СОДЕРЖАНИЕ

Том 62, номер 7, 2022 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Схемы расщепления для одного класса дифференциально-операторных уравнений

П. Н. Вабищевич 1059

Нелинейный конечно-объемный метод для задачи переноса—сжатия границы раздела сред на неструктурированных адаптивных сетках

Ю. В. Василевский, К. М. Терехов 1067

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Суммирование тета-рядов Пуанкаре в модели Шоттки

С. Ю. Лямаев 1085

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О глобальной разрешимости краевой задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа в условиях радиационного обмена

Е. В. Амосова 1100

Задача Шварца для J-аналитических функций в эллипсе

В. Г. Николаев 1115

Нелинейное уравнение Шрёдингера и метод гиперболизации

А. Д. Юнаковский 1138

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Стационарные и осциллирующие решения уравнений ионизации

М. Б. Гавриков, А. А. Таюрский 1158

Моделирование трехмерного потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени

В. А. Галкин, А. О. Дубовик 1180

Быстросходящийся ряд для решения задачи об электровихревом течении в полусферическом сосуде

К. Ю. Малышев, Е. А. Михайлов, И. О. Тепляков 1187

Дискретно-аналитическая разностная схема для решения нестационарного уравнения переноса частиц методом расщепления

Н. Я. Моисеев, В. М. Шмаков 1200

О возбуждении и развитии неустойчивости в пограничном слое сжимаемого газа, наблюдаемых при высокоточном численном моделировании без введения искусственных возмущений

А. И. Толстых, Д. А. Широбоков 1209

Разностная схема метода декомпозиции начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса

Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина 1224

EDN: IOEPZG
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1059–1066

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. Н. Вабищевич[1,2]

[1] 115191 Москва, Б. Тульская ул., 52, ИБРАЭ РАН, Россия

[2] 655017 Ставрополь, ул. Пушкина, 1, СКФУ, Северо-Кавказкий центр математических исследований, Россия

e-mail: vabishchevich@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2021 г.
Переработанный вариант 20.01.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

В настоящее время различные типы схем расщепления построены для эволюционных уравнений первого и второго порядка, когда имеет место аддитивное представление основного эллиптического оператора задачи. Многие прикладные задачи приводят к необходимости решения краевых задач для нестационарных уравнений соболевского типа, когда эллиптический оператор присутствует при производных по времени. При использовании схем расщепления для приближенного решении таких задач необходимо использовать аддитивное представление как основного эллиптического оператора, так и оператора при производных по времени. В работе рассматривается задача Коши для частного случая эволюционного уравнения первого порядка, когда оператор при производной представляется через основной оператор. Используется запись этого уравнения как дифференциально-алгебраической системы из двух уравнений. Строятся безусловно устойчивые схемы расщепления при многокомпонентном расщеплении. Библ. 14.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, дифференциально-алгебраическая система, двухслойная операторно-разностная схема, многокомпонентное расщепление, устойчивость схем расщепления.

DOI: 10.31857/S0044466922070109

ВВЕДЕНИЕ

Прикладные математические модели обычно [1] строятся на основе систем параболических и гиперболических уравнений. В качестве базовых моделей могут выступать более общие уравнения соболевского типа [2]. Такие модели типичны при рассмотрении динамических процессов с памятью, в которых (см. [3]) учитываются, например, вязкоупругие свойства. В частности, в задачах фильтрации [4] рассматриваются краевые задачи для псевдопараболических уравнений. Особенность таких задач [5] заключается в присутствии эллиптического оператора при производной решения по времени.

Приближенное решение краевых задач для псевдопараболических уравнений чаще всего строится на основе конечно-элементной или конечно-разностной аппроксимации по пространству [6], [7]. Построение абсолютно устойчивых разностных схем базируется на применении неявных аппроксимаций по времени [8], [9]. Приближенное решение на новом слое по времени определяется решением немного усложненной сеточной эллиптической задачи.

Вычислительная задача может упрощаться за счет использования аддитивных схем (схем расщепления) [10], [11]. Для различных классов нестационарных задач используются как стандартные схемы расщепления по отдельным направлениям (локально-одномерные схемы), схемы расщепления по физическим процессам, так и регионально-аддитивные схемы декомпозиции области при построении параллельных алгоритмов для нестационарных задач математической физики. Наибольшие возможности предоставляет двухкомпонентное расщепление оператора задачи на сумму двух операторов более простой структуры: операторные аналоги схем переменных направлений, факторизованные схемы, схемы предиктора-корректора. При общем многокомпонентном расщеплении применяются схемы покомпонентного расщепления (схемы суммарной аппроксимации), регуляризованные аддитивные схемы, векторные аддитивные схемы.

В последнее время (см., например, книгу [11] и приведенную в ней литературу) идеи расщепления используются для численного решения систем связанных уравнений.

При рассмотрении краевых задач для уравнений соболевского типа мы должны расщеплять не только основной оператор задачи, но и оператор при производной по времени. Прямое использование результатов теории аддитивных схем в таких задачах затруднено, имеются лишь единичные работы в этом направлении. В работе [12] предложены и исследованы векторные аддитивно-операторные схемы с расщеплением оператора при производной по времени на сумму положительно-определенных самосопряженных операторов. Более общие задачи с расщеплением как основного оператора задачи, так и оператора при производных по времени рассмотрены в [13]. В настоящей работе безусловно устойчивые схемы расщепления для таких задач построены на основе трансформации исходного дифференциально-операторного уравнения к системе из двух уравнений.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Определим H как конечномерное вещественное гильбертово пространство и пусть A, B, D — линейные операторы в H. Для сеточных функций y из H для скалярного произведения и нормы используем обозначения (y, w) и $\|y\| = (y, y)^{1/2}$. Для $D = D^* > 0$ через H_D обозначим пространство H, снабженное скалярным произведением $(y, w)_D = (Dy, w)$ и нормой $\|y\|_D = (Dy, y)^{1/2}$.

Будем считать, что $y(t) \in H$ есть решение задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка

$$B\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

при заданных правой части $f(t) \in H$ и начальном условии

$$u(0) = u^0. \tag{2}$$

Считаем, что линейные неотрицательный оператор A и положительный оператор B, действующие из H в H, являются самосопряженными и стационарными, т.е.

$$A = A^* \geq 0, \quad \frac{d}{dt}A = A\frac{d}{dt}, \quad B = B^* > 0, \quad \frac{d}{dt}B = B\frac{d}{dt}.$$

При рассмотрении краевых задач для псевдопараболических уравнений операторы A, B связываются с аппроксимациями некоторых эллиптических операторов. Тем самым вычислительные сложности связаны не только с оператором A, но и с оператором B при производной по времени.

Мы ограничимся случаем, когда

$$B = I + \gamma A, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

где I — единичный оператор. Такая связь между операторами A и B типичная для многих прикладных задач при моделировании динамических процессов с памятью. Тем самым вместо (1) рассматривается уравнение

$$(I + \gamma A)\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0. \tag{3}$$

Приведем типичную априорную оценку для решения задачи (2), (3), которая выражает устойчивость решения по начальным данным и правой части в соответствующем пространстве. Аналогичные оценки будут интересны нам при рассмотрении точного и приближенного решений трансформированной задачи.

Домножим уравнение (3) скалярно в H на $(I + \gamma A)u$. С учетом неотрицательности A получим

$$\|(I + \gamma A)u(t)\|\frac{d}{dt}\|(I + \gamma A)u(t)\| \leq (f, (I + \gamma A)u).$$

Для правой части используем неравенство

$$(f, (I + \gamma A)u) \leq \|f(t)\|\|(I + \gamma A)u(t)\|.$$

Это позволяет получить следующую априорную оценку для решения задачи:

$$\|(I + \gamma A)u(t)\| \le \|(I + \gamma A)u^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds. \tag{4}$$

Мы хотим построить разностные схемы расщепления, когда имеет место аддитивное представление оператора A суммой операторов более простой структуры. Например, будем считать, что для оператора A имеет место

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha, \quad A_\alpha = A_\alpha^* \ge 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \tag{5}$$

Переход на новый слой по времени обеспечивается решением задач для отдельных операторов $A_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p$, при расщеплении (5).

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Исходное уравнение (3) запишем в виде системы из двух уравнений. Введем новую искомую величину $v(t)$ с помощью равенства

$$u + \gamma A u - v = 0. \tag{6}$$

В этих условиях

$$Au = \frac{1}{\gamma}(v - u)$$

и уравнение (3) можно трансформировать к виду

$$\gamma \frac{dv}{dt} - u + v = \gamma f(t). \tag{7}$$

Будем рассматривать задачу (2), (6), (7).

Теорема 1. *Для решения задачи* (2), (6), (7) *имеет место априорная оценка*

$$\|v(t)\| \le \|v^0\| + \int_0^t \|f(s)\| ds, \tag{8}$$

в которой $v^0 = u^0 + \gamma A u^0$.

Доказательство. Домножим уравнение (6) скалярно в H на u, а уравнение (7) — на v. Суммирование результатов дает равенство

$$\gamma \|v\| \frac{d}{dt}\|v\| + \gamma (Au, u) + \|v - u\|^2 = \gamma (f, v).$$

С учетом неотрицательности оператора A получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\| \le \|f(t)\|,$$

из которого следует (8).

Замечание 1. Принимая во внимание (6), из (8) получим оценку (4) для u.

Нам удобно записать систему уравнений (6), (7) в виде одного эволюционного уравнения первого порядка для векторных величин. Определим $\mathbf{u} = \{u, v\}$ и $\mathbf{f} = \{0, \gamma f\}$, тогда от (2), (6), (7) придем к задаче Коши:

$$\mathbf{B}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{9}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \tag{10}$$

где $\mathbf{u}^0 = \{u^0, v^0\}$. Для операторных матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ имеем

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} I + \gamma A & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Задачу (9), (10) мы рассматриваем на прямой сумме пространств $\mathbf{H} = H \oplus H$, когда для $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}$, скалярное и произведение и норма есть

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2), \quad \|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}.$$

Принимая во внимание представления (11), получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \geq 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \geq 0. \tag{12}$$

Замечание 2. Запись исходного уравнения (3) в виде системы уравнений (6), (7) характеризуется тем, что оператор A входит только в основной оператор задачи (оператор $\mathbf{A}$) и исключен из оператора при производной по времени (оператор $\mathbf{B}$). Этим обстоятельством можно воспользоваться при построении схем расщепления.

Для получения априорной оценки для решения задачи (9), (10) домножим уравнение (9) скалярно в $\mathbf{H}$ на $\mathbf{u}$ и с учетом (12) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq (\mathbf{f}, \mathbf{u}). \tag{13}$$

Принимая во внимание (11), имеем

$$(\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \gamma\|v\|^2,$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = \gamma(f, v) \leq \gamma\|f\|\|v\|.$$

С учетом этого из (13) следует оценка (8).

3. АППРОКСИМАЦИЯ ПО ВРЕМЕНИ

При приближенном решении задачи Коши (9), (10) мы ориентируемся на неявные безусловно устойчивые схемы. Будем использовать равномерную сетку по времени с шагом τ и пусть $y^n = y(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0,1,\ldots$. В своем исследовании мы ограничились двухслойными схемами. В этом случае переход к более общим неравномерным сеткам носит редакционный характер. Естественно начать с двухслойной схемы с весом $\sigma = \mathrm{const} \in (0,1]$, когда

$$\mathbf{B}\frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} + \mathbf{A}\mathbf{y}^{n+\sigma} = \mathbf{f}^{n+\sigma}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{14}$$

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{v}^0, \tag{15}$$

при использовании обозначений

$$\mathbf{y}^{n+\sigma} = \sigma\mathbf{y}^{n+1} + (1-\sigma)\mathbf{y}^n, \quad \mathbf{y}^n = \{y^n, w^n\}.$$

Для правой части и начального условия имеем

$$\mathbf{f}^{n+\sigma} = \{0, \gamma f^{n+\sigma}\}, \quad \mathbf{y}^0 = \{u^0, v^0\}.$$

Разностная схема (14), (15) дает приближенное решение задачи (9), (10) с достаточно гладким решением $\mathbf{u}(t)$ с первым порядком точности по τ для $\sigma \neq 0.5$ и вторым – для $\sigma = 0.5$ (симметричная схема, схема Кранка–Николсон). Для исследования устойчивости таких двухслойных схем привлекаются результаты теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [8], [9].

Теорема 2. *Двухслойная схема* (11), (14), (15) *безусловно устойчива при* $\sigma \geq 0.5$. *При этих ограничениях имеет место априорная оценка*

$$\|w^{n+1}\| \leq \|w^0\| + \sum_{k=0}^{n}\tau\|f^{k+\sigma}\|, \quad n = 0,1,\ldots . \tag{16}$$

Доказательство. Домножая уравнение (14) на $\tau\mathbf{y}^{n+\sigma}$ и учитывая второе неравенство (12), получаем

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+1}-\mathbf{y}^{n}),\mathbf{y}^{n+\sigma}) \le \tau(\mathbf{f}^{n+\sigma},\mathbf{y}^{n+\sigma}). \tag{17}$$

Для правой части имеем

$$(\mathbf{f}^{n+\sigma},\mathbf{y}^{n+\sigma}) = \gamma(f^{n+\sigma},w^{n+\sigma}) \le \gamma\left\|f^{n+\sigma}\right\|\left\|w^{n+\sigma}\right\|. \tag{18}$$

Левая часть (17) принимает вид

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+1}-\mathbf{y}^{n}),\mathbf{y}^{n+\sigma}) = \gamma((w^{n+1}-w^{n}),w^{n+\sigma}).$$

Воспользуемся следующим утверждением [14].

Лемма 1. *Пусть*

$$w = \sigma u + (1-\sigma)v$$

для u, v *из некоторого гильбертового пространства* H_D $(D = D^* > 0)$. *Тогда*

$$(D(u-v),w) \ge (\|u\|_D - \|v\|_D)\|w\|_D,$$

если постоянная $\sigma \ge 0.5$.

Принимая во внимание доказательство леммы 1, для левой части (17) имеем

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+1}-\mathbf{y}^{n}),\mathbf{y}^{n+\sigma}) \ge \gamma\left(\left\|w^{n+1}\right\| - \left\|w^{n}\right\|\right)\left\|w^{n+\sigma}\right\|. \tag{19}$$

С учетом (18), (19) из (17) получим оценку

$$\left\|w^{n+1}\right\| \le \left\|w^{n}\right\| + \tau\left\|f^{n+\sigma}\right\|,$$

из которой следует (16).

При рассмотрении системы уравнений (6), (7) схема (11), (14), (15) соответствует

$$y^{n+1} + \gamma A y^{n+1} - w^{n+1} = 0, \tag{20}$$

$$\gamma\frac{w^{n+1}-w^{n}}{\tau} - y^{n+\sigma} + w^{n+\sigma} = \gamma f^{n+\sigma}. \tag{21}$$

Схему (20), (21) можно рассматривать как некий вариант записи стандартной схемы с весом для исходного уравнения (3)

$$(I+\gamma A)\frac{y^{n+1}-y^{n}}{\tau} + A y^{n+\sigma} = f^{n+\sigma}, \tag{22}$$

при введении дополнительных искомых величин.

Для разностной схемы (20), (21) имеем оценку (16), которая с учетом (20) может быть записана в виде

$$\left\|(I+\gamma A)y^{n+1}\right\| \le \left\|(I+\gamma A)u^{0}\right\| + \sum_{k=0}^{n}\tau\left\|f^{k+\sigma}\right\|, \quad n = 0,1,\dots . \tag{23}$$

Оценка (23) имеет место для схемы (22) и выступает сеточным аналогом априорной оценки (4).

Замечание 3. При $0 \le \sigma < 0.5$ мы можем рассчитывать только на условную устойчивость рассматриваемых схем. Например, для случая $\sigma = 0$ устойчивость схем (22) и (20), (21) устанавливается при следующих ограничениях на шаг по времени:

$$\tau \le 2\gamma + \frac{2}{\|A\|}.$$

При не очень малых γ такие ограничения могут быть необременительными. Однако в вычислительном плане схема с $\sigma = 0$ не имеет каких-либо преимуществ перед схемами с $\sigma > 0$, что имеет место в обычных задачах с $\gamma = 0$.

4. СХЕМЫ ПОКОМПОНЕНТНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

При использовании двухслойных разностных схем с весом (20), (21) и (22) решение на новом слое по времени определяется из уравнения

$$(I + (\gamma + \sigma\tau)A)y^{n+1} = \chi^n$$

при заданной правой части

$$\chi^n = (I + (\gamma - (1 - \sigma)\tau)A)y^n + \tau f^{n+\sigma}.$$

Упрощение этой задачи достигается использованием аддитивного представления (5) оператора A, когда решаются отдельные подзадачи для операторов $A_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p$. При построении схем расщепления для задачи (1), (2), (5) естественно ориентироваться на достижения теории и практики [10], [11] аддитивных операторно-разностных схем для стандартных эволюционных задач с $\gamma = 0$.

При аддитивном представлении операторной матрицы $\mathbf{A}$ вместо (9) используется уравнение

$$\mathbf{B}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{p}\mathbf{A}_\alpha\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (24)$$

Принимая во внимание (5) и (11), положим

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} I + \gamma p A_\alpha & -I \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (25)$$

Для операторов (25) имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \geq 0, \quad \mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{p}\mathbf{A}_\alpha \geq 0, \quad \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (26)$$

Наиболее важным является свойство неотрицательности операторов $\mathbf{A}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Для приближенного решения задачи (10), (24)–(26) можно использовать различные варианты схем расщепления. При двухкомпонентном расщеплении ($p = 2$) наибольший интерес представляют факторизованные аддитивные операторно-разностные схемы, которые являются операторными аналогами классических схем переменных направлений [8], [11]. В случае многокомпонентного расщепления ($p > 2$) можно ориентироваться на схемы покомпонентного расщепления, регуляризованные и векторные аддитивные схемы. Для того, чтобы не загромождать текст техническими деталями, рассмотрим чисто неявные схемы покомпонентного расщепления.

Схемы покомпонентного решения для задачи (10), (24)–(26) связываются с последовательным решением цепочки задач

$$\mathbf{B}\frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} + \mathbf{A}_\alpha\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha(t), \quad t^n < t \leq t^{n+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (27)$$

$$\mathbf{u}_1(t^n) = \mathbf{u}_p(t^n), \quad \mathbf{u}_\alpha(t^n) = \mathbf{u}_{\alpha-1}(t^{n+1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (28)$$

при расщеплении правой части:

$$\mathbf{f} = \sum_{\alpha=1}^{p}\mathbf{f}_\alpha, \quad \mathbf{f}_\alpha = \{0, \gamma f_\alpha\}, \quad f = \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha, \quad \alpha = 2, 3, \dots, p.$$

Для начального состояния имеем

$$\mathbf{u}_1(0) = \tilde{\mathbf{u}}^0, \quad \tilde{\mathbf{u}}^0 = \{u^0, \tilde{v}^0\}, \quad \tilde{v}^0 = u^0 + \gamma p A_p u^0. \quad (29)$$

Для приближенного решения каждой промежуточной задачи (27)–(29) будем использовать чисто неявную схему так, что

$$\mathbf{B}\frac{\mathbf{y}^{n+\alpha/p} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \mathbf{A}_\alpha\mathbf{y}^{n+\alpha/p} = \mathbf{f}_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (30)$$

при задании начальных условий

$$\mathbf{y}^0 = \tilde{\mathbf{u}}^0. \tag{31}$$

Применительно к системе уравнений (6), (7) схема (30) дает

$$y^{n+\alpha/p} + \gamma p A_\alpha y^{n+\alpha/p} - w^{n+\alpha/p} = 0, \tag{32}$$

$$\gamma p \frac{w^{n+\alpha/p} - w^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} - y^{n+\alpha/p} + w^{n+\alpha/p} = \gamma p f_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p. \tag{33}$$

Начальные условия для (32), (33) имеют вид

$$y^0 = u^0, \quad w^0 = \tilde{v}^0. \tag{34}$$

Схема (32)–(34) дает следующую покомпонентную схему расщепления для исходного уравнения (3):

$$\frac{y^{n+\alpha/p} + \gamma p A_\alpha y^{n+\alpha/p} - y^{n+(\alpha-1)/p} - \gamma p A_{\alpha-1} y^{n+(\alpha-1)/p}}{\tau} + A_\alpha y^{n+\alpha/p} = f_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{35}$$

$$y^0 = u^0. \tag{36}$$

Переход на новый $n+1$ слой по времени обеспечивается решением p уравнений

$$(I + (\gamma p + \tau)A_\alpha) y^{n+\alpha/p} = \chi_\alpha^n,$$

$$\chi_\alpha^n = (I + \gamma p A_{\alpha-1}) y^{n+(\alpha-1)/p} + \tau f_\alpha^{n+1}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p.$$

Сформулируем аналог теоремы (2).

Теорема 3. *Схема покомпонентного расщепления* (29), (30), (31) *безусловно устойчива, при этом имеет место априорная оценка*

$$\|w^{n+1}\| \le \|\tilde{v}^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|f_\alpha^{k+1}\|, \quad n = 0,1,\ldots . \tag{37}$$

Доказательство. Домножим уравнение (30) на $\tau \mathbf{y}^{n+\alpha/p}$ и, учитывая неотрицательность операторов A_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, получаем

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+\alpha/p} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/p}), \mathbf{y}^{n+\alpha/p}) \le \tau(\mathbf{f}_\alpha^{n+1}, \mathbf{y}^{n+\alpha/p}), \quad \alpha = 1,2,\ldots,p. \tag{38}$$

Для оценки сверху правых частей привлекается неравенство

$$(\mathbf{f}_\alpha^{n+1}, \mathbf{y}^{n+\alpha/p}) = \gamma(f_\alpha^{n+1}, w^{n+\alpha/p}) \le \gamma \|f_\alpha^{n+1}\| \|w^{n+\alpha/p}\|.$$

Левая часть (38) оценивается снизу:

$$(\mathbf{B}(\mathbf{y}^{n+\alpha/p} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/p}), \mathbf{y}^{n+\alpha/p}) = \gamma((w^{n+\alpha/p} - w^{n+(\alpha-1)/p}), w^{n+\alpha/p}) \ge \gamma\left(\|w^{n+\alpha/p}\| - \|w^{n+(\alpha-1)/p}\|\right)\|w^{n+\alpha/p}\|.$$

С учетом этого из (33) следует

$$\|w^{n+\alpha/p}\| \le \|w^{n+(\alpha-1)/p}\| + \tau \|f_\alpha^{n+1}\|, \quad \alpha = 1,2,\ldots,p.$$

На целых шагах по времени получим неравенство

$$\|w^{n+1}\| \le \|w^n\| + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|f_\alpha^{n+1}\|, \quad n = 0,1,\ldots,$$

из которого следует оценка устойчивости (37).

Замечание 4. При рассмотрении схемы (35), (36) оценка (37) принимает вид

$$\|(I + \gamma p A_p) y^{n+1}\| \le \|(I + \gamma p A_p) u^0\| + \sum_{k=0}^{n} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|f_\alpha^{k+1}\|, \quad n = 0,1,\ldots .$$

Сходимость схем покомпонентного расщепления не следует напрямую из соответствующих оценок устойчивости типа (35). Для исследования точности привлекается понятие суммарной аппроксимации [8], [11]. С учетом этого осложняющего обстоятельства при построении схем расщепления можно ориентироваться, например, на векторные аддитивные схемы, в которых проблемы аппроксимации решаются более просто.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. V. 1. Berlin: Springer, 2000.
2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М: Физматлит, 2007.
3. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. New York: Academic Press, 1982.
4. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Kluwer Academic Publ., 1989.
5. *Showalter R.E., Ting T.W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1970. V. 1. № 1. P. 1–26.
6. *Knabner P., Angermann L.* Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. New York: Springer, 2003.
7. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
8. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, 2001.
9. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД, 2021.
10. *Marchuk G.I.* Splitting and alternating direction methods // Handbook of Numerical Analysis. V. I. North-Holland, 1990. P. 197–462.
11. *Vabishchevich P.N.* Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes. Berlin: de Gruyter, 2013.
12. *Vabishchevich P.* On a new class of additive (splitting) operator-difference schemes // Mathematics of Computation. 2012. V. 81. № 277. P. 267–276.
13. *Vabishchevich P.N., Grigor'ev A.V.* Splitting schemes for pseudoparabolic equations // Differential Equations. 2013. V. 49. № 7. P. 807–814.
14. *Vabishchevich P.N.* Flux-splitting schemes for parabolic equations with mixed derivatives // Comput. Mathematics and Mathematical Physics. 2013. V. 53. № 8. P. 1139–1152.

EDN: ATCWCH
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1067–1084

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

НЕЛИНЕЙНЫЙ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА–СЖАТИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ[1)]

Ю. В. Василевский[1,2,*], К. М. Терехов[1,3,]**

[1] 119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ РАН, Россия
[2] 119991 Москва, ул. Трубецкая, 8, стр. 2, Сеченовский университет, Россия
[3] 141701 Долгопрудный, пер. Институтский, 9, МФТИ, Россия
**e-mail: yuri.vassilevski@gmail.com*
***e-mail: terekhov@inm.ras.ru*

Поступила в редакцию 08.01.2022 г.
Переработанный вариант 08.01.2022 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Данная статья посвящена нелинейному методу конечных объемов для решения задачи отслеживания границы раздела сред на неструктурированных адаптивных сетках. Мы рассматриваем подход, основанный на объеме жидкости. Положение фронта описывается долей жидкости в каждой расчетной ячейке. Распространение границы раздела сред включает одновременное решение задачи переноса фракции и задачи сжатия границы раздела. Задача сжатия решается для восстановления резкости границы, которая теряется вследствие численной диффузии. Для дискретизации задачи используется нелинейный монотонный метод конечных объемов. Мы применяем метод к неструктурированным сеткам с адаптивным локальным уточнением. Библ. 62. Фиг. 16.

Ключевые слова: неявное слежение за фронтом, объем жидкости, сжатие границы, нелинейный метод конечных объемов, монотонный метод.

DOI: 10.31857/S0044466922060151

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы отслеживания границы раздела сред востребованы во многих физических приложениях: в задачах течения жидкости со свободной поверхностью [1]–[3], течения многофазных жидкостей [4], течения, вызванного средней кривизной [5]–[8], отвердения сплавов [9], улучшения изображений [10] и других. Многочисленные существующие коды применяют метод объема жидкости для неявного отслеживания границы раздела сред [11]–[15]. В литературе представлены два основных подхода к уменьшению размытия границы: геометрическая реконструкция [16]–[18] и методы сжатия границы [19]–[23]. Последний подход требует решения обратного параболического уравнения в частных производных. Типичной проблемой метода сжатия является искажение границы, которое становится более выраженным при больших шагах по времени [18]. В ряде работ предлагается адаптация параметров сжатия границы для решения этой проблемы [24]–[26]. Популярным альтернативным подходом является метод функции уровня [27]–[30]. Метод функции уровня требует решения задачи реинициализации и не сохраняет массу жидкости, ряд работ направлен на решение этих вопросов [31]–[34]. Мы рассматриваем подход, основанный на объеме жидкости, в сочетании с методом сжатия границы.

В литературе предложен ряд схем высокого разрешения для задачи переноса объема жидкости [35]–[38], в частности, для задачи переноса–сжатия [39], [23], [40]–[42]. В настоящей работе мы используем нелинейный метод конечных объемов, разработанный ранее для задачи анизотропной диффузии [43]–[47], для решения задачи переноса–сжатия. В сочетании с неявной схемой Эйлера первого порядка для производной по времени метод сохраняет физичными границы рассчитанной доли жидкости и допускает шаги по времени с числом Киранта, превышающим еди-

[1)]Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1624 с Минобрнауки РФ).

ницу. Метод применим к неструктурированным сеткам общего вида, т.е. к согласованным сеткам с произвольными многогранными ячейками.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы описываем постановку задачи и нелинейный метод конечных объемов. В разд. 3 мы представляем нашу параллельную технологию для адаптивного сгущения неструктурированных сеток общего вида. В разд. 4 мы рассматриваем численные эксперименты, которые демонстрируют возможности метода и основанной на нем технологии.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Пусть скалярная функция ψ представляет в каждой точке расчетной области Ω долю объема, занимаемую жидкостью, а $\mathbf{u}$ – заданное векторное поле скорости. Перенос неизвестной функции ψ описывается уравнением

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\operatorname{div}(\psi\mathbf{u})=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ \mathbf{n}^{\mathrm{T}}\nabla\psi=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\\ \psi|_{t=0}=\psi^0 \quad \text{в} \quad \Omega,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. На границе мы рассматриваем однородное граничное условие Неймана.

Численное решение уравнения переноса приводит к потере четкости границы раздела сред из-за численной диффузии. Для того чтобы восстановить границу, уравнение переноса (2.1) дополняется членом сжатия границы раздела сред [26], [19]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\psi\mathbf{u}+\alpha\psi(1-\psi)\frac{\nabla\psi}{\|\nabla\psi\|}\right)=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

при тех же начальных и неймановских граничных условиях. Параметр α обычно определяется с помощью $\|\mathbf{u}\|$, он контролирует степень сжатия границы раздела сред. В данной работе мы настраиваем α адаптивно, следуя [26]. В знаменателе мы используем регуляризованную норму Фробениуса.

Замечание 2.1. Задача (2.2) является нелинейной задачей переноса–диффузии: $\frac{\partial\psi}{\partial t}+\operatorname{div}(\psi\mathbf{u}-D\nabla\psi)=0$ с отрицательным коэффициентом диффузии $D=-\alpha\psi(1-\psi)\|\nabla\psi\|^{-1}$, в результате чего (2.2) соответствует обратной (во времени) параболической задаче [48].

2.1. Задача переноса

Пусть Ω покрыта согласованной многогранной сеткой, которая может адаптивно перестраиваться на разных временных шагах. Для ячейки V обозначим ее центр через $\mathbf{x}_V$ и припишем ему степень свободы.

Сначала мы рассмотрим отдельно задачу переноса (2.1). Применяя теорему Остроградского–Гаусса к интегралу по ячейке V, получаем

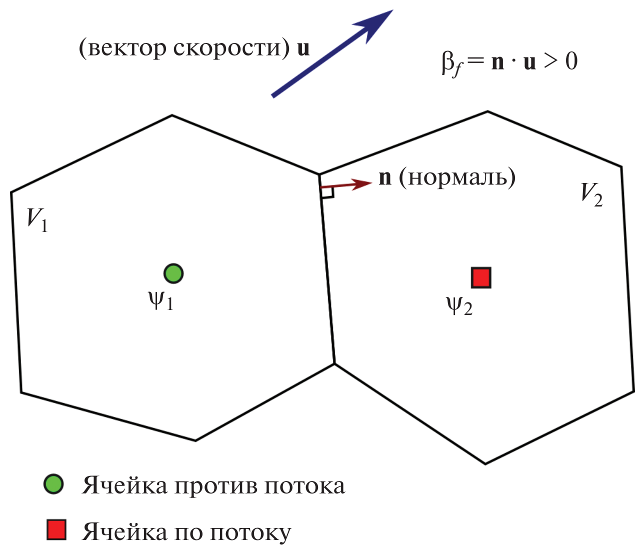
$$\int\limits_V\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\operatorname{div}(\psi\mathbf{u})\right)dV=\int\limits_V\frac{\partial\psi}{\partial t}dV+\oint\limits_{\partial V}\psi d\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}=0, \tag{2.3}$$

которая аппроксимируется со вторым порядком точности следующим образом:

$$|V|\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}_V}+\sum_{f\in\partial V}|f|\beta_f\,\psi|_{\mathbf{x}_f}=0, \tag{2.4}$$

где $|V|$ – объем ячейки V, ограниченной множеством граней ∂V, $|f|$ и $\mathbf{x}_f$ – площадь и барицентр грани f, а β_f – проекция скорости на нормаль грани:

$$\beta_f=\mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{u}|_{\mathbf{x}_f}\approx\frac{1}{|f|}\int\limits_f d\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}. \tag{2.5}$$



Фиг. 1. В методе против потока ψ_1 используется для аппроксимации ψ в барицентре грани.

Знак β_f зависит от ориентации нормали к грани $\mathbf{n}_f$.

Чтобы дискретизировать (2.4), мы должны аппроксимировать производную по времени. Для простоты изложения используем неявную схему первого порядка (неявную схему Эйлера):

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}_V} \approx \left.\frac{\psi^{n+1}-\psi^{n}}{\Delta t}\right|_{\mathbf{x}_V}. \tag{2.6}$$

На практике мы используем схему Кранка–Николсон.

Вектор невязки $R_a(\psi^{n+1})$ для неявной схемы Эйлера (2.4) в ячейке V принимает вид:

$$R_a(\psi^{n+1})\big|_V = |V|\left(\psi^{n+1}-\psi^{n}\right)\big|_{\mathbf{x}_V} + \Delta t\sum_{f\in\partial V}|f|\beta_f^{n+1}\psi^{n+1}\big|_{\mathbf{x}_f}, \tag{2.7}$$

что требует приближения потока $q = \beta_f^{n+1}\psi^{n+1}\big|_{\mathbf{x}_f}$ на каждой грани f.

Вектору невязки $R_a(\psi^{n+1})$ соответствует якобиан

$$J_a(\psi^{n+1}) = \partial R_a(\psi^{n+1})/\partial(\psi^{n+1})^{\mathrm{T}}.$$

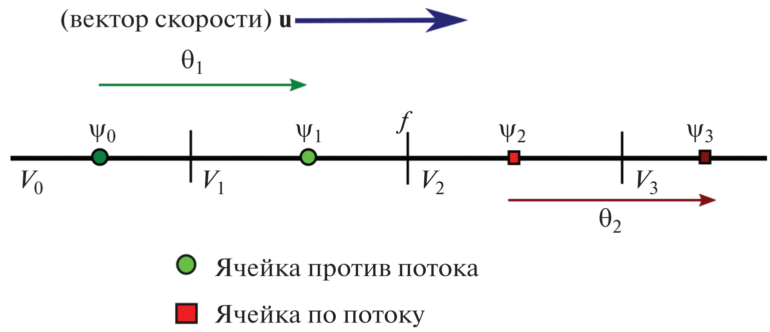
При дальнейшем описании свойств якобиана мы опускаем индекс временного уровня и подразумеваем $\psi \equiv \psi^{n+1}$ и $\beta_f \equiv \beta_f^{n+1}$.

В данной работе мы предполагаем, что на каждом временном слое на гранях сетки задано дискретное бездивергентное поле скорости $\mathbf{u}$

$$0 = \sum_{f\in\partial V}\mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}_f}|f| \approx \sum_{f\in\partial V}\int_f d\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \oint_{\partial V} d\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{u})dV. \tag{2.8}$$

Поскольку $\beta_f = \mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\big|_{\mathbf{x}_f}$ предполагается заданным, ключевым вопросом в приближении потока q является вычисление $\psi\big|_{\mathbf{x}_f}$.

Рассмотрим внутреннюю грань $f = V_1 \cap V_2$ с нормалью $\mathbf{n}_f$, направленной наружу ячейки V_1 и внутрь ячейки V_2. Пусть $\beta_f > 0$, тогда метод против потока аппроксимирует $\psi\big|_{\mathbf{x}_f} = \psi_1$ с первым порядком точности (см. фиг. 1).



Фиг. 2. Обозначения для одномерной антидиффузионной поправки.

При такой аппроксимации $\psi|_{\mathbf{x}_f}$ в (2.7) строка якобиана, соответствующая переносу в ячейке V_1, окруженной соседями V_k, собирается следующим образом:

$$J_a|_{V_1} \leftarrow \Delta t\left(\sum_{f\in\partial V_1}\frac{|\beta_f|+\beta_f}{2}\right)\partial\psi_1 - \Delta t\sum_{f\in\partial V_1\cap V_k}\frac{|\beta_f|-\beta_f}{2}\partial\psi_k, \tag{2.9}$$

что приводит к якобиану, который является М-матрицей [49]. Действительно, диагональные элементы якобиана положительны, а внедиагональные элементы отрицательны, и в силу условия (2.8) сумма элементов строки равна нулю.

Приближение второго порядка для q достигается антидиффузионной поправкой

$$\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1)^{\mathrm{T}}\nabla\psi. \tag{2.10}$$

Сперва рассмотрим антидиффузионную поправку на одномерной сетке с одинаковыми расстояниями $h/2$ между центрами коллокации и гранями. Используя обозначения из фиг. 2, введем два различных приближения для поправки $\vartheta = (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1)^{\mathrm{T}}\nabla\psi$ в точке $\mathbf{x}_f$:

$$\vartheta_1 = \frac{\psi_1-\psi_0}{2},\quad \vartheta_2 = \frac{\psi_3-\psi_2}{2}, \tag{2.11}$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — приближения в ячейках V_1 и V_2 соответственно. С этими поправками мы получаем два приближения второго порядка $\psi|_{\mathbf{x}_f}$:

$$\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + \vartheta_1 = \frac{3\psi_1-\psi_0}{2},\quad \psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + \vartheta_2 = \psi_1 + \frac{\psi_3-\psi_2}{2}, \tag{2.12}$$

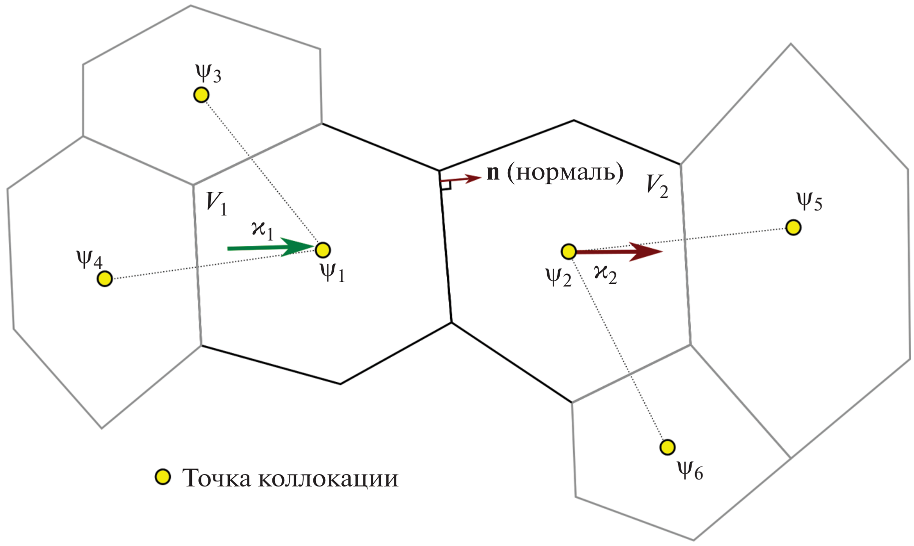
со следующими вариациями:

$$\partial\psi_1 + \partial\vartheta_1 = \frac{3}{2}\partial\psi_1 - \frac{1}{2}\partial\psi_0,\quad \partial\psi_1 + \partial\vartheta_2 = \partial\psi_1 + \frac{1}{2}\partial\psi_3 - \frac{1}{2}\partial\psi_2. \tag{2.13}$$

Поправки ϑ_1 и ϑ_2 не меняют значения суммы в строке у матрицы Якоби. Приближения второго порядка $\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + \vartheta_1$ в ячейке V_1 и $\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + \vartheta_2$ в ячейке V_2 вносят вклад в матрицу Якоби следующим образом:

$$\begin{aligned} J_a|_{V_1} &\leftarrow \Delta t|f|\left(\frac{3\beta_f}{2}\partial\psi_1 - \frac{\beta_f}{2}\partial\psi_0\right),\\ J_a|_{V_2} &\leftarrow \Delta t|f|\left(\frac{\beta_f}{2}\partial\psi_2 - \beta_f\partial\psi_1 - \frac{\beta_f}{2}\partial\psi_3\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

что сохраняет свойство М-матрицы. Однако использование разных приближений потока q с разных сторон грани f нарушает закон сохранения. Чтобы сделать поток единственным, мы рас-



Фиг. 3. Обозначения для двумерной антидиффузионной коррекции на многоугольной сетке.

сматриваем нелинейную выпуклую комбинацию двух приближений с неотрицательными коэффициентами $\mu_1 + \mu_2 = 1$:

$$\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + \mu_1\vartheta_1 + \mu_2\vartheta_2. \tag{2.15}$$

Воспользуемся весами, известными как ограниченные средние Ван Лира [50]:

$$\mu_1 = \frac{|\vartheta_2|}{|\vartheta_1| + |\vartheta_2|}, \quad \mu_2 = \frac{|\vartheta_1|}{|\vartheta_1| + |\vartheta_2|}, \tag{2.16}$$

получим $\mu_1\vartheta_1 + \mu_2\vartheta_2 = 0$ для $\vartheta_1\vartheta_2 < 0$ и $\mu_1\vartheta_1 + \mu_2\vartheta_2 = 2\mu_1\vartheta_1 = 2\mu_2\vartheta_2$ для $\vartheta_1\vartheta_2 > 0$. Чтобы избежать деления на ноль, оператор взятия модуля в (2.16) регуляризируем следующим образом $|x|_\varepsilon = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$, где ε – малая константа.

Пренебрегая вариациями μ_1 и μ_2 и рассматривая в случае $\vartheta_1\vartheta_2 > 0$ приближение $\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + 2\mu_1\vartheta_1$ для V_1 и $\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + 2\mu_2\vartheta_2$ для V_2, мы получаем следующие вклады приближений (2.15) в якобиан:

$$\begin{aligned} J_a|_{V_1} &\leftarrow \Delta t|f|\left((\beta_f + \beta_f\mu_1)\partial\psi_1 - \beta_f\mu_1\partial\psi_0\right), \\ J_a|_{V_2} &\leftarrow \Delta t|f|\left(\beta_f\mu_2\partial\psi_2 - \beta_f\partial\psi_1 - \beta_f\mu_2\partial\psi_3\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Данный прием известен как метод Пикара [51], который сохраняет свойство М-матрицы у якобиана на каждой нелинейной итерации и свойство консервативности при сходимости нелинейных итераций. На практике мы используем аппроксимацию (2.15) в рамках метода Ньютона.

Антидиффузионная поправка легко обобщается на неструктурированные многогранные сетки в d измерениях. Опять же, мы предполагаем, что $\beta_f > 0$ и, таким образом, V_1 является ячейкой против потока. Найдем две поправки ϑ_1 и ϑ_2, используя комбинации соседних точек коллокации, см. фиг. 3 для двумерного случая. Определим антидиффузионную поправку $\vartheta_1 = \left(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1\right)^{\mathrm{T}} \nabla\psi$ для грани f в ячейке V_1 следующим образом.

Пусть множество $\boldsymbol{\sigma}_1$ состоит из ячеек V_k с точкой коллокации $\mathbf{x}_k$, имеющих хотя бы один общий узел с ячейкой V_1, и примыкающих к V_1 граничных граней с нормалью $\mathbf{n}_{f_k}$. Для каждого элемента e_k из $\boldsymbol{\sigma}_1$ мы определим вектор $\mathbf{v}_k$ и значение ψ_k:

$$(\mathbf{v}_k, \psi_k) = \begin{cases} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_1, \psi_k), & \text{если} \quad e_k - \text{ячейка}, \\ (\mathbf{n}_{f_k}, \psi_1), & \text{если} \quad e_k - \text{грань}. \end{cases}$$

Отметим, что скалярное произведение вектора $\mathbf{v}_k$ с градиентом $\nabla\psi$ представляет собой конечную разность в направлении $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\nabla\psi = \psi_k - \psi_1$, а в случае, когда e_k – граничная грань, $\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}}\nabla\psi = \psi_1 - \psi_1 = 0$ определяет однородное граничное условие Неймана. В множестве $\boldsymbol{\sigma}_1$ выберем d элементов e_{i_k}, $k = 1,\ldots,d$, обеспечивающих $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_f = \sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\mathbf{v}_{i_k}$ с неотрицательными весами $\gamma_{i_k} \geq 0$, которые минимизируют выражение

$$\sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\left\|\frac{\mathbf{v}_{i_k}}{\|\mathbf{v}_{i_k}\|} - \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_f}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_f\|}\right\|, \tag{2.18}$$

тогда антидиффузионная поправка ϑ_1 представляется в виде

$$\vartheta_1 = \left(\sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\right)\psi_1 - \sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\psi_{i_k}, \tag{2.19}$$

где для граничной грани имеем $\psi_{i_k} = \psi_1$. Вклад поправки ϑ_1 сохраняет строчные суммы в якобиане и его свойство М-матрицы:

$$\partial\vartheta_1 = \left(\sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\right)\partial\psi_1 - \sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\partial\psi_{i_k}. \tag{2.20}$$

На каждой граничной грани f, прилегающей к ячейке V_1, единственное приближение с поправкой $\psi|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_1 + \vartheta_1$ также сохраняет свойства якобиана как М-матрицы.

Отметим, что изменение направления аппроксимированного вектора $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_f$ на $\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1$ требует изменения знаков коэффициентов в (2.19), (2.20).

Аналогично, используя множество $\boldsymbol{\sigma}_2$ для ячейки V_2, выберем в множестве $\boldsymbol{\sigma}_2$ d элементов e_{i_k}, $k = 1,\ldots,d$, обеспечивающих $\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1 = \sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\mathbf{v}_{i_k}$ с неотрицательными весами $\gamma_{i_k} \geq 0$, которые минимизируют выражение

$$\sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\left\|\frac{\mathbf{v}_{i_k}}{\|\mathbf{v}_{i_k}\|} - \frac{\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1\|}\right\|,$$

тогда антидиффузионная поправка в ячейке V_2 имеет вид

$$\vartheta_2 = \sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\psi_{i_k} - \left(\sum_{k=1}^{d}\gamma_{i_k}\right)\psi_2.$$

Значение $\psi|_{\mathbf{x}_f}$ аппроксимируется нелинейной комбинацией (2.15) с коэффициентами (2.16).

2.2. Сжатие границы раздела сред

Рассмотрим интеграл по ячейке для уравнения сжатия границы раздела сред:

$$\int_V \operatorname{div}\left(\alpha\psi(1-\psi)\frac{\nabla\psi}{\|\nabla\psi\|}\right)dV = \oint_{\partial V}\alpha\psi(1-\psi)d\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\frac{\nabla\psi}{\|\nabla\psi\|}. \tag{2.21}$$

Невязка неявной схемы Эйлера для конечного объема V (2.2) имеет вид

$$R(\psi)|_V = R_a(\psi)|_V + \Delta t\sum_{f\in\partial V}|f|\,\alpha\psi(1-\psi)\|\nabla\psi\|^{-1}\mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\nabla\psi\big|_{\mathbf{x}_f}, \tag{2.22}$$

где $R_a(\psi)|_V$ определяется в (2.7).

В задаче (2.22) необходимо дискретизировать поток сжатия c:

$$c = \alpha\psi(1-\psi)\|\nabla\psi\|^{-1}\mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\nabla\psi\big|_{\mathbf{x}_f} = \varkappa_f\psi(1-\psi)|_{\mathbf{x}_f}, \tag{2.23}$$

где $\varkappa_f = \alpha\|\nabla\psi\|^{-1}\mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\nabla\psi\big|_{\mathbf{x}_f}$ – нормальная составляющая скорости сжатия.

Учитывая нормальную составляющую β_f скорости $\mathbf{u}$ на грани f, общей для ячеек V_1 и V_2, определим аппроксимацию параметра α в ячейке V_j, $j = 1,2$:

$$\alpha_{f,j} = |\beta_f| \frac{\left|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^{\mathrm{T}} \nabla \psi_j\right| + \Delta t \left|\mathbf{u}_{f,j}^{\mathrm{T}} \nabla \psi_j\right|}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \|\nabla \psi_j\| + \Delta t \|\mathbf{u}_{f,j}\| \|\nabla \psi_j\|}. \tag{2.24}$$

Данный параметр [26] позволяет избежать складок на поверхности границы раздела сред [18] и таким образом улучшает общепринятый выбор $\alpha = |\beta_f|$ [24], [19].

В формуле (2.24) используются вектора $\mathbf{u}_{f,j}$ и градиенты $\nabla\psi_j$ в ячейке V_j, $j = 1,2$. Вектор скорости $\mathbf{u}_{f,j}$ в ячейке V_j восстанавливается из нормальных скоростей граней [52]:

$$\mathbf{u}_{f,j} = \beta_f \mathbf{n}_f + \left(\mathbb{I} - \mathbf{n}_f \mathbf{n}_f^{\mathrm{T}}\right) \frac{1}{|V_j|} \sum_{f_k \in \partial V_j} |f_k| \beta_{f_k} \left(\mathbf{x}_{f_k} - \mathbf{x}_j\right). \tag{2.25}$$

Градиент $\nabla\psi_i$ в любой ячейке V_i восстанавливается методом наименьших квадратов: множество $\boldsymbol{\sigma}_i$ дает уравнения $\mathbf{v}_k^{\mathrm{T}} \nabla\psi_i = \psi_k - \psi_i$, которые собираются в систему $A_i \nabla\psi_i = \mathbf{r}_i$. Система решается методом наименьших квадратов $\nabla\psi_i = (A_i^{\mathrm{T}} A_i)^{-1} A_i^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_i$. В дальнейшем мы пренебрегаем вариацией градиента в якобиане, $\partial \|\nabla\psi_i\| = 0$.

Для восстановления нормальной компоненты скорости сжатия $\varkappa_{f,1}$ на грани f ячейки V_1 используем множество $\boldsymbol{\sigma}_1$ и определим подмножество $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1$ допустимых шаблонов, обеспечивающих $\sum_{k=1}^{d} \gamma_{i_k} \mathbf{v}_{i_k} = -\mathbf{n}_f$ при $\gamma_{i_k} \geq 0$, и вычислим их средневзвешенное значение

$$\varkappa_{f,1} = \alpha_{f,1} \|\nabla\psi_1\|^{-1} \sum_{e_{i_k} \in \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1} \sum_{k=1}^{d} \gamma_{i_k} \left(\psi_1 - \psi_{i_k}\right) / \sum_{e_{i_k} \in \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1} \left(\sum_{k=1}^{d} \gamma_{i_k} \right)^{-2}. \tag{2.26}$$

Такое усреднение приводит к сглаживанию аппроксимации градиента [19]. Вычисление $\varkappa_{f,2}$ на грани f ячейки V_2 производится аналогично. Поскольку $\psi_j \in [0,1]$, выражение $\psi_j(1-\psi_j) \in [0, 1/4]$ и, следовательно, вклады $\psi_j(1-\psi_j)\partial\varkappa_{f,j}$ из $\varkappa_{f,j}$ в якобиан дают нулевую строчную сумму и сохраняют свойство М-матрицы, $j = 1,2$.

На граничной грани f, смежной с ячейкой V_j, скорость сжатия $\varkappa_{f,j}$ равна нулю из-за граничного условия Неймана.

Остается построить дискретизацию $\psi(1-\psi)\big|_{\mathbf{x}_f}$ в сжимающем потоке $c_{f,j} = \varkappa_{f,j}\psi(1-\psi)\big|_{\mathbf{x}_f}$ на грани $f = V_1 \cap V_2$, для каждой ячейки V_j, $j = 1,2$. Как только это будет сделано, мы используем их линейную комбинацию для определения единого сжимающего потока c_f на грани f:

$$c_f = \mu_1 c_{f,1} + \mu_2 c_{f,2}, \tag{2.27}$$

где коэффициенты выбираются аналогично (2.16):

$$\mu_1 = \frac{|c_{f,2}|}{|c_{f,1}| + |c_{f,2}|}, \quad \mu_2 = \frac{|c_{f,1}|}{|c_{f,1}| + |c_{f,2}|}. \tag{2.28}$$

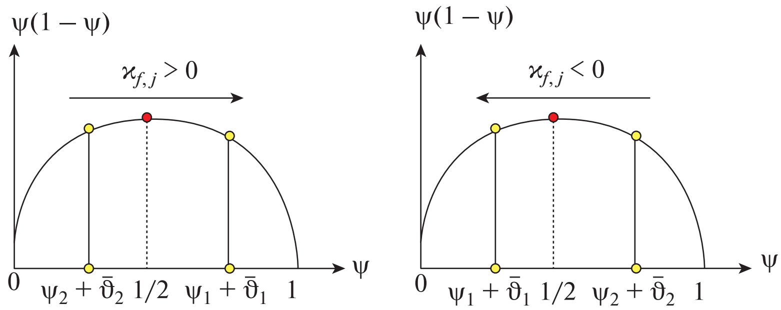
Аппроксимация $c_{f,j}$ основана на стратегии аппроксимации против потока, применяемой к нелинейной немонотонной функции $\psi(1-\psi)$:

$$c_{f,j} = \left(\nu_{1,j} c_{1,j} + \nu_{2,j} c_{2,j} + \varepsilon c_{1/2,j}\right) / \left(\nu_{1,j} + \nu_{2,j} + \varepsilon\right), \tag{2.29}$$

где $\varepsilon > 0$ – малая константа, а коэффициенты $\nu_{i,j} \geq 0$ выбираются по формулам

$$\begin{aligned} \nu_{1,j} &= \max\left(\operatorname{sgn}(\varkappa_{f,j})\left(1 - 2\left(\psi_1 + \overline{\vartheta}_{1,j}\right)\right), 0\right), \\ \nu_{2,j} &= -\min\left(\operatorname{sgn}(\varkappa_{f,j})\left(1 - 2\left(\psi_2 + \overline{\vartheta}_{2,j}\right)\right), 0\right), \end{aligned} \tag{2.30}$$

антидиффузионные поправки в ячейке V_j равны $\overline{\vartheta}_{i,j} = \left(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i\right)^{\mathrm{T}} \nabla\psi_j$, $i, j = 1,2$.



Фиг. 4. Два случая, когда оба односторонних приближения недопустимы.

Стратегия аппроксимации против потока для ненулевой $\varkappa_{f,j}$ приводит к трем возможным случаям: дискретизация с обеих сторон f допустима ($\nu_{1,j}$ и $\nu_{2,j}$ оба положительны), дискретизация с одной из сторон допустима ($\nu_{1,j}$ или $\nu_{2,j}$ положительно), и ни одна из дискретизаций не допустима ($\nu_{1,j}$ и $\nu_{2,j}$ оба равны 0). Последний случай проиллюстрирован на фиг. 4. Максимум функции (красный круг) находится между двумя приближениями $\psi|_{\mathbf{x}_f}$ (желтые круги). В этом случае допустимая дискретизация получается при рассмотрении аппроксимации в максимуме $\psi(1-\psi)|_{\mathbf{x}_f} \approx 1/4$, что приводит к

$$c_{1/2,j} = \frac{\varkappa_{f,j}}{4}, \quad \partial c_{1/2,j} = \frac{\partial \varkappa_{f,j}}{4}.$$

В результате мы добавляем ε-взвешенный член в (2.29).

Используя разложение в ряд Тейлора второго порядка в ячейке V_j и $\partial[\psi_i(1-\psi_i)] = [1-2\psi_i]\partial\psi_i$, мы получаем

$$\psi(1-\psi)|_{\mathbf{x}_f} \approx \psi_i(1-\psi_i) + (1-2\psi_i)(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i)^{\mathrm{T}}\nabla\psi_j = \psi_i(1-\psi_i) + (1-2\psi_i)\overline{\vartheta}_{i,j}. \tag{2.31}$$

Поскольку $0 \le \psi(1-\psi) \le \frac{1}{4}$, антидиффузионная поправка должна быть ограничена множителем $\eta_{i,j} \in [0,1]$, чтобы удовлетворять

$$0 \le \psi_i(1-\psi_i) + (1-2\psi_i)\eta_{i,j}\overline{\vartheta}_{i,j} \le \frac{1}{4}. \tag{2.32}$$

Из условия (2.32) получим

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{(1-2\psi_i)\overline{\vartheta}_{i,j}}\begin{cases} \frac{1}{4} - \psi_i(1-\psi_i), & (1-2\psi_i)\overline{\vartheta}_{i,j} > 0, \\ -\psi_i(1-\psi_i), & (1-2\psi_i)\overline{\vartheta}_{i,j} < 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

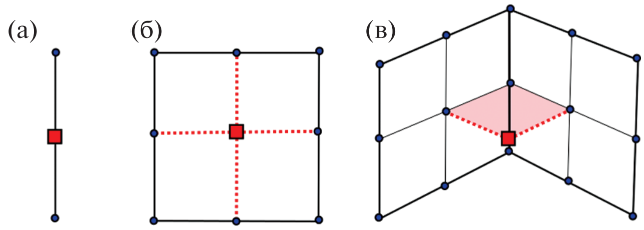
Используя (2.23), получаем односторонние приближения $c_{i,j}$ сжимающего потока на грани f ячейки V_j

$$c_{i,j} = \varkappa_{f,j}\psi_i(1-\psi_i) + \varkappa_{f,j}(1-2\psi_i)\eta_{i,j}\overline{\vartheta}_{i,j}. \tag{2.34}$$

Вариация данного приближения

$$\partial c_{i,j} = \left(\psi_i(1-\psi_i) + (1-2\psi_i)\eta_{i,j}\overline{\vartheta}_{i,j}\right)\partial\varkappa_{f,j} + \varkappa_{f,j}\left(1 - 2\left(\psi_i + \eta_{i,j}\overline{\vartheta}_i^j\right)\right)\partial\psi_i + \varkappa_{f,j}(1-2\psi_i)\eta_{i,j}\partial\overline{\vartheta}_{i,j} \tag{2.35}$$

накладывает ограничения на выбор аппроксимации $c_{i,j}$: последняя допустима, если коэффициент при $\partial\psi_i$ в (2.35) имеет знак $(-1)^{i+1}$, $i = 1,2$. Данное обстоятельство приводит к правилам дискретизации против потока (2.29)–(2.30). Поправки $\overline{\vartheta}_{i,j}$ восстанавливаются в ячейке V_j по (2.18)–(2.19) с учетом знака $\varkappa_{f,j}(1-2\psi_i)$ при $\partial\overline{\vartheta}_{i,j}$.



Фиг. 5. Шаги измельчения ребра (а), измельчения грани (б) и введения граней, разбивающих ячейку (в). Красным цветом обозначены новые элементы на каждом шаге.

По построению каждый поток $c_{f,j}$ сохраняет знаки в матрице Якоби, когда вклад сжимающего потока ассемблируется в уравнение соответствующей ячейки V_j. Однако свойство нулевой суммы по строке матрицы нарушается, поскольку скорость сжатия не является бездивергентной. В результате метод сжатия границы раздела сред может породить новый экстремум решения в промежутке $[0,1]$ даже для неявной схемы Эйлера.

2.3. Итерационное решение нелинейной алгебраической системы

Для решения нелинейной системы применим метод Ньютона. Пусть ξ^l – приближение к ψ^{n+1} на l-й итерации, в качестве начального приближения возьмем решение с предыдущего шага по времени $\xi^0 = \psi^n$. На итерации метода Ньютона найдем решение линейной системы

$$J(\xi^l)\Delta\xi = -R(\xi^l), \tag{2.36}$$

где $R(\xi^l)$ – невязка из (2.22), а $J(\xi^l) = \partial R(\xi^l)/\partial(\xi^l)^{\mathrm{T}}$ – соответствующий якобиан. Следующее приближение получается по формуле

$$\xi^{l+1} = \xi^l + \omega\Delta\xi. \tag{2.37}$$

Параметр ω ограничивает максимальное изменение ξ^l в (2.37) на любой ячейке V_k: $\omega \le 0.3/|\Delta\xi_k|$ [53]. Итерации могут стагнировать, поэтому мы применяем следующую эвристику, уменьшая ω с ростом числа нелинейных итераций l:

$$\omega = \min\left(\omega, \frac{1+\exp\left(-\frac{5}{2}\right)}{1+\exp\left(\frac{l}{6}-\frac{5}{2}\right)}\right). \tag{2.38}$$

Параметр ω является единственным ограничением при вычислении следующего итерационного приближения в методе Ньютона.

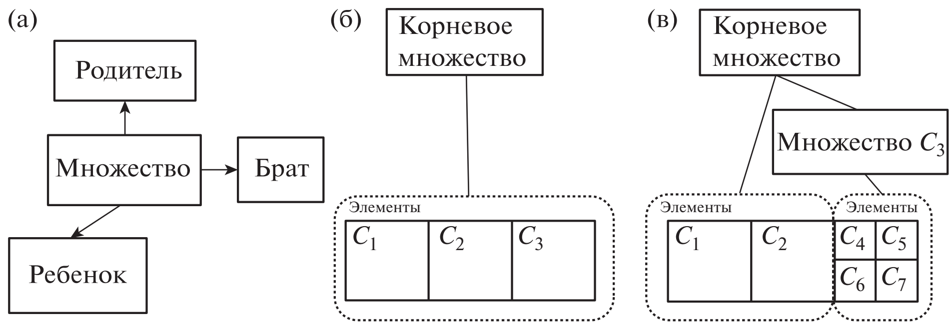
Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие $\left\|R(\xi^l)\right\| \le \min\left(\tau_{\mathrm{abs}}, \tau_{\mathrm{rel}}\left\|R(\psi^n)\right\|\right)$, где $\tau_{\mathrm{abs}} = 10^{-9}$, $\tau_{\mathrm{rel}} = 10^{-2}$. Линейная система (2.36) собирается и решается с использованием функционала платформы INMOST [54]–[56].

3. АДАПТАЦИЯ СЕТКИ

Для динамической адаптации неструктурированных сеток на многопроцессорных системах мы используем инструментарий платформы INMOST (www.inmost.org). Подробное описание алгоритмов доступно по ссылкам [54], [57], [58].

Ячейка многогранной сетки локально измельчается путем введения нового узла в центре ячейки и висячих узлов в центрах граней и ребер, и дальнейшего разбиения ячейки, граней и ребер, как показано на фиг. 5. Сгущение является постепенным: две соседние ячейки могут отличаться не более чем на один уровень измельчения.

Локальное огрубление использует иерархию множеств элементов сетки, представленных в виде древовидной структуры, см. фиг. 6. При измельчении ячейки к родительскому (корневому)



Фиг. 6. Организация множеств элементов в древовидную структуру (а). Исходная неразделенная сетка из трех ячеек (б). После разбиения ячейки C_3 к родительскому (корневому) набору присоединяется новый набор (в). Это множество запоминает все мелкие ячейки, образующие исходную ячейку C_3.

множеству присоединяется новое множество с уникальным именем, представляющим данную ячейку. Все новые ячейки становятся элементами этого множества, как показано на фиг. 6. Огрубление ячеек может быть выполнено только на листовом множестве древовидной структуры, возникшем в результате сгущения. Информация, хранящаяся в этом множестве, используется для управления локальным огрублением.

При проходе по сетке происходит измельчение или огрубление не более чем на один уровень. В параллельной среде, после каждого прохода, автоматически восстанавливается согласованность сетки между процессорами, а также недостающие или избыточные элементы перекрывающихся слоев [58], [54]. В данной работе мы используем пакет Parmetis для разбиения сетки [59], [60].

Для передачи данных при измельчении/огрублении используется состояние модификации сетки. В состоянии модификации все старые элементы сохраняются до конца состояния, так что решение может быть интерполировано со старых элементов сетки на новые элементы сетки.

На подготовительном этапе мы вычисляем градиенты для ψ^{n+1} и ψ^n с помощью метода наименьших квадратов. На этапе измельчения интерполяция со старой ячейки V_0 на новые ячейки V_i вычисляется следующим образом:

$$\psi_i = \psi_0 + \eta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}\nabla\psi_0, \quad \nabla\psi_i = \nabla\psi_0, \tag{3.1}$$

где η выбирается так, чтобы удовлетворять условию для новых ячеек V_i

$$\min_{V_j\in\mathcal{V}_n(V_0)}(\psi_j) \le \psi_0 + \eta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}\nabla\psi_0 \le \max_{V_j\in\mathcal{V}_n(V_0)}(\psi_j), \tag{3.2}$$

здесь $\psi - \psi^{n+1}$ или ψ^n, а $\mathcal{V}_n(V_0)$ – множество ячеек, имеющих хотя бы один общий узел с ячейкой V_0. Такая интерполяция консервативна при условии $\sum_i |V_i|\mathbf{x}_i = |V_0|\mathbf{x}_0$ и монотонна в силу (3.2). При огрублении V_i в ячейку V_0 мы используем простое усреднение:

$$\psi_0 = |V_0|^{-1}\sum_i |V_i|\psi_i, \quad \nabla\psi_0 = |V_0|^{-1}\sum_i |V_i|\nabla\psi_i, \tag{3.3}$$

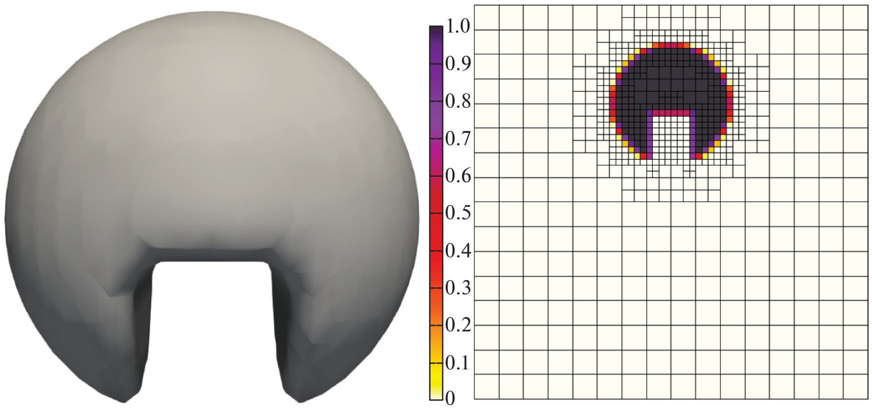
которое является монотонным и консервативным.

Критерий измельчения основан на оценке изменения решения на гранях сетки. Пусть f – грань, разделяющая ячейки V_1 и V_2. Обе ячейки будут помечены для измельчения, если максимальный уровень сгущения не будет превышен, и если

$$\frac{|\psi_2^{n+1} - \psi_1^{n+1}|}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} > 5. \tag{3.4}$$

Ячейка огрубляется, если ни одна из ее граней не указывает на необходимость измельчения, и если минимальный уровень огрубления не достигнут.

Приближенное решение нестационарной задачи (2.2) методом конечных объемов с адаптацией сетки происходит следующим образом.



Фиг. 7. Изоповерхность $\psi = 0.5$ и срединный ($z = 0.5$) срез сетки при $t = 0$, раскрашенный согласно палитре $\psi \in [0,1]$. Аналогичная палитра используется на следующих рисунках.

Шаг 1. Решим уравнение переноса (2.1) для $\tilde{\psi}^{n+1}$, используя дискретизацию первого порядка против потока и неявную схему Эйлера за одну линейную итерацию, чтобы предсказать положение границы раздела на следующем временном шаге.

Шаг 2. Локально измельчим сетку, используя изменение $\tilde{\psi}^{n+1}$ на гранях сетки, сбалансируем сетку между процессорами и интерполируем $\tilde{\psi}^{n+1}$ и ψ^n на измельченную сетку.

Шаг 3. Выполним несколько итераций Ньютона для задачи переноса (2.1), используя нелинейную дискретизацию второго порядка по пространству в сочетании со схемой Кранка–Николсон, чтобы получить лучшее начальное предположение $\hat{\psi}^{n+1}$ для следующего шага.

Шаг 4. Решим уравнение переноса–сжатия (2.2) с помощью нелинейной дискретизации второго порядка по пространству в сочетании со схемой Кранка–Николсон для получения ψ^{n+1}, при этом $\hat{\psi}^{n+1}$ используется как начальное приближение для ньютоновских итераций.

Шаг 5. Выполним огрубление сетки, используя изменение ψ^{n+1} на гранях сетки, сбалансируем сетку между процессорами и интерполируем ψ^{n+1} и ψ^n на огрубленную сетку.

Функции $\tilde{\psi}^{n+1}$, $\hat{\psi}^{n+1}$ и ψ^{n+1} обеспечивают приближение положения границы раздела сред по изоповерхности значения $\psi = 0.5$ с разной точностью, наилучшее приближение обеспечивает ψ^{n+1}, наихудшее – $\tilde{\psi}^{n+1}$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

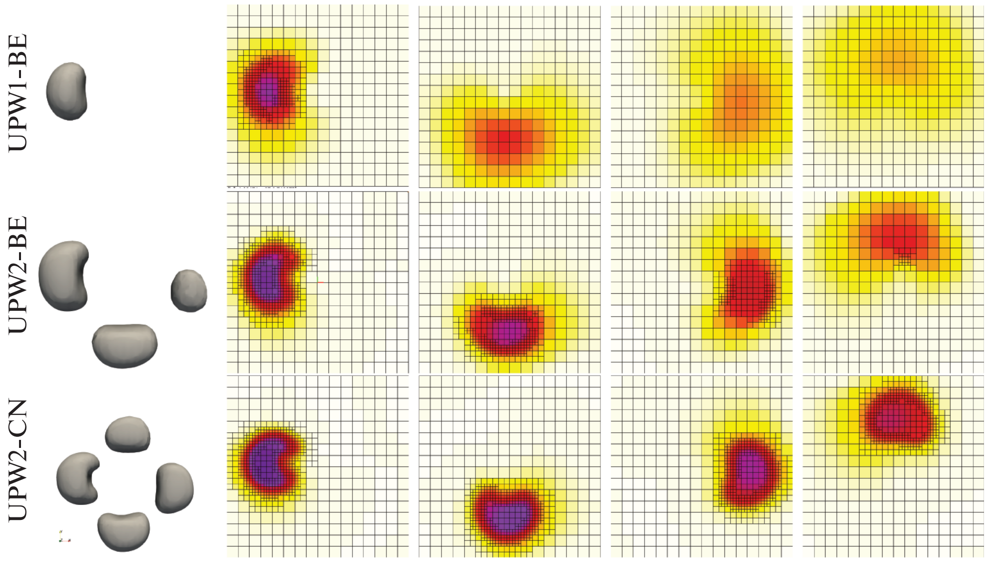
4.1. Тест Залесака

Рассмотрим тест Залесака со сферой [61], вращающейся в поле скорости $\mathbf{u} = [u, v, w]^{\mathrm{T}}$

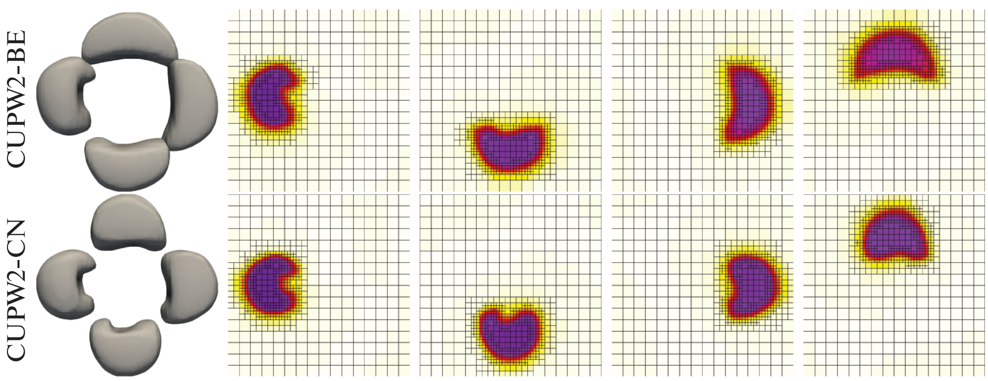
$$u = \pi\left(\frac{1}{2} - y\right), \quad v = \pi\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad w = 0, \tag{4.1}$$

заданном в единичном кубе $\Omega = [0,1]^3$.

Вращающийся объект определяется сферой радиусом $r = 0.15$ с центром в точке $\mathbf{x} = [0.5, 0.75, 0.5]^{\mathrm{T}}$, с выемкой, образованной областью $[0.45, 0.55] \otimes [0.6, 0.725] \otimes [0,1]$. Проекция скорости на грань ячейки β_f и фракции жидкости в ячейках ψ вычисляются путем деления многоугольников и многогранников на треугольники и тетраэдры, соответственно, и интегрированием средних значений с 7-м порядком точности. Фракция жидкости ψ равна 1 внутри объекта и 0 вне объекта. Задача интегрируется по времени $t \in [0, 2]$, за которое объект выполняет один оборот.



Фиг. 8. Изоповерхность $\psi = 0.5$ и срединный ($z = 0.5$) срез сетки при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, окрашенный согласно палитре ψ. Решение (2.1) противопотоковым методом первого порядка с неявной схемой Эйлера (UPW1-BE), нелинейным методом конечных объемов второго порядка с неявной схемой Эйлера (UPW2-BE), нелинейный метод конечных объемов второго порядка со схемой Кранка–Николсон (UPW2-CN). Шаг по времени $\Delta t = 0.01$ и $K \approx 1$.

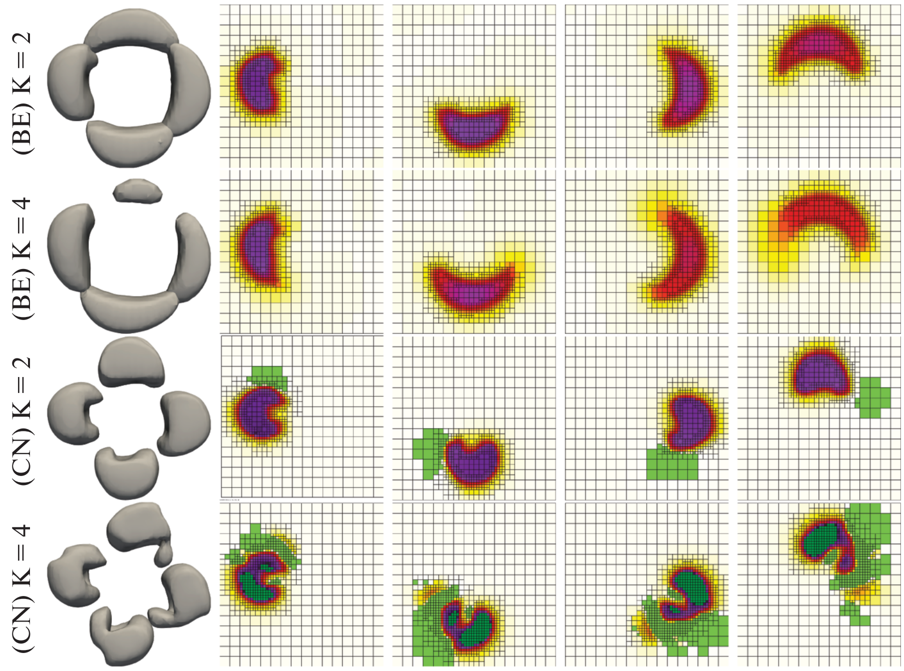


Фиг. 9. Изоповерхность $\psi = 0.5$ и срединный ($z = 0.5$) срез сетки при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, окрашенный согласно палитре ψ. Решение (2.2) методом нелинейных конечных объемов второго порядка с неявной схемой Эйлера (CUPW2-BE), нелинейным методом конечных объемов второго порядка со схемой Кранка–Николсон (CUPW2-CN). Шаг по времени $\Delta t = 0.01$ и $K \approx 1$.

Начальная сетка получена из кубической сетки $16 \times 16 \times 16$ с двумя уровнями измельчения к границе раздела сред, см. фиг. 7. Полученная адаптивная сетка с двумя уровнями уточнения является согласованной, если ее кубические ячейки рассматривать как многогранные. Объект отображается с помощью программы визуализации Paraview [62] через изоповерхность $\psi = 0.5$.

На фиг. 8 мы демонстрируем влияние использования дискретизации второго порядка для решения задачи переноса (2.1) с шагом по времени $\Delta t = 0.01$ и числом Куранта $K \approx 1$. Точность дискретизации как по времени, так и по пространству очень важна. Однако схема является достаточно диссипативной и сильное размазывание границы раздела приводит к огрублению сетки, что еще больше снижает точность восстановленной границы раздела сред.

На фиг. 9 мы приводим сравнение нелинейного метода конечных объемов для задачи переноса–сжатия (2.2) с дискретизациями по времени неявной схемой Эйлера и схемой Кранка–Николсон с шагом по времени $\Delta t = 0.01$, $K \approx 1$. Метод сжатия значительно улучшает разрешение



Фиг. 10. Изоповерхность $\psi = 0.5$ и срединный ($z = 0.5$) срез сетки при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, окрашенный согласно палитре ψ. Решение (2.2) нелинейным методом конечных объемов второго порядка с неявной схемой Эйлера (BE) и схемой Кранка–Николсон (CN) с шагом по времени $\Delta t = 0.02$, $K \approx 2$ (вверху) и $\Delta t = 0.04$, $K \approx 4$ (внизу). Темно-зеленый и светло-зеленый цвета соответствуют $\psi < 0$ и $\psi > 1$ соответственно.

границы раздела сред. Схема Кранка–Николсон разрешает форму объекта лучше, чем неявная схема Эйлера, сохраняя при этом монотонное решение.

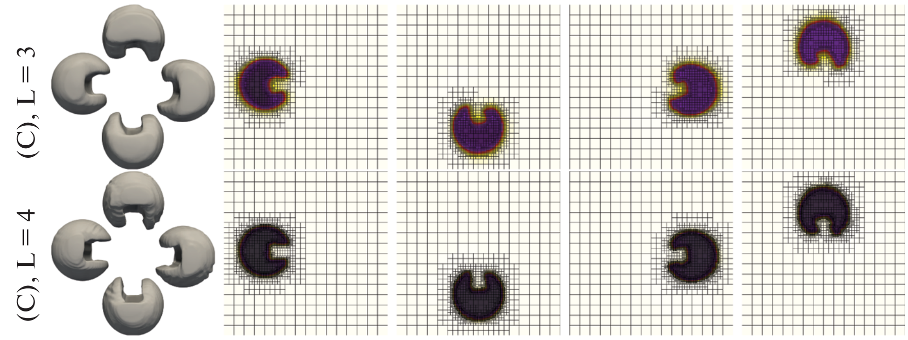
На фиг. 10 показана применимость нелинейного метода конечных объемов для решения (2.2) при более высоких числах Куранта $K \approx 2$ ($\Delta t = 0.02$) и $K \approx 4$ ($\Delta t = 0.04$). Для неявной схемы Эйлера при $K \approx 4$ сжатие границы раздела сред недостаточно сильное, чтобы сохранить резкую границу, но $\psi \in [0,1]$ вплоть до машинной точности. Схема Кранка–Николсон не является монотонной при $K > 1$. Поэтому далее мы используем схему Кранка–Николсон с $K \approx 1$, как обеспечивающую наилучшее разрешение границы раздела сред и все еще монотонное решение.

Влияние измельчения кубической сетки до уровней $L = 3$ и $L = 4$ показано на фиг. 11. Несмотря на то что при более мелкой сетке граница раздела сред разрешается лучше, искажения границы вследствие сжатия более заметны при таком разрешении. На фиг. 12 мы сравниваем эффект от адаптивного выбора α (2.24), предложенного в [26], и общепринятого выбора $\alpha = |\beta_f|$. Артефакты на поверхности раздела менее выражены благодаря адаптивному выбору (2.24). Этот эффект не так заметен на более грубых сетках ($L = 2$, $L = 3$). Отметим, что мы используем гораздо больший шаг по времени, чем обычные схемы.

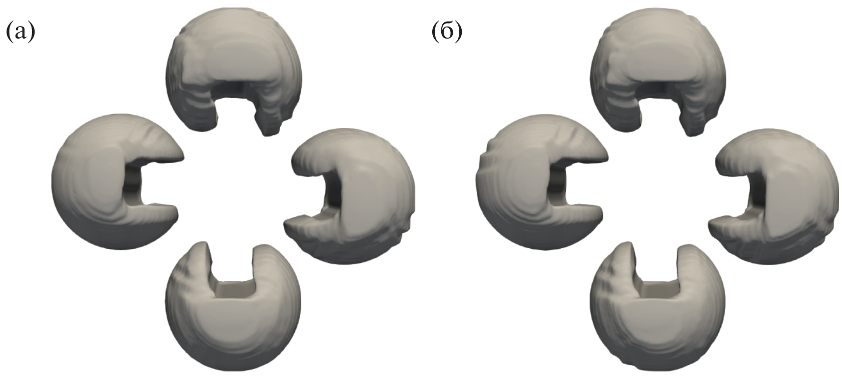
Представленный метод реализован в рамках платформы INMOST и, таким образом, применим для решения на параллельных компьютерах. Распределение кубической сетки с $L = 4$ уровнями измельчения между 16 процессорами показано на фиг. 13.

Динамика изменения количества ячеек и количества необходимых итераций Ньютона во время моделирования на кубической сетке с $L = 3$ уровнями измельчения показана на фиг. 14.

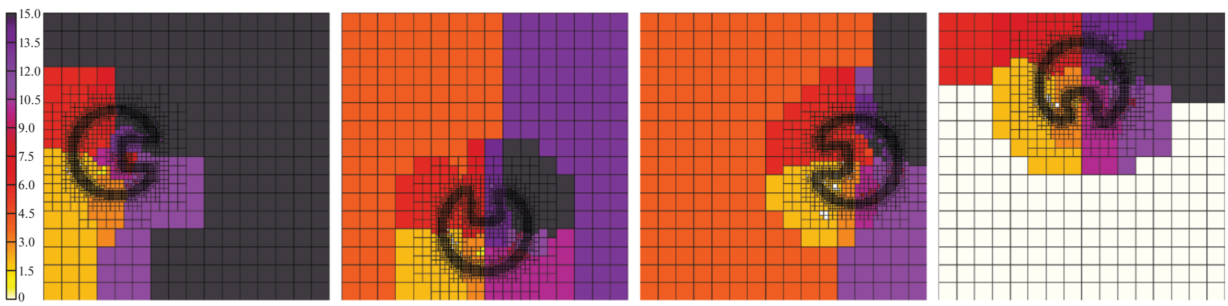
Наконец, мы демонстрируем способность метода работать с многогранными сетками общего вида. Мы рассматриваем шестигранные и треугольные призматические сетки с $L = 2$ и $L = 3$ уровнями измельчения, см. фиг. 15. Сетки содержат 16 призматических слоев в z-направлении, а разрешение грубой сетки в x- и y-направлениях примерно соответствует разрешению $16 \times 16 \times 16$ кубической сетки.



Фиг. 11. Изоповерхность $\psi = 0.5$ и срединный ($z = 0.5$) срез сетки при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, окрашенный согласно палитре ψ. Решение (2.2) нелинейным методом конечных объемов второго порядка со схемой Кранка–Николсон на кубических сетках (C) с $L = 3$ уровнями уточнения с шагом по времени $\Delta t = 0.005$ (вверху) и $L = 4$ уровнями уточнения с $\Delta t = 0.0025$ (внизу). В обоих случаях $K \approx 1$.



