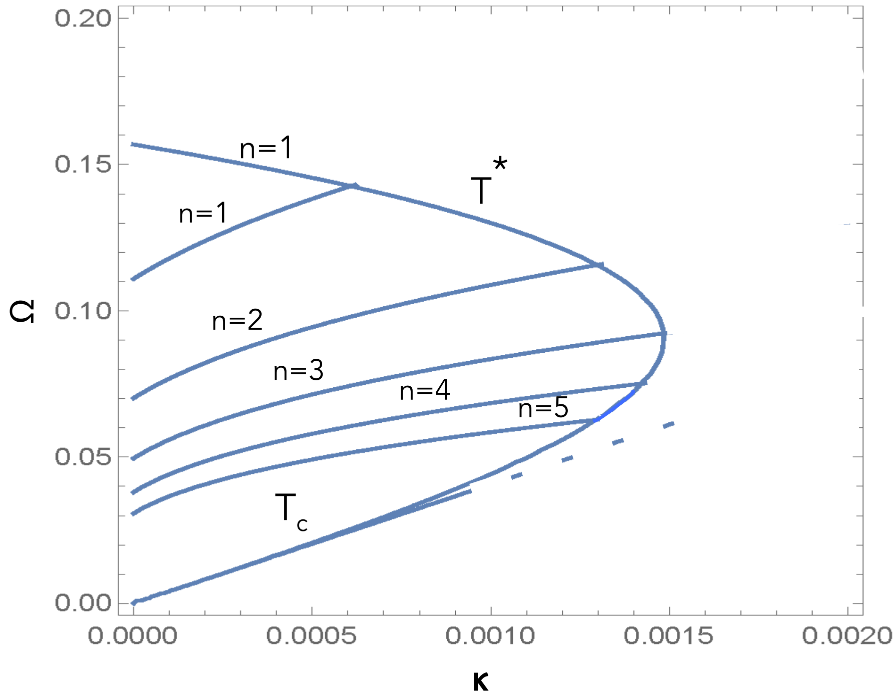
$$V_Q = \frac{Q}{\Omega M^2}$$

При температуре сверхпроводящего перехода T_c радиус Q-шара обращается в бесконечность, или разные Q-шары со сверхпроводящими конденсатами образуют бесконечный перколяционный кластер.



Y. J. Uemura
2020

Осциллирующие решения уравнения самосогласования для Q-шара в фазовой плоскости : константа связи κ – мацубаровская частота Ω.



Дискретные линии, отмеченные несколькими целыми значениями n = 1, 2, 3, 4, 5, содержат точки на плоскости фазового пространства, в которых внутри Q-шаров происходят осцилляции модуля плотности спина/заряда M. $\Omega = \kappa/\mu_0^2$ на прямой, обозначенной символом T_c.

$$\frac{M(\tau)}{\Omega} = \frac{z_0^2 - c^2}{z_0 + c\cos\Omega_n\tau},\ c^2 \equiv \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{\mu_0^2\Omega - \Omega^3}{\kappa}\right)$$

$$\mu_0^2 - \Omega^2 - \frac{\kappa}{\Omega}\left(1 - \gamma z_0^2\right) = \Omega_n^2,\ n = 1, 2, \ldots$$

$$\gamma \equiv -\frac{f''(z_0)}{2f(z_0)} \approx 2.47,\ z_0 \approx 1.38,$$

$$\kappa = g\nu\varepsilon_0 f(z_0) \approx c\,\frac{4g\nu\varepsilon_0}{3};\ c \approx 0.01$$

ВЫВОДЫ

«Газ» Q-шаров с конденсатами куперовских пар может возникать при T* как флуктуирующий «ближний порядок», который самосогласованно конденсируется в стабильный сверхпроводящий конденсат при Tc, в то время как Q-шары становятся «вакуумными глюонами», обеспечивающими «клей» для куперовских пар.

ПЕРСПЕКТИВЫ

1. Исследование транспортных свойств фазы с “газом” Q-шаров содержащих конденсаты куперовских пар (s/d-волновой нематик)
2. Исследование элементарных фермионных и бозонных возбуждений в фазе с Q-шарами (квантование спектра Q-шаровых состояний)
3. Проверка применений в квантовых вычислениях
4. Проверка применений в космологии («тёмная материя»)

Supermassive dark-matter Q-balls in galactic centers?
Sergey Troitsky JCAP11, 027 (2016)

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