

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 61, номер 4, 2021 год

---

---

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

О выделении корневых пространств  
для линейной алгебраической спектральной задачи

*Л. Ф. Юхно*

531

---

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Оптимизация параметров источников в многоточечных неразделенных условиях  
линейных динамических систем

*В. М. Абдуллаев, К. Р. Айда-заде*

539

Об одном методе решения локальной граничной задачи для нелинейной  
стационарной управляемой системы в классе дифференцируемых управлений

*А. Н. Квитко*

555

A modified trapezoidal Broyden's method for nonlinear equations

*Song WU, Hai Jun WANG*

571

---

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн,  
генерируемых движущимся нелокальным источником возмущений

*В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров*

572

Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники  
на основе метода дискретных источников (Обзор)

*Ю. А. Еремин, А. Г. Свешников*

580

Метод граничных элементов для решения неоднородного бигармонического  
уравнения с неизвестной функцией и ее производными в правой части

*Р. Ф. Марданов, А. Е. Марданова*

608

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Бикомпактные схемы для многомерного уравнения конвекции-диффузии

*М. Д. Брагин, Б. В. Rogov*

625

Развитие ускоренного метода граничных элементов для трехмерного  
моделирования динамики пузырькового кластера с примесями  
твердых частиц в акустическом поле

*И. А. Зарафутдинов, Ю. А. Питюк, О. А. Солнышкина*

644

Об одном подходе к решению пространственных задач гидродинамики  
с учетом упругих процессов

*А. Ю. Круковский, Ю. А. Повещенко, В. О. Подрыга, П. И. Рагимли*

658

Аномалии распространения акустических волн в двух полубесконечных цилиндрах,  
соединенных тонким уплощенным каналом

*С. А. Назаров, Л. Шенель*

666

Вихревые фантомы в стационарной задаче о протекании Кочина–Юдовича

*О. В. Трошкин*

684

---

---



---

---

**ОБЩИЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

---

---

УДК 519.624

*Из неопубликованных материалов  
Александра Александровича Абрамова,  
моего дорогого учителя*

## **О ВЫДЕЛЕНИИ КОРНЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ**

© 2021 г. Л. Ф. Юхно

125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

e-mail: yukhno@imamod.ru

Поступила в редакцию 06.02.2020 г.

Переработанный вариант 10.11.2020 г.

Принята к публикации 16.12.2020 г.

Рассматриваются некоторые численные методы выделения корневого пространства, соответствующего выбранному собственному значению, для алгебраической спектральной задачи, линейной по спектральному параметру. Эти методы реализуют построение корневого пространства в целом без вычисления соответствующих собственных и присоединенных векторов. Предлагаемые алгоритмы являются численно устойчивыми. Библ. 7.

**Ключевые слова:** алгебраическая спектральная задача, собственные и присоединенные векторы, корневое пространство, жорданов базис.

**DOI:** 10.31857/S004446692104013X

### **ВВЕДЕНИЕ**

Среди инвариантных по отношению к оператору  $A$  пространств особую важную роль играют корневые пространства. Напомним кратко в связи с этим некоторые используемые ниже сведения.

В классическом определении (см., например, [1]) корневым вектором для оператора  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$  кратности  $m$ , называется вектор  $x$  такой, что  $(A - \lambda I)^m x = 0$ ;  $I$  – единичная матрица. Совокупность корневых векторов образует корневое пространство  $\ker(A - \lambda I)^m$  размерности  $m$  для этого значения  $\lambda$ . Все рассматриваемое пространство разбивается в прямую сумму корневых пространств, соответствующих различным собственным значениям оператора  $A$ . В результате любой вектор  $x$  может быть разложен в сумму векторов, взятых из каждого корневого пространства и называемых проекциями на эти пространства. Матрица оператора  $A$  в базисе, составленном из базисов корневых пространств, является блочно-диагональной.

В работе рассматривается вопрос о выделении корневых пространств для спектральной задачи в обобщенной постановке. Для такой задачи вводится понятие корневого вектора, которое совпадает с приведенным выше определением в случае классической спектральной задачи.

Под выделением конечномерного подпространства в линейном пространстве обычно понимается построение какого-либо его базиса. Для корневых пространств часто рассматривается задача вычисления жорданового базиса, в котором матрица оператора  $A$  имеет наиболее простой (канонический) вид. Однако при решении ряда задач бывает нужно определение корневого пространства в целом, без исследования структуры жордановых цепочек. Для этого случая в работе рассматриваются способы выделения корневого пространства, соответствующего собственному значению  $\lambda$ , с помощью нахождения произвольного базиса. Эти способы не требуют вычисления собственных и присоединенных векторов. Такой подход в данном случае более оправдан, поскольку построение цепочек корневых векторов (особенно для немалых значений их длин)

требует весьма кропотливых вычислений. Кроме того, для приближенно заданных матриц это построение может быть неустойчивой задачей, если элементы матрицы возмущаются в пределах допустимой погрешности (см., например, в [1]).

В работе показано (см. разд. 4), что рассматриваемые методы определения корневого пространства путем описанного построения произвольного (не жорданового) базиса являются в случае малых возмущений исходной задачи численно устойчивыми.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $A$  и  $B$  – заданные комплексные  $n \times n$ -матрицы. Далее рассматривается обобщенная задача на собственные значения (см., например, [2]) вида

$$(A + \lambda B)x = 0, \quad x \neq 0, \quad (1.1)$$

где  $x$  есть  $n$ -столбец. Здесь предполагается, что матрицы  $A$  и  $B$  могут быть вырожденными.

Введем в рассмотрение функцию от  $\lambda$ :

$$\omega(\lambda) = \det(A + \lambda B);$$

очевидно,  $\omega(\lambda)$  – многочлен степени не выше  $n$ .

Пусть  $\lambda_0$  есть  $m$ -кратный корень уравнения  $\omega(\lambda) = 0$ ,  $m \geq 1$ . Возьмем  $x_0$  – решение задачи (1.1) при  $\lambda = \lambda_0$ , т.е. ее собственный вектор, отвечающий этому значению  $\lambda_0$ . Соответствующими этому вектору *присоединенными* векторами будем называть  $n$ -столбцы  $x_1, x_2, \dots, x_p$  такие, что для  $\lambda$ , близких к значению  $\lambda_0$ , имеет место представление

$$(A + \lambda B)(x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_1 + \dots + (\lambda - \lambda_0)^p x_p) = O((\lambda - \lambda_0)^{p+1}). \quad (1.2)$$

Совокупность векторов  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_p$ , удовлетворяющих соотношению (1.2), называется *жордановой цепочкой*. В [3] для более общего, чем рассматриваемый здесь, случая, а именно, для нелинейной по спектральному параметру задачи доказано, что длина определенной таким образом цепочки не превосходит кратности собственного значения, т.е.

$$p + 1 \leq m. \quad (1.3)$$

Если  $B$  – единичная матрица, то данные определения совпадают с принятыми (см., например, [1]). Действительно, в этом случае соотношения между векторами жордановой цепочки задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} (A + \lambda_0 I)x_0 &= 0 \\ (A + \lambda_0 I)x_1 + x_0 &= 0 \\ (A + \lambda_0 I)x_2 + x_1 &= 0 \\ &\text{-----} \\ (A + \lambda_0 I)x_p + x_{p-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для краткости выкладок положим  $\lambda_0 = 0$ . Тогда, преобразуя левую часть (1.2) с учетом (1.4), получаем

$$\begin{aligned} (A + \lambda I)(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots + \lambda^p x_p) &= Ax_0 + \lambda x_0 + \lambda Ax_1 + \lambda^2 x_1 + \lambda^2 Ax_2 + \dots + \lambda^p Ax_p + \\ &+ \lambda^{p+1} x_p = \lambda x_0 - \lambda x_0 + \lambda^2 x_1 - \lambda^2 x_1 + \dots + \lambda^p x_{p-1} - \lambda^p x_{p-1} + \lambda^{p+1} x_p = \lambda^{p+1} x_p = O(\lambda^{p+1}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Методы вычисления собственных и присоединенных векторов в таком случае см., например, также в [1].

Пространство, порожденное собственными векторами задачи (1.1) при  $\lambda = \lambda_0$  и всеми отвечающими им присоединенными векторами, называется *корневым* пространством этой задачи, соответствующим  $\lambda_0$ .

Далее, как сказано во введении, рассматриваются численные методы выделения корневого пространства, не требующие нахождения соответствующих собственных и присоединенных векторов.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Зафиксируем нужные для дальнейшего свойства рассматриваемой задачи. Будем преобразовывать уравнение (1.1), умножая матрицы  $A$  и  $B$  слева и справа на невырожденные  $n \times n$ -матрицы (одни и те же для  $A$  и  $B$ ). Нетрудно видеть, что умножение матриц  $A$  и  $B$  на такую матрицу  $C$  слева, как следует из соотношений (1.1), (1.2), не меняет задачу. Умножение этих матриц на матрицу  $C$  справа соответствует замене переменных

$$x_i = CX_i, \quad i = 0, 1, \dots, p,$$

где  $X_i$  – новые искомые  $n$ -столбцы. Функция  $\omega(\lambda)$  при этом умножается на ненулевое число.

В дальнейшем изложении, преобразуя матрицы, мы для простоты не будем менять обозначений.

Пусть  $B$  – вырожденная матрица:  $\text{rank } B = r, r < n$ . Тогда, используя указанные преобразования, приведем матрицу  $B$  к виду

$$B = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где  $I$  – единичная  $r \times r$ -матрица. Разобьем получившуюся в результате преобразований матрицу  $A$ , а также новые искомые векторы  $X$  на соответствующие блоки,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix}.$$

В новых переменных задача (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + \lambda\xi &= 0, \\ a_{21}\xi + a_{22}\eta &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отметим, что ранг матрицы  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  равен  $n - r$ , в противном случае  $\omega(\lambda) \equiv 0$ .