Фиг. 12. Изоповерхность $\psi = 0.5$ при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, посчитанная на кубической сетке с $L = 4$ уровнями измельчения. Адаптивный выбор α по формуле (2.24) (а) и общепринятый выбор $\alpha = |\beta_f|$ (б).



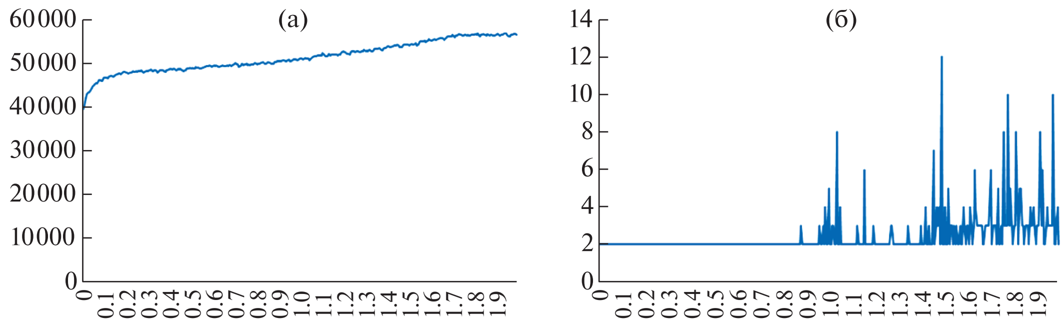
Фиг. 13. Срединный ($z = 0.5$) срез кубической сетки с $L = 4$ уровнями измельчения при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, окрашенный индексом процессора, 0, 1, …, 15.

4.2. Тест Энрайта

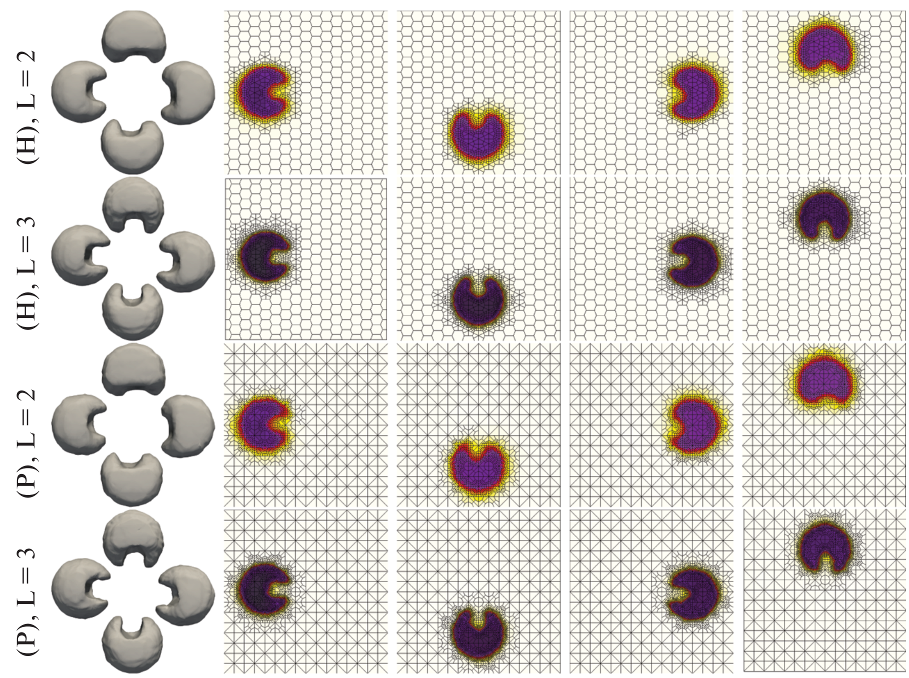
Далее мы рассмотрим тест Энрайта [61]. Поле скоростей $\mathbf{u} = [u, v, w]^{\mathrm{T}}$ задано в единичном кубе $\Omega = [0,1]^3$:

$$
\begin{aligned}
u &= 2\sin(\pi x)^2 \sin(2\pi y)\sin(2\pi z)\cos(\pi t/3),\\
v &= -\sin(2\pi x)\sin(\pi y)^2 \sin(2\pi z)\cos(\pi t/3),\\
w &= -\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(\pi z)^2 \cos(\pi t/3).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Задача решается нелинейным методом конечных объемов со схемой Кранка–Николсон на временном интервале $t \in [0,1.5]$. В начальный момент времени $t = 0$ переносимый объект опре-



Фиг. 14. Изменение числа ячеек (а) и числа итераций Ньютона (б) для решения (2.2) нелинейным методом конечных объемов и схемой Кранка–Николсон на кубической сетке с $L = 3$ уровнями измельчения.



Фиг. 15. Изоповерхность $\psi = 0.5$ и срединный ($z = 0.5$) срез сетки при $t = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, окрашенный согласно палитре ψ. Решение (2.2) нелинейным методом конечных объемов второго порядка со схемой Кранка–Николсон на гексагональной призматической сетке (H) и треугольной призматической сетке (P) с $L = 2$ уровнями измельчения ($\Delta t = 0.01$) и $L = 3$ уровнями измельчения ($\Delta t = 0.005$). В обоих случаях $K \approx 1$.

Фиг. 16. Тест Энрайта: изоповерхность $\psi = 0.5$ при $T = \{0.3, 0.75, 1.2, 1.5\}$. Кубическая сетка с уровнями измельчения $L = 3$ (б) и $L = 4$ (а).

деляется сферой с радиусом $r = 0.15$ с центром в $\mathbf{x} = [0.35, 0.35, 0.35]^{\mathrm{T}}$. Решения на кубических сетках с уровнями измельчения $L = 3$ и $L = 4$ продемонстрированы на фиг. 16. Поверхность объекта остается гладкой, хотя на более мелкой сетке разрешение объекта намного лучше. Разрешение сетки 16-128 (с $L = 3$ уровнями измельчения) является недостаточным для поддержания связанной изоповерхности $\psi = 0.5$.

5. ВЫВОДЫ

В работе предложен нелинейный метод конечных объемов для задачи переноса–сжатия границы раздела сред в рамках метода объема жидкости. Предложенная схема сохраняет решение в заданных границах [0,1], применима к неструктурированным адаптивным сеткам общего вида и допускает большие временные шаги. Одним из возможных применений схемы является полностью неявное моделирование течений со свободной поверхностью.

В дальнейшей работе мы сосредоточимся на менее диссипативных методах переноса, более точных монотонных методах интегрирования по времени и рассмотрим другие адаптивные стратегии для выбора параметра сжатия границы раздела сред. Перспективным направлением в повышении точности схем является применение экспоненциальных интеграторов в приближении потоков.

Кирилл Терехов благодарит Брэдли Мэллисона и Хамди Челепи за обсуждение применения нелинейного метода конечных объемов к задаче переноса. Яшару Мехмани выражается благодарность за обсуждение проблемы сжатия межфазной границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ketabdari M.J.* Free surface flow simulation using VOF method // Numerical Simulation: From Brain Imaging to Turbulent Flows. (Ed. Lpez-Ruiz). BoDBooks on Demand. 2016. V. 365.
2. *Nikitin K.D., Olshanskii M.A., Terekhov K.M. et al.* An adaptive numerical method for free surface flows passing rigidly mounted obstacles // Comput. Fluids. 2017. V. 148. P. 56–68.
3. *Vassilevski Y.V., Nikitin K., Olshanskii M., Terekhov K.* CFD technology for 3D simulation of large-scale hydrodynamic events and disasters // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2012. V. 27. № 4. P. 399–412.
4. *Kumar B., Crane M., Delauré Y.* On the volume of fluid method for multiphase fluid flow simulation // Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 2013. V. 4. № 02. P. 1350002.
5. *Ruuth S.J., Wetton B.T.* A simple scheme for volume-preserving motion by mean curvature // J. Sci. Comput. 2003. V. 19. № 1. P. 373–384.
6. *Qi Y., Lu J., Scardovelli R. et al.* Computing curvature for volume of fluid methods using machine learning // J. Comput. Phys. 2019. V. 377. P. 155–161.
7. *Nikitin K.D., Olshanskii M.A., Terekhov K.M., Vassilevski Y.V.* A splitting method for numerical simulation of free surface flows of incompressible fluids with surface tension // Comput. Methods Appl. Math. 2015. V. 15. № 1. P. 59–77.
8. *Nikitin K.D., Terekhov K.M., Vassilevski Y.V.* Two methods of surface tension treatment in free surface flow simulations // Appl. Math. Lett. 2018. V. 86. P. 236–242.
9. *McFadden S., Browne D.* A front-tracking model to predict solidification macrostructures and columnar to equiaxed transitions in alloy castings // Appl. Math. Model. 2009. V. 33. № 3. P. 1397–1416.
10. *Malladi R., Sethian J.A.* Level set methods for curvature flow, image enchancement, and shape recovery in medical images // Math. Vis. Springer. 1997. P. 329–345.
11. *Popinet S.* Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries // J. Comput. Phys. 2003. V. 190. № 2. P. 572–600.
12. *Lalanne C., Magdelaine Q., Lequien F., Fullana J.-M.* Numerical model using a volume-of-fluid method for the study of evaporating sessile droplets in both unpinned and pinned modes // Eur. J. Mech. B Fluids. 2021.
13. *Kunkelmann C., Stephan P.* CFD simulation of boiling flows using the volume-of-fluid method within Open-FOAM // Numer. Heat Transf. A. 2009. V. 56. № 8. P. 631–646.
14. *Gamet L., Scala M., Roenby J. et al.* Validation of volume-of-fluid OpenFOAM® isoadvector solvers using single bubble benchmarks // Comput. Fluids. 2020. V. 213. P. 104722.
15. *Albadawi A., Donoghue D., Robinson A. et al.* On the analysis of bubble growth and detachment at low capillary and bond numbers using volume of fluid and level set methods // Chem. Eng. Sci. 2013. V. 90. P. 77–91.
16. *Puckett E.G., Almgren A.S., Bell J.B. et al.* A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows // J. Comput. Phys. 1997. V. 130. № 2. P. 269–282.

17. *Sussman M., Puckett E.G.* A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows // J. Comput. Phys. 2000. V. 162. № 2. P. 301–337.
18. *Cifani P., Michalek W., Priems G. et al.* A comparison between the surface compression method and an interface reconstruction method for the VOF approach // Comput. Fluids. 2016. V. 136. P. 421–435.
19. *Rusche H.* Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions: Ph.D. thesis / Imperial College London (University of London). 2003.
20. *Okagaki Y., Yonomoto T., Ishigaki M., Hirose Y.* Numerical study on an interface compression method for the volume of fluid approach // Fluids. 2021. V. 6. № 2. P. 80.
21. *Aboukhedr M., Georgoulas A., Marengo M. et al.* Simulation of micro-flow dynamics at low capillary numbers using adaptive interface compression // Comput. Fluids. 2018. V. 165. P. 13–32.
22. *Patel J.K., Natarajan G.* A generic framework for design of interface capturing schemes for multi-fluid flows // Comput. Fluids. 2015. V. 106. P. 108–118.
23. *Arote A., Bade M., Banerjee J.* An improved compressive volume of fluid scheme for capturing sharp interfaces using hybridization // Numer. Heat Transf. B: Fundam. 2020. V. 79. № 1. P. 29–53.
24. *Mehmani Y.* Wrinkle-free interface compression for two-fluid flows // arXiv preprint arXiv:1811.09744. 2018.
25. *Piro D.J., Maki K.* An adaptive interface compression method for water entry and exit: Tech. Rep. 2013-350: University of Michigan. Department of Naval Architecture and Marine Engineering, 2013.
26. *Lee H., Rhee S.H.* A dynamic interface compression method for VOF simulations of high-speed planing watercraft // J. Mech. Sci. Technol. 2015. V. 29. № 5. P. 1849–1857.
27. *Sethian J.A., Smereka P.* Level set methods for fluid interfaces // Annu. Rev. Fluid Mech. 2003. V. 35. № 1. P. 341–372.
28. *Adalsteinsson D., Sethian J.A.* The fast construction of extension velocities in level set methods // J. Comput. Phys. 1999. V. 148. № 1. P. 2–22.
29. *Terekhov K.M., Nikitin K.D., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V.* A semi-Lagrangian method on dynamically adapted octree meshes // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2015. V. 30. № 6. P. 363–380.
30. *Nikitin K., Olshanskii M., Terekhov K., Vassilevski Yu.V.* Preserving distance property of level set function and simulation of free surface flows on adaptive grids // Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing (NUMGRID-2010). 2010. P. 25–32.
31. *Ausas R.F., Dari E.A., Buscaglia G.C.* A geometric mass-preserving redistancing scheme for the level set function // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2011. V. 65. № 8. P. 989–1010.
32. *Ge Z., Loiseau J.-C., Tammisola O., Brandt L.* An eficient masspreserving interface-correction level set/ghost fluid method for droplet suspensions under depletion forces // J. Comput. Phys. 2018. V. 353. P. 435–459.
33. *Ningegowda B.M., Ge Z., Lupo G. et al.* A mass-preserving interfacecorrection level set/ghost fluid method for modeling of three-dimensional boiling flows // Int. J. Heat Mass Transf. 2020. V. 162. P. 120382.
34. *Guermond J.-L., de Luna M.Q., Thompson T.* An conservative antidi fusion technique for the level set method // J. Comput. Appl. Math. 2017. V. 321. P. 448–468.
35. *Leonard B., Mokhtari S.* Beyond first-order upwinding: The ultra-sharp alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection // Int. J. Numer. Methods Eng. 1990. V. 30. № 4. P. 729–766.
36. *Silva L., Fontes C., Lage P.* Front tracking in recirculating flows: a comparison between the TVD and RCM methods in solving the VOF equation // Braz. J. Chem. Eng. 2005. V. 22. № 1. P. 105–116.
37. *Lu C.-N., Wang R.-Y., Sun J.-S.* WENO finite volume method for tracking moving interfaces on unstructured triangle meshes // J. Hohai Univ. 2009. V. 37. № 1. P. 105–109.
38. *Pirozzoli S., Di Giorgio S., Iafrati A.* On algebraic TVD-VOF methods for tracking material interfaces // Comput. Fluids. 2019. V. 189. P. 73–81.
39. *Darwish M., Moukalled F.* Convective schemes for capturing interfaces of free-surface flows on unstructured grids // Numer. Heat Transf. B: Fundam. 2006. V. 49. № 1. P. 19–42.
40. *Ubbink O., Issa R.* A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes // J. Comput. Phys. 1999. V. 153. № 1. P. 26–50.
41. *Tsui Y.-Y., Lin S.-W., Cheng T.-T., Wu T.-C.* Flux-blending schemes for interface capture in two-fluid flows // Int. J. Heat Mass Transf. 2009. V. 52. № 23–24. P. 5547–5556.
42. *Zhang D., Jiang C., Liang D. et al.* A refined volume-of-fluid algorithm for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes // J. Comput. Phys. 2014. V. 274. P. 709–736.
43. *Bertolazzi E., Manzini G.* A second-order maximum principle preserving finite volume method for steady convection-diffusion problems // SIAM J. Numer. Anal. 2005. V. 43. № 5. P. 2172–2199.
44. *Droniou J., Potier C.L.* Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle // SIAM J. Numer. Anal. 2011. V. 49. № 2. P. 459–490.
45. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Y.* Minimal stencil finite volume scheme with the discrete maximum principle // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2012. V. 27. № 4. P. 369–386.

46. *Chernyshenko A., Vassilevski Y.* A finite volume scheme with the discrete maximum principle for diffusion equations on polyhedral meshes // Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects. Springer. 2014. P. 197–205.
47. *Terekhov K.M., Mallison B.T., Tchelepi H.A.* Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem // J. Comput. Phys. 2017. V. 330. P. 245–267.
48. *Lee J., Sheen D.* A parallel method for backward parabolic problems based on the Laplace transformation // SIAM J. Numer. Anal. 2006. V. 44. № 4. P. 1466–1486.
49. *Varga R.S.* Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 1962.
50. *Jameson A.* Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence // Int. J. Comut. Fluid Dyn. 1995. V. 4. № 3–4. P. 171–218.
51. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Y.V.* Anderson acceleration for nonlinear finite volume scheme for advection-diffusion problems // SIAM J. Sci. Comput. 2013. V. 35. № 2.
52. *Perot B.* Conservation properties of unstructured staggered mesh schemes // J. Comput. Phys. 2000. V. 159. № 1. P. 58–89.
53. *Younis R., Tchelepi H.A., Aziz K.* Adaptively localized continuation-Newton method–nonlinear solvers that converge all the time // Soc. Pet. Eng. J. 2010. V. 15. № 02. P. 526–544.
54. *Vassilevski Y., Terekhov K., Nikitin K., Kapyrin I.* Parallel Finite Volume Computation on General Meshes. Springer Nature. 2020.
55. *Terekhov K.* Parallel multilevel linear solver within INMOST platform // Russian Supercomputing Days / Springer. 2020. P. 297–309.
56. *Terekhov K.* Greedy dissection method for shared parallelism in incomplete factorization within INMOST platform // Russian Supercomputing Days / Springer. 2021. P. 87–101.
57. *Terekhov K., Vassilevski Y.* Mesh modification and adaptation within INMOST programming platform // Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing. Springer. 2019. P. 243–255.
58. *Terekhov K.* Parallel dynamic mesh adaptation within INMOST platform // Russian Supercomputing Days / Springer. 2019. P. 313–326.
59. *Karypis G., Schloegel K., Kumar V.* Parmetis parallel graph partitioning and sparse matrix ordering library: Tech. Rep. 97-060: University of Minnesota. Department of Computer Science and Engineering. 1997.
60. *Karypis G., Kumar V.* MeTis: Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering System, Version 4.0. http://www.cs.umn.edu/ metis. 2009.
61. *Enright D., Fedkiw R., Ferziger J., Mitchell I.* A hybrid particle level set method for improved interface capturing // J. Comput. Phys. 2002. V. 183. № 1. P. 83–116.
62. *Ahrens J., Geveci B., Law C.* Paraview: An end-user tool for large data visualization // The Visualization Handbook. 2005. V. 717. № 8.

EDN: WKEOMG

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1085–1099

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.545

СУММИРОВАНИЕ ТЕТА-РЯДОВ ПУАНКАРЕ В МОДЕЛИ ШОТТКИ[1)]

© 2022 г. С. Ю. Лямаев

119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ РАН, Россия

e-mail: lyamaev.sergei@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2021 г.
Переработанный вариант 13.02.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

Предложены новые алгоритмы приближенного суммирования тета-рядов Пуанкаре в модели Шоттки вещественных гиперэллиптических кривых, позволяющие в несколько раз сократить объем вычислений в ситуациях медленной сходимости и на десятки процентов в обычных ситуациях – при той же оценке точности на выходе. Получена новая оценка для суммы членов ряда Пуанкаре по поддереву потомков заданной вершины через член ряда в этой вершине. Библ. 13. Фиг. 16. Табл. 2.

Ключевые слова: группы Шоттки, тета-ряды Пуанкаре, граф Кэли, униформизация, вещественные гиперэллиптические кривые, римановы поверхности.

DOI: 10.31857/S0044466922070055

ВВЕДЕНИЕ

Вещественной гиперэллиптической кривой называется компактная кривая, аффинная часть которой задается уравнением $y^2 = P(x)$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, где $P(x)$ – вещественный многочлен без кратных корней. Вычисления, связанные с такими кривыми и их модулями, возникают во многих прикладных задачах, среди которых чебышёвская оптимизация (расчет оптимальных многополосных фильтров [1], расчет многочленов Чебышёва для нескольких отрезков [2], [3]), нахождение алгеброгеометрических решений нелинейных уравнений математической физики [4], описание магнитных состояний в планарных магнитных наноэлементах [6], моделирование течения воды под ступенчатой плотиной [6], высокоточный расчет емкостей конденсаторов сложной формы [7] и другие. Один из инструментов для таких вычислений – модель Шоттки [3], [4], позволяющая на практике работать с кривыми высоких родов.

В модели Шоттки кривая представляется как многообразие орбит действия подходящей группы Шоттки. Дифференциалы, функции и другие теоретико-функциональные объекты на кривой при этом получают явные представления – в виде тета-рядов Пуанкаре и бесконечных произведений. Члены таких рядов и произведений индексируются множеством элементов группы Шоттки. Численный расчет возникающих произведений по существу не отличается от приближенного суммирования рядов Пуанкаре, поэтому можно говорить только о рядах.

Группа Шоттки является свободной группой на $g \geq 1$ образующих, где g – это род порождаемой кривой. Граф Кэли такой группы имеет вид бесконечного дерева с вершинами валентности $2g$. Вершины дерева Кэли взаимно однозначно соответствуют элементам группы Шоттки, а значит, и членам ряда Пуанкаре. Для приближенного суммирования ряда Пуанкаре возникает следующая задача: из бесконечного дерева Кэли требуется выделить конечное поддерево, сумма по которому хорошо приближает точное значение. Задача осложняется тем, что скорость убывания членов ряда вдоль разных ветвей дерева может значительно отличаться. Для выделения конечного поддерева, по которому ведется счет, известны два эффективных алгоритма: алгоритм Богатырёва [2], [3] с апостериорной оценкой точности и алгоритм Шмиза [9] с априорной оценкой точности. В обоих алгоритмах выделяемое поддерево заранее неизвестно и формируется непосредственно в процессе вычислений.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке отделения ИВМ РАН Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1624) в части новой оценки для суммы членов ряда Пуанкаре. Остальная часть исследования выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 21-11-00325).

Ряды Пуанкаре быстро сходятся, если радиусы граничных окружностей фундаментальной области группы Шоттки невелики по сравнению с расстояниями между ними. При сближении окружностей или увеличении радиусов, а также при увеличении рода g, сходимость рядов замедляется и известным алгоритмам может требоваться значительное расчетное время для их приближенного суммирования. В настоящей статье предложены новые алгоритмы – модификации алгоритмов А.Б. Богатырёва и М. Шмиза, позволяющие в несколько раз сократить объем вычислений в ситуациях медленной сходимости и на десятки процентов в обычных ситуациях.

И алгоритм Богатырёва, и алгоритм Шмиза, и новые алгоритмы основываются на оценке для суммы членов ряда Пуанкаре по поддереву потомков заданной вершины через член ряда в этой вершине. Если член ряда в некоторой вершине достаточно мал, то такая оценка позволяет исключить из счета все растущее из этой вершины поддерево потомков. Оценка Богатырёва [3] уступает в точности оценке Бёрнсайда [8], [9], использованной Шмизом, однако последняя не всегда применима – а лишь в тех случаях, когда выполнен некоторый критерий на группу Шоттки. В настоящей работе получена новая оценка, восполняющая отсутствие практичной оценки для ситуаций, когда не применима оценка Бёрнсайда.

Отметим, что существует также альтернативный подход к вычислению теоретико-функциональных объектов в модели Шоттки, не связанный с непосредственным суммированием рядов Пуанкаре, а использующий ряды Лорана – метод типа коллокаций Д. Крауди, Дж. Маршалла, Н. Трефтена [10].

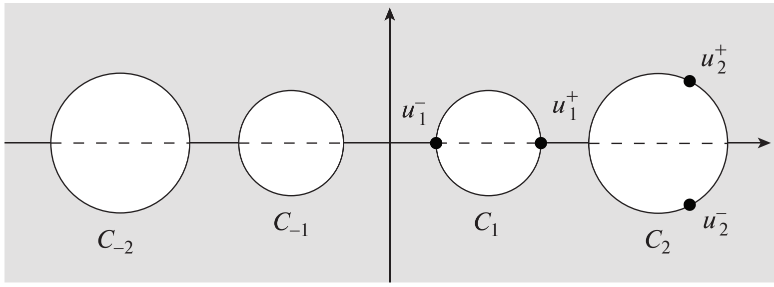
1. МОДЕЛЬ ШОТТКИ

Зафиксируем натуральное число g и разбиение множества индексов от 1 до g на два подмножества: $\{1,2,\ldots,g\} = \Sigma^+ \sqcup \Sigma^-$. На g непересекающихся отрезках положительной полуоси как на диаметрах построим окружности $C_1,\ldots,C_g$. Нумерация окружностей – слева направо. На всякой окружности C_j отметим пару точек: при $j \in \Sigma^+$ отметим точки пересечения с вещественной осью $u_j^\pm := c_j \pm r_j$, при $j \in \Sigma^-$ – произвольную пару комплексно-сопряженных точек $u_j^\pm := c_j \pm ir_j$. Обозначим через G_j конформную инволюцию сферы Римана с неподвижными точками $u_j^\pm$:

$$G_j u = c_j + \sigma_j r_j^2/(u - c_j), \quad \sigma_j := \pm 1 \quad \text{при} \quad j \in \Sigma^\pm.$$

Отображение G_j переводит внешность окружности C_j в ее внутренность, следовательно, гиперболическое преобразование $S_j u := G_j(-u)$ переводит внешность окружности $C_{-j} := -C_j$ во внутренность C_j. Преобразования $S_1,\ldots,S_g$ свободно порождают группу Шоттки, которую обозначим через $\mathfrak{S}$. Стандартная фундаментальная область $\mathcal{F}$ этой группы – это внешность $2g$ окружностей $C_1,\ldots,C_g$, $C_{-1},\ldots,C_{-g}$ в сфере Римана (фиг. 1). По группе Шоттки $\mathfrak{S}$ при $j \in \Sigma^+$ окружность C_j восстанавливается однозначно, c_j и r_j – это ее центр и радиус, а при $j \in \Sigma^-$ в положении окружности C_j имеется произвол. Фактор-пространство $X = \overline{\mathcal{F}}/\sim$, где отношение эквивалентности склеивает пары граничных окружностей C_{-j}, C_j посредством преобразований S_j при всех $1 \le j \le g$, является вещественной гиперэллиптической кривой рода g, на которой $|\Sigma^+| + 1$ вещественных овалов и столько же ковещественных. Всякая такая кривая может быть получена в результате проделанной геометрической конструкции [11], [3]. Для кривой, заданной уравнением $y^2 = P(x)$, построить соответствующую группу Шоттки позволяют алгоритмы численной униформизации, например классический алгоритм "раскрытия кружков" [12], восходящий к А. Пуанкаре [13]. При этом число $|\Sigma^-|$ равно числу пар комплексно-сопряженных невещественных корней у $P(x)$, степень этого многочлена равна $2g + 1$ или $2g + 2$.

Эффективная теория функций на кривой в модели Шоттки строится на основе тета-рядов Пуанкаре [3], [4]. Так, ключевой объект теории – нормированный абелев дифференциал III рода



Фиг. 1. Фундаментальная область (выделена серым) при $g = 2$, $\Sigma^+ = \{1\}$, $\Sigma^- = \{2\}$.

η_{zw} с полюсами в точках $z, w \in \overline{\mathcal{F}}$ – получается усреднением по группе Шоттки рационального дифференциала на римановой сфере:

$$\eta_{zw}(u) = \sum_{S\in\mathfrak{S}}\left(\frac{1}{Su - z} - \frac{1}{Su - w}\right)d(Su) = \sum_{S\in\mathfrak{S}}\left(\frac{1}{u - Sz} - \frac{1}{u - Sw}\right)du. \quad (1)$$

Почленное равенство двух сумм вытекает из инфинитезимальной формы тождества двойного отношения. Ряды абсолютно сходятся, поскольку фундаментальная область $\mathcal{F}$ группы Шоттки рассматриваемого вида удовлетворяет критерию Шоттки. Сходящимися бесконечными суммами и произведениями записываются и другие аналитические объекты на кривой: мероморфные функции, мероморфные дифференциалы различных порядков, спиноры. Эта статья – о приближенном вычислении таких выражений на компьютере. Всю необходимую технику продемонстрируем на примере правого ряда из цепочки равенств (1).

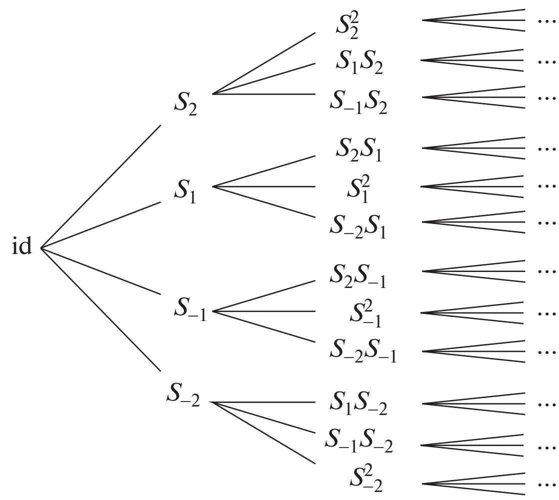
2. ПОДХОДЫ БОГАТЫРЁВА И ШМИЗА

Введем обозначения $S_{-j} := S_j^{-1}$, $c_{-j} := -c_j$, $r_{-j} := r_j$, $\sigma_{-j} := \sigma_j$ при $1 \le j \le g$. Тогда можем записать $S_j u = c_j - \sigma_j r_j^2/(u + c_j)$ при всех $j \in \Xi := \{\pm 1,\dots,\pm g\}$. Группа Шоттки $\mathfrak{S}$ изоморфна группе несократимых слов алфавита $\{S_j \mid j \in \Xi\}$ с операцией конкатенации. Обозначим через $|S|$ количество букв в несократимой записи слова $S \in \mathfrak{S}$. Будем говорить, что слово $S \ne \mathrm{id}$, начинается (соответственно заканчивается) на букву S_j, если эта буква – крайняя левая (соответственно крайняя правая) в несократимой записи слова S. Определим на $\mathfrak{S}$ отношение строгого частичного порядка: $S < T$, если имеет место запись $T = QS$, в которой $Q \ne \mathrm{id}$ и $|T| = |Q| + |S|$. Введем на $\mathfrak{S}$ также отношение лексикографического порядка:

- для букв алфавита зафиксируем порядок $S_j \prec S_l$ при $j < l$;
- если у несократимых слов S и T, каждое из которых имеет длину не меньше $n + 1$, первые n букв справа совпадают, а $(n+1)$-я буква справа у слова S меньше, тогда $S \prec T$;
- если $S < T$, то $T \prec S$.

Дерево Кэли (фиг. 2) наглядно представляет множество элементов группы Шоттки. Вершины этого дерева взаимно-однозначно соответствуют элементам группы. Всякая вершина S соединена ребрами с вершинами $S_j S$, $j \in \Xi$. Корень дерева Кэли – вершина, отвечающая тождественному преобразованию. Множество $\{S \in \mathfrak{S}\colon |S| = n\}$ будем называть n-м уровнем дерева. Вершины, соединенные с S ребром и лежащие на следующем уровне по сравнению с S, – это дети вершины S. При $S \ne \mathrm{id}$ имеется одна вершина, соединенная с S ребром и лежащая на предыдущем уровне, – будем называть ее родителем S. Назовем вершины братьями, если у них общий родитель. Если $T < S$, то вершину S будем называть потомком вершины T, а вершину T – предком вершины S.

Образ $S\mathcal{F}$ фундаментальной области при $S \ne \mathrm{id}$ – это открытый круг за вычетом $2g - 1$ вложенных в него замкнутых кругов. Если S заканчивается на букву S_{-j}, тогда внешняя окружность области $S\mathcal{F}$ – это SC_j, внутренние – SC_l, $l \ne j$. Будем говорить, что внешняя окружность области $S\mathcal{F}$ – это окружность $|S|$-го уровня. Например, окружности первого уровня – это C_j, $j \in \Xi$.



Фиг. 2. Дерево Кэли при $g = 2$ (показаны уровни $|S| = 0,1,2$).

Соседние с C_j окружности первого уровня будем обозначать через $C_{\leftarrow j}$ и $C_{j\rightarrow}$, т.е. положим $\leftarrow j := j-1$ при $j \in \Xi\setminus\{1,-g\}$, $\leftarrow 1 := -1$ и $\leftarrow (-g) := g$, а значение $j \rightarrow$ для всех $j \in \Xi$ определим из соотношения $(\leftarrow j) \rightarrow = j$.

Через $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ обозначим евклидово расстояние между множествами, через $\operatorname{diam}(\cdot)$ – евклидов диаметр множества.

Пусть точки $u, z, w \in \overline{\mathcal{F}}$ лежат в разных орбитах действия группы $\mathfrak{S}$. Аппроксимируем сумму правого ряда из равенств (1) суммой по конечному поддереву $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$:

$$\left|\frac{\eta_{zw}(u)}{du} - \sum_{S\in\mathfrak{T}}\left(\frac{1}{u-Sz} - \frac{1}{u-Sw}\right)\right| \le \rho^{-2}\sum_{S\in\mathfrak{S}\setminus\mathfrak{T}}|Sz - Sw|,$$

где ρ – евклидово расстояние от точки u до объединения орбит точек z и w. В качестве конечного поддерева $\mathfrak{T}$ можно выбрать множество $\{S \in \mathfrak{S} : |S| \le n\}$ с некоторым $n \ge 0$, т.е. несколько первых уровней дерева Кэли, взятых целиком. Такой подход предложен А.Б. Богатырёвым в работе [2] (1999) и имеет априорную оценку точности, которая получается из следующей теоремы.

Теорема 1 (см. [2], [3]). *Пусть слово $S \in \mathfrak{S}$, $S \ne \mathrm{id}$, начинается на букву S_j. Отношение суммы диаметров внутренних окружностей области $S\mathcal{F}$ к диаметру ее внешней окружности не превосходит $(\sqrt{\gamma_j}-1)/(\sqrt{\gamma_j}+1)$, где*

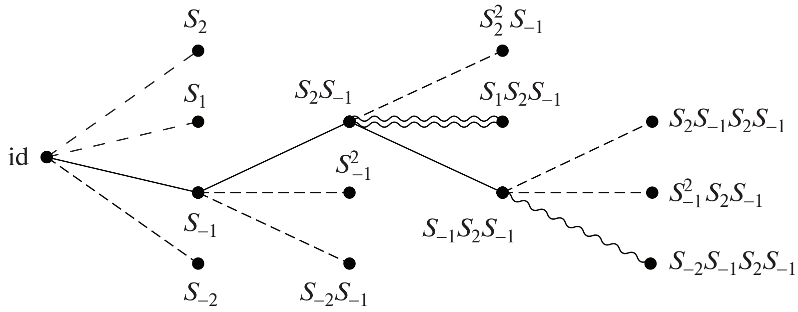
$$\gamma_j := \left(1 + \frac{\operatorname{diam}(C_j)}{\operatorname{dist}(C_j, C_{\leftarrow j})}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{diam}(C_j)}{\operatorname{dist}(C_j, C_{j\rightarrow})}\right).$$

Определить число первых уровней дерева Кэли, по которым достаточно просуммировать для достижения произвольной заданной точности в рамках такого подхода, можно при помощи следующей оценки:

$$\sum_{S\in\mathfrak{S}:\,|S|>n}|Sz - Sw| \le (\sqrt{\gamma}+1)\left(\frac{\sqrt{\gamma}-1}{\sqrt{\gamma}+1}\right)^n\sum_{j=1}^{g}\operatorname{diam}(C_j), \tag{2}$$

где $\gamma := \max_{1\le j\le g}\gamma_j$. Этот подход, однако, существенно неэкономичен: вычислительная практика показывает, что скорость убывания членов ряда при движении от корня дерева Кэли вдоль разных ветвей может значительно отличаться, и в таком случае будет учтено большое число членов ряда, суммарный вклад которых пренебрежимо мал.

Другой подход, предложенный А.Б. Богатырёвым в той же работе [2], имеет апостериорную оценку точности. Граница поддерева $\mathfrak{T}$ в нем определяется по отдельности для каждой ветви – непосредственно в процессе вычислений. Пусть для всякого $T \in \mathfrak{S}$ известно число $K(T)$ такое,



Фиг. 3. Поиск следующей вершины в алгоритме 1 при $g = 2$ и $T = S_{-1}S_2S_{-1}$. В случае $|Tz - Tw| \geq \mu/K(T)$ следующей вершиной будет $S_{-2}S_{-1}S_2S_{-1}$ (ребро к ней обозначено одинарной волнистой линией), иначе – $S_1S_2S_{-1}$ (двойная волнистая линия). Сплошная линия – путь из корня к T.

что $\sum_{S\in\mathfrak{S}:\ S>T}|Sz - Sw| \leq K(T)|Tz - Tw|$. Для простоты потребуем, чтобы $K(T)$ зависело только от первой слева буквы несократимого слова T. Будем добавлять вершины текущей ветви в поддерево $\mathfrak{T}$ (т.е. учитывать их в приближенном значении суммы) до тех пор, пока значение $K(T)|Tz - Tw|$ в текущей вершине T не меньше заранее выбранного малого параметра $\mu > 0$. Как только это значение станет меньше μ, все поддерево потомков вершины T исключим из счета и сместимся на другую ветвь – оценка для суммы выброшенных членов ряда известна. Реализуем такой подход на основе обхода в глубину.

Алгоритм 1. Реализация подхода Богатырёва с апостериорной оценкой точности

Зафиксируем малый параметр $\mu > 0$. Присвоим начальные значения переменным, в которых по окончании работы алгоритма будут записаны приближенное значение суммы и оценка погрешности, $\mathrm{sum} := (u - z)^{-1} - (u - w)^{-1}$ и $\mathrm{err} := 0$. Будем хранить в памяти массив со следующей структурой: в момент перехода в вершину $T = S_{i_{|T|}}\ldots S_{i_2}S_{i_1}$ в n-й ячейке массива при $1 \leq n \leq |T| - 1$ записаны значения $(S_{i_n}\ldots S_{i_2}S_{i_1})z$, $(S_{i_n}\ldots S_{i_2}S_{i_1})w$ и буква S_{i_n}, а в нулевой ячейке – числа z и w. Перейдем в вершину S_{-g} и будем попеременно выполнять две операции:

1. Учет слагаемого, отвечающего текущей вершине. Пусть T – вершина, в которую только что перешел алгоритм. Используя $(|T| - 1)$-ю ячейку, вычислим значения Tz, Tw и поместим их в $|T|$-ю ячейку вместе с буквой $S_{i_{|T|}}$. Прибавим слагаемое, отвечающее вершине T: $\mathrm{sum} := \mathrm{sum} + (u - Tz)^{-1} - (u - Tw)^{-1}$.

2. Переход к следующей вершине. Если $|Tz - Tw| \geq \mu/K(T)$, то перейдем к наименьшему в лексикографическом порядке ребенку вершины T. В противном случае исключим из счета растущее из T поддерево потомков, учтем его в текущей частичной оценке погрешности $\mathrm{err} := \mathrm{err} + K(T)|Tz - Tw|$ и перейдем к наименьшей в лексикографическом порядке вершине S, удовлетворяющей условиям $T \prec S$ и $|S| \leq |T|$ (фиг. 3). Если такой вершины нет (тогда $T = S_g^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$), алгоритм останавливается. Для эффективной навигации по дереву при поиске следующей вершины достаточно сохраненных в массиве букв.

По окончании работы алгоритма имеем оценку $\left|\eta_{zw}(u)/du - \mathrm{sum}\right| \leq \rho^{-2}\cdot\mathrm{err}$.

В статье М. Шмиза [9] (2005) на основе оценки для сумм $\sum_{S>T}|Sz - Sw|/|Tz - Tw|$ сформулирован подход жадного типа: на каждой итерации обрабатывается вершина с наибольшей оценкой вклада в сумму. Алгоритм имеет априорную оценку точности, однако конечное поддерево $\mathfrak{T}$, по которому ведется счет, также заранее неизвестно и формируется непосредственно в процессе вычислений.

Алгоритм 2. Реализация подхода Шмиза с априорной оценкой точности

Введем вес вершины $\mathrm{weight}(T) := (K(T)+1)|Tz - Tw|$. Зафиксируем целевую точность $\varepsilon > 0$. Поместим в память корень дерева Кэли и присвоим начальные значения переменным, в которых будут храниться текущее значение суммы $\mathrm{sum} := 0$ и текущая оценка погрешности $\mathrm{err} := \mathrm{weight}(\mathrm{id})$. Для всякой сохраненной в памяти вершины T будем помнить значения Tz, Tw, $\mathrm{weight}(T)$ и первую слева букву слова T.

Итерация алгоритма: удалить из памяти вершину T с максимальным весом, поместить в память ее детей и присвоить

$$\mathrm{sum} := \mathrm{sum} + (u - Tz)^{-1} - (u - Tw)^{-1},$$

$$\mathrm{err} := \mathrm{err} - \mathrm{weight}(T) + \sum_{j\in\Xi:\, S_jT>T} \mathrm{weight}(S_jT).$$

После каждой итерации выполнена оценка $|\eta_{zw}(u)/du - \mathrm{sum}| \le \rho^{-2}\cdot \mathrm{err}$ и в памяти хранятся все неучтенные в сумме дети уже учтенных вершин и только они. Алгоритм останавливается, как только правая часть оценки становится меньше ε — это произойдет за конечное число итераций. Для организации хранения вершин в памяти следует использовать структуру данных, позволяющую извлекать элемент с максимальным весом за логарифмическое время, например двоичную кучу.

Алгоритм 3

Жадный подход М. Шмиза можно реализовать другим способом, в котором веса вычисляются только для просуммированных вершин. Для этого вес всякой вершины $T \in \mathfrak{S}$ определим иначе — как $K(T)|Tz - Tw|$. Вес вычисляется для каждой вершины, которая сохраняется в память. На каждой итерации из памяти удаляется вершина с максимальным весом, вместо нее в память помещаются все ее дети и сразу учитываются в сумме. После каждой итерации в памяти хранятся все листья поддерева просуммированных вершин, погрешность оценивается через сумму весов сохраненных вершин.

При одинаковой оценке точности на выходе число просуммированных вершин у алгоритма Шмиза в реализации 3 не больше, чем у алгоритма Богатырёва в реализации 1, и в большинстве случаев эти числа равны. Действительно, подадим на вход алгоритму Богатырёва в качестве параметра μ минимальный вес среди тех вершин, просуммированных алгоритмом Шмиза в реализации 3, дети которых также просуммированы. При таком μ алгоритм Богатырёва обойдет ровно то же конечное поддерево $\mathfrak{T}$, что и алгоритм Шмиза в реализации 3, — в предположении, что в дереве Кэли нет сразу нескольких вершин с весом, равным μ.

Необходимый ингредиент и для апостериорного подхода Богатырёва, и для подхода Шмиза — оценка для сумм $\sum_{S>T} |Sz - Sw|/|Tz - Tw|$. Первый способ получения такой оценки, по существу, присутствует в работе У. Бёрнсайда 1891 г. [8] и развит М. Шмизом [9]. Этот способ применим, только если выполнен определенный критерий на группу Шоттки.

Теорема 2. *Пусть слово* $T \in \mathfrak{S}$, $T \ne \mathrm{id}$, *начинается на букву* S_t. *Положим* $L_{jk} := r_j^2/\mathrm{dist}^2(c_j, C_k)$ *и* $\lambda_k := \sum_{j\in\Xi:\, j\ne k} L_{jk}$. *При выполнении условия* $\lambda := \max_{1\le k\le g} \lambda_k < 1$ *имеет место оценка*

$$\sum_{S\in\mathfrak{S}:\ S>T} |Sz - Sw|/|Tz - Tw| < \lambda_t/(1-\lambda) =: K_t^{(1)}.$$

Доказательство. При $j \ne t$, используя явный вид преобразования S_j, запишем

$$\left|\frac{S_{-j}Tz - S_{-j}Tw}{Tz - Tw}\right| = \frac{r_j^2}{|Tz - c_j|\cdot|Tw - c_j|} < L_{jt}. \tag{3}$$

Сумма членов ряда $\sum_{S>T} |Sz - Sw|/|Tz - Tw|$, отвечающих детям вершины T, не превосходит λ_t; сумма членов, отвечающих внукам T (детям детей), не превосходит $\lambda\cdot\lambda_t$; и так далее. Оценивая через геометрическую прогрессию при условии $\lambda < 1$, приходим к утверждению теоремы.

В цепочке неравенств (3) для локализации точек Tz, Tw вместо окружностей первого уровня можно использовать окружности больших уровней – вплоть до $|T|$-го. Тогда для константы L_{jt} получится определение $L_{jt} := r_j^2/\mathrm{dist}^2(c_j, C)$, где C – ближайшая к C_j окружность нужного уровня, лежащая внутри C_t; в остальном формулировка теоремы 2 останется без изменений. Это уточнит оценку Бёрнсайда и расширит ее область применимости, однако, как нетрудно видеть, существуют группы Шоттки, для которых критерий применимости $\lambda < 1$ не выполнен при использовании сколь угодно большого уровня.

Другой способ оценки суммы по поддереву потомков некоторой вершины через член ряда в этой вершине предложен А.Б. Богатырёвым (2005). Через Λ обозначим предельное множество группы Шоттки $\mathfrak{S}$.

Теорема 3 (см. [3]). *При $A \in \mathfrak{S}$, $A \neq \mathrm{id}$, существуют числа $E_1(A)$ и $E_2(A)$, обладающие асимптотиками*

$$E_1(A) = 4/\mathrm{dist}^2(\mathcal{F}, \Lambda) + o(1/|A|), \quad E_2(A) = 1 + o(1/|A|), \quad |A| \to \infty,$$

такие, что выполнены двусторонние неравенства

$$E_1^{-1}(A) \le \frac{\mathrm{diam}(A\mathcal{F})}{\mathrm{diam}(A^{-1}\mathcal{F})} \le E_1(A),$$

$$E_2^{-1}(A) \le |B'(Av)| \frac{\mathrm{diam}(A\mathcal{F})}{\mathrm{diam}(BA\mathcal{F})} \le E_2(A), \quad \forall v \in \overline{\mathcal{F}}, \quad \forall B \in \mathfrak{S} : BA > A.$$

Пусть $E_1 := \max_{A \neq \mathrm{id}} E_1(A)$ и $E_2 := \max_{A \neq \mathrm{id}} E_2(A)$. Тогда при $T \neq \mathrm{id}$ имеет место оценка

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}:\ S > T} \left| \frac{Sz - Sw}{Tz - Tw} \right| < E_1^2 E_2 (\sqrt{\gamma} - 1)/2 =: K^{(2)}.$$

Недостаток такой оценки заключается в следующем: если устремить к нулю радиус какой-либо из окружностей $C_1, \ldots, C_g$, не меняя остальные параметры, скорость сходимости ряда будет возрастать, а оценка, напротив, будет ухудшаться – константа $K^{(2)}$ будет стремиться к бесконечности. К примеру, при $g \ge 2$ и $\Sigma^- = \varnothing$ зафиксируем числа c_1, c_2, r_1 и устремим к нулю r_2, тогда отношение $\mathrm{diam}(S_1 S_2 \mathcal{F})/\mathrm{diam}(S_2^{-1} S_1^{-1} \mathcal{F})$ будет стремиться к бесконечности. На основе выкладок из [3, § 6.1.3] можно подобрать следующие константы под условия теоремы 3:

$$E_1 = \max_{1 \le j \le g} \frac{(p_g^+ + p_j^-)(p_g^+ + p_j^+)}{\min\limits_{y = G_j p_{j\to}^-, G_j p_{\leftarrow j}^+} (y - p_j^-)(p_j^+ - y)}, \quad E_2 = \max_{1 \le j \le g} \left(1 + \frac{\mathrm{diam}(C_j)}{\mathrm{dist}(C_j, C_{j\to} \cup C_{\leftarrow j})} \right)^2,$$

где за $p_j^- < p_j^+$ обозначены точки пересечения окружности C_j с вещественной осью. Вычислительная практика показывает, что если оценка Бёрнсайда применима, то она значительно точнее оценки Богатырёва при таком выборе E_1 и E_2. Преимущество же оценки Богатырёва – в универсальности, тогда как область применимости оценки Бёрнсайда ограничена условием $\lambda < 1$.

3. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМОВ

Заметим, что в алгоритме А.Б. Богатырёва (реализация 1) на основании значения $K(T)|Tz - Tw|$ принимается решение об учете в сумме (т.е. о добавлении в конечное поддерево $\mathfrak{T}$) сразу всех детей вершины T. Это приводит к тому, что часть листьев поддерева $\mathfrak{T}$ вносит пренебрежимо малый вклад в сумму. Листовых вершин при $\mathfrak{T} \supset \{S \in \mathfrak{S} : |S| < n\}$, $n \to \infty$ и $g > 1$ в $2g - 2$ раза больше, чем нелистовых. Особенно много неэффективной работы алгоритм производит в ситуациях, когда какие-либо из окружностей первого уровня критически близки друг к другу. В этом случае в дереве Кэли присутствуют длинные ветви, у большинства вершин которых ровно один из $2g - 1$ детей вносит весомый вклад в сумму.

Автором предложена следующая модификация: решение об учете в сумме будем принимать по отдельности для каждого ребенка $S_{-j}T$ вершины T, при этом будем использовать оценку значения $|S_{-j}Tz - S_{-j}Tw|$ через значение $|Tz - Tw|$. Подходящая оценка уже встречалась: $|S_{-j}Tz - S_{-j}Tw| \le L_{jt}|Tz - Tw|$, где $t \ne j$ — это индекс крайней слева буквы S_t несократимого слова $T \ne \mathrm{id}$. Положим $M(S_{-j}T) := (K(S_{-j}T) + 1)L_{jt}$. Для вершин первого уровня положим $M(S_{-j}) := (K(S_{-j}) + 1)r_j^2/|(z - c_j)(w - c_j)|$. Будем добавлять ребенка $S_{-j}T$ вершины T в поддерево $\mathfrak{T}$, если $|Tz - Tw| \ge \mu/M(S_{-j}T)$, где μ — фиксированный малый параметр.

Для братьев T_1 и T_2 (т.е. вершин с общим родителем) определим *старшинство* следующим образом: T_1 *старше* T_2, если $M(T_2) < M(T_1)$. Обозначим через $\mathfrak{B}(S)$ множество, состоящее из самой вершины S и ее младших братьев. Для несократимых слов T_1 и T_2, у которых подслова из $n \ge 1$ справа букв являются братьями, определим старшинство так: T_1 старше T_2, если указанное подслово у T_1 *старше*, чем у T_2.

Алгоритм 4

Зафиксируем малый параметр $\mu > 0$. Присвоим начальные значения переменным, в которых по окончании работы алгоритма будут записаны приближенное значение суммы и оценка погрешности, $\mathrm{sum} := (u - z)^{-1} - (u - w)^{-1}$ и $\mathrm{err} := 0$. Будем хранить в памяти массив со следующей структурой: в момент перехода в вершину $T = S_{i_{|T|}} \dots S_{i_2}S_{i_1}$ в n-й ячейке массива при $1 \le n \le |T| - 1$ записаны числа $(S_{i_n} \dots S_{i_2}S_{i_1})z$, $(S_{i_n} \dots S_{i_2}S_{i_1})w$ и модуль разности между ними, а также буква S_{i_n}, в нулевой ячейке — числа z, w и $|z - w|$. Перейдем в самую старшую вершину первого уровня. Итерацию алгоритма удобно разбить на два шага:

1. Учет слагаемого, отвечающего текущей вершине. Пусть T — вершина, в которую только что перешел алгоритм. Используя $(|T| - 1)$-ю ячейку, вычислим значения Tz, Tw, $|Tz - Tw|$ и поместим их в $|T|$-ю ячейку вместе с буквой $S_{i_{|T|}}$. Прибавим слагаемое, отвечающее вершине T: $\mathrm{sum} := \mathrm{sum} + (u - Tz)^{-1} - (u - Tw)^{-1}$.

2. Переход к следующей вершине. Пусть алгоритм находится в вершине T. Найдем следующую вершину рекурсивной процедурой поиска. Вначале за $\mathfrak{A}$ обозначим множество, состоящее из детей вершины T, а также из младших, чем вершина T, детей ее предков. Пусть S — самая старшая вершина во множестве $\{A \in \mathfrak{A} : |A| = \max_{U \in \mathfrak{A}}|U|\}$. Если выполнено неравенство $|Qz - Qw| \ge \mu/M(S)$, где Q — родитель S, то поиск закончен — перейдем от T к S. Иначе учтем вершину S и всех ее младших братьев вместе с поддеревьями потомков в текущей частичной оценке погрешности $\mathrm{err} := \mathrm{err} + |Qz - Qw|\sum_{B \in \mathfrak{B}(S)} M(B)$, переобозначим $\mathfrak{A} := \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}(S)$ и повторим процедуру поиска с новым $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A} = \varnothing$, алгоритм останавливается. Для эффективной навигации по дереву при поиске следующей вершины достаточно сохраненных в массиве букв.

По окончании работы алгоритма имеем оценку $\left|\eta_{zw}(u)/du - \mathrm{sum}\right| \le \rho^{-2} \cdot \mathrm{err}$.

Жадный подход М. Шмиза в реализации 3, как и алгоритм А.Б. Богатырёва, предполагает принятие решения об учете в сумме сразу всех детей вершины T на основании веса $K(T)|Tz - Tw|$, т.е. разделяет ту же неэкономичность: часть листьев обработанного поддерева вносит пренебрежимо малый вклад в сумму. А в реализации 2 все вершины, находящиеся в памяти в момент достижения нужной точности, не будут учтены в сумме, при этом для каждой такой вершины T вычислены значения Tz, Tw и вес $(K(T) + 1)|Tz - Tw|$. Таких вершин при $\mathfrak{T} \supset \{S \in \mathfrak{S} : |S| < n\}$, $n \to \infty$ и $g > 1$ в $2g - 2$ раза больше, чем вершин в $\mathfrak{T}$. Избежать вычисления указанных значений для еще не учтенных в сумме вершин можно, если в определении веса вершины $S_{-j}T$ использовать не само значение $|S_{-j}Tz - S_{-j}Tw|$, а его оценку через значение $|Tz - Tw|$.

Алгоритм 5

Введем вес вершины $\mathrm{weight}(T) := M(T)|Qz - Qw|$ при $T \ne \mathrm{id}$, где Q — родитель T. Тогда во всякой паре братьев больший вес имеет тот, который старше. Зафиксируем целевую точность $\varepsilon > 0$. Присвоим начальные значения переменным, в которых будут храниться текущее значение суммы и текущая оценка погрешности, $\mathrm{sum} := (u-z)^{-1} + (u-w)^{-1}$ и $\mathrm{err} := \sum_{j\in\Xi} \mathrm{weight}(S_j)$. Сохраним в памяти самую старшую вершину первого уровня. Для всякой сохраненной в памяти вершины T будем помнить значения Qz, Qw, $|Qz - Qw|$, где Q – родитель T, а также $\mathrm{weight}(T)$ и две первых слева буквы слова T. Таким образом, чтобы сохранить в памяти вершину T, не нужно вычислять значения Tz, Tw, вместо них используются значения Qz, Qw, в том числе при подсчете веса T.

Итерация алгоритма: удалить из памяти вершину T с максимальным весом, поместить в память ее старшего ребенка, а также, если T не самый младший среди братьев, следующего по старшинству брата, и присвоить

$$\mathrm{sum} := \mathrm{sum} + (u - Tz)^{-1} - (u - Tw)^{-1},$$
$$\mathrm{err} := \mathrm{err} - \mathrm{weight}(T) + \sum_{j\in\Xi:\ S_jT>T} \mathrm{weight}(S_jT).$$

Алгоритм останавливается, как только число $\rho^{-2}\cdot\mathrm{err}$ становится меньше целевой точности ε – это произойдет за конечное число итераций. Для организации хранения вершин в памяти имеет смысл использовать специальные структуры данных, например, двоичную кучу, позволяющую извлекать элемент с максимальным весом за логарифмическое время.

При одинаковой оценке точности на выходе число просуммированных вершин у алгоритма 5 (модифицированного алгоритма Шмиза) не больше, чем у алгоритма 4 (модифицированного алгоритма Богатырёва), и в большинстве случаев эти числа равны – ситуация ровно та же, как и в случае алгоритма Богатырёва и алгоритма Шмиза в реализации 3. Чтобы в этом убедиться, запустим алгоритм 5 для произвольной целевой точности ε, запомним минимальный вес среди просуммированных вершин и подадим его на вход алгоритму 4 в качестве параметра μ. В результате алгоритм 4 обойдет ровно то же конечное поддерево $\mathfrak{T}$ – в предположении, что в дереве Кэли нет сразу нескольких вершин с весом, равным μ.

Отметим, что для алгоритма 4 перед началом итераций необходимо вычислить и запомнить (кэшировать) значения $\varepsilon/M(S_jT)$ и $\sum_{B\in\mathfrak{B}(S_jT)} M(B)$ для всех комбинаций первых двух слева букв несократимого слова S_jT, для алгоритма 5 – значения $M(S_jT)$ и $\sum_{j\in\Xi} M(S_jT)$.

4. НОВАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ СУММЫ ПО ПОДДЕРЕВУ ПОТОМКОВ

Теорема 4. *Пусть слово $T\in\mathfrak{S}$, $T\neq\mathrm{id}$, начинается на букву S_t. Имеет место оценка*

$$\sum_{S\in\mathfrak{S}:\ S>T}\left|\frac{Sz - Sw}{Tz - Tw}\right| < \max_{j\in\Xi:\ j\neq t}\frac{(\sqrt{\gamma}+1)\left(\sum_{l=1}^{g}\mathrm{diam}(C_l)\right)\mathrm{diam}(C_j)}{4\,\mathrm{dist}(C_j,C_t)(\mathrm{diam}(C_j)+\mathrm{dist}(C_j,C_t))} =: K_t^{(3)}.$$

Доказательство. Воспользуемся двумя тождествами, справедливыми для всех дробно-линейных преобразований F и $z_1, z_2\in\mathbb{C}$:

$$F'z_1\cdot F'z_2 = \left(\frac{Fz_1 - Fz_2}{z_1 - z_2}\right)^2,\quad \frac{F'z_1}{F'z_2} = \left(\frac{z_2 - F^{-1}\infty}{z_1 - F^{-1}\infty}\right)^2.$$

Запишем $S = AT$, где слово A заканчивается на букву S_{-j}, $j\neq t$. Имеем цепочку неравенств

$$\left|\frac{ATz - ATw}{Tz - Tw}\right| = |A'(Tz)A'(Tw)|^{1/2} = |A'(p_j^-)A'(p_j^+)|^{1/2}\left|\frac{(p_j^- - A^{-1}\infty)(p_j^+ - A^{-1}\infty)}{(Tz - A^{-1}\infty)(Tw - A^{-1}\infty)}\right| =$$
$$= \frac{\mathrm{diam}(A\mathcal{F})}{\mathrm{diam}(C_j)}\frac{(A^{-1}\infty - p_j^-)(p_j^+ - A^{-1}\infty)}{|(Tz - A^{-1}\infty)(Tw - A^{-1}\infty)|} < \mathrm{diam}(A\mathcal{F})\cdot h_{tj}(A^{-1}\infty),$$

в которой $h_{tj}(x) := (x - p_j^-)(p_j^+ - x)/(\mathrm{diam}(C_j)\mathrm{dist}^2(x, C_t))$. Максимум функции $h_{tj}(x)$ на отрезке $[p_j^-; p_j^+]\ni A^{-1}\infty$ равен $\mathrm{diam}(C_j)/(4(p_{tj} - p_j^+)(p_{tj} - p_j^-))$ и достигается в точке $\tilde{G}_j p_{tj}$, где p_{tj} – ближай-

Таблица 1. Сравнение алгоритмов. Приводится число обработанных вершин для заданной оценки точности

№	Алгоритм Шмиза в реализации 2	Алгоритм Богатырёва, Алгоритм Шмиза в реализации 3	Новые алгоритмы	Алгоритм Богатырёва/Нов.
1	4196	668	472	1.42
2	236189	64550	35221	1.83
3	385859	359858	114672	3.14
4	135490	29089	5476	5.31
5	101270	94948	6710	14.2
6	1194839	1057296	392375	2.69
7	292983	60530	25166	2.40
8	261042	247093	32458	7.61
9	84372	50403	8968	5.62
10	930708	901161	48883	18.4
11	305525	274079	73282	3.74
12	558281	527861	140531	3.76
13	1090469	146834	2914	50.4
14	3721103	3269970	34819	93.9

шая к окружности C_j точка окружности C_t, $\tilde{G}_j u := \tilde{c}_j + \tilde{r}_j^2/(u - \tilde{c}_j)$, $\tilde{c}_j$ и $\tilde{r}_j$ – центр и радиус окружности C_j. Остается оценить сумму диаметров $\sum_{A\in\mathfrak{S}:\, AT>T} \operatorname{diam}(A\mathcal{F})$ с помощью теоремы 2.

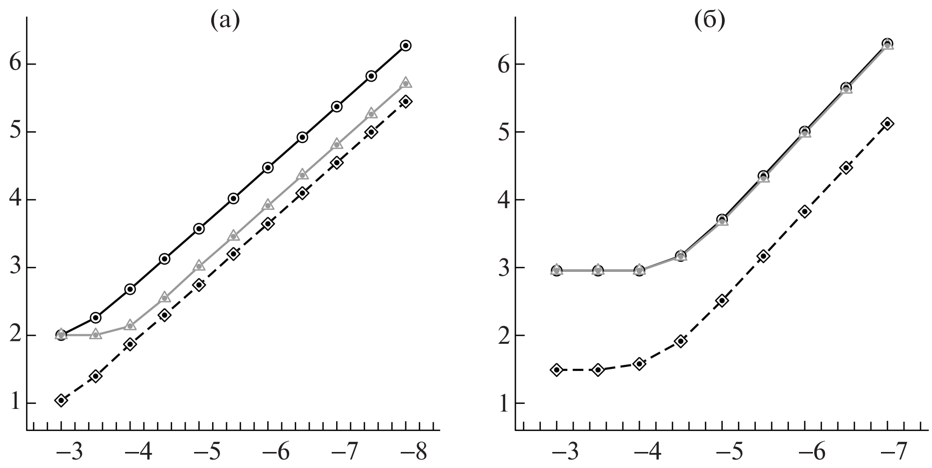
Для локализации точек Tz, Tw используются окружности первого уровня. Уточнить новую оценку можно путем локализации этих точек с использованием окружностей большего уровня, как и оценку Бёрнсайда.

5. СРАВНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ И ОЦЕНОК

Результаты сравнения алгоритмов приведены в табл. 1. Параметры примеров указаны в конце раздела (примеры 4–5). При сравнении алгоритмов величина $K(T)$ вычислялась следующим образом: при $\lambda < 1$ использовалось значение $K(T) := \min\{K_t^{(1)}, K_t^{(3)}\}$, при $\lambda \geq 1$ – значение $K(T) := K_t^{(3)}$, где t – индекс крайней слева буквы S_t несократимого слова $T \neq \mathrm{id}$. Вместо значения ρ^{-2} использовалась оценка сверху величины $|(u - Sz)^{-1}(u - Sw)^{-1}|$ при $u \in \mathcal{F}$ и $S \neq \mathrm{id}$ – число $\operatorname{dist}^{-2}(u, \partial\mathcal{F})$. В алгоритмах с апостериорной оценкой точности для малого параметра μ, подаваемого на вход, подбиралось максимальное значение, с которым на выходе алгоритма достигается нужная точность ε. Под *обработанной вершиной* понимается вершина T, для которой вычислены значения Tz и Tw. Во всех алгоритмах, кроме подхода Шмиза в реализации 2, каждая обработанная вершина учитывается в сумме, т.е. добавляется в поддерево $\mathfrak{T}$. Во всех рассмотренных примерах алгоритм Богатырёва и алгоритм Шмиза в реализации 3 обходили одинаковые конечные поддеревья дерева Кэли и обрабатывали одинаковое количество вершин, поэтому результаты для них объединены в одну колонку; по этой же причине объединены в одну колонку и оба новых алгоритма.

Рассмотренные примеры позволяют заключить, что при одинаковой оценке точности на выходе новые алгоритмы обрабатывают существенно меньшее число вершин, чем алгоритмы Богатырёва и Шмиза: на десятки процентов в обычных ситуациях и в несколько раз при больших g или при наличии близких друг к другу граничных окружностей фундаментальной области. На фиг. 4 на двух примерах показано, как растет количество обработанных вершин с повышением точности: относительная разница между алгоритмами практически не меняется.

Модифицированный алгоритм Богатырёва (реализация 4) сопоставительно его обычной версии (реализация 1) для части вершин совершает одну лишнюю операцию сравнения двух веще-



Фиг. 4. Графики $\lg N(\varepsilon)$ от $\lg\varepsilon$ для алгоритма Шмиза в реализации 2 (сплошная черная линия), алгоритма Богатырёва (серая линия) и новых алгоритмов (штриховая линия), где $N(\varepsilon)$ – число обработанных вершин при выходной точности ε; (а) – для группы Шоттки и точек u, z, w из примера 2; (б) – из примера 5.

ственных чисел, но относительная сложность лишней операции незначительна, поскольку помимо этого обработка и учет в сумме вершины включают одно умножение вещественных чисел и следующие операции над комплексными числами: три деления, одно умножение, семь сложений и одно взятие модуля. Приближенно можно считать, что объемы вычислений, производимые этими алгоритмами, относятся как количества обработанных вершин. Так же и модифицированный алгоритм Шмиза (реализация 5) сопоставительно алгоритму Шмиза в реализации 3 совершает одно лишнее умножение двух вещественных чисел для части обработанных вершин. В этом случае относительная сложность лишней операции еще ниже, поскольку на каждой итерации совершается еще и дорогостоящее извлечение вершины с максимальным весом. В подходе Шмиза в реализации 2 большинство обработанных вершин не учитывается в сумме, а значит, для них совершается меньшее число арифметических операций, однако модифицированный алгоритм Шмиза выигрывает у этой реализации на заявленные значения и при подсчете точного числа арифметических операций.

Важно отметить, что модифицированный алгоритм Богатырёва затрачивает значительно меньшее расчетное время, чем модифицированный алгоритм Шмиза, несмотря на одинаковое число суммируемых вершин, поскольку не требует на каждой итерации поиска вершины с максимальным весом.

Отметим также, что алгоритм с априорной оценкой точности, в котором в качестве $\mathfrak{T}$ выступают несколько первых уровней дерева Кэли, взятых целиком, значительно уступает остальным алгоритмам в экономичности. При использовании оценки (2) для подсчета нужного числа уровней в примере 1 этот алгоритм просуммирует 5.38×10^{7} вершин, в примере 5 – 2.32×10^{15} вершин.

Результаты сравнения оценок – в табл. 2. В качестве оценки Бёрнсайда приводится значение $\max_{t\in\Xi} K_t^{(1)}$, в качестве новой оценки – значение $\max_{t\in\Xi} K_t^{(3)}$. Оценка Богатырёва $K^{(2)}$ вычислялась при указанном выше выборе констант E_1 и E_2. Как видно из таблицы, новая оценка восполняет отсутствие практичной оценки для ситуаций, когда не применима оценка Бёрнсайда, т.е. когда $\lambda \geq 1$. Оценка Богатырёва при указанном выше выборе констант E_1 и E_2 на много порядков уступает новой оценке и, по сути, не применима в практических вычислениях. В ситуациях, когда константа λ меньше единицы и не критически близка к ней, оценка Бёрнсайда точнее новой оценки – на 0.5–1.5 порядка. Тем самым, новая оценка нацелена на узкую сферу приложения – близкие к вырождению группы Шоттки. Такие группы возникают в практически важных задачах, например при расчете многополосных электрических фильтров методом чебышёвского анзаца [1].

Изложенная техника приближенного суммирования ряда для нормированного абелева дифференциала III рода η_{zw} прямо распространяется и на другие бесконечные суммы и произведе-

Таблица 2. Сравнение оценок для $\sum_{S>T}|Sz - Sw|/|Tz - Tw|$ при $T \neq \mathrm{id}$

№	Оценка Бёрнсайда	Оценка Богатырёва	Новая оценка
1	7.33×10^{-3}	1.13×10^{8}	2.93×10^{-2}
2	0.378	7.14×10^{6}	1.88
3	не применима	7.38×10^{7}	24.0
4	0.487	7.20×10^{10}	11.1
5	не применима	4.83×10^{12}	73.9
6	не применима	2.09×10^{8}	40.4
7	0.167	6.59×10^{9}	1.75
8	не применима	3.28×10^{14}	898.1
9	2.61	1.15×10^{12}	49.2
10	не применима	1.16×10^{11}	120.0
11	не применима	3.36×10^{8}	18.6
12	не применима	3.77×10^{9}	40.7
13	3.33×10^{-4}	2.72×10^{16}	4.12×10^{-2}
14	13.8	8.00×10^{18}	26.0

ния, которыми записываются теоретико-функциональные объекты на вещественной гиперэллиптической кривой в модели Шоттки.

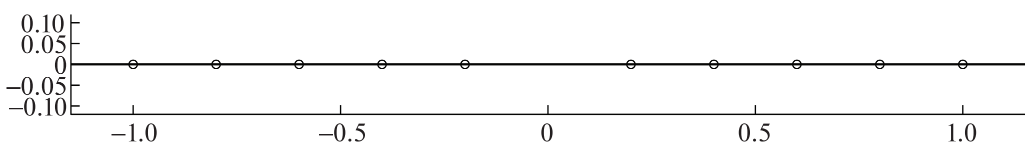
Ниже приводятся параметры групп Шоттки, использованных для сравнений. Массивы, обозначенные символами c, r, σ, p^+, p^-, имеют длину g — в них объединены значения соответствующих параметров для индексов $1,\ldots,g$. Через ε обозначена требуемая оценка точности на выходе алгоритмов. Для каждого из примеров, кроме последних двух, на рисунке изображена граница фундаментальной области. При непустом Σ^- точками на рисунке отмечены положения точек $\pm c_j \pm r_j$ для $j \in \Sigma^+$ и $\pm c_j \pm ir_j$ для $j \in \Sigma^-$.

Пример 1 (см. фиг. 5). $g = 5$, $\sigma = (1, 1, 1, 1, 1)$, $c = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$, $r = 0.01 \cdot (1, 1, 1, 1, 1)$, $u = 1 - 2i$, $z = 3 + 5i$, $w = -2 - 4i$, $\varepsilon = 10^{-10}$.

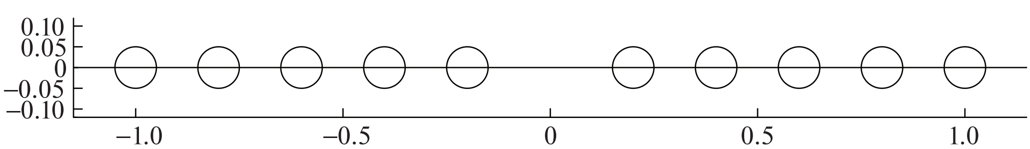
Пример 2 (см. фиг. 6). То же, что в примере 1, кроме $r = 0.05 \cdot (1,1,1,1,1)$ и $\varepsilon = 10^{-7}$.

Пример 3 (см. фиг. 7). То же, что в примере 1, кроме $r = 0.08 \cdot (1,1,1,1,1)$ и $\varepsilon = 5\times 10^{-4}$.

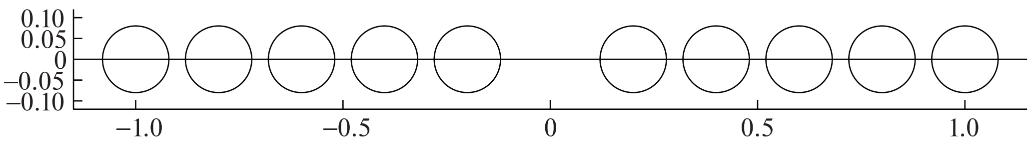
Пример 4 (см. фиг. 8). $g = 15$, $\sigma = (1, 1, \ldots,1)$, $c = (0.025, 0.102, 0.253, 0.301, 0.392, 0.495, 0.521, 0.669, 0.798, 0.843, 0.881, 0.911, 0.957, 0.977, 1)$, $r = 0.006 \cdot (1, 1, \ldots,1)$, $u = 12.345$, $z = -10 + 5i$, $w = 8 + 17i$, $\varepsilon = 10^{-10}$.



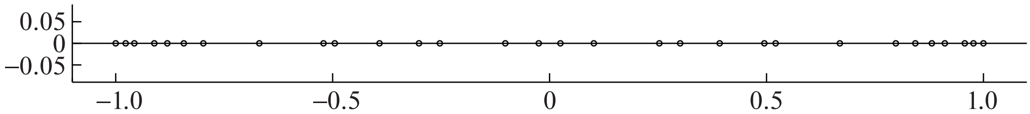
Фиг. 5. Фундаментальная область из примера 1.



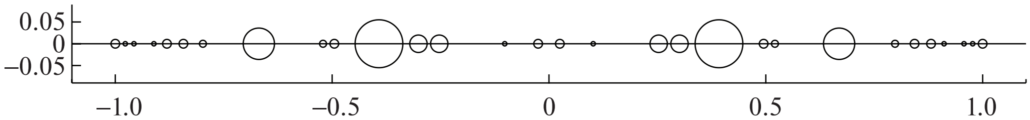
Фиг. 6. Фундаментальная область из примера 2.



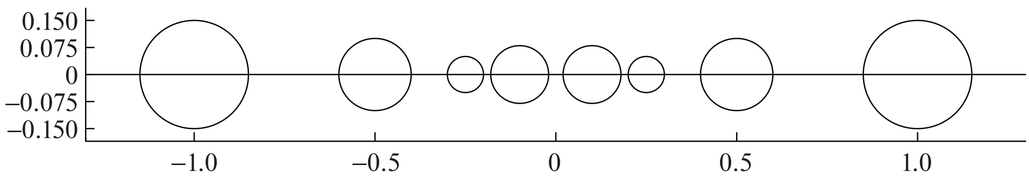
Фиг. 7. Фундаментальная область из примера 3.



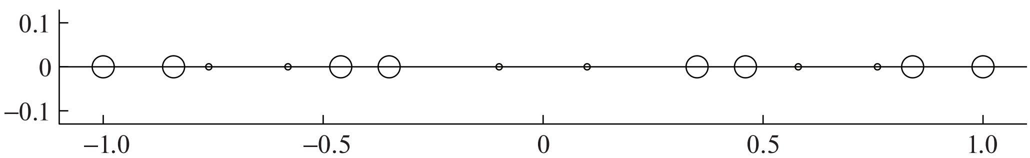
Фиг. 8. Фундаментальная область из примера 4.



Фиг. 9. Фундаментальная область из примера 5.



Фиг. 10. Фундаментальная область из примера 6.



Фиг. 11. Фундаментальная область из примера 7.

Пример 5 (см. фиг. 9). То же, что в примере 4, кроме $r = (0.01, 0.005, 0.02, 0.02, 0.055, 0.01, 0.008, 0.036, 0.008, 0.01, 0.01, 0.005, 0.005, 0.005, 0.01)$ и $\varepsilon = 10^{-6}$.

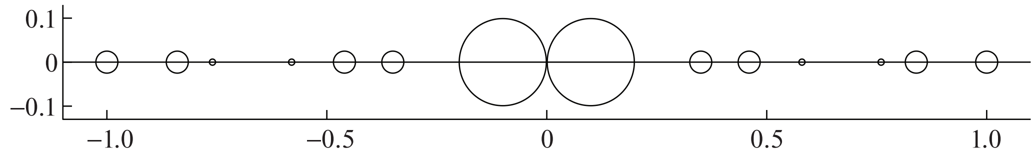
Пример 6 (см. фиг. 10). $g = 4$, $\sigma = (1, 1, 1, 1)$, $c = (0.1, 0.25, 0.5, 1)$, $r = (0.075, 0.05, 0.1, 0.15)$, $u = 0.25 + 5i$, $z = -2 + 0.75i$, $w = 3 - 0.125i$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Пример 7 (см. фиг. 11). $g = 7$, $\sigma = (1, 1, \ldots, 1)$, $c = (0.1, 0.35, 0.46, 0.58, 0.76, 0.84, 1)$, $r = (0.007, 0.025, 0.025, 0.007, 0.007, 0.025, 0.025)$, $u = 2 + 3i$, $z = 4 + 5i$, $w = 6 + 7i$, $\varepsilon = 10^{-11}$.

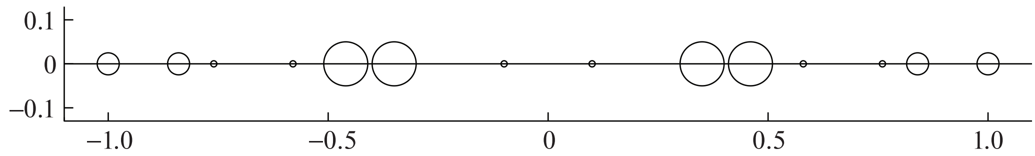
Пример 8 (см. фиг. 12). То же, что в примере 7, кроме $r_1 = 0.099$ и $\varepsilon = 10^{-6}$.

Пример 9 (см. фиг. 13). То же, что в примере 7, кроме $r_2 = r_3 = 0.05$ и $\varepsilon = 10^{-8}$.

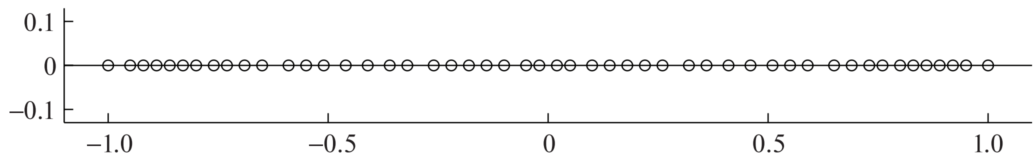
Пример 10 (см. фиг. 14). $g = 25$, $\sigma = (1, 1, \ldots, 1)$, $c = (0.02, 0.05, 0.1, 0.14, 0.18, 0.22, 0.26, 0.32, 0.36, 0.41, 0.46, 0.51, 0.55, 0.59, 0.65, 0.69, 0.73, 0.76, 0.80, 0.83, 0.86, 0.89, 0.92, 0.95, 1)$, $r = 0.012 \cdot (1, 1, \ldots, 1)$, $u = 2 + 2i$, $z = 1 + 2i$, $w = 1 + 3i$, $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-4}$.



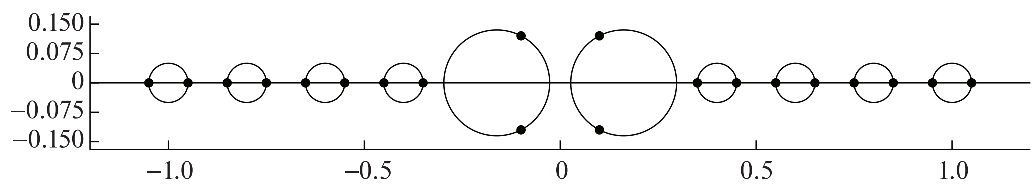
Фиг. 12. Фундаментальная область из примера 8.



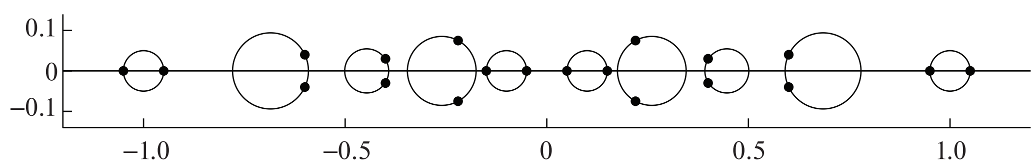
Фиг. 13. Фундаментальная область из примера 9.



Фиг. 14. Фундаментальная область из примера 10.



Фиг. 15. Фундаментальная область из примера 11.



Фиг. 16. Фундаментальная область из примера 12.

Пример 11 (см. фиг. 15). $g = 5$, $\sigma = (-1, 1, 1, 1, 1)$, $c = (0.1, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$, $r = (0.12, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05)$, $u = 1 + i$, $z = -4$, $w = 3i$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Пример 12 (см. фиг. 16). $g = 5$, $\sigma = (1, -1, -1, -1, 1)$, $c = (0.1, 0.22, 0.4, 0.6, 1)$, $r = (0.05, 0.075, 0.03, 0.04, 0.05)$, $u = 4 + 2i$, $z = 2 + 0.7i$, $w = -3 + i$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Пример 13. $g = 200$, $c_j = j/100$ и $r_j = 10^{-4}$ при $1 \le j \le 200$, $u = -3.0312 + 5.5431i$, $z = 9.0172 + 1.7912i$, $w = -4.0976 + 0.1211$, $\varepsilon = 10^{-12}$.

Пример 14. $g = 100$, $c_j = j/100$ при всех $1 \le j \le 100$, $r_1 = r_2 = r_3 = 4 \cdot 10^{-3}$, $r_j = 10^{-4}$ при $4 \le j \le 100$, $u = -1 + 2i$, $z = 3 + i$, $w = -2$, $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$.

Автор благодарен своему научному руководителю А.Б. Богатырёву за постановку задачи и ценные обсуждения. Также за ценные обсуждения автор благодарит С.А. Горейнова, О.А. Григорьева и М.С. Смирнова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богатырёв А.Б., Горейнов С.А., Лямаев С.Ю.* Аналитический подход к синтезу многополосных фильтров и его сравнение с другими подходами // Пробл. передачи информации. 2017. Т. 53. № 3. С. 64–77.
2. *Богатырёв А.Б.* Об эффективном вычислении многочленов Чебышёва для нескольких отрезков // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 15–50.
3. *Богатырёв А.Б.* Экстремальные многочлены и римановы поверхности. М.: МЦНМО, 2005.
4. *Belokolos E.D., Bobenko A.I., Enolskii V.Z., Its A.R., Matveev V.B.* Algebro-geometric approach to nonlinear integrable equations. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
5. *Богатырёв А.Б.* Вещественные мероморфные дифференциалы: язык для описания меронных конфигураций в планарных магнитных наноэлементах // Теор. и матем. физ. 2017. Т. 193. № 1. С. 162–176.
6. *Богатырёв А.Б.* Фильтрация под ступенчатой плотиной и римановы тета-функции // Тр. Матем. института имени В.А. Стеклова. 2020. Т. 311. С. 14–26.
7. *Bezrodnykh S., Bogatyrev A., Goreinov S., Grigoriev O., Hakula H., Vuorinen M.* On capacity computation for symmetric polygonal condensers // J. Comput. Appl. Math. 2019. V. 361. P. 271–282.
8. *Burnside W.* On a class of automorphic functions // Proc. Lond. Math. Soc. 1891. V. 23. P. 49–88.
9. *Schmies M.* Computing Poincare theta series for schottky groups. Ph.D. Thesis, Technische Universitat Berlin. Berlin, 2005.
10. *Crowdy D.G., Marshall J.S.* The Schottky–Klein prime function on the Schottky double of planar domains // Comput. Methods Funct. Theory. 2010. V. 10. P. 501–517.
11. *Богатырёв А.Б.* Представление пространств модулей кривых и вычисление экстремальных многочленов // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 3–28.
12. *Seppala M.* Myrberg's numerical uniformization of hyperelliptic curves // Ann. Acad. Scie. Fenn. Math. 2004. V. 29. P. 3–20.
13. *Poincare H.* Sur les groupes des equations lineaires // Acta Math. 1884. V. IV. P. 201–312.

EDN: BSTPVS
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1100–1114

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В УСЛОВИЯХ РАДИАЦИОННОГО ОБМЕНА[1)]

Е. В. Амосова[1,2]

[1] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия
[2] 690091 Владивосток, ул. Суханова, 8, ДВФУ, Россия
e-mail: el_amosova@mail.ru

Поступила в редакцию 12.01.2022 г.
Переработанный вариант 07.02.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

Рассмотрена модель вязкого совершенного газа в условиях радиационно-конвективной теплопроводности. Доказана однозначная разрешимость краевой задачи в классах обобщенных и классических решений для уравнений сложного теплообмена в сжимаемой среде на отрезке. Библ. 30.

Ключевые слова: система уравнений Навье–Стока, радиоактивный газ, глобальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S004446692207002X

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения, описывающие процессы конвективно-кондуктивного переноса теплового излучения несжимаемой среды рассмотрены в работах [1]–[4] и хорошо изучены.

В данной работе изучается модельная система уравнений одномерного движения вязкого сжимаемого газа с учетом радиационного и конвективного теплообмена. Для случая одной пространственной переменной модель вязкого теплопроводного газа в условиях радиационного обмена в ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}$ моделируется в нормализованном виде следующей системой, где используется $P1$ (диффузионное) приближение для уравнения переноса излучения [5]–[7]:

$$
\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R\frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta), \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\
\rho c_v\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left(\mu\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} - bk_\alpha(|\theta|\theta^3 - \varphi), \\
-\alpha\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_\alpha(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь u, ρ, θ, соответственно, скорость, плотность и нормализованная температура совершенного газа, давление определяется из уравнения Клайперона $p = R\rho\theta$, функция φ интерпретируется как нормализованная интенсивность излучения. Через μ, λ, c_v, R обозначены положительные физические константы, описывающие среду, μ – вязкость, λ – коэффициент теплопроводности газа, c_v – теплоемкость при постоянном объеме, R – газовая постоянная. Постоянные b, α описывают радиационно-термические свойства среды, k_α – коэффициент поглощения.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00113 а).

Рассмотрим движение газа через интервал $\Omega_0 = \{x\colon 0 < x < L_0\}$ с проницаемыми неподвижными границами. В начальный момент времени известны характеристики среды:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x) > 0, \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}_0.$$

При $t > 0$ область течения ограничена двумя границами. Через левую газ втекает $u\big|_{x=0} > 0$. Тогда на левой границе задаются условия на скорость, температуру, интенсивность излучения, а также плотность среды:

$$u\big|_{x=0} = u_1(t), \quad \rho\big|_{x=0} = \rho_1(t), \quad \theta\big|_{x=0} = \theta_1(t), \quad -\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \gamma(\varphi\big|_{x=0} - \theta_1^4) = 0.$$

Через правую границу газ вытекает. Следовательно, на правой границе задаются только скорость, температура и интенсивность среды:

$$u\big|_{x=L_0} = u_2(t), \quad \theta\big|_{x=L_0} = \theta_2(t), \quad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{x=L_0} + \gamma(\varphi\big|_{x=L_0} - \theta_2^4) = 0. \tag{2}$$

Коэффициент γ описывает отражающие свойства границы.

Отметим, что разрешимость граничных задач для уравнений вязкого теплопроводного газа в случае одномерного движения с теплоизолированной непроницаемой границей, либо при условии отсутствия напряжения ранее была изучена в работах [8]–[10].

Теоретический анализ краевых задач, связанных с различными моделями радиационного теплообмена с классическими краевыми условиями рассматривался многими авторами [11]–[22].

В то же время вопросы корректности начально-краевых задач для модели (1), (2), учитывающей радиационный теплообмен внутри области, а также анализ устойчивости стационарных решений, являются открытыми.

При исследовании сформулированной задачи удобно воспользоваться лагранжевыми координатами. Согласно формулам перехода [23] область течения в эйлеровых координатах в новых координатах при $t > 0$ перейдет в

$$Q_t = \{(x;t)\colon 0 < t < T;\ x \in \Omega_t\}, \quad \Omega_t = \{x\colon a(t) < x < b(t)\},$$

а при $t = 0$ – соответственно в интервал $\Omega_0 = \{x\colon 0 < x < L\}$, где

$$L = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0(x)dx, \quad L \neq 0.$$

При $t = T$ вместо Q_T, Ω_T будем писать Q, Ω соответственно.

Образами границ $x = 0$, $x = L_0$ в новых переменных будут

$$a(t) = -\int\limits_0^t u_1(\tau)\rho_1(\tau)d\tau, \quad b(t) = L - \int\limits_0^t u_2(\tau)\rho_2(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $\rho_2(t) = \rho(x,t)\big|_{x=L_0}$ определяется из уравнения состояния. Как следствие уравнения состояния для сжимаемой среды для одномерного пространства, запишем равенство

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m(t) > 0, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Перейдем в уравнениях (1) и условиях (2) к массовым лагранжевым переменным. В массовых лагранжевых переменных задача о протекании вязкого радиационного теплопроводного политропного газа через заданный интервал имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right) - R\frac{\partial}{\partial x}(\rho\theta), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$c_v\frac{\partial\theta}{\partial t} = \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x} - bk_\alpha(|\theta|\theta^3 - \varphi)\rho^{-1}, \tag{7}$$

$$-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+k_\alpha(\varphi-|\theta|\theta^3)\rho^{-1}=0, \tag{8}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad \theta|_{t=0}=\theta_0(x),\quad \rho|_{t=0}=\rho_0(x),\quad x\in\Omega_0,$$

$$u|_{x=a(t)}=u_1(t),\quad \theta|_{x=a(t)}=\theta_1(t),\quad -\alpha\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=a(t)}+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)=0,\quad \rho|_{x=a(t)}=\rho_1(t), \tag{9}$$

$$u|_{x=b(t)}=u_2(t),\quad \theta|_{x=b(t)}=\theta_2(t),\quad \alpha\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=b(t)}+\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)=0,\quad t\in(0,T).$$

Будем считать, что выполнены ограничения на начальную и граничную плотность газа

$$0<m_0\le\rho_0\le M_0<\infty,\quad \rho_1>0. \tag{10}$$

2. СИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Далее будем использовать обычные обозначения $L^p(W_p^l)$ для пространств функций, интегрируемых со степенью $p\ge1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l\ge0$). Через $L^2(0,T;X)$ обозначим пространство измеримых функций (пространство непрерывных функций, имеющих непрерывные в $[0,T]$ производные до порядка l), отображающих интервал $(0,T)$ ($[0,T]$) в пространство X таких, что

$$\|f\|^2_{L^2(0,T;X)}=\int_0^T\|f\|_X^2\,dt<\infty,\quad \|f\|_{C^l([0,T];X)}=\max_{0\le t\le T}\|f\|_X<\infty.$$

Через H^s будем обозначать пространство W_2^s, $s>0$,

$$H^{2,1}=\{q\in L^2(0,T;H^2(\Omega)):q\in H^1(0,T;L^2(\Omega)\},$$

$$H^{1,1}=\{q\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)):q\in H^1(0,T;L^2(\Omega)\}.$$

Рассмотрим пространство

$$Y=\{(q_1,q_2,q_3,q_4):q_1\in H^{2,1},\quad q_2\in H^{1,1},\quad q_3\in H^{2,1},\quad q_4\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\}.$$

Имеют место следующие свойства вложений [21]:

$$\begin{gathered}H^{2,1}\subset L^2(0,T;H^1(\Omega))\quad\text{непрерывно и компактно},\\ H^{2,1}\subset C(\bar{Q})\quad\text{непрерывно}.\end{gathered} \tag{11}$$

Определение 1. Сильным решением задачи (5)–(9) называется совокупность функций $\{u,\rho,\theta,\varphi\}\in Y$, удовлетворяющая уравнениям (5)–(8) почти всюду в $(0,T)\times\Omega$ и принимающая граничные и начальные значения (9) в смысле следов функций из указанных классов.

Пусть выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered}u_i\in H^1(0,T),\quad \theta_i\in H^1(0,T),\quad \rho_1\in H^1(0,T),\quad i=1,2,\\ \rho_0\in L^\infty(\Omega_0),\quad u_0\in L^\infty(\Omega_0),\quad \theta_0\in L^\infty(\Omega_0).\end{gathered} \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (10), (12). *Тогда существует единственное сильное решение задачи* (5)–(9), *причем функции* $\theta,\rho,u,\varphi(a(t),t),\varphi(b(t),t)$ *ограниченные,* θ, $\varphi(a(t),t)$, $\varphi(b(t),t)$ *неотрицательные, а* ρ *положительная*.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1

$$u_i(t)\in C^{1+\beta}[0,T],\quad \theta_i(t)\in C^{1+\beta}[0,T],\quad i=1,2;\quad \rho_1(t)\in C^{1+\beta}[0,T],$$

$$u_0(x)\in C^{2+\beta}(\bar\Omega),\quad \theta_0(x)\in C^{2+\beta}(\bar\Omega),\quad \rho_0(x)\in C^{1+\beta}(\bar\Omega)$$

и выполнены условия согласования

$$u_1(0)=u_0(0),\quad \theta_1(0)=\theta_0(0),\quad \rho_1(0)=\rho_0(0)\ \text{ при }\ x=0,$$

$$u_2(0) = u_0(L), \quad \theta_2(0) = \theta_0(L), \ \textit{при} \ \ x = L.$$

Тогда решение задачи (5)–(9) *является классическим*:

$$u(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}), \quad \theta(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}),$$

$$\varphi(x,t) \in C^{2+\beta,1}(\bar{Q}), \quad \rho(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}).$$

Доказательство теоремы 1 и теоремы 2 основано на применении априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и T. Полученные оценки позволяют продолжить на весь временной промежуток локальное решение, которое устанавливается с помощью принципа сжатых отображений. Операторное уравнение, эквивалентное задаче, строится путем линеаризации уравнений (5)–(8) и условий (9), точно также, как это сделано в работах [25], [26]. На малом интервале времени полученный оператор сжимающий, следовательно, можно применить теорему Банаха.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

На первом этапе проверятся ограниченность модуля скорости, положительность температуры и граничных значений функции интенсивности излучения, затем доказывается строгая положительность плотности. Вывод этих оценок опирается на ряд вспомогательных утверждений. В заключение выводятся оценки для старших производных от искомых функций и исследуются дифференциальные свойства решений.

В дальнейшем будем использовать формулу дифференцирования интеграла с пределами интегрирования, зависящими от параметра, справедливую для области с условиями (3), (4). Для $f \in C^1(\bar{Q})$ имеет место формула

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f^2(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f\frac{\partial f}{\partial t}dx - m(t)[f^2(b(t),t) - f^2(a(t),t)], \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть* $y \in H^{2,1}$, $k > 0$, $\delta > 0$, $k_1 = \text{const}$, $z_1 = \max\{y - k, 0\}$, $z_2 = \min\{y + k, 0\}$. *Обозначим через* $z_{i0} = z_i\big|_{t=0}$, $z_{ia} = z_i\big|_{x=a(t)}$, $z_{ib} = z_i\big|_{x=b(t)}$, $i = 1,2$. *Тогда справедливы равенства*

$$2\int_0^t\int_{\Omega_t}\frac{\partial y}{\partial t}z_i\,dxd\tau = \|z_i(t)\|^2 - \|z_i(0)\|^2 + 2\int_0^t m(\tau)[(z_{ib})^2 - (z_{ia})^2]d\tau, \tag{14}$$

$$\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}}dxd\tau = \int_{\Omega_t}\frac{(z_i + k_1)z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}}dx - \delta I_1(z_i,k_1) + I_2(z_i,k_1) \quad i = 1,2, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} I_1(z_i,k_1) = \int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{z_i + k_1}{(z_i^2+\delta)^{3/2}}\frac{\partial z_i}{\partial t}dxd\tau, \\ I_2(z_i,k_1) = -\int_{\Omega_0}\frac{(z_{i0}+k_1)z_{i0}}{\sqrt{z_{i0}^2+\delta}}dx + \int_0^t m(\tau)\left[\frac{(z_{ib}+k_1)z_{ib}}{\sqrt{z_{ib}^2+\delta}} - \frac{(z_{ia}+k_1)z_{ia}}{\sqrt{z_{ia}^2+\delta}}\right]d\tau. \end{gathered} \tag{16}$$

Доказательство. Вследствие (11) имеют место следующие равенства: $z_i(x,0) = z_{i0}$, $z_i(a(t),t) = z_{ia}$ $z_i(b(t),t) = z_{ib}$, где $i = 1,2$. Умножим $(\partial y/\partial t)$ на z_i, а затем на $z_i/\sqrt{z_i^2+\delta}$, $i = 1,2$, и проинтегрируем по области Ω_t. Используя (13), получаем

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial y}{\partial t}z_i\,dx = \int_{\Omega_t}\frac{\partial z_i}{\partial t}z_i\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}z_i^2\,dx + m(t)[(z_{ib})^2 - (z_{ia})^2],$$

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}} dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial (z_i+k_1)}{\partial t} \frac{z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}} dx =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{(z_i+k_1)z_i}{\sqrt{z_i^2+\delta}} dx - \delta \int_{\Omega_t} \frac{(z_i+k_1)}{(z_i^2+\delta)^{3/2}} \frac{\partial z_i}{\partial t} dx + m(t) \left[\frac{(z_{ib}+k_1)z_{ib}}{\sqrt{(z_{ib})^2+\delta}} - \frac{(z_{ia}+k_1)z_{ia}}{\sqrt{(z_{ia})^2+\delta}} \right].$$

Проинтегрируем по времени от 0 до t, получим (14), (15). Лемма доказана.

Согласно предположению о суммируемости $(\partial^2 u/\partial x^2)$ и $(\partial u/\partial t)$, функция $(\partial u/\partial x)$ непрерывна по x при почти всех $t \in (0,T)$. Чтобы найти априорную оценку для функции скорости $u(x,t)$, получим выражения для $(\partial u/\partial x)\big|_{x=a(t)}$, $(\partial u/\partial x)\big|_{x=b(t)}$, через данные задачи. Для этого перепишем (6) в виде равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{u\rho}\right),$$

которое рассмотрим при $x = a(t)$ и $x = b(t)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_1(t)}{m(t)}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u_2(t)}{m(t)}\right). \tag{17}$$

Умножим (5) на u скалярно в $L^2(\Omega_t)$. Учитывая (13), (17), получаем

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} |u|^2\,dx + m(t)(u_2^2(t) - u_1^2(t)) + \int_{\Omega_t} \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dx = \\ = \mu m(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{u_2(t)-u_1(t)}{m(t)}\right] - Rm(t)(\theta_2(t)-\theta_1(t)). \end{gathered} \tag{18}$$

Обозначим через

$$\begin{gathered} M_u = \max\left\{\|u_1\|_{H^1(0,T)}, \|u_2\|_{H^1(0,T)}, \|u_0\|_{L^\infty(0,L)}\right\} > 0, \\ \Sigma(t) = \frac{1}{2}\int_{u\in(-M_u;M_u)} |u|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|u_0|^2\,dx + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t m(\tau)[(u_2)^2 - (u_1)^2 + 2R(\theta_2-\theta_1)]d\tau - \mu\int_0^t m(\tau)\left(\frac{u_2(\tau)-u_1(\tau)}{m(\tau)}\right)' d\tau. \end{gathered} \tag{19}$$

Заметим, что $\Sigma(t) \in C[0,T]$ и существуют такие $\sigma_0 \ge 0$, $\sigma_1 > 0$, что

$$-\infty < -\sigma_0 \le \Sigma(t) \le \sigma_1 < \infty. \tag{20}$$

Положим $\zeta_1 = \max\{u - M_u, 0\} \ge 0$, $\zeta_2 = \min\{u + M_u, 0\} \le 0$.

Умножим (5) последовательно на ζ_1, ζ_2 скалярно в Ω_t и проинтегрируем по времени. Воспользовавшись (14) и условиями: $\zeta_i\big|_{t=0} = 0$, $\zeta_i\big|_{x=a(t)} = 0$, $\zeta_i\big|_{x=b(t)} = 0$, $i = 1,2$, найдем

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2\,dx + \int_0^t\int_{u>M_u}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau = 0, \\ \frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2\,dx + \int_0^t\int_{u<-M_u}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Проинтегрируем (18) по времени от 0 до t, учитывая (19), (21), находим

$$\int_0^t \int_{u\in(-M_u;M_u)} \left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x} - R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau + \Sigma(t) = 0. \tag{22}$$

Объединяя (21) и (22), вследствие (20), получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau-\sigma_0\le 0. \tag{23}$$

Пусть $\rho\ge 0$. Обозначим через

$$M=\max\left\{\|\theta_1\|_{H^1(0,T)},\|\theta_2\|_{H^1(0,T)},\|\theta_0\|_{L^\infty(0,L)},\|\varphi_0\|^{1/4}_{L^\infty(0,L)}\right\}>0.$$

Положим $\eta=\max\{\theta-M,0\}\ge 0$, $\eta|_{t=0}=0$, $\eta|_{x=a(t)}=0$, $\eta|_{x=b(t)}=0$. Умножим (7) на $(\eta/\sqrt{\eta^2+\delta_1})$, $\delta_1>0$, скалярно в Ω_t. Учитывая (15), находим

$$\begin{gathered}c_\nu\int_{\Omega_t}\frac{(\eta+\sigma_0/(c_\nu L))\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx+\lambda\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\rho}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}dxd\tau-\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau+\\+\int_0^t\int_{\Omega_t}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau=\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta+\sigma_0/(c_\nu L))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.\end{gathered} \tag{24}$$

Заметим, что

$$\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau\le\int_0^t\int_{\Omega_t}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau. \tag{25}$$

Равенство (24) вместе с (23), (25) приводит к оценке

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+c_\nu\int_{\Omega_t}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_\nu))\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx-\int_{\Omega_t}\frac{\sigma_0}{L}dx+\\+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(1-\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}\right)dxd\tau+\\+\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dxd\tau\le\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_\nu))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.\end{gathered} \tag{26}$$

Далее, пусть

$$\psi=\begin{cases}\varphi^{1/4}-M, & \varphi>M^4,\\ 0, & \varphi\le M.\end{cases}$$

Умножим (8) скалярно на $(\psi/\sqrt{\psi^2+\delta_1})$. Учитывая (9), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\alpha\delta_1}{4}\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\rho\varphi^{-3/4}}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dxk_\alpha\int_{\Omega_t}(\varphi-\theta^4)\frac{\rho^{-1}\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dx+\\+\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}\bigg|_{x=b(t)}+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}\bigg|_{x=a(t)}=0.\end{gathered}$$

Последние два слагаемых неотрицательны, так как $\varphi>M^4\ge\max\{\theta_1^4,\theta_2^4\}$. Таким образом,

$$\int_{\varphi>M^4,\theta>M}k_\alpha\rho^{-1}(\varphi-\theta^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dx\le\int_{\varphi>M^4}k_\alpha\rho^{-1}(\varphi-\theta^4)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}dx\le 0. \tag{27}$$

Умножая (27) на b, интегрируя по времени и складывая получившееся выражение с (26), находим

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+c_\nu\int_{\Omega_t}\frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx+\frac{\sigma_0}{L}\int_{\Omega_t}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}-1\right)dx+$$
$$+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(1-\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}\right)dxd\tau+ \tag{28}$$
$$+\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}-\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_1}}\right)dxd\tau\le\delta_1\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_\nu))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau.$$

Доказательство обоснования предельного перехода по δ_1 в (28) требует только слагаемое, стоящее в правой части этого выражения. Для этого заметим, что

$$\delta_1\int_{\Omega_t}\frac{(\eta+\sigma_0/(Lc_\nu))}{(\eta^2+\delta_1)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dx=\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\sigma_0/(Lc_\nu))\eta-\delta_1}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}\right)dx=$$
$$=\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\frac{(\sigma_0/(Lc_\nu))\eta-\delta_1}{\sqrt{\eta^2+\delta_1}}dx\to\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\frac{\sigma_0}{Lc_\nu}dx=0\quad\text{при}\quad\delta_1\to0. \tag{29}$$

При стремлении δ_1 к нулю, неравенство (28) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_1|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\zeta_2|^2dx+c_\nu\int_{\Omega_t}|\eta|dx\le0,\quad t>0.$$

Отсюда следует, что $\zeta_1=0$, $\zeta_2=0$, $\eta=0$, т.е. $-M_u\le u\le M_u$, $\theta\le M$.

Выберем $\psi=\max\{\varphi-M^4,0\}\ge0$, $\psi|_{t=0}=0$. Умножим (8) на ψ, учитывая (9), получаем

$$\alpha\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2dx+k_\alpha\int_{\varphi>M^4}\rho^{-1}(\varphi-\theta^4)(\varphi-M^4)dx+\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)\psi(b(t),t)+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)\psi(a(t),t)=0.$$

Так как первые два слагаемых неотрицательны, то

$$0\ge\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-\theta_2^4)\,\psi|_{x=b(t)}+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-\theta_1^4)\,\psi|_{x=a(t)}=\gamma(\varphi|_{x=b(t)}-M^4)\,\psi|_{x=b(t)}+\gamma(M^4-\theta_2^4)\,\psi|_{x=b(t)}+$$
$$+\gamma(\varphi|_{x=a(t)}-M^4)\,\psi|_{x=a(t)}+\gamma(M^4-\theta_1^4)\,\psi|_{x=a(t)}\ge\gamma(\psi|_{x=b(t)})^2+\gamma(\psi|_{x=a(t)})^2.$$

Отсюда $\psi|_{x=a(t)}=0$, $\psi|_{x=b(t)}=0$, т.е. $\varphi|_{a(t)}\le M^4$, $\varphi|_{b(t)}\le M^4$.

Для оценок снизу умножим (21), (22) на (−1) и сложим полученные выражения, учитывая (20), $\zeta_1=0$, $\zeta_2=0$, получаем

$$-\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}dxd\tau-\sigma_1\le0. \tag{30}$$

Пусть $\varepsilon>0$, положим $\eta=\min\{\theta+\varepsilon,0\}\le0$, $\eta|_{t=0}=0$, $\eta|_{x=a(t)}=0$, $\eta|_{x=b(t)}=0$, $\psi=-|\varphi|^{1/4}+\varepsilon$ при $\varphi<-\varepsilon^4$, и $\psi=0$ при $\varphi\ge-\varepsilon^4$.

Умножим (7) на $(\eta/\sqrt{\eta^2+\delta_2})$, $\delta_2>0$, а (8) – на ψ скалярно в Ω_t, проинтегрируем по времени. Учитывая (9), (15), (30), находим

$$c_\nu\int_{\Omega_t}\frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}dx+\frac{\sigma_1}{L}\int_{\Omega_t}\left(\frac{(-\eta)}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}-1\right)dx+\int_0^t\int_{\Omega_t}\left(\mu\rho\frac{\partial u}{\partial x}-R\rho\theta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(-1+\frac{(-\eta)}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}\right)dxd\tau+$$
$$+\int_0^t\int_{\theta>M,\varphi>M^4}bk_\alpha(|\theta^3|\theta-\varphi)\rho^{-1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\delta_2}}-\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2+\delta_2}}\right)dxd\tau\le\delta_2\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\frac{(\eta-\sigma_1/(Lc_\nu))}{(\eta^2+\delta_2)^{3/2}}\frac{\partial\eta}{\partial t}dxd\tau. \tag{31}$$

Устремляя δ_2 к нулю, рассуждая аналогично (28), приходим к оценке

$$\int_{\Omega_t} |\eta| dx \le 0, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что $\eta = 0$, т.е. $\theta \ge -\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем $\theta \ge 0$. Аналогично находим $\varphi(a(t), t) \ge 0$, $\varphi(b(t), t) \ge 0$.

Таким образом, справедливы следующие равномерные оценки сильного решения:

$$|u| < M_u, \quad 0 < \theta < M, \quad 0 < \varphi(a(t), t) < M^4, \quad 0 < \varphi(b(t), t) < M^4. \tag{32}$$

Оценки (32) справедливы до тех пор, пока $\rho \ge 0$. Поэтому на следующем этапе выводится соответствующая оценка для плотности.

4. ОЦЕНКА СНИЗУ И СВЕРХУ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ

Исключим выражение $(\rho \partial u/\partial x)$ из (5), используя (6), и проинтегрируем получившееся равенство по x от $a(t)$ до произвольного $x(t) > a(t)$:

$$\mu \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} - R\rho\theta = \mu \frac{\partial \ln \rho_1}{\partial t} - R\rho_1\theta_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{a(t)}^{x(t)} u dx' - (u_1)^2 \rho_1 + u^2 \rho.$$

После вторичного интегрирования по времени получим равенство

$$\mu \ln \rho - \int_0^t \rho(u^2 + R\theta) d\tau = \mu \ln \rho_0(x) + \mu \ln \frac{\rho_1(t)}{\rho_1(0)} - \int_0^t \rho_1((u_1)^2 + R\theta_1) d\tau + \int_{a(t)}^{x(t)} u dx' - \int_0^{x(t)} u_0 dx'. \tag{33}$$

Обозначим через

$$\Pi(x,t) = \ln \frac{\rho_0(x)\rho_1(t)}{\rho_1(0)} - \frac{1}{\mu} \int_0^t \rho_1((u_1)^2 + R\theta_1) d\tau + \frac{1}{\mu} \int_{a(t)}^{x(t)} u dx' - \frac{1}{\mu} \int_0^{x(0)} u_0 dx'. \tag{34}$$

Заметим, что $\Pi(x,t) \in C(\bar{Q})$ и существуют постоянные $p_0 < p_1$ такие, что

$$-\infty < p_0 \le \Pi(x,t) \le p_1 < \infty. \tag{35}$$

Из (33), учитывая (34), получаем равенство

$$\rho \exp\left\{ -\frac{1}{\mu} \int_0^t \rho(u^2 + R\theta) d\tau \right\} = \exp\{\Pi(x,t)\}. \tag{36}$$

Умножим (36) на $\mu^{-1}(u^2 + R\theta)$ и проинтегрируем по времени от 0 до t, найдем

$$\exp\left\{ -\frac{1}{\mu} \int_0^t \rho(u^2 + R\theta) d\tau \right\} = 1 + \frac{1}{\mu} \int_0^t \exp\{\Pi(x,\tau)\}(u^2 + R\theta) d\tau.$$

Отсюда и из (36) следует равенство

$$\rho(x,t) = \frac{\exp\{\Pi(x,t)\}}{1 + \frac{1}{\mu} \int_0^t \exp\{\Pi(x,\tau)\}(u^2 + R\theta) d\tau}. \tag{37}$$

Учитывая (32), (35), из (36) приходим к следующим равномерным оценкам для функции плотности:

$$0 < m_\rho \le \rho(x,t) \le M_\rho < \infty, \tag{38}$$

где

$$m_\rho = m_\rho(M_0, m_0, M, M_u, T), \quad M_\rho = M_\rho(M_0, m_0, M, M_u, T).$$

5. ОЦЕНКИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ИСХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Используя выведенные неравенства, докажем априорные оценки, указанные в теореме 1. Обозначим через

$$C_M = C(M, M_u, M_\rho, m_\rho) < \infty. \tag{39}$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $g \in H^{2,1}$, $g_i \in H^1(0,T)$, $i = 1,2$ такие, что $g(a(t),t) = g_1(t)$, $g(b(t),t) = g_2(t)$. Тогда $g \in L^2(0,T;C^1(\bar{\Omega}))$ и выполняется оценка*

$$\max_{x\in[a(t);b(t)]}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 \le C\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 dx + |g_1(t)|^2 + |g_2(t)|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2} + C(|g_1(t)|^2 + |g_2(t)|^2) \tag{40}$$

для п.в. $t \in (0,T)$.

Доказательство. Пусть $h \in H^{2,1}$ — произвольная функция. Как следствие вложения $H^2(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ заключаем, что $h \in C(\bar{Q})$ и $(\partial h/\partial x) \in C(\bar{\Omega})$ для почти всех $t > 0$. Будем считать, что $h|_{x=a(t)} = 0$, $h|_{x=b(t)} = 0$ при $t \in [0,T]$ и существует $x_1(t) \in (a(t),b(t))$ такая, что $(\partial h/\partial x)|_{x=x_1(t)} = 0$. Таким образом, имеет место формула

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 = 2\int_{x_1(t)}^{x(t)}\left|\frac{\partial h}{\partial \xi}\right| \operatorname{sign}\left(\frac{\partial h}{\partial \xi}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}d\xi.$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера выводим

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 \le 2\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{41}$$

Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2. Представим $g(x,t)$ в виде

$$g(x,t) = h(x,t) + g_1(t) + \frac{g_2(t) - g_1(t)}{L}(x(t) - a(t)). \tag{42}$$

Для функции g, определенной в (42), вследствие (41) справедлива оценка (40). Лемма доказана.

На первом этапе оценим функцию φ через норму θ в пространстве $L^2(\Omega)$. Для этого умножим (8) на φ скалярно в $L^2(\Omega_t)$, получим

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega_t)} \le C\|\theta\|^2_{L^2(\Omega_t)}, \quad t \ge 0. \tag{43}$$

Далее, из (18), учитывая (12), (32), (43), находим оценку

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int_0^t\|u\|^2_{H^1(\Omega_\tau)}d\tau \le TC_M, \quad t \in [0,T], \tag{44}$$

где постоянная C_M определенна в (39) и не зависит от T.

Получим априорную оценку производной функции температуры θ, определив сначала значения $(\rho\theta(\partial\theta/\partial x))|_{x=b(t)}$, $(\rho\theta(\partial\theta/\partial x))|_{x=a(t)}$ через данные задачи. Следуя доказательству леммы 2, найдется такая точка $x_1(t) \in (a(t),b(t))$, что

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=x_1(t)} = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{L}. \tag{45}$$

Обозначим через

$$
\begin{gathered}
N(x,t) = \theta(x,t)\rho(x_1,t)\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{L} + \frac{c_v}{\lambda}\theta(u\rho\theta - (u\rho\theta)|_{x=x_1(t)}) - \\
-\frac{\theta(x,t)}{\lambda}\int\limits_{x_1(t)}^{x(t)}\left[\mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|^2 - R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial\xi} - bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\right]d\xi.
\end{gathered} \tag{46}
$$

Заметим, что в силу (12), (32), (38), (44), справедливо неравенство

$$
\max_{x\in[a(t);b(t)]}\int\limits_0^t |N(x,\tau)|\,d\tau \le C_M T, \qquad t>0. \tag{47}
$$

Проинтегрируем (7) от $x_1(t)$ до произвольной точки $x(t)\in[a(t),b(t)]$, учитывая (45) и используя правило дифференцирования интеграла от параметра. Затем умножим полученное равенство на $\lambda^{-1}\theta(x,t)$, найдем

$$
\theta(x,t)\rho(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{c_v}{\lambda}\theta(x,t)\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{x(t)}\theta(\xi,t)d\xi + N(x,t), \tag{48}
$$

где $N(x,t)$ определена в (46). Рассмотрим (48) в точке $x=a(t)$,

$$
\begin{gathered}
\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\bigg|_{x=a(t)} = \frac{c_v}{\lambda}\theta_1(t)\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(\xi,t)d\xi + N(a(t),t) = \\
= \frac{c_v}{\lambda}\frac{d}{dt}\left(\theta_1(t)\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(\xi,t)d\xi\right) - \frac{c_v}{\lambda}\frac{d\theta_1}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(\xi,t)d\xi + N(a(t),t).
\end{gathered} \tag{49}
$$

Проинтегрируем (49) по времени от 0 до t, получим

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^t\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\bigg|_{x=a(t)} d\tau = \frac{c_v}{\lambda}\theta_1(t)\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta(x,t)dx - \frac{c_v}{\lambda}\theta_1(0)\int\limits_{x_1(0)}^{a(0)}\theta_0(x)dx - \\
-\frac{c_v}{\lambda}\int\limits_0^t\int\limits_{x_1(t)}^{a(t)}\theta_1'(\tau)\theta(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int\limits_0^t N(a(\tau),\tau)d\tau.
\end{gathered} \tag{50}
$$

Вследствие (12), (32), (47) каждое слагаемое в правой части (50) ограниченно для любого $t\in[0,T]$. Рассуждая аналогично для точки $x=b(t)$, найдем

$$
\int\limits_0^t\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\bigg|_{x=b(t)} d\tau - \int\limits_0^t\left(\theta\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\bigg|_{x=a(t)} d\tau \le C_M T, \tag{51}
$$

где постоянная C_M определена в (39).

Используя (43), (44), (51), из (7) стандартным способом получаем априорную оценку

$$
\|\theta\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int\limits_0^t\|\theta\|^2_{H^1(\Omega_\tau)}d\tau \le TC + C_M, \qquad t\in[0,T]. \tag{52}
$$

Найдем оценку для функции $(\partial\rho/\partial x)$. С этой целью умножим (6) на $(1/\rho)$, продифференцируем по x полученное равенство и учитывая первое слагаемое в правой части (5), найдем

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x} + R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.
$$

Проинтегрируем по времени последнее равенство, возведем в квадрат, затем еще раз проинтегрируем по области Ω_t. После простых преобразований найдем следующее выражение:

$$\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dx \le C_M\int\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right|^2 dx + C_M\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + C_M\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + C_M\int\limits_{\Omega_t}(|u|^2+|u_0|^2)dx,$$

из которого, с помощью леммы Гронулла, (44), (52), получим оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dx \le TC_M, \quad t\in[0,T]. \tag{53}$$

Здесь постоянная C_M определена в (39).

Получим оценки старших производных функций u, θ. Обозначим через

$$u_b = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b(t)}, \quad u_a = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a(t)}, \quad \theta_b = \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=b(t)}, \quad \theta_a = \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=a(t)}.$$

Умножим (5), (7) на u, θ, соответственно, скалярно в $L^2(\Omega)$. После применения формулы интегрирования по частям, учитывая (9), (13), найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + c_v\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right)dx + \int\limits_{\Omega_t}\rho\left(\mu\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \lambda\left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|^2\right)dx = I_1(t)+I_2(t)+I_3(t), \tag{54}$$

где

$$I_1(t) = -\frac{1}{2}m(t)\left[|u_b|^2 - |u_a|^2 + |\theta_b|^2 - |\theta_a|^2\right] + u_2'(t)u_b - u_1'(t)u_a + \theta_2'(t)\theta_b - \theta_1'(t)\theta_a,$$
$$I_2(t) = -\int\limits_{\Omega_t}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx, \tag{55}$$
$$I_3(t) = -\int\limits_{\Omega_t}\left(R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)dx.$$

Для оценки $I_1(t)$ применим лемму 2 к функциям u, θ. Используя (11), (38), получаем

$$I_1(t) = -\frac{1}{2}m(t)\left[|u_b|^2 - |u_a|^2 + |\theta_b|^2 - |\theta_a|^2\right] + u_2'(t)u_b - u_1'(t)u_a + \theta_2'(t)\theta_b - \theta_1'(t)\theta_a \le$$
$$\le C\left(\int\limits_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right]^2 dx + |u_i|^2 + |\theta_i|^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|^2\right]dx\right)^{1/2} + C(|u_i'(t)|^2 + |\theta_i'(t)|^2), \tag{56}$$
$$i = 1,2.$$

Оценим $I_2(t)$, применяя лемму 2 для функций u, θ и оценку (53):

$$I_2(t) = -\int\limits_{\Omega_t}\left(\mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \mu\rho\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx \le C\max_{a(t)\le x\le b(t)}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|\right\}\left(\left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|\right)\times$$
$$\times\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|\right) \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2\right) + C_{\varepsilon_1}\left(\int\limits_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right]^2 dx + |u_i|^2 + |\theta_i|^2\right)^{1/2}\times \tag{57}$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|^2\right]dx\right)^{1/2} + C_{\varepsilon_1}(|u_i'(t)|^2 + |\theta_i'(t)|^2), \quad i = 1,2.$$

При оценке $I_3(t)$ воспользуемся неравенством Коши и (38)

$$\begin{aligned} I_3(t) = -\int_{\Omega_t}\left(R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bk_\alpha(\theta^4-\varphi)\rho^{-1}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)dx \le \\ \le \frac{\varepsilon_1}{2}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2\right) + C_{\varepsilon_1}\left(1 + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\|^2\right). \end{aligned} \tag{58}$$

Подставляя (56)–(58) в (54) и выбирая $\varepsilon_1 = m_0\min\{\mu,\lambda\}/2$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2\right) + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2 \le C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2 + |u_i|^2 + |\theta_i|^2\right)^{1/2}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\|^2\right)^{1/2} + \\ + C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\|^2\right) + C(|u_1'(t)|^2 + |\theta_1'(t)|^2 + |u_2'(t)|^2 + |\theta_2'(t)|^2). \end{aligned} \tag{59}$$

Применяя неравенство Коши к первому слагаемому правой части (59), интегрируя по времени и учитывая (44), (52), (53), найдем оценку

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \|\theta\|^2_{H^1(\Omega_t)} + \int_0^t (\|u\|^2_{H^2(\Omega_\tau)} + \|\theta\|^2_{H^2(\Omega_\tau)})d\tau \le C_M T, \quad t > 0, \tag{60}$$

где постоянная C_M определена в (39).

Заметим, что вследствие леммы 2 справедливо неравенство

$$\max_{x(t)\in[a(t),b(t)]}\int_0^t\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|^2\right)d\tau \le C_M T, \quad t > 0. \tag{61}$$

Выражая из (6) $\partial\rho/\partial t = -\rho^2(\partial u/\partial x)$, учитывая (61), получаем

$$\max_{x(t)\in[a(t),b(t)]}\int_0^t\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|^2 d\tau \le C_M T, \quad t > 0. \tag{62}$$

Из (5)–(7) учитывая (43), (44), (52), (53), находим

$$\int_0^T\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\|^2\right)dt + \max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\|^2 \le C_M. \tag{63}$$

Получим оценку старшей производной для функции φ. Умножим (8) на φ скалярно в $L^2(\Omega_t)$, $t \ge 0$, найдем

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 dx + \int_{\Omega_t}|\varphi|^2 dx + |\varphi(a(t),t)|^2 + |\varphi(b(t),t)|^2 \le C\int_{\Omega_t}|\theta|^2 dx + C(|\theta_1(t)|^2 + |\theta_2(t)|^2) \le C_M, \quad t > 0.$$

Рассуждая аналогично лемме 2, можем записать неравенство

$$\max_{a(t)\le x\le b(t)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 \le C\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 dx + C|\varphi(a(t),t)|^2 + C|\varphi(b(t),t)|^2 + \varepsilon\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx.$$

Из равенства

$$\alpha\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = k_\alpha(\varphi-\theta^4)\rho^{-1} - \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

вытекает формула

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx \le C\max_{a(t)\le x\le b(t)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|^2 dx + C_M.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/(2C_M)$, находим оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2 dx \le TC_M. \tag{64}$$

Замечание 1. Единственность решения проверяется стандартным способом составления однородной задачи для разности двух возможных различных решений. Найденные априорные оценки сильного решения гарантируют ограниченность нелинейных слагаемых в соответствующих пространствах.

Замечание 2. Полученные оценки гарантируют существование решения "в целом" по времени вместе с локальной теоремой. Локальная теорема доказывается с помощью принципа сжатых отображений. Полученные априорные оценки сильного решения зависят только от данных задачи и от величины T, но не от величины интервала существования локального решения. Поэтому локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,T]$.

Изложим доказательство оценок для классических решений из теоремы 2. Сначала заметим, что согласно уравнению (6)

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t} = -\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вследствие (53), (60), (61), найдем оценку

$$\int_0^T\left\|\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t}\right\|^2 dt \le C\left\|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\|^2\int_0^T\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 + \max_{a(t)\le x\le b(t)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right)dt \le TC_M. \tag{65}$$

Продифференцируем (8), (9) по t, получим следующую краевую задачу, относительно функции $\partial\varphi/\partial t$:

$$\begin{gathered}
-\alpha\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + k_\alpha\rho^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 4k_\alpha\rho^{-1}\theta^3\frac{\partial\theta}{\partial t} + k_\alpha\rho^{-2}(\varphi-\theta^4)\frac{\partial\rho}{\partial t},\\
-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{x=a(t)} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}(\varphi|_{x=a(t)} - \theta_1^4) = 0,\\
\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{x=b(t)} + \gamma\frac{\partial}{\partial t}(\varphi|_{x=b(t)} - \theta_2^4) = 0.
\end{gathered} \tag{66}$$

Умножим уравнение в (66) на $(\partial\varphi/\partial t)$ скалярно в $L^2(\Omega_t)$, учитывая (62), (63), получаем

$$\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}\right|^2 dx + \int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \left|\frac{\partial\varphi(a(t),t)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi(b(t),t)}{\partial t}\right|^2 \le C_M, \quad t\in[0,T]. \tag{67}$$

Далее, дифференцируя (5) по t, а затем умножая скалярно в $L^2(\Omega_t)$ полученное равенство на $(\partial u/\partial t)$, после простых выкладок получаем оценку

$$\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt + \max_{0\le t\le T}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \le TC_M. \tag{68}$$

Аналогично, дифференцируя по t уравнение (7) и учитывая (66), выводим

$$\int_0^T\int_\Omega\left|\frac{\partial^2\theta}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt + \max_{0\le t\le T}\int_\Omega\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|^2 dx \le TC_M. \tag{69}$$

Оценки (53), (60), (63)–(65), (67)–(69) по теореме вложения [27] гарантируют непрерывность в $\bar{Q}$ по Гёльдеру с показателем 1/2 для функций ρ, u, θ, φ. Поэтому можно утверждать, что при выполнении условий теоремы 1, имеют место следующие оценки:

$$\|\rho\|_\beta + \|u\|_\beta + \|\theta\|_\beta + \|\varphi\|_\beta \le C_0, \quad 0 < \beta \le 1/2. \tag{70}$$

Здесь $\|\cdot\|_r$ – норма в $C^r(\bar{Q})$, $r \ge 0$.

Отметим, что необходимые оценки для обоснования гёльдеровской непрерывности с показателем 1/2 для функции $(\partial\rho/\partial x)$, получаются из (37) способом, аналогичным в работе [25].

Таким образом, уравнения (5), (7), (8) можно рассматривать как смешанную систему, состоящую из двух параболических и эллиптического уравнений относительно $u(x,t)$, $\theta(x,t)$, $\varphi(x,t)$ с коэффициентами и правыми частями из $C^{1/2}(\bar{Q})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - R\theta\frac{\partial\rho}{\partial x} - R\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{71}$$

$$c_\nu\frac{\partial\theta}{\partial t} = \lambda\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} - R\rho\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - bk_\alpha(\theta^4 - \varphi)\rho^{-1}, \tag{72}$$

$$-\alpha\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = k_\alpha\rho^{-1}(\varphi - \theta^4) \tag{73}$$

вместе с краевыми условиями (9). Функция ρ определена формулой (37).

Пусть $\nu = (1/2)\min\{\beta, 1/2\}$. Из теории краевых задач [28], [29], считая выражение $(\mu\rho(\partial u/\partial x)^2 - bk_\alpha(\theta^4 - \varphi)\rho^{-1})$ правой частью параболического уравнения (72) относительно θ, получим оценку

$$\|\theta\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0(1 + \|\partial u/\partial x\|_0\,\|\partial u/\partial x\|_{2\nu,\nu} + \|\partial u/\partial x\|_{2\nu,\nu}). \tag{74}$$

Здесь $\|\cdot\|_{2k+2\nu,k+\nu}$ — норма в $C^{2k+2\nu,k+\nu}(\bar{Q})$.

Точно так же, рассматривая (71) как параболическое уравнение относительно u с правой частью $(R\theta(\partial\rho/\partial x) + R\rho(\partial\theta/\partial x))$, и учитывая (70), (74), запишем

$$\|u\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0(1 + \|\partial u/\partial x\|_0\,\|\partial u/\partial x\|_{2\nu,\nu}). \tag{75}$$

Рассуждая аналогично [25], используя интерполяционные неравенства [30]

$$\|\partial u/\partial x\|_0 \le C_0\,\|\partial u/\partial x\|_{1/2}^{1-s}\,\|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu}^{s},$$

$$\|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0\,\|\partial u/\partial x\|_{1/2}^{1-r}\,\|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu}^{r},$$

где $s = 1/(3+4\nu)$, $r = (1+4\nu)/(3+4\nu)$, из (75) найдем

$$\|u\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0(1 + \|\partial u/\partial x\|_{2+2\nu,1+\nu}^{r+s}).$$

Причем, $r + s < 1$. Применяя неравенство Юнга, из этой формулы, учитывая (70), находим оценку для $u(x,t)$, а затем из (74) оцениваем θ:

$$\|u\|_{2+2\nu,1+\nu} + \|\theta\|_{2+2\nu,1+\nu} \le C_0.$$

После этого гладкость ρ повышается на основе формулы (37). Таким образом,

$$\|\rho\|_{1+\nu,1+\nu/2} \le C_0.$$

Далее, из теории разрешимости краевых эллиптических задач [27] находим оценку для функции φ:

$$\|\varphi\|_{2+2\nu,1} \le C_0.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
2. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 28. № 2. С. 275–282.

3. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Comm. Nonlinear Sci. Num. Simulat. 2018. T. 57. P. 290–298.
4. *Kelley C.T.* Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations // Transport Theory Statist. Phys. 1996. T. 25. № 2. P. 249–260.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1986.
6. *Modest M.F.* Radiative heat transfer. New York: Academic Press, 2003.
7. *Boas D.A.* Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media: theory and biomedical applications. A Ph.D. Dissertation in Physics, University of Pennsylvania, 1996.
8. *Кажихов А.В., Шелухин В.В.* Однозначная разрешимость “в целом” по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа // Прикл. матем. и механ. 1977. Т. 41. С. 282–291.
9. *Канель Я.И.* Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа. // Дифференц. ур-ния. 1968. Т. 4. № 4. С. 721–734.
10. *Itaya N.* On the temporally global problem of the generalised Burgers' equation // J. Math.Kyoto Univ. 1974. T. 14. № 4. P. 129–177.
11. *Амосов А.А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 510–535.
12. *Амосов А.А.* Нестационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 59. С. 5–34.
13. *Amosov A.A.* Some properties of boundary value problem for radiative transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions // J. Math. Sci. (United States). 2015. V. 207. № 2. P. 118–141.
14. *Амосов А.А.* Существование глобальных обобщенных решений уравнений одномерного движения вязкого реального газа с разрывными данными // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 4. С. 486–499.
15. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by the SP 1 system // Comm. Math. Sci. 2007. T. 5. № 4. P. 951–969.
16. *Druet P.E.* Existence of weak solutions to the time dependent MHD equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2009. T. 5. P. 2914–2936.
17. *Ducomet B., Necasova S.* Global weak solutions to the 1D compressible Navier?Stokes equations with radiation // Commun. Math. Anal. 2010. T. 8. № 3. P. 23–65.
18. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2014. T. 249. P. 247–252.
19. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM: Math. Model. Num. Anal. 2017. T. 51. P. 2511–2519.
20. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. T. 289. P. 371–380.
21. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. T. 460. № 2. P. 737–744.
22. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
23. *Кажихов А.В.* О краевых задачах для уравнения Бюргерса сжимаемой жидкости в областях с подвижными границами // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1976. Т. 26.
24. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
25. *Кажихов А.В.* О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа. Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1976. Т. 24.
26. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
27. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
28. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Наука, 1968.
29. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1959. T. 13. № 2.
30. *Ладыженская О.Л., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

EDN: TAUBFR
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1115–1137

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.952

ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ *J*-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЛИПСЕ

В. Г. Николаев

173003 Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41,
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Россия
e-mail: vg14@inbox.ru

Поступила в редакцию 14.11.2021 г.
Переработанный вариант 14.11.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2022 г.

Рассмотрена задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису в эллипсе. Получены необходимые и достаточные условия на $\ell \times \ell$-матрицу J и эллипс Γ, при которых решение задачи Шварца существует и единственно в классах Гёльдера. Для $\ell = 2$ и матриц с разными собственными значениями проведена редукция задачи Шварца к скалярному функциональному уравнению. Получены достаточные условия на жорданов базис матрицы J, при которых задача Шварца разрешима в произвольном эллипсе. Рассмотрены матрицы J с собственными значениями, лежащими как выше, так и ниже вещественной оси. Библ. 15.

Ключевые слова: *J*-аналитические функции, λ-голоморфные функции, собственное значение матрицы, эллипс, индекс оператора.

DOI: 10.31857/S0044466922050106

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование краевых задач для различных классов аналитических функций имеет давнюю историю (см. [1]–[3]), и в последние годы развивались в нескольких направлениях как теоретического характера (см. [4], [5]), так и с точки зрения их приложений к задачам общей теории краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений (см. [6]–[8]).

Задача Римана–Гильберта (см. [1], [3]) о нахождении аналитической в области функции по заданному на границе значению ее вещественной части относится к одной из ключевых краевых задач. Одним из возможных обобщений этой краевой задачи является задача Шварца для аналитических по Дуглису функций, специальный случай которой рассмотрен в этой работе.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определение 1 (см. [4], [9], [10]). Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ не имеет вещественных собственных значений. Аналитической по Дуглису, или J-аналитической с матрицей J называется комплексная ℓ-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, для которой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ выполнено уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \tag{1}$$

В [4] показано, что система дифференциальных уравнений в частных производных (1) является эллиптической. Примером J-аналитической функции может служить вектор-полином вида

$$\phi(z) = (Ex + Jy)^n \cdot c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}^\ell, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где E — единичная $\ell \times \ell$-матрица.

Определение 2. В скалярном случае, при $\ell = 1$, $J = \lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ J-аналитическую в области D функцию будем называть λ-голоморфной в области D. Для этих функций введем обозначение $f_\lambda(z)$. Соответственно, через $g_\mu(z)$ обозначим μ-голоморфную функцию.

Примерами λ-голоморфных функций являются полиномы вида $f_\lambda(z) = c_n(x + \lambda y)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, если она удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 1. Из равенства (1) вытекает, что если функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, то и функция $\phi^*(z) = \alpha \cdot \phi(z) + c$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}^\ell$, соответствует той же матрице J.

Замечание 2. Пусть $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \neq 0$. Посредством простых преобразований несложно показать, что в результате подстановки $x = x' + \lambda_1 y'$, $y = \lambda_2 y'$ функция $f(x, y)$, голоморфная в области D, станет λ-голоморфной функцией $f_\lambda(x', y')$, определенной в некоторой области D_λ. Соответственно, после обратной подстановки

$$y' = \frac{y}{\lambda_2}, \quad x' = x - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y$$

функция $f_\lambda(x', y')$ станет голоморфной функцией $f(x, y)$.

Таким образом, с учетом замечания 2 и известных свойств голоморфных функций [11], справедлива

Лемма 1. *Пусть конечная область* $D \subset \mathbb{R}^2$ *ограничена контуром* Γ. *Тогда если* λ*-голоморфная функция* $f_\lambda(z)\big|_\Gamma = 0$, *то* $f_\lambda(z) \equiv 0$. *Кроме того, если* $\operatorname{Re} f_\lambda(z)\big|_\Gamma = c_1$, *то* $f_\lambda(z) \equiv c_1 + ic_2$, *где* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим для эллиптической системы (1) следующую краевую задачу Шварца (см. [9], [10]).

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, которая удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = \psi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{2}$$

где граничная ℓ-вектор-функция $\psi(\omega) = (\psi_1(\omega), \ldots, \psi_\ell(\omega))^{\mathrm{T}} \in C(\Gamma)$ задана.

Если $\psi(\omega) \equiv 0$, то будем говорить об однородной задаче Шварца:

$$\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Очевидными решениями задачи (3) служат постоянные функции $\phi(z) \equiv ic$, $c \in \mathbb{R}^\ell$, которые назовем *тривиальными решениями*.

Для $\ell \geq 2$ возможны непостоянные решения однородной задачи (3). Приведем два примера для $\ell = 2, 3$.

Пример 1. Пусть $\ell = 2$,

$$J = \begin{pmatrix} -i & 4 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 - 1 + 2xyi \\ i(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Функция $\phi(z)$ соответствует матрице J, которая имеет кратное собственное значение $\lambda = i$. Имеем $\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе Γ: $3x^2 + y^2 = 1$.

Пример 2. Пусть $\ell = 3$. Матрица

$$J = \frac{-1}{1 + 2i} \begin{pmatrix} 4 - 2i & -25i & 5i - 10 \\ 0 & 4 + 3i & 2 - i \\ 0 & 8 - 4i & -5i \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda = i$, $\mu = i$, $\eta = 2i$. Данной матрице J соответствует функция

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} -5(x^2 + y^2)i \\ (x^2 + y^2)i \\ 2(x^2 + xy + y^2 - 1) + (y^2 - x^2)i \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе Γ: $x^2 + xy + y^2 = 1$.

3. ГРАНИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ТИЛЬДА-ПОЛИНОМЫ

В настоящей статье задача Шварца рассматривается только в эллипсе. В связи с этим несколько слов о терминологии. Будем называть *эллипсом* не только кривую Γ на плоскости, но также и область K, ограниченную кривой Γ, — в зависимости от контекста. Такая договоренность упростит изложение.

Данный раздел полностью посвящен изложению основных результатов из работы [12]. Затем эти результаты будут применены к изучению задачи Шварца в эллипсе.

Пусть вещественные параметры r_1, r_2 — полуоси эллипса, где $r_1, r_2 > 0$, и пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол в положительном направлении между полуосью эллипса длины r_1 и положительным направлением оси Ox. Тогда эллипс Γ с центром в начале координат может быть задан параметрическим уравнением

$$\Gamma\colon \omega(t) = \begin{cases} x(t) = r_1\cos\alpha\cdot\cos t - r_2\sin\alpha\cdot\sin t, \\ y(t) = r_1\sin\alpha\cdot\cos t + r_2\cos\alpha\cdot\sin t, \quad t\in[-\pi,\pi). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть функция $\psi = \psi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$, определена на эллипсе Γ. Формула (4) задает взаимно однозначное отображение $\omega = \omega(t)$ интервала $[-\pi,\pi)$ на эллипс Γ как на множество. Поэтому корректно определена функция

$$\psi'(t) = \psi(\omega(t)), \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{5}$$

Определение 4. Пусть $\omega = \omega(t)$ — параметризация (4) эллипса Γ. С учетом (5) будем отождествлять функции $\psi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$ и $\psi'(t)$, $t\in[-\pi,\pi)$.

Определение 5. Под функцией $\psi(\omega)\in H^\sigma(\Gamma)$ будем понимать функцию $\psi'(t)$, непрерывную по Гёльдеру с показателем $\sigma\in(0,1)$ на интервале $t\in[-\pi,\pi)$. Обозначим через $H^\sigma(\overline{K})$, $\sigma\in(0,1)$, класс функций, непрерывных по Гёльдеру в замыкании $\overline{K}$ эллипса K.

Пусть $a, b\in\mathbb{C}$, причем $a\neq 0$. Для $n = 1,2,3\ldots$ рассмотрим выражение

$$f_n(t) = e^{\mathrm{int}} + \frac{b^n}{a^n}e^{-\mathrm{int}}, \quad |a|>|b|, \quad a\neq 0, \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{6}$$

Следуя [12], будем называть функции $f_n(t)$ вида (6) *граничными полиномами*. Как нетрудно видеть, функции $f_n(t)$ попарно ортогональны на интервале $t\in[-\pi,\pi)$.

Далее, пусть $\lambda, a, b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Согласно [4] введем обозначения

$$[z] = x+\lambda y, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2; \quad [z]_t = ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}}, \quad t\in[-\pi,\pi). \tag{7}$$

Замечание 3. Ниже будем отождествлять обозначения $f(z)$ и $f([z])$. Так же будем обозначать $z = x+\lambda y$. Это сделает изложение более удобным.

Пусть $\zeta_{nk}\in\mathbb{C}$. Рассмотрим комплексные функции $\tilde{f}_n(z) = \tilde{f}_n([z])$, которые являются полиномами n-й степени переменной $[z]$:

$$\begin{gathered} \tilde{f}_n(z) = \tilde{f}_n([z]) = \zeta_{n1}[z]^n + \zeta_{n2}[z]^{n-2} + \ldots + \zeta_{ns-1}[z]^3 + \zeta_{ns}[z], \quad n = 1,3,5,\ldots; \\ \tilde{f}_n(z) = \tilde{f}_n([z]) = \zeta_{n1}[z]^n + \zeta_{n2}[z]^{n-2} + \ldots + \zeta_{ns-1}[z]^2 + \zeta_{ns}, \quad n = 2,4,6,\ldots. \end{gathered} \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что полиномы $\tilde{f}_n(z)$, а так же функция $[z] = x+\lambda y$, λ-голоморфны во всей плоскости $\mathbb{C}$. Справедлива

Лемма 2. *Для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует единственный набор чисел $\zeta_{nk}\in\mathbb{C}$, $k = 1,\ldots,s$, такой, что*

$$\tilde{f}_n([z]_t) = e^{\mathrm{int}} + \frac{b^n}{a^n}e^{-\mathrm{int}} = f_n(t), \quad t\in[-\pi,\pi), \tag{9}$$

где

$$s = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n = 1,3,5,\ldots, \\ \dfrac{n+2}{2}, & n = 2,4,6,\ldots. \end{cases}$$

При этом $\zeta_{n1} = \dfrac{1}{a^n}$.

Определение 6 (см. [12]). Полиномы $\tilde{f}_n(z)$ вида (8) с коэффициентами ζ_{nk} такими, что верна формула (9), называются тильда-полиномами степени n.

Подставим параметризацию (4) некоторого эллипса Γ в выражение $[z] = x + \lambda y$. Затем выразим $\cos t$, $\sin t$ как функции переменных e^{it} и $e^{-\mathrm{it}}$ с помощью формулы Эйлера $e^{\mathrm{it}} = \cos t + i \sin t$. В результате получим выражение $[z]_t$ в (7), но при этом числа $a, b \in \mathbb{C}$ определены однозначно параметрами r_1, r_2, α эллипса Γ, а также числом λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и имеют вид

$$\begin{gathered} a = a(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos\alpha + i r_2 \sin\alpha + \lambda(r_1 \sin\alpha - i r_2 \cos\alpha)}{2}, \\ b = b(\alpha, \lambda, r_1, r_2) = \frac{r_1 \cos\alpha - i r_2 \sin\alpha + \lambda(r_1 \sin\alpha + i r_2 \cos\alpha)}{2}, \\ r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad \alpha \in [0, 2\pi). \end{gathered} \tag{10}$$

Относительно чисел a, b (10) справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, *то* $a \neq 0$, $|a| > |b|$. *Если* $\operatorname{Im}\lambda < 0$, *то* $b \neq 0$, $|b| > |a|$.

В результате сделанных преобразований и с учетом обозначений (7) имеем равенство

$$[z]\big|_\Gamma = (x + \lambda y)\big|_\Gamma = a e^{\mathrm{it}} + b e^{-\mathrm{it}} = [z]_t, \quad t \in [-\pi, \pi), \tag{11}$$

которое понимается в смысле определения 4.

С учетом (11), леммы 2 и определения 4 справедлива

Лемма 3. *Для каждого граничного полинома* $f_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *вида* (6) *существует единственный тильда-полином* $\tilde{f}_n(z)$ (8) *такой, что*

$$\tilde{f}_n(z)\big|_\Gamma = f_n(t), \quad t \in [-\pi, \pi). \tag{12}$$

Следует отметить, что на формуле (12) основаны практически все приведенные ниже построения.

4. ГРАНИЧНАЯ СТРУКТУРА J-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЛИПСЕ

Пусть матрица J_1 — жорданова форма матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$, и пусть столбцы матрицы Q — это жорданов базис J. Тогда, как известно, справедливо равенство $J = Q J_1 Q^{-1}$. Подставим это выражение в (1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - Q J_1 Q^{-1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \phi = \phi(z),$$

и умножим обе части последнего равенства слева на матрицу Q^{-1}:

$$\frac{\partial}{\partial y}(Q^{-1}\phi) - J_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(Q^{-1}\phi) = 0. \tag{13}$$

Пусть в (13)

$$Q^{-1} \cdot \phi(z) = (g_1(z), \ldots, g_\ell(z))^{\mathrm{T}} = g^*(z), \tag{14}$$

где $g_k(z)$ — скалярные функции. Таким образом, с учетом (13) и (14) справедливо

Предложение 2. *Общее решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$\phi(z) = Q \cdot (g_1(z), \ldots, g_\ell(z))^{\mathrm{T}} = Q \cdot g^*(z), \tag{15}$$

где функция $g^*(z)$ (14) *есть решение уравнения* (13).

Нашей дальнейшей задачей будет определение структуры функций $g_k(z)$ в (14), (15).

Обозначим через $J_{\lambda_l}^{(m_l)}$ нижне треугольные жордановы клетки размера $m_l \times m_l$ с собственным значением λ_l матрицы J по главной диагонали. При этом $1 \le m_l \le \ell$. Тогда, как известно, жорданова $\ell \times \ell$-матрица J_1 имеет вид

$$J_1 = \operatorname{diag}\left(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, J_{\lambda_2}^{(m_2)}, \ldots, J_{\lambda_s}^{(m_s)}\right), \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_s = \ell. \tag{16}$$

С учетом блочно-диагональной структуры жордановой матрицы J_1 (16) достаточно определить структуру функций $g_k(z)$ для того случая, когда матрица J_1 есть жорданова клетка размера $m \times m$ с собственным значением λ по главной диагонали. Затем полученный результат распространим на общий случай.

Для определенности будем считать жорданову клетку $J_1 = J_\lambda^{(m)}$ нижне треугольной. Таким образом, с учетом обозначений (13) и (14) нужно найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} g^*(z) - J_\lambda^{(m)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} g^*(z) = 0, \tag{17}$$

где

$$J_\lambda^{(m)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im} \lambda \ne 0, \tag{18}$$

есть нижне треугольная жорданова клетка размера $m \times m$. Пусть $g^*(z) = (g_1, \ldots, g_m)$ и запишем (17) более подробно с учетом (18):

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_k(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_k(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Как нетрудно видеть, (19) распадается на следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $g_k(z)$, $k = 1, \ldots, m$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial g_1}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} = \frac{\partial g_{k-1}}{\partial x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x} = \frac{\partial g_{m-1}}{\partial x}. \end{gathered} \tag{20}$$

Справедлива

Лемма 4. *Функция* $g_1(z)$ *в* (20) *является* λ*-голоморфной. При* $k \geq 2$ *функции* $g_k(z)$ *как решения уравнений* (20) *представимы в виде*

$$g_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + f_k(z) = \\ = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{d^{k-r} f_r(z)}{dz^{k-r}} + f_k(z), \quad k = 2, \ldots, m, \tag{21}$$

где $f_k(z)$ *— произвольные* λ*-голоморфные функции.*

Доказательство. Функция $g_1(z) = f_1(z)$ будет λ-голоморфной в силу определения 2. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что решение второго уравнения ($k = 2$) в (21) представимо в виде

$$g_2(z) = y \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2(z) = y \cdot \frac{df_1}{dz} + f_2(z), \quad k = 2, \tag{22}$$

где $f_2(z)$ — произвольная λ-голоморфная функция. Формула (22) совпадает с (21) при $k = 2$, т.е. ее можно считать *базой индукции*. Далее применяем индукцию по k: пусть формула (21) справедлива для g_{k-1}, т.е. имеет место равенство

$$g_{k-1}(z) = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{y^{k-1-r}}{(k-1-r)!} \cdot \frac{d^{k-1-r} f_r(z)}{dz^{k-1-r}} + f_{k-1}(z). \tag{23}$$

При этом в (23) функции $f_1(z), \ldots, f_{k-1}(z)$ являются по предположению индукции λ-голоморфными. Будем искать функцию $g_k(z)$ в виде

$$g_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + g'(x, y), \tag{24}$$

где $g'(x, y) \in C^1(D)$ есть некоторая функция, подлежащая определению.

Заметим, что формулы (24) и (21) отличаются только последним слагаемым $g'(x, y)$, которое нужно определить. Имеем

$$\frac{\partial g_k}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \\ + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial y} g'(x, y) - \\ - \sum_{r=1}^{k-1} \lambda \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g'(x, y) = \\ = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial y} g'(x, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g'(x, y) = \\ = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial x} f_{k-1}(z) + \frac{\partial}{\partial y} g'(x, y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} g'(x, y) = \\ = \sum_{r=1}^{k-2} \frac{y^{k-r-1}}{(k-r-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-r} f_r(z)}{\partial x^{k-r}} + \frac{\partial}{\partial x} f_{k-1}(z) = \frac{\partial}{\partial x} g_{k-1}(z), \tag{25}$$

если положить $g'(x, y) = f_k(z)$, где $f_k(z)$ — произвольная λ-голоморфная функция. Таким образом, согласно (25) функция $g_k(z)$ (21) есть решение уравнения

$$\frac{\partial g_k}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x} = \frac{\partial g_{k-1}}{\partial x},$$

что и требовалось. Лемма 4 доказана.

Заметим, что

$$y = \frac{x + (\lambda_1 + \lambda_2 i)y - [x + (\lambda_1 - \lambda_2 i)y]}{2\lambda_2 i} = \frac{[z] - \overline{[z]}}{2\lambda_2 i} = \frac{z - \overline{z}}{2\lambda_2 i}. \tag{26}$$

Подставим (26) в (21). Тогда с учетом леммы 4 доказана

Лемма 5. *Общее решение* $g^*(z) = (g_1, \dots, g_m)$ *уравнения* (19) *представимо в виде*

$$\begin{gathered} g_1(z) = f_1(z), \\ g_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{z - \overline{z}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r} \cdot \frac{d^{k-r} f_r(z)}{dz^{k-r}} + f_k(z), \quad k = 2, \dots, m, \end{gathered} \tag{27}$$

где $f_k(z)$ — *произвольные* λ-*голоморфные функции.*

Ниже функции $g_k(z)$ будем использовать именно в виде (27). В силу (11) и замечания 3 при $q \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{gathered} \left.\left(\frac{z - \overline{z}}{2\lambda_2 i}\right)^q\right|_{\Gamma} = \left(\frac{(a - \overline{b})e^{\mathrm{it}} + (b - \overline{a})e^{-\mathrm{it}}}{2\lambda_2 i}\right)^q = \\ = \left(\frac{a - \overline{b}}{2\lambda_2 i}\right)^q \cdot e^{\mathrm{iqt}} + \left(\frac{b - \overline{a}}{2\lambda_2 i}\right)^q \cdot e^{-\mathrm{iqt}} + P_{q-1}(t), \end{gathered} \tag{28}$$

где функция $P_{q-1}(t)$ зависит от $e^{\pm \mathrm{ikt}}$ при $k < q$.

Пусть теперь $\tilde{f}_n(z) = \zeta_{n1}[z]^n + \dots$ — тильда-полином (8) степени n. Тогда

$$\frac{d^q \tilde{f}_n(z)}{dz^q} = \zeta_{n1} n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1) z^{n-q} + P_{n-q-1}(z), \tag{29}$$

где $P_{n-q-1}(z)$ — некоторый полином переменной $z = x + \lambda y$ степени $n - q - 1$. Выпишем граничное значение функции $\frac{d^q \tilde{f}_n(z)}{dz^q}$ на Γ, для чего подставим в правую часть (29) вместо z выражение $[z]_t = ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}}$:

$$\begin{gathered} \left.\frac{d^q \tilde{f}_n(z)}{dz^q}\right|_{\Gamma} = \zeta_{n1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1)(ae^{\mathrm{it}} + be^{-\mathrm{it}})^{n-q} + P_{n-q-1}(t) = \\ = \zeta_{n1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1) a^{n-q} e^{(\mathrm{n-q})\mathrm{it}} + \\ + \zeta_{n1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-q+1) b^{n-q} e^{-(\mathrm{n-q})\mathrm{it}} + P_{n-q-1}(t), \end{gathered} \tag{30}$$

где функция $P_{n-q-1}(t)$ зависит от $e^{\pm \mathrm{ikt}}$ при $k < n - q$.

Подставим теперь в (27) в качестве функций $f_r(z)$ выражения $\alpha_{nr}\tilde{f}_n(z)$, т.е. λ-голоморфные тильда-полиномы $\tilde{f}_n(z)$ степени n с некоторыми коэффициентами $\alpha_{nr} \in \mathbb{C}$. Нас интересует граничное значение полученной таким образом функции $g_k(z)$ на эллипсе $\Gamma = \partial K$. В силу (27), (28), (30) и произвольности выбора $q \in \mathbb{N}$ имеем, полагая в (30) $q = k - r$:

$$\begin{gathered} g_k(z)|_{\Gamma} = g_k(t) = \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{nr} \left[\frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{a - \overline{b}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r} \cdot [n(n-1) \cdots (n-k+r+1) a^{n-k+r}]\right] \cdot e^{\mathrm{int}} + \\ + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{nr} \left[\frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!} \cdot \left(\frac{b - \overline{a}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r} \cdot [n(n-1) \cdots (n-k+r+1) b^{n-k+r}]\right] \cdot e^{-\mathrm{int}} + P_{kn-1}(t), \\ k = 2, \dots, m, \end{gathered} \tag{31}$$

где функции $P_{kn-1}(t)$ зависят от $e^{\pm \mathrm{irt}}$ при $r < n$.

В целях упрощения дальнейших преобразований введем обозначения для выражений в квадратных скобках в равенстве (31):

$$\chi^{+}_{nkr} = \frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!}\cdot\left(\frac{a-\overline{b}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r}\cdot[n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]a^{n-k+r},$$

$$\chi^{-}_{nkr} = \frac{\zeta_{n1}}{(k-r)!}\cdot\left(\frac{b-\overline{a}}{2\lambda_2 i}\right)^{k-r}\cdot[n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]b^{n-k+r}, \tag{32}$$

$$k = 2,\ldots,m.$$

С учетом леммы 5 в качестве функции $g_1(z)$ возьмем λ-голоморфный тильда-полином $\tilde{f}_1(z)$ степени n с коэффициентом $\alpha_{n1}\in\mathbb{C}$. Тогда в силу (6), (12), (31) и (32) имеем

$$g_1(z)\big|_{\Gamma} = g_1(t) = \alpha_{n1}\tilde{f}_1(t) = \alpha_{n1}\left(e^{\mathrm{int}} + \frac{b^n}{a^n}e^{-\mathrm{int}}\right),$$

$$g_k(z)\big|_{\Gamma} = g_k(t) = \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_{nr}\chi^{+}_{nkr}\right)\cdot e^{\mathrm{int}} + \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_{nr}\chi^{-}_{nkr}\right)\cdot e^{-\mathrm{int}} + P_{kn-1}(t),$$

$$k = 2,\ldots,m, \tag{33}$$

где функции $P_{kn-1}(t)$, как и в (31), зависят от $e^{\pm\mathrm{irt}}$ при $r < n$.

Обобщим полученные результаты. Функции $g_k(z)$ (27) по построению есть общее решение (19) для того случая, когда матрица $J_1 = J^{(m)}_{\lambda}$ представляет собой одну жорданову клетку (18) размера $m\times m$.

Пусть теперь жорданова матрица J_1 имеет общий вид (16). Запишем (13) с учетом обозначений (14) и (16):

$$\frac{\partial}{\partial y}g^*(z) - \left(J^{(m_1)}_{\lambda_1}, J^{(m_2)}_{\lambda_2},\ldots,J^{(m_s)}_{\lambda_s}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}g^*(z) = 0. \tag{34}$$

В силу (34) задача об определении структуры функции $g^*(z)$ распадается на s независимых подзадач вида (17) для каждой отдельной жордановой клетки $J^{(m_l)}_{\lambda_l}$ с числом λ_l по главной диагонали.

Примем следующие обозначения. Будем обозначать λ_l-голоморфные функции через $f^{(l)}_r = f^{(l)}_r(z)$. Обозначим через $g^{(l)}_k = g^{(l)}_k(z)$, $k = 1,\ldots,m_l$, решение системы (20), соответствующее жордановой клетке $J^{(m_l)}_{\lambda_l}$ размера $m_l\times m_l$. Обозначим через a_l, b_l числа (10), найденные по параметрам α, r_1, r_2 некоторого эллипса Γ и собственному числу $\lambda_l = \lambda_{1l} + \lambda_{2l}i$ матрицы J.

С учетом сделанных обозначений, блочно-диагональной структуры матрицы J_1 и леммы 5 доказана

Лемма 6. *Общее решение $g^*(z)$ уравнения* (34) *имеет вид*

$$g^*(z)(g^{(1)}_1,\ldots,g^{(1)}_{m_1},g^{(2)}_1,\ldots,g^{(2)}_{m_2},\ldots,\ldots,g^{(s)}_1,\ldots,g^{(s)}_{m_s}), \tag{35}$$

где

$$g^{(l)}_1(z) = f^{(l)}_1(z),$$

$$g^{(l)}_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{(k-r)!}\left(\frac{z-\overline{z}}{2\lambda_{2l}i}\right)^{k-r}\cdot\frac{d^{k-r}f^{(l)}_r(z)}{dz^{k-r}} + f^{(l)}_k(z), \tag{36}$$

$$k = 2,\ldots,m_l;\quad l = 1,\ldots,s.$$

При этом через $f^{(l)}_r = f^{(l)}_r(z)$ обозначены произвольные λ_l-голоморфные функции.

Из леммы 6 и предложения 2 вытекает

Лемма 7. *Пусть жорданова форма* J_1 *матрицы* J *имеет вид* (16), *и пусть столбцы матрицы* Q *есть жорданов базис матрицы* J. *Тогда общее решение уравнения* (1) *представимо в виде*

$$\phi(z) = Q\cdot g^*(z) = Q\cdot (g_1^{(1)},\ldots,g_{m_1}^{(1)},\ldots,\ldots,g_1^{(s)},\ldots,g_{m_s}^{(s)})^{\mathrm{T}}, \tag{37}$$

где функции $g_k^{(l)} = g_k^{(l)}(z)$ *имеют вид* (36).

Пусть $\tilde f_{nl}(z) = \zeta_{n1l}[z]^n + \ldots$ есть λ_l-голоморфный тильда-полином (8) степени n. Для жордановой клетки размера $m_l\times m_l$ с собственным значением λ_l запишем числа $\chi_{nkr}^{\pm} = \chi_{nkr}^{(l)\pm}$ (32) с учетом введенных выше обозначений:

$$\chi_{nkr}^{(l)+} = \frac{\zeta_{n1l}}{(k-r)!}\cdot\left(\frac{a_l-\overline{b}_l)}{2\lambda_{2l}i}\right)^{k-r}\cdot[n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]a_l^{n-k+r},$$

$$\chi_{nkr}^{(l)-} = \frac{\zeta_{n1l}}{(k-r)!}\cdot\left(\frac{b_l-\overline{a}_l}{2\lambda_{2l}i}\right)^{k-r}\cdot[n(n-1)\cdots(n-k+r+1)]b_l^{n-k+r}, \tag{38}$$

$$k = 2,\ldots,m_l;\quad l = 1,\ldots,s.$$

Подставим в (36) в качестве функций $f_r^{(l)}(z)$ выражения $\alpha_{nr}^{(l)}\tilde f_n^{(l)}(z)$, т.е. λ_l-голоморфные тильда-полиномы $\tilde f_n^{(l)}(z)$ степени n с некоторыми коэффициентами $\alpha_{nr}^{(l)}\in\mathbb{C}$. Тогда с учетом обозначений (38) формулы (33) примут вид

$$g_1^{(l)}(z)\big|_\Gamma = g_1^{(l)}(t) = \alpha_{n1}^{(l)}\tilde f_{nl}(t) = \alpha_{n1}^{(l)}\left(e^{\mathrm{int}} + \frac{b_l^n}{a_l^n}e^{-\mathrm{int}}\right),$$

$$g_k^{(l)}(z)\big|_\Gamma = g_k^{(l)}(t) = \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_{nr}^{(l)}\chi_{nkr}^{(l)+}\right)\cdot e^{\mathrm{int}} + \left(\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_{nr}^{(l)}\chi_{nkr}^{(l)-}\right)\cdot e^{-\mathrm{int}} + P_{kn-1}^{(l)}(t), \tag{39}$$

$$k = 2,\ldots,m_l;\quad l = 1,\ldots,s,$$

где функции $P_{kn-1}^{(l)}(t)$ зависят от $e^{\pm\mathrm{irt}}$ при $r < n$.

Полученный результат оформим в виде леммы.

Лемма 8. *Пусть в* (36) *функции* $f_r^{(l)}(z)$ *имеют вид* $\alpha_{nr}^{(l)}\tilde f_{nl}(z)$, $\alpha_{nr}^{(l)}\in\mathbb{C}$, *где через* $\tilde f_{nl}(z) = \zeta_{n1l}z^n + \ldots$ *обозначен* λ_l-*голоморфный тильда-полином* (8) *степени* n. *Тогда справедливы формулы* (39), (38).

Замечание 4. В (38) имеем $a_l - \overline{b}_l \neq 0$, $b_l - \overline{a}_l \neq 0$, так как в противном случае $|a_l| = |b_l|$, что согласно предложению 1 противоречит условию $\operatorname{Im}\lambda_l = \lambda_{2l}\neq 0$. Кроме того, $\zeta_{n1l}\neq 0$, так как это старший коэффициент тильда-полинома $\tilde f_{nl}(z)$. Поэтому и числа $\chi_{nkr}^{(l)\pm}\neq 0$.

Докажем следующее утверждение, которое будет использовано ниже.

Лемма 9. *Пусть* $\phi(z)\big|_\Gamma\equiv 0$. *Тогда* $\phi(z)\equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f_\lambda(z)$ есть λ-голоморфная функция. Тогда согласно лемме 1, если $f_\lambda(z)\big|_\Gamma = 0$, то $f_\lambda(z)\equiv 0$. Поэтому искомое утверждение вытекает из леммы 6 и предложения 2. Лемма 9 доказана.

В заключение этого раздела остановимся кратко на том случае, когда жордановы клетки в (16), (18) — верхне треугольные. Этот случай соответствует J^{T}-аналитическим функциям $\tilde\phi = \tilde\phi(z)$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial\tilde\phi}{\partial y} - J^{\mathrm{T}}\frac{\partial\tilde\phi}{\partial x} = 0,\quad z\in D, \tag{40}$$

где J^{T} — транспонированная матрица J. Так как $J = QJ_1Q^{-1}$, то с учетом (16) и блочно-диагональной структуры матрицы J_1 справедливы соотношения

$$J^{\mathrm{T}} = (QJ_1Q^{-1})^{\mathrm{T}} = (Q^{-1})^{\mathrm{T}}J_1^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} = (Q^{\mathrm{T}})^{-1}J_1^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}, \tag{41}$$

$$J_1^{\mathrm{T}} = \operatorname{diag}\left((J_{\lambda_1}^{(m_1)})^{\mathrm{T}}, (J_{\lambda_2}^{(m_2)})^{\mathrm{T}}, \ldots, (J_{\lambda_s}^{(m_s)})^{\mathrm{T}}\right), \tag{42}$$

т.е. жорданов базис матрицы J^{T} — это столбцы матрицы $(Q^{\mathrm{T}})^{-1}$. Выполняя построения, аналогичные сделанным выше, приходим с учетом (41), (42) и обозначений (37) к выводу о том, что общее решение уравнения (40) имеет вид

$$\tilde{\phi}(z) = (Q^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot (g_{m_1}^{(1)}, \ldots, g_1^{(1)}, \ldots, \ldots, g_{m_s}^{(s)}, \ldots, g_1^{(s)})^{\mathrm{T}}, \tag{43}$$

где функции $g_k^{(l)} = g_k^{(l)}(z)$, как и в (37), вычисляются по формулам (36). Таким образом, для вычисления граничного значения функции $\tilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma}$ в (43) можно применить лемму 8 и формулы (38), (39).

5. ЗАДАЧА ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Применим результаты разд. 4 к решению задачи Шварца для специальной правой части. Пусть $\omega = \omega(t)$, $t \in [-\pi, \pi)$ — параметризация (4) некоторого эллипса $\Gamma = \partial K$.

Пусть некоторая функция $\psi(\omega)$, $\omega \in \Gamma$, задана на эллипсе Γ. В соответствии с определением 4 под функцией $\psi_n(t)$ будем понимать функцию $\psi_n(t) = \psi(\omega(t))$, $t \in [-\pi, \pi)$.

Всюду ниже через $\phi_n = \phi_n(z)$ будем обозначать J-аналитический ℓ-вектор-полином степени n. Рассмотрим задачу Шварца (2) со следующей правой частью:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\phi_n(z)\big|_{\Gamma} = \psi_n(t), \quad t \in [-\pi, \pi), \\ \psi_n(t) = \psi(\omega(t)) = (c_{n1}\cos nt + d_{n1}\sin nt, \ldots, c_{n\ell}\cos nt + d_{n\ell}\sin nt)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{44}$$

где $c_{kl}, d_{kl} \in \mathbb{R}$. Таким образом, решение задачи (44) нужно найти именно в виде вектор-полинома степени n.