Далее еще раз перейдем к новым искомым величинам, умножив матрицы  $A$  и  $B$  справа на невырожденную  $n \times n$ -матрицу так, чтобы получить  $a_{21} = 0, a_{22} = I$ ; здесь, как и раньше,  $I$  обозначает единичную матрицу соответствующего размера. Тогда вместо системы (2.1) мы получим задачу вида

$$\begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + \lambda(b_1\xi + b_2\eta) &= 0, \\ \eta &= 0, \end{aligned}$$

где через  $b_1$  и  $b_2$  обозначены блоки преобразующей матрицы размеров  $(r \times r)$  и  $(r, n - r)$  соответственно. Таким образом, задача (2.1) перейдет в задачу

$$a_{11}\xi + \lambda b_1\xi = 0, \quad \xi \neq 0. \quad (2.2)$$

Задача (2.2) имеет ту же структуру, что и исходная задача (1.1), но рассматривается в пространстве меньшей размерности.

Если  $\det b_1 = 0$ , то будем продолжать аналогичную обработку задачи, т.е. применять к задаче (2.2) преобразования, подобные тем, которые были применены к задаче (1.1). И так далее, пока не получим матрицу  $b_1$ , такую, что  $\det b_1 \neq 0$ . Число таких этапов преобразований и переходов к обработке последующей задачи конечно, так как размерность пространства, в котором рассматривается задача, на каждом этапе уменьшается. В результате мы придем к системе, которая имеет вид

$$\begin{aligned} a\xi + \lambda\xi &= 0, \\ \eta &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта задача имеет вид исходной постановки (1.1) с матрицами  $A$  и  $B$ , которые выражаются следующим образом:

$$A = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для преобразованной описанным образом задачи (2.3) рассмотрим разложение матричной функции  $(a + \lambda I)^{-1}$  в окрестности изолированной особой точки  $\lambda_0$  по степеням  $\lambda - \lambda_0$  (положительным и отрицательным), т.е. в ряд Лорана в кольце с центром  $\lambda_0$ . Тогда коэффициент  $a_{-1}$  при степени  $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$  является *идемпотентной* или *проекционной* матрицей и, таким образом, в некотором базисе представляет собой матрицу оператора проектирования на подпространство.

Напомним, что квадратная матрица  $P$  называется проекционной, если  $P^2 = P$ . В любом базисе проективному оператору соответствует проекционная матрица.

Сформулированное выше утверждение непосредственно следует из вида спектрального разложения для матричной функции  $(a + \lambda I)^{-1}$ , если привести матрицу  $a$  к жордановой форме (см., например, [4, §§ 5.4–5.5]). Там же доказано, что образ идемпотентной компоненты спектрального разложения, в нашем случае это  $\text{Im } a_{-1}$ , совпадает с  $\ker(a + \lambda I)^m$ , т.е. с соответствующим корневым пространством (см. введение). Таким образом,  $a_{-1}$  является матрицей проектора на корневое пространство задачи (2.3), соответствующее  $\lambda = \lambda_0$ .

Из сказанного, в частности, также следует, что размерность этого корневого пространства равна  $m$ .

Далее для задачи (1.1) составим матрицу

$$Q(\lambda) = (A + \lambda B)^{-1} B \quad (2.4)$$

и рассмотрим, как меняется эта матрица в результате описанных преобразований исходной задачи.

При умножении матриц  $A$  и  $B$  на квадратную невырожденную  $n \times n$ -матрицу  $C$  слева матрица  $Q(\lambda)$  не меняется:

$$CQ(\lambda) = (CA + \lambda CB)^{-1} CB = (A + \lambda B)^{-1} C^{-1} CB = Q(\lambda).$$

При умножении матриц  $A$  и  $B$  на такие квадратные  $n \times n$ -матрицы справа матрица  $Q(\lambda)$  меняется так, как должна меняться матрица линейного преобразования при переходе к новому базису:

$$Q(\lambda)C = (AC + \lambda BC)^{-1} BC = C^{-1}(A + \lambda B)^{-1} BC = C^{-1}Q(\lambda)C,$$

т.е. новая матрица подобна исходной. Для окончательно полученных в преобразованной задаче (2.3) величин матрица  $Q(\lambda)$  имеет вид

$$Q(\lambda) = \left\| \begin{array}{cc|cc} (a + \lambda I)^{-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} (a + \lambda I)^{-1} & 0 & & \\ 0 & & & \end{array} \right\|. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что при разложении определяемой равенством (2.5) матрицы  $Q(\lambda)$  по степеням  $\lambda - \lambda_0$  матрица  $Q_{-1}$ , т.е. коэффициент разложения при  $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ , является матрицей проектора на корневое пространство для полученной после преобразования задачи (2.3). Но поскольку исходная матрица  $Q(\lambda)$  в результате описанной трансформации меняется как матрица линейного преобразования, то  $Q_{-1}$  – коэффициент разложения при  $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$  для исходной матрицы (2.4), – это проектор на соответствующее корневое пространство в исходных величинах, т.е. для задачи (1.1). В результате доказана следующая

**Теорема.** Составим для задачи (1.1) матричную функцию  $Q(\lambda) = (A + \lambda B)^{-1} B$  и разложим ее в ряд Лорана в окрестности  $\lambda = \lambda_0$ . Тогда коэффициент разложения при  $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$  – это матрица проектора на корневое пространство рассматриваемой задачи, соответствующее  $\lambda = \lambda_0$ .

Далее для сокращения выкладок положим  $\lambda_0 = 0$  так, что указанное разложение для  $Q(\lambda)$  будет иметь вид

$$Q(\lambda) = \frac{Q_{-m}}{\lambda^m} + \frac{Q_{-m+1}}{\lambda^{m-1}} + \dots + \frac{Q_{-1}}{\lambda} + Q_0 + Q_1\lambda + Q_2\lambda^2 + \dots$$

Очевидно, степеней ниже, чем  $-m$  в разложении  $Q(\lambda)$  быть не может.

3. ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ

Из доказанной теоремы вытекают следующие методы нахождения корневого пространства задачи (1.1), не требующие построения жордановых цепочек собственных и присоединенных векторов. Эти методы сводятся к построению произвольного базиса с помощью проекционной матрицы  $Q_{-1}$ .

3.1. Для нахождения матрицы  $Q_{-1}$  возьмем соотношение

$$(A + \lambda B)Q(\lambda) = B. \tag{3.1}$$

Из этого соотношения выведем совокупность формул, которые будем использовать для вычисления последовательности матричных коэффициентов указанного разложения

$$Q_{-m}, Q_{-m+1}, \dots, Q_{-1}, Q_0, Q_1, \dots$$

Для этого, подставляя в соотношение (3.1) приведенное выше разложение для  $Q(\lambda)$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получаем следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} &AQ_{-m} = 0 \\ &AQ_{-m+1} + BQ_{-m} = 0 \\ &AQ_{-m+2} + BQ_{-m+1} = 0 \\ &----- \\ &AQ_{-1} + BQ_{-2} = 0 \\ &AQ_0 + BQ_{-1} = B \\ &AQ_1 + BQ_0 = 0 \\ &----- \end{aligned} \tag{3.2}$$

При решении системы (3.2), в отличие от случая, когда  $A$  – невырожденная матрица, каждая величина  $Q_s$  определяется не из одного очередного соотношения, а требует использования некоторой совокупности этих соотношений.

Остановимся на практической реализации этих вычислений.

Матрица  $Q_{-m}$ , удовлетворяющая первому уравнению, – это произвольная  $n \times n$ -матрица, столбцы которой порождают  $\ker A$ . На второе уравнение накладывается ограничение:  $Q_{-m}$  должна быть такой, чтобы это уравнение было разрешимо относительно матрицы  $Q_{-m+1}$ . Матрица  $Q_{-m+1}$  определяется из второго уравнения с точностью до слагаемого, удовлетворяющего первому уравнению, но она должна быть такой, чтобы третье уравнение разрешалось относительно матрицы  $Q_{-m+2}$  и т.д. При использовании полной совокупности уравнений все матрицы  $Q_s$  определяются однозначно.

Поскольку систему (3.2) нельзя решать последовательно (прогонкой), рассмотрим вопрос о том, где можно оборвать эту цепочку уравнений. Другими словами, сколько уравнений нужно использовать при практическом решении задачи этим методом, чтобы однозначно определить окончательную величину  $Q_{-1}$ .

Пусть матрицы  $Q_{-m}, \dots, Q_N$  и  $\tilde{Q}_{-m}, \dots, \tilde{Q}_N$  удовлетворяют первым  $N + m + 1$  уравнениям системы (3.2). Пусть  $L_s = Q_s - \tilde{Q}_s$ . Пусть матрица  $L_{-1} \neq 0$  и пусть  $k$  – наименьший индекс, для которого все матрицы  $L_s \neq 0$ ; как было отмечено,  $k \leq -1$ . Возьмем какой-либо  $n$ -столбец  $d$ , для которого  $L_k d \neq 0$  и образуем  $n$ -столбцы  $x_q = L_{q+k} d, q = 0, \dots, N - k$ . Нетривиальные матрицы  $L_s, k \leq s \leq N$ , удовлетворяют однородной линейной системе, соответствующей указанной совокупности уравнений из (3.2):

$$\begin{aligned} &AL_k = 0 \\ &AL_{k+1} + BL_k = 0 \\ &----- \\ &AL_N + BL_{N-1} = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы для векторов  $x_q, 0 \leq q \leq N - k$ , следуют очевидные соотношения

$$\begin{aligned} Ax_0 &= 0 \\ Ax_1 + Bx_0 &= 0 \\ &\text{-----} \\ Ax_{N-k} + Bx_{N-k-1} &= 0. \end{aligned}$$

При сравнении этих соотношений с формулами (1.4) для  $\lambda_0 = 0$  видно, что векторы  $x_0, x_1, \dots, x_{N-k}$  образуют жорданову цепочку и, следовательно, для малых значений  $\lambda$  имеет место представление

$$(A + \lambda B)(x_0 + \lambda x_1 + \dots + \lambda^{N-k} x_{N-k}) = O(\lambda^{N-k+1}).$$

Но в этом случае, как указано в разд. 1, выполняется соотношение  $N - k + 1 \leq m$  (см. формулу (1.3)). Поэтому справедлива оценка  $N \leq m + k - 1 \leq m - 2$ . Следовательно, если взять с запасом  $N = m - 1$ , то матрица  $Q_{-1}$  определяется однозначно.

Так что для вычисления окончательно определенного значения  $Q_{-1}$  достаточно использовать первые  $2m$  уравнений.

В результате для определения  $Q_{-1}$  мы получили линейную систему  $2m$  матричных уравнений следующего специфического вида:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ B & A & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & B & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{-m} \\ Q_{-m+1} \\ \dots \\ Q_{-1} \\ \dots \\ Q_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ B \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Методы решения таких систем известны, на них не останавливаемся.

Получив матрицу  $Q_{-1}$ , находим максимальную совокупность ее существенно линейно независимых столбцов, которая и составляет базис искомого корневого пространства. Действительно, проекция  $x' = Q_{-1}x$  любого вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  на это корневое пространство представляет собой линейную комбинацию

$$x' = Q_{-1}x = x_1q_1 + x_2q_2 + \dots + x_nq_n$$

столбцов  $q_1, \dots, q_n$  матрицы  $Q_{-1}$ . Эта формула, кстати, служит иллюстрацией того, что образ оператора называют также пространством столбцов его матрицы в некотором базисе.

3.2. Рассмотрим подобный предыдущему способ построения корневого пространства, использующий проекционную матрицу, вычисление которой основано на применении интегральных формул от матрицы. Известно, что интегральная формула Коши для аналитических функций скалярного аргумента, определенных на спектре матрицы, может быть распространена на функции от матрицы (см. [5]). В результате выражения коэффициентов ряда Лорана, в частности, интересующая нас формула вычисления вычета аналитической функции в изолированной особой точке, переносится на матричные ряды. Таким образом, для преобразованной задачи с матрицей  $Q(\lambda)$  из (2.5) справедлива следующая формула (см., например, [6], [7]).

Если взять замкнутый контур  $\Gamma$ , отделяющий  $\lambda_0$  от остальных собственных значений и пробегаемый против часовой стрелки, то имеет место равенство

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (a + \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где матрица  $a_{-1}$  — это коэффициент при степени  $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$  для разложения в ряд Лорана матричной функции  $(a + \lambda I)^{-1}$  в окрестности  $\lambda_0$ . А поскольку, как показано в работе (см. разд. 2), матрица (2.5) получается подобным преобразованием исходной матрицы  $Q(\lambda) = (A + \lambda B)^{-1}B$ , то



соответствующий коэффициент ряда Лорана для матрицы  $Q(\lambda)$  из (2.4) выражается следующим образом:

$$Q_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A + \lambda B)^{-1} B d\lambda. \quad (3.4)$$

Согласно доказанной в работе теореме,  $Q_{-1}$  в (3.4) является проектором на корневое пространство, соответствующее  $\lambda_0$  для исходной задачи. Этой формулой можно воспользоваться для численного нахождения матрицы  $Q_{-1}$ . На методах вычисления такого интеграла (его определение см., например, в [6]) мы не останавливаемся. Отметим лишь, что формулы рекуррентного вычисления подынтегральной матрицы (“обобщенной резольвенты”), приведенные также в [6], могут быть полезными.

Как и раньше, в качестве базиса искомого корневого пространства выбирается совокупность существенно линейно независимых столбцов этой матрицы.

В [6] также показано, что если внутри контура  $\Gamma$  расположено несколько собственных значений, то интеграл в формуле (3.4) представляет собой проектор на сумму корневых пространств, соответствующих этим собственным значениям. Это, аналогично сказанному ранее, непосредственно следует из формулы для матрицы  $(a + \lambda I)^{-1}$  после приведения матрицы  $a$  к жордановой форме и подобия матриц  $Q(\lambda)$ , определяемых формулами (2.4) и (2.5).

Относительно рассмотренных в разд. 3 методов сделаем следующее

**Замечание.** На практике можно использовать упрощение вычислений, если проводить предварительное преобразование задачи, реализуя путь, которым была доказана приведенная в работе теорема. Напомним, что в этом доказательстве мы сохраняли исходный размер  $n \times n$  фигурирующих в задаче матриц, в то время как фактическая размерность рассматриваемого пространства уменьшалась. При практической реализации алгоритма переход от системы (2.1) к системе вида (2.2) можно осуществить следующим образом. Как было отмечено выше, ранг матрицы  $(a_{21}, a_{22})$  во втором уравнении системы (2.1) равен  $n - r$ . Выбирая из этой матрицы невырожденный  $(n - r) \times (n - r)$ -минор, выразим соответствующие  $n - r$  переменных через остальные. Результат запишем в виде

$$\xi = P_1 \zeta, \quad \eta = P_2 \zeta,$$

где  $\zeta$  – искомый  $r$ -столбец, а матрицы  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующих размеров  $r \times r$  и  $(n - r) \times r$ , вычисляются. А тогда, подставив полученные выражения для  $\xi$  и  $\eta$  в первое уравнение (2.1), мы получим задачу

$$(a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \lambda P_1)\zeta = 0, \quad \zeta \neq 0,$$

имеющую вид исходного уравнения (1.1), принятого за основу, но с матрицами  $A$  и  $B$  меньшего размера  $r \times r$ .

#### 4. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ

В заключение отметим еще раз целесообразность использования предложенных в работе методов в случае, когда для выделения корневого пространства достаточно определить какой-либо (не обязательно жорданов) базис. Как было отмечено, такой подход предпочтителен, поскольку построение жорданового базиса – более трудоемкая задача и к тому же может быть неустойчивой, если в процессе вычислений в матрицы  $A$  и  $B$  вносятся малые погрешности.

Известно, что при возмущении элементов матрицы в результате ошибок округления четкая грань между случаями простых и кратных собственных значений может стираться. При этом кратное собственное значение может “распадаться”, т.е. превращаться в очень близкие, но различные значения, и, наоборот, близкие собственные значения могут “слипаться”, т.е. становиться кратным собственным значением в пределах точности. Подобные ситуации нередко встречаются в вычислительной практике. В этих случаях канонический вид матрицы претерпевает качественное изменение. Так, для слипшихся собственных значений чисто диагональная матрица переходит к общей канонической форме, так что даже число собственных векторов может меняться скачкообразно. Понятно, что в этом случае нахождение жорданового базиса теряет смысл. В условиях, близких к описанной ситуации, построение такого базиса, очевидно, является неустойчивой задачей.

Рассмотренные в работе способы численного построения корневого пространства лишены описанного выше недостатка. Действительно, так как искомая матрица  $Q_{-1}$  лишь приближенно представляет собой искомый проектор, а в результате выделения совокупности линейно независимых столбцов этой матрицы мы также приближенно получаем корневой базис, мы имеем дело с возмущенной задачей. Однако если, например,  $\lambda_0$  — слипшееся собственное значение, то как следует из приведенного в разд. 3 описания методов, полученная как решением системы (3.3), так и вычислением интеграла (3.4) матрица  $Q_{-1}$  определяет для некоторой близкой к исходной (возмущенной) пары матриц  $A$  и  $B$  проекцию на *суммарное* корневое пространство для соответствующих собственных значений, близких к слипшемуся значению  $\lambda_0$ . Это на практике и означает устойчивость.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002. 736 с.
2. Тыртышиников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 477 с.
3. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. Корневые векторы нелинейной конечномерной спектральной задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 187–192.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1999. 320 с.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 166 с.

---

---

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

---

---

УДК 519.626.6

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ  
В МНОГОТОЧЕЧНЫХ НЕРАЗДЕЛЕННЫХ УСЛОВИЯХ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

© 2021 г. В. М. Абдуллаев<sup>1,2,\*</sup>, К. Р. Айда-заде<sup>2,3,\*\*</sup>

<sup>1</sup> AZ1010 Баку, пр-т Азадлыг, 20, Азерб. гос. ун-т нефти и промышленности, Азербайджан

<sup>2</sup> AZ1141 Баку, ул. Вахабзаде, 9, Ин-т систем управления НАН Азербайджана, Азербайджан

<sup>3</sup> AZ1141 Баку, ул. Вахабзаде, 9, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Азербайджан

\*e-mail: vaqif\_ab@rambler.ru

\*\*e-mail: kamil\_aydazade@rambler.ru

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.

Переработанный вариант 01.07.2020 г.

Принята к публикации 16.10.2020 г.

Рассматривается задача оптимизации правых частей линейных нелокальных многоточечных условий для линейной системы дифференциальных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности первого порядка, позволившие использовать для численного решения рассматриваемой задачи эффективные методы первого порядка. Приводятся результаты решения тестовых задач и их анализ. Библ. 32. Фиг. 2. Табл. 2.

**Ключевые слова:** градиент функционала, многоточечные условия, сопряженная задача, условия оптимальности, метод сдвига условий.

**DOI:** 10.31857/S0044466921020022

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время внимание многих исследователей обращено к нелокальным краевым задачам относительно систем дифференциальных уравнений как с обыкновенными, так и с частными производными [1]–[7], а также к исследованию соответствующих задач оптимизации и оптимального управления [8]–[11]. Это внимание к нелокальным задачам обусловлено потребностью построения математических моделей более адекватных реальности, характеризуемой, как правило, невозможностью получения, локальной информации из отдельных точек (моментов времени) о состоянии объекта или воздействовать на его отдельные точки (или в моменты времени).

Нелокально заданными могут быть как сами дифференциальные уравнения (интегро-дифференциальные, нагруженные и т.д. [12]–[14]), так и краевые условия (с неразделенными многоточечными, интегральными слагаемыми [15]–[19]). Нелокальными могут быть одновременно уравнения и краевые условия [7], [12]. Рассмотрение каждого из этих случаев имеет прикладное значение, и для различных вариантов постановок указанных классов задач имеются результаты проведенных исследований как относительно нелокальных краевых задач, так и соответствующих задач оптимального управления.