Согласно лемме 7 и (37) J-аналитический вектор-полином $\phi_v^*(z)$ степени $v \ge 1$ можно представить в форме

$$\phi_v^*(z) = Q \cdot \left(g_1^{(1)}(z), \ldots, g_{m_1}^{(1)}(z), \ldots, g_1^{(s)}(z), \ldots, g_{m_s}^{(s)}(z)\right)^{\mathrm{T}}, \tag{45}$$

где с учетом (36) в качестве λ_l-голоморфных функций $f_k^{(l)}(z)$ взяты λ_l-голоморфные тильда-полиномы $\tilde{f}_{vl}(z)$ *одной и той же степени* v с коэффициентами $\alpha_{vr}^{(l)} \in \mathbb{C}$, т.е. $f_k^{(l)}(z) = \alpha_{vr}^{(l)} \cdot \tilde{f}_{vl}(z)$. С учетом обозначения (45) будем искать решение задачи (44) в виде

$$\phi_n(z) = \phi_0^* + \sum_{v=1}^{n} \phi_v^*(z), \quad \phi_0^* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^\ell. \tag{46}$$

Для каждого $v = n, n-1, \ldots, 1$, вектор-полином $\phi_v^*(z)$ зависит от ℓ коэффициентов $\alpha_{vr}^{(l)} \in \mathbb{C}$. Их будем с учетом (46) последовательно искать из равенства

$$\operatorname{Re}\phi_n(z)\big|_{\Gamma} = \operatorname{Re}\phi_0^* + \sum_{v=1}^{n} \operatorname{Re}\phi_v^*(t) = \psi_n(t), \quad \phi_v^*(t) = \phi_v^*(z)\big|_{\Gamma}. \tag{47}$$

Таким образом, в силу (39), (38), (45), (47) и (44) для нахождения коэффициентов $\alpha_{vr}^{(l)}$, $v = n, n-1, \ldots, 1$, нужно последовательно решить следующие алгебраические $\ell \times \ell$-системы относительно переменных $\alpha_{vr}^{(l)} \in \mathbb{C}$, $v = n, n-1, \ldots, 1$:

$$\operatorname{Re}\left[Q \cdot \left(g_1^{(1)}(t), \ldots, g_{m_1}^{(1)}(t), \ldots, g_1^{(s)}(t), \ldots, g_{m_s}^{(s)}(t)\right)^{\mathrm{T}}\right] =$$

$$
\begin{gathered}
= \operatorname{Re}\Bigg[Q \cdot \Big(\alpha_{\nu 1}^{(1)} \tilde{f}_{\nu 1}(t), \alpha_{\nu 1}^{(1)} \chi_{\nu 21}^{(1)+} \cdot e^{\mathrm{i}\nu t} + \alpha_{\nu 1}^{(1)} \chi_{\nu 21}^{(1)-} \cdot e^{-\mathrm{i}\nu t}, \ldots \\
\ldots, \sum_{r=1}^{m_1-1} \alpha_{\nu r}^{(1)} \chi_{\nu m_1 r}^{(1)+} \cdot e^{\mathrm{i}\nu t} + \sum_{r=1}^{m_1-1} \alpha_{\nu r}^{(1)} \chi_{\nu m_1 r}^{(1)-} \cdot e^{-\mathrm{i}\nu t} + \alpha_{\nu m_1}^{(1)} f_{\nu 1}(t), \ldots \\
\ldots, \alpha_{\nu 1}^{(s)} \tilde{f}_{\nu s}(t), \alpha_{\nu 1}^{(s)} \chi_{\nu 21}^{(s)+} \cdot e^{\mathrm{i}\nu t} + \alpha_{\nu 1}^{(s)} \chi_{\nu 2s}^{(s)-} \cdot e^{-\mathrm{i}\nu t}, \ldots \\
\ldots, \sum_{r=1}^{m_s-1} \alpha_{\nu r}^{(s)} \chi_{\nu m_s r}^{(s)+} \cdot e^{\mathrm{i}\nu t} + \sum_{r=1}^{m_s-1} \alpha_{\nu r}^{(s)} \chi_{\nu m_s r}^{(s)-} \cdot e^{-\mathrm{i}\nu t} + \alpha_{\nu m_s}^{(s)} f_{\nu s}(t) \Big)^{\mathrm{T}} \Bigg] = \\
= (c_{\nu 1} \cos \nu t + d_{\nu 1} \sin \nu t, \ldots, c_{\nu \ell} \cos \nu t + d_{\nu \ell} \sin \nu t)^{\mathrm{T}}, \\
\nu = n, n-1, \ldots, 1.
\end{gathered} \tag{48}
$$

Заметим, что правая часть (48) при $\nu = n$ совпадает с функцией $\psi_n(t)$ (44).

После этого остается найти постоянную функцию ϕ_0^* в (46) как решение $\ell \times \ell$-системы

$$
\operatorname{Re} \phi_0^* = \operatorname{Re}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)^{\mathrm{T}} = (c_1, \ldots, c_\ell)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, \ell. \tag{49}
$$

Как нетрудно видеть, система (49) всегда разрешима, а функция ϕ_0^* определена с точностью до комплексной вектор-константы.

Пусть

$$
\begin{gathered}
\alpha_{\nu r}^{(l)} = \alpha_{\nu r}^{(l)'} + i \alpha_{\nu r}^{(l)''}, \quad \alpha_{\nu r}^{(l)'}, \quad \alpha_{\nu r}^{(l)''} \in \mathbb{R}, \\
r = 1, \ldots, m_l, \quad l = 1, \ldots, s, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_s = \ell, \\
\hat{\alpha}_\nu = (\alpha_{\nu 1}^{(1)'}, \alpha_{\nu 1}^{(1)''}, \ldots, \alpha_{\nu m_1}^{(1)'}, \alpha_{\nu m_1}^{(1)''}, \ldots, \alpha_{\nu 1}^{(s)'}, \alpha_{\nu 1}^{(s)''}, \ldots, \alpha_{\nu m_s}^{(s)'}, \alpha_{\nu m_s}^{(s)''})^{\mathrm{T}}, \\
\hat{c}_\nu (c_{\nu 1}, d_{\nu 1}, \ldots, c_{\nu \ell}, d_{\nu \ell})^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\alpha}_\nu, \quad \hat{c}_\nu \in \mathbb{R}^{2\ell}.
\end{gathered} \tag{50}
$$

С учетом (50) комплексную $\ell \times \ell$-систему (48) можно рассматривать уже как вещественную $2\ell \times 2\ell$-систему относительно переменных $\alpha_{nr}^{(l)'}$, $\alpha_{nr}^{(l)''}$. Это и будет сделано ниже.

Определение 7. Обозначим матрицу вещественной $2\ell \times 2\ell$-системы (48) через $\hat{Q}_\nu \in \mathbb{R}^{2\ell \times 2\ell}$.

С учетом определения 7 и обозначений (50) системы (48) запишутся в компактном виде:

$$
\hat{Q}_\nu \cdot \hat{\alpha}_\nu = \hat{c}_\nu, \quad \nu = n, n-1, \ldots, 1. \tag{51}
$$

Замечание 5. Матрица $\hat{Q}_\nu$ однозначно определяется собственными числами матрицы J, коэффициентами матрицы Q (жорданов базис J), а также параметрами α, r_1, r_2 эллипса Γ.

В итоге доказано следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть* $\det \hat{Q}_\nu \neq 0$, $\nu = n, n-1, \ldots, 1$. *Тогда все системы* (51), (48) *однозначно разрешимы относительно вещественных переменных* $\hat{\alpha}_\nu$ (50).

Замечание 6. Допустим, что в условиях леммы 10 последовательно найдены вектор-коэффициенты $\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_{n-1}, \ldots, \hat{\alpha}_{\nu+1}$ как решения алгебраических систем (51). Тогда процесс нахождения оставшихся коэффициентов $\hat{\alpha}_\nu, \ldots, \hat{\alpha}_1$, а затем постоянной функции $\phi_0^* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$, есть не что иное, как решение задачи вида

$$
\operatorname{Re} \phi_\nu(z)\big|_\Gamma = \psi_\nu(t) + \sum_{l<\nu} \psi_l(t), \tag{52}
$$

где функции $\psi_k(t)$ определены в (44).

Из леммы 10 с учетом (47) и (46) вытекает

Теорема 1. *Пусть* $\hat{Q}_\nu$ *— матрицы* $2\ell \times 2\ell$*-систем* (48), *и пусть*

$$
\det \hat{Q}_\nu \neq 0, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{53}
$$

Тогда задача (44) *разрешима в эллипсе* K *в виде* ℓ*-вектор-полинома* $\phi_n(z)$ (46) *степени n для любой правой части* $\psi_n(t)$. *В частности, задача* $\operatorname{Re}\phi_0(z)|_\Gamma = c$ *имеет решение* $\phi_0 = c + ic_1$, *где* $c, c_1 \in \mathbb{R}^\ell$.

С учетом замечания 6 справедлива так же следующая

Теорема 2. *Пусть* $\hat{Q}_\nu$ — *матрица* $2\ell\times 2\ell$*-системы* (48), *и пусть* $\det\hat{Q}_n = 0$, *но при этом* $\det\hat{Q}_k \neq 0$, $k < n$. *Либо пусть* $\det\hat{Q}_1 = 0$. *Тогда однородная задача* (44), *т.е. задача* $\operatorname{Re}\phi_n(z)|_\Gamma = 0$, *имеет в эллипсе* K *решение в виде* ℓ*-вектор-полинома* $\phi_n(z)$ *степени* n.

Замечание 7. Довольно очевидно следующее. Пусть n — нечетное. Тогда при выполнении (53) ненулевыми будут только нечетные вектор-коэффициенты $\hat{\alpha}_\nu$ (50) как решения систем (48), поскольку для четных $\hat{\alpha}_\nu$ соответствующая система будет однородной. Аналогично, если n — четное, то ненулевыми будут только четные $\hat{\alpha}_\nu$.

6. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Весь данный раздел посвящен изложению основных определений и теорем из работы [9]. Эти результаты будут применены в следующем разделе.

Пусть функция $g(z) \in C(\overline{D})$, и пусть $\Gamma = \partial D$. Следуя [9], введем обозначения

$$g^+(\omega) = g(z)|_\Gamma, \quad \omega \in \Gamma. \tag{54}$$

Пусть область D ограничена гладким контуром Γ, составленным из связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Область D может быть как конечной, так и бесконечной. Эти случаи различаем с помощью характеристики $æ_D$. Именно, положим

$$\begin{gathered} æ_D = 1, \quad \text{если область } D \text{ конечна}, \\ æ_D = 0, \quad \text{если область } D \text{ бесконечна}. \end{gathered} \tag{55}$$

Задачу Шварца (2) назовем *задачей S*. Пусть контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D (т.е. область D остается слева относительно этой ориентации). Пусть

$$e(\omega) = e_1(\omega) + ie_2(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{56}$$

есть единичный касательный вектор к контуру Γ в точке ω, направленный согласно данной ориентации. В (56) через $e_1(\omega)$, $e_2(\omega)$ обозначены вещественные скалярные функции.

Определение 8. Пусть $\Gamma \in H^{1,\sigma+0}$, если $e(\omega) \in H^{\sigma+\varepsilon}(\Gamma)$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Пусть $\phi(z) \in H^{1,\sigma+0}(\overline{D})$, если $\phi(z) \in H^{\sigma+\varepsilon}(\overline{D})$ с некоторым $\varepsilon > 0$.

Пусть E — единичная $\ell\times\ell$-матрица, J^{T} — транспонированная матрица J. В той же области D вместе с J-аналитическими функциями (1) рассмотрим J^{T}-аналитические ℓ-вектор-функции $\tilde{\phi}(z)$ (40). С помощью функции (56) образуем $\ell\times\ell$-матрицу

$$e_{J^{\mathrm{T}}}(\omega) = e_1(\omega)\cdot E + e_2(\omega)\cdot J^{\mathrm{T}}, \quad \omega \in \Gamma, \tag{57}$$

которая зависит от параметра ω.

С задачей S свяжем союзную задачу $\tilde{S}$. Она состоит в нахождении такой J^{T}-аналитической функции $\tilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ (40), для которой выполнено граничное условие

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega) = \psi(\omega), \quad \psi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma).$$

Соответственно, при $\psi(\omega) \equiv 0$ будем говорить об *однородной союзной задаче* $\tilde{S}$:

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega) = 0, \quad \tilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D}). \tag{58}$$

Для непрерывных ℓ-вектор-функций $f(\omega) = (f_1,\ldots,f_\ell)$, $g(\omega) = (g_1,\ldots,g_\ell)$, заданных на Γ, определим билинейную форму $\langle f, g\rangle$ по правилу

$$\langle f, g\rangle = \int_\Gamma f(\omega)\cdot g(\omega)\cdot |d\omega| = \int_\Gamma (f_1\cdot g_1 + \ldots + f_\ell \cdot g_\ell)\cdot |d\omega|, \quad (59)$$

где $|d\omega|$ означает элемент длины дуги кривой Γ.

С учетом обозначений (55) и (59) справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\phi(z)$ и $\tilde{\phi}(z)$ — решения задач S и $\tilde{S}$ соответственно с одной и той же граничной вектор-функцией $\psi(\omega)$. Тогда справедливо равенство*

$$\left\langle \phi^+(\omega), e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega)\right\rangle = 0.$$

Теорема 4. *Пусть все собственные значения матрицы $J \in \mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ лежат в верхней полуплоскости. Имеют место следующие два утверждения.*

1. *В предположении $\Gamma \in H^{1,\sigma+0}$ задача S фредгольмова (т.е. имеет конечномерные ядро и коядро) в каждом из классов $H^\sigma(\bar{D})$, а ее индекс равен*

$$\operatorname{Ind} S = \dim\operatorname{Ker} S - \dim\operatorname{Ker}\tilde{S} = \ell(2æ_D - m). \quad (60)$$

2. *Неоднородная задача S (2) для функции $\psi(\omega)\in H^\sigma(\Gamma)$ разрешима в классах Гёльдера $\phi(z)\in H^\sigma(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\left\langle \psi(\omega), \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega)\right\rangle = 0, \quad (61)$$

где $\tilde{\phi}(z)$ — произвольное решение однородной союзной задачи $\tilde{S}$ (58).

Замечание 8. В ядро задачи Шварца входят и те функции, действительная часть которых тождественно равна нулю.

7. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ЭЛЛИПСЕ

Пусть $\omega(t) = (x(t), y(t))$, $t\in[-\pi,\pi)$ — параметризация (4) эллипса Γ. Запишем линейный элемент $|d\xi|$ дуги кривой Γ:

$$|d\omega(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt = p(t)dt, \quad (62)$$

где с учетом (4) имеем

$$p(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{r_2^2\cos^2 t + r_1^2\sin^2 t} \neq 0, \quad t\in[-\pi,\pi). \quad (63)$$

Обозначим через $(f(t), g(t))$ скалярное произведение двух вектор-функций $f(t) = (f_1,\ldots,f_\ell)$ и $g(t) = (g_1,\ldots,g_\ell)$, заданных на интервале $t\in[-\pi,\pi)$. Тогда с учетом обозначений (62), (63) билинейную форму (59) можно записать в виде

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}[f_1(t)\cdot g_1(t) + \ldots + f_\ell(t)\cdot g_\ell(t)]\cdot p(t)dt = (f(t), p(t)\cdot g(t)) = (f, p\cdot g). \quad (64)$$

Справедливы следующие два утверждения.

Предложение 3. *Матрица $e_{J^{\mathrm{T}}} = e_{J^{\mathrm{T}}}(\omega)$ (57) обратима для всех $\omega\in\Gamma$.*

Доказательство. С учетом (41) имеем

$$e_{J^{\mathrm{T}}} = e_1\cdot E + e_2\cdot J^{\mathrm{T}} = e_1\cdot E + e_2\cdot (Q^{\mathrm{T}})^{-1}J_1^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}} = (Q^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\left[e_1\cdot E + e_2\cdot J_1^{\mathrm{T}}\right]\cdot Q^{\mathrm{T}}. \quad (65)$$

Пусть жорданова форма J_1 матрицы $J = QJ_1Q^{-1}$ — нижне треугольная. Пусть $\lambda_l = \lambda_{1l} + \lambda_{2l}i$ — собственные значения матрицы J. Тогда с учетом обозначений (42) элементы главной диагонали верхне треугольной матрицы $\left[e_1 \cdot E + e_2 \cdot J_1^{\mathrm{T}}\right]$ имеют вид $e_1 + \lambda_l e_2$, $1 \le l \le s$. Для них справедливо соотношение

$$e_1(\omega) + \lambda_l e_2(\omega) = e_1(\omega) + (\lambda_{1l} + \lambda_{2l} i) e_2(\omega) \neq 0, \quad \omega \in \Gamma. \tag{66}$$

Действительно, в противном случае $e_2(\omega_0) = 0$ для некоторой точки $\omega_0 \in \Gamma$, так как $\lambda_{2l} \neq 0$. Поэтому и $e_1(\omega_0) = 0$, что противоречит определению функции $e(\omega)$ (56) как единичного касательного вектора к Г. Из (65) и (66) вытекает искомое утверждение. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пусть* $\tilde{\phi}(z)$ *есть* J^{T}*-аналитическая функция* (40), *и пусть* $e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = 0$. *Тогда* $\tilde{\phi}(z) \equiv 0$.

Доказательство. В силу предложения 3 имеем $\tilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = 0$. Поэтому искомое утверждение вытекает из (43), (36) и леммы 1. Предложение 4 доказано.

Далее докажем следующую основную теорему настоящей статьи. Пусть эллипс $\Gamma = \partial K$ задан параметризацией (4).

Теорема 5. *Пусть все собственные значения матрицы* $J \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ *лежат в верхней полуплоскости. Пусть* $\hat{Q}_n$ *— матрица алгебраической системы* (48) *при* $\nu = n$. *Тогда выполнение соотношений*

$$\det \hat{Q}_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{67}$$

является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Шварца (2) *в эллипсе* K *с границей* Γ *для любой правой части* $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *в классах функций* $\phi(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$. *Данное решение при выполнении* (67) *единственно с точностью до вектор-постоянной.*

Доказательство. Так как эллипс Г — аналитическая кривая, то $\Gamma \in H^{1,\sigma+0}$ с любым показателем $\sigma \in (0,1)$. Поэтому можно применять теорему 4.

Докажем достаточность. Пусть выполнены соотношения (67) и пусть с учетом обозначения (44)

$$\psi(\omega(t)) = \psi(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) = c_0 + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \ldots, \quad c_0 = \psi_0 \in \mathbb{R}^{\ell}, \tag{68}$$

есть ряд Фурье граничной функции $\psi(t)$ в смысле определения 4. Пусть $\tilde{\phi}(z)$ есть J^{T}-аналитическая функция, см. (40). В силу теоремы 1, п. 2 теоремы 4, (64) и обозначения (54) справедливы равенства

$$\begin{gathered}\left\langle \psi_n(\omega), \quad \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega)\right\rangle = (\psi_n(t), p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(t)) = 0, \\ n = 0,1,2,3\ldots, \quad \tilde{\phi}(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}.\end{gathered} \tag{69}$$

Так как граничная функция $\psi(t)$ непрерывна по Гёльдеру, то ее ряд Фурье сходится равномерно (см. [13]). Поэтому его можно почленно интегрировать. Отсюда с учетом (69), (68) и (64) имеем

$$\begin{gathered}\left\langle \psi(\omega), \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(\omega)\right\rangle = \left([c_0 + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \ldots], p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(t)\right) = \\ = (c_0, p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(t)) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\psi_n(t), p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\tilde{\phi}^+(t)\right) = 0, \quad \tilde{\phi}(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}.\end{gathered} \tag{70}$$

Равенство (70) в силу п. 2 теоремы 4 доказывает существование решения $\phi(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$ задачи Шварца.

Необходимость. Пусть $\det \hat{Q}_n = 0$ для некоторых значений n. Пусть r — минимальное из них, т.е. либо $\det \hat{Q}_r = 0$, $\det \hat{Q}_k \neq 0$ при $k < r$, либо $\det \hat{Q}_1 = 0$. Тогда в силу теоремы 2 в ядро задачи Шварца S входит по крайней мере один вектор-полином $\phi_r(z)$. Кроме того, в ядро задачи S входят постоянные решения однородной задачи S, размерность которых равна ℓ. Таким образом,

$$\dim \operatorname{Ker} S > \ell. \tag{71}$$

Обратимся к разд. 6. Поскольку граница эллипса состоит из одной компоненты связности, то $m = 1$. Согласно (55) $æ_D = 1$. Поэтому формула (60) для эллипса приобретает вид

$$\operatorname{Ind} S = \dim \operatorname{Ker} S - \dim \operatorname{Ker} \tilde{S} = \ell. \tag{72}$$

Из (71) и (72) вытекает, что $\dim \operatorname{Ker} \tilde{S} = \dim \operatorname{Ker} S - \ell > 0$. Поэтому существует такой ненулевой элемент $\phi'(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}$, что $\operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}'(z)\big|_{\Gamma} \neq 0$. В противном случае получаем противоречие предложению 4. Покажем, что в этом случае можно подобрать такую функцию $\psi'(\omega(t))$, для которой равенство (61) не выполняется.

Действительно, пусть в обозначениях (44) $\operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \phi'^{+}(\omega(t)) = \psi_s(t) + \ldots$, где $\psi_s(t) \neq 0$. Рассмотрим функцию $\psi_s^*(t)$ такую, что скалярное произведение $(\psi_s^*(t), \psi_s(t)) \neq 0$. Тогда можно положить

$$\psi'(\omega(t)) = \frac{\psi_s^*(t)}{p(t)} \in H^{\sigma}(\Gamma). \tag{73}$$

Согласно (64) и п. 2 теоремы 4 задача S для правой части $\psi'(\omega)$ (73) неразрешима. Тем самым установлена необходимость условий (67).

Единственность. Пусть справедливы соотношения (67). Пусть $\tilde{\phi}(z) \in \operatorname{Ker} \tilde{S}$, т.е. по определению $\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) = 0$. Из (69) в силу произвольности выбора функции $\psi(\omega)$ вытекает, что $p(t) \cdot \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) = 0$. Согласно (63) $p(t) \neq 0$, поэтому $\operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \tilde{\phi}^{+}(t) = 0$. Отсюда согласно предложению 4 имеем $\tilde{\phi}(z) \equiv 0$. Таким образом, $\dim \operatorname{Ker} \tilde{S} = 0$. Поэтому в силу (72) ядро задачи S имеет размерность ℓ, т.е. состоит только из постоянных функций $\phi = ic$, $c \in \mathbb{R}^{\ell}$, что и требовалось. Теорема 5 доказана.

8. ЗАДАЧА ШВАРЦА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Построения разд. 7 носят чисто теоретический характер, так как алгебраическая система (48) очень сложна для изучения даже при $\ell = 2$. В связи с этим в данном разделе применен альтернативный подход. Именно, для матриц $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ с разными собственными значениями проведена редукция задачи Шварца к скалярному функциональному уравнению (93), которое зависит от модуля $|l|$ комплексного параметра l (75). Этот параметр однозначно определяется жордановым базисом матрицы J, и, в отличие от определителя $\det \hat{Q}_n$, его несложно вычислить. Показано (теорема 10), что условие $|l| \in [0,1]$ является достаточным для разрешимости задачи Шварца в произвольном эллипсе K для любой функции $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$.

8.1. Редукция задачи Шварца к функциональному уравнению

Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ имеет разные собственные значения $\mu \neq \lambda$, где $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Обозначим через x собственный вектор, соответствующий μ, а через y — собственный вектор, соответствующий λ. Обозначим также через J_1 и Q жорданову форму и жорданов базис матрицы J соответственно:

$$J_1 = \operatorname{diag}(\mu, \lambda) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q = (x, y), \quad J = QJ_1Q^{-1}. \tag{74}$$

Будем предполагать, что один из собственных векторов, для определенности *вектор* $\mathbf{y}$, *не кратен вещественному.* Разложим комплексное сопряжение $\overline{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{y}$ по жорданову базису $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ матрицы J:

$$\begin{gathered} \overline{\mathbf{y}} = l_1\mathbf{x} + l\mathbf{y}, \quad l_1, l \in \mathbb{C}, \\ l_1 = l_1(J) = \frac{\det(\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad l = l(J) = \frac{\det(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \end{gathered} \tag{75}$$

В (75) для нахождения чисел l_1, l были применены формулы Крамера. Ниже будет использовано только число l. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. *Модуль* $|l|$ *числа* l (75) *не зависит от выбора жорданова базиса* Q *матрицы* J. *Кроме того, число* l *инвариантно относительно вещественных преобразований, т.е. оно совпадает для матриц* J *и* BJB^{-1}, *где* $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Доказательство. Собственные векторы матрицы J определены с точностью до комплексного множителя. Поэтому пусть $Q^* = (a x, b y)$, $a, b \neq 0$ — другой жорданов базис J. Обозначим через l^* число (75), вычисляемое по жорданову базису Q^*. Имеем

$$|l^*| = \left|\frac{\det(a\mathbf{x}, \overline{b\mathbf{y}})}{\det(a\mathbf{x}, b\mathbf{y})}\right| = \left|\frac{a\bar{b}\cdot\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{ab\cdot\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\right| = \left|\frac{a\bar{b}}{ab}\right|\cdot\left|\frac{\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\right| = |l|, \quad a, b \neq 0,$$

что и требовалось.

Докажем инвариантность самого числа l (а не только его модуля) относительно вещественных преобразований. Так как векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — собственные для матрицы J, то $J\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, $J\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$. Эти два равенства запишем в следующем виде:

$$BJB^{-1}\cdot B\mathbf{x} = \mu B\mathbf{x}, \quad BJB^{-1}\cdot B\mathbf{y} = \lambda B\mathbf{y}.$$

Таким образом, $Q^* = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') = (B\mathbf{x}, B\mathbf{y})$ — жорданов базис матрицы $J^* = BJB^{-1}$, которая имеет те же собственные значения μ, λ. Обозначим, как и выше, через l^* число (75), которое найдем по жорданову базису Q^*. Имеем

$$l^* = \frac{\det(B\mathbf{x}, \overline{B\mathbf{y}})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} = \frac{\det(B\mathbf{x}, B\bar{\mathbf{y}})}{\det(B\mathbf{x}, B\mathbf{y})} = \frac{\det B\cdot\det(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})}{\det B\cdot\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = l,$$

что и требовалось. Лемма 11 доказана.

Преобразуем задачу Шварца $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$ (2) для $\ell = 2$. С учетом (75) и равенств $J\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, $J\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} J\bar{\mathbf{y}} = J(l_1\mathbf{x} + l\mathbf{y}) = \mu l_1\mathbf{x} + \lambda l\mathbf{y} = \mu l_1\mathbf{x} + \lambda l\mathbf{y} \pm \mu l\mathbf{y} = \\ = \mu l_1\mathbf{x} + \mu l\mathbf{y} + \lambda l\mathbf{y} - \mu l\mathbf{y} = \mu(l_1\mathbf{x} + l\mathbf{y}) + (\lambda - \mu)l\mathbf{y} = \mu\bar{\mathbf{y}} + (\lambda - \mu)l\mathbf{y}. \end{gathered} \tag{76}$$

Таким образом, матрица $J_1 = (Q')^{-1}JQ'$ оператора J в базисе $Q' = (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ (\mu - \lambda)l & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mu \neq \lambda. \tag{77}$$

После подстановки $J = Q'J_1(Q')^{-1}$ в (1) и умножения обеих частей на $(Q')^{-1}$, получим с учетом (77) следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} g \\ F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ (\mu - \lambda)l & \lambda \end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} g \\ F \end{pmatrix} = 0, \quad (g, F)^{\mathrm{T}} = (Q')^{-1}\phi = (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y})^{-1}\phi. \tag{78}$$

Функция $g = g_\mu(z)$ согласно (78) является μ-голоморфной. При этом в силу (78) справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = l(\mu - \lambda)\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \mu \neq \lambda. \tag{79}$$

Подстановка $F = lg_\mu + f$ в (79) после несложных преобразований приводит к тождеству

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

т.е. $f = f_\lambda(z)$ — произвольная λ-голоморфная функция. Таким образом, общим решением (78) будут функции

$$g(z) = g_\mu(z), \quad F(z) = lg_\mu(z) + f_\lambda(z). \tag{80}$$

Далее пусть

$$g(z)\big|_{\Gamma} = u(x,y) + iv(x,y), \quad F(x,y)\big|_{\Gamma} = p(x,y) + iq(x,y), \tag{81}$$

где функции $u, v, p, q \in C(\Gamma)$ вещественные. В предположении $\phi(z) \in C(\overline{D})$ и с учетом (78) это обозначение корректно. Пусть

$$\mathbf{y} = (a_1, a_2) = (a + bi, c + di), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{82}$$

есть собственный вектор матрицы J, который не кратен вещественному. Тогда с учетом (78), (81) и (82) общее решение $\phi(z)$ уравнения (1) для изучаемого типа матриц можно записать в виде

$$\phi(z) = Q' \cdot (g,F)^{\mathrm{T}} = (\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \cdot (g,F)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & a_1 \\ \overline{a}_2 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u + iv \\ p + iq \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Граничное условие $\operatorname{Re}\phi(z)\big|_{\Gamma} = (\psi_1, \psi_2)^{\mathrm{T}}$ в силу (83) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\overline{a}_1(u + iv) + a_1(p + iq)\right]\big|_{\Gamma} &= \psi_1, \\ \operatorname{Re}\left[\overline{a}_2(u + iv) + a_2(p + iq)\right]\big|_{\Gamma} &= \psi_2. \end{aligned} \tag{84}$$

Предложение 5. *Решение* (84) *как неоднородной алгебраической системы относительно вещественных функций-переменных* u, v *единственно, и его можно найти в следующем виде*:

$$u = -p + r(\psi_1, \psi_2), \quad v = q + h(\psi_1, \psi_2), \tag{85}$$

где $r(\cdot)$, $h(\cdot)$ *— линейные функции своих переменных.*

Доказательство. Так как вектор $\mathbf{y}$ по условию не кратен вещественному, то с учетом обозначения (82) определитель Δ системы (84) относительно переменных u, v отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{86}$$

Поэтому решение системы (84) относительно u, v будет единственным. Заметим, что для произвольного $\xi \in \mathbb{C}$ справедливо тождество

$$\operatorname{Re}[\overline{\xi}(u + iv) + \xi(p + iq)]\big|_{u=-p, v=q} = \operatorname{Re}[\overline{\xi}(-p + iq) - \overline{\overline{\xi}(-p + iq)}] = 0. \tag{87}$$

После подстановки (85) в (84) переменные p, q в силу (87) тождественно сократятся. В результате получим следующую пару равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\overline{a}_1(r + ih)] &= \operatorname{Re}[(a - bi)(r + ih)]\big|_{\Gamma} = ar + bh = \psi_1, \\ \operatorname{Re}[\overline{a}_2(r + ih)] &= \operatorname{Re}[(c - di)(r + ih)]\big|_{\Gamma} = cr + dh = \psi_2. \end{aligned} \tag{88}$$

Остается заметить, что система (88) имеет единственное решение относительно переменных r, h, поскольку ее определитель Δ совпадает с (86). Следовательно, (85) и есть искомое единственное решение системы (84). Предложение 5 доказано.

Далее заметим, что пара равенств вещественных функций (85) равносильна одному комплексному функциональному уравнению

$$(p + iq) + (u - iv) = r - ih. \tag{89}$$

Пусть $r - ih = \varphi$. Тогда с учетом обозначений (80) и (81) равенство (89) можно переписать в виде

$$f_\lambda + \overline{g}_\mu + l \cdot g_\mu\big|_{\Gamma} = r(\psi_1, \psi_2) - ih(\psi_1, \psi_2) = \varphi(\omega), \quad l \in \mathbb{C}. \tag{90}$$

Запишем число $l \in \mathbb{C}$ (75) в показательной форме: $l = |l| e^{i\xi}$. Сделаем в (90) следующие подстановки:

$$f_\lambda = f_\lambda^* \cdot e^{\frac{i\xi}{2}}, \quad g_\mu = g_\mu^* \cdot e^{-\frac{i\xi}{2}}, \quad \varphi = \varphi^* \cdot e^{\frac{i\xi}{2}}. \tag{91}$$

Тогда задача (90) после сокращения на $e^{\frac{i\xi}{2}}$ примет следующий вид:

$$f_\lambda^*(z) + \overline{g_\mu^*(z)} + |l| \cdot g_\mu^*(z)\big|_\Gamma = \varphi^*(\omega). \tag{92}$$

Таким образом, задачи (90) и (92) равносильны. В итоге с учетом обратимости проведенных преобразований, (75) и (91) доказана

Теорема 6. *Пусть матрица* $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *имеет разные собственные значения* μ, λ, *и пусть* $Q = (x, y)$ *— ее жорданов базис, где собственный вектор* $\mathbf{y}$ *не кратен вещественному. Тогда задача Шварца* (2) *в классе функций* $\phi = \phi(z) \in C(\overline{D})$ *равносильна граничной задаче для следующего скалярного функционального уравнения*:

$$f_\lambda(z) + \overline{g}_\mu(z) + l \cdot g_\mu(z)\big|_\Gamma = \varphi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \quad l = \left|\frac{\det(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}})}{\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\right|, \tag{93}$$

где $f_\lambda(z)$, $g_\mu(z) \in C(\overline{D})$ *— это, соответственно,* λ*- и* μ*-голоморфные функции.*

Замечание 9. Пусть решение уравнения (90) найдено для параметра $l \in \mathbb{C}$ (75). При этом скалярная граничная функция φ построена по вектор-функции (ψ_1, ψ_2) по формулам (88) и (90). Тогда с учетом (78) и (80) J-аналитическая функция $\phi(z)$ как решение задачи Шварца может быть восстановлена из равенства

$$\phi(z) = Q' \cdot (g, F)^{\mathrm{T}} = (\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y}) \cdot (g_\mu, F)^{\mathrm{T}} = (g_\mu, lg_\mu + f_\lambda)^{\mathrm{T}}. \tag{94}$$

8.2. Изучение уравнения (93) *в эллипсе. Существование и единственность решений задачи Шварца*

В работе [10] доказана

Теорема 7 (А.П. Солдатов). *Пусть* $\Gamma = \partial D$ *— контур Ляпунова. Пусть* $(\operatorname{Im}\lambda) \cdot (\operatorname{Im}\mu) > 0$, $\varphi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma)$. *Тогда уравнение* (93) *при* $l = 0$ *имеет единственное с точностью до постоянной решение* $g_\mu(z)$, $f_\lambda(z) \in H^\sigma(\overline{D})$.

Однако для произвольных $l \in \mathbb{R}$ однородная задача (93) не всегда имеет только постоянные решения, что доказывает следующий

Пример 3. Пусть $l = 5$, $\lambda = 2i$, $\mu = i$. Непосредственные вычисления показывают, что пара квадратичных функций

$$f_\lambda(z) = -3i(x + 2iy)^2 - i, \quad g_\mu(z) = i(x + iy)^2$$

будет решением однородной задачи (93) в эллипсе K с границей Γ: $x^2 + 8y^2 = 4$.

Таким образом, актуальной является задача о нахождении таких значений параметра $l \in \mathbb{R}$, для которых решение уравнения (93) в эллипсе существует и единственно. Это и сделано ниже. Пусть $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, пусть параметры r_1, r_2, α определяют эллипс Γ. По аналогии с (10) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1\cos\alpha + ir_2\sin\alpha + \mu(r_1\sin\alpha - ir_2\cos\alpha)}{2}, \\ b_1 &= b_1(\alpha, \mu, r_1, r_2) = \frac{r_1\cos\alpha - ir_2\sin\alpha + \mu(r_1\sin\alpha + ir_2\cos\alpha)}{2}. \end{aligned} \tag{95}$$

Выражения для a_1, b_1 в (95) отличаются от выражений для a, b в (10) формальной заменой λ на μ. При этом значения параметров r_1, r_2, α для (10) и (95) одинаковы. В [3] доказано следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, *числа* a, b, a_1, b_1 *для эллипса* Γ (4) *найдены по формулам* (10) *и* (95). *Пусть выполнены следующие соотношения*:

$$\Delta_n = \Delta_n(l) = l^2 \cdot \left|\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n}\right|^2 - \left|1 - \frac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\frac{b_1^n}{a_1^n}}\right|^2 \neq 0, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{96}$$

Тогда для любой граничной функции $\varphi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *решение задачи* (93) *в эллипсе* K *с границей* $\Gamma = \partial K$ *в классе функций* f_λ, $g_\mu \in H^{\sigma}(\bar{K})$ *существует и единственно с точностью до постоянной.*

Непосредственная проверка выполнения всех соотношений (96) для фиксированных значений l, a, b, a_1, b_1 есть весьма сложная задача. Получим достаточные условия на параметр l, при которых соотношения (96) выполнены в произвольном эллипсе Γ.

Пусть $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, тогда согласно предложению 1 имеем $|b| < |a|$, $|b_1| < |a_1|$. Выразим с учетом этих двух неравенств и (96) параметр l из уравнения $\Delta_n(l) = 0$:

$$l = \frac{\left|1 - \dfrac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\dfrac{b_1^n}{a_1^n}}\right|}{\left|\dfrac{b^n}{a^n} - \dfrac{b_1^n}{a_1^n}\right|}, \quad \left|\frac{b}{a}\right| < 1, \quad \left|\frac{b_1}{a_1}\right| < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{97}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 12. *Пусть некоторые числа* a, b, a_1, b_1 *удовлетворяют неравенствам* (97), *причем*

$$\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}'$ *в* (97) *число* $l > 1$.

Доказательство. Пусть

$$\frac{b^n}{a^n} = \xi_1 e^{\mathrm{i}t_1}, \quad \frac{b_1^n}{a_1^n} = \xi_2 e^{\mathrm{i}t_2}, \quad \xi_1 < 1, \quad \xi_2 < 1, \quad n \in \mathbb{N}'.$$

Тогда с учетом (97) имеем

$$\begin{gathered} l = \frac{\left|1 - \dfrac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\dfrac{b_1^n}{a_1^n}}\right|}{\left|\dfrac{b^n}{a^n} - \dfrac{b_1^n}{a_1^n}\right|} = \frac{\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}(t_1 - t_2)}\right|}{\left|\xi_1 e^{\mathrm{i}t_1} - \xi_2 e^{\mathrm{i}t_2}\right|} = \\ = \frac{\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}(t_1 - t_2)}\right|}{\left|e^{\mathrm{i}t_1}\right| \cdot \left|\xi_1 - \xi_2 e^{\mathrm{i}(t_2 - t_1)}\right|} = \frac{\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}(t_1 - t_2)}\right|}{\left|\xi_1 - \xi_2 e^{\mathrm{i}(t_2 - t_1)}\right|}. \end{gathered} \tag{98}$$

Пусть $t = t_1 - t_2$ и запишем неравенство $l^2 > 1$ с учетом последнего выражения в (98):

$$\left|1 - \xi_1\xi_2 e^{\mathrm{i}t}\right|^2 > \left|\xi_1 - \xi_2 e^{-\mathrm{i}t}\right|^2. \tag{99}$$

Перепишем (99) с учетом формулы Эйлера $e^{\mathrm{i}t} = \cos t + i\sin t$:

$$(1 - \xi_1\xi_2 \cos t)^2 + \xi_1^2\xi_2^2 \sin^2 t > (\xi_1 - \xi_2 \cos t)^2 + \xi_2^2 \sin^2 t. \tag{100}$$

Раскроем скобки в (100). Проведя несложные преобразования и используя тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, имеем последовательно следующие неравенства:

$$\begin{gathered} 1 - 2\xi_1\xi_2 \cos t + \xi_1^2\xi_2^2 \cos^2 t + \xi_1^2\xi_2^2 \sin^2 t > \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos t + \xi_2^2 \cos^2 t + \xi_2^2 \sin^2 t, \\ 1 - \xi_1^2 + \xi_2^2 \cos^2 t \cdot (\xi_1^2 - 1) + \xi_2^2 \sin^2 t \cdot (\xi_1^2 - 1) > 0, \\ 1 - \xi_1^2 + \xi_2^2(\xi_1^2 - 1) > 0, \quad -(\xi_1^2 - 1) + \xi_2^2(\xi_1^2 - 1) > 0, \\ (\xi_1^2 - 1)(\xi_2^2 - 1) > 0, \quad \xi_1 < 1, \quad \xi_2 < 1. \end{gathered} \tag{101}$$

Последнее неравенство в (101) не зависит от t, выполняется для всех $\xi_1 < 1$, $\xi_2 < 1$. Поэтому в силу (98), (99) и (100) имеем $l > 1$, что и требовалось. Лемма 12 доказана.

Из леммы 12 вытекает

Лемма 13. *Пусть числа* a, b, a_1, b_1 *удовлетворяют неравенствам* (97). *Тогда в* (96) *для* $l \in [0,1]$ *справедливы соотношения* $\Delta_n(l) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если $n \in \mathbb{N}'$, то в силу леммы 12 равенство $\Delta_n(l) = 0$ может выполняться только при $l > 1$. Пусть $n \notin \mathbb{N}'$, т.е.

$$\frac{b^n}{a^n} - \frac{b_1^n}{a_1^n} = 0.$$

Тогда в силу (96) и неравенств (97) имеем

$$\Delta_n(l) \equiv -\left|1 - \frac{b^n}{a^n} \cdot \overline{\frac{b_1^n}{a_1^n}}\right|^2 \neq 0, \quad \left|\frac{b}{a}\right| < 1, \quad \left|\frac{b_1}{a_1}\right| < 1,$$

что и требовалось. Лемма 13 доказана.

Таким образом, теперь можем доказать следующий важный результат относительно функционального уравнения (93).

Теорема 9. *Пусть* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, *числа* a, b, a_1, b_1 *для эллипса* Γ (4) *найдены по формулам* (10) *и* (95). *Пусть параметр* $l \in \mathbb{R}$, *причем* $l \in [0, 1]$. *Тогда выполнено утверждение теоремы* 8.

Доказательство. Так как $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$, то согласно предложению 1 выполнены неравенства (97). Следовательно, выполнены условия леммы 13, согласно утверждению которой справедливы формулы (96). Таким образом, с учетом условий настоящей теоремы выполнены условия теоремы 8, т.е. и ее утверждение. Теорема 9 доказана.

В итоге с учетом теорем 9, 6 и замечания 9 доказана следующая теорема существования и единственности решений задачи Шварца.

Теорема 10. *Пусть матрица* $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ *имеет разные собственные значения* λ, μ, *где* $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\mu > 0$. *При этом хотя бы один из ее собственных векторов не кратен вещественному. Пусть так же для числа* $l = l(J)$ (75) *выполнено условие* $|l| \in [0,1]$.

Тогда для любой граничной функции $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *решение задачи Шварца в произвольном эллипсе* K *с границей* Γ *в классе функций* $\phi(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$ *существует и единственно с точностью до вектор-постоянной*.

Замечание 10. Пусть оба вектора матрицы J — вещественные. В этом случае преобразования настоящего раздела теряют смысл. Однако, как показано в [15], для таких матриц утверждение теоремы 10 тоже справедливо, причем в произвольной области D, ограниченной контуром Ляпунова.

8.3. Выражение модуля числа $l(J)$ (75) *через коэффициенты матрицы* J

Обозначим, как и выше, через $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mu$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\lambda$ собственные векторы матрицы J, соответствующие ее разным собственным числам μ, λ. Пусть матрица

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

есть нетреугольная матрица.

Предложение 6. *С учетом сделанных обозначений справедливы формулы* $\mathbf{x}_\mu = (a_{11} - \lambda,\ a_{12})$, $\mathbf{y}_\lambda = (a_{11} - \mu,\ a_{12})$.

Доказательство. Согласно теореме Гамильтона-Кэли $(J - \lambda E)(J - \mu E) = 0$. Поэтому

$$J(J - \mu E) \cdot (1,0)^{\mathrm{T}} = (J - \lambda E + \lambda E)(J - \mu E) \cdot (1,0)^{\mathrm{T}} =$$
$$= (J - \lambda E)(J - \mu E) \cdot (1,0)^{\mathrm{T}} + \lambda(J - \mu E)(1,0)^{\mathrm{T}} = \lambda(J - \mu E)(1,0)^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, $\mathbf{y}_\lambda = (J - \mu E)(1,0)^{\mathrm{T}} = (a_{11} - \mu, a_{12})$. Аналогично для собственного вектора $\mathbf{x}_\mu$. Предложение 6 доказано.

Пусть $a_{21} \neq 0$. С учетом предложения 6 по формуле (75) имеем

$$l = \frac{\det(\mathbf{x}_\mu, \bar{\mathbf{y}}_\lambda)}{\det(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{y}_\lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \overline{a_{11}-\mu} \\ a_{21} & \bar{a}_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{11}-\mu \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(a_{11}-\lambda)\bar{a}_{21} - a_{21}(\overline{a_{11}-\mu})}{a_{11}a_{21} - \lambda a_{21} - a_{21}a_{11} + \mu a_{21}} = \frac{a_{11}\bar{a}_{21} - a_{21}\bar{a}_{11} - \lambda\bar{a}_{21} + \bar{\mu}a_{21}}{-\lambda a_{21} + \mu a_{21}} = \tag{102}$$

$$= \frac{a_{11}\bar{a}_{21} - \overline{a_{11}\bar{a}_{21}} - \lambda\bar{a}_{21} + \bar{\mu}a_{21}}{(\mu-\lambda)a_{21}} = \frac{2i\cdot\operatorname{Im}(a_{11}\cdot\bar{a}_{21}) + \bar{\mu}a_{21} - \lambda\bar{a}_{21}}{(\mu-\lambda)\cdot a_{21}}.$$

Символ l очень общий. Поэтому с учетом (102) обозначим через

$$t_{J,\lambda\mu} = |l| = \frac{|2i\cdot\operatorname{Im}(a_{11}\cdot\bar{a}_{21}) + \bar{\mu}a_{21} - \lambda\bar{a}_{21}|}{|(\mu-\lambda)\cdot a_{21}|}, \quad a_{21}\neq 0, \quad \mu\neq\lambda. \tag{103}$$

Отметим, что формулу для $|l|$ можно вывести, используя второй столбец матрицы J, если $a_{12}\neq 0$. В этом случае собственные векторы матрицы J имеют вид $\mathbf{x}_\mu = (a_{12}, a_{22}-\lambda)$, $\mathbf{y}_\lambda = (a_{12}, a_{22}-\mu)$. Проведя преобразования, аналогичные (102), получим

$$t_{J,\lambda\mu} = |l| = \frac{|2i\cdot\operatorname{Im}(a_{22}\cdot\bar{a}_{12}) + \bar{\mu}a_{12} - \lambda\bar{a}_{12}|}{|(\mu-\lambda)\cdot a_{12}|}, \quad a_{12}\neq 0, \quad \mu\neq\lambda. \tag{104}$$

Формулы (103) и (104) совпадают с точностью до замены коэффициентов a_{11}, a_{21} на a_{22}, a_{12}. Однако они не учитывают треугольные матрицы J, и в случае $a_{21}=0$, либо $a_{12}=0$ становятся некорректными. Но если матрица J треугольная, то она имеет хотя бы один вещественный собственный вектор $\mathbf{x}$. В этом случае

$$\overline{\det(\mathbf{x},\mathbf{y})} = \det(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}}) = \det(\mathbf{x},\bar{\mathbf{y}}),$$

откуда согласно (75) $|l(J)| = 1$. Поэтому для треугольных матриц положим по определению: $t_{J,\lambda\mu} = |l| = 1$.

В заключение этого раздела приведем пример решения однородной задачи Шварца (3) в виде вектор-полинома третьей степени для матриц $J\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ с разными собственными значениями.

Пример 4. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 10i & -\dfrac{49}{3} \\ -\dfrac{27}{7} & -6i \end{pmatrix}, \quad \phi(z) = \begin{pmatrix} -6x(x^2+y^2-1) + (-20y^3 - 12x^2y + 18y)i \\ \dfrac{54}{7}y(x^2+y^2-1) + \left(-\dfrac{24}{7}x^3 + \dfrac{18}{7}x\right)i \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Матрица J (105) имеет собственные значения $\lambda = 3i$, $\mu = i$. Вектор-полином $\phi(z)$ есть функция, J-аналитической с данной матрицей J. Имеем $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = 0$ на единичной окружности Γ: $x^2+y^2=1$.

9. МАТРИЦЫ С СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ВЕРХНЕЙ И В НИЖНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

В классической постановке задачи Шварца (см. [4], [9], [10], [14], [15]) предполагается, что все собственные значения матрицы J лежат в верхней полуплоскости. В этом разделе задача Шварца рассмотрена в более общей постановке: собственные значения матрицы J лежат как выше, так и ниже вещественной оси. Показано, что данный случай сводится к рассмотренному выше с помощью несложных преобразований. При этом область $D\subset\mathbb{R}^2$ предполагается произвольной.

Пусть $\phi(z)$ есть J-аналитическая функция с матрицей $J = QJ_1Q^{-1}$, где с учетом обозначений (16) получим

$$J_1 = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{(m_1)},\ldots,J_{\lambda_p}^{(m_p)},J_{\mu_1}^{(n_1)},\ldots,J_{\mu_q}^{(n_q)}), \quad \operatorname{Im}\lambda_k > 0, \quad \operatorname{Im}\mu_k > 0,$$

$$m_1 + \ldots + m_p = r, \quad n_1 + \ldots + n_q = s, \quad r + s = \ell, \tag{106}$$

$$Q = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \overline{\mathbf{y}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_s), \quad \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{C}^\ell, \quad J = QJ_1Q^{-1}.$$

Пусть так же $\phi^*(z)$ есть J^*-аналитическая функция с матрицей $J^* = Q^* J_1^* (Q^*)^{-1}$, где

$$J_1^* = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, \ldots, J_{\lambda_p}^{(m_p)}, \overline{J}_{\mu_1}^{(n_1)}, \ldots, \overline{J}_{\mu_q}^{(n_q)}) = \operatorname{diag}(J_{\lambda_1}^{(m_1)}, \ldots, J_{\lambda_p}^{(m_p)}, J_{\overline{\mu}_1}^{(n_1)}, \ldots, J_{\overline{\mu}_q}^{(n_q)}),$$

$$\operatorname{Im}\lambda_k > 0, \quad \operatorname{Im}\mu_k > 0,$$
$$m_1 + \ldots + m_p = r, \quad n_1 + \ldots + n_q = s, \quad r + s = \ell, \tag{107}$$

$$Q^* = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s), \quad \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \mathbb{C}^\ell, \quad J^* = Q^* J_1^* (Q^*)^{-1}.$$

Матрица J_1^* (107) отличается от J_1 (106) комплексным сопряжением жордановых клеток, соответствующих собственным значениям μ_k. С учетом сделанных обозначений справедлива

Лемма 14. *Пусть в* (107), (106) $\det Q^* \neq 0$ *и* $\det Q \neq 0$. *Тогда задача Шварца* $\operatorname{Re}\phi^*(z)|_\Gamma = \psi(\omega)$ (*задача* S^*) *разрешима в некоторых классах функций* $\phi^*(z)$, $\psi(\omega)$ *тогда и только тогда, когда разрешима задача Шварца* $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = \psi(\omega)$ (*задача* S) *в тех же классах функций* $\phi(z)$. *При этом ядра обеих задач имеют одинаковую размерность и структуру.*

Доказательство. Используем предложение 2 и запишем (15) с учетом обозначений (106):

$$\phi(z) = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \overline{\mathbf{y}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_s) \cdot (f_1, \ldots, f_r, h_1, \ldots, h_s)^{\mathrm{T}}, \quad r + s = \ell. \tag{108}$$

В (108) функции f_k, h_k согласно лемме 6 имеют структуру (36) и согласно (34) являются решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1, \ldots, f_r, h_1, \ldots, h_s)^{\mathrm{T}} - J_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f_1, \ldots, f_r, h_1, \ldots, h_s)^{\mathrm{T}} = 0. \tag{109}$$

Из (109), (107) и (36) вытекает равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^{\mathrm{T}} - J_1^* \cdot \frac{\partial}{\partial x}(f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^{\mathrm{T}} = 0. \tag{110}$$

Поэтому согласно (15) и (107) справедливо равенство

$$\phi^*(z) = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s) \cdot (f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^{\mathrm{T}}, \quad r + s = \ell. \tag{111}$$

В силу (111), (108) и равенств $\operatorname{Re}\xi = \operatorname{Re}\overline{\xi}$, $\operatorname{Re}(\xi_1 + \xi_2) = \operatorname{Re}\xi_1 + \operatorname{Re}\xi_2$ имеем

$$\operatorname{Re}\phi^*|_\Gamma = \operatorname{Re}[(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s) \cdot (f_1, \ldots, f_r, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_s)^{\mathrm{T}}]|_\Gamma =$$
$$= \operatorname{Re}[(\mathbf{x}_1 \cdot f_1 + \ldots + \mathbf{x}_r \cdot f_r + \mathbf{y}_1 \cdot \overline{h}_1 + \ldots + \mathbf{y}_s \cdot \overline{h}_s)^{\mathrm{T}}]|_\Gamma = \tag{112}$$
$$= \operatorname{Re}[(\mathbf{x}_1 \cdot f_1 + \ldots + \mathbf{x}_r \cdot f_r + \overline{\mathbf{y}}_1 \cdot h_1 + \ldots + \overline{\mathbf{y}}_s \cdot h_s)^{\mathrm{T}}]|_\Gamma = \operatorname{Re}\phi|_\Gamma = \psi(\omega).$$

Из (112) следует одновременная разрешимость задач S и S^* для одной и той же правой части $\psi(\omega)$ в одинаковых классах функций.

Пусть теперь $\psi(\omega) \equiv 0$, и пусть функция $\phi(z)$ (108) есть решение однородной задачи Шварца $\operatorname{Re}\phi(z)|_\Gamma = 0$. Тогда в силу (112) функция $\phi^*(z)$ (111) будет решением однородной задачи Шварца $\operatorname{Re}\phi^*(z)|_\Gamma = 0$. Это утверждение справедливо и в обратную сторону, что доказывает одинаковую размерность ядер задач S и S^*. Из (112) следует так же, что ядра задач S, S^* имеют также одинаковую структуру в следующем смысле. Пусть, например, известно, что $\operatorname{Ker}S$ состоит только из вектор-полиномов. Тогда то же самое можно сказать и относительно $\operatorname{Ker}S^*$. Лемма 14 доказана.

Следствием леммы 14 и теоремы 5 является следующее утверждение.

Лемма 15. *Пусть все собственные значения матрицы* J^* (107) *лежат ниже вещественной оси. Пусть при этом для матрицы* $J = \overline{J^*}$ (106) *и эллипса* $\Gamma = \partial K$ *выполнены соотношения* (67). *Тогда для* *любой граничной функции* $\psi(\omega) \in H^{\sigma}(\Gamma)$ *задача Шварца* $\operatorname{Re}\phi^*(z)\big|_{\Gamma} = \psi(\omega)$ *имеет единственное с точностью до вектор-постоянной решение* $\phi^*(z) \in H^{\sigma}(\bar{K})$.

Рассмотрим тот случай, когда условия леммы 14 не выполнены. Пусть

$$\lambda = i, \quad \mu = 2i, \quad J_1^* = \operatorname{diag}(\lambda, \bar{\mu}) = \operatorname{diag}(i, -2i), \quad Q^* = (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \quad J^* = Q^* J_1^* (Q^*)^{-1}. \tag{113}$$

В (113) $\det Q^* \neq 0$, но $\det Q = \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, т.е. задача S теряет смысл. Покажем, что при таких предположениях ядро задачи S^* бесконечномерно.

Согласно (93) здесь $l = 0$. Поэтому в силу теоремы 6 однородная задача Шварца равносильна граничной задаче

$$f_{\lambda}(z) - \bar{g}_{\bar{\mu}}(z)\big|_{\Gamma} = f_{\lambda}(z) - g_{\mu}(z)\big|_{\Gamma} = 0,$$

т.е. задаче

$$f_{\lambda}(z)\big|_{\Gamma} = g_{\mu}(z)\big|_{\Gamma}. \tag{114}$$

Положим

$$f_{\lambda}(z) = (x + iy)^2, \quad g_{\mu}(z) = \frac{1}{2}(x + 2iy)^2 + 1, \quad \Gamma : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1. \tag{115}$$

Непосредственно убеждаемся в том, что равенство (114) выполняется для функций (115) на эллипсе Г. Но из (114) следует, что

$$[f_{\lambda}(z)]^n\big|_{\Gamma} = [g_{\mu}(z)]^n\big|_{\Gamma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в качестве решений задачи (114) можно взять любую пару функций

$$f_{\lambda}'(z) = [f_{\lambda}(z)]^n, \quad g_{\mu}'(z) = [g_{\mu}(z)]^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, задача (114) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Поэтому если матрица J^* имеет вид (113), то в силу теоремы 6 ядро задачи Шварца в эллипсе (115) для J^*-аналитических функций бесконечномерно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. *Солдатов А.П.* Функции, аналитические по Дуглису. Новгород: Изд-во НовГУ, 1995.
5. *Солдатов А.П.* Гипераналитические функции и их приложения // Совр. матем. и ее приложения. 2004. Т. 15. С. 142–199.
6. *Vasilyev V.B.* General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations // Adv. in Difference Equat. 2013. V. 289. P. 1–7.
7. *Vasilyev V.B.* Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries // Differential and Difference Equations and Applications. 2013. V. 47. P. 625–637.
8. *Vasilyev V.B.* On some transmission problems in a plane corner // Tatra Mt. Math. Publ. 2015. V. 63. P. 291–301.
9. *Солдатов А.П.* Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Совр. математика и ее приложения. 2010. Т. 67. С. 99–102.
10. *Николаев В.Г., Солдатов А.П.* О решении задачи Шварца для J-аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 7. С. 965–969.
11. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Высш. школа, 1999.
12. *Nikolaev V. G.* A Class of Orthogonal Polynomials on the Boundary of an Ellipse // J. of Math. Sci. 2019. V. 239. № 3. P. 363–380.
13. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985.
14. *Soldatov A.P.* On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane // More progresses in analysis: Proc. of the 5th Intern. ISAAC Congress, Catania, Italy, 25–30 July (2005). 2009. V. 2. P. 1171–1184.
15. *Васильев В.Б., Николаев В.Г.* О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 10. С. 1351–1361.

EDN: IPFLQS
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1138–1157

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА И МЕТОД ГИПЕРБОЛИЗАЦИИ[1)]

© 2022 г. А. Д. Юнаковский

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, Институт прикладной физики РАН, Россия

e-mail: yun@ipfran.ru

Поступила в редакцию 06.02.2021 г.
Переработанный вариант 12.11.2021 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

Рассмотрены “нестандартные” уравнения типа нелинейного уравнения Шрёдингера, требующие при расчетах очень мелких шагов по пространству и времени. Изучены способы увеличения временных шагов за счет использования идеи гиперболизации, т.е. добавления второй производной по времени с малым параметром. Продемонстрировано, что улучшение результатов достигается путем введения дополнительного затухания, связанного с тем же малым параметром. Найдены предельные значения соотношения малого параметра и шагов по пространству и времени. Библ. 60. Фиг. 8.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, метод гиперболизации, усилитель, БПФ, нестационарное уравнение Шрёдингера, “slip-step” метод, световод.

DOI: 10.31857/S0044466922070110

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) обладает чрезвычайно высокой универсальностью и применяется для описания волновых процессов во многих областях физики: в теории поверхностных волн, в моделях эволюции распределений плазменных колебаний, нелинейной оптике, биофизике и т.д.

Один известный класс решений этого уравнения описывает движение уединенных волн (солитонов), их образование и распад (см. [1]–[3]). Другой не менее важный класс решений описывает образование за конечное время особенностей – коллапсирующих каверн (см. [4] и обзор [5]).

Данное уравнение является основным уравнением нелинейной волновой оптики и активно используется, например, при математическом моделировании волоконно-оптических линий связи, волоконных лазеров и различных оптических устройств, а также в гидродинамике и физике плазмы. Для уравнений “параболического” типа, к которым относится нестационарное уравнение Шрёдингера

$$-2i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + |E|^2 E = 0 \tag{1}$$

разностные схемы обладают очень жесткими условиями устойчивости: $\Delta t \approx h^2$, что по сути дела при измельчении сетки замедляет решение задачи. Помимо этого, в уравнениях типа НУШ высокие пространственные гармоники не затухают с течением времени, а имеют быстро изменяющиеся фазы, что приводит даже при “относительно мягком” условии устойчивости к явлению случайных фаз (см. [6]–[8]). Это явление быстро распространяется до низких гармоник и превращает весь процесс вычислений в фактически случайный процесс (см. [9]).

Несмотря на чрезвычайную важность основных точно интегрируемых систем, таких, как КдФ, НУШ, уравнение синус-Гордона и т.п., все они являются исключительными моделями в

[1)]Работа выполнена при поддержке Научно-образовательного математического центра ННГУ, соглашение № 075-02-2020-1632.

том смысле, что любое дополнительное слагаемое, учитывающее диктуемые физикой эффекты, которые не учитывались в базовой модели, разрушает точную интегрируемость.

Среди огромного потока задач, использующих обобщенные НУШ, выделяется группа, в которой расчеты нужно вести на очень большом временном интервале (см. [10], [11]) или, в силу специфики задачи [12], с очень малым шагом по времени. Для задач на больших пространственных областях актуальным является вопрос о неотражающих граничных условиях. Обзор их конструирования для нестационарного уравнения Шрёдингера приведен в [13].

Для адекватного численного расчета задач в области волоконно-оптических линий связи или волоконных лазеров с детальным пространственно-временным разрешением число точек по "пространственной" переменной может составлять 10^6–10^7, что приводит к огромным затратам машинного времени и быстрому накоплению ошибки. Практически единственным путем расчета таких задач является параллельная реализация численных алгоритмов. Для их эффективного примененииия требуются новые математические модели, алгоритмы и математическое обеспечение.

Для НУШ и его обобщений популярна методика "slip-step" (см. [14]–[18]). Сравнение различных способов реализации метода проделано в [17], [19].

В области гидро и газодинамики в последнее время интенсивно развивается метод гиперболизации (см. [20]–[23]), хорошо зарекомендовавший себя при адаптации на архитектуру параллельных высокопроизводительных вычислительных систем. Гиперболизацией уравнений называют добавку дополнительного члена с малым параметром в качестве коэффициента перед второй производной по времени.

Впервые идея гиперболизации для задач электродинамики была предложена А. Милани (A. Milani) (см. [24]). Для задач гидрогазодинамики основополагающей работой в этом направлении является работа Б.Н. Четверушкина (см. [25]).

Обзор методов решения гиперболического уравнения теплопроводности приведен в [26]. В [27] с помощью операторного подхода построено частное решение гиперболического уравнения теплопроводности. Исследована эволюция гармонического решения, моделирующего распространение электрических сигналов в длинных проводных линиях, рассмотрено влияние фотонного способа теплопередачи в среде. Изучается влияние числа Кнудсена на теплопроводность в модели тонких пленок (обобщение см. в [28]).

Добавка дополнительного члена с малым параметром в качестве коэффициента перед второй производной по времени позволяет строить трехслойные явные схемы, обладающие лучшим условием устойчивости, чем традиционные явные схемы для параболических уравнений и нестационарных уравнений Шрёдингера. Дополнительные члены, как правило, выступают в роли физически обоснованных регуляризаторов, сглаживая нефизические эффекты, получающиеся при численном решении. Несомненный интерес представляет вопрос, насколько решение гиперболизованных уравнений Шрёдингера с малым параметром при второй производной по времени отличается от решения исходных уравнений. Представляет интерес анализ выполнения законов сохранения для гиперболизованных уравнений и их связь с соответствующими законами для исходных уравнений.

В данной работе приведены два способа численной реализации идеи гиперболизации. Методика, основанная на операторных спектральных заменах неизвестной функции продемонстрирована на динамике скачка поля для НУШ с неограниченным по пространственной переменной оператором в разд. 2. Идея введения консервативных переменных и потоков реализована для лазерного усилителя в разд. 3.

Увеличение скорости счета достигается путем гиперболизации, т.е. добавлением второй производной по времени с малым параметром.

Как для исходных уравнений, так и для гиперболизированных вариантов на заданном малом отрезке $(t_0, t_0 + \Delta t)$ удается построить такое приближенное решение задачи, которое кроме высокого порядка аппроксимации обладает еще и тем свойством, что в начальной и конечной точках рассматриваемого малого интервала производные по времени приближенного решения совпадают с производными точного решения. Естественно, что в конечной точке $t_0 + \Delta t$ мы попадем на другую, близкую траекторию, но с производной, соответствующей именно этой траектории. При этом, если у решения уравнения $E(\tau), t_0 \le \tau \le t_0 + \Delta t$ есть инварианты $I_i(E(t)) = \mathrm{const}$, то автоматически выполняются равенства нулю производных по времени для всех инвариантов от приближенного решения в начальной и конечной точках этого интервала. Другими словами, предложенный алгоритм обеспечивает непрерывность как приближенного решения, так и его производной по времени.

Приближенное решение строится путем последовательных операторных замен неизвестной функции на малом интервале. При проведении замен на первом этапе мы стремимся осуществить переход от уравнения или системы уравнений с неограниченными по пространственным координатам операторами к уравнениям с ограниченными операторами. Такой переход существенно расширяет возможности последующего численного моделирования.

Последующие операторные замены сводят исходную эволюционную задачу, описывающую сложный физический процесс, к решению последовательности задач, описывающих процессы более простой физической структуры. Приближенно это удается сделать на основе аддитивности рассматриваемых процессов в малом.

Численная реализация сводится к последовательному решению задач Коши для достаточно простых и, что немаловажно, знакомых уравнений. За начальные данные для последующего уравнения при этом берутся результирующие значения предыдущего. Каждая из этих подзадач может быть решена и распараллелена отдельно. Необходимо следить лишь за тем, чтобы решение каждого из уравнений в схеме расщепления удовлетворяло граничным условиям исходного уравнения. Получившийся алгоритм фактически является реализацией метода расщепления по физическим процессам.

Одним из уравнений схемы расщепления является линейное нестационарное уравнение Шрёдингера в однородном пространстве, решение которого тривиально выражается через операторную экспоненту, наиболее просто реализуемую с помощью преобразования Фурье. Обзор достижений вычислений операторной экспоненты приведен в [29], [30]. Главный вывод работы [29] состоит в том, что для матриц большой размерности безальтернативным является метод “Scaling and squaring” – использование представления $e^A = (e^{A/m})^m$.

Известно, что алгоритмы вычисления быстрого преобразования Фурье (БПФ) обладают низкой эффективностью распараллеливания, однако их применение при вычислении операторных экспонент позволяет существенно увеличить точность расчетов и использовать предельно крупные шаги по времени, по сравнению с шагами явных разностных схем. Наиболее эффективные алгоритмы реализации многомерного БПФ, в которых минимизированы передачи данных между процессорами, приведены в [31], [32].

Однако находить решение линейного нестационарного уравнения Шрёдингера не обязательно только с помощью преобразования Фурье. Например, в случае цилиндрической симметрии можно воспользоваться разностным методом типа метода интегральных тождеств Г.И. Марчука, но, естественно, для цилиндрического лапласиана. Менее затратной, чем “Scaling and squaring”, но и достаточно эффективной явилась схема удвоения шагов в трехслойной разностной схеме, использованной в [33]–[35]:

$$-2i\frac{E_n^k - E_n^0}{2\Delta t^k} + \Lambda_\perp\left(\sigma_1 E_n^k + (1-\sigma_1-\sigma_2)E_n^{k-1} + \sigma_2 E_n^0\right) - \frac{h^2}{12}\Lambda_{1\perp}E_n^{k-1},$$

где

$$\Lambda_\perp E_n^k = \frac{2}{h^2}\left[\frac{n+1}{2n+1}E_{n+1}^k - E_n^k + \frac{n}{2n+1}E_{n-1}^k\right],$$

$$\Lambda_{1\perp}E_n^{k-1} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{2n+3}{2n+1}E_{n+2}^{k-1} - 8\frac{n+1}{2n+1}E_{n+1}^{k-1} + 6E_n^{k-1} - 8\frac{n}{2n+1}E_{n-1}^{k-1} + \frac{2n-1}{2n+1}E_{n-2}^{k-1}\right].$$

Здесь $1/2 \ge \sigma_i \ge 0$, $i = 1,2$ – некоторые постоянные, значения которых определяют явный или неявный характер разностной схемы, $E_n^1 = E_n^0$, $\Delta t_k = 2\Delta t_{k-1}$, $k = 3,4,\ldots,K$. Шаг счета $\Delta t = \Delta t_K$, $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t/2^K$. Фактически значение E_n^1, т.е. в первой точке $t_{\min}$ находится по двухслойной схеме.

Отметим, что в своих расчетах мы всегда стремимся получить просто реализуемый и легко распараллеливаемый алгоритм, хотя способ его получения может оказаться достаточно сложным. Однако весьма важным является то, что понимание этих алгоритмов не вызывает затруднений. Они легко программируются и просты в применении. Простота реализации существенно ускоряет процесс написания программ, сокращает число ошибок программирования и в конечном итоге быстрее приводит к успеху. Путем последовательных операторных замен для гиперболизованных вариантов задач также удается построить аналог схемы расщепления по физическим процессам. Эффективное применение таких замен для гиперболизованного НУШ, реализованное через БПФ, докладывалось на 18-й международной конференции “Дифференциальные и функциональные дифференциальные уравнения – 2017” (см. [36]) и КРОМШ-2017 (см. [37]). Гиперболизация НУШ позволила не только существенно повысить точность расчетов, но и построить оценки ошибки приближенного решения. Реализация методики введения консервативных переменных и потоков докладывалась на КРОМШ-2020 (см. [38]) и КРОМШ-2021 (см. [39]).

2. НЕСТАНДАРТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Методы, основанные на последовательных операторных заменах неизвестной функции и приводящие к схеме расщепления с использованием дискретного преобразования Фурье, успешно применялись (см. [40], [41]) при нахождении решения нелинейного уравнения Шрёдингера гиперболически-параболического типа

$$2i\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + |E|^2 E = 0, \qquad (2)$$

имеющего противоположные знаки коэффициентов при вторых производных.

Эти уравнения описывают самовоздействие широкого класса волн, поверхности волновых векторов у которых имеют седловую точку (например, гравитационные волны на глубокой воде [42], плазменные колебания в замагниченной плазме [43]). Проведенные численные исследования эволюции начальных локализованных распределений поля гауссовой формы

$$E(x, y, 0) = A\exp(-x^2/2a^2 - y^2/2b^2)$$

подтвердили отсутствие локализованных стационарных состояний.

На фиг. 1 представлены отдельные моменты развития процесса самовоздействия поля с исходным соотношением пространственных масштабов $a/b = 1/10$ и амплитудой $A = 2.5$. Прежде всего отчетливо виден монотонный характер расширения распределений вдоль оси y, сопровождающийся сложным пульсирующим изменением его ширины в x-направлении. Наблюдается эффект дробления начальной квазиоднородной структуры, приводящий к образованию дополнительного горба в распределении поля в результате каждой пульсации приосевой области пучка. На больших расстояниях процесс всегда переходит в режим самодефокусировки, сопровождающийся монотонным снижением уровня поля (обоснование корректности постановки задачи для уравнения (2) см. в [44]).

В [10], [11] проведено исследование распространения световых импульсов в многожильных световодах, приведенных на фиг. 2.

Рассматривалась задача с периодическими граничными условиями для системы линейно связанных нелинейных уравнений Шрёдингера (NLSE):

$$i\frac{\partial A_k}{\partial z} = \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} - f_k, \quad f_k = \gamma |A_k|^2 A_k + \sum C_{m,k} A_m,$$

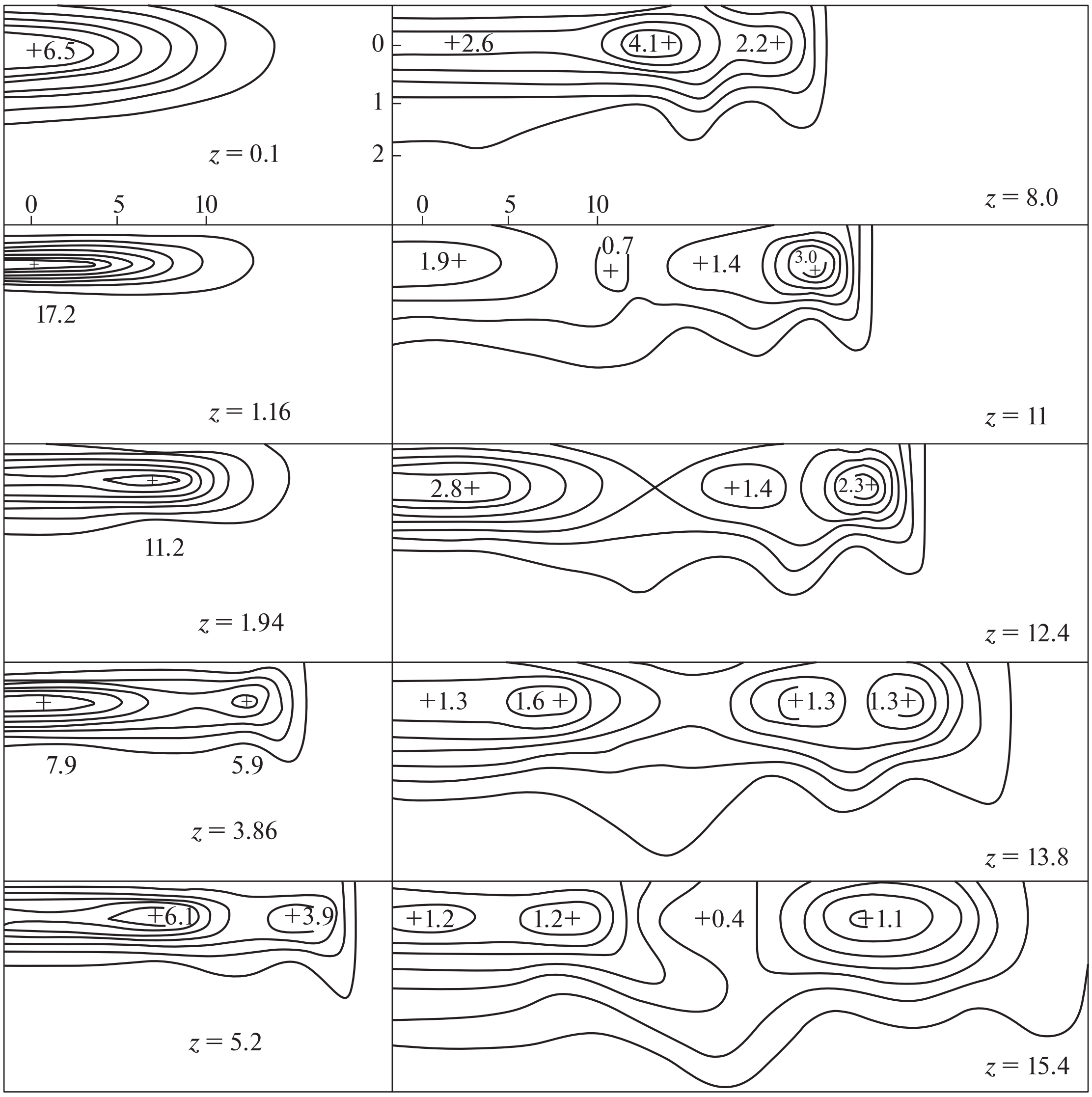
$$A_k(z, T) = A_k(z, -T).$$

Были использованы обобщения двух численных алгоритмов для решения системы линейно связанных НУШ, описывающей распространение световых импульсов в многожильных оптических световодах. В первом итеративном численном методе использовалась компактная диссипативная схема второго порядка точности по пространству и четвертого порядка по времени. Эта компактная схема обладает высокой устойчивостью за счет включения дополнительного диссипативного члена. Второй алгоритм является обобщением пошагового метода Фурье, основанного на аппроксимации Паде матричной экспоненты.

Методы тестированы на классическом солитонном решении и для солитона Кузнецова–Ма

$$E(z, t) = e^{iz}\left[1 + \frac{-2\cosh(bz) + i\sinh(bz)}{\sqrt{wt} - \cosh(bz)}\right],$$

где $b = 2\sqrt{2}i$, $w = 2i$, т.е. в устойчивом, трудноразрушимом случае (см. фиг. 3).



Фиг. 1. Линии уровня функции $|E|^2$ из уравнения (2) при начальном соотношении между полуосями 1/10. Знак плюс соответствует максимуму распределения поля $|E|^2$, цифры – величина поля в максимуме.

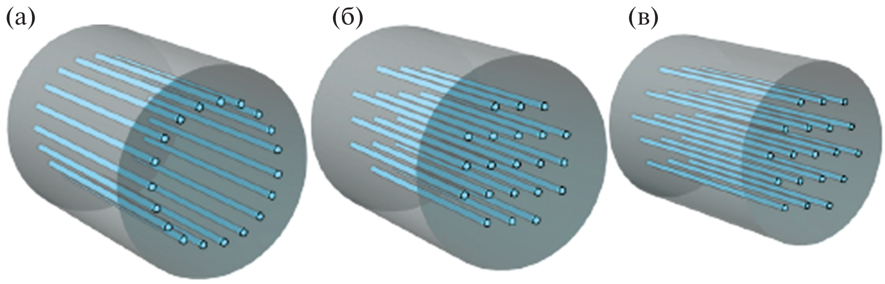
Обратите внимание на разные шкалы мощности солитонов. В случае многожильных световодов система связанных NLSE включает линейную связь между соседними оболочками.

В случае с самофокусировкой, т.е. когда игра идет на все более высокочастотных гармониках (см. фиг. 4), требуется тщательное сравнение с численными результатами для уравнения Шрёдингера.

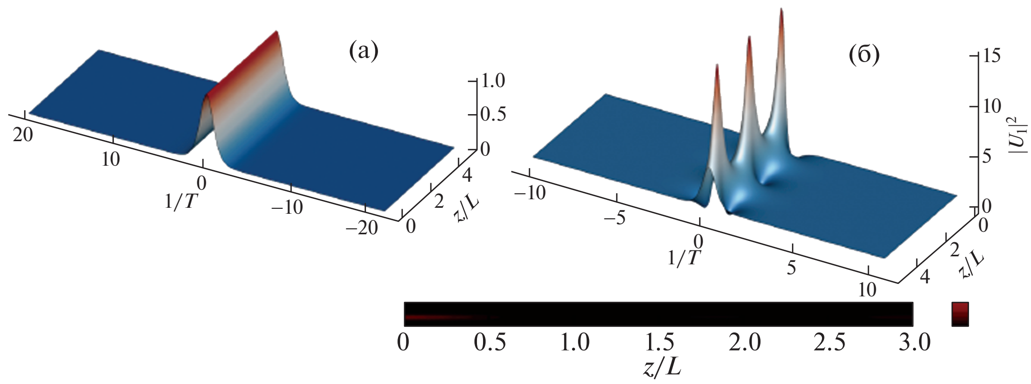
2.1. Динамика падения волны на неоднородный слой плазмы

Задача о падении плоской волны на неоднородный слой плазмы рассматривалась в [12], [45], [46]. Простейшее уравнение для изучения динамики волны в неоднородном поле представляет собой аналог НУШ:

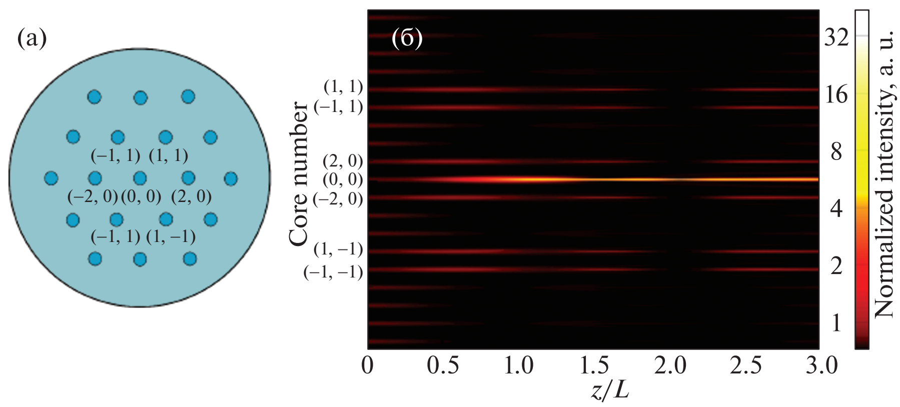
$$-2i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + (-x + |E|^2)E = D, -\infty < x < +\infty, \tag{3}$$



Фиг. 2. Различные типы световодов: (а) 19-ядерный с кольцевой решеткой, (б) 21-ядерный квадратной формы и (в) 19-ядерный шестиугольный.



Фиг. 3. Фундаментальный солитон (а) и солитон Кузнецова–Ма (б) как аналитические точные решения скалярного NLSE .



Фиг. 4. Динамика распределения интенсивности в каждой оболочке 19-жильного кольцевого кабеля. Заданный входной импульс Гаусса достигает наилучшей энергии для этого типа кабелей, равной 80% общей энергии Et на расстоянии $z = 65:9$.

но с неограниченным оператором $\partial^2 E/\partial x^2 - xE$. Напомним, что спектр этого оператора непрерывный и заполняет всю ось.

Вместо граничных условий $E \to 0$ при $x \to \pm\infty$ можно использовать условие принадлежности решения пространству L_2. Соответственно, и начальные данные

$$E(x,0) = E_0(x) \in L_2. \tag{4}$$

Легко проверить, что решение $E(x,t)$ сохраняет первый интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |E|^2\,dx = \text{const}.$$

Решение нестационарной задачи без нелинейного слагаемого выражается через функции Эйри, образ Фурье которых e^{ik^3t} дает ясное представление о соотношении между шагами по пространственной и временной переменным при численном счете.

Будем обозначать через

$$FE(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x,t)e^{-ikx}dx$$

преобразование Фурье функции $E(x,t)$.