В данной работе впервые исследуется задача оптимизации значений правых частей линейных нелокальных многоточечных условий для динамического объекта, описываемого системой линейных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Эта задача может возникать как в качестве обратной задачи по восстановлению параметров краевых условий, так и при оптимизации функционирования динамического объекта за счет источников, влияющих на краевые условия.

В статье рассмотрены различные возможные случаи относительно данных, участвующих в условиях. Получены необходимые условия оптимальности первого порядка относительно оптимизируемых параметров в краевых условиях. Эти условия использованы для численного решения рассматриваемой задачи с применением методов оптимизации первого порядка. Приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении тестовой задачи, и их анализ.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть рассматриваемый динамический объект описывается следующей линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t), \quad t \in [t_1, t_f], \quad (1.1)$$

с нелокальными условиями вида

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i x(\bar{t}_i) = \vartheta. \quad (1.2)$$

Здесь  $x(t) \in R^n$  – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, определяющая состояние объекта;  $A(t)$ ,  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$  – заданные  $n$ -мерные квадратные матрицы;  $A(t) \neq \text{const}$  непрерывна при  $t \in [t_1, t_f]$ ;  $B(t) \in R^n$  – заданная непрерывная вектор-функция; число  $L \geq 2$  и моменты времени  $\bar{t}_i \in [t_1, t_f]$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ,  $t_1 = \bar{t}_1$ ,  $t_f = \bar{t}_L$  заданы.

Вектор  $\vartheta \in V \subset R^n$  является оптимизируемым параметром задачи, определяемым, как правило, воздействиями внешних источников. Требуется из заданного допустимого выпуклого компактного множества  $V$  найти неизвестный вектор  $\vartheta$ , минимизирующий заданный функционал:

$$J(\vartheta) = \int_{t_1}^{t_f} f^0(x(t), \vartheta, t) dt + \Phi(\bar{x}, \vartheta) \rightarrow \min_{\vartheta \in V}. \quad (1.3)$$

Здесь  $f^0(x, \vartheta, t)$ ,  $\Phi(\bar{x}, \vartheta)$  – заданные непрерывно дифференцируемые по первым двум своим аргументам функции и использованы следующие обозначения:

$$\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_L), \quad x(\bar{t}) = \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_L)^T = (x(\bar{t}_1), x(\bar{t}_2), \dots, x(\bar{t}_L))^T \in R^{Ln},$$

где  $t$  – знак транспонирования.

Будем предполагать, что ранг расширенной матрицы  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L]$  размерности  $(n \times Ln)$  равен  $n$ :

$$\text{rang } \alpha = \text{rang}[\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_L] = n. \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.3) может возникать как при оптимизации динамических объектов, а именно параметров его внешних источников, так и в качестве обратной задачи по идентификации параметров математической модели. Обе эти задачи различаются лишь конкретным заданием вида функционала (1.3).

Возможен случай, когда рассматриваемый объект является управляемым и описывается вместо системы (1.1) следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + C(t)\omega(t) + B(t), \quad t \in [t_1, t_f], \quad (1.5)$$

где  $\omega(t) \in R^r$  – является управляющей вектор-функцией,  $C(t)$  – заданная матрица размера  $(r \times n)$ . Соответственно изменится целевой функционал (1.3) за счет его зависимости от вектора управления  $\omega(t)$ .

Системы дифференциальных уравнений с многоточечными условиями (1.1), (1.2) исследовались многими авторами, начиная с работ [20]–[22]. Для этих задач получены условия существования решения и его единственности. Однако отметим, что имеющиеся условия существования и единственности решения систем дифференциальных уравнений с многоточечными условиями громоздки и труднопроверяемы, в особенности в случае неавтономных систем, т.е.  $A(t) \neq \text{const}$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , и нефиксированных значений правых частей (1.2). Сложность и трудоемкость проверки этих условий превышает трудность численного решения самой задачи. В работах [5], [13], [14] были предложены методы их численного решения, основанные на специальных схемах методов прогонки.

В работах [11], [16], [17] исследовались задачи оптимального управления с управлением в правых частях дифференциальных уравнений, т.е. системами (1.5), но с заданным вектором  $\vartheta$ . Были получены необходимые условия оптимальности. Отметим работы [16], [17], которыми, по-видимому, впервые были получены конструктивные условия оптимальности для двухточечной

( $L = 2$ ) краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с обыкновенными производными.

Задача (1.1)–(1.3), исследуемая в данной работе, отличается от ранее рассмотренных задач оптимального управления тем, что здесь оптимизируемым является вектор правых частей многоточечных условий. Такие задачи возникают, например, при исследовании и оптимизации чувствительности краевых условий [23], при управлении сложными динамическими объектами с подобъектами, описываемыми подсистемами дифференциальных уравнений со связанными краевыми условиями, на концах которых имеются оптимизируемые источники [24]. К подобным задачам приводит также использование методов прямых к сложным объектам, описываемым системами дифференциальных уравнений с частными производными с управляющими источниками в нелокальных краевых условиях [25].

Задача (1.1)–(1.3) относится к классу задач параметрического оптимального управления, в которой оптимизируемым является конечномерный вектор параметров  $\vartheta \in V \in R^n$  [26].

В данной работе получены необходимые условия оптимальности параметров  $\vartheta$  в задаче (1.1)–(1.3), позволяющие их использовать для построения численной схемы ее решения, основанной на известных эффективных методах оптимизации первого порядка.

Отметим, что в случае, если имеются управления и в правых частях дифференциальных уравнений, т.е. объект описывается уравнением (1.5), то к приводимым в данной работе результатам несложно дополнительно добавить соответствующие результаты и схемы решения, изложенные в [5], [13], [14].

В работе приводятся результаты численного решения тестовых задач вида (1.1)–(1.3) и их анализ.

## 2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ (1.1)–(1.3)

Прежде всего докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (1.1)–(1.3). Если функции  $f^0(x, \vartheta, t)$  и  $\Phi(\bar{x}, \vartheta)$  выпуклы по первым двум своим аргументам, то функционал  $J(\vartheta)$  является выпуклым. В случае если дополнительно одна из функций  $f^0(x, \vartheta, t)$  и  $\Phi(\bar{x}, \vartheta)$  сильно выпукла, то функционал задачи является сильно выпуклым.

**Доказательство.** Пусть  $\vartheta^1, \vartheta^2$  – произвольные допустимые управления из  $V$ , а  $x^1(t), x^2(t)$  – соответствующие решения краевых задач (1.1), (1.2), т.е.

$$\dot{x}^1(t) = A(t)x^1(t) + B(t), \quad t \in [t_1, t_f], \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i x^1(\bar{t}_i) = \vartheta^1, \quad (2.2)$$

$$\dot{x}^2(t) = A(t)x^2(t) + B(t), \quad t \in [t_1, t_f], \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i x^2(\bar{t}_i) = \vartheta^2. \quad (2.4)$$

В силу выпуклости допустимого множества  $V$  для произвольного  $\lambda \in [0; 1]$  имеет место  $\vartheta = \lambda\vartheta^1 + (1 - \lambda)\vartheta^2 \in V$ . Введем обозначение  $x_\lambda(t) = \lambda x^1(t) + (1 - \lambda)x^2(t)$ .

Умножим обе части (2.1) на  $\lambda$ , а (2.3) – на  $(1 - \lambda)$ , почленно сложим

$$\lambda \dot{x}^1 + (1 - \lambda) \dot{x}^2 = A \lambda x^1 + \lambda B + A(1 - \lambda)x^2 + (1 - \lambda)B.$$

Отсюда следует, что  $x_\lambda(t)$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1.1).

Умножая обе части (2.2) на  $\lambda$ , а (2.4) – на  $(1 - \lambda)$ , складывая их, после группировки получаем

$$\sum_{i=1}^L \lambda \alpha_i x^1(\bar{t}_i) + \sum_{i=1}^L (1 - \lambda) \alpha_i x^2(\bar{t}_i) = \lambda \vartheta^1 + (1 - \lambda) \vartheta^2,$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i \left[ \lambda x^1(\bar{t}_i) + \sum_{i=1}^L (1 - \lambda)x^2(\bar{t}_i) \right] = \lambda \vartheta^1 + (1 - \lambda)\vartheta^2.$$

Отсюда следует, что пара  $(x_\lambda(t), \vartheta)$  удовлетворяет условиям (1.2).

В силу выпуклости функций  $f^0(x, \vartheta, t)$  и  $\Phi(\bar{x}, \vartheta)$  по аргументам  $x, \vartheta$ , имеем

$$\begin{aligned} J(\vartheta) &= J(\lambda \vartheta^1 + (1 - \lambda)\vartheta^2) = \int_{t_1}^{t_f} f^0(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \lambda \vartheta^1 + (1 - \lambda)\vartheta^2) dt + \\ &+ \Phi(\lambda \bar{x}^1 + (1 - \lambda)\bar{x}^2, \lambda \vartheta^1 + (1 - \lambda)\vartheta^2) \leq \lambda \int_{t_1}^{t_f} f^0(x^1, \vartheta^1) dt + (1 - \lambda) \int_{t_1}^{t_f} f^0(x^2, \vartheta^2) dt + \\ &+ \lambda \Phi(\bar{x}^1, \vartheta^1) + (1 - \lambda)\Phi(\bar{x}^2, \vartheta^2) = \lambda J(\vartheta^1) + (1 - \lambda)J(\vartheta^2). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ясно, что в случае, если одна из функций  $\Phi(\bar{x}, \vartheta), f^0(x, \vartheta, t)$  будет строго выпуклой, то знак неравенства в (2.5) будет строгим. Следовательно, и функционал задачи (1.1)–(1.3) будет строго выпуклым. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Покажем дифференцируемость функционала (1.3) и определим формулы для компонентов его градиента по оптимизируемым параметрам  $\vartheta \in R^n$ . Для этого используем метод приращения оптимизируемого вектора и определим линейную часть приращения функционала [27].