Применим преобразование Фурье к уравнению (3), считая, что все входящие в это уравнение слагаемые принадлежат пространству L_2:

$$\begin{gathered} -2i\frac{\partial FE}{\partial t} - k^2FE - i\frac{\partial FE}{\partial k} = Ff(k,t) = F(-|E|^2 E + D), \\ -i\left(2\frac{\partial FE}{\partial t} + \frac{\partial FE}{\partial k}\right) = k^2FE + Ff(k,t). \end{gathered} \tag{5}$$

Будем опускать аргумент k у функций, а аргумент t будем писать только в случае необходимости. Введем новые переменные

$$\xi = t - 2k, \quad \eta = k. \tag{6}$$

Тогда уравнение примет вид

$$-i\frac{\partial FE}{\partial \eta} = \eta^2 FE + = Ff(\eta, \xi + 2\eta). \tag{7}$$

Решение, удовлетворяющее соответствующим начальным условиям, имеет вид

$$FE(\eta) = FE_0(-\xi/2)e^{-i(\eta^3-\xi^3/8)/3} + i\int_{-\xi/2}^{\eta} e^{-i(\eta^3-\xi^3/8)/3}Ff(\tau,\xi+2\tau)d\tau. \tag{8}$$

Вернувшись к координатам (k,t), получим

$$FE(k,t) = FE_0\left(k - \frac{t}{2}\right)e^{-i(k^2-kt/2+t^2/12)t/2} + i\int_0^t e^{-i(k^2-k(t-\tau/)2+(t-\tau)^2/12)(t-\tau)/2}Ff\left(k - \frac{t-\tau}{2},\tau\right)d\tau. \tag{9}$$

Показатель экспоненты, пропорциональный k^3, характерный для образа Фурье функции Эйри, "спрятался" в сдвиг аргумента функции начальных данных. При вычислениях это приводит к накоплению ошибок за счет аппроксимаций. Сделав обратное преобразование Фурье, окончательно получаем

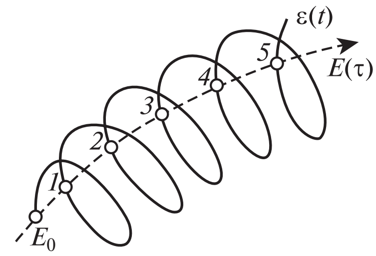
$$\begin{gathered} E(x,t) = \frac{1+i}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} E_0(x-y)e^{-i(y^2+yt^2/2-xt^2-t^4/48)/2t}dy - \\ -\frac{1-i}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\tau)e^{i((x-y)^2+(x-y)(t-\tau)^2/2-x(t-\tau)^2-(t-\tau)^4/48)/2(t-\tau)}dyd\tau. \end{gathered} \tag{10}$$

Вычисление двойного сингулярного интеграла с быстроосцилирующей подынтегральной функцией на каждом шаге по времени также приводит к быстрому накоплению ошибок счета. Заметим, что в [12] устойчивые расчеты удалось провести только с помощью введения большого нефизичного затухания.

Воспользовавшись фундаментальным решением для однородного уравнения

$$-2i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - xE = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{11}$$

мы перешли к интегральной формулировке задачи. Для корректной постановки этой задачи вместо граничных условий на $\pm\infty$ ставится условие принадлежности решения определенному функциональному пространству, $E \in L_p$. Когда спектр оператора по пространственной переменной заполняет всю действительную ось, встает вопрос о появлении комплексных собствен-



Фиг. 5. Графическое представление характера поведения гиперболизованного решения.

ных значений с положительной действительной частью (естественно, в окрестности $\lambda = 0$) при возмущении задачи (см., например, [47], [48]).

В [49] приведена замена переменных, сводящая оператор из (11) к стандартному нестационарному оператору Шрёдингера $-2i\partial E/\partial t + \partial^2 E/\partial x^2$. Однако отображение пространства L_2 при этом является отображением "в" и не для всякой функции существует обратное отображение. В [50] рассмотрено дискретное уравнение Эйри, которое сводится к стандартному рекуррентному соотношению.

В [51] предложены различные стратегии для получения приближения к дискретным неотражающим (прозрачным) граничным условиям для уравнения Шрёдингера с линейным потенциальным членом во внешней области. Вывод был основан на знании точного решения (включая асимптотику) дискретного уравнения Эйри. Подход имеет два преимущества перед стандартным подходом к дискретизации непрерывного неотражающего граничного условия (НГУ): точность и эффективность; в то время как дискретные НГУ обычно имеют квадратичный порядок роста ошибки, сумма экспоненциальных приближений к дискретным блокам преобразования частоты имеет только линейный порядок. Более того, предоставлены простые критерии проверки стабильности метода.

Решение задачи (3) с начальными данными в виде функции Эйри напоминает задачу о распаде разрыва, но если в задаче о распаде разрыва начальные данные на полуоси принадлежат L_2, то в случае с функцией Эйри, принадлежащей L_4, это не так. Математическая задача состоит в исследовании механизма появления и асимптотической устойчивости у возмущенной задачи решений типа функций Эйри.

Поэтому для проведения достоверных расчетов требуется провести регуляризацию задачи, чтобы избавиться от неограниченного оператора и воспользоваться идеей гиперболизации для улучшения соотношения шагов по времени и пространству. При выводе НУШ (Леонтович 1944 г., см. [52]) было использовано предположение, что поле E представляет собой огибающую быстро осциллирующей величины $\mathcal{E}$. Эта функция представляет собой произведение двух функций: быстро осциллирующей экспоненциальной функции $e^{i\phi(r,z)}$ и медленно изменяющейся функции $E(r,z)$. Характерное поведение $\mathcal{E}$ в фиксированной точке r представлено на фиг. 5.

Добавив вторую производную с малым параметром в исходное уравнение (3), мы как бы возвращаемся к уравнению для исходной величины $\mathcal{E}$, но с функцией $\phi = ct/\varepsilon$, т.е. спираль у нас теперь лежит на строго цилиндрической поверхности.

Сначала реализуем метод последовательных операторных замен неизвестной функции на одном шаге t по времени. Затем введем новую неизвестную функцию, учитывающую малый параметр:

$$E = Ue^{it(x+(1/\mu^2-\mu))/2}, \tag{12}$$

так чтобы у получившегося в результате гиперболического оператора

$$4\mu^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2i\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - it\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{i}{\mu^2} - i\mu - \frac{t^2}{4}\right)U = -|U|^2U + Be^{it(x+(1/\mu^2-\mu)/2)} \tag{13}$$

существовала явно вычисляемая функция Грина. Это позволяет, преобразовав исходное уравнение к гиперболической системе с производными по времени в левой части, использовать фундаментальное решение для проведения нескольких последовательных операторных замен неизвестных функции системы (см. [6]). Получившийся в результате оператор правой части обращается в нуль в начальной и конечной точках выбранного временного интервала. Следствием является то, что построенное на этом интервале приближенное решение в начальной и конечной точках этого интервала удовлетворяет исходному уравнению. Отметим, что операторные замены обладают автоматическим параллелизмом и просто и практически безошибочно программируются.

Так как гиперболизация для нас – это метод нахождения приближенного решения исходного уравнения Шрёдингера для функции E, то после каждого шага нахождения функции $U(t)$ мы возвращаемся к функции $E(t)$. Считаем, что $E_{\text{new}}(0) = E(t)$. Нам осталось перейти к U_{new}, и задать начальные данные для вспомогательных функций, исходя из условия, что $\partial U_{\text{new}}/\partial t$ в точке $t = 0$ определяется из исходного уравнения. Достаточно задать

$$U_{\text{new}}(0) = U(t)e^{itx/2+i(t^3+3tT^2+3t^2Y)/24}.$$

Добавим в гиперболизованное уравнение дополнительно затухание с параметром b:

$$a^2\mu^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b\frac{\partial U}{\partial t}\right) + 2i\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - it\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{t^2}{4} - N - 2d\right)U + De^{-it(x/2+d)} = 0, \tag{14}$$

где μ – малый параметр, а $N = |U|^2$. Введем новое время

$$t = \frac{t_{\text{old}}}{(a\mu)}. \tag{15}$$

Сделаем замену

$$U = Ve^{-(ba\mu+2i/a\mu)t/2}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - ia\mu t\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{(a\mu t)^2}{4}V + \left(\frac{1}{a^2\mu^2} - \frac{b^2a^2\mu^2}{4} - 2d - N\right)V - ibV + De^{it(a\mu x/2+\eta)} = 0. \tag{17}$$

Здесь введено обозначение

$$\eta = a\mu d + i(ba\mu + 2i/a\mu)t/2. \tag{18}$$

Для упрощения дальнейших выкладок фиксируем параметры

$$b = \frac{a\mu}{2}, \quad d = \frac{1}{2a^2\mu^2} - \frac{a^4\mu^4}{32}. \tag{19}$$

Сделаем преобразование Фурье по пространственной(ым) переменной(ым)

$$\frac{\partial^2 FV}{\partial t^2} + \left(\frac{a\mu}{2}\right)^2\left(t + \frac{2k}{a\mu}\right)^2 FV - i\frac{a\mu}{2}FV - F(NV) + De^{-it\eta}\delta(k - a\mu t/2). \tag{20}$$

Введем новый параметр и обозначение

$$\alpha = \frac{a\mu}{2}, \quad \breve{D} = De^{-it\eta}\delta(k - a\mu t/2), \quad \eta = -\frac{1}{2a\mu} - \frac{a^5\mu^5}{32} + i\frac{a^2\mu^2}{4}. \tag{21}$$

Полученное уравнение может быть расписано в виде системы

$$\frac{\partial Fv}{\partial t} = Fw, \tag{22}$$

$$\frac{\partial Fw}{\partial t} = -\alpha^2(t + 2k/\alpha\mu)^2 Fv + i\alpha Fv + F(Nv) - \hat{\gamma}FV + \breve{D}. \tag{23}$$

В матричной форме получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2(t + k/\alpha)^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} + i\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}F^{-1}\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} + \breve{D}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

с неограниченным оператором (умножения на $\alpha^2(t + k/\alpha)^2$) в правой части. Такой вид упрощает применение метода операторной экспоненты.

Фундаментальное G, G_1 решение линейной части уравнения (24) имеет вид

$$G(t) = e^{i\alpha(t^2+2kt/\alpha)/2}\int_0^t e^{-i\alpha(s^2+2ks/\alpha)}ds, \quad G_1(t) = e^{i\alpha(t^2+2kt/\alpha)/2}. \tag{25}$$

С его помощью сделаем первую операторную замену неизвестных функций

$$\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & G \\ i(\alpha t + 2k)G_1 & i(\alpha t + 2k)G + \overline{G}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = Q(t)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Тогда новые неизвестные функции

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\alpha t + 2k)G + \overline{G}_1 & -G \\ -i(\alpha t + 2k)G_1 & G_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} = Q^{-1}(t)\begin{pmatrix} Fv \\ Fw \end{pmatrix} \tag{27}$$

удовлетворяют системе уравнений в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = Q^{-1}(t)F\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}F^{-1}Q(t)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + Q^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \breve{D} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Обозначим

$$V = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}(t) = Q^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \breve{D} \end{pmatrix} \tag{29}$$

и введем необходимые в дальнейшем операторы

$$T_\pm^1(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm\frac{1}{t}\int_0^\tau \tau_1 N(\tau_1)d\tau_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\pm^2(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm\frac{1}{t}\int_0^\tau (t-\tau_1)N(\tau_1)d\tau_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$T_N(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad T_b(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\tau}{t}N(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad T_e(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{t-\tau}{t}N(\tau) & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Для вектор-функции V получим уравнение

$$\frac{dV}{dt} = C(t)V + \tilde{D}(t) \tag{32}$$

с ограниченным оператором

$$C(t) = Q^{-1}(t)F\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N(y) & 0 \end{pmatrix}F^{-1}Q(t)\ldots\right). \tag{33}$$

Введем на отрезке $0 \le \tau \le t$ оператор

$$C_1(\tau, t) = Q^{-1}(t)FT_b(\tau)\left(F^{-1}Q(t)\ldots\right), \tag{34}$$

действующий на вектор-функции $V(\tau)$. С помощью разложения Дайсона (см. [53]) определим операторы

$$D_\pm(\tau) = Q^{-1}(t)FT_\pm^1(\tau)\left(F^{-1}Q(t)\ldots\right), \tag{35}$$

представляющие собой операторные экспоненты от (34) с соответствующими знаками $\pm$ перед $N(\tau)$. Очевидно, что $D_+(\tau)\cdot D_-(\tau) = I$, и они оба являются ограниченными операторами в пространстве L_2. Отметим, что у образующего оператора (34) точка $\lambda = 0$ является точкой спектра. Функция

$$W(\tau) = D_+(\tau)V(\tau) \tag{36}$$

удовлетворяет при $0 \le \tau \le t$ уравнению

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}D_+(\tau)V(\tau) + D_+(\tau)\frac{dV}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}D_+(\tau)D_-(\tau)W(\tau) + D_+(\tau)C(\tau)D_-(\tau)W(\tau) + D_+(\tau)\tilde{D}(\tau).$$

Из (34) и (35) следует, что

$$\frac{d}{d\tau}D_+(\tau)D_-(\tau) = C_1(\tau,t).$$

Таким образом, для $W(\tau)$ получено уравнение

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\tau} &= C_2(\tau,t)W(\tau) + D_+(\tau)\tilde{D}(\tau) = \left[D_+(\tau)C(\tau)D_-(\tau) - C_1(\tau,t)\right]W(\tau) + D_+(\tau)\tilde{D}(\tau) = \\ &= Q^{-1}(t)F\left[T_+^1(\tau)F^{-1}Q(t)Q^{-1}(\tau)FT_N(\tau)F^{-1}Q(\tau)Q^{-1}(t)FT_-^1(\tau) - T_b^1(\tau)\right]F^{-1}Q(t) + D_+(\tau)\tilde{D}(\tau).\end{aligned} \tag{37}$$

Видно, что $C_2(t,t) = 0$, а $C_2(0,t) = C(0)$.

С помощью того же разложения Дайсона определим операторы

$$\widehat{D}_\pm(\tau) = Q^{-1}(0)F\left(T_\pm^2(\tau)F^{-1}Q(0)\ldots\right). \tag{38}$$

Так как матрицы $Q(0)$ и $Q^{-1}(0)$ постоянные, то они перестановочны с преобразованием Фурье и в результате

$$\widehat{D}_\pm(\tau) = F\left(\begin{pmatrix}1 & \pm\frac{1}{t}\int_0^\tau (t-\tau_1)N(\tau_1)d\tau_1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}F^{-1}\ldots\right). \tag{39}$$

Теперь введем новую функцию

$$Z(\tau) = \widehat{D}_+(\tau)W(\tau), \tag{40}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{d\tau} &= C_3(\tau,y)Z + \widehat{D}_+(\tau)D_+(\tau)\tilde{D}(\tau) = \widehat{D}_+(\tau)C_2(\tau,y)\widehat{D}_-(\tau)Z(\tau) - \\ &- Q^{-1}(0)FT_e(\tau)F^{-1}Q(0)Z(\tau) + \widehat{D}_+(\tau)D_+(\tau)\tilde{D}(\tau).\end{aligned} \tag{41}$$

Отметим важный для нас факт, что $C_3(0,t) = C_3(t,t) = 0$. Так как операторы C_1, C_2 и C_3 — по аналогии с $C(t)$ — ограниченные, а $C_3 = 0$ в начальной и конечной точках интервала интегрирования, то можно ожидать, что функция $Z(\tau)$ находится приближенным интегрированием соотношения

$$\frac{dZ}{d\tau} = \widehat{D}_+(\tau)D_+(\tau)\tilde{D}(\tau).$$

Отсюда

$$V_{\text{ap}}(\tau) = Q(\tau)D_-(\tau)\widehat{D}_-(\tau)V_0 + Q(\tau)D_-(\tau)\widehat{D}_-(\tau)\int_0^\tau \widehat{D}_+(s)D_+(s)\tilde{D}(s)ds. \tag{42}$$

Заменив подынтегральное выражение линейной интерполяцией по крайним точкам интервала $(0, t)$, получаем

$$\int_0^\tau \widehat{D}_+(s)D_+(s)\tilde{D}(s)ds \approx H(\tau) = \frac{\tau^2}{2t}\widehat{D}_+(t)D_+(t)\tilde{D}(t) + \left(\tau - \frac{\tau^2}{2t}\right)\tilde{D}(0). \tag{43}$$

Следствие. Приближенное решение

$$V_{\text{ap}}(\tau) = Q(\tau)D_-(\tau)\widehat{D}_-(\tau)(V_0 + H(\tau))$$

удовлетворяет уравнению (20) в начальной и конечной точках интервала интегрирования $0 \le \tau \le t$.

Это означает, что в конечной точке $\tau = t$ траектория $V_{\text{ap}}(\tau)$ касается траектории решения уравнения (20), близкой к траектории точного решения задачи Коши (20), (4).

Распишем подробно приближенное решение в конечной точке интервала $0 \le \tau \le t$:

$$\begin{pmatrix}v \\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ -tN(t)/2 & 1\end{pmatrix}F^{-1}Q(t)F\left(\begin{pmatrix}1 & -tN(0)/2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_0 + D\tau/2 \\ v_0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0 \\ te^{i(\eta+\alpha\mu x/2)t}/2\end{pmatrix}. \tag{44}$$

Матрица $Q(t)$ совместно с прямым и обратным преобразованием Фурье задают операторы сдвига и дифференцирования, и приближенно можно записать результат для функции v:

$$v(t) \approx v_0(x + 2t/\mu) + \frac{t}{\mu} N_0(x + 2t/\mu) v_0(x + 2t/\mu) + w_0(x + 2t/\mu) + \frac{t}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial x} w_0(x - 2t/\mu) + D\tau/2. \qquad (45)$$

Функцию

$$w(t) \approx iF^{-1}(\alpha t + 2k/\mu) G_1 F v_0 + (i(\alpha t + 2k/\mu)G + \bar{G}_1)\left(F\left(-\frac{t}{2} N(t) v_0\right) + F w_0\right)$$

можно не находить, поскольку начальные данные для $Fw(t) = \partial v(t)/\partial t$ находятся из условия, что в точке $t = 0$ выполняется исходное уравнение Шрёдингера

$$Fw_0 = i\sqrt{\mu}\left(-k^2 F v(0) + F(N(0)v(0))\right). \qquad (46)$$

Для проведения следующего шага вычислений согласно использованной замене (16), получим новые начальные данные

$$V_{\text{new}} = E(t) = v(t) e^{-it/2\mu},$$

$$\frac{\partial E_{\text{new}}}{\partial t} = -i\left(\frac{\partial^2 E(t)}{\partial x^2} + N(t)E(t)\right) = -ie^{-it/2\mu}\left(\frac{\partial^2 V(t)}{\partial x^2} + N(t)V(t)\right).$$

Соответственно

$$F v_{\text{new}} = e^{-it/2\mu} F v(t),$$

$$F w_{\text{new}} = ie^{-it/2\mu}\left(k^2 F v(t) - F(N(t)v(t))\right).$$

Для проведения устойчивых расчетов, исключающих образования случайных фаз из-за многократного умножения на $G_1 = e^{-i\alpha(t^2 + 2kt/\alpha)}$, необходимо выполнение условия

$$\alpha(t^2 + 2kt/\alpha) < \pi/2. \qquad (47)$$

Вычисления проводились в ограниченной спектральной области $|K| \le K_{\max}$, поэтому, возвращаясь к исходному времени, получаем

$$\frac{t_{\text{old}}^2}{\mu} + \frac{4K_{\max} t_{\text{old}}}{\mu} \le \frac{\pi}{2}.$$

Из этого неравенства находим

$$t_{\text{old}} \approx \pi\mu/8K_{\max} \approx \pi\mu\Delta x/8. \qquad (48)$$

Подстановка в (45) начальных данных из (46) дает возможность оценить в образах Фурье вклад от Fw_0 в окончательный результат FW_{new}: стоящий перед Fw_0 множитель имеет вид

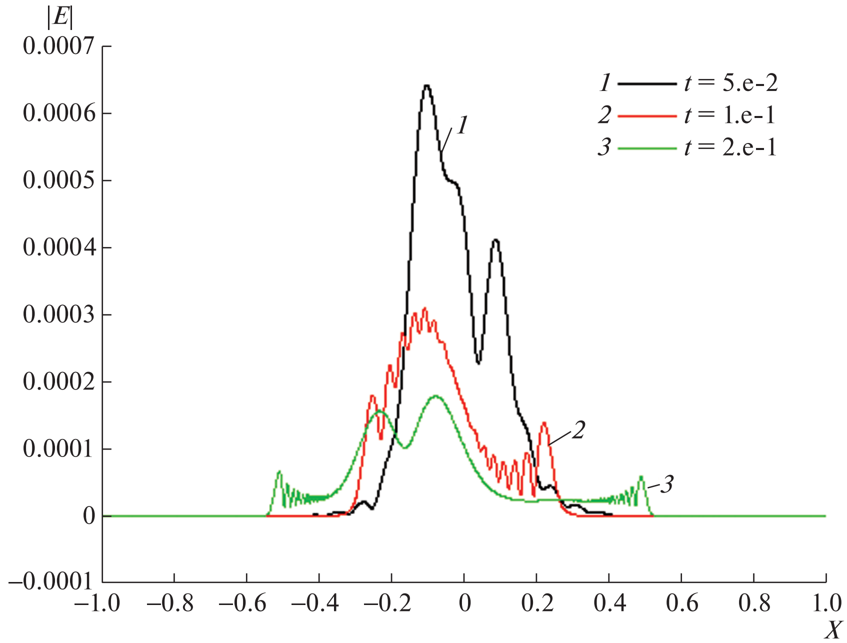
$$\frac{2\mu^{3/2}k^2}{\sqrt{4\mu k^2 + 1}}$$

и при выбранном μ имеет оценку

$$\frac{\left(\dfrac{k}{K_{\max}}\right)^2}{\sqrt{2}K_{\max}\sqrt{2\left(\dfrac{k}{K_{\max}}\right)^2 + 1}} \le \frac{2}{3K_{\max}} < 1,$$

т.е. не нарастает.

На фиг. 6 приведены результаты численного решения гиперболизованного НУШ (14) с нулевыми начальными данными при относительно малом внешнем воздействии $B = 0.1$. Основной результат заключается в демонстрации отличия процессов релаксации волнового потока в НУШ от релаксации тепловых потоков. Релаксация в НУШ достигается подстройкой фазы колебаний.



Фиг. 6. Графики релаксации амплитуды поля $|E|$ в различные моменты времени. Видно образование и эволюция бегущих волн типа функции Эйри.

Изначально растущее за счет внешнего воздействия поле быстро разваливается на разбегающиеся волны, типа функций Эйри, но с растущей частотой. Характерно, что гладкие передние фронты волн направлены в разные стороны. Это объясняется тем, что образующиеся при $x > 0$ и $x < 0$ волны – решения уравнения $\partial^2\varphi/\partial x^2 \pm \varphi$ есть функции Эйри $Ai(\pm x)$, т.е. в области отрицательных x получаем волну $Ai(-x)$.

На фиг. 6 продемонстрировано, что находится именно решение уравнения Шрёдингера: нет характерного признака решения гиперболического уравнения – двух одинаковых волн $\varphi(x - at)$ и $\varphi(x + at)$, бегущих в противоположных направлениях.

Для уравнения (3) разработан также алгоритм с выделением консервативных переменных и потоков, применяемый в работах [20]–[23]. Расширенный вариант из [46], чтобы не повторять аналогичных выкладок, приведен в следующем резделе.

Возможность получения решений в различных функциональных пространствах анонсирована в [54]. На выходе получаются слабо нелинейные и сильно нелинейные стационарные турбулентные состояния. Последнее состояние характеризуется спектром Фурье “с тяжелым хвостом”.

3. ЛАЗЕРНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

В этом разделе мы реализуем идею из [20], [21] введения консервативных переменных и потоков для системы лазерного усилителя (см. [55]–[57]), включающую как уравнения типа НУШ, так и уравнение распространения тепла. Основным отличием рассмотренной в настоящей работе конструкции от методики из [22], [23] является перенесение идеи гиперболизации на уравнения в недивергентной форме.

Рассмотрена гиперболизированная математическая модель усилителя и усовершенствован вычислительный алгоритм за счет привлечения идеи предиктора-корректора, позволившей провести так называемое расщепление по физическим процессам. Это позволило полностью векторизовать все математические операции с компонентами уравнений и использовать многопроцессорность компьютеров с наибольшей эффективностью.

Математическая модель импульсно-периодического лазерного усилителя с накачкой лазерным пучком описывается системой уравнений типа нелинейного уравнения Шрёдингера для поля накачки U, совмещенного с входным сигналом U_j, описанным аналогичным уравнением, уравнением для температуры T и уравнением релаксации для населенности N, в котором поглощение ионами кристалла пропорционально интенсивности накачки.

Система уравнений усилителя приводится к виду

$$i\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial U}{\partial r} - i\alpha_p U + f(|U|^2)U, \tag{49}$$

$$f(|U|^2) = i\gamma_p N + \beta_p N + (c_p T + d_p(I_p + g_j I_j)), \tag{50}$$

$$i\frac{\partial U_j}{\partial z} = \frac{\varkappa_j}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial U_j}{\partial r} - i\alpha_j U + f_j(|U|^2)U_j, \tag{51}$$

$$f_j(|U|^2) = i\gamma_j N + \beta_j N + (c_j T + d_j(I_j + g_{jl} I_l)), \tag{52}$$

$$I_p = |U|^2, \quad I_j = |U_j|^2, \tag{53}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\varkappa_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial r} + f_T(|U|^2), \tag{54}$$

$$f_T(|U|^2) = \alpha_T(1 - N)I_p, \tag{55}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (1 + \sigma_p I_p + \sigma_j I_j)N = I_p + \sigma_{1j} I_j\ . \tag{56}$$

Граничные условия

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial r}(0,z) = 0, \quad U(r_e,z) = 0, \quad \frac{\partial U_j}{\partial r}(0,z) = 0, \quad U_j(r_e,z) = 0,\\ \frac{\partial T}{\partial z}(t,r,0), \quad \frac{\partial T}{\partial z}(t,r,Z) = 0,\\ \frac{\partial T}{\partial r}(t,0,z) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(t,r_e,z) = M_T(T(t,r_e,z) - T_0).\end{gathered} \tag{57}$$

Начальные условия

$$\begin{gathered}U(r,0) = U_0(r) = Ae^{-cr^2}, \quad U_j(r.0) = U_{j0}(r) = A_1 e^{-c_1 r^2},\\ N(r,0) = N_0, \quad T(0,r,z) = N_0(r,z).\end{gathered} \tag{58}$$

На вход усилителя подается последовательность коротких импульсов накачки и сигнала. Накачка формирует населенность, которая, в свою очередь, создает условия для роста импульсов сигнала. Количество импульсов может быть порядка 100, так что для суммарного интервала времени необходим высокоточный эффективный алгоритм счета.

Будем конструировать метод нахождения приближенного решения этой системы. Увеличение скорости счета достигается путем гиперболизации, т.е. добавлением второй производной по времени с малым параметром. При гиперболизации мы добавили еще и затухание. Будем рассматривать отдельно гиперболизованную систему уравнений для функции $U(r,z)$:

$$\mu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (i + \sqrt{\mu} + \alpha_p\mu)\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial U}{\partial r} - i\alpha_p U + f(|U|^2)U, \tag{59}$$

$$f(|U|^2) = i\gamma_p N + \beta_p N + (c_p T + d_p(I_p + g_j I_j)). \tag{60}$$

Введем две дополнительные функции H и G и представим гиперболизованное уравнение в виде системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями U, H и G:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{i\sqrt{\varkappa}}{r}\frac{\partial rH}{\partial r} - \alpha_p U - iG, \quad \mu\frac{\partial H}{\partial z} = -(i + \sqrt{\mu})H + i\sqrt{\varkappa}\frac{\partial U}{\partial r}. \tag{61}$$

Для функции G получим уравнение, сводя эту систему к гиперболизованному уравнению (59). Для этого продифференцируем первое из уравнений (61) по z, умножим результат на μ:

$$\mu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -i\frac{\sqrt{\varkappa}}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(\mu\frac{\partial H}{\partial z}\right) - \mu\alpha_p\frac{\partial U}{\partial z} - i\mu\frac{\partial G}{\partial z}. \tag{62}$$

Сделаем замену под знаком производной по r, используя второе уравнение системы (61). Получим

$$\mu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -i\frac{\sqrt{\varkappa}}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\left(-(i+\sqrt{\mu})H + i\sqrt{\varkappa}\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \mu\alpha_p\frac{\partial U}{\partial z} - i\mu\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Заменим в силу первого уравнения системы $\dfrac{\sqrt{\varkappa}}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}rH$:

$$\mu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\left(i+\sqrt{\mu}+\alpha_p\mu\right)\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial U}{\partial r} - (i+\sqrt{\mu})\alpha_p U - i(i+\sqrt{\mu})G + -i\mu\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Это уравнение совпадает с гиперболизованным уравнением (59), если функция удовлетворяет уравнению

$$\mu\frac{\partial G}{\partial z} + (i+\sqrt{\mu})G = i\sqrt{\mu}\alpha_p U + if(|U|^2)U. \tag{63}$$

Уравнение для функции H, да и сама функция имеют смысл релаксации потоков с релаксационным параметром $\sqrt{\mu}$. Уравнение для функции G задает релаксацию части исходного оператора, отвечающую за стабилизацию расплывания волнового пакета из-за нелинейного закона дисперсии в соответствии с разложением исходного дисперсионного уравнения в ряд по степеням амплитуды U.

Гиперболизованное уравнение для функции U_j расписывается аналогично.

При гиперболизации мы добавили еще и затухание, и будем рассматривать гиперболизованное уравнение для температуры:

$$\mu\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (1+\sqrt{\mu}+\gamma_T\mu)\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\varkappa_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial r} + f_T(|U|^2), \tag{64}$$

$$f_T(|U|^2) = \alpha_T(1-N)I_p. \tag{65}$$

Введем три дополнительные функции H_z, H_r и G_T и представим гиперболизованное уравнение в виде системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями T, H_z, H_r и G_T:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sqrt{\varkappa_z}\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\sqrt{\varkappa_r}}{r}\frac{\partial rH_r}{\partial r} - \gamma_T T + G_T, \quad \mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = -(1+\sqrt{\mu})H_z + \sqrt{\varkappa_z}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{66}$$

$$\mu\frac{\partial H_r}{\partial t} = -(1+\sqrt{\mu})H_r + \sqrt{\varkappa_r}\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{67}$$

Для функции G_T получим уравнение, сводя эту систему к гиперболизованному уравнению (64):

$$\mu\frac{\partial G_T}{\partial t} + (1+\sqrt{\mu})G_T = -(1+\sqrt{\mu})\gamma_T T - f_T(|U|^2).$$

Уравнение для функции H_r и H_z, да и сами функции имеют смысл релаксации потоков тепла с релаксационным параметром $\sqrt{\mu}$. Уравнение для функции G_T задает релаксацию части исходного оператора, отвечающую за стабилизацию расплывания теплового пакета из-за нелинейного закона дисперсии в соответствии с разложением исходного дисперсионного уравнения в ряд по степеням амплитуды U.

Уравнение для населенности (56) осталось без изменений.

4. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА

В работе [46] использована численная схема, успешно применявшаяся в [6, с. 35], и сводящаяся к решению нелинейного уравнения относительно $|E(x,t)|^2$ отдельно для каждой точки x вместо решения системы нелинейных уравнений сразу для всех x.

Наиболее эффективным из нескольких опробованных алгоритмов счета оказался алгоритм типа предиктор-корректор, приведенный ниже.

Введем в пространстве (r,z,t) равномерные по каждому направлению расчетные сетки с целочисленными индексами

$$\omega_c = \{r_i = ih_r,\ 0 \le i \le N,\ z_k = kh_z,\ 0 \le k \le K\ t_j = jh_t,\ 0 \le j \le M\}.$$

Для простоты обозначений для функций U, U_j, H, H_j, G, G_j, чтобы не таскать многоиндексные формулы, опишем переход со слоя $z = 0$ на слой $z = h_z$.

Чтобы сократить время счета, будем производить вычисления с максимально возможными шагами h_r. Для этого при счете производных по r используем пятиточечные формулы, имеющие порядок аппроксимации $O(h_r^4)$ и позволяющие векторизовать процес вычисления производных.

Проинтегрируем линейные уравнения (61), (63) по z в соответствующих пределах, а получившиеся интегралы от быстро осциллирующих функций вычислим по формуле Филона. Сначала считаются $H(z/2)$, $G(z/2)$, а затем $U(z)$. Включенные в исходные уравнения затухания позволяют считать “медленные” сомножители подынтегральных функций постоянными, равными значениям этих функций в некоторых выбранных фиксированных точках z:

$$U(z) = U(0)e^{-\alpha_p z} - i\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{r}\frac{\partial rH}{\partial r} + G\right)\left(\frac{z}{2}\right)\frac{1}{\alpha_p}\left(1 - e^{-\alpha_p z}\right), \tag{68}$$

$$H(z/2) = H(0)e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu} - i\sqrt{\varkappa}\frac{\partial U(0)}{\partial r}\frac{1}{i+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu}\right), \tag{69}$$

$$G(z/2) = G(0)e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu} - i\left(\sqrt{\mu}\alpha_p U(0) + f(|U(0)|^2)\right)\frac{1}{i+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu}\right), \tag{70}$$

$$U_j(z) = U_j(0)e^{-\alpha_j z} - i\left(\frac{\sqrt{\varkappa_j}}{r}\frac{\partial rH_j}{\partial r} + G_j\right)\left(\frac{z}{2}\right)\frac{1}{\alpha_j}\left(1 - e^{-\alpha_j z}\right), \tag{71}$$

$$H_j(z/2) = H_j(0)e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu} - i\sqrt{\varkappa_j}\frac{\partial U_j(0)}{\partial r}\frac{1}{i+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu}\right), \tag{72}$$

$$G_j(z/2) = G_j(0)e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu} - i\left(\sqrt{\mu}\alpha_j U_j(0) + f_j(|U(0)|^2)\right)\frac{1}{i+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(i+\sqrt{\mu})z/2\mu}\right). \tag{73}$$

Соответственно для функции T переход сделан со слоя $t = 0$ на слой $t = h_t$:

$$T(t) = T(0)e^{-\gamma_T t} + \left(\sqrt{\varkappa_z}\frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{\sqrt{\varkappa_r}}{r}\frac{\partial rH_r}{\partial r} + G_T\right)\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{\gamma_T}\left(1 - e^{-\gamma_T t}\right), \tag{74}$$

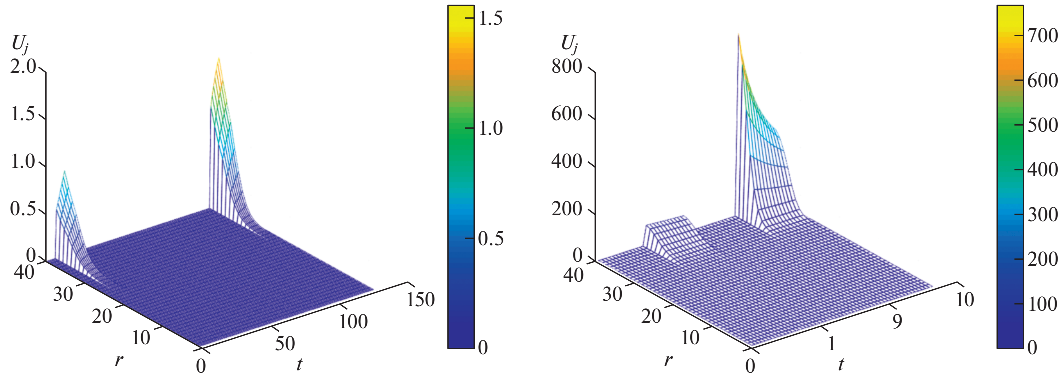
$$H_z(t/2) = H_z(0)e^{-(1+\sqrt{\mu})t/2\mu} + \sqrt{\varkappa_z}\frac{\partial T(0)}{\partial z}\frac{1}{1+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(1+\sqrt{\mu})t/2\mu}\right), \tag{75}$$

$$H_r(t/2) = H_r(0)e^{-(1+\sqrt{\mu})t/2\mu} + \sqrt{\varkappa_r}\frac{\partial T(0)}{\partial r}\frac{1}{1+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(1+\sqrt{\mu})t/2\mu}\right), \tag{76}$$

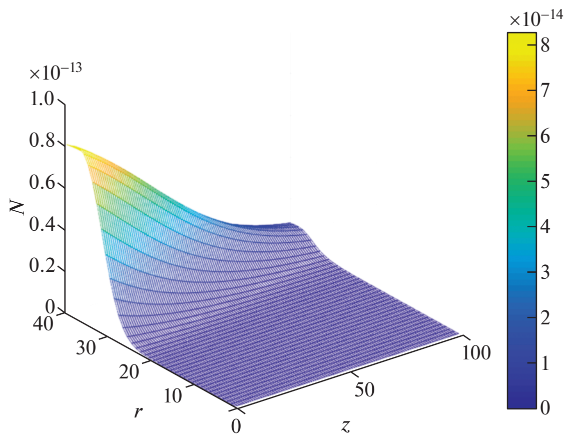
$$G_T(t/2) = G_T(0)e^{-(1+\sqrt{\mu})t/2\mu} - (FT(0) + (1+\sqrt{\mu})\gamma_T T(0))\frac{1}{1+\sqrt{\mu}}\left(1 - e^{-(1+\sqrt{\mu})t/2\mu}\right). \tag{77}$$

Счет функции $N(t)$ ведется по формулам

$$N(t) = (N(0) + IN_1(0))IN(t)IN(0) + IN_1(t), \tag{78}$$



Фиг. 7. Слева – выходящий сигнал от первого и последнего из последовательности 100 импульсов, справа – из 10.



Фиг. 8. Населенность при последнем импульсе.

$$IN(s) = e^{-\frac{t}{2}(1+\sigma_p I_p+\sigma_j I_j)}(s), \quad IN_1(s) = \frac{t}{2}(I_p+\sigma_{1j}I_j)(s), \tag{79}$$

дающим порядок аппроксимации $O(h_t^3)$.

После нахождения $U(z)$, $U_j(z)$, $T(t)$, $N(t)$ на верхних слоях соответственно по их значениям считаются $H(z)$, $G(z)$ и т.д.

Таким образом, полностью заканчиваются переходы на верхние слои и готовы все данные для следующего шага.

Отметим, что во всех формулах, по которым велись вычисления, явно присутствует затухание, иными словами, алгоритм обладает внутренней устойчивостью.

Чтобы исключить возможность образования неустойчивости счета из-за нарастания случайных фаз (см. [6]) в (69) и (70) отношение $z/2\mu$ должно быть кратным πN.

Так как у нас для U и $H \approx \partial U/\partial r$ считаются отдельные уравнения, то при необходимости легко моделируются условия прохождения световой волны через границу среды (см. [58], [59]). Обзор решений параболических уравнений в различных функциональных пространствах приведен в [60].

Выбор параметра μ осуществлялся опытным путем: наращиванием от минимального значения 10^{-10} до появления изменений значений функций при $r = 0$. На фиг. 7 приведены графики распределения амплитуды сигнала первого и последнего импульса для разного количества импульсов усиливаемого сигнала. На фиг. 8 приведен график населенности зарядов вдоль кристалла в конечный момент времени прохождения пачки импульсов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Грубую оценку малого параметра гиперболизации μ можно получить, рассматривая главную часть уравнения (59). Условие устойчивости ее разностной аппроксимации дает оценку соотношения шагов

$$\Delta z \leq C\sqrt{\mu}\Delta r.$$

Для того чтобы при вычислениях получить хорошее приближение к решению соответствующего НУШ, μ должно быть выбрано достаточно малым. Взяв $\mu \approx \Delta r^2$, мы получаем классическую оценку шагов, характерную для нестационарного уравнения Шрёдингера. Выбирая $\mu \approx \Delta r$, мы получаем $\Delta z \approx \Delta r^{3/2}$, т.е. ту же оценку, что и в [21], [22]. Проблема состоит в выборе константы C. В настоящей работе проекционным спектральным методом получено предельное значение этой константы (48).

Отметим также, что изложенные в работе методы легко обобщаются на многомерный случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dodd R.K., Eelbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.* Solitons and Nonlinear Wave Equations. M.: Mir, 1988. 694 pp.
2. *Malomed B.A.* Nonlinear Schrodinger equations / Encyclopedia of Nonlinear Science / Ed. A. Scott. New York: Routledge, 2005. P. 639–643.
3. *Маломед Б.А.* Контроль солитонов в периодических средах. М.: Физматлит, 2009. 192 с.
4. *Sulem C., Sulem P.-L.* The nonlinear Schroedinger equation, self-focusing and wave collapse. Springer, 1999 (ISBN 0387986111).
5. *Boyd R.W., Lukishova S.G., Shen Y.R. (Eds.)* Self-focusing: past and present fundamentals and prospects. Springer Science+Business Media, LLC, 2009. pp. 605.
6. *Юнаковский А.Д.* Моделирование нелинейного уравнения Шрёдингера. Н. Новгород, 1995. 160 с.
7. *Шер Э.М., Юнаковский А.Д.* Построение численного алгоритма для векторной системы Захарова с затуханием // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 11. С. 70–77.
8. *Litvak A.G., Petrova T.A., Fraiman G.M., Sher E.M., Yunakovsky A.D.* Numerical simulation of wave collapses // Phys. D. 1991. V. 52. № 1. P. 36–48.
9. *Rvachev V.L., Rvachev V.A.* Approximation theory and atomic functions. M.: Knowledge, 1978. 64 p.
10. *Chekhovskoy I.S., Paasonen V.I., Shtyrina O.V., Fedoruk M.P.* Numerical approaches to simulation of multi-core fibers // J. of Comput. Phys. 2017. V. 334. P. 31–44.
11. *Chekhovskoy I.S., Shtyrina O.V., Wabnitz S.* Finding spatiotemporal light bullets in multicore and multimode fibers // Optics Express. 2020. V. 28. № 6. P. 7817–7828.
12. *Adam J.C., Serveniere A.G., Laval D.* Efficiency of resonant absorption of electromagnetic waves in a inhomogeneous plasma // Phys. Fluid. 1982. V. 25. № 2. P. 376–383.
13. *Antoine X., Arnold A., Besse Ch., Ehrhardt M., Scheadle A.* Review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and nonlinear Schryodinger equations // Commun. Comput. Phys. 2008. V. 4. № 4. P. 729–796.
14. *Taha T.R., Ablowitz M.J.* Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical nonlinear Schreodinger equation // J. of Comput. Phys. 1984. V. 55. № 2. P. 203–230.
15. *Ismail M.S., Taha T.R.* Numerical simulation of coupled nonlinear Schreodinger equation // Special Iss. of J. Math. and Comput. in Simulat. on “Optical Solitons”. 2001. V. 56. № 6. P. 547–562.
16. *Taha Thiab R., Xiangving Xu.* Parallel split-step fourier methods for the coupled nonlinear Schreodinger type equations // J. of Supercomput. 2005. V. 32. P. 5–23.
17. *Bogomolov Ya.L., Yunakovsky A.D.* Slip-step Fourier Method for Nonlinear Schredinger Equation // Proceed. of Inter. Conf. Day of Diffract. 2006, May 30–June 2, 2006, Saint-Petersburg, Russia Univer. Petropolitana, p. 34–42.
18. *Holden H., Karlsen K.H., Lie K.-A., Risebro N.H.* Splitting methods for partial differential equations with rough solutions. Analysis and MATLAB programs // European Math. Soc. 2010. P. 235.
19. *Bogomolov Ya.L., Pelinovzky E.N., Yunakovsky A.D.* Comparison of different variants of the spectral splitting method for solving the nonlinear Schrödinger equation // Preprint № 275. Nizhny Novgorod, IAP AS USSR. 1990. 32 p.
20. *Давыдов А.А., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В.* Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 12. Р. 2275–2284.

21. *Луцкий А.Е., Четверушкин Б.Н.* Компактная квазигазодинамическая система для моделирования вязкого сжимаемого газа // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 4. С. 588–592.
22. *Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н.* Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 1266–1275.
23. *Четверушкин Б.Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 11. С. 33–52.
24. *Milani A.* Singular limits of quasi-linear hyperbolic sistems in a bounded domain of R^3 with applications to Maxwell's equations // Pacific J. of Math. 1985. V. 116. № 1. P. 111–129.
25. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004. 332 с.
26. *Кудинов В.А.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э.М. Карташова. Изд. стереотип. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2015. 280 с.
27. *Баумейстер К.* Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1069. № 4. С. 112–119. Baumeister K., Hamill T. "Hyperbolic equation of heat conduction. Solution to the problem of a semi-infinite body", Heat transfer. 1069. No. 4. p. 112–119.
28. *Жуковский К.В.* Гармоническое решение гиперболического уравнения теплопроводности и его связь с уравнением Гюйера–Крумхансля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ., астрон. 2018. № 1. С. 45–51.
29. *Moler C., Van Loan Ch.* Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later // SIAM Rev. 2003. V. 45. № 1. P. 3–49.
30. *Gavrilyuk I.P.* Approximation of the operator exponential and applications // Comput. Meth. Appl. Math. 2007. V. 7. № 4. P. 294–320.
31. *Chu E., George A.* Inside the FFT black box. Serial and parallel fast fourier transform algorithms. CRC Press Boca Raton London New York Washington, D.C. 2000. 308 p.
32. *Rao K.R., Kim D.N., Hwang J.-J.* Signals and communication technology (auth.) – Fast fourier transform – Algorithms and applications. Springer Netherlands, 2010. 423 p.
33. *Gil'denburg V.B., Litvak A.G., Yunakovsky A.D.* The dynamics of a high frequency discharge in a wave beam // J. Phys. 1979. V. 40. № 7. P. 215–216.
34. *Fraiman G.M., Sher E.M., Laedke W., Yunakovsky A.D.* Long-term evolution of strong 2-D NSE turbulence // Phys. D. 1995. V. 87. P. 325–334.
35. *Gildenburg V.B., Petrova T.A., Yunakovsky A.D.* Steady-state gas discharges in focused wave beams // Phys. D. 1995. V. 87. P. 335–338.
36. *Юнаковский А.Д.* Гиперболизация нелинейного уравнения Шрёдингера. The 18 Inter. Conf. Differential and Functional Differential Equations Moscow, Russia, August 13–20. 2017. P. 216–217.
37. *Юнаковский А.Д.* Гиперболизация нелинейного уравнения Шрёдингера. Сб. материалов международ. конф. КРОМШ-2017. XXVIII Крымская Осенняя Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Секции 1–4. С. 118–119.
38. *Юнаковский А.Д.* Математическое моделирование лазерного усилителя. Сб. материалов международ. конф. КРОМШ-2020. XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Симферополь: Полипринт, 2020. С. 873–276.
39. *Юнаковский А.Д.* Аттракторы в гиперболизованных НУШ. Сб. материалов международ. конф. КРОМШ-2021. XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Симферополь: Полипринт, 2021. С. 87.
40. *Жарова Н.А., Литвак А.Г., Петрова Т.А., Сергеев А.М., Юнаковский А.Д.* О новом типе самовоздействия плазменных колебаний // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. № 1. С. 12–15.
41. *Жарова Н.А., Литвак А.Г., Петрова Т.А., Сергеев А.М., Юнаковский А.Д.* Коллапс и множественные дробления нелинейных волновых структур // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 9. С. 1137–1142.
42. *Litvak A.G., Petrova T.A., Sergeev A.M., Yunakovsky A.D.* On The Self-effect of Two-dimentional Gravity Wave Packets on The Deep Water Surface. Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. Ed. by R.Z. Sagdeev. Harwood Acad. Publ. New York. V. II. 1984. P. 861–871.
43. *Litvak A.G., Petrova T.A., Sergeev A.M., Zharova N.A., Yunakovsky A.D.* Self-interaction of plasma oscillations with anomalous dispersion // Montvai Contributed Papers. 1985. V. 9F. Part II. P. 346.
44. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002. 315 с.
45. *Yunakovsky A.D., Bogomolov Ya.L.* Hyperbolization of an unbounded Schredinger-type operator. Supercomputer technologies of mathematical modeling. IV Inter. Conf. Moscow, Russia, June 19–21. 2019. Abstracts, P. 38.
46. *Yunakovsky A.D., Bogomolov Ya.L., Sapogova N.V.* On hyperbolized nonlinear Schredinger type equations // J. of Phys.: Conf. Ser. 1392 (2019) 012027 IOP Publ.
https://doi.org/10.1088/1742-6596/1392/1/012027

47. *Фильченков С.Е.* Неустойчивость периодических решений нелинейных волновых структур // Физика плазмы. 1987. Т. 13. № 8. С. 961–966.

48. *Фильченков С.Е., Фрейман Г.М., Юнаковский А.Д.* Численное исследование устойчивости поверхностных волн. Тез. докл. Всесоюз. совещания по проблеме цунами, сент. 1987. Шушенское. Красноярск. 1987. С. 119–121.

49. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 344 с.

50. *Ehrhardta M., Mickensb R.E.* Solutions to the discrete Airy equation: application to parabolic equation calculations // J. of Comput. and Appl. Math. 2004. V. 172. P. 183–206.

51. *Klein P., Antoine X., Besse C., Ehrhardt M.* Absorbing boundary conditions for solving N-Dimensional stationary Schrödinger equations with unbounded potentials and nonlinearities // Commun. Comput. Phys. 2011. V. 10. № 5. P. 1280–1304.

52. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. С. 374.

53. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1987. 296 с.

54. *Agafontsev D.S., Zakharov V.E.* Growing of integrable turbulence: new results. XXX Науч. сессия Совета РАН по нелинейной динамике; Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 20–21 декабря, 2021. С. 41.

55. *Berry P.A., Schepler K.L.* High-power, widely-tunable Cr2+:ZnSe master oscillator power amplifier systems // Optic Express. 2010. V. 18. № 14. P. 15062–15072.

56. *Masaki Y., Norihito S., Satoshi W.* 50 mJ/pulse, electronically tuned Cr:ZnSe master oscillator power amplifier // Optic Express. 2017. V. 25. № 26. P. 32948–32956.

57. *Leshchenko V.E., Talbert B.K., Lai Y.H., Li Sha, Tang Y., Hageman S.J., Smith G., Agostini P., DiMauro L.F., Blagal C.I.* High-power few-cycle Cr:ZnSe mid-infrared source for attosecond soft x-ray physics // Optica. 2020. V. 7. № 8. P. 981–988.

58. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003. 240 с. SBN 5-9221-0347-4.

59. *Терёшин Е.Б., Трофимов В.А., Федотов М.В.* Консервативная разностная схема для задачи распространения фемтосекундного импульса в нелинейном фотонном кристалле с неотражающими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 1. Р. 161–171.

60. *Ashyralyev A., Sobolevskii P.E.* Well-posedness of parabolic difference equations. Transl. from Russ. by A. Jacob. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1994. P. 366.

EDN: LJEPQX
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1158–1179

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 533.95

СТАЦИОНАРНЫЕ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ[1)]

© 2022 г. М. Б. Гавриков[1,*], А. А. Таюрский[1,2,]**

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия
[2] 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия
**e-mail: mbgavrikov@yandex.ru*
***e-mail: tayurskiy2001@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
Переработанный вариант 13.01.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

В работе решен ряд математических задач теории ионизации применительно к процессам в стационарных плазменных двигателях. Рассмотрены две основные математические модели ионизации – гидродинамическая и кинетическая. В центре внимания находится вопрос о существовании ионизационных колебаний (бривинг-мод). На базе одномерной гидродинамической модели решена краевая задача для стационарных уравнений ионизации. Доказаны ее однозначная разрешимость и отсутствие бривинг-мод в случае знакоопределенных скоростей атомов и ионов. В практически важном случае, когда в области течения ионная скорость имеет единственный нуль с положительной производной, доказано, что стационарная краевая задача имеет счетное число решений, и сформулировано необходимое и достаточное условие существования бривинг-мод. Предложен численный алгоритм исследования бривинг-мод. Дано аналитическое решение уравнений ионизации в случае постоянных скоростей атомов и ионов, а полученные формулы применены к аналитическому решению задачи Коши, краевой и смешанной задач в простейших областях. В случае одномерной кинетической модели ионизации численно показано существование бривинг-мод и проведен краткий анализ полученных результатов. Библ. 18. Фиг. 5.

Ключевые слова: ионизационные колебания, бривинг-моды, характеристики.

DOI: 10.31857/S0044466922070043

1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже рассматриваются математические задачи, связанные с ионизацией плазмы, применительно к процессам, происходящим в стационарных плазменных двигателях (СПД). СПД были предложены А.И. Морозовым и с 1971 г. успешно и безальтернативно используются для коррекции орбит космических летательных аппаратов. История вопроса изложена в [1]–[4].

Экспериментально фиксируется принципиально важный эффект низкочастотных (10–30 кГц) колебаний разрядного тока в камере СПД. С практической точки зрения этот эффект носит паразитический характер, а механизм указанных осцилляций неясен, но вероятной причиной, предположительно, являются возможные колебания концентраций атомов (n_a) и ионов ксенона (n_i) в СПД при ионизации. С другой стороны, особый интерес представляют стационарные течения плазмы в СПД. Целью работы являются, во-первых, нахождение стационарных решений нелинейных уравнений одномерной ионизации и, во-вторых, анализ причин появления периодических колебаний концентраций n_i, n_a, подчиняющихся системе

$$\partial n_a/\partial t + \partial(n_a v_a)/\partial z = -\beta n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial t + \partial(n_i v_i)/\partial z = \beta n_a n_i, \quad 0 \le z \le L, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

при определенных начальных и граничных условиях для n_a, n_i (см. ниже). Здесь $v_a(z)$, $v_i(z)$ – известные продольные скорости атомов и ионов Xe, $\beta = \text{const} > 0$ – заданная величина (коэффициент ионизации), L – длина установки СПД. Удивительным и требующим математического

[1)]Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2019-1623.

объяснения является факт существования периодических по времени колебаний концентраций n_i и n_a, получаемых при решении системы (1) для непериодических входных данных – функций $v_a(z)$, $v_i(z)$ и начальных и граничных условий для n_i и n_a. Доминирующее на сегодняшний день в научной литературе объяснение этого феномена основано на модели "хищник–жертва" Лотки–Вольтерра [5], [6], которая описывает динамику численности популяций жертв (N_1) и хищников (N_2), питающихся жертвами, посредством пары обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$dN_1/dt = -\gamma_1 N_1 N_2 + \mu_1 N_1, \quad dN_2/dt = \gamma_2 N_1 N_2 - \mu_2 N_2, \quad \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2 > 0. \tag{2}$$

В случае ионизации плазмы "жертвами" считаются атомы ксенона, а "хищниками" – электроны, которые в силу условия квазинейтральности плазмы отождествляются с ионами, причем $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta > 0$ – коэффициент ионизации, а регенеративные члены $\mu_1 N_1$, $\mu_2 N_2$ обусловлены переносом атомов и ионов. При этом под N_1 и N_2 понимаются средние по отрезку $[0, L]$ концентрации атомов и ионов ксенона соответственно: $N_1 = \langle n_a \rangle$, $N_2 = \langle n_i \rangle$, где $\langle f \rangle = L^{-1}\int_0^L f(z)dz$ для любой интегрируемой на $[0, L]$ функции f. Впервые на феноменологическом уровне модель (2) использовалась для объяснения временных колебаний концентраций n_a и n_i в [7], [8]. В частности, в работе [8] считалось $\mu_1 = V_a/L$, $\mu_2 = V_i/L$, где V_a, V_i – известные, не зависящие от времени скорости атомов на входе в СПД и ионов на выходе. Решениями уравнений Лотки–Вольтерра (2) являются [6] периодические кривые (циклы) на плоскости (N_1, N_2), расположенные в первом квадранте $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ и стягивающиеся к единственной особой точке этой системы $N_1^0 = \mu_2/\gamma_2$, $N_2^0 = \mu_1/\gamma_1$. Предельное значение ω_∞ частот циклов при их стягивании к особой точке этой системы (2) проще всего получить решением линеаризованных в окрестности особой точки (N_1^0, N_2^0) уравнений системы (2). Оказывается, предельная частота $\omega_\infty = (\mu_1\mu_2)^{1/2}$ не зависит от γ_1, γ_2 и для предположений работы [8] дает значение $\omega_\infty = (V_1V_2)^{1/2}/L$, что примерно совпадает с экспериментально получаемой частотой колебаний разрядного тока в СПД. Этот факт совпадения экспериментальной частоты с частотой, вычисляемой по феноменологической модели (2), имеющий, не исключено, случайный характер, лежит в методологической основе и является оправданием применения модели Лотки–Вольтерра к анализу ионизационных колебаний плазмы в СПД. Дальнейшее развитие модели "хищник–жертва" применительно к процессам в СПД содержится в [9], [10]. Так, в [10] для анализа процесса ионизации предложена двухзонная модель "хищник–жертва", в которой количество уравнений системы (2) увеличивается вдвое. В работе [11] ионизационные колебания концентраций n_i, n_a впервые были названы "бривинг"-модами (breathing mode). Основная проблема при использовании модели Лотки–Вольтерра для анализа ионизационных колебаний плазмы в СПД сводится к нахождению математически корректного вывода феноменологических уравнений (2) из законов сохранения (1), что до сих пор никем не было сделано. В работе [12] редукция (1) $\Rightarrow$ (2) получалась осреднением уравнений (1) по отрезку $[0, L]$ в каждый момент времени, однако при этом использовались неочевидные допущения: $\langle n_i n_a \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_a \rangle$, $\langle n_a \rangle = n_a(t, 0)$, $\langle n_i \rangle = n_i(t, L)$, $n_a(t, L) \equiv 0$, $n_i(t, 0) \equiv 0$.

Проведенное ниже исследование показывает, что существование ионизационных колебаний (бривинг-мод) в СПД обусловлено фундаментальными математическими свойствами системы (1) и скорее всего никак не связано с феноменологической моделью Лотки–Вольтерра.

Как показывают численные расчеты, в случае знакоопределенных скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными граничными условиями при $t \to +\infty$ выходит на установление, стремясь, как и следовало ожидать, к стационарному состоянию, определяемому системой (1). Как следствие, в этом случае бривинг-моды отсутствуют. Стационарные решения системы (1) играют особую роль, поскольку они определяют установившиеся режимы работы СПД. В разд. 2 проведено интегрирование в квадратурах стационарных уравнений (1). Показано, что краевая задача для стационарной системы (1) в случае знакоопределенных скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ всегда имеет, и притом единственное, решение. В случае знакопеременных скоростей ситуация кардинально меняется. Ограничиваясь физически важным случаем $v_a(z) > 0$, $z \in [0, L]$ (чаще всего считается $v_a(z) \equiv v_a > 0$), установлено, что краевая задача для стационарной системы (1) имеет счетное число решений, если $v_i(z)$ принадлежит классу знакопеременных функций, имеющих единственный нуль $z_0 \in (0, L)$, для которого $v_i'(z_0) > 0$. Скорость $v_i(z)$ из указанного класса функций особенно актуальна для анализа процессов в СПД. Экспериментально [13] показано, что в камере СПД всегда возникает двумерная прианодная зона, в которой продольная ионная скорость отрицательна, а вне этой зоны – положительна. Применительно к одномерной модели приходим к скорости $v_i(z)$ указанного выше типа. В частности, для таких скоростей $v_i(z)$, как показывают расчеты, могут существовать бривинг-моды. Более того, стационарные решения для скоростей $v_i(z)$, не входящих в указанный выше класс, отсутствуют.

В разд. 3 в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$ нелинейная система (1) решается аналитически. Полученные интегральные аналитические выражения для неизвестных n_a, n_i позволяют решить аналитически задачу Коши в полуплоскости $t \ge 0$ и простейшие краевые (в полуплоскости $z \ge 0$) и смешанные (в первом квадранте $t \ge 0$, $z \ge 0$) задачи для этой системы. Методы, развитые в этом разделе, позволяют решать и другие начально-краевые задачи для системы (1) в случае постоянных скоростей v_a, v_i. Из выведенных в разд. 3 формул для решения системы (1), в частности, следует отсутствие бривинг-мод в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$.

В разд. 4 для случая $v_a = \text{const} > 0$ и знакопеременных скоростей $v_i(z)$, имеющих единственный нуль $z_0 \in (0, L)$, для которого $v_i'(z_0) > 0$, обсуждается причина возникновения ионизационных колебаний (бривинг-мод) при решении системы (1). В этом случае прямая $z = z_0$ является характеристикой системы (1), а необходимое и достаточное условие существования бривинг-мод состоит в периодичности значений функций n_i, n_a на указанной характеристике, $n_i(t) = n_i(t, z_0)$, $n_a(t) = n_a(t, z_0)$ при $t \to +\infty$. В разд. 4 выведено ОДУ, которому удовлетворяет функция $n_i(t)$, совпадающее с условием разрешимости [14] для квазилинейных систем уравнений в частных производных, и указана процедура нахождения функции $n_a(t)$. Оказывается, значения n_i, n_a на характеристике $z = z_0$ подчиняются системе ОДУ более сложной, чем уравнение Лотки–Вольтерра. Сами функции $n_i(t)$, $n_a(t)$ находятся численным решением уравнений ионизации (1) посредством предложенной в работе разностной схемы. Аналитическое исследование существования и свойств функций $n_i(t)$, $n_a(t)$ выходит за рамки настоящей работы.

Недостаток модели ионизации (1) в том, что скорость ионов v_i стационарная и задается, а не ищется из уравнения движения ионов. Поэтому справедливость выводов, которые делаются на основе анализа решений системы (1) (в том числе о наличии ионизационных колебаний), в значительной степени зависит от того, насколько правильно выбрана скорость v_i. Скорость ионов, определяемая из уравнения движения ионов, вообще говоря, зависит от времени, $v_i = v_i(t, z)$, что не учитывается в системе (1). Поэтому в разд. 5 существование ионизационных колебаний устанавливается на базе численного исследования посредством метода макрочастиц значительно более точной модели ионизации, состоящей из кинетического уравнения для ионов, двигающихся в заданном постоянном и однородном электромагнитном поле в СПД, и уравнения переноса атомов ксенона с учетом ионизации. При этом индукционные электромагнитные поля, порождаемые плазменными токами в СПД, и рассеяние электронов и ионов на боковых стенках камеры считаются пренебрежимо малыми.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ

Ниже ограничимся исключительно важным случаем $v_a(z) > 0$ и даже еще более жестким ограничением $v_a = \text{const} > 0$.

В случае $\partial/\partial t = 0$ система уравнений ионизации принимает вид:

$$d(n_a v_a)/dz = -\beta n_i n_a, \quad d(n_i v_i)/dz = \beta n_i n_a, \quad z \ge 0. \tag{3}$$

Складывая почленно уравнения (3), приходим к первому интегралу системы (3):

$$n_a v_a + n_i v_i \equiv C = \text{const}. \tag{4}$$

Из (4) следует $n_a v_a = C - u$, $u \underset{\text{def}}{=} u_i v_i$. Подставляя эти выражения во второе уравнение (3), получаем для нахождения $u(z)$ ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

$$du/dz = (C - u)u\beta v_i^{-1}(z)v_a^{-1}(z). \tag{5}$$

Откуда имеем

$$\int \frac{du}{(C-u)u} = \int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)} \underset{C\neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{C}\ln\left|\frac{u}{C-u}\right| = \int \frac{\beta dz}{v_i(z)v_a(z)}. \tag{6}$$

Если $C = 0$, то верно

$$u = \left(\int \beta v_i^{-1}(z)v_a^{-1}(z)dz\right)^{-1}. \tag{7}$$

Уравнение (5) имеет также два особых решения $u \equiv C$, $u \equiv 0$. Первое не имеет физического смысла, второе дает $n_i \equiv 0$, $n_a = C/v_a(z)$ и соответствует случаю, когда ионизация отсутствует. Анализ формул (6) и (7) зависит от количества и расположения нулей $v_i(z)$, которые входят в знаменатель подынтегрального выражения в (6) и (7).

Допустим на $[0, L]$ скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ знакопостоянные. Тогда из (6) следует

$$\begin{gathered} u(z) = CDe^{F(z)}[1 + De^{F(z)}]^{-1}, \quad n_i(z) = CDe^{F(z)}v_i^{-1}(z)[1 + De^{F(z)}]^{-1}, \\ n_a(z) = Cv_a^{-1}[1 + De^{F(z)}]^{-1}, \quad F(z) = C\beta\int_0^z v_i^{-1}(z)v_a^{-1}(z)dz, \end{gathered} \tag{8}$$

где $C \neq 0$, D – произвольные константы. Из $n_a(z) \geq 0$ и $v_a(z) > 0$ следует $C(1 + D\exp F(z)) > 0$, и, значит, знак D совпадает со знаком $v_i(z)$. Константы C и D в формуле (8) ищутся из граничных условий для n_a, n_i. Если $v_i(z) > 0$, то на левой границе $z = 0$ задаются $n_a(0) = n_{a0} > 0$, $n_i(z) = n_{i0} > 0$. Если $v_i(z) < 0$, то на левой границе задается $n_a(0) = n_{a0} > 0$, а на правой границе $z = L$ задается $n_i(L) = n_{iL} > 0$.

Если $v_i(z) > 0$ на $[0, L]$, то из (4) следует $C > 0$ и для неособого решения $D > 0$. Из (4) следует $C = n_{a0}v_a(0) + n_{i0}v_i(0)$, тогда из (8) выводим

$$D = C/(n_{a0}v_a(0)) - 1 = (n_{i0}/n_{a0})(v_i(0)/v_a(0)).$$

Итак, константы C и D в (8) однозначно определяются по граничным условиям, а краевая задача для системы (3) имеет, и притом единственное, решение.

Если $v_i(z) < 0$ на $[0, L]$, то исследование разрешимости краевой задачи для системы (3) более громоздкое. Краевые условия, согласно (8), дают следующее:

$$\begin{gathered} n_{a0}v_a(0) = C(1 + D)^{-1}, \quad n_{iL}v_i(L) = CD\exp[-C\beta F_0(L)][1 + D\exp[(-C\beta F_0(L))]^{-1}, \\ F_0(z) \underset{\text{def}}{=} \int_0^z \frac{dz}{v_a(z)|v_i(z)|} > 0. \end{gathered}$$

Обозначая $k_i = n_{iL}|v_i(L)| > 0$, $k_a = n_{a0}v_a(0) > 0$ и исключая $D = C/k_a - 1$, получаем для нахождения константы C трансцендентное уравнение:

$$f(C) \underset{\text{def}}{=} \exp[-C\beta F_0(L)] = k_a k_i (k_a - C)^{-1}(k_i + C)^{-1} \underset{\text{def}}{=} g(C). \tag{9}$$

Уравнение (9) всегда имеет решение $C = 0$. Другие решения, отличные от $C = 0$, могут существовать только при $-k_i < C < k_a$. На этом интервале функция $g(C)$, легко проверить, имеет единственный absmin в точке $C_0 = (k_a - k_i)/2$ и $g(-k_i + 0) = g(k_a - 0) = +\infty$. Поэтому из геометрических соображений легко следует, что при $g'(0) \neq f'(0) \Leftrightarrow k_i^{-1} - k_a^{-1} \neq \beta F_0(L)$ уравнение (9) имеет на $(-k_i, k_a)$ еще одно решение C, отличное от нуля. Для этого решения и константы $D = C/k_a - 1$ краевая задача для системы (3) имеет, и притом единственное, решение, задаваемое формулами (8). Если $g'(0) = f'(0)$, то прямое вычисление показывает, что $g''(0) > f''(0)$, и из геометрических соображений следует, что уравнение (9) имеет на $(-k_i, k_a)$ только нулевое решение. В этом случае стационарное решение системы (3) ищется по формуле (7), которая дает

$$n_i = -[D - \beta F_0(z)]^{-1}[v_i(z)]^{-1}, \quad n_a = -n_i v_i / v_a = -[D - \beta F_0(z)]^{-1}[v_a(z)]^{-1}.$$

Граничные условия при $z = 0$ для n_a и $z = L$ для n_i дают два уравнения для нахождения одной константы D:

$$k_i = -[D - \beta F_0(L)]^{-1}, \quad k_a = -D^{-1},$$

которые в силу условия $g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow k_i^{-1} - k_a^{-1} = \beta F_0(L)$ совместны и имеют единственное решение $D = -k_a^{-1}$. В частности, D отрицательно, и в формулах для n_i, n_a не приходится делить на нуль. Итак, при $v_i(z) < 0$ краевая задача для системы (3) тоже имеет, и притом единственное, решение.

Численное решение начально-краевой задачи для системы (1) по разностной схеме, предлагаемой ниже, со стационарными краевыми условиями в случае знакопостоянных $v_a(z)$, $v_i(z)$ показывает, что ее решение при $t \to +\infty$ сходится к стационарному решению системы (1), в частности, осцилляции концентраций n_i, n_a (бривинг-моды) отсутствуют.

Рассмотрим теперь случай знакопеременных ионных скоростей $v_i(z)$ на типичном примере $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $z_0 \in (0, L)$, $\alpha > 0$. Тогда $v_i(z_0) = 0$, $\alpha = v_i'(z_0) > 0$. Будем искать только такие стационарные решения, для которых $n_i(z)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком интервале, лежащем в $[0, L]$ (если это не так, то $n_i(z) \equiv 0$ на некотором интервале $[0, L]$ и, значит, на этом интервале процесс ионизации прекратился, что противоречит экспериментальным данным по СПД). Из первого интеграла (4), вычисленного в точке z_0, следует, что $C \geq 0$. Случай $C = 0$ приводит к физически абсурдным решениям (см. ниже). Поэтому считаем $C > 0$. Тогда стационарное решение вычисляется по формулам (6), примененным отдельно к полуинтервалам $[0, z_0)$ и $(z_0, L]$, и имеет вид

$$n_i(z) = \frac{CD_\pm |z - z_0|^\zeta}{\alpha(z - z_0)(1 + D_\pm |z - z_0|^\zeta)}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1 + D_\pm |z - z_0|^\zeta}, \quad \zeta = \frac{C\beta}{\alpha v_a}, \tag{10}$$

где константа D_+ действует в полуинтервале $(z_0, L]$, а константа D_- – в полуинтервале $[0, z_0)$. Граничное условие ставится только для n_a на левой границе $z = 0$: $n_a = n_{a0} > 0$. Поскольку $v_i(0) < 0 < v_i(L)$, то для n_i граничные условия на концах $z = 0$ и $z = L$ не нужны. Таким образом, для нахождения стационарного решения (10), удовлетворяющего заданному граничному условию, необходимо по одной константе n_{a0} найти три константы C, D_+, D_-.

Проведем следующее рассуждение. Пусть $n_i(z)$ бесконечно дифференцируема в окрестности z_0 и не все производные n_i в точке z_0 обращаются в нуль. Пусть $k \geq 0$ – наименьшее целое, для которого $n_i^{(k)}(z_0) \neq 0$. Поскольку $n_i \geq 0$ всюду в $[0, L]$, то с помощью формулы Тейлора (см. ниже) нетрудно показать, что k – четное. Пусть $k = 2\ell$, $\ell \geq 0$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$\begin{gathered} n_i(z) = \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}(z - z_0)^{2\ell} + r(z), \quad n_a(z) = n_a(z_0) + n_a'(z_0)(z - z_0) + R(z), \\ r(x) = o((z - z_0)^{2\ell}), \quad R = o(z - z_0), \quad z \to z_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Проинтегрируем стационарное уравнение неразрывности для n_i по отрезку $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$:

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{\partial n_i v_i}{\partial z} dz = \beta \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} n_i n_a dz.$$

Выражение слева равно

$$\int\limits_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\frac{\partial n_i v_i}{\partial z}dz = (n_i v_i)\Big|_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} = n_i(z_0+\varepsilon)v_i(z_0+\varepsilon) - n_i(z_0-\varepsilon)v_i(z_0-\varepsilon) =$$

$$= \alpha\varepsilon[n_i(z_0+\varepsilon) - n_i(z_0-\varepsilon)] = \alpha\varepsilon\left[2\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}\varepsilon^{2\ell} + r(z_0+\varepsilon) + r(z_0-\varepsilon)\right] =$$

$$= 2\alpha\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}\varepsilon^{2\ell+1} + \Delta(\varepsilon), \quad \Delta(\varepsilon) = \alpha\varepsilon[r(z_0+\varepsilon) + r(z_0-\varepsilon)],$$

где из (11) следует $\Delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2\ell+1})$, $\varepsilon \to 0$.

Выражение справа равно

$$\beta\int\limits_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} n_i n_a dz = \beta\int\limits_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}\left[\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}(z-z_0)^{2\ell} + r(z)\right][n_a(z_0) + n_a'(z_0)(z-z_0) + R(z)]dz =$$

$$= \beta n_a(z_0)\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}\int\limits_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon}(z-z_0)^{2\ell}dz + B(\varepsilon) = 2\beta n_a(z_0)\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell+1)!}\varepsilon^{2\ell+1} + B(\varepsilon),$$

где из явного вида для $B(\varepsilon)$ и (11) легко следует $B(\varepsilon) = o(\varepsilon^{2\ell+1})$, $\varepsilon \to 0$. Приравнивая выведенные выражения для правой и левой частей интегрального тождества, деля полученное равенство на $\varepsilon^{2\ell+1}$ и устремляя ε к нулю, имеем

$$2\alpha\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!} = 2\beta n_a(z_0)\frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell+1)!} \underset{n_i^{(2\ell)}(z_0)\neq 0}{\Longrightarrow} n_a(z_0) = \frac{\alpha}{\beta}(2\ell+1).$$

Подставляя найденное решение $n_a(z_0)$ во второе уравнение (10) в точке z_0, получаем $(\alpha/\beta)(2\ell+1) = C/v_a$, откуда получаем значение константы $C = \alpha v_a(2\ell+1)/\beta$ и равенство $\zeta = (2\ell+1)$. Поэтому первое уравнение (10) дает

$$z < z_0: \; n_i(z) = -\frac{CD_-}{\alpha}\frac{(z-z_0)^{2\ell}}{1 + D_-|z-z_0|^{2\ell+1}}, \qquad z > z_0: \; n_i(z) = \frac{CD_+}{\alpha}\frac{(z-z_0)^{2\ell}}{1 + D_+|z-z_0|^{2\ell+1}}. \tag{12}$$

Из формулы Тейлора следует, что существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0}\frac{n_i(z)}{(z-z_0)^{2\ell}} = \frac{n_i^{(2\ell)}(z_0)}{(2\ell)!}.$$

Поэтому из (12) следует, что $-D_- = D_+ \underset{\text{def}}{=} D$, т.к. $C \neq 0$, и тогда обе формулы (12) и обе формулы (10) для n_a объединяются в одну уже без знака модуля

$$\begin{gathered} n_i(z) = \frac{CD(z-z_0)^{2\ell}}{\alpha(1 + D(z-z_0)^{2\ell+1})}, \quad n_a(z) = \frac{C/v_a}{1 + D(z-z_0)^{2\ell+1}}, \quad \ell = 0,1,2,\ldots, \quad z \in [0, L], \\ C = \alpha v_a(2\ell+1)/\beta, \quad D = (1 - C/(n_{a0}v_a))/z_0^{2\ell+1}. \end{gathered} \tag{13}$$

Теперь ищется константа D из второго равенства (13), $D = (1 - C/(n_{a0}v_a))/z_0^{2\ell+1}$. Из интеграла (4) следует $C \le n_{a0}v_a$, поэтому $D \ge 0$. Но при $D = 0$ из (13) следует $n_i(z) \equiv 0$, $z \in [0, L]$, что невозможно. Значит, $D > 0$.

Итак, установлено, что краевая задача для стационарной системы (1) в случае $v_a = \text{const} > 0$, $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $z_0 \in (0, L)$, имеет на отрезке $[0, L]$ счетное число решений, задаваемых формулой (13). Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности z_0, то, очевидно, других решений указанная краевая задача не имеет, и в этом случае формула (13) дает общий вид решений краевой задачи для стационарной системы (1). Наконец, в случае $C = 0$ стационарное решение системы (1) задается формулой (7) применительно к каждому полуинтервалу $[0, z_0)$, $(z_0, L]$:

$$n_i(z) = (v_a/\beta)(z - z_0)^{-1}\ln^{-1} D_\pm |z - z_0|, \quad n_a(z) = (\alpha/\beta)\ln^{-1} D_\pm |z - z_0|,$$

где $D_\pm$ – положительные константы, причем константа D_- действует для $z < z_0$, а D_+ – для $z > z_0$. Полученное решение физически абсурдно, поскольку $\lim\limits_{z\to z_0+0} n_i(z) = -\infty$, $\lim\limits_{z\to z_0-0} n_i(z) = +\infty$, в частности, нарушается неотрицательность концентрации $n_i(z)$ и интегрируемость функции $n_i(z)$ на $[0, L]$ (в точке $z = z_0$ интеграл от $n_i(z)$ расходится).

Предложенный способ построения решений краевых задач пригоден для любой функции $v_i(z)$, имеющей единственный нуль z_0 на $[0, L]$, причем $0 < z_0 < L$ и $v_i'(z_0) > 0$. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $v_i(z) = a(z + z_1)(z - z_0)$, $z_1 > 0$, $0 < z_0 < L$, $a > 0$. Тогда $\alpha = v_i'(z_0) = a(z_0 + z_1) > 0$. Действуя по схеме, предложенной выше, получаем счетное число решений краевой задачи для (3) с граничным условием $n_a(0) = n_{a0} > 0$:

$$n_i(z) = \frac{CD(z - z_0)^{2\ell}}{a(z + z_1)[(z + z_1)^{2\ell+1} + D(z - z_0)^{2\ell+1}]}, \quad n_a(z) = \frac{C}{v_a}\frac{(z + z_1)^{2\ell}}{(z + z_1)^{2\ell+1} + D(z - z_0)^{2\ell+1}},$$
$$C = (2\ell + 1)\alpha v_a\beta^{-1}, \quad D = (1 - C/(n_{a0}v_a))(z_1/z_0)^{2\ell+1}, \quad \ell = 0, 1, 2\ldots, \quad z \in [0, L].$$

При этом $D > 0$. Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности z_0, то указанные функции дают общее решение краевой задачи.

Пример 2. Пусть $v_i(z) = -\cos(\pi z/L)$, $z_0 = L/2$ – единственный нуль на $[0, L]$, $v_i'(z_0) = \pi/L \underset{\text{def}}{=} \alpha > 0$. Действуя по схеме, предложенной выше, получаем счетное число решений краевой задачи для (3) с граничным условием $n_a(0) = n_{a0} > 0$:

$$n_i(z) = \frac{CD(\operatorname{tg}(\alpha z/2) - 1)^{2\ell}(1 + \operatorname{tg}^2(\alpha z/2))}{(1 + \operatorname{tg}(\alpha z/2))[(1 + \operatorname{tg}(\alpha z/2))^{2\ell+1} + D(\operatorname{tg}(\alpha z/2) - 1)^{2\ell+1}]},$$
$$n_a(z) = \frac{C}{v_a}\frac{(\operatorname{tg}(\alpha z/2) + 1)^{2\ell+1}}{(\operatorname{tg}(\alpha z/2) + 1)^{2\ell+1} + D(\operatorname{tg}(\alpha z/2) - 1)^{2\ell+1}},$$
$$C = \alpha v_a\beta^{-1}(2\ell + 1), \quad D = 1 - C/(n_{a0}v_a), \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, \quad z \in [0, L].$$

При этом $D > 0$. Если $n_i(z)$ аналитична в окрестности z_0, то указанные функции дают общее решение краевой задачи.

Интегральное тождество, из которого выводились выше значения констант C, $D_\pm$, имеет простой смысл – это баланс количества ионов, возникающих на отрезке $[z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ вследствие ионизации и за счет переноса ионов со скоростью v_i через границы отрезка. Основная идея подсчета констант заключалась в том, чтобы найти асимптотики обоих количеств при $\varepsilon \to 0$ ($\equiv$ главные члены разложений по ε обеих частей интегрального тождества) и приравнять их. Этот прием позволяет получать и другие неочевидные результаты. Например, если $v_i(z)$ обращается в нуль в некоторой точке $z_0 \in (0, L)$, в окрестности которой n_i аналитична и для которой $\alpha = v_i'(z) < 0$, то стационарная система (3) не имеет решений. Действительно, для такого решения, повторяя рассуждения выше, получаем равенство $n_a(z_0) = \alpha(2\ell + 1)/\beta$ для некоторого целого $\ell \geq 0$, из которого вытекает неравенство $n_a(z_0) < 0$, что физически абсурдно. Другой пример дает функция $v_i(z)$, которая на отрезке $[0, L]$ имеет единственный нуль $z_0 \in (0, L)$ и выполнено условие $v_i'(z_0) = 0$. Тогда система (3) решений не имеет. Действительно, повторяя рассуждения выше применительно к интегральному тождеству, получаем $n_a(z_0) = 0$, и, значит, константа C в первом интеграле (4) равна нулю. С другой стороны, функция $n_a(z)$ монотонно невозрастающая на $[0, L]$ и неотрицательная, поэтому $n_a(z) \equiv 0$, $z \in [z_0, L]$, но тогда из интеграла (4) с учетом $C = 0$ и знакоопределенности $v_i(z)$ на $(z_0, L]$ следует, что и $n_i(z) \equiv 0$, $z \in [z_0, L]$, что физически абсурдно. Добавим, если вычислить n_i на $[0, z_0)$ посредством формулы (7), то нетрудно убедиться в разрывности функции n_i в точке z_0 и логарифмической расходимости интеграла от $n_i(z)$ по отрезку $[0, L]$, что противоречит физическому смыслу концентрации ионов. Обобщая предыдущие примеры, приходим к физически важному выводу, что граничная задача для системы (3) имеет решение только если скорость $v_i(z)$ обладает единственным нулем $z_0 \in (0, L)$, для которого $\alpha = v_i'(z_0) > 0$. В этом случае при определенном соотношении β и α возникают ионизационные колебания (бривинг-моды).

Для численного решения перепишем систему (1) в безразмерном виде, взяв за характерные масштабы длины $L_0 = 1$ см, скорости $v_0 = 1.5\times10^5$ см/с, времени $t_0 = L_0/v_0 = 0.66\times10^{-5}$ с, концентрации $n_0 = 10^{12}$ см$^{-3}$, $\beta = 10^{-8}$ см^3/с. Тогда система (1) относительно безразмерных значений всех величин перепишется в виде:

$$\partial n_a/\partial t + \partial(n_a v_a)/\partial z = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial t + \partial(n_i v_i)/\partial z = k_I n_a n_i, \tag{14}$$

где k_I – безразмерное значение коэффициента ионизации.