Пусть  $x(t) \in R^n$  является решением краевой задачи (1.1), (1.2) при некотором допустимом векторе параметров  $\vartheta \in V$ , а  $x^1(t) = x(t) + \Delta x(t)$  – решение задачи (1.1), (1.2), соответствующее допустимому приращенному вектору  $\vartheta^1 = \vartheta + \Delta \vartheta \in V$ :

$$\dot{x}^1(t) = A(t)x^1(t) + B(t), \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i x^1(\bar{t}_i) = \vartheta^1. \tag{2.7}$$

Из (1.1), (1.2) и (2.6), (2.7) следует, что имеет место

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t), \quad t \in [t_1, t_f], \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta x(\bar{t}_i) = \Delta \vartheta. \tag{2.9}$$

Тогда для приращения функционала (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta) &= J(\vartheta^1) - J(\vartheta) = \int_{t_1}^{t_f} [f^0(x^1, \vartheta^1, t) - f^0(x, \vartheta, t)] dt + \Phi(\bar{x}^1, \vartheta^1) - \Phi(\bar{x}, \vartheta) = \\ &= \int_{t_1}^{t_f} \left[ \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta \right] dt + \sum_{i=1}^L \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} \Delta x(\bar{t}_i) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta + R, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$R = R(\Delta \vartheta, \Delta x(t), \Delta x(\bar{t})) = o\left(\|\Delta \vartheta\|_{R^n}\right) + o\left(\|\Delta x(t)\|_{C^{1,n}[t_1, t_f]}\right) + o\left(\|\Delta x(\bar{t})\|_{R^{Ln}}\right).$$

Последнее слагаемое в (2.10) является остаточным членом в соответствующих пространствах функций  $x(t) \in C^{1,n}[t_1, t_f]$  и конечномерных векторов  $x(\bar{t}) \in R^{Ln}$ . Для решения краевых задач, в силу их устойчивости, имеют место оценки [22]:

$$\|\Delta x(t)\|_{C^{1,n}[t_1, t_f]} \leq \alpha_1 \|\Delta \vartheta\|_{R^n}, \quad \|\Delta x(\bar{t})\|_{R^{Ln}} \leq \alpha_2 \|\Delta \vartheta\|_{R^n},$$

где постоянные  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  не зависят от решения краевой задачи. В (2.10) и далее производные  $\partial f^0 / \partial x, \partial f^0 / \partial \vartheta, \partial \Phi / \partial \bar{x}_i$  понимаются как строки соответствующих размерностей.

Перенесем правую часть (2.8) влево, умножим слева скалярно обе части полученного равенства на пока произвольную непрерывно дифференцируемую на интервалах  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, L - 1$ ,  $n$ -мерную вектор-функцию  $\psi(t)$ . Интегрируя по частям полученное равенство, используя обозначения

$$\psi(t_i^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi(t_i + \varepsilon), \quad \psi(t_i^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi(t_i - \varepsilon),$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_f} \psi^T(t) [\Delta \dot{x}(t) - A(t) \Delta x(t)] dt = \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} [\psi^T(t) \Delta \dot{x}(t) - \psi^T(t) A(t) \Delta x(t)] dt = \\ &= \psi^T(t_f) \Delta x(t_f) - \psi^T(t_1) \Delta x(t_1) + \sum_{i=2}^{L-1} [\psi(\bar{t}_i^-) - \psi(\bar{t}_i^+)]^T \Delta x(\bar{t}_i) + \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} [-\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t) A(t)] \Delta x(t) dt. \end{aligned}$$

Прибавив к (2.10) полученное выражение, равное нулю, после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t) A(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt \Delta \vartheta + \sum_{i=1}^L \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} \Delta x(\bar{t}_i) + \\ &+ \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta + \psi^T(t_f) \Delta x(t_f) - \psi^T(t_1) \Delta x(t_1) + \sum_{i=2}^{L-1} [\psi(\bar{t}_i^-) - \psi(\bar{t}_i^+)]^T \Delta x(\bar{t}_i) + R. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В (2.11) используем условия (2.9) для получения зависимости каких-либо линейно независимых  $n$  компонент  $nL$ -мерного вектора

$$\Delta x(\bar{t}) = (\Delta x_1(\bar{t}_1), \Delta x_2(\bar{t}_1), \dots, \Delta x_n(\bar{t}_1), \dots, \Delta x_i(\bar{t}_j), \dots, \Delta x_n(\bar{t}_L))$$

через остальные  $(n - 1)L$  компонент.

В связи с этим будут рассмотрены следующие три возможных варианта относительно расширенной матрицы  $\alpha = [\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n]$  размерности  $n \times nL$ , имеющей согласно (1.4) ранг, равный  $n$ .

1. Матрица  $\alpha_1$  (или матрица  $\alpha_L$ ) имеет ранг, равный  $n$ , а следовательно, у нее имеется обратная матрица  $\alpha_1^{-1}$  (или  $\alpha_L^{-1}$ ).

2. Одна из матриц  $\alpha_s$ ,  $s = 2, 3, \dots, L - 1$ , имеет ранг, равный  $n$ , т.е. имеется  $\alpha_s^{-1}$ .

3. Все матрицы  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , имеют ранги, меньше  $n$ , но в силу условия (1.4) из расширенной матрицы  $\alpha$  можно выбрать  $n$  столбцов, образующих матрицу  $\hat{\alpha}$  ранга  $n$ .

Каждый из этих случаев требует отдельного рассмотрения.

**Случай 1.а.** Пусть существует  $\alpha_1^{-1}$ . Тогда из (2.9) будем иметь

$$\Delta x(t_1) = \alpha_1^{-1} \Delta \vartheta - \sum_{i=2}^L \alpha_1^{-1} \alpha_i \Delta x(\bar{t}_i). \quad (2.12)$$

Учтя (2.12) в (2.11), после группировки получим

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t) A(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \\ &+ \left[ \psi^T(t_1) \alpha_1^{-1} \alpha_L + \psi^T(t_f) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} - \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} \alpha_1^{-1} \alpha_L \right] \Delta x(t_f) + \\ &+ \sum_{i=2}^{L-1} \left[ \psi(\bar{t}_i^-) - \psi(\bar{t}_i^+) \right]^T + \psi^T(t_1) \alpha_1^{-1} \alpha_i + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} \alpha_1^{-1} \alpha_i \left] \Delta x(\bar{t}_i) + \\ &+ \left[ \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt - \psi^T(t_1) \alpha_1^{-1} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} \alpha_1^{-1} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \Delta \vartheta + R. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пользуясь произвольностью вектор-функции  $\psi(t)$ , потребуем, чтобы она являлась решением следующей сопряженной задачи с нелокальными краевыми условиями:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T, \quad t \in (\bar{t}_\mu, \bar{t}_{\mu+1}), \quad \mu = 1, 2, \dots, L-1, \quad (2.14)$$

$$\alpha_L^T (\alpha_1^{-1})^T \psi(t_1) + \psi(t_f) = -\frac{\partial \Phi^T(x, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} + \alpha_L^T (\alpha_1^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1}, \quad (2.15)$$

$$\psi(\bar{t}_i^+) = \psi(\bar{t}_i^-) + \alpha_i^T (\alpha_1^{-1})^T \psi(t_1) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \alpha_i^T (\alpha_1^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1}, \quad i = 2, 3, \dots, L-1. \quad (2.16)$$

Тогда искомый градиент функционала определяется из (2.12) как линейная часть приращения функционала при  $\Delta\vartheta$ :

$$\text{grad } J(\vartheta) = -(\alpha_1^{-1})^T \left[ \psi(t_1) - \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} \right] + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt. \quad (2.17)$$

**б.** Если обратима матрица  $\alpha_L$ , то вместо (2.12) будем иметь

$$\Delta x(t_f) = \alpha_L^{-1} \Delta \vartheta - \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_L^{-1} \alpha_i \Delta x(\bar{t}_i).$$

Повторив выкладки, аналогичные проведенным при получении формул (2.14)–(2.17), вместо формул (2.15), (2.16) будем иметь

$$\psi(t_1) + \alpha_1^T (\alpha_L^{-1})^T \psi(t_f) = \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} - \alpha_1^T (\alpha_L^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L}, \quad (2.18)$$

$$\psi(\bar{t}_i^+) = \psi(\bar{t}_i^-) - \alpha_i^T (\alpha_L^{-1})^T \psi(t_f) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \alpha_i^T (\alpha_L^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L}. \quad (2.19)$$

Градиент функционала будет определяться формулой

$$\text{grad } J(\vartheta) = -(\alpha_L^{-1})^T \left[ \psi(t_f) - \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} \right] + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt. \quad (2.20)$$

**Случай 2.** Пусть какая-либо матрица  $\alpha_s$ ,  $s = 2, 3, \dots, L-1$ , имеет обратную:  $\alpha_s^{-1}$ . Тогда из условия (2.9) будем иметь

$$\Delta x(\bar{t}_s) = \alpha_s^{-1} \Delta \vartheta - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^L \alpha_s^{-1} \alpha_i \Delta x(\bar{t}_i).$$

Учитывая это выражение в формуле (2.11), после несложных преобразований и группировки получим

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta) = & \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \left[ -\dot{\psi}^T(t) - \psi^T(t)A(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \\ & + \left[ -\psi^T(t_1) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} - \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s} \alpha_s^1 \alpha_1 - (\psi(\bar{t}_s^-) - \psi(\bar{t}_s^+))^T \alpha_s^{-1} \alpha_1 \right] \Delta x(t_1) + \\ & + \left[ \psi^T(t_f) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} - \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s} \alpha_s^{-1} \alpha_2 - (\psi(\bar{t}_s) - \psi(\bar{t}_s^+))^T \alpha_s^{-1} \alpha_L \right] \Delta x(t_f) + \\ & + \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq s}}^{L-1} \left[ (\psi(\bar{t}_i^-) - \psi(\bar{t}_i^+))^T + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s} \alpha_s^{-1} \alpha_i - (\psi(\bar{t}_s) - \psi(\bar{t}_s^+))^T \alpha_s^{-1} \alpha_i \right] \Delta x(\bar{t}_i) + \end{aligned}$$



$$+ \left\{ \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt + \left[ \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s} + (\psi(\bar{t}_s^-) - \psi(\bar{t}_s^+))^T \right] \alpha_s^{-1} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right\} \Delta \vartheta + R.$$

Учитывая произвольность вектор-функции  $\psi(t)$ , потребуем, чтобы она являлась решением сопряженной системы (2.14) и удовлетворяла условиям

$$\begin{aligned} \psi(t_1) &= \alpha_1^T (\alpha_s^{-1})^T (\psi(\bar{t}_s^+) - \psi(\bar{t}_s^-)) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} - \alpha_1^T (\alpha_s^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s}, \\ \psi(t_f) &= -\alpha_L^T (\alpha_s^{-1})^T (\psi(\bar{t}_s^+) - \psi(\bar{t}_s^-)) - \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} + \alpha_L^T (\alpha_s^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \psi(\bar{t}_i^+) &= \psi(\bar{t}_i^-) + \alpha_i^T (\alpha_s^{-1})^T (\psi(\bar{t}_s^+) - \psi(\bar{t}_s^-)) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \\ &- \alpha_i^T (\alpha_s^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s}, \quad i = 2, 3, \dots, L-1, \quad i \neq s. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Тогда формула искомого градиента функционала будет иметь вид

$$\text{grad } J(\vartheta) = -(\alpha_s^{-1})^T \left[ (\psi(\bar{t}_s^+) - \psi(\bar{t}_s^-)) - \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s} \right] + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt. \tag{2.23}$$

**Случай 3.** Приводимые ниже выкладки по сравнению с предыдущими случаями более сложны технически, так как вместо матричных выражений будут получены формулы покомпонентно. Пусть  $n$ -мерная квадратная матрица  $\hat{\alpha}$  ранга  $n$  образована  $n$  столбцами расширенной матрицы  $\alpha$ :

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}^{11} & \dots & \hat{\alpha}^{1i} & \dots & \hat{\alpha}^{1n} \\ \hat{\alpha}^{21} & \dots & \hat{\alpha}^{2i} & \dots & \hat{\alpha}^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\alpha}^{n1} & \dots & \hat{\alpha}^{ni} & \dots & \hat{\alpha}^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{s_1}^{1,k_1} & \dots & \hat{\alpha}_{s_i}^{1,k_i} & \dots & \hat{\alpha}_{s_n}^{1,k_n} \\ \hat{\alpha}_{s_1}^{2,k_1} & \dots & \hat{\alpha}_{s_i}^{2,k_i} & \dots & \hat{\alpha}_{s_n}^{2,k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\alpha}_{s_1}^{n,k_1} & \dots & \hat{\alpha}_{s_i}^{n,k_i} & \dots & \hat{\alpha}_{s_n}^{n,k_n} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $k_i$  является номером столбца матрицы  $\alpha_{s_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq s_i \leq L$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , включенного в матрицу  $\hat{\alpha}$ , т.е.  $i$ -й столбец  $\hat{\alpha}^i$  матрицы  $\hat{\alpha}$  является  $k_i$ -м столбцом матрицы  $\alpha_{s_i}$ :

$$\hat{\alpha}^i = (\alpha_{s_i}^{1,k_i}, \alpha_{s_i}^{2,k_i}, \dots, \alpha_{s_i}^{n,k_i})^T.$$

Обозначим через  $\Delta \hat{x} = (\Delta \hat{x}_1, \Delta \hat{x}_2, \dots, \Delta \hat{x}_n)^T = (\Delta \hat{x}_{k_1}(\bar{t}_{s_1}), \Delta \hat{x}_{k_2}(\bar{t}_{s_2}), \dots, \Delta \hat{x}_{k_n}(\bar{t}_{s_n}))^T$   $n$ -мерный вектор, состоящий из компонент вектора  $x(\bar{t})$ , образованный из соответствующих матрице  $\hat{\alpha}$  значений координат  $n$ -мерного вектора  $x(t)$  в моменты времени  $\bar{t}_{s_n}$ ,  $1 \leq s_n \leq L$ .

Пусть  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{x}$  есть остаточные матрица размера  $n \times (L-1)n$  и  $(L-1)n$ -мерный вектор, полученные удалением из матрицы  $\alpha$  и вектора  $\bar{x}(\bar{t})$ , соответственно,  $n$  столбцов матрицы  $\tilde{\alpha}$  и  $n$  компонент вектора  $\tilde{x}(\bar{t})$ :

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1}^{1,q_1} & \dots & \alpha_{g_i}^{1,q_i} & \dots & \alpha_{g_{(L-1)n}}^{1,q_{(L-1)n}} \\ \alpha_{g_1}^{2,q_1} & \dots & \alpha_{g_i}^{2,q_i} & \dots & \alpha_{g_{(L-1)n}}^{2,q_{(L-1)n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_1}^{n,q_1} & \dots & \alpha_{g_i}^{n,q_i} & \dots & \alpha_{g_{(L-1)n}}^{n,q_{(L-1)n}} \end{pmatrix},$$

$$\Delta \tilde{x} = (\Delta x_{g_1}(\bar{t}_{q_1}), \Delta x_{g_2}(\bar{t}_{q_2}), \dots, \Delta x_{g_n}(\bar{t}_{q_{(L-1)n}}))^T,$$

где  $(g_i, q_i) \neq (s_j, k_j)$  и  $1 \leq g_i \leq n$  и  $1 \leq q_j \leq L$  при  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда соотношение (2.9) можно записать в виде

$$\hat{\alpha}\Delta\hat{x} + \check{\alpha}\Delta\check{x} = \Delta\vartheta.$$

Отсюда имеем

$$\Delta\hat{x} = \hat{\alpha}^{-1}\Delta\vartheta - \hat{\alpha}^{-1}\check{\alpha}\Delta\check{x}. \tag{2.24}$$

Для простоты записи получаемых формул  $n$ -мерную квадратную матрицу  $\hat{\alpha}^{-1}$  обозначим через  $C$  с элементами  $c_{ij}$ , а матрицу  $(-\hat{\alpha}^{-1}\check{\alpha})$  размера  $n \times (L-1)n$  – через  $B$  с элементами  $b_{ij}$ , а также

$$\Phi^i = (\Phi_1^i, \Phi_2^i, \dots, \Phi_n^i) = \left( \frac{\partial\Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial\bar{x}_{i_1}}, \frac{\partial\Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial\bar{x}_{i_2}}, \dots, \frac{\partial\Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial\bar{x}_{i_n}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Тогда (2.24) примет вид

$$\Delta\hat{x} = B\Delta\check{x} + C\Delta\vartheta \tag{2.25}$$

или в покомпонентной форме:

$$\Delta\hat{x}_i = \Delta\hat{x}_{k_i}(\bar{t}_{s_i}) = \sum_{v=1}^{Ln-n} b_{iv}\Delta\check{x}_{g_v}(\bar{t}_{q_v}) + \sum_{k=1}^n c_{ik}\Delta\vartheta_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 1 \leq g_v \leq n. \tag{2.26}$$

Третье, четвертое и пятое слагаемые в (2.11) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \frac{\partial\Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial x_i} \Delta x_i(\bar{t}) &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n \Phi_j^i \Delta x_j(\bar{t}_i), \\ \Psi^T(t_f) \Delta x(t_f) &= \sum_{j=1}^n \Psi_j(t_f) \Delta x_j(t_f), \quad \Psi^T(t_1) \Delta x(t_1) = \sum_{j=1}^n \Psi_j(t_1) \Delta x_j(t_1). \end{aligned}$$

Будем считать, что

$$\Psi(\bar{t}_1^-) = 0, \quad \Psi(\bar{t}_1^+) = \Psi(t_1), \quad \Psi(\bar{t}_f^+) = 0, \quad \Psi(\bar{t}_f^-) = \Psi(t_f),$$

и введем обозначение

$$\Delta\Psi(\bar{t}_i) = \Psi(\bar{t}_i^+) - \Psi(\bar{t}_i^-), \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Объединяя в (2.11) последние четыре слагаемых и учитывая (2.26), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n [\Phi_j^i + \Delta\Psi_j(\bar{t}_i)] \Delta x_j(\bar{t}_i) &= \sum_{i=1}^n [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta\Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] \Delta x_{k_i}(\bar{t}_{s_i}) + \sum_{v=1}^{(L-1)n} [\Phi_{g_v}^{q_v} + \Delta\Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v})] \Delta x_{g_v}(\bar{t}_{q_v}) = \\ &= \sum_{i=1}^n [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta\Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] \left[ \sum_{s=1}^{(L-1)n} b_{is} \Delta\check{x}_{g_s}(\bar{t}_{q_s}) + \sum_{k=1}^n c_{ik} \Delta\vartheta_k \right] + \sum_{v=1}^{(L-1)n} [\Phi_{g_v}^{q_v} + \Delta\Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v})] \Delta x_{g_v}(\bar{t}_{q_v}). \end{aligned}$$

Из (2.11), с учетом полученного соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \left[ -\dot{\Psi}^T(t) - \Psi^T(t)A(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta\Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] c_{ik} + \frac{\partial\Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial\vartheta_k} + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial\vartheta_k} dt \right\} \Delta\vartheta_k + \\ &+ \sum_{v=1}^{(L-1)n} \sum_{i=1}^n b_{iv} [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta\Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] \Delta x_{g_i}(\bar{t}_{q_i}) + \sum_{v=1}^{(L-1)n} [\Phi_{g_v}^{q_v} + \Delta\Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v})] \Delta x_{g_v}(\bar{t}_{q_v}) + R = \\ &= \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_{i+1}} \left[ -\dot{\Psi}^T(t) - \Psi^T(t)A(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] c_{ik} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k} dt \right\} \Delta \vartheta_k + \\
 & + \sum_{v=1}^{(L-1)n} \left[ \sum_{i=1}^n b_{iV} [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] + [\Phi_{g_v}^{q_v} + \Delta \Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v})] \right] \Delta x_{g_v}(\bar{t}_{q_v}) + R.
 \end{aligned}$$

В силу произвольности вектор-функции  $\psi(t)$  потребуем, чтобы она являлась решением сопряженной системы дифференциальных уравнений (2.14), а выражения в последних квадратных скобках были равны 0:

$$\sum_{i=1}^n b_{iV} [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] + [\Phi_{g_v}^{q_v} + \Delta \Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v})] = 0, \quad v = 1, 2, \dots, (L-1)n.$$

Отсюда имеем

$$\Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v}^+) = \Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v}^-) + \sum_{i=1}^n b_{iV} (\Phi_{k_i}^{s_i} + \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i}^-) - \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i}^+)) + \Phi_{g_v}^{q_v}, \quad v = 1, 2, \dots, (L-1)n. \quad (2.27)$$

Тогда искомые компоненты градиента функционала, определяющие линейные части приращения  $\Delta J(\vartheta)$  по аргументу  $\vartheta$ , имеют вид

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta_k} = \sum_{i=1}^n [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] c_{ik} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} + \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.28)$$

Таким образом, можно считать доказанной следующую теорему.