Рассмотрим типичный пример расчета бривинг-мод по дивергентной разностной схеме "разности против потока" [15] на равномерной сетке на отрезке $[0, L]$:

$$\begin{gathered}
\frac{n_{a,k}^1 - n_{a,k}^0}{\tau} + v_a\frac{n_{a,k}^0 - n_{a,k-1}^0}{h} + k_I n_{a,k}^1 n_{i,k}^0 = 0, \quad 0 < k \le N, \quad n_{a,0}^1 = n_{a0},\\
\frac{n_{i,k}^1 - n_{i,k}^0}{\tau} + \frac{1}{h}\left[\frac{v_{i,k+1/2} - |v_{i,k+1/2}|}{2}n_{i,k+1}^0 + \left(\frac{v_{i,k+1/2} + |v_{i,k+1/2}|}{2} - \frac{v_{i,k-1/2} - |v_{i,k-1/2}|}{2}\right)n_{i,k}^0 - \right.\\
\left. - \frac{v_{i,k-1/2} + |v_{i,k-1/2}|}{2}n_{i,k-1}^0\right] - k_I n_{i,k}^0 n_{a,k}^0 = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где $v_{i,k+1/2} = v_i((k+1/2)h), -1 \le k \le N$. Заметим, что при $k = 0$ значение $n_{i,-1}^0$, а при $k = N$ значение $n_{i,N+1}^0$ умножается на нуль и в силу этого не используется. Условия устойчивости для схемы имеют вид:

$$\tau \le h/v_a, \quad \tau \le h\Big[\max_{-1\le k\le N}|v_{i,k+1/2}|\Big]^{-1}, \quad \tau \le \Big[\max_{0\le k\le N}|v_{i,k+1/2} - v_{i,k-1/2}|\Big]^{-1}.$$

При соблюдении условий устойчивости нетрудно получить оценки

$$\max|n_{i,k}^1| \le \max|n_{i,k}^0|\Big\{1 + (\tau/h)\max|v_{i,k+1/2} - v_{i,k-1/2}| + \tau k_I \max|n_{a,k}^0|\Big\}, \quad \max|n_{a,k}^1| \le \max|n_{a,k}^0|,$$

где max берется по $0 \le k \le N$. Эти оценки гарантируют вычислительную устойчивость схемы (15) на конечном временном отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим результаты расчета по схеме (15), представленные на фиг. 1, для $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$. Фиг. 1 демонстрирует возникновение периодических колебаний концентраций n_a, n_i (бривинг-мод) с размерной частотой ~20 кГц. Эти колебания возникают не при всех $k_I > 0$, $\alpha > 0$. Очевидно, на плоскости $k_I > 0$, $\alpha > 0$ существует некоторая неизвестная нам область, для (k_I, α) из которой возникают бривинг-моды. Для (k_I, α), не попавших в указанную область, счет по схеме (15) приводит к установлению решения. Вероятно, появление бривинг-мод связано с неединственностью решения краевой задачи для системы (3), установленной выше. Решение начально-краевой задачи для системы (1) может при $t \to +\infty$ сходиться к одному из счетного числа стационарных состояний, задаваемых формулами (13), но может, как показывают расчеты, при $t \to +\infty$ выходить на периодический режим (фиг. 1), не притягиваясь ни к одному из стационарных состояний. Логически возможен также хаотический характер решения начально-краевой задачи для системы (1) при $t \to +\infty$, но в расчетах он зафиксирован не был. Математическая причина возникновения бривинг-мод будет разъяснена в разд. 3.

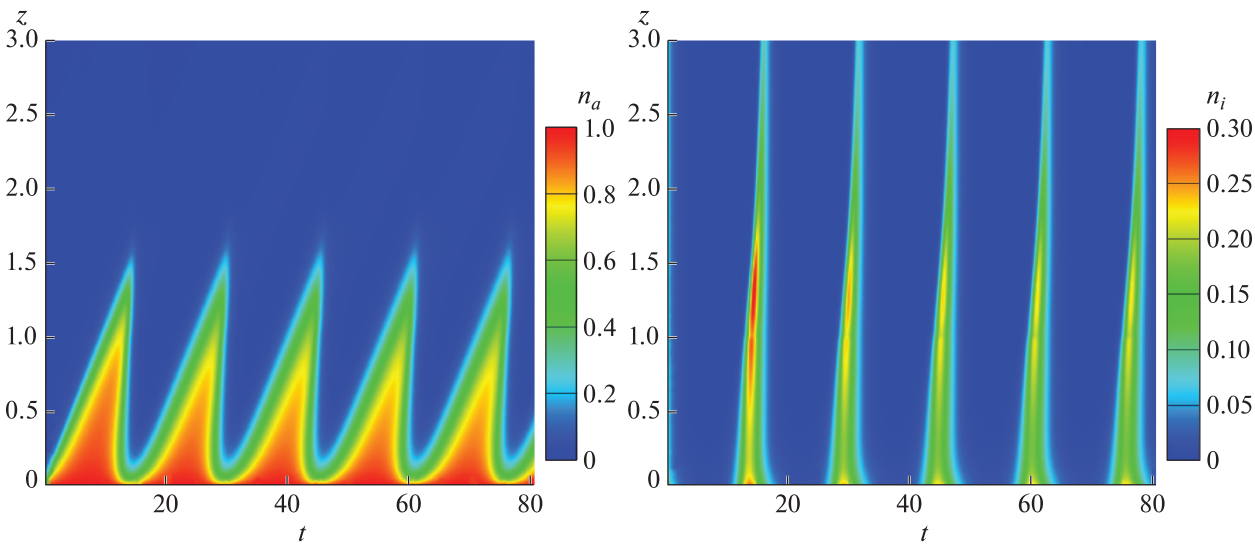
3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИОНИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННЫХ СКОРОСТЕЙ

Решим систему (1) в случае $v_a = \text{const}$, $v_i = \text{const}$. В безразмерном виде она является частным случаем системы (14):

$$\partial n_a/\partial t + v_a\partial n_a/\partial z = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial t + v_i\partial n_i/\partial z = k_I n_a n_i. \tag{16}$$

Рассмотрим основной случай $v_a \ne v_i$. Проведем замену независимых переменных:

$$(t, z) \leftrightarrow (\alpha, \beta): \ (t, z) = \alpha(1, v_a) + \beta(1, v_i),$$



Фиг. 1. Эволюция концентраций ионов (n_i) и атомов (n_a) в пространстве (z) и времени (t) для безразмерных значений параметров $L = 3$, $z_0 = 1$, $\alpha = 1$, $k_I = 5$, $v_a = 0.1$ с начальными и граничными значениями $n_{a0} = 1$, $n_a^0(z) = n_{a0}/(1 + 50z)$, $n_i^0(z) = 0.1$.

или в координатном виде:

$$t = \alpha + \beta, \quad z = \alpha v_a + \beta v_i, \quad \alpha = (tv_i - z)(v_i - v_a)^{-1}, \quad \beta = (z - tv_a)(v_i - v_a)^{-1}, \quad (\alpha,\beta) = \varphi(t,z). \tag{17}$$

Отсюда для дифференциальных операторов получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{v_i}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{v_a}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{v_i - v_a}\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

Подставляя эти выражения в систему (16), сведем ее к эквивалентному виду:

$$\partial n_a/\partial\alpha = -k_I n_a n_i, \quad \partial n_i/\partial\beta = k_I n_a n_i. \tag{18}$$

Итак, задача нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (16) в области D переменных (t, z) равносильна задаче нахождения непрерывно дифференцируемых решений системы (18) в области $\varphi(D)$ переменных (α,β). Отображение φ линейное, невырожденное, с определителем $\det\varphi = 1/(v_i - v_a) \neq 0$. В частности, φ прямые переводит в прямые, многоугольники – в многоугольники, выпуклые множества – в выпуклые множества и т.д. Элементарная теория решений системы (18) в прямоугольнике $\Pi = [\alpha_0,\alpha_1]\times[\beta_0,\beta_1]$, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$, основана на двух результатах [16].

Теорема 1. 1) *Пусть* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – *дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезках* $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$, *соответственно, причем* $A(\alpha) \neq B(\beta)$ *для любых* $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$, $\beta\in[\beta_0,\beta_1]$. *Тогда функции*

$$n_a(\alpha,\beta) \underset{\text{def}}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))}, \quad n_i(\alpha,\beta) \underset{\text{def}}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha) - B(\beta))} \tag{19}$$

составляют непрерывно дифференцируемое решение системы (18) *в прямоугольнике* Π.

2) *Если непрерывно дифференцируемые решения* n_a, n_i *системы* (18) *таковы, что множество нулей каждой из этих функций в* Π *имеет пустую внутренность и* $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *еще один комплект функций на* $[\alpha_0,\alpha_1]$, $[\beta_0,\beta_1]$, *соответственно, удовлетворяющий условиям части* 1) *теоремы и восстанавливающий по формулам* (19) *те же самые функции* n_a, n_i *в* Π, *то найдутся константы* $R \neq 0$, C, *для которых*:

$$\bar{A}(\alpha) = RA(\alpha) + C, \quad \alpha\in[\alpha_0,\alpha_1], \quad \bar{B}(\beta) = RB(\beta) + C, \quad \beta\in[\beta_0,\beta_1]. \tag{20}$$

Обратно, если $\bar{A}(\alpha)$, $\bar{B}(\beta)$ *вычисляются по* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ посредством формул (20) *для некоторых констант* $R \neq 0$, C, *то они удовлетворяют условиям части* 1) *и по формулам* (19) *восстанавливают те же функции* n_a, n_i, *что и для* $A(\alpha)$, $B(\beta)$.

3) *В условиях части* 1) *теоремы функции* n_a, n_i, *вычисляемые по формулам* (19), *удовлетворяют всюду в* Π *неравенствам* $n_a \geq 0$, $n_i \geq 0$ *тогда и только тогда, когда либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не убывают на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$, *соответственно, и* $\inf\limits_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]} A(\alpha) > \sup\limits_{\beta \in [\beta_0, \beta_1]} B(\beta)$ $(\equiv A(\alpha_0) > B(\beta_1))$, *либо* $A(\alpha)$, $B(\beta)$ *монотонно не возрастают соответственно на* $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ *и* $\sup\limits_{\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]} A(\alpha) < \inf\limits_{\beta \in [\beta_0, \beta_1]} B(\beta)$ $(\equiv A(\alpha_0) < B(\beta_1))$.

Если $A(\alpha)$, $B(\beta)$ удовлетворяют условиям части 1) теоремы 1, то n_a, n_i, вычисляемые по формулам (19), непрерывно дифференцируемы в Π и существуют непрерывные в Π смешанные производные $\partial^2 n_a/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_a/(\partial\beta\partial\alpha)$ и $\partial^2 n_i/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_i/(\partial\beta\partial\alpha)$. Это обстоятельство позволяет сформулировать обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n_a > 0$, $n_i > 0$ — *непрерывно дифференцируемое решение* (18) *в прямоугольнике* Π, *для которого существуют обе непрерывные в* Π *смешанные частные производные* $\partial^2 n_a/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_a/(\partial\beta\partial\alpha)$ *и* $\partial^2 n_i/(\partial\alpha\partial\beta)$, $\partial^2 n_i/(\partial\beta\partial\alpha)$. *Тогда найдутся дважды непрерывно дифференцируемые функции* $A(\alpha)$, $B(\beta)$, *определенные на сторонах прямоугольника, соответственно,* $[\alpha_0, \alpha_1]$ *и* $[\beta, \beta_1]$, *для которых* $A(\alpha) \neq B(\beta)$ *при всех* $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ *и всюду в* Π *выполнены равенства* (19).

Замечание. Таким образом, для класса положительных непрерывно дифференцируемых решений системы (18), для которых в Π существуют обе непрерывные смешанные частные производные, формулы (19) задают общий вид решений этого класса.

Из теоремы 1 п. 2) следует, что в формулах (19) всегда можно считать $A(\alpha)$, $B(\beta)$ монотонно неубывающими функциями на $[\alpha_0, \alpha_1]$, $[\beta_0, \beta_1]$ соответственно. Кроме того, стороны прямоугольника Π могут быть интервалами или полуинтервалами, в том числе полубесконечными или бесконечными. Соответствующие изменения формулировки теоремы 1 п. 3) очевидны.

Из теорем 1, 2 следует, что в $\varphi^{-1}(\Pi)$ решение системы (16) задается формулами:

$$n_a(t,z) = \frac{B'\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)}{k_I\left[A\left(\dfrac{tv_i - z}{v_i - v_a}\right) - B\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)\right]}, \quad n_i(t,z) = \frac{A'\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)}{k_I\left[A\left(\dfrac{tv_i - z}{v_i - v_a}\right) - B\left(\dfrac{z - tv_a}{v_i - v_a}\right)\right]}, \tag{21}$$

где $A(\alpha)$, $B(\beta)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию теоремы 1 п. 1.

Формулы (21) справедливы для $v_i \neq v_a$. При $v_i = v_a$ они теряют смысл. Для $v_i = v_a = v$ общее решение системы (16) получается напрямую, без введения новых координат α, β, интегрированием уравнений этой системы вдоль характеристик. Характеристики системы (16) имеют вид $z(t) = vt + \mathrm{const}$ и различаются значениями const. Пусть $n_a(t) = n_a(t, z(t))$, $n_i(t) = n_i(t, z(t))$ значения неизвестных функций n_a, n_i вдоль фиксированной характеристики. Тогда из (16) следует, что функции $n_a(t)$, $n_i(t)$ удовлетворяют системе ОДУ

$$dn_a/dt = -k_I n_a n_i, \quad dn_i/dt = k_I n_a n_i. \tag{22}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем первый интеграл системы (22):

$$d(n_a + n_i)/dt \equiv 0 \;\Rightarrow\; n_a + n_i \equiv C = \mathrm{const}.$$

Поскольку $n_a \geq 0$, $n_i \geq 0$, то $C \geq 0$. При $C = 0$ имеем $n_a(t) \equiv 0$, $n_i(t) \equiv 0$ — тривиальное решение системы (22), не имеющее смысла. Поэтому ниже считаем $C > 0$. Тогда $n_a = C - n_i$, и для нахождения n_i имеем ОДУ

$$dn_i/dt = k_I n_i(C - n_i). \tag{23}$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dn_i}{n_i(C-n_i)} = k_I t + \mathrm{const} \;\Rightarrow\; \frac{1}{C}\ln\left|\frac{n_i}{C-n_i}\right| = k_I t + \mathrm{const}.$$

Поскольку $n_i \ge 0$, $n_a = C - n_i \ge 0$, то $0 \le n_i \le C$, и в последнем равенстве знак модуля можно убрать. В результате получим

$$n_i = CD\exp(Ck_I t)[1 + D\exp(Ck_I t)]^{-1}, \quad n_a = C - n_i = C[1 + D\exp(Ck_I t)]^{-1}, \quad D \ge 0, \quad C > 0. \tag{24}$$

В случае $D = 0$ получим одно из двух особых решений (23): $n_i \equiv 0$. Другое особое решение $n_i \equiv C$. Формулы (24) задают общее решение системы (22) на произвольной характеристике. Константы C и D определяются значениями n_a, n_i в произвольной точке на рассматриваемой характеристике. В частности, при решении начально-краевых задач для системы (16) значения C и D определяются начальными и граничными условиями (см. ниже).

Применим формулы (21), (24) для решения начально-краевых задач для системы (16), которые представляют основной практический интерес. Ограничимся следующими простейшими задачами.

Задача 1. Начальная задача (задача Коши): в полуплоскости $z \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (16), для которого выполнены начальные условия $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

Задача 2. Краевая задача: для $v_a, v_i \ge 0$ в полуплоскости $z \ge 0$, $t \in \mathbb{R}$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (16), для которого выполнены краевые условия $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,0) = n_{i0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$ – заданные неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции на прямой.

Задача 3. Начально-краевая (смешанная) задача: для $v_a, v_i \ge 0$ в первом квадранте $z \ge 0$, $t \ge 0$ найти непрерывно дифференцируемое решение системы (16), для которого выполнены начальные условия $n_a(0,z) = n_a^0(z)$, $n_i(0,z) = n_i^0(z)$, $z \ge 0$ и краевые условия $n_a(t,0) = n_{a0}(t)$, $n_i(t,0) = n_{i0}(t)$, $t \ge 0$, где $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \ge 0$, $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \ge 0$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на полупрямых $z \ge 0$ и $t \ge 0$, подчиняющиеся условиям согласованности:

$$n_{a0}(0) = n_a^0(0), \quad n_{i0}(0) = n_i^0(0), \quad n'_{a0}(0) + v_a(n_a^0)'(0) + k_I n_{a0}(0)n_{i0}(0) = 0,$$
$$n'_{i0}(0) + v_i(n_i^0)'(0) - k_I n_{a0}(0)n_{i0}(0) = 0.$$

Более сложные начально-краевые задачи в этой работе не рассматриваются.

В случае $v_i = v_a$ начально-краевые задачи легко решаются по формуле (32) методом характеристик.

Рассмотрим задачу 1 в случае $v_a \ne v_i$. В переменных (α,β) задача состоит в поиске непрерывно дифференцируемого решения системы (18) в полуплоскости $P \underset{\mathrm{def}}{=} \{\alpha + \beta \ge 0\}$, которое на границе этой полуплоскости $\alpha + \beta = 0$ имеет заданные значения

$$\alpha + \beta = 0 \;\Rightarrow\; n_a(\alpha,\beta) = n_a(-\beta,\beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i) = n_a^0(\beta(v_i - v_a)),$$
$$n_i(\alpha,\beta) = n_i(-\beta,\beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i) = n_i^0(\beta(v_i - v_a)).$$

Выше был изложен способ решения системы (18) в произвольном прямоугольнике Π. Построим решение системы (18) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \supseteq P$, которое на прямой $\alpha + \beta = 0$ совпадает с заданными функциями, $n_a|_{\alpha+\beta=0} = n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i|_{\alpha+\beta=0} = n_i^0(\beta(v_i - v_a))$. Если такое решение существует, то его сужение на P дает, очевидно, искомое решение задачи Коши в переменных (α,β). Согласно теореме 1, решение системы (18) в прямоугольнике Π_∞ определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (19). При этом, согласно теореме 1, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять двум условиям: 1) области значений функций $A(\alpha)$, $B(\beta)$ не пересекаются, $A(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}) = \varnothing$, и тогда, учитывая связность прямой $\mathbb{R}$, либо $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, либо $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$,

2) если $A(\mathbb{R}) < B(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно невозрастающие на $\mathbb{R}$ функции, если $B(\mathbb{R}) < A(\mathbb{R})$, то $A(\alpha)$, $B(\beta)$ – монотонно неубывающие на $\mathbb{R}$ функции.

Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ищутся по известным значениям n_a и n_i на прямой $\alpha + \beta = 0$ (т.е. из начальных условий). Из тождеств (19) получим:

$$\begin{gathered} n_a^0(\beta(v_i - v_a)) = n_a(-\beta,\beta) = B'(\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \\ n_i^0(\beta(v_i - v_a)) = n_i(-\beta,\beta) = A'(-\beta)k_I^{-1}(A(-\beta) - B(\beta))^{-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть $n_a(\beta) = k_I n_a^0(\beta(v_i - v_a))$, $n_i(\beta) = k_I n_i^0(\beta(v_i - v_a))$, $A_0(\beta) = A(-\beta)$. Тогда n_a, n_i неотрицательные функции, а условия (25) дают линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для нахождения функций $A_0(\beta)$, $B(\beta)$ на прямой $\mathbb{R}$:

$$B' = n_a(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -n_i(\beta)(A_0 - B). \tag{26}$$

Поскольку $n_a(\beta)$, $n_i(\beta)$ непрерывно дифференцируемы по β, то любое решение системы (26) дважды непрерывно дифференцируемо всюду на прямой. Кроме того, для любых $C, D \in \mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение системы (26), для которого $A_0(0) = C$, $B(0) = D$. Ниже считается $C \neq D$. Легко показать, что решение (26) с начальным условием $A_0(0) = C$, $B(0) = D$ имеет вид:

$$\begin{gathered} B(\beta) = D + (C - D)\int_0^\beta n_a(\beta)\exp(-N(\beta))d\beta, \\ A_0(\beta) = C + (D - C)\int_0^\beta n_i(\beta)\exp(-N(\beta))d\beta, \quad N(\beta) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_0^\beta (n_a(\beta) + n_i(\beta))d\beta. \end{gathered} \tag{27}$$

Из равенств (27) несложно вывести справедливость условий 1) и 2).

Согласно теореме 1, формулы (19) с учетом (27) дают решение задачи Коши в переменных $(\alpha,\beta) \in P$:

$$n_a(\alpha,\beta) = \frac{n_a(\beta)e^{-N(\beta)}}{k_I R_0(\alpha,\beta)}, \quad n_i(\alpha,\beta) = \frac{n_i(\alpha)e^{-N(\alpha)}}{k_I R_0(\alpha,\beta)}, \quad R_0(\alpha,\beta) = \left[1 - \int_0^{-\alpha} n_i e^{-N} d\alpha - \int_0^\beta n_a e^{-N} d\beta\right].$$

В переменных (z,t) получаем следующие формулы:

$$\begin{gathered} n_a(z,t) = n_a^0(z - v_a t)e^{-N(z - v_a t)}\left[1 - \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{z - v_i t} n_i^0(p)e^{-N(p)}dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p)e^{-N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ n_i(z,t) = n_i^0(z - v_i t)e^{-N(z - v_i t)}\left[1 - \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{z - v_i t} n_i^0(p)e^{-N(p)}dp + \int_0^{z - v_a t} n_a^0(p)e^{-N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ N(p) = \frac{k_I}{v_i - v_a}\int_0^p \left[n_a^0(q) + n_i^0(q)\right]dq, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{gathered} \tag{28}$$

где $n_i^0(p) \geq 0$, $n_a^0(p) \geq 0$ – заданные произвольно непрерывно дифференцируемые функции и знаменатель в формулах (28) заведомо положителен. Итак, формулы (28) дают аналитическое решение системы (16) при $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному условию $n_a(z,0) = n_a^0(z)$, $n_i(z,0) = n_i^0(z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим краевую задачу 2 в случае $v_i \neq v_a$. Анализ этого случая проходит по той же схеме, что и решение задачи Коши выше. Выделим основные моменты. В переменных (α,β) ищем непрерывно дифференцируемое решение системы (18) в полуплоскости $P_0 = \{\alpha v_a + \beta v_i \geq 0\}$, для которого функции n_a, n_i на границе полуплоскости P_0, $\partial P_0 = \{\alpha v_a + \beta v_i = 0\}$ принимают заданные значения $n_a(\alpha,\beta) = n_{a0}(\alpha + \beta)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_{i0}(\alpha + \beta)$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$. Построим такое непрерывно дифференцируемое решение системы (18) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq P_0$, которое на границе полуплоскости P_0, т.е. на прямой $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, совпадает с заданными функциями

$n_{a0}(\alpha+\beta)$, $n_{i0}(\alpha+\beta)$. Тогда, очевидно, сужение этого решения на P_0 будет искомым решением краевой задачи в координатах (α,β). Согласно теореме 1, искомое решение определяется двумя непрерывно дифференцируемыми функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (19). При этом функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ должны удовлетворять условиям 1) и 2), сформулированным выше. Функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ищутся по известным значениям n_a, n_i на границе P_0. На этой границе $\beta = -\alpha v_a/v_i$ и, значит, согласно (19), имеем

$$\begin{aligned} n_{a0}\left(\alpha(v_i - v_a)/v_i\right) &= B'(-\alpha v_a/v_i)k_I^{-1}[A(\alpha) - B(-\alpha v_a/v_i)]^{-1}, \\ n_{i0}\left(\alpha(v_i - v_a)/v_i\right) &= A'(\alpha)k_I^{-1}[A(\alpha) - B(-\alpha v_a/v_i)]^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{29}$$

Пусть $n_a(\alpha) = k_I(v_a/v_i)n_{a0}(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$, $n_i(\alpha) = k_I n_{i0}(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$, $B_0(\alpha) = B(-\alpha v_a/v_i)$. Тогда краевое условие (29) дает линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на прямой с переменными коэффициентами для нахождения функций $A(\alpha)$, $B_0(\alpha)$:

$$B_0' = -n_a(\alpha)(A - B_0), \quad A' = n_i(\alpha)(A - B_0). \tag{30}$$

Поскольку $n_a(\alpha)$, $n_i(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы, то любое решение системы (30) дважды непрерывно дифференцируемо и определено на всей прямой. Рассмотрим решение задачи Коши для системы (30) с начальными условиями $A(0) = C \neq B_0(0) = D$. Несложно проверить, что это решение вычисляется по формулам (см. выше):

$$B_0(\alpha) = D + (D - C)\int_0^\alpha n_a e^N d\alpha, \quad A(\alpha) = C + (C - D)\int_0^\alpha n_i e^N d\alpha, \quad N(\alpha) \underset{\text{def}}{=} \int_0^\alpha (n_a + n_i)d\alpha. \tag{31}$$

Из формул (31) выводится (см. выше) справедливость условий 1) и 2) для функций $A(\alpha)$, $B(\beta) = B_0(-\beta v_i/v_a)$.

По формулам (19) с учетом выражений (31) получим решение краевой задачи в координатах $(\alpha,\beta) \in P_0$:

$$n_a(\alpha,\beta) = \frac{v_i}{v_a} n_a(-\beta v_i/v_a)\exp(N(-\beta v_i/v_a))k_I^{-1}\left[1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^{-\beta v_i/v_a} n_a e^N d\beta\right]^{-1},$$

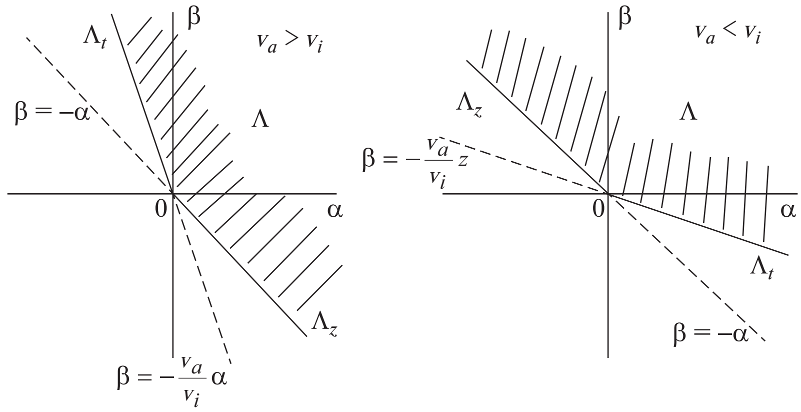
$$n_i(\alpha,\beta) = n_i(\alpha)\exp(N(\alpha))k_I^{-1}\left[1 + \int_0^\alpha n_i e^N d\alpha + \int_0^{-\beta v_i/v_a} n_a e^N d\beta\right]^{-1}.$$

Подставляя в эти формулы $\alpha = (tv_i - z)/(v_i - v_a)$, $\beta = (z - tv_a)/(v_i - v_a)$, получаем после несложных преобразований решение краевой задачи в переменных (z,t):

$$\begin{gathered} n_a(z,t) = n_{a0}\left(t - \frac{z}{v_a}\right)e^{N(t - z/v_a)}\left[1 + \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{t - z/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{N(p)}dp + \int_0^{t - z/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ n_i(z,t) = n_{i0}\left(t - \frac{z}{v_i}\right)e^{N(t - z/v_i)}\left[1 + \frac{k_I}{v_i - v_a}\left\{\int_0^{t - z/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{N(p)}dp + \int_0^{t - z/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{N(p)}dp\right\}\right]^{-1}, \\ N(p) = \frac{k_I}{v_i - v_a}\int_0^p [v_a n_{a0}(q) + v n_{i0}(q)]dq, \end{gathered} \tag{32}$$

где $n_{a0}(p) \geq 0$, $n_{i0}(p) \geq 0$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Итак, формулы (32) дают аналитическое решение системы (16) в полуплоскости $z \geq 0$, удовлетворяющее краевому условию $n_a(0,t) = n_{a0}(t)$, $n_i(0,t) = n_{i0}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим смешанную задачу 3 в случае $v_a > 0$, $v_i > 0$, $v_a \neq v_i$. В координатах (α,β) ее решение сводится к поиску в тупом угле $\Lambda \underset{\text{def}}{=} \{(\alpha,\beta) : \alpha + \beta \geq 0,\ \alpha v_a + \beta v_i \geq 0\}$ непрерывно дифференцируемых функций $n_a(\alpha,\beta)$, $n_i(\alpha,\beta)$, удовлетворяющих системе (18) и имеющих заданные значения на границе угла $\partial\Lambda$. Последнее множество состоит из двух лучей, которые обозначим через



Фиг. 2. Угол Λ и лучи Λ_t, Λ_z в зависимости от v_i, v_a.

Λ_t и Λ_z: $\partial\Lambda = \Lambda_t \cup \Lambda_z$, $\Lambda_t \cap \Lambda_z = \{(0,0)\}$, $\Lambda_t = \varphi\{(t,0) : t \geq 0\}$, $\Lambda_z = \varphi\{(0,z) : z \geq 0\}$. В зависимости от v_i, v_a угол Λ и лучи Λ_t, Λ_z изображены на фиг. 2.

Значения искомого решения на лучах Λ_t, Λ_z определяются равенствами $n_a(\alpha,\beta) = n_{a0}(\alpha+\beta)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_{i0}(\alpha+\beta)$, $(\alpha,\beta) \in \Lambda_t$, $\alpha v_a + \beta v_i = 0$, $\alpha + \beta \geq 0$; $n_a(\alpha,\beta) = n_a^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $n_i(\alpha,\beta) = n_i^0(\alpha v_a + \beta v_i)$, $(\alpha,\beta) \in \Lambda_z$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha v_a + \beta v_i \geq 0$. Проведем построение искомого решения для случая $v_i > v_a$. Для нахождения искомого решения в угле Λ построим непрерывно дифференцируемое решение системы (18) в бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty = \mathbb{R}\times\mathbb{R} \supseteq \Lambda$, которое на лучах Λ_t и Λ_z совпадает с указанными выше значениями. Тогда сужение построенного решения в прямоугольнике Π_∞ на угле Λ даст решение смешанной задачи. Решение системы (18) в Π_∞, согласно теореме 1, определяется двумя дважды непрерывно дифференцируемыми в $\mathbb{R}$ функциями $A(\alpha)$, $B(\beta)$ и вычисляется по этим функциям посредством формул (19). Покажем, что функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ однозначно определяются значениями искомого решения на лучах Λ_t и Λ_z. Имеем следующее:

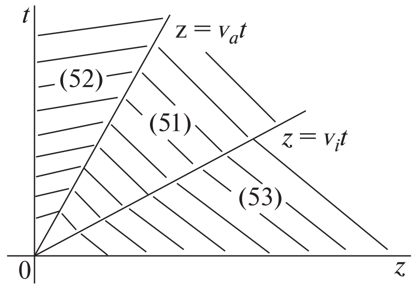
$$\begin{aligned}
&\underset{(\beta=-\alpha v_a/v_i)}{\Lambda_t}: \quad
\begin{aligned}
n_{a0}\left(\alpha\frac{v_i - v_a}{v_i}\right) &= n_a(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \frac{B'(-\alpha v_a/v_i)}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_a/v_i))}, \quad \alpha \geq 0,\\
n_{i0}\left(\alpha\frac{v_i - v_a}{v_i}\right) &= n_i(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(-\alpha v_a/v_i))}, \quad \alpha \geq 0,
\end{aligned}\\
&\underset{(\beta=-\alpha)}{\Lambda_z}: \quad
\begin{aligned}
n_{a0}\left(\beta(v_i - v_a)\right) &= n_a(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \frac{B'(\beta)}{k_I(A(-\beta)-B(\beta))}, \quad \beta \geq 0,\\
n_{i0}\left(\beta(v_i - v_a)\right) &= n_i(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \frac{A'(\alpha)}{k_I(A(\alpha)-B(\beta))} = \frac{A'(-\beta)}{k_I(A(-\beta)-B(\beta))}, \quad \beta \geq 0.
\end{aligned}
\end{aligned} \tag{33}$$

Введем в рассмотрение функции $B_0(\alpha) \underset{\text{def}}{=} B(-\alpha v_a/v_i)$, $A_0(\beta) \underset{\text{def}}{=} A(-\beta)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Тогда на полупрямой $\alpha \geq 0$ функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, согласно (33), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}
B_0' = -\bar{n}_{a0}(\alpha)(A - B_0), \quad A' = \bar{n}_{i0}(\alpha)(A - B_0), \quad \alpha \geq 0,\\
\bar{n}_{a0}(\alpha) \underset{\text{def}}{=} k_I\frac{v_a}{v_i}n_{a0}\left(\alpha\frac{v_i - v_a}{v_i}\right), \quad \bar{n}_{i0}(\alpha) \underset{\text{def}}{=} k_I n_{i0}\left(\alpha\frac{v_i - v_a}{v_i}\right),
\end{gathered} \tag{34}$$

а на полупрямой $\beta \geq 0$ функции $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, согласно (33), удовлетворяют линейной системе ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{gathered}
B' = \bar{n}_a^0(\beta)(A_0 - B), \quad A_0' = -\bar{n}_i^0(\beta)(A_0 - B), \quad \beta \geq 0,\\
\bar{n}_a^0(\beta) \underset{\text{def}}{=} k_I n_a^0\left(\beta(v_i - v_a)\right), \quad \bar{n}_i^0(\beta) \underset{\text{def}}{=} k_I n_i^0\left(\beta(v_i - v_a)\right).
\end{gathered} \tag{35}$$



Фиг. 3. Области, где ищется решение смешанной задачи.

Решая системы (34), (35), находим функции $B_0(\alpha)$, $A(\alpha)$, $\alpha \ge 0$ и $B(\beta)$, $A_0(\beta)$, $\beta \ge 0$, после чего доопределяем A и B в областях отрицательных значений аргументов равенствами:

$$B(\beta) \underset{\text{def}}{=} B_0(-\beta v_i/v_a), \quad \beta \ge 0, \quad A(\alpha) = A_0(-\alpha), \quad \alpha \le 0. \tag{36}$$

Полученные функции A и B на прямой являются искомыми, если выбрать решения систем (34) и (35) с одинаковыми начальными условиями $A(0) = C$, $B_0(0) = D$ и $A_0(0) = C$, $B(0) = D$, где $C \ne D$. Тогда функции $A(\alpha)$, $B(\beta)$ будут непрерывны на $\mathbb{R}$, а из (36) и условий согласованности в нуле следует их двукратная непрерывная дифференцируемость в нуле и, значит, на всей прямой $\mathbb{R}$.

Чтобы проверить условия 1) и 2) и преобразовать к удобному для анализа виду формулы (19), воспользуемся явными выражениями решений задач Коши для систем (35), (34), которые дают для $A(\alpha)$, $B(\beta)$ выражения:

$$A(\alpha) = \begin{cases} C + (D - C)\displaystyle\int_0^{-\alpha} \overline{n}_i^0 e^{-N} d\alpha, & \alpha \le 0, \\ C + (C - D)\displaystyle\int_0^{\alpha} \overline{n}_{i0} e^{M} d\alpha, & \alpha \ge 0, \end{cases} \qquad B(\beta) = \begin{cases} D + (D - C)\displaystyle\int_0^{-\beta v_i/v_a} \overline{n}_{a0} e^{M} d\beta, & \beta \le 0, \\ D + (C - D)\displaystyle\int_0^{\beta} \overline{n}_a^0 e^{-N} d\beta, & \beta \ge 0, \end{cases} \tag{37}$$

$$N(\beta) = \int_0^{\beta} (\overline{n}_a^0 + \overline{n}_a^0) d\beta, \quad M(\alpha) = \int_0^{\alpha} (\overline{n}_{a0} + \overline{n}_{i0}) d\alpha.$$

Наконец, преобразуем формулы (19), задающие решение системы (18) в прямоугольнике $\Pi_* \supseteq \Lambda$, в каждом из 4 квадрантов плоскости (α, β). При этом ограничимся только квадрантами I, II, IV, квадрант III, где $\alpha \le 0$, $\beta \le 0$, исключим из рассмотрения, поскольку тупой угол Λ, согласно фиг. 3, лежит в объединении квадрантов I, II, IV, а с квадрантом III пересекается только по нулевой точке. Для удобства введем в рассмотрение функции

$$N_*(p) \underset{\text{def}}{=} \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p (n_a^0(q) + n_i^0(q)) dq, \quad M_*(p) \underset{\text{def}}{=} \frac{k_I}{v_i - v_a} \int_0^p (v_a n_{a0}(q) + v_i n_{i0}(q)) dq. \tag{38}$$

Тогда $N(\beta) = N_*(\beta(v_i - v_a))$, $M(\alpha) = M_*(\alpha(v_i - v_a)/v_i)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Для $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ имеем

$$n_a(\alpha, \beta) \underset{(19)}{=} \frac{B'(\beta)}{k_I[A(\alpha) - B(\beta)]} \underset{(37)}{=} \frac{n_a^0(\beta(v_i - v_a)) \exp(-N_*(\beta(v_i - v_a)))}{R_1(\alpha, \beta)},$$

$$R_1(\alpha, \beta) = 1 + \frac{k_I}{v_i - v_a} \left\{ \int_0^{\alpha(v_i - v_a)/v_i} v_i n_{i0}(p) \exp M_*(p) dp - \int_0^{\beta(v_i - v_a)} n_a^0(p) \exp(-N_*(p)) dp \right\}.$$

Аналогично

$$n_i(\alpha,\beta) \underset{(19)}{=} \frac{A'(\beta)}{k_I[A(\alpha)-B(\beta)]} \underset{(37)}{=} \frac{n_{i0}(\alpha(v_i-v_a)/v_i)\exp M_*(\alpha(v_i-v_a)/v_i)}{R_1(a,\beta)}.$$

Для двух других квадрантов аналогичные подсчеты с использованием формул (19), (37) дают:

$$\alpha \ge 0,\ \beta \le 0: \quad \begin{aligned} n_a(\alpha,\beta) &= [n_{i0}(-\beta(v_i-v_a)/v_i)\exp M_*(-\beta(v_i-v_a)/v_a)]R_2^{-1}(\alpha,\beta),\\ n_i(\alpha,\beta) &= [n_{i0}(\alpha(v_i-v_a)/v_i)\exp M_*(\alpha(v_i-v_a)/v_i)]R_2^{-1}(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

$$R_2(\alpha,\beta) = 1 + \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{\alpha(v_i-v_a)/v_i} v_i n_{i0}(p)e^{M_*(p)}dp + \int\limits_0^{-\beta(v_i-v_a)/v_a} v_a n_{a0}(p)e^{M_*(p)}dp\right\},$$

$$\alpha \le 0,\ \beta \ge 0: \quad \begin{aligned} n_a(\alpha,\beta) &= [n_a^0(\beta(v_i-v_a))\exp[-N_*(\beta(v_i-v_a))]]R_3^{-1}(\alpha,\beta),\\ n_i(\alpha,\beta) &= [n_i^0(-\alpha(v_i-v_a))\exp[-N_*(-\alpha(v_i-v_a))]]R_3^{-1}(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

$$R_3(\alpha,\beta) = 1 - \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{-\alpha(v_i-v_a)} n_i^0(p)e^{-N_*(p)}dp + \int\limits_0^{\beta(v_i-v_a)} n_a^0(p)e^{-N_*(p)}dp\right\}.$$

Осталось перейти в полученных формулах от координат (α,β) к координатам (z,t), учитывая преобразование (17). При этом $\beta(v_i-v_a) = z - v_a t$, $-\alpha(v_i-v_a) = z - v_i t$, $\alpha(v_i-v_a)/v_i = t - z/v_i$, $-\beta(v_i-v_a)/v_a = t - z/v_a$. В итоге первый квадрант плоскости (z,t), где ищется решение смешанной задачи для системы (16), прямыми $z = v_a t$, $z = v_i t$ делится на три области, изображенные на фиг. 3, в каждой из которых решение задается одной из формул

$$\begin{aligned} n_a(z,t) &= [n_a^0(z-v_a t)\exp[-N_*(z-v_a t)]]R_1^{-1}(z,t),\\ n_i(z,t) &= [n_{i0}(t-z/v_i)\exp[M_*(t-z/v_i)]]R_1^{-1}(z,t),\\ R_1(z,t) &= 1 + \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp - \int\limits_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp(-N_*(p))dp\right\};\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} n_a(z,t) &= [n_{a0}(t-z/v_a)\exp[M_*(t-z/v_a)]]R_2^{-1}(z,t),\\ n_i(z,t) &= [n_{i0}(t-z/v_i)\exp[M_*(t-z/v_i)]]R_2^{-1}(z,t),\\ R_2(z,t) &= 1 + \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{t-z/v_i} v_i n_{i0}(p)\exp M_*(p)dp + \int\limits_0^{t-z/v_a} v_a n_{a0}(p)\exp M_*(p)dp\right\};\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} n_a(z,t) &= [n_a^0(z-v_a t)\exp[-N_*(z-v_a t)]]R_3^{-1}(z,t),\\ n_i(z,t) &= [n_i^0(z-v_i t)\exp[-N_*(z-v_i t)]]R_3^{-1}(z,t),\\ R_3(z,t) &= 1 - \frac{k_I}{v_i-v_a}\left\{\int\limits_0^{z-v_i t} n_i^0(p)\exp[-N_*(p)]dp + \int\limits_0^{z-v_a t} n_a^0(p)\exp[-N_*(p)]dp\right\}.\end{aligned} \tag{41}$$

Формулы (39) и (40) на луче $z = v_a t$, $t \ge 0$ и формулы (39) и (41) на луче $z = v_i t$, $t \ge 0$, очевидно, совпадают. При $z = 0$ формула (40) дает краевые условия $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \ge 0$, а при $t = 0$ формула (41) дает начальные условия $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \ge 0$. Итак, формулы (39)–(41) с учетом выражений (38) полностью определяют решение смешанной задачи для системы (16) по известным граничным $n_{a0}(t)$, $n_{i0}(t)$, $t \ge 0$, и начальным $n_a^0(z)$, $n_i^0(z)$, $z \ge 0$ условиям.

4. ИОНИЗАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (БРИВИНГ-МОДЫ)

В разд. 2 было установлено, что для знакоопределенных на отрезке $[0,L]$ скоростей $v_a(z)$, $v_i(z)$ система уравнений ионизации (1) имеет единственное стационарное решение, удовлетворяющее заданным (стационарным) граничным условиям. При этом граничные условия для n_a, n_i в зависимости от знака соответствующей скорости ставятся либо на левом конце $z = 0$, либо на правом $z = L$. Например, если $v_i(z) > 0$ на $[0, L]$, то на левом конце $z = 0$ считается заданной величина $n_i(0,t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$, а если $v_i(z) < 0$, то считается заданной величина $n_i(L,t)$, $t \geq 0$, и аналогично для n_a. Численно было установлено также, что в случае знакоопределенных скоростей v_a, v_i при $t \to +\infty$ решение начально-краевой задачи для системы (1) со стационарными краевыми условиями устанавливается, т.е. при $t \to +\infty$ сходится в равномерной метрике на $[0, L]$ к единственному стационарному решению системы (1). В частности, в этом случае ионизационные колебания (бривинг-моды) отсутствуют.

При исследовании процесса ионизации в СПД обычно считается $v_a(z) \equiv v_a = \text{const} > 0$. Таким образом, ограничиваясь этим практически важным случаем, можно утверждать, что необходимым (но, вероятно, не достаточным) условием существования ионизационных колебаний является знакопеременность скорости $v_i(z)$ на отрезке $[0, L]$. Этот вывод согласуется с экспериментальными данными по СПД, согласно которым [13] ионная скорость v_i всегда отрицательна по направлению z в прианодной области и, следовательно, применительно к одномерному случаю $v_i(z)$ имеет единственный нуль z_0 на $[0, L]$, причем $0 < z_0 < L$, $v_i'(z_0) > 0$ и, значит, $v_i(z)$ меняет знак с минуса на плюс, когда z, возрастая, проходит через точку z_0. Типичными модельными примерами в одномерной задаче являются функции $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $0 < z_0 < L$, $v_i(z) = a(z + z_1)(z - z_0)$, $a > 0$, $z_1 > 0$, $0 < z_0 < L$, $v_i(z) = -\cos(\pi z/L)$ (и тогда $z_0 = L/2$).

Рассмотрим причину возникновения бривинг-мод в случае, когда ионная скорость $v_i(z)$ имеет указанный выше специальный вид. В этом случае граничные условия ставятся только для n_a на левой границе $z = 0$, для n_i они формально не нужны, поскольку $v_i(0) < 0 < v_i(L)$ и, значит, ионы через границы $z = 0$ и $z = L$ покидают область $[0, L]$. Однако при этом возникает “внутреннее” граничное условие для n_i на характеристике $z = z_0$ для уравнения переноса ионов (1), которое объясняет возникновение бривинг-мод. Остановимся на этом подробнее. Начально-краевая задача на отрезке $[0, L]$ для системы (1) распадается на две начально-краевые задачи на отрезках $[0, z_0]$ и $[z_0, L]$ соответственно, которые решаются последовательно. При этом краевое условие $n_i(t) \underset{\text{def}}{=} n_i(z_0, t)$ для функции n_i на характеристике $z = z_0$, являющейся границей для обеих смешанных задач, ищется из решения задачи Коши для ОДУ

$$dn_i/dt = \beta n_a n_i - \alpha n_i, \quad n_i(0) = n_i^0(z_0), \quad \alpha \underset{\text{def}}{=} v_i'(z_0), \tag{42}$$

где $n_i^0(z)$, $0 \leq z \leq L$, – заданное начальное условие для n_i на отрезке $[0, L]$. Уравнение (42) является тривиальным следствием второго уравнения системы (1) в точке z_0 с учетом равенства $v_i(z_0) = 0$. Неизвестная функция $n_a(t) \underset{\text{def}}{=} n_a(z_0, t)$, входящая в (42), находится следующим образом. Если фиксировано граничное условие $n_{a0}(t)$, $t \geq 0$, для n_a на левой границе $z = 0$, то функция $n_a(t)$ ищется в банаховом пространстве B непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производной функций на полупрямой $t \geq 0$, как неподвижная точка отображения $F : B_0 \to B_0$, где $B_0 \subseteq B$ – замкнутая гиперплоскость в B коразмерности 1, определяемая условием $B_0 = \{n(t) \in B : n(0) = n_a^0(z_0)\}$, а $n_a^0(z)$, $0 \leq z \leq L$ – заданное начальное условие для n_a. Отображение F определяется следующим образом. Если $n(t) \in B_0$, то, положив $n_a(t) = n(t)$ в (42) и решая задачу Коши (42) на полупрямой $t \geq 0$ относительно n_i, находим функцию $n_i(t)$, $t \geq 0$, которую принимаем за краевое условие для n_i на правом конце $z = z_0$ (вместе с краевым условием $n_{a0}(t)$ для n_a на левом конце $z = 0$) в смешанной задаче на отрезке $[0, z_0]$ для системы (1). Решив эту смешанную задачу, получим, в частности, на правом конце $z = z_0$ функцию $n_a(z_0, t)$, $t \geq 0$, которая, по определению, и является образом $n(t)$ при отображении F. Итак, функция $n_a(t)$ в уравнении (42) – это неподвижная точка определенного выше отображения F. Решение $n_i(t)$ задачи Коши (42) для неподвижной точки $n_a(t)$ является правым краевым условием для n_i в смешанной задаче для системы (1) на отрезке $[0, z_0]$, а вместе с $n_a(t)$ дает левые краевые условия для n_i, n_a в смешанной задаче для системы (1) на отрезке $[z_0, L]$. Отметим, что смешанные задачи на отрезках $[0, z_0]$, $[z_0, L]$ относятся к задачам Гурса [14], а уравнение (42) совпадает с условием разрешимости [14] на характеристике для квазилинейной системы уравнений в частных производных, к которой относится и система (1). Аналитическое исследование существования и единственности неподвижной точки отображения F выходит за рамки настоящей работы. Численно существование неподвижной точки F одновременно с решением задачи Коши (42) устанавливается расчетом по разностной схеме (15). В частности, если k_0 – номер узла, где $z_{k_0} = z_0$, то разностная схема (15) для n_i в узле k_0 совпадает со схемой Эйлера решения задачи Коши (42) и дает сеточную функцию n_{i,k_0}, удовлетворяющую указанному выше начальному условию, а сеточная функция n_{a,k_0} дает сеточную аппроксимацию неподвижной точки F.

Как показали расчеты, ионизационные колебания (бривинг-моды) имеют место только тогда, когда решение задачи Коши (42) при $t \to +\infty$ выходит на периодический режим. При этом $n_a(t) = n_a(z_0, t)$ на характеристике $z = z_0$ удовлетворяет уравнению

$$dn_a/dt = -\beta n_a n_i + \gamma(t) n_a, \quad n_a(0) = n_a^0(z_0), \tag{43}$$

где $\gamma(t) = -\left[(\partial n_a/\partial z)(v_a/n_a)\right]\big|_{z=z_0}$ – периодическая для больших t и определяется видом скорости ионов $v_i(z)$. Из этой констатации вытекают важные и неочевидные выводы. Например, если ионная скорость $v_i(z)$ имеет хотя бы один нуль z_0 на интервале $(0, L)$, для которого $v_i'(z_0) \le 0$, то ионизационные колебания (бривинг-моды) отсутствуют. Действительно, тогда $n_i(z_0, t) = n_i(t)$, вычисляемая по решению задачи Коши (42), будет монотонно возрастающей на полупрямой $t \ge 0$ функцией и, следовательно, при $t \to +\infty$ не может выйти на периодический режим. Скажем, для $v_i(z) = -\cos[(2N+1)\pi z/L]$, $N > 0$ – целое бривинг-моды отсутствует. Хотя приведенный пример, согласно [13], имеет, скорее, теоретическое значение, он указывает на нетривиальность полученного результата.

Функция $\gamma(t)$ находится численно, решением разностных уравнений (15): на нулевом слое $\gamma^0 = -(n_{a,k_0}^0 - n_{a,k_0-1}^0)/h \cdot v_a/n_{a,k_0}^0$, где $z_0 = z_{k_0}$.

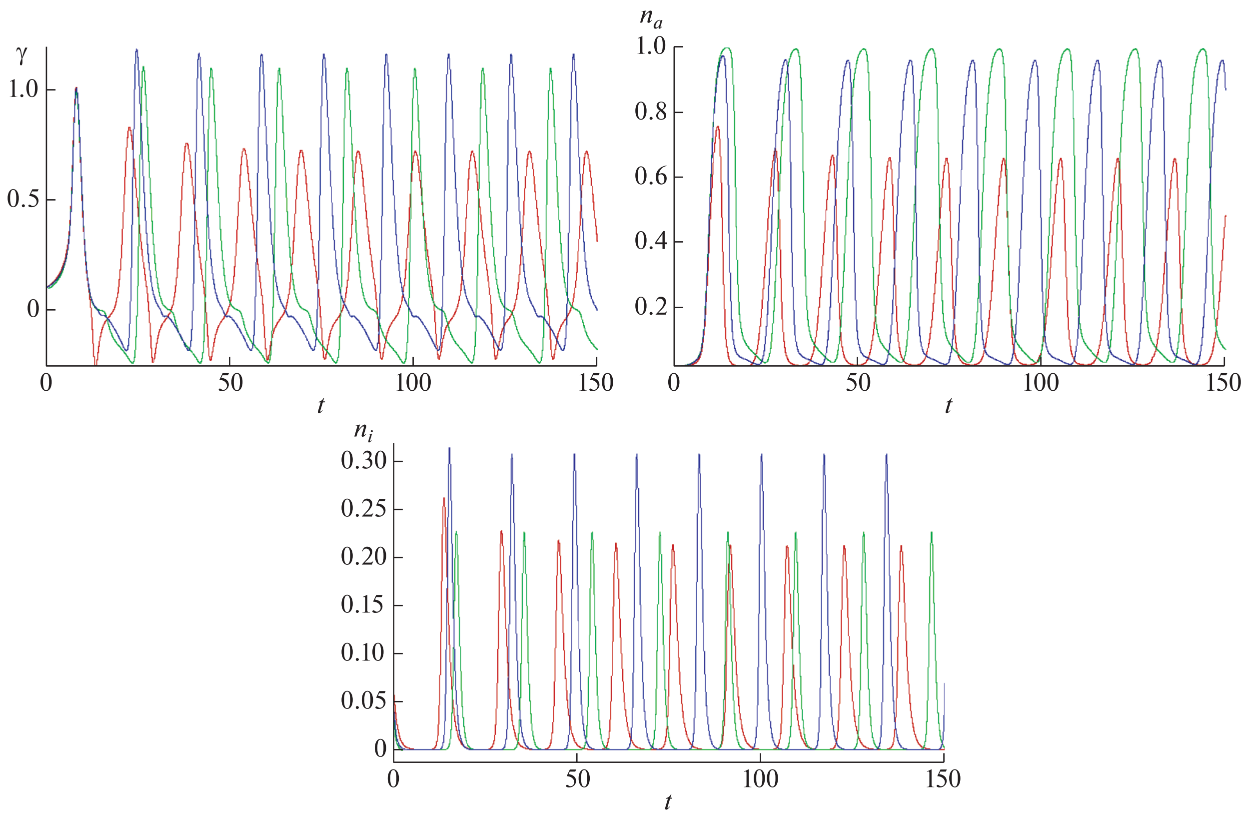
Расчеты значений n_i, n_a на характеристике $z = z_0$ и функции $\gamma(t)$ для трех типов скоростей ионов $v_i(z) = \alpha(z - z_0)$, $\alpha > 0$, $v_i = a(z + z_1)(z - z_0)$, $a > 0$, $v_i(z) = -\cos(\pi z/L)$ приведены на фиг. 4.

Если бы функция $\gamma(t)$ была положительной константой, то из (42), (43) вытекало бы, что на характеристике $z = z_0$ функции $n_i(t)$, $n_a(t)$ удовлетворяют уравнениям Лотки–Вольтерра, что, как показывают примеры, не имеет места. Поэтому существование бривинг-мод не удается связать с моделью Лотки–Вольтерра.

5. ИОНИЗАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Недостаток ионизационной модели (1) в том, что скорости $v_a(z)$, $v_i(z)$ считаются известными и не зависящими от времени t. Применительно к СПД обычно считается $v_a(z) \equiv v_a = \text{const} > 0$, а v_i находится из уравнения движения ионов. Движение ионов определяется электромагнитным полем в камере СПД и их столкновениями с боковыми керамическими стенками камеры и поверхностью анода. Наличие в установке сильного почти радиального магнитного поля и продольного электрического поля и, как следствие, справедливость соотношения $r_{\Lambda i} \gg L$ ($r_{\Lambda i}$ – ларморовский радиус ионов) предопределяют движение ионов преимущественно в продольном направлении, параллельно поверхностям боковых стенок. Поэтому столкновениями ионов и атомов Xe со стенками в первом приближении можно пренебречь. Электромагнитное поле в СПД складывается из индукционного и внешнего электромагнитного поля, порождаемого постоянными токами обмоток СПД и заданной разностью потенциалов между анодом и катодом. Пренебрегая индукционными полями, порождаемыми плазменными токами, в частности, столкновениями ионов с электронами, приходим к следующей упрощенной кинетической модели движения ионов и атомов:

$$\begin{gathered}\partial f_i/\partial t + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_i \rangle + \langle \mathbf{F}, \nabla_{\mathbf{v}} f_i \rangle = \beta n_i f_a, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = e m_i^{-1}\left(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]\right), \\ \partial f_a/\partial t + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} f_a \rangle = -\beta n_i f_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^3} f_i d\mathbf{v}, \quad \beta = \text{const} > 0,\end{gathered} \tag{44}$$



Фиг. 4. Значения n_i, n_a на характеристике $z = 1$ и функции $\gamma(t)$ для трех типов скоростей ионов $v_i(z) = z - 1$ (красная линия), $v_i(z) = (z + 0.5)(z - 1)$ (зеленая линия), $v_i(z) = -\cos(\pi z/2)$ (синяя линия).

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ – известные стационарные электрическое и магнитное поля в СПД, e – заряд электрона, m_i – масса иона Xe, $f_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, $f_a = f_a(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ – функции распределения ионов и атомов Xe по скоростям. Равенства (44) образуют систему интегродифференциальных уравнений относительно двух функций f_i, f_a и описывают процессы ионизации и ускорения ионов в СПД. После ее решения ионная скорость вычисляется по формуле:

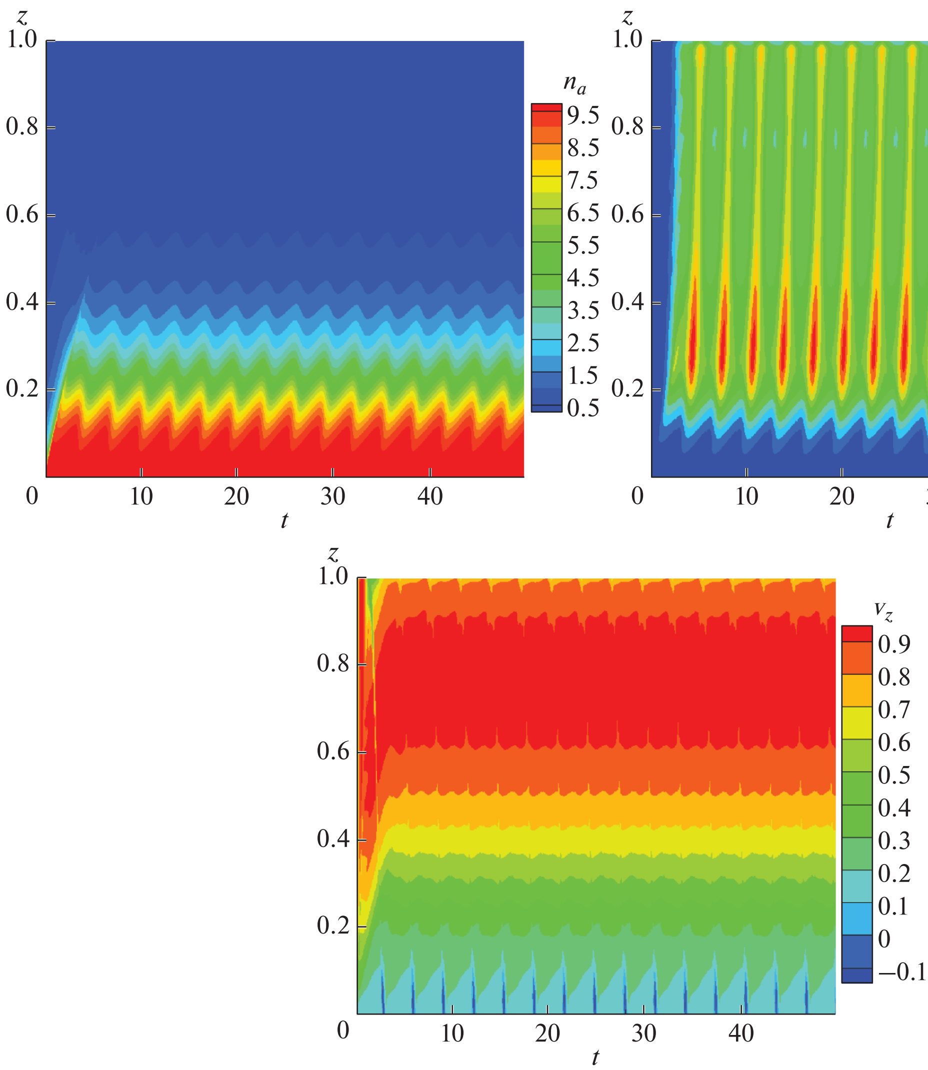
$$\mathbf{v}_i = n_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} f_i \mathbf{v} d\mathbf{v}. \tag{45}$$

Система (44) в случае плоской симметрии $f_i = \delta(v_x) f_i(t, z, v_y, v_z)$, $f_a = \delta(v_x)\delta(v_z)\delta(v_z - v_a) n_a(t, z) \times f_i(t, z, v_y, v_z)$, где $f_i(t, z, v_y, v_z)$, $n_a(t, z)$ – неизвестные функции, подлежащие нахождению, сводится к виду:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} + \frac{e}{m_i}\left[E_y + \frac{H_x v_z}{c}\right]\frac{\partial f_i}{\partial v_y} + \frac{e}{m_i}\left(E_z - \frac{H_x v_y}{c}\right)\frac{\partial f_i}{\partial v_z} = \beta n_i n_a \delta(v_y)\delta(v_z - v_a), \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial n_a}{\partial z} = -\beta n_i n_a, \quad n_i = \int_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z, \end{gathered} \tag{46}$$

где v_a – заданная скорость, с которой атомы Xe поступают в камеру СПД через левую границу со стороны анода. Интегрируя первое уравнение (46) по скоростному пространству $\mathbb{R}^2 = \{(v_y, v_z)\}$, получаем уравнение непрерывности для ионов с $\mathbf{v}_i$, вычисляемой по формуле (45):

$$\partial n_i/\partial t + \partial(v_{iz} n_i)/\partial z = \beta n_i n_a, \quad n_i = n_i(t, z), \quad v_{iz} = n_i^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f_i v_z dv_y dv_z.$$



Фиг. 5. Графики функций $n_i(z,t)$, $n_a(z,t)$, $v_z(z,t)$ на плоскости (z,t), демонстрирующие бривинг-моды, для значений параметров $\varepsilon = 1$, $k_I = 0.56$, $E_z = 2$, $H_x = 2$, $n_i^0 = 0.1$, $n_a^0(z) = 10/(1+100z)$, $v_a = 0.1$.

В результате приходим к модели ионизации (1), в которой $v_i(t,z)$ зависит от t и определяется движением ионов. Если выпрямить коаксиальную камеру СПД посредством экспоненциального отображения, то ось r перейдет в ось x, ось φ – в ось y и значит в (46) E_y – азимутальное электрическое поле, H_x – радиальное магнитное поле. Из уравнений Максвелла в случае плоской симметрии, $\partial/\partial y = \partial/\partial x = 0$, следует $E_y = \text{const}$, $E_z = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. В физически важном случае $E_y = 0$ в безразмерном виде система (46) сводится к следующей:

$$\begin{gathered}\partial f_i/\partial t + v_z\partial f_i/\partial z + \varepsilon H_x v_z \partial f_i/\partial v_y + \varepsilon\left[E_z - H_x v_y\right]\partial f_i/\partial v_z = k_I n_i n_a \delta(v_y)\delta(v_z - v_a),\\ \partial n_a/\partial t + v_a \partial n_a/\partial z = -k_I n_i n_a, \quad n_i = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_i dv_y dv_z,\end{gathered} \tag{47}$$

где $\varepsilon = t_0\omega_{ci}$, $\omega_{ci} = eH_0/(cm_i)$, $f_0 = n_0/v_0^2$, $H_0 = 200$ Гс – характерный масштаб напряженности магнитного поля, f_0 – характерный масштаб значений f. Наконец, считается $E_0 = v_0H_0/c$ (см. формулы (14)). Система (47) решается методом макрочастиц [17] на отрезке $[0, L]$ с граничным условием зеркального отражения для ионов на левой границе $z = 0$. На правой границе $z = L$ ускоренные ионы свободно покидают отрезок $[0, L]$. Начальное условие обеспечивает спокойный старт движения макрочастиц и задается в размерном виде максвеллианом

$$f_i\big|_{t=0}(z, v_y, v_z) = \frac{n}{2\pi T/m_i}\exp\left[-\frac{v_y^2 + v_z^2}{2T/m_i}\right],$$

где $n(z)$, $T(z)$ – заданные функции (характерный масштаб температуры $T_0 = 12.1$ эВ – температура ионизации Xe). Подробно численный метод изложен в [18].

На фиг. 5 представлены результаты решения системы (47), демонстрирующие возникновение ионизационных колебаний при $t \to +\infty$, причем продольная скорость ионов v_z зависит от времени, периодична для больших t и меняет знак в определенные моменты времени. Заметим, что для других входных данных концентрации n_i, n_a, вычисляемые по (47), выходят на установление [18] и, таким образом, бривинг-моды отсутствуют, но при этом разрядный ток испытывает низкочастотные осцилляции вокруг некоторых средних значений. Это означает, что колебания разрядного тока необязательно обусловлены ионизационными колебаниями.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для изучения ионизационных колебаний (бривинг-мод) в стационарных плазменных двигателях (СПД) выше предложены две математические модели ионизации – гидродинамическая и кинетическая. Уравнения гидродинамической модели проще и поддаются аналитическому исследованию. В частности, выше были классифицированы стационарные решения уравнений гидродинамической модели и дано их полное аналитическое решение в случаях постоянных скоростей атомов и ионов, что, в свою очередь, позволяет аналитически решать различные начально-краевые задачи. Ионизационные колебания на базе гидродинамической модели исследовались численно, и выше был сформулирован критерий (необходимое и достаточное условие) существования бривинг-мод. Недостаток гидродинамической модели в том, что скорость ионов считается заданной и стационарной, а процесс ионизации никак не связан с ускорением ионов. В более сложной кинетической модели скорость ионов определяется из их движения, а процессы ионизации и ускорения ионов исследуются совместно. В кинетической модели, также как и в гидродинамической, существуют бривинг-моды, но картина ионизационных колебаний отличается от гидродинамического случая. Возможности кинетической модели намного шире, чем гидродинамической. В частности, кинетическая модель позволяет найти распределение ионного тока и силу тяги СПД и проанализировать причины паразитических колебаний тока и силы тяги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козубский К.Н., Мурашко В.М., Рылов В.П., Трифонов Ю.В., Ходенко В.П., Ким В.П., Попов Г.А., Обухов В.А.* СПД работает в космосе // Физика плазмы. 2003. Т. 29. № 3. С. 277–792.
2. *Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V.* History of the Hall Thrusters Development in USSR // IEPC-2007-142, 30th International Electric Propulsion Conference, Florence, Italy, September 17–20, 2007.
3. *Ким В.П., Семенкин А.В., Хартов С.А.* Конструктивные и физические особенности двигателей с замкнутым дрейфом электронов. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
4. *Mitrofanova O.A., Gnizdor R.Yu., Murashko V.M., Koryakin A.I., Nesterenko A.N.* New Generation of SPT-100 // IEPC-2011-041, 32nd International Electric Propulsion Conference, Wiesbaden, Germany, September 11–15, 2011.
5. *Lotka A.J.* Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. New York: Dover Publications, Inc., 1956.
6. *Volterra V.* Lessons on the Mathematical Theory of Struggle for Life (Original: Leçons sur la théorie mathématique de la Lutte pour la vie). Paris: Gauthier-Villars, 1931. (Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер. с франц. 1976. 288 с.)
7. *Baranov V.I., Nazarenko Y.S., Petrosov V.A., Vasin A.I., Yashnov Y.M.* Theory of Oscillations and Conductivity for Hall Thrusters, 32nd Joint Propulsion Conference, AIAA 96-3192, 1996.
8. *Fife J., Martínez-Sánchez M., Szabo J.* A numerical study of low-frequency discharge oscillations in Hall thrusters, 33rd Joint Propulsion Conference, AIAA 97-3052, 1997.
9. *Barral S., Ahedo E.* On the Origin of Low Frequency Oscillations in Hall Thrusters // AIP Conf. Proc. 2008. V. 993. № 439. P. 439–442.
10. *Dale E., Jorns B.* Two-zone Hall thruster breathing mode mechanism, Part I: Theory, 36th International Electric Propulsion Conference, University of Vienna, Austria, 2019.

11. *Boeuf J., Garrigues L.* Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster // J. of Applied Physics. 1998. V. 84. № 7. P. 3541–3554.
12. *Chapurin O., Smolyakov A., Hagelaar G., Raitses Y.* On the mechanism of ionization oscillations in Hall thrusters // J. of Applied Physics. 2021. V. 129. № 23. P. 233307-1–233307-27.
13. *Бишаев А.М., Ким В.* Исследование локальных параметров плазмы в ускорителе с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения // Ж. техн. физ. 1978. Т. 48. № 9. С. 1853–1857.
14. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
15. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
16. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Некоторые математические вопросы ионизации плазмы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 94. 48 с.
17. *Березин Ю.А., Вшивков В.А.* Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980. 95 с.
18. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Гибридная модель стационарного плазменного двигателя // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 35. 48 с.

EDN: JDEOUL
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1180–1186

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ[1)]

В. А. Галкин[1,2,*], А. О. Дубовик[1,2,]**

[1] 628412 Сургут, ХМАО-Югра, пр-т Ленина, 1, Сургутский гос. ун-т, Россия

[2] 628422 Сургут, ХМАО-Югра, ул. Базовая, 34, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

**e-mail: val-gal@yandex.ru*

***e-mail: alldubovik@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.09.2021 г.
Переработанный вариант 15.09.2021 г.
Принята к публикации 16.12.2021 г.

Представлены классы точных решений для задач, описывающих течение несжимаемой жидкости в областях, изменяющихся во времени, полученные в рамках модели потенциального течения жидкости. Найденные точные решения используются для верификации результатов расчетов численного моделирования, полученные на основе метода контрольных объемов. Решение данного класса задач актуально в связи с исследованием задач управления параметрами несжимаемой жидкости за счет изменения области течения. Библ. 15. Фиг. 4. Табл. 2.

Ключевые слова: уравнения несжимаемой жидкости, точные решения, переменная область течения.

DOI: 10.31857/S0044466922050052

ВВЕДЕНИЕ

В рамках модели гидродинамики, описывающей течение несжимаемой жидкости, рассматривается задача о моделировании потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени. Получены точные решения двух тестовых задач. Решение данного класса задач связано с задачами управления параметрами несжимаемой жидкости за счет изменения области течения. Постановка этого класса задач представлена в [1].

Исследованию задач динамики жидкости в областях, изменяющихся во времени, посвящено большое количество научных работ, например [2]–[6], однако все эти работы посвящены исключительно численному моделированию, а результаты расчетов проверяются сравнением с натурными экспериментальными данными или расчетами других авторов. Исключением является работа [7], в которой рассматривается задача о набегании волны, движущейся с постоянной скоростью, на вертикальный цилиндр. В этой статье представлено аналитическое решение внешней трехмерной задачи о потенциальном течении несжимаемой невязкой жидкости в неограниченной области со смешанными граничными условиями в области, изменяющейся во времени, при этом рассматриваются только постоянные значения потенциала скорости на границе области течения.

Верификация точными решениями результатов вычислительных экспериментов моделирования течения жидкости в изменяющихся во времени областях, как правило, отсутствует, что связано с ограниченностью количества известных классов точных решений рассматриваемых задач. В данной работе обобщаются на трехмерный случай точные решения и результаты численного моделирования потенциального течения жидкости в области, изменяющейся во времени, ранее представленные в двумерном варианте в [8]. Моделированию течения жидкости в области, изменяющейся во времени в рамках модели слоистого течения жидкости, и исследованию точного решения этой задачи посвящена работа [9].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-04-60123).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя [1], рассматривается система уравнений гидродинамики в эйлеровых координатах, описывающая течение несжимаемой жидкости в ограниченной области $D(t)$, $t > 0$, изменяющейся во времени:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0. \tag{1.2}$$

В качестве управляющего воздействия на течение жидкости задается нормальная проекция векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ на единичную внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к гладкой границе $D(t)$:

$$(\mathbf{u}, n)\big|_{\partial D(t)} = (\mathbf{V}, n)\big|_{\partial D(t)}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор скорости жидкости, t – время, ρ_0 – плотность жидкости, p – давление, μ – кинематическая вязкость, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ – заданная функция координат и времени. Предполагается, что плотность и кинематическая вязкость жидкость являются постоянными величинами. Положим $\rho_0 = 1$. Отметим, что поле давления p определяется из уравнений (1.1), (1.2) с точностью до произвольной функции времени. Поскольку в дальнейшем предполагается исследование задачи (1.1)–(1.3) в рамках модели потенциального течения жидкости, то начальное условие не накладывается. Вместо него накладывается условие потенциальности течения.

В случае потенциального течения жидкости $\mathbf{u} = \nabla\Psi$ [10] решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к решению задачи Неймана для уравнения Лапласа на нахождение потенциала скорости $\Psi(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x} \in D(t)$:

$$\Delta\Psi = 0, \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right|_{\partial D(t)} = (\mathbf{V}, \mathbf{n})\big|_{\partial D(t)}, \tag{1.5}$$

$$p = -\frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 - \frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Следствием условия несжимаемости жидкости является постоянство объема области $D(t)$ в любой момент времени $t \geq 0$

$$\operatorname{vol}\,D(t) \equiv \operatorname{vol}\,D(0). \tag{1.7}$$

В [1] в качестве деформаций области течения, удовлетворяющих (1.7), рассматриваются деформации, задаваемые однопараметрической группой преобразований $T_t : R_n \to R_n$. Эта группа преобразований задается динамической системой, описываемой автономной системой уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$с гладким векторным полем $\mathbf{W} : R_n \to R_n$, $\operatorname{div}\,\mathbf{W} = 0$ так, что $D(t) = T_t D(0)$. В данной работе деформации области течения $D(t)$ задаются динамической системой, описываемой неавтономной системой уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \qquad x(0) \in D(0), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{u}$ – гладкое векторное поле и выполняется условие (1.2).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Ниже описывается решение двух тестовых задач, при этом результаты численного моделирования верифицируются найденными точными решениями задач. В первой задаче область $D(t)$ – прямоугольный параллелепипед. Во второй задаче $D(t)$ – сферический слой.

Численное решение получено на основе метода контрольных объемов [11]. Решение уравнения Лапласа (1.4) найдено численно методом установления [12]. Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемой в результате дискретизации уравнений (1.4), (1.5) разностным оператором, найдено методом переменных направлений [11].

Аппроксимация расчетной области течения, состоящей из узлов сетки, производилась только в начальный момент времени. С течением времени эволюция узлов сетки подчиняется уравнению (1.8). В этих узлах наблюдались характеристики течения жидкости: скорость течения и давление в жидкости в каждый момент времени. То есть для идентификации параметров среды в произвольный момент времени используется лагранжева система координат [13], [14]. Подобная ситуация имеет место при применении метода “частиц” [15], часто используемого при решении задач механики сплошной среды, в которых наблюдается результат эволюции среды. Отметим, что проведение расчетов (1.4)–(1.6) в эйлеровых координатах является неудобным, поскольку для вычисления поля давления (1.6) требуется вычислить частную производную по времени от потенциала скорости $\Psi(\mathbf{x}, t)$, при этом необходимо учитывать, что эта функция в разные моменты времени имеет, вообще говоря, разную область определения $D(t)$, поэтому при расчетах используется переход к лагранжевой системе координат и, так как

$$\frac{d\Psi(\mathbf{x},t)}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \nabla\Psi\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

то в силу (1.8) вместо (1.6) имеем

$$p = \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Расчеты выполнены на серии испытаний при увеличении числа узлов сетки, при этом их результаты демонстрировали уменьшение погрешности в узлах сетки пропорционально квадрату шага сетки по пространственной переменной в сравнении с точным решением задачи, описываемым ниже.

2.1. Решение задачи в прямоугольном параллелепипеде с подвижными стенками

Первая тестовая задача рассматривается в прямоугольном параллелепипеде, одна из вершин которого остается неподвижной (ее удобно поместить в начало координат), положение остальных изменяется с течением времени. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость заполняет $D(0)$ – куб со стороной 1. В качестве управляющего воздействия на границе области течения – условие (1.5), задается следующее векторное поле:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = \alpha(t)\{x; y; -2z\},$$

где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция времени, при расчетах в тесте 1 полагается $\alpha(t) = \cos\pi t$, $\{x, y, z\}$ – декартовы координаты в области $D(t)$.

Аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) имеет вид

$$\Psi = \frac{\alpha(t)}{2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right), \tag{2.1}$$

$$p = -\frac{1}{2}\alpha^2(t)\left(x^2 + y^2 + 4z^2\right) - \frac{\alpha'(t)}{2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right). \tag{2.2}$$

Преобразование области $D(t)$ имеет вид

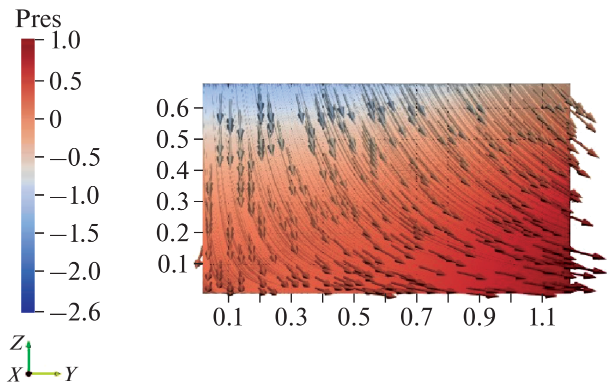
$$x = x_0 \exp\left\{\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\},$$

$$y = y_0 \exp\left\{\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\},$$

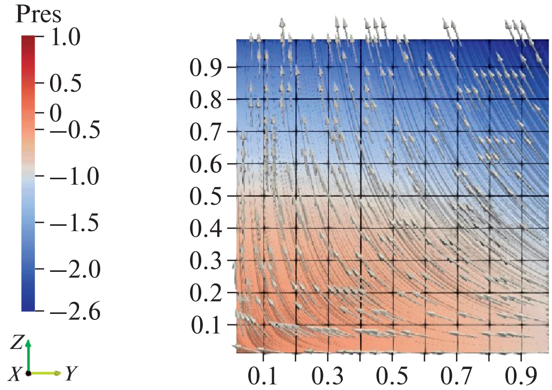
$$z = z_0 \exp\left\{-2\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\},$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in D(0)$. При таком преобразовании области ее объем сохраняется в любой момент времени, т.е. выполняется (1.7), что соответствует течению несжимаемой жидкости. В качестве $D(0)$ рассматривается куб со стороной 1. При указанном преобразовании области $D(t)$ с течением времени куб ($D(0)$) превращается в прямоугольный параллелепипед, вытянутый вдоль Ox и Oy, суженный вдоль Oz, а затем возвращается в исходное состояние. Далее область течения становится снова кубом, затем вытягивается вдоль Oz и сужается вдоль Ox и Oy, возвращается в исходное состояние. И описанное движение области течения повторяется сначала.

Результаты расчетов проиллюстрированы в условные моменты времени $t = 0.2$ и $t = 1$ на фиг. 1, 2 соответственно. На них изображено сечение области течения плоскостью yOz, сетка



Фиг. 1. Течение жидкости в плоскости yOz при $t = 0.2$ для теста 1.



Фиг. 2. Течение жидкости в плоскости yOz при $t = 1$ для теста 1.

числовых значений по оси Oy, расположенной горизонтально, и по оси Oz, расположенной вертикально, цветом отображены значения поля давления p, стрелками и линиями тока показано направление поля скорости $\mathbf{u} = \nabla\Psi$, соответствующее потенциальному течению жидкости.

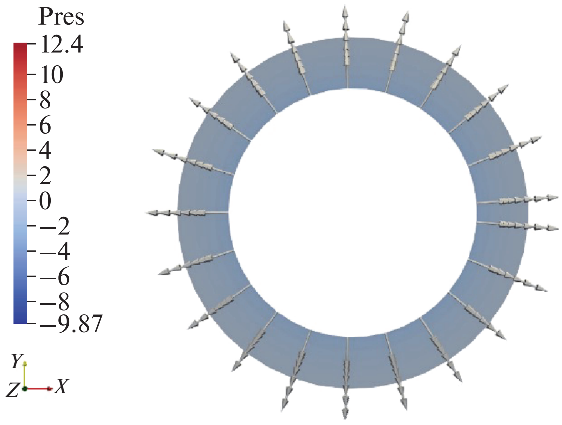
Найденное точное решение (2.1), (2.2) использовано для верификации результатов численного моделирования потенциального течения жидкости в прямоугольном параллелепипеде с подвижными стенками. Результаты представлены в табл. 1, при этом количество узлов сетки по пространственным переменным одинаково и составляет – 42, шаг по времени – 0.001. Расчеты проведены до условного момента времени $t = 1$.

2.2. Решение задачи в сферическом слое с переменными радиусами

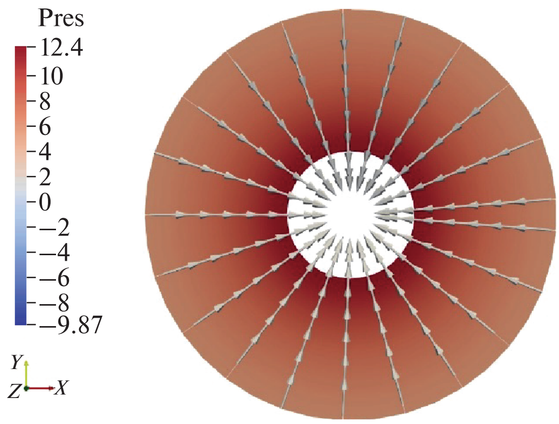
Вторая тестовая задача рассматривается в сферическом слое с переменными радиусами, центр области течения удобно поместить в начало координат, его положение не меняется с течением времени. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость заполняет $D(0)$ – шар радиуса 1, предполагается, что центр шара не принадлежит области течения $D(t)$, т.е. область течения есть

Таблица 1. Результаты верификации тестовой задачи 1

Параметр, f	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert$	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\dfrac{\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert}{\lvert f_{an}\rvert}\times 100\%$
Ψ	3×10^{-6}	0.3%
p	4×10^{-5}	3%



Фиг. 3. Течение жидкости в плоскости xOy при $t = 0.3$ для теста 2.



Фиг. 4. Течение жидкости в плоскости xOy при $t = 0.9$ для теста 2.

сферический слой, а радиус меньшей сферы исчезающе мал. В качестве управляющего воздействия на границе области течения: условие (1.5), задается следующее векторное поле:

$$\mathbf{V}(\rho,\theta,\varphi,t) = \left\{\frac{\alpha^2(t)\alpha'(t)}{\rho^2};\, 0;\, 0\right\},$$

где $\alpha(t)$ – произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция времени, при расчетах полагалось $\alpha(t) = \sin\pi t$. Векторное поле $\mathbf{V}$ записано в сферической системе координат $\{\rho, \theta, \varphi\}$, ρ – радиус-вектор некоторой точки области $D(t)$, θ – угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором, φ – угол между проекцией радиус-вектора на плоскость xOy и осью Ox.

Аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) имеет вид

$$\Psi = -\frac{\alpha^2(t)\alpha'(t)}{\rho}, \tag{2.3}$$

$$p = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^4(t)\alpha'^2(t)}{\rho^4} + \frac{2\alpha(t)\alpha'^2(t) + \alpha^2(t)\alpha''(t)}{\rho}. \tag{2.4}$$

Преобразование области $D(t)$ имеет вид

$$\rho(t) = \sqrt[3]{\rho_0^3 + \alpha^3(t)},$$
$$\varphi = \varphi_0,$$
$$\theta = \theta_0,$$

Таблица 2. Результаты верификации тестовой задачи 2

Параметр, f	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert$	$\max\limits_{\mathbf{x},t}\dfrac{\lvert f_{an} - f_{calc}\rvert}{\lvert f_{an}\rvert}\times 100\%$
Ψ	2×10^{-4}	0.07%
p	0.02	0.13%

где $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \in D(0)$. При таком преобразовании области течения ее объем сохраняется, т.е. выполняется 1.7, что соответствует течению несжимаемой жидкости. В качестве $D(0)$ рассматривается шар радиуса 1. При указанном преобразовании области $D(t)$ с течением времени шар превращается в сферический слой. Внешний радиус описывается выражением

$$\rho(t) = \sqrt[3]{1 + \alpha^3(t)},$$

внутренний – $\rho(t) = \alpha(t)$. Затем возвращается в исходное состояние.