**Теорема 2.** При наложенных условиях на функции и параметры, участвующие в задаче (1.1)–(1.3), функционал (1.3) дифференцируем, а градиент функционала задачи определяется формулами

а) (2.14)–(2.17), если матрица  $\alpha_1$  имеет обратную;

б) (2.14), (2.18)–(2.20), если матрица  $\alpha_L$  имеет обратную;

в) (2.14), (2.21)–(2.23), если одна из матриц  $\alpha_s, s = 2, \dots, L-1$ , имеет обратную;

г) (2.13), (2.27)–(2.28), если обратима матрица  $\tilde{\alpha}$ , составленная из  $n$  столбцов расширенной матрицы  $\alpha$ ;

а вектор-функция  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[t_1, t_f]$  кроме точек  $t_i, i = 1, 2, \dots, L-1$ , является решением сопряженной системы дифференциальных уравнений (2.14).

Используя  $\delta$ -функцию Дирака, условия скачка (2.16), (2.19), (2.22) в точках  $t_i, i = 1, 2, \dots, L$ , у сопряженной функции можно ввести в правых частях системы дифференциальных уравнений. Тогда сопряженная система уравнений (2.14) для каждого из рассмотренных выше случаев будут иметь различный вид.

Для случая а) и условий (2.16) имеем

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}(t) = & -A^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T + \sum_{i=2}^{L-1} \left[ \alpha_i^T (\alpha_1^{-1})^T \psi(t_i) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \right. \\
 & \left. - \alpha_i^T (\alpha_1^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} \right] \delta(t - \bar{t}_i), \quad t \in (\bar{t}_\mu, \bar{t}_{\mu+1}), \quad \mu = 1, 2, \dots, L-1.
 \end{aligned}$$

Для случая б) и условий (2.19) имеем

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}(t) = & -A^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T + \sum_{i=2}^{L-1} \left[ -\alpha_i^T (\alpha_L^{-1})^T \psi(t_f) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \right. \\
 & \left. - \alpha_i^T (\alpha_L^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial x_L} \right] \delta(t - \bar{t}_i), \quad t \in (\bar{t}_\mu, \bar{t}_{\mu+1}), \quad \mu = 1, 2, \dots, L-1.
 \end{aligned}$$

Для случая в) и условий (2.22) имеем

$$\begin{aligned} \psi(t) = & -A^T(t)\psi(t) + \left( \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right)^T + \sum_{i=2}^{L-1} \left[ \alpha_i^T (\alpha_s^{-1})^T (\psi(\bar{t}_s^+) - \psi(\bar{t}_s^-)) + \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} - \right. \\ & \left. - \alpha_i^T (\alpha_s^{-1})^T \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_s} \right] \delta(t - \bar{t}_i), \quad i \neq s, \quad t \in (\bar{t}_\mu, \bar{t}_{\mu+1}), \quad \mu = 1, 2, \dots, L-1. \end{aligned}$$

Формулы для градиента функционала задачи (1.1)–(1.3) в несколько другой форме можно получить аналогично, как это было сделано, например, в работах [11], [17], введением в функцию Лагранжа задачи слагаемого для учета ограничений (1.2). Для этого в формуле (2.9) перенесем влево  $\Delta\vartheta$ , умножим скалярно слева обе части полученного выражения, равного нулю, на пока произвольный  $n$ -мерный вектор  $\lambda$  и прибавим к приращению функционала, заданного формулой (2.11). После несложных преобразований и группировки получим

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta) = & \sum_{i=1}^{L-1} \left[ -\psi^T(t) - \psi^T(t)A(t) + \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt + \\ & + \left[ -\psi^T(t_1) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} + \lambda^T \alpha_1 \right] \Delta x(t_1) + \left[ \psi^T(t_f) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} + \lambda^T \alpha_L \right] \Delta x(t_f) + \\ & + \sum_{i=2}^{L-1} \left[ (\psi(\bar{t}_i^-) - \psi(\bar{t}_i^+))^T + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} + \lambda^T \alpha_i \right] \Delta x(\bar{t}_i) + \left[ \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt - \lambda^T \right] \Delta \vartheta + R. \end{aligned}$$

Пользуясь произвольностью вектор-функции  $\psi(t)$  и вектора  $\lambda \in R^n$ , потребуем, чтобы  $\psi(t)$  являлась решением сопряженного уравнения (2.14) и удовлетворялись следующие условия:

$$\psi(t_1) = \frac{\partial \Phi^T(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_1} + \alpha_1^T \cdot \lambda, \quad (2.29)$$

$$\psi(t_f) = -\frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_L} - \alpha_L^T \cdot \lambda, \quad (2.30)$$

$$\psi(\bar{t}_i^+) = \psi(\bar{t}_i^-) + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i} + \alpha_i^T \cdot \lambda, \quad i = 2, 3, \dots, L-1. \quad (2.31)$$

Тогда градиент функционала определится формулой:

$$\text{grad } J(\vartheta) = \int_{t_1}^{t_f} \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} - \lambda. \quad (2.32)$$

**Теорема 3.** Градиент функционала в задаче (1.1)–(1.3) при выполнении приведенных выше предположений относительно функций, участвующих в задаче, определяется формулой (2.32), где пара  $(\psi(t), \lambda)$  удовлетворяет условиям сопряженной задачи (2.14), (2.29)–(2.31).

Из формул (2.29)–(2.31) для сопряженной функции  $\psi(t)$  и градиента функционала несложно получить формулы (2.14)–(2.17); (2.14), (2.18)–(2.20); (2.14), (2.21)–(2.23); (2.14), (2.27), (2.28) с учетом возможных случаев 1–3 относительно матрицы  $\alpha$ .

Формулы (2.14), (2.29)–(2.31) различаются от выше приведенных размерностью параметров и числом условий, участвующих в сопряженной задаче. В ранее приведенных формулах число краевых условий для сопряженной переменной равно  $n$ , а неизвестных параметров нет. В формулах (2.14), (2.29)–(2.31) участвует  $n$ -мерный вектор  $\lambda$  множителей Лагранжа, для определения которого имеются еще дополнительные  $n$  краевых условий, общее число которых равно  $2n$ .

**Замечание.** Во многих задачах в условии (1.2) оптимизируемыми являются не все компоненты вектора  $\vartheta \in R^n$ , а некоторая его часть. В этом случае в приведенных формулах градиента функционала необходимо использовать компоненты, соответствующие только оптимизируемым параметрам.

Теперь сформируем необходимые условия оптимальности в задаче (1.1)–(1.3).

**Теорема 4.** Пусть  $(\vartheta^*, x^*(t))$  является решением задачи (1.1)–(1.3). Тогда необходимо и достаточно, чтобы для произвольного допустимого вектора  $\vartheta \in V$  имело место

$$(\text{grad } J(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^*) \geq 0,$$

где  $\text{grad } J(\vartheta^*)$  определяется одной из формул (2.20), (2.23), (2.28) или (2.32).

Доказательство теоремы основано на выпуклости допустимой области  $V$ , выпуклости и дифференцируемости целевого функционала  $J(\vartheta)$  (см. [27], [28]).

### 3. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Пользуясь полученными формулами для компонентов градиента целевого функционала, для численного решения задачи можно использовать известные итерационные методы оптимизации первого порядка. В случае если допустимое множество оптимизируемых параметров  $V$  имеет простую структуру (параллелепипед, шар и т.п.), то эффективно использовать метод проекции градиента [27], [28]:

$$\begin{aligned} \vartheta^{k+1} &= P_V(\vartheta^k - \alpha_k \text{grad } J(\vartheta^k)), \quad k = 0, 1, \dots, \\ \alpha_k &= \arg \min_{\alpha \geq 0} J(P_V(\vartheta^k - \alpha \text{grad } J(\vartheta^k))). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $P_V(\vartheta)$  – оператор проектирования управления  $\vartheta \in E^n$  на допустимое множество  $V$ ,  $\alpha_k \geq 0$  – шаг одномерной минимизации.

В случае, если допустимое множество  $V$  задано в общем виде с помощью равенств и неравенств

$$V = \{\vartheta \in R^n : g_i(\vartheta) \leq 0, h_j(\vartheta) = 0, i = 1, 2, \dots, m_1, j = 1, 2, \dots, m_2\},$$

то можно использовать, например, методы штрафных функций [27], [29], при этом в приведенных выше формулах несущественно изменятся только выражения для компонентов градиента функционала по  $\vartheta$ .