Результаты расчетов проиллюстрированы в моменты времени $t = 0.3$ и $t = 0.9$ на фиг. 3, 4 соответственно. На них изображено сечение области течения плоскостью xOy, обозначения те же, что и предыдущих фигурах. В начальный момент времени и при $t = 1$ жидкость покоится, давление отсутствует. В силу симметрии характеристика течения жидкости в проекции на любую плоскость, проходящую через центр области, будет иметь такой же вид, как и на представленных фигурах.

Найденное точное решение (2.3), (2.4) использовано для верификации результатов численного моделирования потенциального течения жидкости в сферическом слое. Результаты представлены в табл. 2, при этом количество узлов сетки по пространственным переменным соответствует значениям, представленным в тесте 1, шаг по времени тот же. Расчеты так же проведены до условного момента времени $t = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены два класса точных решений уравнений Навье–Стокса в случае потенциального течения несжимаемой жидкости в переменной во времени области течения. При этом на границе области течения задается нормальная составляющая скорости течения. Результаты расчетов верифицированы найденными точными решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетелин В.Б., Галкин В.А.* Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // Докл. АН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.
2. *Antuono M., Sun P.N., Marrone S., Colagrossi A.* The δ–ALE–SPH model: an arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the δ–SPH model with Particle Shifting Technique // Computer & Fluids. 2020. 104806.
3. *Mohammed A. et al.* CFD and statistical approach to optimize the average air velocity and air volume fraction in an inert-particles spouted-bed reactor (IPSBR) system // Heliyon. 2021. V. 7. I. 3. E06369.
4. *Ren X., Xu K., Shyy W.* A multi-dimensional high-order DG-ALE method based on gas-kinetic theory with application to oscillating bodies // J. of Computat. Phys. 2016. V. 316. P. 700–720.
5. *Elgeti S., Sauerland H.* Deforming fluid domains within the finite element method: five mesh based tracking methods in comparison // Archives of Computat. Methods in Engng. 2016. V. 23. P. 323–361.
6. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Применение наложенных сеток к расчету течений в областях переменной геометрии // Сб. трудов XX юбилейной межд. конф. по вычисл. механ. и совр. прикладным системам. 2017. С. 395–397.
7. *Chatjigeorgiou I.K., Korobkin A.A., Cooker M.J.* Three-Dimensional steep wave impact on a vertical cylinder // J. of Hydrodynamics. 2016. V. 28. № 4. P. 523–533.
8. *Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О.* Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 13–16.

9. *Галкин В.А., Дубовик А.О.* О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 31–42.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебн. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
11. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
12. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
13. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 640 с.
14. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
15. *Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П.* Численное моделирование методами "Частицы-в-ячейках". Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. 360 с.

EDN: CMFWXK
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1187–1199

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

БЫСТРОСХОДЯЩИЙСЯ РЯД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОМ ТЕЧЕНИИ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ[1)]

© 2022 г. К. Ю. Малышев[1,*], Е. А. Михайлов[2,3], И. О. Тепляков[4]

[1] 119991 Москва, ул. Колмогорова, 1, стр. 2, НИИЯФ МГУ, Россия
[2] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, физ. ф-т МГУ, Россия
[3] 119991 Москва, Ленинский пр-т, 53, ФИАН, Россия
[4] 125412 Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2, ОИВТ РАН, Россия
**e-mail: kmalyshev08102@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.02.2022 г.
Переработанный вариант 04.02.2022 г.
Принята к публикации 11.03.2022 г.

Рассматривается линейная краевая задача, описывающая аксиально-симметричное установившееся электровихревое течение в вязкой жидкости в полусферическом сосуде. Течение, называемое электровихревым, возникает вследствие взаимодействия тока, пропускаемого через среду, с магнитным полем этого тока. В более ранних работах для решения задачи получены формальные двойные ряды по собственным функциям задачи Дирихле для оператора Лапласа в полушаровом слое. Коэффициенты Фурье выражаются через гипергеометрические функции и содержат собственные значения полушарового слоя. В настоящей работе классическое решение указанной краевой задачи представлено в виде однократных рядов по присоединенным функциям Лежандра. Коэффициенты разложения являются элементарными функциями радиальной переменной. Для корректного представления решения достаточно первых нескольких слагаемых. Дана оценка скорости убывания слагаемых. Гладкость решения обоснована при помощи леммы Вейля. Проделанные выкладки могут быть полезны для исследования других краевых задач, содержащих векторный оператор Лапласа. Библ. 30. Фиг. 5.

Ключевые слова: уравнение Навье–Стокса, специальные функции, неполный метод Галеркина, быстросходящийся ряд, лемма Вейля, электровихревое течение, стоксово приближение.

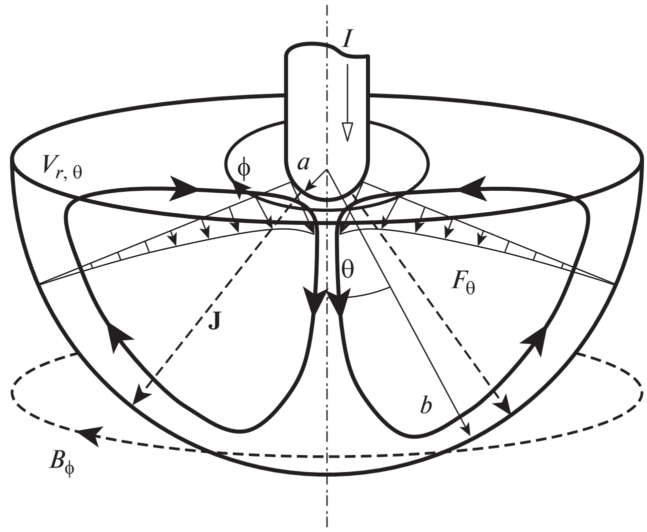
DOI: 10.31857/S0044466922070067

1. ВВЕДЕНИЕ

При прохождении через жидкую проводящую среду неоднородного электрического тока, в результате взаимодействия этого тока с собственным магнитным полем, в жидкости возникает электромагнитная сила, которая может приводить к образованию т.н. электровихревого течения (ЭВТ) [1]. Описанное явление возникает в многочисленных вязких проводящих средах: газах, плазме (разряды в атмосфере и электродуговых лабораторных приборах, некоторые процессы на Солнце), жидких металлах, электролитах. В промышленности ЭВТ сопровождает процессы электрошлакового и электродугового переплава металлов, электросварки, также ЭВТ возникают в электролите и электродах жидкометаллических батарей [2]–[5].

В настоящей работе изучена линейная краевая задача, описывающая течение жидкого металла под действием электрического тока в полушаровом слое. Данная задача рассмотрена и решена в работе [6] в переменных "векторный потенциал–завихренность". Имеет место проблема: в работе [6] решение представлено в виде двойного ряда, слагаемые которого выражены весьма громоздкими формулами, причем для получения удовлетворительного результата необходимо суммировать значительное число слагаемых. Для теоретического анализа задачи важно получить простое представление решения. В настоящей статье получено и обосновано новое представление решения задачи из [6].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание № 075-01056-22-00).



Фиг. 1. Схема образования ЭВТ в полусферическом сосуде.

Реализованный подход использует одномерную систему базисных функций, что позволяет получать формальные решения краевых и начально-краевых линейных задач с произвольными граничными условиями по радиальной переменной на сферических частях границы расчетной области и условием отсутствия касательных напряжений на плоской ее части.

2. ПОСТАНОВКА ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается аксиально-симметричное течение жидкого металла в сосуде полусферической формы, см. фиг. 1. Внешняя и внутренняя граничные полусферы являются электродами. Электрический ток плотности $\mathbf{J}$ растекается изотропно от внутреннего электрода к внешнему, порождая магнитное поле индукции $\mathbf{B}$. При этом на ток действует сила Ампера с объемной плотностью $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Течение является достаточно медленным и установившимся (стоксовым), что имеет место при относительно малых величинах тока. Токи, порождаемые движением жидкости и создаваемые ими магнитные поля пренебрежимо малы (используется электродинамическое приближение [1]). Также мы пренебрегаем сторонними магнитными полями (например, магнитным полем Земли [7]).

Формулы для плотности тока, магнитного поля и плотности силы Ампера имеют вид (см. подробный вывод в работе [1]):

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r^2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^3}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_\theta. \tag{1}$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, I – сила тока, r, θ, ϕ – сферические координаты.

Введем следующие масштабы: для расстояний – радиус внешнего электрода b; для плотности тока: $j_0 = Ib^{-2}$, для магнитного поля: $B_0 = \mu_0 Ib^{-1}$; для силы: $f_0 = \mu_0 I^2 b^{-3}$; для скорости: $v_0 = (f_0 b/\rho)^{1/2}$; (где ρ – плотность жидкости); для времени: $t_0 = b/v_0 = b^2/I(\rho/\mu)$; для давления: $p_0 = \rho v_0^2$. Аналогом числа Рейнольдса для ЭВТ является параметр электровихревого течения S [1]:

$$\mathrm{S} = \frac{f_0 b^3}{\rho\nu^2} = \frac{\mu_0 I^2}{\rho\nu^2},$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение Навье–Стокса в безразмерных переменных примет вид:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{S}}}\Delta\mathbf{v} + \frac{\cos\theta - 1}{4\pi^2 r^3\sin\theta}\mathbf{e}_\theta.$$

В рамках указанных модельных предположений можно пренебречь в уравнении Навье—Стокса конвективными слагаемыми, и рассматривать линейную начально-краевую задачу о движении несжимаемой вязкой жидкости. Установившийся процесс будет описываться уравнением Стокса с условием несжимаемости:

$$\frac{1}{\sqrt{S}}\Delta\mathbf{v} = \nabla p - \frac{\cos\theta - 1}{4\pi^2 r^3 \sin\theta}\mathbf{e}_\theta,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями. Следуя классическим работам о точечном [8] и плоском [9] центральных электродах, мы пренебрегаем деформацией поверхности жидкого металла и предполагаем выполненными на ней условия непротекания и отсутствия касательных напряжений. На сферических частях границы, отвечающих электродам, должны выполняться условия полного прилипания.

Теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для уравнения Стокса хорошо известны [10]. Математические исследования задач для уравнения Стокса активно ведутся и в настоящее время [15]. Для построения решения линейной задачи и связанной с ней нестационарной нелинейной задачи разработан ряд приближенных и точных методов [10]—[14]. Примеров, когда решение удается найти в явном виде, известно сравнительно немного. Необходимость в получении решений линейных краевых задач, а также соответствующих нестационарных линейных начально-краевых задач возникает при асимптотическом интегрировании начально-краевой задачи для нестационарного нелинейного уравнения Навье—Стокса (см. [11], [12] и указанную там литературу).

В настоящей статье исследуется постановка краевой задачи об электровихревом течении, сформулированная в [6]. Граничные условия, использованные в работе [6], эквивалентны условиям непротекания и отсутствия касательных напряжений на свободной поверхности, однако на сферической части границы выполняется лишь непротекание. При этом тангенциальная проекция скорости жидкого металла на электродах отлична от нуля. Обобщение нижеследующих выкладок позволяет преодолеть эту трудность, см. замечание 2.

Результаты исследований линейных постановок задач будут использоваться нами в дальнейшем для уточнения границ применимости линейного приближения в рассматриваемой задаче, путем сопоставления с численными расчетами нелинейной задачи.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЗАВИХРЕННОСТЬ

Векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$ и завихренность $\boldsymbol{\omega}$ вводятся по формулам:

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

Азимутальные составляющие завихренности и векторного потенциала обозначим через ω и Ψ. Все другие проекции равны нулю в силу аксиальной симметрии системы.

Задача рассматривается в области

$$\Omega := \left\{(r,\theta)\colon a < r < b,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\},$$

т.е. вертикальном сечении полушарового слоя $\Omega \times (0, 2\pi]$.

Математическая формулировка задачи в переменных $\omega - \Psi$ имеет вид (см. [6]):

$$\Delta\omega - \frac{\omega}{(r\sin\theta)^2} = f, \quad (r,\theta) \in \Omega; \tag{2}$$

$$\Delta\Psi - \frac{\Psi}{(r\sin\theta)^2} = -\omega, \quad (r,\theta) \in \Omega; \tag{3}$$

$$\omega\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Psi\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Выражение для источника:

$$f(r,\theta) = \frac{\sqrt{S}}{2\pi^2}\frac{1}{r^4}\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}. \tag{5}$$

Без ограничения общности положим $\frac{\sqrt{S}}{2\pi^2} = 1$. Неоднородность f соответствует электромагнитной силе $\mathbf{F}$ (1) так, что $f = (\operatorname{rot}\mathbf{F})_\phi$. Дальнейшие выкладки обобщаются на непрерывные источники вида $U(r)V(\theta)$ и на случай произвольной непрерывной (или более широкого класса) функции r, θ. Введем обозначение для дифференциального оператора:

$$L := \Delta - \frac{1}{(r\sin\theta)^2},$$

где L — азимутальная компонента векторного оператора Лапласа [16], действующая в дальнейшем только на аксиально-симметричные функции. Имеет место тождество [6] (u — не зависит от ϕ — азимутального угла):

$$\cos\phi Lu = \Delta(u\cos\phi). \tag{6}$$

Поэтому теорема единственности классического решения поставленной задачи следует из соответствующего результата для задачи Дирихле с обычным скалярным трехмерным оператором Лапласа Δ в области с кусочно-гладкой границей [17].

В работе [6] дано разложение искомых функций в ряды Фурье по системе собственных функций задачи Дирихле для трехмерного оператора Лапласа в полушаровом слое, в следующем виде:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} M_l \frac{f_{lk}}{\lambda_{lk}} Z_{lk}\left(r\sqrt{\lambda_{lk}}\right) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta), \tag{7}$$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} M_l \frac{f_{lk}}{(\lambda_{lk})^2} Z_{lk}\left(r\sqrt{\lambda_{lk}}\right) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta), \tag{8}$$

где

$$Z_{lk}\left(r\sqrt{\lambda_{lk}}\right) = \frac{J_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}r\right) N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right) - J_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right) N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}r\right)}{\left(\left(N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}b\right)^2 - N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right)^2\right)\left(N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right) N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}b\right)^2\right)^{-1}\right)}, \tag{9}$$

$$M_l = \pi^2\frac{(-1)^{l+1}(4l+1)(2l)!}{2^{2l+2}(l!)^2 l(2l+1)}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_{lk} = {}& \left.\frac{{}_1F_2\left(l-\frac{1}{2}; l+\frac{1}{2}, 2l+\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}x^2\lambda_{lk}\right)\left(x\sqrt{\lambda_{lk}}\right)^{2l+\frac{1}{2}}}{2^{2l+\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}\left(\Gamma\left(l-\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}}\right|_{x=a}^{x=b} - \frac{J_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right)}{N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right)}(\lambda_{lk})^{\frac{5}{4}}x\times \\ & \times\left[(2l-2)N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}x\right)\mathcal{S}_{-\frac{7}{2},2l-\frac{1}{2}}\left(x\sqrt{\lambda_{lk}}\right) - N_{2l-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}x\right)\mathcal{S}_{-\frac{5}{2},2l+\frac{1}{2}}\left(x\sqrt{\lambda_{lk}}\right)\right]\Bigg|_{x=a}^{x=b}, \end{aligned} \tag{11}$$

${}_1F_2(\alpha;\beta,\gamma;z)$ — обобщенный гипергеометрический ряд [18], [19, с. 183], $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$ — функции Бесселя и Неймана [16], [18], $\mathcal{S}_{\mu,\nu}(z)$ — вторая функция Ломмеля, понимаемая в смысле п. 10.73 монографии [20]. Число λ_{lk} есть k-й корень уравнения

$$J_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right) N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}b\right) = N_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}a\right) J_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}b\right). \tag{12}$$

Формальные ряды (7) и (8) сходятся абсолютно и равномерно по теореме Гильберта—Шмидта [21], [22].

Замечание 1. Формула (11) отличается от соответствующего выражения в работе [6] в связи с исправлением замеченных в [6] опечаток.

Будет доказано, что для представления классического решения задачи (2)–(4) с указанным источником f (5) достаточно степенных функций радиальной переменной и присоединенных функций Лежандра $P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)$. Решение получается в виде однократных сумм, что существенно облегчает его исследование и практическое применение.

4. НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Заметим, что дифференциальный оператор рассматриваемых уравнений имеет вид:

$$L = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}L_\theta,$$

где

$$L_\theta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}$$

есть угловая часть оператора. Будем применять неполный метод Галеркина [23], [24], взяв в качестве координатных функций собственные векторы спектральной задачи для L_θ:

$$L_\theta y = \lambda y, \quad y(0) < \infty, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{13}$$

Собственные векторы и собственные значения данной задачи имеют вид:

$$y_l(\theta) = P_{2l}^{(1)}(\cos\theta), \quad \lambda_l = -2l(2l+1), \quad l \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где

$$P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta\frac{dP_{2l}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$$

суть присоединенные функции Лежандра, $P_{2l}(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра [25]. Данная система функций ортогональна и полна в пространстве $\mathfrak{L}_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\sin\theta d\theta\right)$:

$$(y_m, y_n)_{\mathfrak{L}_2} := \int_0^{\pi/2} P_{2m}^{(1)}(\cos\theta)P_{2n}^{(1)}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \delta_{m,n}\frac{2n(2n+1)}{4n+1}.$$

Полнота указанного набора собственных функций в $\mathfrak{L}_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\sin\theta d\theta\right)$ следует из полноты [16, с. 135] в пространстве $\mathfrak{L}_2([0,\pi],\sin\theta d\theta)$ системы присоединенных функций Лежандра $\left\{P_m^{(1)}(\cos\theta)\right\}_{m=1}^{\infty}$, заданных на отрезке [0, π].

Введем для коэффициента Фурье угловой части источника f по системе $\{y_l\}_{l=1}^{\infty}$ обозначение

$$m_l := \frac{\left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}, y_l\right)_{\mathfrak{L}_2}}{(y_l, y_l)_{\mathfrak{L}_2}} = \frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\frac{4l+1}{2l(2l+1)}. \tag{15}$$

Решение задачи (2)–(4) строится в виде рядов по собственным функциям задачи (13), с коэффициентами, зависящими от радиуса:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)P_{2n}^{(1)}(\cos\theta), \tag{16}$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{Y}_n(r)P_{2n}^{(1)}(\cos\theta). \tag{17}$$

Умножим уравнения (2) и (3) на $P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)\sin\theta$, проинтегрируем по угловой переменной θ по отрезку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Применим интегрирование по частям, учитывая граничные условия. Коэффициенты разложения удовлетворяют следующим краевым задачам для уравнений Эйлера [26]:

$$r^2R_l'' + 2rR_l' - 2l(2l+1)R_l = r^{-2}m_l, \quad a < r < b; \quad R_l(a) = R_l(b) = 0, \tag{18}$$

$$r^2\mathcal{Y}_l'' + 2r\mathcal{Y}_l' - 2l(2l+1)\mathcal{Y}_l = -r^2R_l, \quad a < r < b; \quad \mathcal{Y}_l(a) = \mathcal{Y}_l(b) = 0. \tag{19}$$

Функция Грина задачи Дирихле [26] для оператора Эйлера имеет вид:

$$G^l(r,s) = \frac{r^{-2l-1}s^{-2l-1}}{(4l+1)\left(a^{4l+1}-b^{4l+1}\right)}\begin{cases}\left(s^{4l+1}-a^{4l+1}\right)\left(b^{4l+1}-r^{4l+1}\right), & a \le s \le r,\\ \left(b^{4l+1}-s^{4l+1}\right)\left(r^{4l+1}-a^{4l+1}\right), & r \le s \le b.\end{cases}$$

С помощью функции Грина получаем выражения для коэффициентов разложения завихренности (R_l) и потенциала ($\mathcal{Y}_l$):

$$R_l(r) = \frac{m_l}{w_l}\left(X_lr^{2l} + Y_lr^{-(2l+1)} - r^{-2}\right); \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_l(r) = -\frac{m_l}{w_l}\Biggl\{&\frac{X_l}{8l+6}\left[\frac{b^{4l+3}-a^{4l+3}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}r^{2l} + \frac{a^{4l+3}b^{4l+1}-a^{4l+1}b^{4l+3}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}r^{-(2l+1)} + r^{2l+2}\right] +\\ &+ \frac{Y_l}{8l-2}\left[\frac{a^2-b^2}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}r^{2l} + \frac{a^{4l+1}b^2-a^2b^{4l+1}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}r^{-(2l+1)} - r^{-2l+1}\right] -\\ &- \frac{1}{4l^2+2l}\left[\frac{a^{2l+1}-b^{2l+1}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}r^{2l} + \frac{a^{4l+1}b^{2l+1}-a^{2l+1}b^{4l+1}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}r^{-(2l+1)} - 1\right]\Biggr\}.\end{aligned} \tag{21}$$

Величины, зависящие от номера гармоники и радиусов граничных сфер, обозначены как:

$$w_l := 2(l+1)(2l-1),$$

$$X_l := \frac{a^{2l-1}-b^{2l-1}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}, \quad Y_l := \frac{a^{4l+1}b^{2l-1}-a^{2l-1}b^{4l+1}}{a^{4l+1}-b^{4l+1}}.$$

Получены выражения для завихренности и векторного потенциала в виде однократных рядов по системе собственных функций (14). Коэффициенты разложения векторного потенциала сведены к 5 степенным функциям радиуса, а завихренности – 3-м степенным функциям. Результат не содержит собственных значений оператора Лапласа в полушаровом слое, цилиндрических и и других специальных функций.

Приведем явное выражение первой гармоники векторного потенциала для случая $a = \frac{1}{10}$, $b = 1$:

$$\mathcal{Y}_1(r)P_2^{(1)}(\cos\theta) = \frac{5}{2016}\left[\frac{11000r^{-3} - 1111111000r^2}{123454321} + \frac{30000r^4 - 7777r^{-1}}{11111} + 7\right]\frac{3\sin 2\theta}{2}.$$

Замечание 2. Коэффициент разложения векторного потенциала имеет вид:

$$\mathcal{Y}_l(r) = A_lr^{2l} + B_lr^{-(2l+1)} + C_lr^{2l+2} + D_lr^{-2l+1} + E_l. \tag{22}$$

Здесь степенные функции r^{2l}, $r^{-(2l+1)}$, r^{2l+2}, r^{-2l+1} – элементы ядра квадрата радиального оператора Эйлера, E_l – частное решение неоднородного уравнения Эйлера четвертого порядка, получаемого из (18) и (19) исключением $R_l(r)$. Коэффициенты A_l, B_l, C_l, D_l в (22) можно определять из граничных условий на сферических частях границы. Это наблюдение дает возможность получать формальные решения краевых задач для системы уравнений (2), (3) с краевыми условиями произвольного рода на сферических частях границы полушарового слоя, если на плоской части границы имеется условие отсутствия касательных напряжений $\omega\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ (ср. [1], [8], [9]) в сочетании с условием непротекания $\Psi\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$. В частности, нетрудно обеспечить выполнение условий полного прилипания в виде $\Psi\big|_{r=a} = \dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\Big|_{r=a} = \Psi\big|_{r=b} = \dfrac{\partial\Psi}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0$.

5. СВЯЗЬ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ ДВОЙНОГО РЯДА

Для понимания соотношения между двумя представлениями решения полезно поставить начально-краевую задачу следующего вида:

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t} = L\tilde{\omega} - f, \quad (r,\theta) \in \Omega, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} = L\tilde{\Psi} + \tilde{\omega}, \quad (r,\theta) \in \Omega, \quad t > 0;$$

$$\tilde{\omega}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \tilde{\Psi}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \ge 0;$$

$$\tilde{\omega}\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{\Psi}\big|_{t=0} = 0, \quad (r,\theta) \in \Omega.$$

Ее решение с течением времени выходит на стационарный режим, удовлетворяющий задаче (2)–(4), см. [25]. Коэффициенты разложения стационарного режима по двумерным собственным функциям (выражения (7)–(12)) позволяют выписать решение:

$$\tilde{\omega}(r,\theta,t) = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_l f_{lk}}{\lambda_{lk}}\left(1 - \exp(-\lambda_{lk}t)\right) Z_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}r\right) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta),$$

$$\tilde{\Psi}(r,\theta,t) = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} M_l f_{lk}\left(\frac{1 - \exp(-\lambda_{lk}t)}{\lambda_{lk}^{\ 2}} - \frac{t\exp(-\lambda_{lk}t)}{\lambda_{lk}}\right) Z_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}r\right) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta).$$

В стационарном режиме внутренние суммы по k выражаются в конечном виде для каждого $l \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_l f_{lk}}{\lambda_{lk}} Z_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}r\right) = \frac{m_l}{w_l}\left(X_l r^{2l} + Y_l r^{-(2l+1)} - r^{-2}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_l f_{lk}}{\lambda_{lk}^{\ 2}} Z_{2l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{lk}}r\right) = A_l r^{2l} + B_l r^{-(2l+1)} + C_l r^{2l+2} + D_l r^{-2l+1} + E_l.$$

Ряды сходятся абсолютно и равномерно, по теореме В.А. Стеклова [27, с. 343] для оператора сферических функций Бесселя с граничными условиями Дирихле.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И ОБОСНОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Обсудим две особенности постановки задачи (2)–(4). Во-первых, данная задача поставлена в области с кусочно-гладкой границей, имеющей угловые точки. Во-вторых, оператор L содержит коэффициент $\dfrac{1}{(r\sin\theta)^2}$, обращающийся в бесконечность на границе расчетной области, при $\theta = 0$. Поскольку задачу (2)–(4) можно свести к двум краевым задачам Дирихле для трехмерного скалярного уравнения Пуассона (тождество (6)), эти факты не влияют на справедливость дальнейших построений.

Докажем, что построенные ряды представляют классическое решение [16, с. 168], [25] поставленной задачи. Для этого достаточно доказать, что найденные функции непрерывны вплоть до границы области Ω и являются дважды дифференцируемыми в открытой области Ω. Эта цель будет достигнута, если доказать, что ряды (16) и (17) представляют слабые решения соответствующих уравнений, а затем воспользоваться леммой Вейля [17, с. 130, теорема 50], [28, с. 68, теорема IX.25].

Проведем подробные рассуждения для ряда (16), который является формальным решением уравнения (2) и удовлетворяет граничному условию в (4). Аналогичные рассмотрения будут верны и для ряда (17).

Лемма 1. *Ряд* (16) *сходится абсолютно и равномерно на множестве* $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Доказательство. Трудность обоснования этого факта связана с отсутствием равномерной ограниченности использованных координатных функций. Имеет место оценка [29, Теорема 1]:

$$\left\| P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) \right\|_{C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \le \left\| P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) \right\|_{C[0,\pi]} \sim 2\overline{J_1}\, l, \quad l \to \infty.$$

Здесь $\overline{J_1} = \|J_1\|_{C(\mathbb{R})} \approx 0.5819$ – равномерная норма функции Бесселя $J_1(x)$, [29, Таблица 1]. Из соображений симметрии следует соотношение:

$$\left\| P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) \right\|_{C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \sim 2\overline{J_1}\, l, \quad l \to \infty. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь радиальные сомножители $R_l(r)$. Преобразуем выражение (20), и применим формулу Стирлинга:

$$R_l(r) = \frac{(-1)^l (2l)!(4l+1)}{2^{2l}(l!)^2\left(16l^4+16l^3-4l^2-4l\right)} \left(\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l-1}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{4l+1}} b^{-2}\left(\frac{r}{b}\right)^{2l} + \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+2}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{4l+1}} a^{-2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} - r^{-2} \right) = $$
$$= O\left(l^{-\frac{7}{2}}\right), \quad a \le r \le b, \quad l \to \infty. \tag{24}$$

Из (23) и (24) получаем

$$\forall (r,\theta) \in \bar{\Omega}: \left| R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) \right| = O\left(l^{-\frac{5}{2}}\right), \quad l \to \infty. \tag{25}$$

Из оценки (25) следуют абсолютная и равномерная сходимость ряда (16) и непрерывность функции $\omega(r,\theta)$ на множестве $\bar{\Omega}$.

Лемма 2. *Функция* $W := \omega\cos\phi$ *удовлетворяет трехмерному уравнению Пуассона в смысле обобщенных функций из* $D'(\Omega\times(0,2\pi])$:

$$\Delta W = f\cos\phi.$$

Доказательство. Поскольку $W \in C\left(\bar{\Omega}\times(0,2\pi]\right)$, то $W \in \mathfrak{L}_{1,loc}\left(\Omega\times(0,2\pi]\right)$. Следовательно, W может рассматриваться как регулярная обобщенная функция из пространства $D'(\Omega\times(0,2\pi])$. По определению [17, с. 40] нужно проверить выполнение интегрального тождества:

$$\forall \eta \in C_0^\infty\left(\Omega\times(0,2\pi]\right): \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} W\Delta\eta\, dV = \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \cos\phi f \eta\, dV,$$

где мера трехмерного объема имеет вид:

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

Имеет место цепочка равенств:

$$\int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \left(\cos\phi \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) \right) \Delta\eta\, dV = \tag{a}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \cos\phi R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta) \Delta\eta\, dV = \tag{b}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \eta\Delta\left[\cos\phi R_l(r) P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)\right] dV = \tag{c}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \eta\cos\phi\, r^{-4} m_l P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)\, dV = \tag{d}$$

$$= \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \eta\cos\phi r^{-4}\sum_{l=1}^{\infty} m_l P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)dV = \qquad (e)$$

$$= \int\limits_{\Omega\times(0,2\pi]} \eta\cos\phi f dV.$$

Законность перестановки порядка суммирования и интегрирования в равенстве (a) обосновывается доказанной выше равномерной сходимостью ряда (16) (лемма 1). В равенстве (d) – сходимостью в смысле $\mathfrak{L}_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\sin\theta d\theta\right)$ ряда Фурье для угловой части неоднородности f по системе собственных функций спектральной задачи (13). Равенство (b) получается из формулы Грина. В равенстве (c) учтены тождество (6) и уравнение в (18). Равенство (e) имеет место, поскольку одномерный ряд Фурье для угловой части неоднородности f сходится сильно в $\mathfrak{L}_2\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\sin\theta d\theta\right)$, откуда легко получить слабую сходимость [30] подинтегрального выражения в пространстве $\mathfrak{L}_2(\Omega\times(0,2\pi],dV)$.

Лемма 3. *Функция* ω *принадлежит классу гладкости* $C^\infty(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Непрерывность на $\bar{\Omega}$ следует из леммы 1. Бесконечная дифференцируемость имеет место в силу гипоэллиптичности оператора Лапласа [17, с. 126], [28], бесконечной дифференцируемости функции $f\cos\phi$ в полушаровом слое $\Omega\times(0,2\pi]$ и результата леммы 2. Действительно, гипоэллиптичность означает, что для слабого решения уравнения Пуассона верно (лемма Вейля [28, с. 68, теорема IX.25]):

$$W = \omega\cos\phi \in C^\infty(\Omega\times(0,2\pi]),$$

где гладкость имеет место по совокупности переменных. Поскольку ω не зависит от ϕ, получаем искомый результат.

Теорема. *Ряды* (16), (17) *представляют классическое решение задачи* (2)–(4).

Доказательство. Доказанная в леммах 1–3 гладкость функции ω, заданной в виде ряда (16), позволяет провести соответствующие рассуждения для ряда (17). Оценка скорости убывания слагаемых ряда для векторного потенциала изменяется:

$$\forall(r,\theta)\in\bar{\Omega}:\ \left|\mathcal{Y}_l(r)P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)\right| = O\left(l^{-\frac{11}{2}}l\right) = O\left(l^{-\frac{9}{2}}\right),\quad l\to\infty. \qquad (26)$$

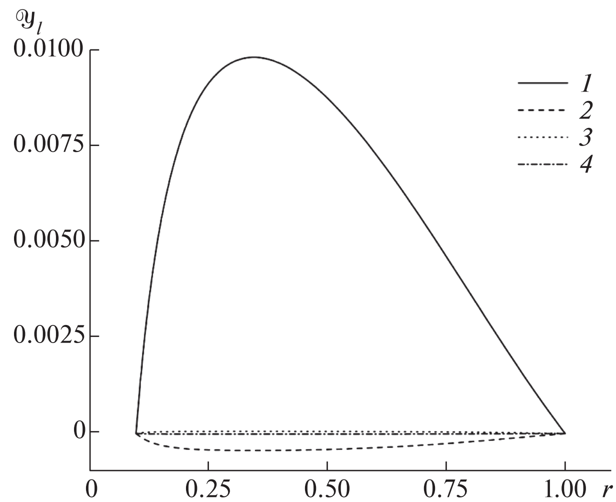
Оценка (26) может быть получена выкладкой, подобной (24). Также нетрудно видеть (формула (21)), что одно из слагаемых функции $\mathcal{Y}_l(r)$ убывает медленнее остальных, а именно, величина

$$E_l = \frac{m_l}{w_l}\frac{1}{4l^2+2l} = O\left(l^{-\frac{11}{2}}\right).$$

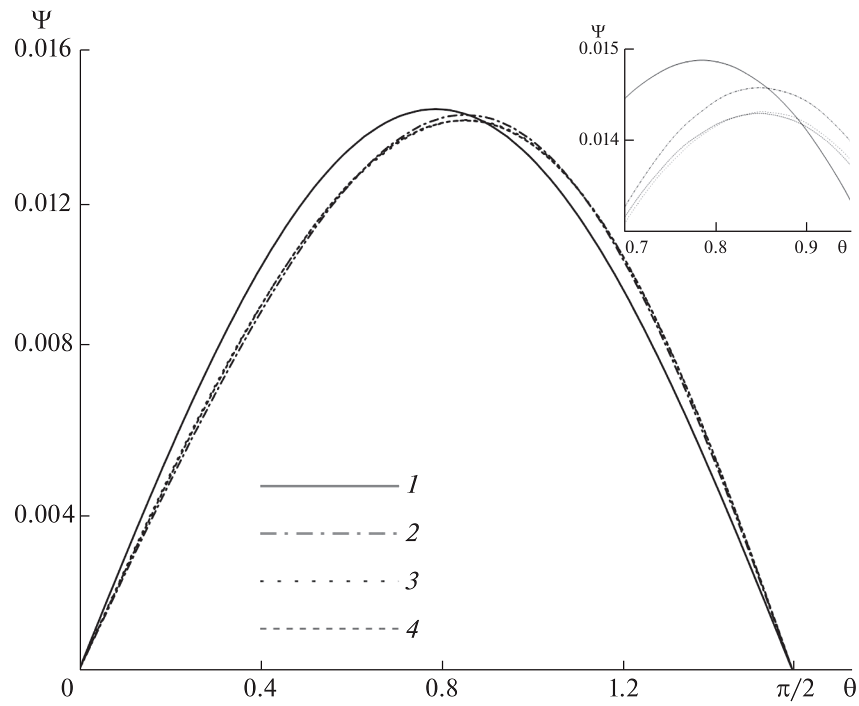
Учитывая (23), получаем (26). Тем самым ряды (16) и (17) удовлетворяют определению классического решения для задачи (2)–(4).

Ряд для векторного потенциала сходится быстрее, чем ряд для завихренности, что связано с двукратным применением функции Грина (“интегрирование ускоряет сходимость”). Ряды, слагаемые которых убывают быстрее, чем $O(l^{-4})$, в [23, с. 97] называют быстросходящимися. Высокая скорость сходимости ряда для векторного потенциала связана, помимо удачного выбора системы координатных функций, с тем, что фактически мы решали для векторного потенциала уравнение четвертого порядка. Подобная сходимость типична для задач данного класса – ср. [23, с. 27].

В заключение этого раздела приведем графики первых нескольких амплитуд $\mathcal{Y}_l(r)$ векторного потенциала, для наглядной демонстрации убывания слагаемых ряда (17). На фиг. 2 представлены графики для случая $a = 1/10$, $b = 1$. Несмотря на линейное возрастание равномерной нормы присоединенных функций Лежандра $P_{2l}^{(1)}(\cos\theta)$, см. [29], для практических целей можно ограничиваться первыми несколькими слагаемыми ряда (17). Графики частичных сумм ряда (17) представлены на фиг. 3 и 4. Видно, что третья и четвертая частичные суммы совпадают с графической



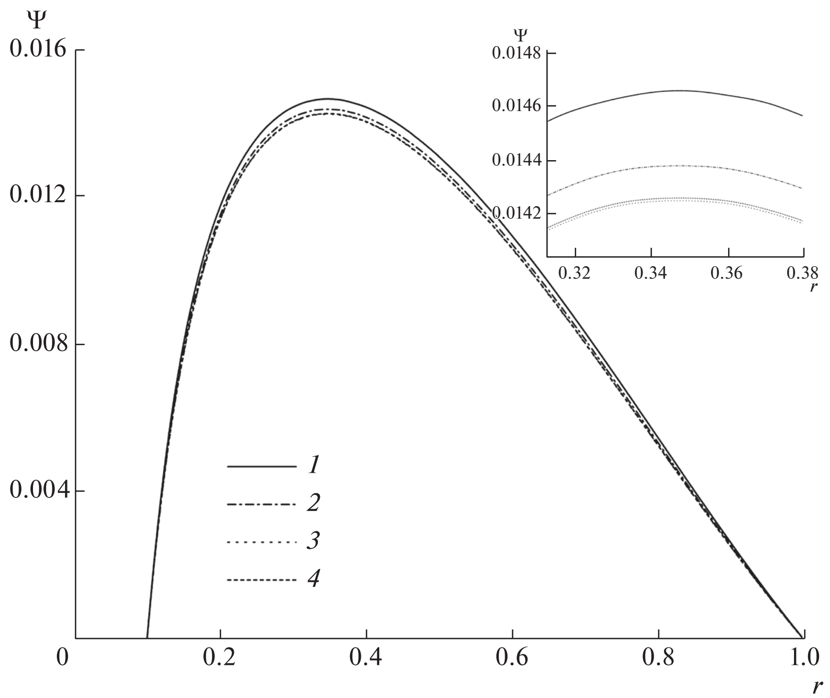
Фиг. 2. Амплитуды $\mathcal{Y}_l(r)$ векторного потенциала для первых нескольких значений l. *1* – $l = 1$; *2* – 2; *3* – 3; *4* – 4.



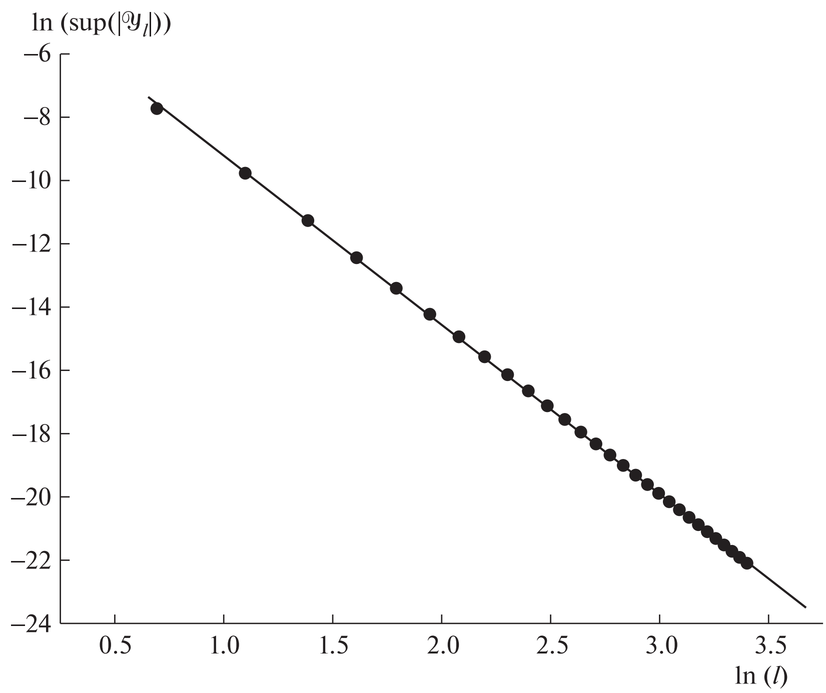
Фиг. 3. Зависимость частичных сумм векторного потенциала от угла для различного количества гармоник N при фиксированном значении радиуса, $r = 4/10$. *1* – $N = 1$; *2* – 2; *3* – 3; *4* – 4. Врезка – увеличенная область максимума.

точностью. Для теоретических оценок, не требующих точного рассмотрения, можно ограничиваться одним или двумя слагаемыми, в то же время при необходимости легко вычислить частичную сумму любого порядка, используя современные компьютерные средства.

Оценка убывания коэффициентов разложения векторного потенциала была проверена с помощью построения графиков функций $\mathcal{Y}_l(r)$ и визуального определения положения максимума. Зависимость логарифма максимума модуля функции $\mathcal{Y}_l(r)$ от логарифма номера l для $l = \overline{2;40}$ представлена на фиг. 5. Зависимость может быть аппроксимирована функцией вида $Y = A + BX$, где $A \approx -3.87$; $B \approx -5.35$. Результат обработки графиков $\mathcal{Y}_l(r)$ позволяет сделать вывод,



Фиг. 4. Зависимость частичных сумм векторного потенциала от радиуса для различного количества гармоник N при фиксированном значении угла, $\theta = \pi/4$. *1* – $N = 1$; *2* – 2; *3* – 3; *4* – 4. Врезка – увеличенная область максимума.



Фиг. 5. Убывание равномерной нормы амплитуд векторного потенциала в логарифмическом масштабе, $l = \overline{2,40}$.

что оценка (26) вполне годится для практических целей, а ее возможное уточнение нецелесообразно. Отличие показателя степенного убывания равномерной нормы $\mathcal{Y}_l(r)$ от найденного $O(l^{-5,5})$ объясняется тем, что данная оценка асимптотическая и может не выполняться для конкретных, не слишком больших значений l.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для задачи об электровихревом течении в полусферическом сосуде дано представление решения в виде быстросходящихся однократных рядов. Двойные ряды по цилиндрическим функциям, содержащие собственные значения полушарового слоя и гипергеометрические функции, сведены к одномерным, состоящим из элементарных слагаемых. Для одномерных рядов получены оценки сходимости в равномерной норме. Вывод этих оценок потребовал применения результатов об асимптотике равномерной нормы присоединенных функций Лежандра, полученных сравнительно недавно в работе [29]. На основании леммы Вейля обоснована гладкость функций, представляемых найденными рядами.

Обобщая проделанные выкладки, можно получать формальные решения краевых задач о течениях в полушаровом слое с произвольными граничными условиями на сферических частях границы, если только на свободной поверхности соблюдается условие отсутствия касательных напряжений. Источник f также может быть любым.

Предполагается применение полученных результатов в целях уточнения границ применимости линейного приближения в задачах об электровихревом течении в полушаровом сосуде путем сравнения с численными расчетами соответствующих нелинейных краевых задач.

Авторы благодарят А.Н. Боголюбова, А.А. Быкова и А.В. Бадьина за ценные обсуждения настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И.* и др. Электровихревые течения / Под ред. Щербинина Э.В. Рига: Зинатне, 1985.
2. *Компан Я.Ю., Щербинин Э.В.* Электрошлаковые сварка и плавка с управляемыми МГД-процессами. М.: Машиностр., 1989, 272 с.
3. *Ячиков И.М., Карандаева О.И., Ларина Т.П.* Моделирование электровихревых течений в ванне дуговой печи постоянного тока. Магнитогорск, 2008.
4. *Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Игумнов В.С., Оксман А.А.* Экспериментальное исследование электровихревых течений в полусферическом объеме // ТВТ. 1995. Т. 33. № 1. С. 3–6.
5. *Herreman W., Bénard S., Nore C., Personnettaz P., Cappanera L., Guermond J.-L.* Solutal buoyancy and electrovortex flow in liquid metal batteries // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5. 074501.
6. *Михайлов Е.А., Тепляков И.О.* Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоксовом приближении // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2018. № 2. С. 39–44.
7. *Виноградов Д.А., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О.* Влияние магнитного поля Земли на структуру электровихревого течения // Докл. АН. 2018. Т. 483. № 1. С. 24–27.
8. *Sozou C., Pickering W.M.* Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemishherical container // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. Part 4. P. 641–650.
9. *Sozou C., Pickering W.M.* Magnetohydrodynamic flow in a container due to the discharge of an electric current from a finite size electrode // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. V. 362. P. 509–523.
10. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
11. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049–1070.
12. *Chernous'ko F.L.* Motion of a body with a cavity filled with a viscous fluid at large Reynolds numbers // J. Appl. Math. Mech. 1966. V. 30. № 3. P. 568–589.
13. *Сакс Р.С.* Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // Уфимск. матем. ж. 2011. Т. 3. № 1. С. 53–79.
14. *Сакс Р.С.* Глобальные решения уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся пространстве // ТМФ. 2010. Т. 162. № 2. С. 196–215.
15. *Пухначев В. В.* Задача Дирихле для уравнения Стокса // Матем. заметки. 2017. Т. 101. Вып. 1. С. 110–115.
16. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Наука, 2004.
17. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином, 2007.
18. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
19. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
20. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
21. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. Гостехтеориздат, 1933.

22. *Ильин В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа // Успехи. матем. наук. 1958. 13:1(79). С. 87–180.
23. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 708 с.
24. *Свешников А.Г.* Неполный метод Галеркина // Докл. АН СССР. 1977. 236:5. С. 1076–1079.
25. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1999.
26. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
27. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
28. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Изд-во Мир, 1978.
29. *Холшевников К.В., Шайдулин В.Ш.* Асимптотика равномерной нормы присоединенных функций Лежандра P_n^k (случай $k \ll n$) // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2009. № 2. С. 86–93.
30. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

EDN: VVRUZS
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1200–1208

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

ДИСКРЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Н. Я. Моисеев[1,*], В. М. Шмаков[1,]**

[1] 456770 Снежинск, Челябинская обл., а/я 245, ул. Васильева, 13, ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина, Россия

**e-mail: nik.moiseev.43@mail.ru*

***e-mail: v.m.shmakov@vniitf.ru*

Поступила в редакцию 11.03.2021 г.
Переработанный вариант 31.08.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Представлена дискретно-аналитическая разностная схема для решения нестационарного кинетического уравнения переноса частиц (нейтронов) в многогрупповом изотропном приближении методом расщепления. Особенность разностной схемы состоит в том, что решение уравнения переноса в многогрупповой модели сведено к решениям уравнений в одногрупповой модели. Эффективность схемы достигнута за счет вычисления интеграла столкновений из аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают эволюцию нейтронов, пришедших в группу g из всех групп g'. Решения уравнений находятся без итераций по интегралу столкновений и без обращения матриц. Метод решения естественным образом обобщается на решение задач в многомерных пространствах и позволяет осуществить счет в параллельном режиме. Библ. 18. Фиг. 2.

Ключевые слова: кинетическое уравнение переноса нейтронов, интеграл столкновений, метод расщепления, аналитические решения.

DOI: 10.31857/S0044466922070079

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетическое уравнение переноса частиц (в частности, нейтронов) является интегро-дифференциальным уравнением “жесткого” типа. В общем случае правая часть уравнения содержит интеграл столкновений от искомой (неизвестной) функции. Одним из подходов к решению таких уравнений является подход, в котором решения находятся с применением методов дискретных ординат *Sn*, *Dsn* (см. [1], [2]) по неявным разностным схемам итерациями по интегралу столкновений (см. [3]–[5]). Явные численные методы требуют неприемлемых для реальных расчетов ограничений на выбор шага интегрирования по времени. Основные трудности, которые возникают при решении уравнений итерационными методами по неявным схемам, связаны с точностью численных решений и медленной сходимостью итераций. Если систему уравнений решать методами Фотрие (см. [6]) или Райбики (см. [7]), то приходится иметь дело с решением систем линейных алгебраических уравнений с полными матрицами взаимодействия между группами (см. [8]). Как следствие, в случае решения реальных задач требуются большие объемы оперативной памяти и большие временные затраты.

В [9]–[11] описаны подходы к решению уравнения переноса частиц методом расщепления по физическим процессам. Метод расщепления позволяет вычислять интеграл столкновений в случае отсутствия взаимодействия между группами из разностных уравнений без итераций. Однако, если есть взаимодействие между группами, то решения находятся итерациями по интегралу столкновений. Например, в [11] интеграл столкновений вычисляется из решения системы линейных алгебраических уравнений итерациями. Поэтому проблема эффективного решения нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов остается актуальной.

Здесь представлена дискретно-аналитическая разностная схема (ДАРС) для решения интегро-дифференциального уравнения переноса нейтронов в многогрупповом изотропном приближении на основе модифицированного метода расщепления (см. [11]). Особенность разностной схемы состоит в том, что решение уравнения переноса в многогрупповом приближении сводится к решениям уравнений в одногрупповом приближении в каждой группе. Интеграл столкновений вычисляется из аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые описывают эволюцию нейтронов, пришедших в группу g из всех групп g'.

Представлены результаты расчетов модельной задачи из работы [12]. Задача имеет точные решения. Показано, что результаты расчетов по методике ДАРС удовлетворительно согласуются с точными решениями и с результатами расчетов по одномерному аналогу методики из [13]. Время решения модельной задачи по методике ДАРС по сравнению со временем решения по одномерному аналогу методики из [13] сократилось в 1.8 раза.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

2.1. Постановка задачи

Особенности подхода к численному решению нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов рассмотрим на примерах решения задач в многогрупповом изотропном приближении для плоской геометрии с одной пространственной переменной. В этом случае система уравнений переноса нейтронов записывается в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{v_g}\frac{\partial N_g}{\partial t}+\mu\frac{\partial N_g}{\partial x}+\alpha_g N_g=0.5\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'}+0.5f_g,\\ S_g=\int_{-1}^{1}N_g(\mu)\,d\mu.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь t, x — независимые переменные по времени и по пространству, μ — косинус угла между направлением полета нейтрона и осью x, $-1\le\mu\le 1$, g — индекс группы, $g=1,2,\ldots,G$, G — число энергетических групп, v_g — модуль вектора скорости нейтронов группы g, $N_g(t,x,\mu)$ — плотность потока нейтронов, $S_g(t,x)$ — полный поток нейтронов, α_g — коэффициент поглощения нейтронов группы g, $\beta_{g',g}$ — коэффициент размножения нейтронов с учетом переходов нейтронов между группами g и g', f_g — независимый источник нейтронов. Разностная сетка по переменной μ с центрами $\mu_m=0.5(\mu_{m+1/2}+\mu_{m-1/2})$ и шагами $\Delta\mu=\mu_{m+1/2}-\mu_{m-1/2}=2/M$, $m=1,\ldots,M$, включает M направлений движения частиц. Решается смешанная краевая задача с начальными и граничными условиями в области $D=\{x_L\le x\le x_R,\ -1\le\mu\le 1\}$. Начальные условия: $N_g(0,x,\mu)=N_g^0(x,\mu)$. Граничные условия: на левой границе — $N_g(t,x_L,\mu)=\varphi_L(t,x_L,\mu)$ для $\mu>0$, на правой — $N_g(t,x_R,\mu)=\varphi_R(t,x_R,\mu)$ для $\mu<0$, где $\varphi_L(t,x_L,\mu)$, $\varphi_R(t,x_R,\mu)$ — известные функции. Предполагаем, что плотность вещества $\rho=1$. Требуется найти решение системы уравнений (1) для $t>0$.

2.2. Полунеявная разностная схема

В пространстве (t,x) построим разностную сетку с шагами интегрирования τ, h_j вдоль координатных линий t, x соответственно. Границы ячеек разностной сетки с центрами в точках x_j обозначим как $x_{j-1/2}$, $x_{j+1/2}$, где j — индекс ячейки. Введем обозначения: $N_{g,j}^{n+1}$, $N_{g,j}^{n}$ — плотности потока нейтронов, $S_{g,j}^{n+1}$, $S_{g,j}^{n}$ — полные потоки нейтронов, $\alpha_{g,j}^{n+1}$, $\alpha_{g,j}^{n}$ — коэффициенты поглощения, $\beta_{g',g,j}^{n+1}$, $\beta_{g',g,j}^{n}$ — коэффициенты размножения нейтронов, $f_{g,j}^{n+1}$, $f_{g,j}^{n}$ — источники. Величины с индексами $n+1$, n — это основные величины, которые относятся к центрам ячеек в моменты времени $t^{n+1}=t^n+\tau$ и t^n соответственно. Величины с дробными индексами $N_{g,j+1/2}$, $N_{g,j-1/2}$, которые будем называть “большими”, как в схемах С.К. Годунова (см. [14]), относятся к граням ячеек и являются вспомогательными. В дальнейшем индекс j у величин в центрах ячеек опущен.

Заменив интеграл в (1) квадратурной формулой, проинтегрировав первое уравнение в (1) по ячейке фазового пространства (t,x) на интервале по времени $\left[t^n,t^{n+1}\right]$ и применив теорему Гаусса–Остроградского, получим систему разностных уравнений, которые запишем в виде

$$\begin{gathered} N_g^{n+1} = \left\{N_g^n - \frac{v_g\tau\mu}{h}\left(N_{g,j+1/2} - N_{g,j-1/2}\right)\right\} + v_g\tau\left[-\alpha_g^* N_g^* + 0.5\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}^* S_{g'}^* + 0.5 f_g^*\right], \\ S_g^{n+1} = \sum_{m=1}^{M} N_{g,m}^{n+1}\Delta\mu. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь величины α_g^*, $\beta_{g',g}^*$, f_g^*, $N_g^*, S_{g'}^*$ – это средние значения функций на интервале t^n, t^{n+1}, которые вычислены в момент времени $t^n + \tau^*$, где $0 \le \tau^* \le \tau$. Введем вспомогательные потоки нейтронов $N_g^{n+1/2}$, которые вычисляются из выражения в фигурных скобках в (2) по разностным уравнениям

$$N_g^{n+1/2} = N_g^n - \frac{v_g\tau\mu}{h_j}\left(N_{g,j+1/2} - N_{g,j+1/2}\right). \tag{3}$$

Заменив выражение в фигурных скобках на вспомогательный поток $N_g^{n+1/2}$ в первом уравнении в (2) и подставив выражение для N_g^{n+1} в квадратурную формулу для S_g^{n+1} в (2), получим для вычисления основных величин N_g^{n+1}, S_g^{n+1} эквивалентную систему разностных уравнений в виде

$$\begin{gathered} \frac{N_g^{n+1} - N_g^{n+1/2}}{v_g\tau} + \alpha_g^* N_g^* = 0.5\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}^* S_{g'}^* + 0.5 f_g^*, \\ \frac{S_g^{n+1} - S_g^{n+1/2}}{v_g\tau} + \alpha_g^* S_g^* = \sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}^* S_{g'}^* + f_g^*. \end{gathered} \tag{4}$$

Вычтем первое уравнение в (4) из второго, умноженного на 0.5, получим для вычисления потоков нейтронов N_g^{n+1} дополнительное эквивалентное уравнение

$$\frac{(0.5S_g^{n+1} - N_g^{n+1}) - (0.5S_g^{n+1/2} - N_g^{n+1/2})}{v_g\tau} = -\alpha_g^*(0.5S_g^* - N_g^*),$$

в котором полные потоки S_g^{n+1} находятся из второго уравнения в (4). Дополнительное уравнение можно использовать, например, для контроля, либо как основное уравнение для вычисления потока нейтронов N_g^{n+1}.

Особенность системы уравнений (4) в том, что полный поток нейтронов S_g^{n+1} вычисляется из разностного уравнения, а не по квадратурной формуле из (2). Уравнение (3) можно интерпретировать как разностное уравнение, описывающее перенос нейтронов по пространству в вакууме, уравнения (4) – взаимодействие нейтронов с веществом. Если “большие” величины $N_{g,j+1/2}$, $N_{g,j-1/2}$ вычислять по величинам с нижнего временного слоя t^n или с верхнего t^{n+1}, то разностная схема (3) будет явной или неявной соответственно. В обоих случаях разностное уравнение (3) аппроксимирует дифференциальное уравнение переноса нейтронов по пространству в вакууме:

$$\frac{1}{v_g}\frac{\partial N_g}{\partial t} + \mu\frac{\partial N_g}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем предполагаем, что вспомогательные потоки $N_g^{n+1/2}$ находятся по известной разностной схеме повышенной точности, которая аппроксимирует уравнение (5), например, по схемам из [15] или [16]. Предполагая, что вопрос с выбором разностной схемы (3) решен, сосредоточим внимание на подходах к решению уравнений (4).

Если потоки N_g^* и S_g^* относятся к верхнему временному слою, т.е. $N_g^* = N_g^{n+1}$ и $S_g^* = S_g^{n+1}$, то разностная схема (4) будет неявной схемой Эйлера первого порядка по времени с погрешностью аппроксимации $O(\tau)$. В случае одногрупповой модели решение по неявной разностной схеме (4), в том числе и по дополнительному уравнению, не вызывает затруднений и находится без итераций по интегралу столкновений.

Если вспомогательные потоки нейтронов $N_g^{n+1/2}$ вычисляются по явной разностной схеме (3), а величины N_g^*, S_g^* относятся к верхнему временному слою t^{n+1}, то схему (4) будем называть *полунеявной разностной схемой*.

Первые дифференциальные приближения (см. [17]) разностных уравнений в (4) выпишем в виде

$$\frac{1}{v_g}\frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g = 0.5\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'} + 0.5f_g + (\tau^* - 0.5\tau)\frac{dF_1}{dt},$$

$$\frac{1}{v_g}\frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g = \sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'} + f_g + (\tau^* - 0.5\tau)\frac{dF_2}{dt}, \tag{6}$$

$$F_1 = 0.5\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'} + 0.5f_g - \alpha_g N_g, \quad F_2 = \sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'} + f_g - \alpha_g S_g.$$

Из первых дифференциальных приближений (6) следует, что система разностных уравнений (4) с постоянными коэффициентами α_g^*, β_g^*, f_g^* аппроксимирует систему ОДУ

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_g}\frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g &= 0.5\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'} + 0.5f_g,\\ \frac{1}{v_g}\frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g &= \sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'} + f_g\end{aligned} \tag{7}$$

с первым порядком по времени. Начальные данные для ОДУ (7) — это решения уравнения (5). Очевидно, что дополнительное уравнение аппроксимирует ОДУ

$$\frac{1}{v_g}\frac{d\ln(0.5S_g - N_g)}{dt} = -\alpha_g,$$

решение которого выписывается в квадратурах явно. Поэтому оно может быть полезным, например, для контроля точности.

2.3. Подход к вычислению интеграла столкновений

Рассмотрим подход к вычислению интеграла столкновений, основанный на анализе выражения

$$\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'}$$

как источника нейтронов, которые появились в группе g из всех групп g' с плотностью потока $\bar{N}_g$. Интеграл столкновений в правой части ОДУ (7) представим в виде

$$\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}S_{g'}(t,x) = B_g\sum_{g'=1}^{G}\bar{\beta}_{g',g}S_{g'}(t,x) = B_g\bar{S}_g(t,x)\,,$$

где введены следующие обозначения:

$$B_g = \sum_{g'=1}^{G}\beta_{g',g}, \quad \bar{\beta}_{g',g} = \frac{\beta_{g',g}}{B_g}, \quad \sum_{g'=1}^{G}\bar{\beta}_{g',g} = 1, \quad \bar{S}_g(t,x) = \sum_{g'=1}^{G}\bar{\beta}_{g',g}S_{g'}(t,x).$$

Выполнив преобразования

$$\bar{S}_g = \sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g} S_{g'} = \sum_{g'=1}^{G}\sum_{m=1}^{M} \bar{\beta}_{g',g} N_{g',m}\Delta\mu = \sum_{m=1}^{M}\sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g} N_{g',m}\Delta\mu = \sum_{m=1}^{M} \bar{N}_{g,m}\Delta\mu,$$

получим для плотности потока нейтронов $\bar{N}_g$ и полного потока $\bar{S}_g$ выражения в виде

$$\bar{N}_g = \sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g} N_{g'}, \quad \bar{S}_g = \sum_{m=1}^{M} \bar{N}_{g,m}\Delta\mu. \tag{8}$$

Система ОДУ (7) с введенными обозначениями записывается в виде

$$\begin{gathered} \frac{1}{v_g}\frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g = 0.5 B_g \bar{S}_g + 0.5 f_g, \\ \frac{1}{v_g}\frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g = B_g \bar{S}_g + f_g \end{gathered} \tag{9}$$

с начальными данными $N_g(0,x,\mu) = N_g^{n+1/2}\left(t^{n+1},x,\mu\right)$, $S_g(0,x) = S_g^{n+1/2}\left(t^{n+1},x\right)$.

Если полный поток $\bar{S}_g$ известен, то решение системы уравнений (9) не вызывает затруднений. В этом случае систему уравнений (9) можно рассматривать как одногрупповую модель для описания эволюции нейтронов N_g. Коэффициент B_g – это суммарный коэффициент размножения нейтронов группы g. Квадратурную формулу (8) для потока $\bar{S}_g$ можно рассматривать как аппроксимацию соответствующего интеграла в системе уравнений (1) для потока нейтронов $\bar{N}_g$. Следовательно, поток $\bar{S}_g$ есть полный поток нейтронов $\bar{N}_g$. Поскольку нейтроны $\bar{N}_g$ принадлежат группе g, то эволюция этих нейтронов должна описываться так же, как и нейтронов N_g этой группы, а именно, уравнениями (9). Поэтому плотность потока нейтронов $\bar{N}_g$ и полный поток $\bar{S}_g$ должны удовлетворять уравнениям (9), которые можно записать в виде

$$\begin{gathered} \frac{1}{v_g}\frac{d\bar{N}_g}{dt} + \alpha_g \bar{N}_g = 0.5 B_g \bar{S}_g + 0.5 f_g, \\ \frac{1}{v_g}\frac{d\bar{S}_g}{dt} = -\left(\alpha_g - B_g\right)\bar{S}_g + f_g \end{gathered} \tag{10}$$

с начальными данными

$$\bar{N}_g(0,x,\mu) = \bar{N}_g^n = \sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g} N_{g'}^{n+1/2}\left(t^{n+1},x,\mu\right),$$

$$\bar{S}_g(0,x) = \bar{S}_g^n = \sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g} S_{g'}^{n+1/2}\left(t^{n+1},x\right).$$

Система уравнений (10) – это аналог одногрупповой системы уравнений для потока нейтронов $\bar{N}_g$. Для вычисления полного потока $\bar{S}_g$ достаточно выписать решение второго уравнения в (10). Уравнение для полного потока $\bar{S}_g$ в (10) линейное и интегрируется в квадратурах. Поэтому решение системы уравнений (10) не вызывает каких-либо затруднений. Если коэффициенты постоянные, то полный поток $\bar{S}_g$ вычисляется из аналитического решения по формулам

$$\bar{S}_g^{n+1} = \begin{cases} \gamma_3 \bar{S}_g^n + (1-\gamma_3)\dfrac{1}{\alpha_g - B_g} f_g, & \alpha_g \neq B_g, \\ \bar{S}_g^n + v_g \tau f_g, & \alpha_g = B_g, \end{cases} \\ \gamma_3 = \exp\left(-v_g \tau\left(\alpha_g - B_g\right)\right). \tag{11}$$

Следовательно, интеграл столкновений также вычисляется аналитически. Если данный подход к вычислению интеграла столкновений применить к разностным уравнениям (4), то систему разностных уравнений (4) запишем в виде

$$\frac{N_g^{n+1} - N_g^{n+1/2}}{v_g \tau} + \alpha_g^* N_g^* = 0.5 B_g^* \bar{S}_g^* + 0.5 f_g^*,$$

$$\frac{S_g^{n+1} - S_g^{n+1/2}}{v_g \tau} + \alpha_g^* S_g^* = B_g^* \bar{S}_g^* + f_g^*.$$

Здесь

$$B_g^* = \sum_{g'=1}^{G} \beta_{g',g}^*, \quad \bar{\beta}_{g',g}^* = \frac{\beta_{g',g}^*}{B_g^*}, \quad \bar{S}_g^* = \sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g}^* S_{g'}^*.$$

Уравнение для вычисления полного потока $\bar{S}_g^*$ запишем в виде

$$\frac{\bar{S}_g^{n+1} - S_g^{n+1/2}}{v_g \tau} = -(\alpha_g^* - B_g^*)\bar{S}_g^* + f_g^*.$$

Следовательно, если величины $N_g^* = N_g^{n+1}$ и $S_g^* = S_g^{n+1}$, $\bar{S}_g^* = \bar{S}_g^{n+1}$, то решение преобразованной неявной системы уравнений (4) не вызывает каких-либо затруднений, находится без итераций по интегралу столкновений и без обращения матриц.

2.4. Дискретно-аналитическая разностная схема

Рассмотрим подход к построению разностной схемы ДАРС, в которой для вычисления основных величин N_g^{n+1}, S_g^{n+1} используются аналитические решения ОДУ (9), (11) вместо разностных уравнений (4). Подставив выражение для $\bar{S}_g$ из уравнения (11) в уравнения (9), получим для вычисления потока нейтронов N_g и полного потока S_g линейную систему ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g}\frac{dN_g}{dt} + \alpha_g N_g &= 0.5 B_g \gamma_3 \bar{S}_g^n + 0.5\left(1 + \frac{1-\gamma_3}{\alpha_g - B_g} B_g\right) f_g, \\ \frac{1}{v_g}\frac{dS_g}{dt} + \alpha_g S_g &= B_g \gamma_3 \bar{S}_g^n + \left(1 + \frac{1-\gamma_3}{\alpha_g - B_g} B_g\right) f_g. \end{aligned} \tag{12}$$

Поскольку при построении разностных схем предполагается, что коэффициенты поглощения, размножения и функция источника постоянны на интервале интегрирования по времени $\left[t^n, t^{n+1}\right]$, а разностные уравнения (4) аппроксимируют ОДУ (7), то аналитические решения ОДУ (7) могут быть взяты как численные решения уравнений (1) вместо решений по разностной схеме (4). Аналитические решения ОДУ (7) сводятся к решениям ОДУ (12) и записываются в виде

$$\begin{gathered} N_g^{n+1} = \gamma_2 N_g^{n+1/2} + 0.5(\gamma_3 - \gamma_2)\bar{S}_g^n + 0.5\frac{1-\gamma_3}{\alpha_g - B_g} f_g, \\ S_g^{n+1} = \gamma_2 S_g^{n+1/2} + (\gamma_3 - \gamma_2)\bar{S}_g^n + \frac{1-\gamma_3}{\alpha_g - B_g} f_g, \\ \bar{S}_g^n = \sum_{g'=1}^{G} \bar{\beta}_{g',g}^n S_{g'}^{n+1/2}, \quad \gamma_2 = \exp(-v_g \tau \alpha_g). \end{gathered} \tag{13}$$

Разностная схема (13) – это схема с положительными коэффициентами. Поэтому решения всегда положительные и нет ограничения на выбор шага интегрирования по времени. Однако этот плюс может стать минусом в ситуациях, когда шаг интегрирования по времени большой, а искомые функции и коэффициенты имеют большой градиент. В таком случае усреднение величин будет “грубым” на интервале интегрирования по времени $\left[t^n, t^{n+1}\right]$, а погрешность решения – большой. Поэтому ограничения на выбор шага интегрирования по времени могут быть связаны с требованиями к точности численных решений. Простейший подход к устранению таких ситуаций – это уменьшение шага интегрирования по времени, что приводит к увеличению времени счета. Второй подход – это построение схемы предиктор–корректор повышенной точности типа Рунге–Кутты. В этом случае коэффициенты и полный поток $\overline{S}_g$ предварительно рассчитываются на этапе предиктор в момент времени $t^* = t^n + \tau^*$, $\tau^* \geq 0.5\tau$. Основные величины рассчитываются на этапе корректор в момент времени t^{n+1}. Если $\tau^* = 0.5\tau$, то погрешность аппроксимации будет порядка $O(\tau^2)$. Если на этапе предиктор применить двухточечную формулу Гаусса (см. [18]), то получим разностную схему с погрешностью аппроксимации порядка $O(\tau^3)$.

Третий кардинальный подход – это вычисление основных величин с контролем точности в каждой точке по критерию точности, либо проведение двух расчетов с шагами интегрирования τ и 0.5τ и сравнение результатов расчетов. Если результаты не удовлетворяют заданной точности, то шаг интегрирования уменьшается в два раза, и расчет в точке повторяется. Если результаты удовлетворяют заданной точности, то в качестве решения принимается последний результат. Такая технология счета является стандартной для решения ОДУ, обеспечивает гарантированную точность и эффективность расчетов (см. [18]).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Работоспособность методики ДАРС проверялась сравнением результатов расчетов с результатами расчетов по одномерному аналогу методики из [13] и с точными решениями задачи из [12]. Одномерный аналог методики [13] назовем методикой ГРАНАТ.

Задача. Дана сферически-симметричная область $|r| \leq 1$. В начальный момент времени задано распределение нейтронов, которое рассчитывается по формуле

$$N_g = N_{0,g}(1 + \mu r), \quad N_{0,g} = 1, \quad g = 1, 2, 3, 4.$$

Источники $f_g = 0$. Скорости в группах: $v_1 = 10$, $v_2 = 5$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$. Коэффициенты поглощения в группах: $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.5$, $\alpha_4 = 1$. На правой границе $r = 1$ задан поток нейтронов $N = (1 + \mu)\exp(-t)$. Задана матрица коэффициентов $\beta_{g',g}$:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.08 & 0.07 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0.12 & 0.08 \\ 0.08 & 0.15 & 0.6 & 0.17 \\ 0.05 & 0.15 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Решения с матрицей M_4 соответствуют общему случаю, когда все группы взаимодействуют между собой. Точное решение для потока нейтронов N_g записывается в виде (см. [13])

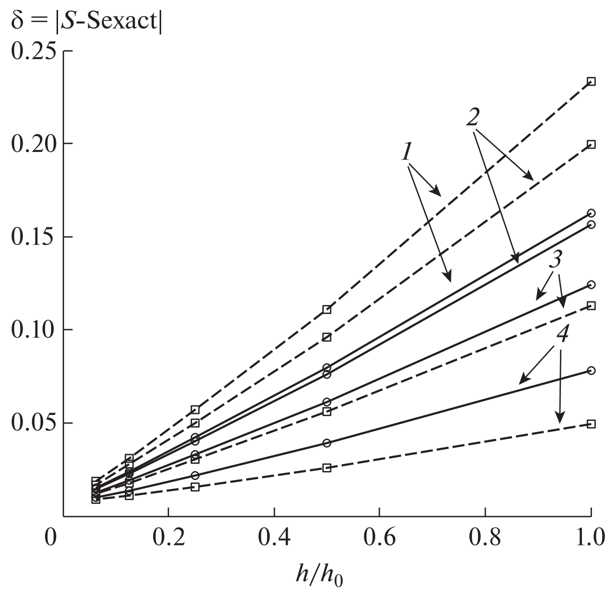
$$N_g = N_{0,g}(1 + \mu r)\exp(-\lambda t), \quad \lambda = \alpha_g v_g,$$

для полного потока нейтронов – $S = 2N_0 \exp(-\lambda t)$. Константы α_g, v_g подобраны так, что $\lambda = 1$. Поэтому решения в группах совпадают. Требуется рассчитать полные потоки в момент времени $t = 1$.

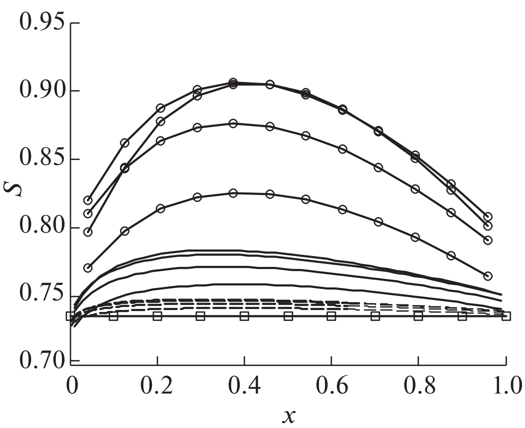
Задачи считались на последовательности сгущающихся разностных сеток с числом интервалов по пространству и по углам 12 × 12, 25 × 25, 50 × 50, 100 × 100, 200 × 200 с шагами интегрирования по времени 0.002, 0.001, 0.0005, 0.00025, 0.000125 соответственно.

На фиг. 1 представлены зависимости от шагов интегрирования по пространству погрешностей аппроксимации по четырем группам, которые получены в расчетах на сходимость по методикам ДАРС и ГРАНАТ в момент времени $t = 1$.

На фиг. 2 представлены распределения полных потоков в области по четырем группам в расчетах по методике ДАРС на трех различных разностных сетках по пространству и по углу в момент времени $t = 1$.



Фиг. 1. Зависимости от h/h_0 погрешностей аппроксимации по четырем группам 1, 2, 3, 4: квадраты – методика ГРАНАТ, кружочки – методика ДАРС.



Фиг. 2. Зависимости от x полных потоков S по четырем группам: кружочки – разностная сетка 12 × 12, сплошные линии – 50 × 50, пунктирные – 200 × 200, квадраты – точное решение.

Из анализа графиков на фиг. 1 следует, что погрешности аппроксимации по методикам ДАРС и ГРАНАТ удовлетворительно согласуются между собой, стремятся к нулю при уменьшении шагов интегрирования по времени и по пространству, а численные решения сходятся к точному решению.

Из анализа графиков на фиг. 2 следует, что результаты расчетов по методике ДАРС сходятся к точному решению при уменьшении шагов интегрирования по времени и по пространству и удовлетворительно согласуются между собой на разностных сетках 50 × 50 и далее. На "грубых" разностных сетках полные потоки в группах далеки не только от аналитического решения, но и различаются между собой. Различие исчезает на подробных разностных сетках.

Время счета задачи на разностной сетке 200 × 200 по методике ДАРС в 1.8 раза меньше, чем по методике ГРАНАТ.

Удовлетворительное совпадение результатов расчетов по методике ДАРС с точными решениями задачи и с решениями по методике ГРАНАТ позволяет сделать вывод, что уравнения (10) адекватно описывают эволюцию потока нейтронов $\bar{N}_g$ и полного потока $\bar{S}_g$. Поэтому предложенный подход к вычислению интеграла столкновений можно признать оправданным и эффективным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена эффективная дискретно-аналитическая разностная схема для решения кинетического уравнения переноса нейтронов в многогрупповом изотропном приближении методом расщепления без итераций по интегралу столкновений и без обращения матриц.

Решение уравнения переноса нейтронов в многогрупповой модели сведено к решениям в одногрупповой модели.

Эффективность достигнута за счет вычисления интеграла столкновений из аналитических решений ОДУ, которые моделируют эволюцию нейтронов, появившихся в группе g из всех групп g'.

Результаты расчетов модельной задачи согласуются с точными решениями и с решениями, полученными по методике ГРАНАТ.

Метод решения обобщается на решение задач в многомерных пространствах и позволяет осуществить счет в параллельном режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карлсон Б., Белл Дж.* Решение транспортного уравнения Sn-методом. Сб. “Физика ядерных реакторов”. М.: Атомиздат, 1959. С. 408–432.
2. *Карлсон Б., Белл Дж.* Численное решение задач кинетической теории нейтронов. Сб. “Теория ядерных реакторов”. М.: Госатомиздат, 1963. С. 243–258.
3. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
4. *Шагалиев Р.М., Шумилин В.А., Алексеев А.В. и др*. Математические модели и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе “САТУРН-3” // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1999. Вып. 4. С. 20–26.
5. *Гаджиев Ф.Д., Кондаков И.А., Писарев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
6. *Feautrier P.C.R.* Sur la resolution numerique de I’equation de transfert // Acad. Sci. Paris. 1964. V. 258. P. 3198–3210.
7. *Rybicki G.* A modified Feautrier method // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1971. V. 11. P. 589–596.
8. *Михалс Д.* Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
9. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
10. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
11. *Моисеев Н.Я., Шмаков В.М.* Модифицированный метод расщепления для решения кинетического уравнения переноса частиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 8. С. 1480–1490.
12. *Кондаков И.А., Селезнев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А.* Аналитические тесты для решения задач переноса частиц численными методами // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2003. Вып. 2. С. 28–43.
13. *Арсентьев А.П., Писарев В.Н.* Особенности применения TVD-подхода к DS_n методу решения трехмерного уравнения переноса нейтронов в криволинейной системе координат // ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2011. Вып. 1. С. 13–39.
14. *Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П., Иванов М.Я.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976.
15. *Моисеев Н.Я., Силантьева И.Ю.* Разностные схемы произвольного порядка аппроксимации для решения линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами методом Годунова с антидиффузией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 7. С. 1282–1293.
16. *Моисеев Н.Я.* Неявные разностные схемы бегущего счета повышенной точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 5. С. 920–935.
17. *Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
18. *Каханер Д., Моулер К., Неш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001.

EDN: JKFYLB
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1209–1223

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.635

О ВОЗБУЖДЕНИИ И РАЗВИТИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА, НАБЛЮДАЕМЫХ ПРИ ВЫСОКОТОЧНОМ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ БЕЗ ВВЕДЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ[1)]

© 2022 г. А. И. Толстых[1,*], Д. А. Широбоков[1,]**

[1] 119333 Москва, Вавилова, 40, Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Россия

**e-mail: tol@ccas.ru*

***e-mail: shibo2506@yandex.ru*

Поступила в редакцию 12.11.2021 г.
Переработанный вариант 12.11.2021 г.
Принята к публикации 10.01.2022 г.

Приводятся численные решения нестационарных уравнений Навье–Стокса в задаче о неустойчивости пограничного слоя на пластине, мгновенно введенной в дозвуковой поток, полученные на основе схемы с мультиоператорными аппроксимациями 16-го порядка. Использовалась традиционная постановка задачи без введения каких-либо источников возбуждения неустойчивости. Неустойчивые моды возникали вследствие наличия контролируемого фона малых возмущений точных решений, создаваемого аппроксимационными погрешностями схемы. Представленные решения описывают сценарий возникновения пакетов волн Толмина–Шлихтинга в окрестности передней кромки с зависящей от времени интенсивностью и их распространения вниз по потоку с возрастающими амплитудами. Оценивается влияние спектрального состава диссипативной части схемы на волновые числа и амплитуды волновых пакетов. Обсуждается соответствие развития неустойчивости в полученных решениях основным результатам линейной теории. Библ. 22. Фиг. 12.

Ключевые слова: дозвуковой пограничный слой, неустойчивость, волны Толмина–Шлихтинга, уравнения Навье–Стокса, мультиоператоры, схема 16-го порядка.

DOI: 10.31857/S0044466922070092

1. ВВЕДЕНИЕ

Возникновение неустойчивости течений в пограничных слоях, приводящей к ламинарно-турбулентному переходу, явилось предметом многочисленных теоретических, экспериментальных и численных исследований. Основной вклад в понимание причин возникновения неустойчивости внесла классическая теория волн Толмина–Шлихтинга [1]. Ее основные выводы были подтверждены рядом экспериментов, указанных в [1], а также классическими экспериментами, описанными в [2]. В этих экспериментах изучалось естественное возбуждение неустойчивых мод управляемой фоновой турбулентностью, а также искусственное возбуждение в виде вибрирующих полос на поверхности обтекаемой пластины. В дальнейшем искусственные воздействия на пограничные слои такого и других типов использовались в различных экспериментах, внесших значительный вклад в описание явления неустойчивости и перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный (см. [3]–[6]). Введение искусственных возбудителей различных типов (например, в виде периодических локальных вдувов-отсосов через твердую поверхность) широко использовалось в многочисленных исследованиях, основанных на численном моделировании течений в пограничных слоях (главным образом, течений несжимаемой жидкости). Не перечисляя большое количество работ, посвященных этой теме, отметим статьи [8]–[11] и содержащиеся в них ссылки.

[1)]Представленные в данной работе результаты получены с использованием суперкомпьютеров МСЦ РАН – филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

Введение искусственных возмущений осуществлялось также при численном моделировании течений в пограничных слоях при сверхзвуковом обтекании [12], [13]. Гиперзвуковые режимы были рассмотрены в [14], [15].

Использование возбудителей неустойчивости в численных исследованиях обычно связано либо с изучением восприимчивости ламинарного пограничного слоя, либо с получением лишь стационарных решений при отсутствии этих возбудителей.

В последнем случае можно задаться вопросом, не обусловлены ли набюдаемые стационарные решения без признаков неустойчивости свойствами используемых схем, числом узлов сетки, а также критерием выхода на стационарный режим. В этой связи можно рассуждать следующим образом.

Обычным теоретическим подходом к исследованию устойчивости является введение малых возмущениий того или иного типа в точные решения исходных уравнений или их упрощений. С другой стороны, отличие численного решения устойчивой схемы от точного в узлах сетки является малыми возмущениями последнего. Можно также говорить о том, что действие разностного оператора на точное решение, рассматриваемое в узлах сетки, есть действие аппроксимируемого оператора на это решение плюс погрешность аппроксимации, а погрешность аппроксимации можно рассматривать как некоторый источник, добавляемый к исходным уравнениям и возмущающий последние.

В случае устойчивости точного решения нормы этих сеточных функций характеризуют точность численных решений. В случае неустойчивого точного решения малые отклонения от этого решения в зависимости от их спектрального состава могут образовывать начальные данные для развития неустойчивых мод. Возможность численных решений различать эти моды и описывать их развитие в процессе интегрирования по времени (возможно длительного) зависит от спектральных свойств используемых схем и подробности сеток.

При использовании мультиоператорных схем высоких порядков для прямого численного моделирования неустойчивых течений в дозвуковых струях [16], недорасширенных сверхзвуковых струях [17], а также в случае изолированных вихрей [18], [19], было замечено, что кажущиеся не меняющимися в течение достаточно большого интервала времени численные решения уравнений Навье–Стокса или Эйлера внезапно переходили в квазипериодические нестационарные режимы.

Идея численного моделирования неустойчивых течений на основе уравнений Эйлера или Навье–Стокса без введения каких-либо механизмов возбуждения неустойчивости была использована в [20], где для исследования неустойчивости двумерного пограничного слоя при дозвуковом обтекании плоской пластины применялась мультиоператорная схема 16-го порядка [21], снабженная диссипативным механизмом с контролируемыми спектральными свойствами.

Оказалось, что на используемой сетке численное решение нестационарных уравнений Навье–Стокса в окрестности передней кромки в процессе интегрирования по времени выходило на решение, похожее на стационарное решение Блазиуса. Однако внизу по течению после достижения некоторого времени стали наблюдаться наложенные на это решение распространяющиеся вниз по потоку пакеты волн Толмина–Шлихтинга. На достаточном расстоянии от передней кромки наблюдались значительные возмущения решений с образованием локальных отрывных зон. Спектры этих возмущений показали хорошее соответствие с диаграммой неустойчивости теории волн Толмина–Шлихтинга [1]. Поскольку схема была оптимизирована с целью минимизации фазовых ошибок аппроксимаций производных в широком диапазоне длин волн [21], основной вклад в погрешность аппроксимации и соответствующий фон малых возмущений вносился дополнительной диссипативной составляющей схемы в виде члена 15-го порядка малости относительно шага сетки с самосопряженным положительным оператором. Спектры его действия на сеточные функции имели широкополосный характер, что предположительно послужило основой для образования неустойчивых мод. Можно предположить, что здесь имеется некоторая аналогия с возбуждением неустойчивости фоновой турбулентностью в экспериментах [2].

Поскольку результаты [20] выявили четкий сценарий возбуждения и развития волн неустойчивости при конкретных параметрах сетки и конкретном фоне малых возмущений, остался открытым вопрос, насколько он изменится, если значительно уменьшить влияние этого фона.

Целью данной работы является исследование неустойчивости при входных данных задачи [20] с той разницей, что параметры диссипативного оператора выбраны таким образом, чтобы он генерировал фурье-гармоники с заметной амплитудой лишь в узкой области самых коротких волн, поддерживаемых сеткой. Последние заведомо находятся вне области неустойчивости линейной теории и можно предположить, что условная фоновая турбулентность с широкополосным спектром в этом случае очень мала.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 описаны постановка задачи и детали используемой схемы. Численные результаты представлены в разд. 3. Разд. 4 содержит обсуждения и выводы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СХЕМА

Как и в случае расчетов [20], рассматривалось течение вязкого сжимаемого газа, описываемого уравнениями Навье–Стокса, в прямоугольной области $0 \le x \le x_{\max}$, $0 \le y \le y_{\max}$. При приведении уравнений к безразмерному виду в качестве характерных значений скорости использовалась скорость звука в невозмущенном потоке c_∞, так что характерное значение времени t оказывалось равным L/c_∞. В качестве характерной длины использовалась длина L, для которой число Рейнольдса, вычисленное по параметрам невозмущенного потока, равнялось 5×10^5. При этом полагалось, что $x_{\max}, y_{\max} = 0.2$. На левой границе задавались параметры невозмущенного потока с числом Маха $\mathrm{M} = 0.5$, на верхней границе использовались характеристические условия, предполагающие распространение возмущений только изнутри области. Пластиной считалась нижняя граница области при $x \ge 0.25$ с условиями прилипания и заданной температурой, равной температуре торможения. На правой границе значения искомых функций определялись экстраполяцией решений внутри области.

Расчетная область покрывалась сеткой с числом узлов 3000×100. Ее шаги вдоль координаты x были постоянными и равными $h = 5\times10^{-3}$ до некоторого значения $x = x_*$, после которого они плавно увеличивались, способствуя таким образом гашению исходящих из области $x \le 14.5$ волн. Вдоль y осуществлялось сгущение сетки, при котором минимальный шаг около нижней границы был равен 0.0001.

В начальный момент времени $t = 0$ предполагалось, что течение является невозмущенным во всей области, кроме поверхности пластины с нулевыми скоростями и заданной температурой. Это можно интерпретировать, как мгновенное введение пластины в равномерный поток.

Для численного решения сформулированной выше задачи использовалась схема с мультиоператорными аппроксимациями 16-го порядка гиперболической части нестационарных уравнений Навье–Стокса, записанных в дивергентной форме [21]. Общая теория мультиоператоров изложена в [22].

Поясним конструкцию мультиоператорной схемы на примере модельного уравнения $u_t + f(u)_x = 0$. Для аппроксимации производной по x на сетке с шагом h будем использовать линейную комбинацию базисных операторов, полученных из однопараметрического семейства операторов компактных аппроксимаций $l(c)$ путем задания различных значений параметра c:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx L_M(c_1, c_2, \ldots, c_M) = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i l(c_i), \quad \sum_{i=1}^{M} \gamma_i = 1. \tag{1}$$

Коэффициенты γ_i этой комбинации, названной мультиоператором, определяются из условия обращения в ноль $M-1$ низших членов разложения в ряд Тейлора в погрешности аппроксимации (1). Используя задаваемые значения параметра, можно управлять спектральными свойствами мультиоператора и добиться того, чтобы его фурье-образ был близок к образу оператора первой производной в области коротковолновых гармоник.

В данном исследовании базисные операторы определялись полусуммой $l(c) = (L_l(c) + L_r(c))/2$, где левые и правые операторы L_l и L_r являются суперпозициями двухточечных операторов вида

$$L_l(c) = \frac{1}{h} R_l(c)^{-1}\Delta_-, \quad L_r(c) = \frac{1}{h} R_r(c)^{-1}\Delta_+, \quad R_l(c) = I + c\Delta_-, \quad R_r(c) = I - c\Delta_+,$$

где Δ_- и Δ_+ – операторы левых и правых двухточечных разностей ($\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}$, $\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j$). Значения $c_i, i = 1, 2, \ldots, 8$, в (1) в рассматриваемой схеме распределены равномерно между своими минимальным и максимальным значениями $c_{\min}$ и $c_{\max}$, $\overline{c}_{\min} > -1/2 + \delta$, $\delta > 0$. Число базисных операторов полагалось равным восьми. Поскольку разложения для действий базисных операторов на достаточно гладкие функции содержат только четные степени, имеем

$$L_M u_j = [u_x]_j + O(h^{16}).$$

Параметры $c_{\min}$, $c_{\max}$ являются свободными параметрами. Они управляют свойствами мультиоператора и задаются таким образом, чтобы минимизировать дисперсионные погрешности мультиоператорной схемы для уравнения переноса.

В схемах высокого порядка для уравнений Эйлера или Навье–Стокса обычно требуется присутствие диссипативного механизма, способствующего подавлению паразитических осцилляций численных решений. Такой механизм может быть представлен мультиоператорами с базисными операторами, определяемыми однопараметрическим семейством $D_0(c) = L_l(c) - L_r(c)$. Задавая набор параметров $\overline{c}_i, i = 1, 2, \ldots, 8$, и считая для удобства исследования, что они равномерно распределены между своими минимальным и максимальным значениями $\overline{c}_{\min}$, $\overline{c}_{\max}$, построим мультиоператор

$$D_M(\overline{c}_{\min}, \overline{c}_{\max}) = \sum_{i=1}^{8} \gamma_i D_0(\overline{c}_i), \quad \overline{c}_{\min} > -1/2 + \delta, \quad \delta > 0, \tag{2}$$

такой, что $D_M u_j = O(h^{15})$. Параметры $\overline{c}_{\min}$, $\overline{c}_{\max}$ должны быть выбранными таким образом, чтобы мультиоператор был положительным в гильбертовом пространстве сеточных функций со скалярным произведением двух функций u_h и v_h вида $(u_h, v_h) = h\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_j$.

При использовании мультиоператоров (1) и (2) полудискретизованная схема для модельного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_M f(u) + C D_M u = 0, \quad C = \text{const} \ge 0. \tag{4}$$

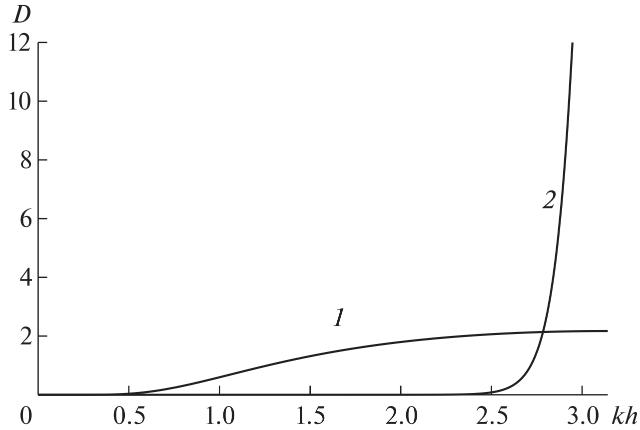
Она устойчива в приближении замороженных коэффициентов как схема с положительными операторами.

Схема (4) легко обобщается на случаи, когда в уравнении (3) функции f и u являются векторными. При этом постоянную C достаточно заменить на единичную матрицу, умноженную на некоторую постоянную. В случае нескольких пространственных переменных для производных по этим переменным строится свой мультиоператор.

2.1. Роль контролируемой диссипации

В случае устойчивых решений роль диссипативной добавки в виде третьего слагаемого в (4) сводится к демпфированию паразитических осцилляций численных решений, вызванных немонотонностью схемы. При этом он является добавкой к погрешности аппроксимации производной (в случае уравнений газовой динамики – к аппроксимации всех их членов) и вносит вклад высокого порядка малости в погрешность решения. В случае неустойчивых решений, как отмечалось во Введении, он может одновременно играть роль при создании фона малых возмущений, из которого возникают неустойчивые моды. Для оценки обеих возможностей в последнем случае рассмотрим его спектральные свойства.

Представление $D = \hat{D}_M(\alpha; \overline{c}_{\min}, \overline{c}_{\max})$ оператора D_M в пространстве Фурье (его фурье-образ) в силу его самосопряженности является вещественной функцией безразмерного волнового числа $\alpha = kh$. При некоторых значениях параметров $(\overline{c}_{\min}, \overline{c}_{\max})$, рассматриваемых как допустимые, эта функция положительна в диапазоне волновых чисел $\alpha \in [0, \pi]$ гармоник, поддерживаемых сеткой с шагом h. Первый член ее разложния по α в окрестности нуля имеет вид $c(\overline{c}_{\min}, \overline{c}_{\max})\alpha^{2M-1}$, указывающий на очень быстрое стремление к нулю этой функции при уменьшении α. На фиг. 1 представлены функции $D(\alpha)$ для двух вариантов выбора параметров, использовавшихся в [20] (кривая *1*) и в данном исследовании (кривая *2*).



Фиг. 1. Фурье-образы диссипативных операторов двух типов.

В спектрах волн неустойчивости в численных решениях [20] при используемых шагах сетки доминировали гармоники с длинами волн, для которых $\alpha = kh \approx 0.25$. При этом значения α для самых коротких волн с очень маленькими амплитудами, наблюдаемых в спектрах, достигали величин порядка 0.5. Согласно фиг. 1, интервал $\alpha \in [0, 0.5]$ – это приблизительно тот интервал, в котором значения $D(\alpha)$ визуально равны нулю (на самом деле очень малы). В полном согласии с этим фактом численные решения из [20] указывают на то, что декременты затухания гармоник, обусловленные диссипативными добавками, оказались значительно меньшими инкремента их возрастания вследствие неустойчивости Толмина–Шлихтинга. В расчетах, представленных ниже, значения декрементов в этом интервале, как показывает их подробный анализ, оказываются на много порядков меньшими, сохраняя при этом свои малые значения вплоть до достаточно больших значений α.

Для оценки роли диссипативной добавки в случае неустойчивости решений исходных уравнений обратимся снова к схеме (4). Будем рассматривать входящие в нее сеточные функции как проекции на сетку функций непрерывного аргумента из пространства Гильберта. Произведя линеаризацию исходного уравнения, перейдем в пространство Фурье. При этом будем считать для простоты, что мультиоператор L_M заменен на дифференциальный оператор первой производной, т.е. пренебрежем вносимой им погрешностью аппроксимации (она мала при $\alpha < 2.5$ вследствие оптимизации мультиоператора). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\hat{u}(k)_t + ika\hat{u}(k) + C\hat{D}_M(kh)\hat{u}(k) = 0, \tag{5}$$

где $\hat{u}(k)$ – преобразование Фурье функции $u(x)$ и $a = f'_u = \text{const}$. В соответствии с предыдущими оценками будем рассматривать третье слагаемое как малое возмущение, представимое в виде

$$\epsilon d_M(kh)\hat{u}(k), \quad \epsilon \ll 1.$$

Представив решение уравнения (5) в виде $\hat{u}(k) = u_0 + \epsilon v$, где $u_0(k)$ – решение этого уравнения при $C = 0$, получим для $v(k,t)$ уравнение вида $v_t + ikav = -d_M u_0 = -f(k)$. Решая его, найдем для добавки $\delta u(x,t)$ к $u(x,t)$, возникающей при $C \neq 0$, выражение вида

$$\delta u(x,t) = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (f(k)/iak)e^{ik(x-at)}dk - \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (f(k)/iak)e^{ikx}dk. \tag{6}$$

Первое слагаемое в правой части (6) указывает на возбуждение возмущений, распространяющихся с фазовой скоростью a, а второе – на возбуждение независимых от времени возмущений. В случае устойчивого решения исходного дифференциального уравнения структура вносимых возмущений не представляет особого интереса, поскольку они являются погрешностями численного решения. В случае неустойчивого решения эти малые возмущения могут создать условия для образования неустойчивых мод. Во всех случаях возникающий фон малых возмущений определяется произведением $\hat{D}_M(kh)u_0(k)$ на интервале волновых чисел гармоник, разрешаемых схемой на сетке с шагом h.

Приведенные выше соображения и оценки направлены на попытку объяснить кажущееся самовозбуждение неустойчивости в численных решениях уравнений Навье–Стокса. Чтобы подтвердить их, в данном исследовании использовался выбор параметров оператора D_M, соответствующий кривой *2* на фиг. 1. В этом случае ввиду пренебрежимо малых значений $\hat{D}_M$ на “актуальном” интервале волновых чисел создаваемый им фон ожидается быть пренебрежимо малым. Условно две возможные ситуации можно сопоставить с наличием и отсутствием (или очень слабой) турбулентности в реальных условиях обтекания.

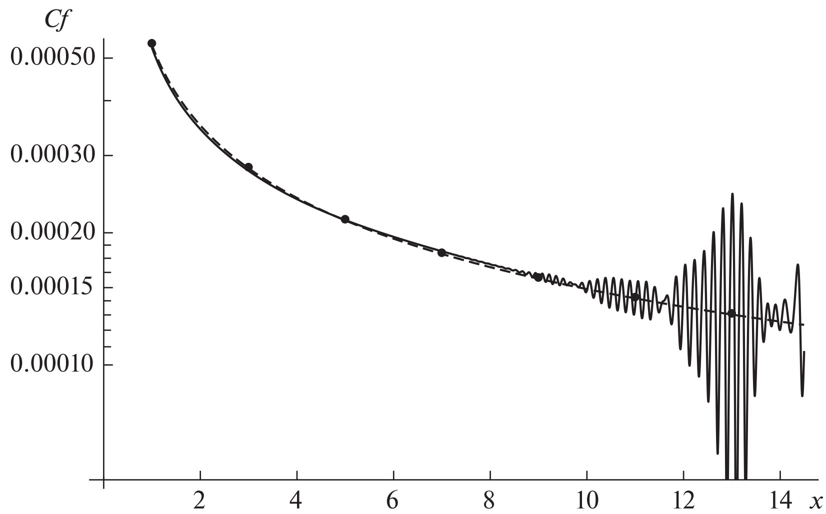
3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Численные решения уравнений Навье–Стокса с использованием оператора D_M второго типа (т.е. соответствующего кривой *2* на фиг. 1) показали, что характер возникновения и развития неустойчивости во многом аналогичен описанному в [20] при значительно меньших амплитудах возникающих и распространяющихся волн Толмина–Шлихтинга. Его можно охарактеризовать следующим образом. В течение начального интервала времени (приблизительно $t < 60$) в окрестности передней кромки происходит релаксация начально невозмущенного потока к течению типа Блазиуса в пограничном слое несжимаемой жидкости. В течение всего времени расчета течение в этой окрестности характеризуется устойчивыми малыми колебаниями типа стоячих волн. В полном соответствии с линейной теорией устойчивости, начиная с некоторого расстояния от передней кромки, т.е. начиная с некоторого значения числа Рейнольдса Re_δ, вычисленного по толщине вытеснения и этому расстоянию, устойчивые колебания переходят в распространяющиеся вниз по потоку пакеты волн Толмина–Шлихтинга. Начальные амплитуды этих пакетов меняются с течением времени, создавая видимость “прерывистости” возникающих возмущений. Амплитуды пакетов как функции их координат $x(t)$ возрастают до момента их выхода из области с постоянными шагами сетки (приблизительно до $x < 14.5$) и перехода в область их демпфирования в остальной части расчетной области с возрастающими шагами сетки.

Существенные отличия численных решений для вариантов с диссипациями первого и второго типа (в соответствии с обозначениями на фиг. 1) отчетливо проявляются при вычислении коэффициентов трения на поверхности пластины f. На фиг. 2 их распределения вдоль пластины в момент времени $t = 140$ показаны вместе с решением Блазиуса в случае несжимаемой жидкости. Для варианта 1 эти решения взяты из [20], а для варианта 2 они получены в рамках данного исследования.

На фиг. 2 видно, что отличия от решения Блазиуса незначительны для обоих диссипаций при $x < 5$ и во всей области для диссипации второго типа. На рисунке при $x > 8$ видна мгновенная картина волновых пакетов, являющихся проявлеием неустойчивости Толмина–Шлихтинга в случае диссипации первого типа, не заметного в случае диссипации второго типа. Таким образом, фигура сразу же подтверждает предположение о том, что существенную роль в возбуждении неустойчивости в решениях [20] играет фон малых возмущений, возникающий при использовании диссипации первого типа.

В дальнейшем, следуя многим экспериментальным и теоретическим исследованиям, будем характеризовать неустойчивость пограничного слоя возмущениями скорости около поверхности тела (см., например, классичские эксперименты [2]). Соответственно, основной интерес в данном исследовании будет представлять в фиксированные моменты t продольная скорость $U(t,x) = u(t,x,y_*)$, где $y_* = 5.7\times10^{-4}$ суть расстояние от поверхности пластины близкого к ней узла сетки. Непосредственное рассмотрение полученных значений функции $U(t,x)$ позволяет проследить развитие волновых пакетов с достаточно большими амплитудами (как это видно на фиг. 2), однако оно оказывается неэффективным при описании ее малых и очень малых возмущений. Следуя [20], для выявления таких возмущений будет использоваться следующий прием. На отдельных интервалах $[x_i, x_j]$ строятся полиномы наилучшего среднеквадратичного приближения к функции U с базисными функциями, являющимися полиномами Чебышёва для этих интервалов. Затем рассматриваются отклонения δU полученных локальных аппроксимаций от U. Оказалось, что функции $\delta U(x)$ позволяют обнаруживать хорошо организованные волновые структуры с очень малыми колебаниями около меняющихся с координатой x средними зна-



Фиг. 2. Сравнение распределений коэффициентов трения вдоль поверхности пластины; сплошная линия – результаты из [20], пунктирная линия – результаты данных расчетов, маркеры – решение Блазиуса для несжимаемой жидкости.

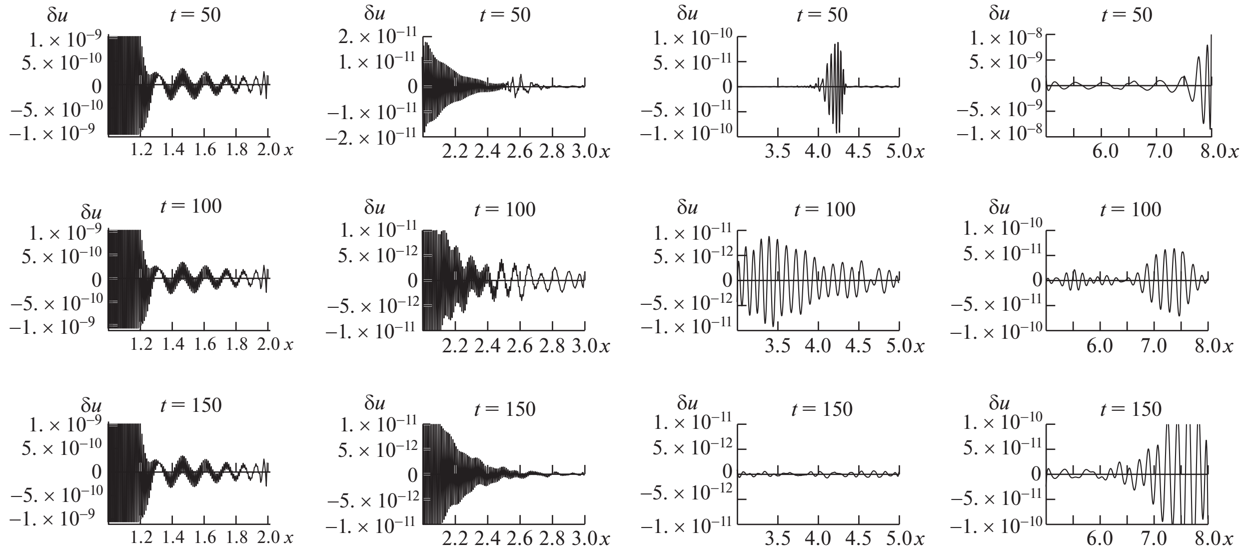
чениями $U(x)$ и вычислять их спектры. При этом следует иметь в виду, что амплитуды колебаний $\delta U(x)$ есть амплитуды в обычно принятом смысле только при $U(x) = \text{const}$. В противном случае они лишь характеризуют пульсации скорости на отдельных интервалах изменения x.

3.1. Возмущения в окрестности передней кромки

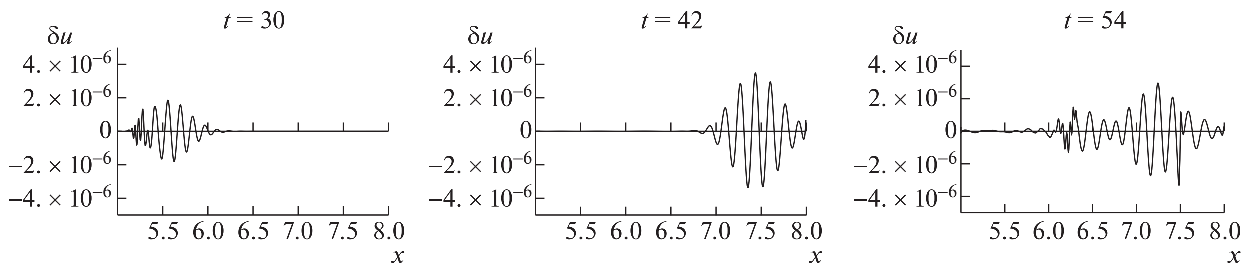
В отличие от численных решений [20], визуализировать волновые процессы в случае диссипации второго типа во всей расчетной области удается лишь с применением описанного выше подхода. Вычисление функций $\delta U(x)$ для различных моментов времени t показало, что их изменения имеют на локальных интервалах изменения x колебательный характер и, в частности, описывают хорошо организованные волновые пакеты. В окрестности передней кромки аппроксимирующие полиномы являются быстро убывающими функциями, что приводит к необходимости использовать последовательность интервалов сравнительно небольшой длины.

На фиг. 3 для диссипации второго типа и нескольких значений времени t представлены зависимости $\delta U(x)$ для интервалов $x \in [1,2], [2,3], [3,5], [5,8]$, в каждом из которых вычислялись свои полиномы наилучшего среднеквадратичного приближения. Как видно, первый интервал характеризуется визуально независимыми от времени колебаниями $\delta U(x)$ с длинами волн порядка 0.25, на которые наложены убывающие с x коротковолновые осцилляции типа “пилы”. Последние естественно считать паразитическими осцилляциями, характерными для схем высокого порядка, возникающими вследствие больших градиентов параметров потока около острой передней кромки. При этом несущие относительно длинные волны стоячего типа, как можно предположить, характеризуют численные решения уравнений Навье–Стокса в окрестности острой кромки. Они визуально не зависят от времени и можно считать, что при $x < 2$ течение является устойчивым. Заметим, что число Рейнольдса Re_δ, вычисленное по толщине вытеснения, в данных расчетах при $x = 2$ равно приблизительно 1800. Хотя оно больше критического числа Re_δ в линейной теории для несжимаемой жидкости [1], устойчивость течения при меньших значения этого числа согласуется с результатом этой теории.

Более подробное изучение длинноволновых колебаний показывает, что расстояние между их пиками уменьшается с увеличением расстояния от кромки (это видно, в частности, на интервале $x \in [1,2]$). Пространственные амплитудные спектры, вычисленные для этого интервала в различные моменты времени, имеют пики в диапазоне волновых чисел k приблизительно от $k = 9$ до $k = 25$. В координатах $(\mathrm{Re}_\delta, k\delta)$ эти числа располагаются около нижней ветви нейтральной кривой диаграммы неустойчивости [1].



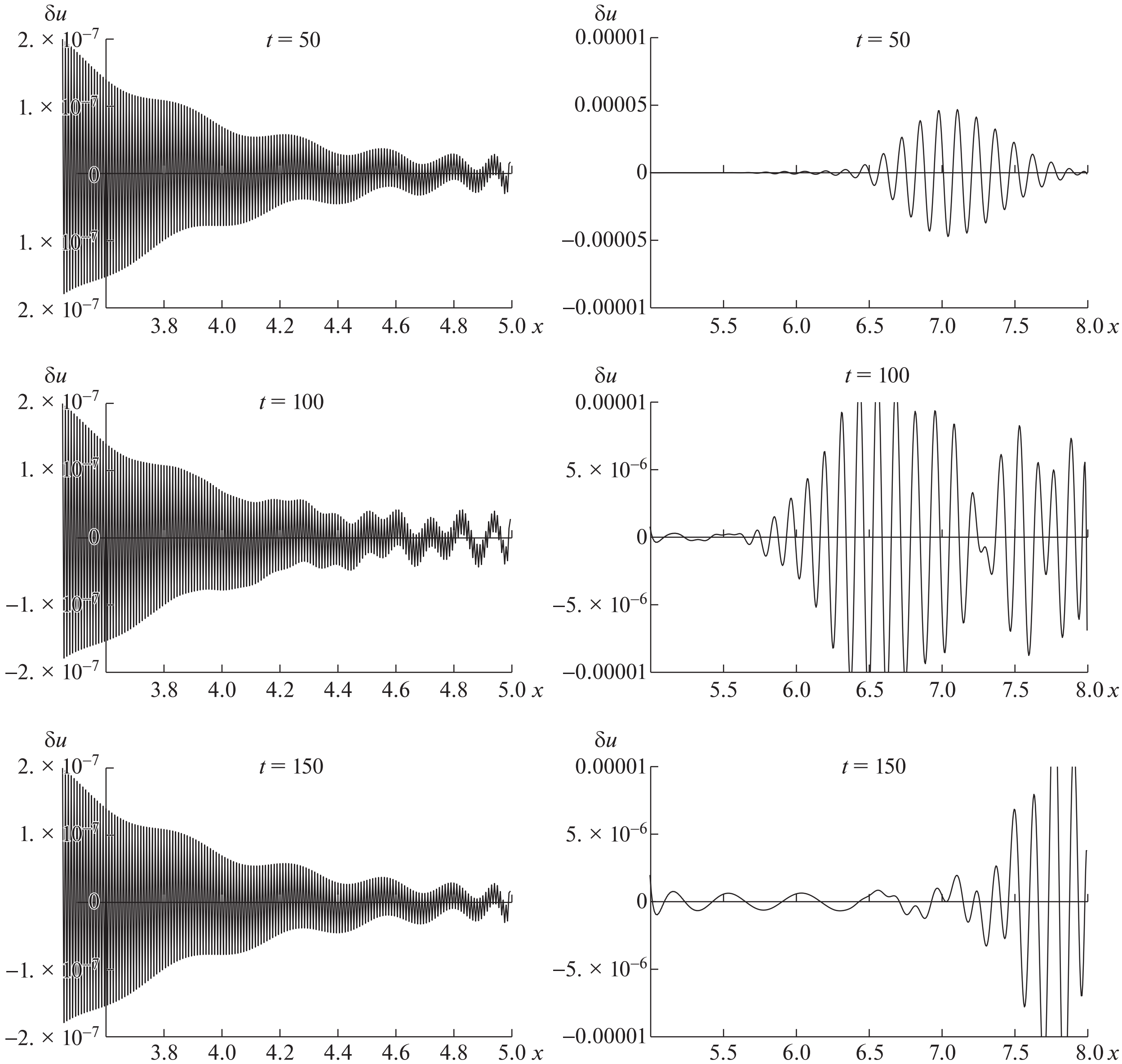
Фиг. 3. Образование волновых пакетов в окрестности передней кромки в данных расчетах. Интервал $x \in [1,8]$ разбит на четыре части с разными порядками амплитуд отклонений от усредненных распределений.



Фиг. 4. Развитие волнового пакета во времени и пространстве внизу по течению в данных расчетах.

В нижнем по течению интервале $[2,3]$ с увеличенными значениями Re_δ наблюдаются зависящие от времени колебания с заметными различиями амплитуд. Их визуализация с малыми интервалами изменения времени показывает, что они распространяются вниз по течению, характеризуя начало конвективной неустойчивости. На последующих интервалах видны хорошо организованные волновые пакеты. Их наполнения можно рассматривать как признаки возникающих волн Толмина–Шлихтинга. Пакеты на интервалах $[3, 5]$ и $[5, 8]$ являются развитием пакетов, образовавшихся ранее при меньших значениях координаты x. Чтобы проследить эволюцию конкретного пакета во времени и пространстве, на фиг. 4 показаны функции $\delta U(x)$ в последовательные моменты времени на одном и том же интервале. Видно, что пакет, наблюдаемый при $t = 30$, за 12 единиц времени переместился вниз по потоку в слегка модифицированном виде приблизительно на 2 единицы расстояния. Это позволяет грубо оценить его групповую скорость v_g как $v_g \approx 0.17$. В процессе этого движения пакета максимальные амплитуды колебаний возросли приблизительно в три раза. При $t = 54$ на рассматриваемом интервале пакет отсутствует – он переместился за его пределы, однако заметен новый пакет с на четыре порядка меньшими амплитудами (его не было видно на фоне доминирующего пакета в предыдущие моменты времени).

Для сравнения полученных решений с решениями из [20] на фиг. 5 представлены функции $\delta U(x)$ в случае диссипации первого типа для моментов времени из фиг. 3. При $x < 5$ на рисунке видны визуально стационарные длинноволновые колебания с наложенными на них убывающими паразитическими колебаниями, аналогичные представленным на фиг. 3. Как и в случае дис-

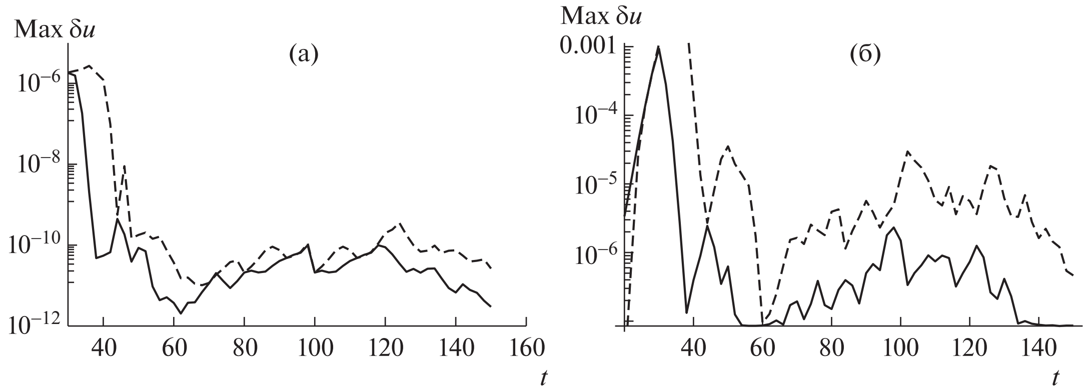


Фиг. 5. Образование волновых пакетов в окрестности передней кромки в расчетах [20].

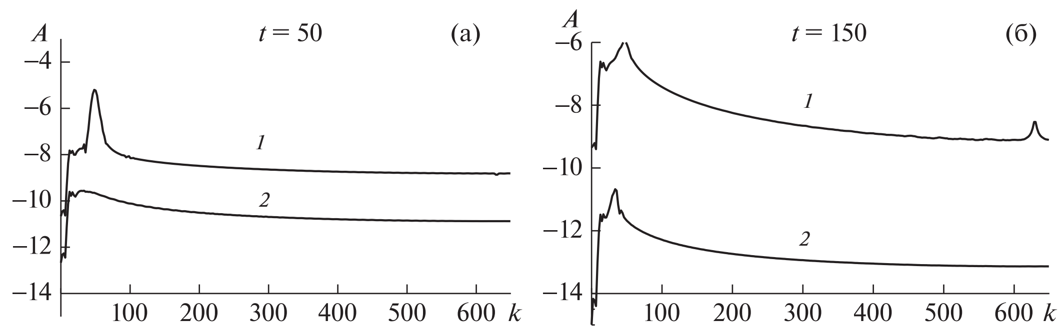
сипации второго типа, внизу по течению наблюдаются сформированные волновые пакеты с сильно меняющимися со временем амплитудами.

Неравномерный, “прерывистый”, характер возбуждения волн Толмина–Шлихтинга, а также их рост и перемещение иллюстрирует фиг. 6. Там показаны максимальные значения амплитуд колебаний $\delta U(x)$ на интервалах $x \in [4,6]$ и $x \in [5,7]$ как функции времени при наличии и отсутствии фона малых возмущений, создаваемого диссипацией первого типа. Видны черты сходства изменения со временем максимальных значений в обоих случаях при существенно больших значениях последних при наличии фона. Видно также, что в обоих случаях пики максимальных значений перемещаются вниз по потоку, причем это перемещение приблизительно соответствует оценкам групповой скорости пакетов.

Пространственные спектры для интервала $x \in [5,7]$, вычисленные при $t = 50$ и $t = 150$, приведены на фиг. 7. Они имеют похожие формы, но сильно отличаются амплитудами. Их максимальные значения, в соответствии с фиг. 6, оказываются на несколько порядков большими в случае диссипации первого типа.



Фиг. 6. Максимальные значения амплитуд колебаний на интервалах x [4, 6] (сплошные линии) и [5, 7] (штриховые линии); (а) – в данных расчетах, (б) – в расчетах [20].



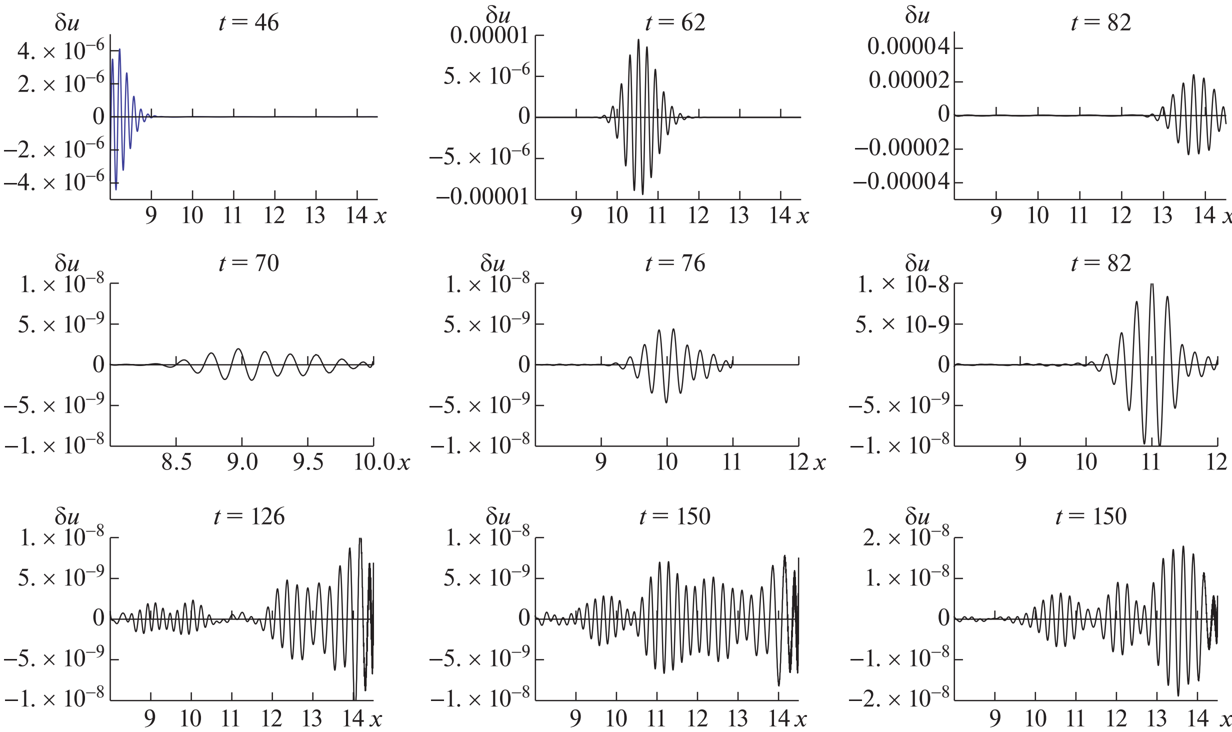
Фиг. 7. Амплитудные спектры на интервале $x \in [5,8]$; кривые *1* и *2* соответствуют расчетам [20] и данным расчетам.

Оба типа спектров характеризуются пиками в области небольших значений волнового числа k, отнесенного к L^{-1}, где L – длина, по которой вычислено число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 5\times10^5$. Эти пики в кривых *1* и *2* расположены в окрестности $k = 50$ и $k = 35$ соответственно. Переходя к безразмерным волновым числам $k\delta$, где δ – толщина вытеснения, можно усмотреть, что при $x = 6$ гармоникам с такими волновыми числами соответствуют точки внутри области неустойчивости линейной теории.

Следуя линейной теории устойчивости, на основании анализа численных решений в окрестности передней кромки естественно предположить следующее.

В ближайшей окрестности кромки, где числа Re_δ достаточно малы, волновые числа длинноволновых колебаний в координатах диаграммы неустойчивости лежат несколько ниже нижней ветви нейтральной кривой. Это объясняет устойчивость этих колебаний. При увеличении координаты x толщина вытеснения и с ней Re_δ возрастают; при этом волновые числа $k\delta$ попадают в область неустойчивости несколько выше этой ветви. Отсюда следует распространение пакетов вниз по течению с возрастанием амплитуд гармоник.

На основании представленных выше результатов можно заключить, что независимо от наличия или отсутствия фона малых возмущений, создаваемого диссипацией первого типа, возбудителями конвективной неустойчивости в численных решениях уравнений Навье–Стокса являются малые длинноволновые колебания вдоль оси x в ближайшей окрестности передней кромки пластины. Влияние этого фона в этой области проявляется в значительном увеличении интенсивности пульсаций и небольшом смещении спектра в сторону более коротких волн.



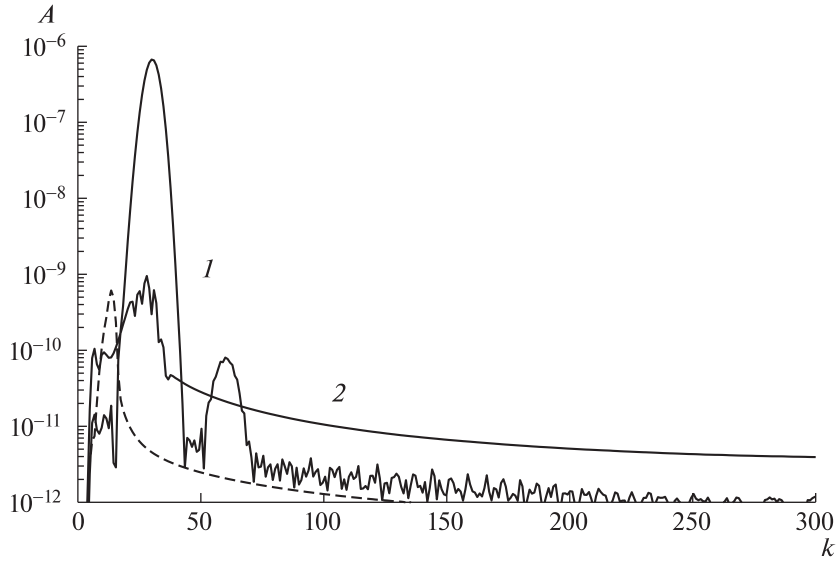
Фиг. 8. Волновые пакеты в последовательные моменты времени в данных численных решениях.

3.2. Распространение возмущений вниз по потоку

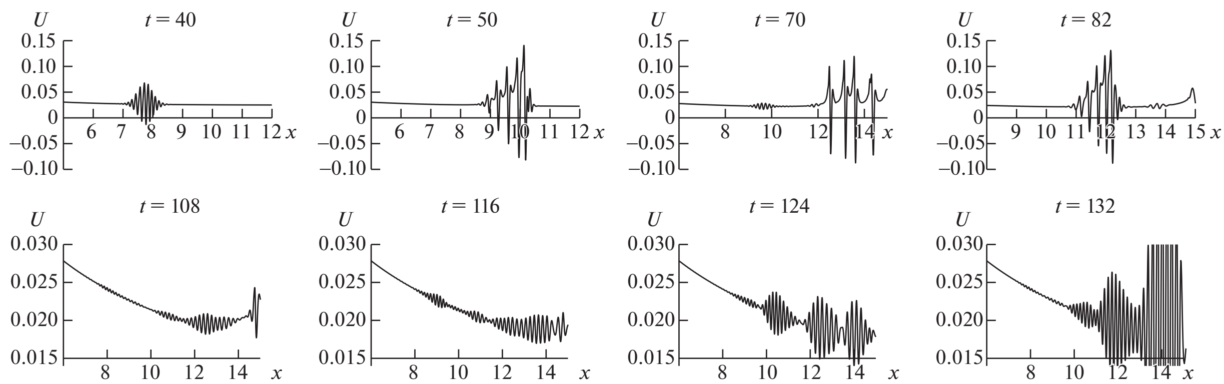
В полном соответствии с линейной теорией, анализ численных решений в данных расчетах, как и в расчетах [20], указывает на распространение вниз по потоку сформировавшихся в окрестности передней кромки волновых пакетов различной интенсивности с заметным увеличением амплитуд их наполнений. Однако увидеть их можно только, рассматривая отклонения $\delta u(x)$ от усредненных значений $U(x)$ на определенных интервалах. Если это не делать, то получаемые решения с точностью до 10^{-4} кажутся стационарными. Примеры функций $\delta u(x)$ при $x > 8$ в последовательные моменты времени приведены на фиг. 8. В верхней части фигуры показаны положения одного из пакетов при $t = 46, 62, 82$ на интервале $x \in [8,14]$. Сравнивая положения пакетов, можно приблизительно оценить групповую скорость их распространения как $v_g \approx 0.15$. На основании этого можно заключить, что первоначальное положение и форма этого пакета изображены на фиг. 6 при $t = 30$. На фигуре также видно, что за 20 единиц времени максимальные значения амплитуд его наполнения увеличились приблизительно в два раза. Назовем этот пакет *пакетом* A. Чтобы отобразить следующий за ним пакет B, имеющий меньшие амплитуды, в средней части фигуры показаны функции $\delta u(x)$ на разных интервалах в моменты времени $t = 70, 76, 82$. Нижняя часть фигуры иллюстрирует более сложную форму пакетов и их эволюцию на более поздних временах. В соответствии с малыми амплитудами пульсаций в окрестности передней кромки при $t > 100$, максимальные амплитуды этих пакетов весьма малы. Тем не менее они указывают на их существенное возрастание (на несколько порядков) при распространении пакетов вниз по потоку.

На фиг. 9 приведены спектры пакетов при $t = 62$, $t = 76$, $t = 140$, изображенных на фиг. 8 в средней ее части. Видно, что эти спектры с волновыми числами пиков в окрестности $k = 30$ достаточно узкие; они близки к спектрам в окрестности передней кромки. Это указывает на то, что в процессе распространения пакетов почти не появлялись новые гармоники с волновыми числами в области неустойчивости линейной теории.

В случае численных решений из [20] интенсивные пульсации продольной скорости можно непосредственно наблюдать, рассматривая функцию $U(x)$. Картины волновых пакетов в фиксированные моменты времени в этих решениях приведены на фиг. 10. В верхней части фигуры



Фиг. 9. Спектры волновых пакетов, изображенных на фиг. 4; кривые *1*, *2*, *3* соответствуют временам $t = 30$, 42, 54.

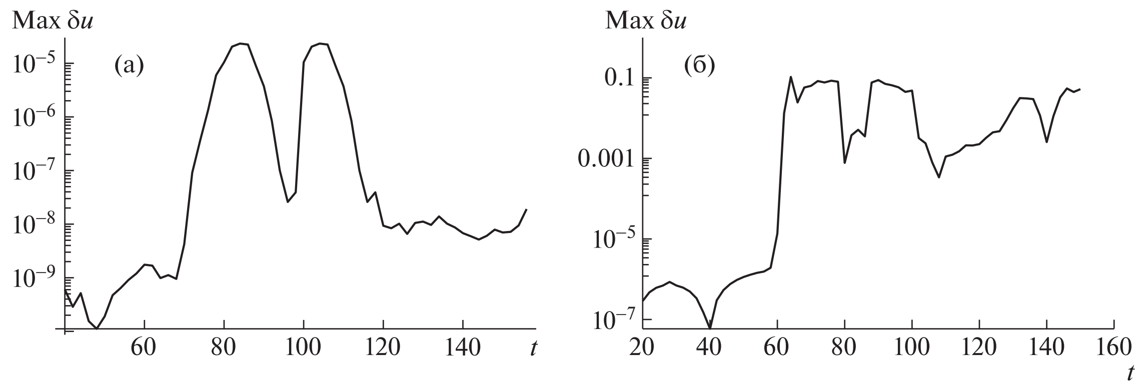


Фиг. 10. Развитие волновых пакетов внизу по течению в численных решениях [20].

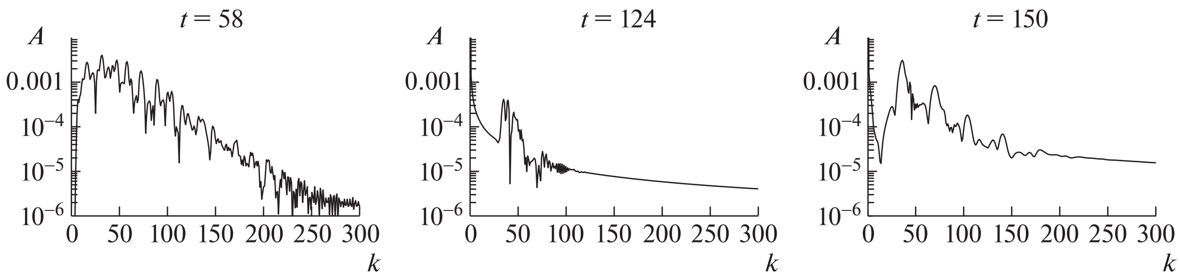
($t \le 82$) показано распространение вниз по потоку пакета с наибольшими амплитудами, образовавшегося при небольших временах в окрестности передней кромки. Сравнивая картину его развития с аналогичной картиной эволюции пакета в верхней части фиг. 5, можно увидеть, что при приблизительно одинаковой групповой скорости, пакеты существенно различаются. Помимо большой разницы в амплитудах колебаний функций $U(x)$ и $\delta u(x)$, пакет во втором случае в процессе перемещения вниз по потоку почти не меняет своей формы с максимальными амплитудами в своем центре; при этом расстояния между пиками колебаний в нем кажутся постоянными. Пакет на фиг. 10 лишь на малых временах имеет такую простую форму. В процессе его перемещения максимальные амплитуды смещаются в его переднюю часть, а характер наполнения становится менее регулярным.

Сравнение максимальных значений функций $\delta u(x)$ на интервале [13,14] как функций времени приведены на фиг. 11 для обоих типов диссипаций. Их повышенные значения в обоих случаях наблюдаются приблизительно на временах, соответствующих прибытию из окрестности передней кромки пакетов с наиболее интенсивными пульсациями.

Спектры функции $\delta u(x)$ в случае диссипации из [20], вычисленные для интервала [8,14.5] в различные моменты времени, приведены на фиг. 12. В отличие от спектров при отсутствии фона малых возмущений, создаваемого диссипацией второго типа, они имеют более широкую полосу пиковых волновых чисел. Они отличаются также большей изменчивостью и на порядки больши-



Фиг. 11. Максимальные значения амплитуд на интервале $x \in [13,14]$ как функций времени; (а) – в данных расчетах, (б) – в расчетах [20].



Фиг. 12. Спектры волновых пакетов на интервале $x \in [8,14.5]$ в расчетах [20].

ми значениями максимальных амплитуд. При этом максимальные пики наблюдаются при больших волновых числах (приблизительно в окрестности kP). Расширение спектров и увеличение амплитуд пульсаций указывают на возбуждение новых неустойчивых мод с большими начальными амплитудами. Таким образом, находит подтверждение предположение о том, что источником неустойчивости являются малые возмущения с достаточно широким спектром, создаваемые диссипацией первого типа.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В данном исследовании представлены численные решения уравнений Навье–Стокса, описывающие возбуждение и развитие волн Толмина–Шлихтинга без применения искусственного возбуждения неустойчивости в случае пластины, внезапно введенной в дозвуковой поток. Эти решения были получены на основе мультиоператорной схемы 16-го порядка с управляемым диссипативным механизмом. В случае гладких функций он вносит вклад в погрешность аппроксимации порядка $O(h^{15})$, но при этом может играть роль малых возмущений точных решений, из которых рождаются волны неустойчивости. Были рассмотрены два типа диссипативного оператора. В одном случае его действие характеризуется широким спектром фурье-гармоник, создающих возбуждающий фон для возникновения неустойчивости. В другом случае он действовал только на гармоники с самыми короткими длинами волн, поддерживаемыми сетками. Оказалось, что в обоих случаях наблюдается один и тот же сценарий возникновения и распространения волн Толмина–Шлихтинга. Согласно численным решениям, в окрестности передней кромки в процессе релаксации к течению, близкому к течению Блазиуса, наблюдаются длинноволновые пространственные колебания придонной продольной скорости, напоминающие стоячие волны. Они имеют малые амплитуды, не возрастающие с течением времени. Это соответствует выводам линейной теории об устойчивости течения при малых числах Рейнольдса, вычисленных по толщине вытеснения пограничного слоя. С увеличением расстояния от передней кромки, когда это число возрастает, наблюдается переход колебаний стационарного типа в пакеты волн, распространяющихся вниз по потоку с увеличением амплитуд. Волновые числа этих волн приблизительно соответствуют волновым числам неустойчивых мод, описываемых линейной теорией. Можно показать, что групповые скорости в численных решениях близки к фазовым скоростям индивидуальных гармоник в линейной теории.

Разница в решениях для двух типов диссипации состоит в следующем. В случае отсутствия фона малых возмущений, создаваемого диссипацией первого типа, начальные амплитуды волн Толмина–Шлихтинга весьма малы (отклонения от усредненных продольных распределений скорости около твердой поверхности имеют порядки 10^{-9}–10^{-7}). Соответственно, максимальные значения амплитуд на больших расстояниях от передней кромки несмотря на их возрастания также малы (поядка 10^{-4}). Пространственные спектры волновых пакетов в течение всего времени своего развития имеют достаточно узкий характер, не сильно отличаясь от начальных спектров; это указывает на отсутствие появления новых неустойчивых мод.

Существование этого фона в численных решениях характеризуется двояким воздействием. Во-первых, начальные значения амплитуд оказываются на порядки большими и после их возрастания внизу по потоку наблюдаются локальные отрицательные скорости. Во-вторых, спектры значительно расширяются, приобретая широкополосный характер. Это указывает на появление новых неустойчивых мод, генерируемых фоном. Приблизительные оценки их волновых чисел как функций числа Рейнольдса указывают на соответствие (на качественном уровне) с диаграммой неустойчивости в линейной теории.

Можно предположить, что при аналогичном изучении пространственного течения наличие возбуждающего фона с широкополосным спектром может служить некоторой имитацией фоновой турбулентности в реальных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
2. *Schubauer G.B., Scramstad H.K.* Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate. 1948; NACA Rep. 909.
3. *Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., Sargent L.M.* Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1962. V. 23. P. 495–537.
4. *Gaster M., Grant I.* An experimental investigation of the formation and development of a wavepacket in a laminar boundary layer // Proc. R. Soc. Lond. A. 1975. V. 347. P. 253–269.
5. *Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я.* Нелинейное развитие волны в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. Т. 3. С. 49–58.
6. *Бородулин В.И., Качанов Ю.С.* Формироваие и развитие когерентных структур в переходном пограничном слое // Ж. прикл. механ. и техн. физ. 1995. Т. 36. № 4. С. 60–97.
7. *Cleiser L., Zang T.A.* Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows. Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 495–537.
8. *Rist U., Fasel H.* Direct numerical simulation of controlled transition in a flat-plate boundary layer. J. Fluid Mech. 1995. V. 298. P. 211–248.
9. *Borodulin V.I., Gaponenko V.R., Kachanov Y.S. et al.* Late-Stage Transitional Boundary-Layer Structures. Direct Numerical Simulation and Experiment // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 2002. V. 15. P. 317–337.
10. *Yeo K.C., Zhao X., Wang Z.Y., Ng K.C.* DNS of wavepacket evolution in a Blasius boundary layer // J. Fluid Mech. 2010. V. 652. P. 333–372.
11. *Bhaumik S., Sengupta T.* Receptivity to harmonic excitation following nonimpulsive start for boundary-layer flows // AIAA Journal. 2017. V. 55. P. 3233–3238.
12. *Muppidi S., Mahesh K.* DNS of transition in supersonic boundary layers // AIAA paper, 2010-4440.
13. *Liu C., Lu P.* DNS Study on Physics of Late Boundary Layer Transition // AIAA paper, 2012-0083.
14. *Егоров И.В., Новиков А.В.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного обтекания плоской пластины при гиперзвуковых скоростях потока // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1064–1081.
15. *Егоров И.В., Новиков А.В., Федоров А.В.*, Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях потока на супер-ЭВМ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1347–1373.
16. *Липавский М.В., Толстых А.И.* Об одной мультиоператорной схеме десятого порядка и ее применение в прямом численном моделировании поля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 4. С. 600–614.

17. *Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.* Fast calculations of screech using highly accurate multioperators-based schemes // Applied Acoustics. 2013. V. 74. P. 102–109.
18. *Tolstykh A.I., Lipavskii M.V.* Instability and acoustic fields of the Rrankine vortex as seen from long-term calculations with the tenth-order multioperators-based scheme // Mathematics and Computers in Simulation. 2018. V. 147. P. 301–320.
19. *Tolstykh A.I., Lipavskii M.V.* General scenario and fine details of compressible Gaussian vortex unforced instability // European Journal of Mechanics – B/Fluids. 2021. V. 87. P. 161–170.
20. *Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.* Observing production and growth of Tollmien-Schlichting waves in subsonic flat plate boundary layer via exciters-free high fidelity numerical simulation // J. of Turbulence. V. 21. № 11. P. 632–649.
21. *Tolstykh A.I.* 16th and 32nd multioperators based schemes for smooth and discontinuous solutions // Commun. in Comput. Phys. 2017. V. 45. P. 33–45.
22. *Толстых А.И.* Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015.

EDN: MDPIAI
ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 7, с. 1224–1232

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА[1)]

Г. И. Шишкин[1,*], Л. П. Шишкина[1]

[1] 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН, Россия

**e-mail: shishkin@imm.uran.ru*

Поступила в редакцию 17.12.2021 г.
Переработанный вариант 17.12.2021 г.
Принята к публикации 11.02.2022 г.

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Предлагается новый подход к построению разностной схемы, основанный на специальной декомпозиции решения в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения. Строится разностная схема метода декомпозиции решения, в котором регулярная и сингулярная компоненты решения рассматриваются на равномерных сетках, и устанавливается их ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. По сеточным решениям компонент решения строится континуальное решение, аппроксимирующее решение начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса, и устанавливается его ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. Предлагаемый подход позволяет в дальнейшем применять технику повышения скорости сходимости сеточных решений на вложенных сетках для построения разностных схем, сходящихся ε-равномерно со вторым порядком скорости сходимости и выше, для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Библ. 11.

Ключевые слова: уравнение переноса, сингулярно возмущенная начально-краевая задача, пограничный слой, стандартная разностная схема, декомпозиция решения, равномерная сетка, ε-равномерная сходимость, равномерная норма, континуальная аппроксимация решения.

DOI: 10.31857/S0044466922070080

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи для регулярных уравнений переноса часто возникают в теоретических исследованиях и в приложениях; методы их решения рассматривались в работах [1]–[6] (см. также библиографию там). Начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса с возмущающим (малым) параметром ε, $\varepsilon \in (0,1]$, при “конвективном члене” рассматривалась в [7], [8]; для этой задачи построена разностная схема на кусочно-равномерной сетке (такие сетки известны в литературе как “сетки Шишкина”), сгущающейся в окрестности пограничного слоя, которая *сходится ε-равномерно в равномерной норме* с первым порядком скорости сходимости. Однако использование таких сеток для построения разностных схем для сингулярно возмущенных задач с порядком скорости сходимости выше первого приводит к достаточно “громоздким” схемам (см., например, [9]).

Таким образом, появляется интерес к использованию более простых равномерных сеток для построения разностных схем для сингулярно возмущенного уравнения переноса, хотя известно, что непосредственное использование стандартных сеточных аппроксимаций сингулярно возмущенных задач (на равномерных сетках) не позволяет получить ε-равномерную сходимость решения.

В настоящей работе для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса предлагается новый перспективный подход к построению разностной схемы, основанный на *специальной декомпозиции решения* как суммы *регулярной* и *сингулярной компонент реше-*

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 20-01-00650).

ния. При этом решение дифференциальной задачи рассматривается как сумма решений подзадач для регулярной и сингулярной компонент, рассматриваемых на своих равномерных сетках, каждая из которых сходится ε-равномерно в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. По сеточным решениям разностной схемы метода декомпозиции решения строится *континуальная аппроксимация компонент решения* и само *континуальное решение* начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса. Устанавливается ε-равномерная сходимость континуального решения в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

Работа построена следующим образом. Постановка начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса и цель исследования приводятся в разд. 2. Стандартная разностная схема – схема на основе монотонной аппроксимации начально-краевой задачи – рассматривается в разд. 3. Априорные оценки решения и производных, используемые при построении и обосновании сходимости разностных схем, устанавливаются в разд. 4. В разд. 5 строится разностная схема метода декомпозиции решения, регулярная и сингулярная компоненты которого решаются на равномерных сетках, и устанавливается их ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. В разд. 6 по сеточным решениям разностной схемы метода декомпозиции решения строится континуальная аппроксимация решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса и устанавливается ε-равномерная сходимость континуального решения с первым порядком скорости сходимости. Выводы приводятся в разд. 7.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

На множестве $\overline{G}$:

$$\overline{G} = G \cup S, \quad G = D \times (0,T], \quad S = S_0 \cup S^l, \tag{2.1а}$$

где $D = (0 < x \le d]$, S_0 и S^l – нижняя и боковая части границы S, и

$$S_0 = \{(x,t) : 0 \le x \le d,\, t = 0\}, \quad S^l = \{(x,t) : x = 0,\, 0 < t \le T\}, \tag{2.1б}$$

причем $d \sim 1$, рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения переноса (из [7], [8])

$$\begin{aligned} Lu(x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in G; \\ u(x,t) &= \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь

$$L = \varepsilon b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t) + p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (x,t) \in G, \tag{2.3а}$$

функции $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$, функция $\varphi(x,t)$, $(x,t) \in S$, – достаточно гладкая на множествах S_0 и $\overline{S}^{\,l}$ и непрерывна на S, причем,

$$\begin{gathered} b_0 \le b(x,t) \le b^0, \quad 0 \le c(x,t) \le c^0, \quad p_0 \le p(x,t) \le p^0, \\ |f(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}; \quad |\varphi(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in S; \quad b_0, p_0 > 0; \end{gathered} \tag{2.3б}$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. (Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.)

Считаем, что данные задачи (2.2), (2.1) на множестве $S^c = S_0 \cap \overline{S}^l$ – угловой точке, удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим требуемую по построениям гладкость решения на $\overline{G}$.

При малых значениях параметра ε в окрестности множества S^l появляется регулярный пограничный слой – узкая подобласть, примыкающая к множеству S^l, ширины порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$, в которой решение задачи изменяется на конечную величину.

В [7], [8] для сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для уравнения переноса (2.2), (2.1) с использованием кусочно-равномерной сетки (“сетки Шишкина”) построена монотонная разностная схема, сходящаяся ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathbb{O}(N^{-1} + N_0^{-1})$, где N и N_0 – число сеточных интервалов сеток по x и t соответственно. Однако использование таких сеток для повышения скорости сходимости численных решений выше первого порядка вызывает затруднения при построении разностных схем, сходящихся ε-равномерно.

В настоящей работе разрабатывается подход к построению разностной схемы, основанный на декомпозиции решения задачи, которая используется обычно при выводе априорных оценок (см., например, [9], [10]). Решение задачи (2.2), (2.1) представляется в виде следующей декомпозиции:

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{2.4}$$

где $U(x,t)$ и $V(x,t)$ – регулярная и сингулярная компоненты решения соответственно. Рассматриваются сеточная аппроксимация компонент на соответствующих равномерных сетках и построение континуальной аппроксимации решения рассматриваемой задачи.

Таким образом, цель настоящего исследования – для сингулярно возмущенной начально-краевой задачи для уравнения переноса (2.2), (2.1) разработать разностную схему метода декомпозиции решения, т.е. разностную схему на основе специальной декомпозиции решения в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения, рассматриваемых на соответствующих равномерных сетках, и построить континуальное решение, сходящееся к решению задачи для уравнения переноса (2.2), (2.1) ε-равномерно в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

Такой подход позволит в дальнейшем применять технику повышения скорости сходимости сеточных решений на вложенных сетках (см., например, [9]) для построения разностных схем, сходящихся ε-равномерно со вторым порядком скорости сходимости и выше, для задач типа (2.2), (2.1).

3. СТАНДАРТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В этом разделе мы рассмотрим стандартную разностную схему, строящуюся на основе монотонной сеточной аппроксимации начально-краевой задачи (2.2), (2.1).

3.1. Приведем стандартную разностную схему для уравнения переноса.

На множестве $\overline{G}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{3.1}$$

где $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ – произвольные, вообще говоря, неравномерные сетки на отрезках $[0,d]$ и $[0,T]$ соответственно. Пусть $h^i = x^{i+1} - x^i$, $x^i, x^{i+1} \in \overline{\omega}$, $h = \max_i h^i$, и $\tau^k = t^{k+1} - t^k$, $t^k, t^{k+1} \in \overline{\omega}_0$, $\tau = \max_k \tau^k$. Предполагаем выполненным условие $h \le MN^{-1}$, $\tau \le MN_0^{-1}$, где $N+1$ и N_0+1 – число узлов сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ соответственно.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем стандартной разностной схемой (см. [6])

$$\Lambda z(x,t) = f(x,t), \;\; (x,t) \in G_h; \quad z(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h. \tag{3.2а}$$

Здесь $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h = S \cap \overline{G}_h$,

$$\Lambda \equiv \varepsilon b(x,t)\delta_{\overline{x}} + c(x,t) + p(x,t)\delta_{\overline{t}}, \tag{3.2б}$$

$\delta_{\overline{x}}\, z(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}}\, z(x,t)$ – первые разностные производные (производные назад) по x и t соответственно.

Схема (3.2), (3.1) монотонна ε-равномерно (определение монотонности разностных схем см., например, в [6]). Для схемы (3.2), (3.1) справедлив сеточный принцип максимума.

Теорема 3.1. *Пусть для стандартной разностной схемы* (3.2), (3.1) *выполняется условие* $\Lambda z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in G_h$; $z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in S_h$. *Тогда для функции* $z(x,t)$ *справедлива оценка* $z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}_h$.

3.2. Для решения стандартной разностной схемы (3.2) на сетке $\overline{G}_{h(3.1)}$, с использованием априорных оценок (4.10) и соотношения для сингулярной компоненты (4.11) получаем оценку

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[\left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h(3.1)}. \tag{3.3}$$

(Запись $D_{(i.j)}$ ($L_{(i.j)}$, $m_{(i.j)}$, $M_{(i.j)}$, $D_{h(i.j)}$) означает, что эти множества (операторы, постоянные, сетки) введены в формуле (i, j).) Для решения стандартной разностной схемы (3.2) на сетке $\overline{G}_h^u$, равномерной по x и t,

$$\overline{G}_h = \overline{G}_h^u \equiv \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0, \tag{3.4}$$

имеем следующую оценку, подобную (3.3):

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M\left[\left(\varepsilon + N^{-1}\right)^{-1} N^{-1} + N_0^{-1}\right], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h(3.4)}^u, \tag{3.5}$$

где $M_{h(3.3)}, M_{h(3.5)} = \mathbb{O}(1)$.

Таким образом, *стандартные разностные схемы* (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4) *сходятся* при $N, N_0 \to \infty$ *при фиксированных значениях параметра* ε с первым порядком скорости сходимости.

Теорема 3.2. *Пусть для данных начально-краевой задачи* (2.2), (2.1) *выполняются условия* (2.3)*, а для решения задачи – оценки теоремы* 4.1 *при* $K = 2$. *Тогда для решения стандартных разностных схем* (3.2), (3.1) *и* (3.2), (3.4) *справедливы оценки* (3.3) *и* (3.5) *соответственно.*

Замечание 1. Схемы (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4) сходятся при неулучшаемом условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N_0^{-1} = o(1). \tag{3.6}$$

В соответствии с оценкой (3.5) для сходимости стандартных разностных схем (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4) требуется использовать сетки по x с числом узлов, удовлетворяющим условию $N \gg \varepsilon^{-1}$, т.е. неограниченно растущим при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, стандартные схемы (3.2), (3.1) и (3.2), (3.4), сходящиеся при фиксированных значениях параметра ε, не сходятся ε-равномерно.

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ И ПРОИЗВОДНЫХ

Приведем ряд априорных оценок решения задачи (2.2), (2.1), используемых при построении и обосновании разностных схем. Вывод оценок подобен выводу оценок производных регулярных и сингулярных компонент решения сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений из [9]–[11].

4.1. Для сингулярно возмущенной начально-краевой задачи (2.2), (2.1) справедлив *принцип максимума*, подобный принципу максимума для начально-краевых задач для сингулярно возмущенных параболических уравнений [9].

Теорема 4.1. *Пусть для данных начально-краевой задачи для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие*

$$Lu(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in G; \quad u(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in S.$$

Тогда для функции $u(x,t)$ *справедлива оценка* $u(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}$.

4.2. Приведем "стандартные" априорные оценки для решения сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1). При не слишком малых значениях параметра ε исследуемая задача подобна задаче для регулярного уравнения переноса, рассматриваемой в [1], [2].

1. Применяя технику мажорантных функций (подобную приведенной в [9], [10] для параболического уравнения конвекции-диффузии), находим оценку решения начально-краевой задачи (2.2), (2.1):

$$|u(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{4.1}$$

2. При исследовании производных решения начально-краевой задачи считаем, что коэффициенты и правая часть уравнения являются достаточно гладкими на $\overline{G}$, начальная и граничная функции – достаточно гладкие на боковой и нижней частях границы S, производные $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x,0)$, $\dfrac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\varphi(0,t)$ ограничены при $k, k_0 \le 2$, причем в угловой точке $(x,t) = (0,0)$ выполняются условия

согласования, обеспечивающие требуемую непрерывность решения начально-краевой задачи на $\overline{G}$ и его производных по x и t до второго порядка. Пусть выполняется условие

$$u \in C^{k,k_0}(\overline{G}), \quad k + k_0 \le 2. \tag{4.2}$$

3. При оценке производных решения задачи (2.2), (2.1) перейдем к переменным ξ, t, где $\xi = \varepsilon^{-1}x$. В новых переменных имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered}\tilde{L}\tilde{u}(\xi,t) \equiv \left\{\tilde{b}(\xi,t)\frac{\partial}{\partial\xi} + \tilde{c}(\xi,t) + \tilde{p}(\xi,t)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\tilde{u}(\xi,t) = \tilde{f}(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \tilde{G};\\ \tilde{u}(\xi,t) = \tilde{\varphi}(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \tilde{S}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Теперь уже для регулярной задачи (4.3) в переменных ξ,t в случае условий согласования второго порядка в переменных x, t на множестве $\tilde{S}^c$, где

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}u(0,0) = \frac{d}{dt}\varphi^l(0), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(0,0) = \frac{d^2}{dt^2}\varphi^l(0);\\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi^l(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi(0,t), \quad k = 1,2,\end{gathered} \tag{4.4}$$

обеспечивающих включение (4.2), находим оценку производных

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial\xi^k\partial t^{k_0}}\tilde{u}(\xi,t)\right| \le M, \quad (\xi,t) \in \overline{\tilde{G}}, \quad k + k_0 \le 2. \tag{4.5}$$

В переменных x,t получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k\partial t^{k_0}}u(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + k_0 \le 2. \tag{4.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.2. *Пусть для данных начально-краевой задачи для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b,c,p,f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \le 2$, *и пусть на множестве* $\tilde{S}^c$ *выполняется условие согласования второго порядка* (4.4). *Тогда для решения начально-краевой задачи* $u(x,t)$ *и его производных справедливы оценки* (4.1), (4.6).

4.3. Приведем априорные оценки решений и производных для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1), используемые в разд. 5 при построении разностных схем метода декомпозиции решения и обосновании их сходимости.

1. Рассмотрим оценки регулярной и сингулярной компонент решения задачи (2.2), (2.1) из декомпозиции (2.4).

Регулярная компонента решения – функция $U(x,t)$ – определяется соотношением

$$U(x,t) = U^e(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{4.7}$$

где $U(x,t)$ есть сужение на $\overline{G}$ функции $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^e$, являющейся решением следующей “расширенной” задачи:

$$\begin{gathered}L^eU^e(x,t) = f^e(x,t), \quad (x,t) \in G^e;\\ U^e(x,t) = \varphi^e(x,t), \quad (x,t) \in S^e.\end{gathered} \tag{4.8а}$$

Здесь множество

$$\overline{G}^e = [-d^*,d] \times [0,T], \quad d^* > 0, \tag{4.8б}$$

есть продолжение $\overline{G}$ за боковую границу S^l, оператор L^e и функции $f^e(x,t)$ и $\varphi^e(x,t)$ – расширения оператора L на множество $\overline{G}^e$ и функций $f(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ на множества $\overline{G}^e$ и S^e соответственно с сохранением свойств данных задачи (2.2), (2.1). Предполагаем выполненным условие

$$d^* \ge T\max_{\overline{G}^e}\{b^e(x,t)[p^e]^{-1}(x,t)\}.$$

Сингулярная компонента – функция $V(x,t)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{gathered} LV(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G; \\ V(x,t) = \varphi(x,t) - U^e(x,t), \quad (x,t) \in S^l; \\ V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

2. Для компонент $U^e(x,t)$ и $V(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U^e(x,t)\right| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}^e; \tag{4.10а}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} V(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + k_0 \le 2, \tag{4.10б}$$

причем,

$$V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{G} \quad \text{при} \quad x \ge M_1 \varepsilon t, \tag{4.11а}$$

где M_1 – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию

$$M_1 \ge \max_{\overline{G}}[b(x,t)p^{-1}(x,t)]. \tag{4.11б}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.3. *Пусть для данных начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b, c, p, f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \le 2$, *и пусть на множестве* $\tilde{S}^c$ *выполняется условие согласования второго порядка* (4.4). *Тогда для решения начально-краевой задачи и его компонент из представления* (2.4) *справедливы оценки* (4.10), *а также соотношение* (4.11) *для сингулярной компоненты* $V(x,t)$.

5. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ

Построим *разностную схему метода декомпозиции решения*, рассматривая сеточные аппроксимации регулярной и сингулярной компонент решения из декомпозиции (2.4) на своих равномерных сетках.

Заметим, что в силу оценки (4.10) регулярная компонента $U(x,t)$ и ее производные по x и t ограничены ε-равномерно; производные по t сингулярной компоненты $V(x,t)$ ограничены ε-равномерно, производные k-го порядка по x растут как $\mathbb{O}\left(\varepsilon^{-k}\right)$.

5.1. Построим сеточную аппроксимацию регулярной компоненты $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^e$. Заметим, что функция $U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, связана с функцией $U^e(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^e$, соотношением (4.7).

На множестве $\overline{G}^e_{(4.8)}$ строим равномерную сетку

$$\overline{G}^e_h = \overline{\omega}^e \times \overline{\omega}_0, \tag{5.1а}$$

где $\overline{\omega}^e$ и $\overline{\omega}_0$ – равномерные сетки по x и t. Шаги этих сеток определяются соотношениями

$$h^e = (d + d^*)N^{-1}, \quad \tau = T N_0^{-1}, \tag{5.1б}$$

где N и N_0 – число интервалов разбиения множеств $[-d^*, d]$ и $[0, T]$ соответственно; $d^* = d^*_{(4.8)}$.

Задачу (4.8) аппроксимируем разностной схемой

$$\Lambda^e z^e_U(x,t) = f^e(x,t), \quad (x,t) \in G^e_h; \quad z^e_U(x,t) = \varphi^e(x,t), \quad (x,t) \in S^e_h, \tag{5.2}$$

где оператор Λ^e есть оператор $\Lambda_{(3.2)}$, но на множестве $\overline{G}^e$.

Разностная схема (5.2), (5.1) является монотонной. С использованием априорных оценок регулярной компоненты решения “расширенной задачи” (4.8) устанавливается оценка

$$\left|U^e(x,t) - z^e_U(x,t)\right| \le M[N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}^e_h. \tag{5.3}$$

Сеточное решение $z^e_U(x,t)$ сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть для регулярной компоненты* $U^e(x,t)$, $(x,t)\in \bar{G}^e$, *из декомпозиции* (2.4) *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10а). *Тогда решение разностной схемы* (5.2), (5.1) *сходится* ε*-равномерно в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости по x и t с оценкой* (5.3).

5.2. Построим сеточную аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x,t)$, $(x,t)\in \bar{G}$.

На множестве

$$\bar{G}_V = [0,\min(M_1\varepsilon T,d)]\times[0,T] \tag{5.4}$$

построим равномерную сетку

$$\bar{G}_{Vh} = \{\bar{\omega}_V\times\bar{\omega}_0\}\cap\bar{G}_V, \tag{5.5}$$

где $\bar{\omega}_V$ и $\bar{\omega}_0$ – равномерные сетки на множествах $[0,\min(M_1\varepsilon T,d)]$ и $[0,T]$ соответственно с шагами $h_V = \min(M_1\varepsilon T,d)N^{-1}$ и $\tau = TN_0^{-1}$ по x и t соответственно; $\tau = \tau_{(5.1)}$, $\bar{\omega}_{0(5.5)} = \bar{\omega}_{0(5.1)}$.

Задачу (4.9) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{gathered}\Lambda z_V(x,t) = 0, \quad (x,t)\in G_{Vh};\\ z_V(x,t) = \varphi^e(x,t) - z_U^e(x,t), \quad (x,t)\in S_{Vh},\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $z_U^e(x,t) = z_{U(5.2)}^e(x,t)$, $\bar{G}_{Vh} = G_{Vh}\cup S_{Vh}$.

Разностная схема (5.6), (5.5) является монотонной.

С использованием априорных оценок сингулярной компоненты решения задачи (4.9) устанавливается оценка

$$\left|V(x,t) - z_V(x,t)\right| \le M[N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t)\in\bar{G}_{Vh}. \tag{5.7}$$

Сеточное решение $z_V(x,t)$ сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 5.2. *Пусть для сингулярной компоненты* $V(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}_V$, *из декомпозиции* (2.4) *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10б). *Тогда решение разностной схемы* (5.6), (5.5) *сходится* ε*-равномерно; для решения разностной схемы справедлива оценка* (5.7).

6. КОНТИНУАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

По сеточным решениям компонент разностной схемы метода декомпозиции решения строим континуальную аппроксимацию компонент решения и самого решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1) и устанавливаем ε-равномерную сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости как компонент, так и самого решения.

6.1. Рассмотрим аппроксимацию регулярной компоненты $U(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}$, из декомпозиции.

Пусть $z_U^e(x,t)$, $(x,t)\in\bar{G}_h^e$, – решение разностной схемы метода декомпозиции решения (5.2), (5.1). По значениям функции $z_U^e(x,t)$ в узлах сетки

$$\bar{G}_h^U = \bar{G}_h^e\cap\bar{G} \tag{6.1}$$

строим интерполянт

$$\tilde{U}(x,t), \quad (x,t)\in\bar{G}. \tag{6.2}$$

В узлах элементарной ячейки, определяемой узлами

$$(x_i,t_j),\ (x_{i+1},t_j),\ (x_i,t_{j+1}),\ (x_{i+1},t_{j+1}), \tag{6.3}$$

полагаем

$$\tilde{U}(x,t) = z_U^e(x,t). \tag{6.4}$$

На элементарных прямоугольниках, определяемых узлами (6.3), интерполянт (6.2) строится линейным по x и t.

Приведенную технику построения интерполянта $\tilde{U}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, назовем *континуальной аппроксимацией* регулярной компоненты $U(x,t)$ решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

С использованием априорных оценок регулярной компоненты решения устанавливается следующая оценка для интерполянта $\tilde{U}(x,t)$, подобная оценке (5.3):

$$|U(x,t)-\tilde{U}(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.5}$$

Таким образом, интерполянт $\tilde{U}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, регулярной компоненты решения сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 6.1. *Пусть для регулярной компоненты $U^e(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}^e$, решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10а). *Тогда континуальная аппроксимация регулярной компоненты решения — интерполянт $\tilde{U}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, — сходится ε-равномерно в равномерной норме; для функции $\tilde{U}(x,t)$ справедлива оценка* (6.5).

6.2. Рассмотрим аппроксимацию сингулярной компоненты $V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$.

Пусть $z_V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_{Vh}$, есть решение разностной схемы метода декомпозиции решения (5.6), (5.5).

По значениям функции $z_V(x,t)$ в узлах сетки $\overline{G}_{Vh}$ строим интерполянт

$$\tilde{V}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}_V. \tag{6.6}$$

В узлах элементарной ячейки, определяемой узлами

$$(x_i,t_j),\ (x_{i+1},t_j),\ (x_i,t_{j+1}),\ (x_{i+1},t_{j+1}), \tag{6.7}$$

полагаем

$$\tilde{V}(x,t)=z_V^e(x,t). \tag{6.8}$$

На *элементарных прямоугольниках*, определяемых узлами (6.7), интерполянт (6.6) строится линейным по x и t.

Приведенную технику построения интерполянта $\tilde{V}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, назовем *континуальной аппроксимацией* сингулярной компоненты $V(x,t)$ решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

С использованием априорных оценок сингулярной компоненты решения устанавливается следующая оценка для интерполянта $\tilde{V}(x,t)$, подобная оценке (5.7):

$$|V(x,t)-\tilde{V}(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}_V. \tag{6.9}$$

Таким образом, интерполянт $\tilde{V}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, сингулярной компоненты решения сходится ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости по x и t.

Справедлива следующая

Теорема 6.2. *Пусть для сингулярной компоненты $V(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется априорная оценка* (4.10б). *Тогда континуальная аппроксимация сингулярной компоненты решения — интерполянт $\tilde{V}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_V$, — сходится ε-равномерно в равномерной норме; для функции $\tilde{V}(x,t)$ справедлива оценка* (6.9).

Далее будет удобно определить интерполянт $\tilde{V}(x,t)$ на всем множестве $\overline{G}$, полагая $\tilde{V}(x,t)=0$ при $(x,t)\in\overline{G}\backslash\overline{G}_V$.

6.3. Построим континуальное решение начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1) — функцию $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, — как сумму интерполянтов:

$$\tilde{u}(x,t)=\tilde{U}(x,t)+\tilde{V}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.10}$$

С учетом оценок (6.5) и (6.9) имеем

$$|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}. \tag{6.11}$$

Континуальное решение $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, сходится к решению $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса (2.2), (2.1) ε-равномерно с первым порядком скорости сходимости.

Теорема 6.3. *Пусть для регулярной и сингулярной компонент из декомпозиции* (2.4) *решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняются априорные оценки* (4.10). *Тогда континуальное решение* $\tilde{u}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, *сходится к решению* $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, *начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса* (2.2), (2.1) ε-*равномерно в равномерной норме с оценкой* (6.11).

7. ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена начально-краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения переноса с возмущающим параметром ε при пространственной производной, где параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$. В этой задаче при малых значениях параметра ε в окрестности боковой границы S^l (через которую характеристики входят в область) появляется пограничный слой.

2. Показано, что разностная схема на основе монотонных сеточных аппроксимаций задачи на сетке с произвольным распределеним узлов, а также на равномерной сетке, в случае ее сходимости в равномерной норме, не сходится ε-равномерно.

3. Разработана монотонная разностная схема метода декомпозиции решения, в которой регулярная и сингулярная компоненты решения вычисляются на своих равномерных сетках (см. построения в разд. 5 и утверждения теорем 5.1 и 5.2 об ε-равномерной сходимости сеточных решений регулярной и сингулярной компонент решения).

4. По сеточным аппроксимациям регулярной и сингулярной компонент решения в разд. 6 построена континуальная аппроксимация компонент решения и само континуальное решение начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса, и установлена ε-равномерная сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости как компонент, так и самого континуального решения.

5. Разработанный в настоящей работе подход к построению разностной схемы метода декомпозиции решения позволит применить технику повышения скорости сходимости сеточных решений на вложенных сетках (см., например, [9]) для построения робастных разностных схем, сходящихся со вторым порядком скорости сходимости и выше, для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
2. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы. Методы математической физики. М.: Изд-кий центр "Академия", 2013. 304 с.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
4. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 272 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
7. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1824–1830.
8. *Shishkina L.P., Shishkin G.I.* Development and Numerical Study of Robust Difference Schemes for a Singularly Perturbed Transport Equation // Finite Difference Methods: Theory and Applications, FDM 2018, I. Dimov, I. Farago, and L. Vulkov (eds.), Lecture Notes in Computer Science (Springer, Cham, 2019). P. 476–483.
9. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. V. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.
10. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. 233 с.
11. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Revised Ed. Singapore: World Sci., 2012. 176 p.