Для численного решения систем дифференциальных уравнений с многоточечными условиями как для прямой задачи (1.1), (1.2), так и сопряженной задачи при заданном векторе параметров  $\vartheta$  можно использовать метод сдвига условий, предложенный в работах [5], [13], [14]. За счет увеличения порядка системы дифференциальных уравнений (1.1) в  $L$  раз исходную задачу можно привести к двухточечной [30], а далее использовать методы прогонки [31], [32]. При этом соответственно увеличатся порядки вспомогательных задач Коши, используемых в методах прогонки. Применение такого подхода для решения задач оптимального управления, учитывая необходимость многократного решения прямой и сопряженной задач, как было показано в работе [13], неэффективно.

**Задача 1.** Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении следующей задачи оптимизации, описываемой системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3tx_1(t) - x_2(t) - 3t^3 - 6t \sin 5t + 13 \cos 5t - 2t + 2, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) - t^2 - 17 \sin 5t - 6 \cos 5t + 2t - 6, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.2)$$

с нелокальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) + x_2(0.5) - 2x_2(1) &= \vartheta_1, \\ 2x_1(0) + 3x_2(0.5) + x_2(1) &= \vartheta_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Целевой функционал имеет вид

$$\begin{aligned} J(\vartheta) &= \int_0^1 [2x_1(t) + x_2(t) - 4 \sin 5t - 3 \cos 5t - 2t^2 + t - 4]^2 dt + [x_2(0.5) + 0.9034]^2 + \\ &+ [x_1(1) - 0.08215]^2 + [x_2(1) - 1.8510]^2 + [\vartheta_1 + 3.6054]^2 + [\vartheta_2 - 1.1407]^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Точным решением задачи являются параметры  $\vartheta_1 = -3.6054$ ,  $\vartheta_2 = 1.1407$  и фазовые переменные  $-x_1(t) = 2 \sin 5t + t^2 + 1$ ,  $x_2(t) = 3 \cos 5t - t + 2$ , при этом  $J(\vartheta^*) = 0$ .

Сопряженная задача (2.14) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_1(t) &= -3t\Psi_1(t) - \Psi_2(t) + 4(2x_1(t) + x_2(t) - 4 \sin 5t - 3 \cos 5t - 2t^2 + t - 4), \\ \dot{\Psi}_2(t) &= \Psi_1(t) - 2\Psi_2(t) + 2(2x_1(t) + x_2(t) - 4 \sin 5t - 3 \cos 5t - 2t^2 + t - 4).\end{aligned}\quad (3.5)$$

В условиях (3.3) каждая из матриц

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 1. Расширенная матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 2. Это соответствует рассмотренному выше случаю 3. Матрицу  $\hat{\alpha}$  составим из первого столбца матрицы  $\alpha_1$  и второго столбца матрицы  $\alpha_2$ :

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \check{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что в формулах (2.27), (2.28) индексы  $(k_i; s_i)$ ,  $i = 1, 2$ , и  $(g_v; q_v)$ ,  $v = 1, 2, 3, 4$ , имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}(k_1; s_1) &= (1; 1), & (k_2; s_2) &= (2; 2), \\ (g_1; q_1) &= (2; 1), & (g_2; q_2) &= (1; 2), & (g_3; q_3) &= (1; 3), & (g_4; q_4) &= (2; 3).\end{aligned}$$

Тогда для матриц  $B$  и  $C$  имеем

$$B = -\hat{\alpha}^{-1}\check{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для элементов векторов  $\Phi^i = \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , имеем

$$\begin{aligned}\Phi_{k_1}^{s_1} = \Phi_1^1 &= \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_{11}} = 0, & \Phi_{k_2}^{s_2} = \Phi_2^2 &= \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_{22}} = 2(x_2(0.5) + 0.9034), \\ \Phi_{g_1}^{q_1} = \Phi_1^1 &= 0, & \Phi_{g_2}^{q_2} = \Phi_2^2 &= 2(x_2(0.5) + 0.9034), \\ \Phi_{g_3}^{q_3} = \Phi_1^3 &= \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_{31}} = 2(x_2(1) - 1.8510), & \Phi_{g_4}^{q_4} = \Phi_2^2 &= \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \bar{x}_{32}} = 2(x_1(1) - 0.08215).\end{aligned}$$

Тогда условия (2.27):

$$\sum_{i=1}^2 b_{iv} [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i}^-) - \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i}^+)] + \Phi_{g_v}^{q_v} + \Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v}^-) - \Psi_{g_v}(\bar{t}_{q_v}^+) = 0, \quad v = 1, 2, 3, 4,$$

примут вид

$$\begin{aligned}7\Psi_1(0) + 5(\Psi_2(0.5^-) - \Psi_2(0.5^+)) - \Psi_2(1) &= 2(x_2(1) - 1.8510) - 10(x_2(0.5) + 0.9034), \\ \Psi_1(1) &= -2(x_1(1) - 0.08215), \\ \Psi_2(0) &= 0, \quad \Psi_2(0.5^-) - \Psi_2(0.5^+) = 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Компоненты градиента функционала согласно формуле (2.28):

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta_k} = \sum_{i=1}^2 [\Phi_{k_i}^{s_i} + \Delta \Psi_{k_i}(\bar{t}_{s_i})] c_{ik} + \frac{\partial \Phi(\bar{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} + \int_0^1 \frac{\partial f^0(x, \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k} dt, \quad k = 1, 2,$$

**Таблица 1.** Значения фазовых переменных точного и полученного решений задачи 1

$t$	Точное решение		Результаты 7-й итерации				Результаты 10-й итерации			
	$x_1^*(t)$	$x_2^*(t)$	$x_1^{(7)}(t)$	$x_2^{(7)}(t)$	$\psi_1^{(7)}(t)$	$\psi_2^{(7)}(t)$	$x_1^{(10)}(t)$	$x_2^{(10)}(t)$	$\psi_1^{(10)}(t)$	$\psi_2^{(10)}(t)$
0	1.0000	5.0000	1.0002	5.0001	-0.3202	0.0000	1.0000	5.0001	-0.0099	0.0000
10	1.9689	4.5327	1.9690	4.5329	-0.3428	-0.0438	1.9688	4.5328	-0.0383	-0.0157
20	2.7229	3.4209	2.7231	3.4211	-0.3303	-0.0703	2.7229	3.4210	-0.0427	-0.0203
30	3.0850	1.9122	3.0851	1.9125	-0.2846	-0.0787	3.0849	1.9124	-0.0230	-0.0125
40	2.9786	0.3516	2.9787	0.3519	-0.2160	-0.0712	2.9785	0.3517	0.0133	0.0054
50	2.4469	-0.9034	2.4471	-0.9030	-0.1401	-0.4655	2.4468	-0.9032	0.0535	0.0102
60	1.6422	-1.5700	1.6423	-1.5694	-0.0395	-0.3687	1.6421	-1.5698	0.0853	0.0355
70	0.7884	-1.5094	0.7885	-1.5087	0.0258	-0.2878	0.7882	-1.5091	0.0962	0.0525
80	0.1264	-0.7609	0.1263	-0.7601	0.0519	-0.2274	0.1261	-0.7607	0.0823	0.0565
90	-0.1451	0.4676	-0.1452	0.4686	0.0437	-0.1891	-0.1455	0.4679	0.0470	0.0460
100	0.0822	1.8510	0.0818	1.8522	0.0127	-0.1706	0.0815	1.8513	0.0002	0.0232

определяются в виде

$$\text{grad } J(\vartheta) = \left( -3\psi_1(0) - 2(\psi_2(0.5^-) - \psi_2(0.5^+)) - 4(x_2(0.5) + 0.9034) + 2(\vartheta_1 + 3.6054); \right. \\ \left. \psi_1(0) + (\psi_2(0.5^-) - \psi_2(0.5^+)) + 2(x_2(0.5) + 0.9034) + 2(\vartheta_2 - 1.1407) \right)^T. \tag{3.7}$$

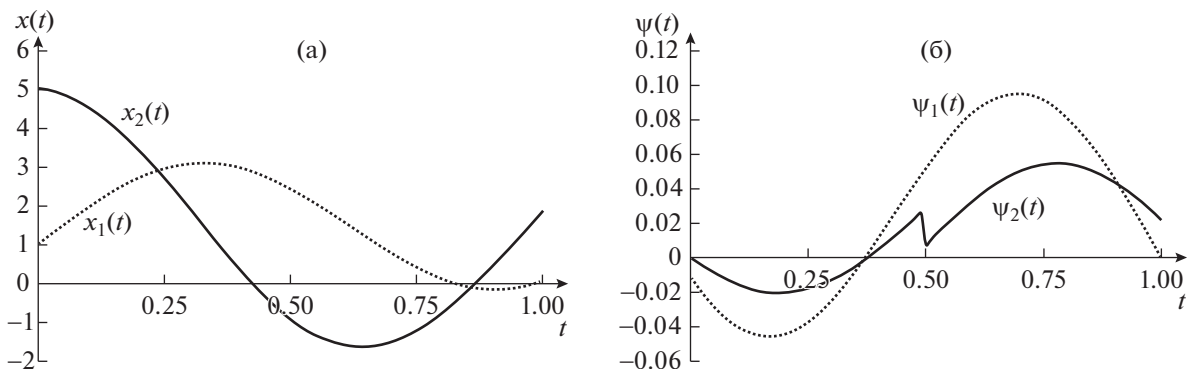
Итерационная процедура метода сопряженных градиентов безусловной оптимизации [28] проводилась с точностью по функционалу  $\epsilon = 10^{-5}$  из разных начальных точек  $\vartheta^0$ . На каждой итерации (3.2) вспомогательные задачи Коши метода сдвига условий (см. [13], [14]) как для решения прямой (3.2), (3.3), так и сопряженной (3.5), (3.6) задач решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом  $h = 0.01$ .

В табл. 1 приведены результаты, полученные на седьмой и десятой итерациях метода сопряженных градиентов, и точные оптимальные значения фазовой переменной, при этом значения функционала и оптимизируемых параметров были следующими:  $\vartheta^{(7)} = (-3.6066; 1.1440)$ ,  $J(\vartheta^{(7)}) = 0.0000134$ ,  $\vartheta^{(10)} = (-3.6061; 1.1418)$ ,  $J(\vartheta^{(10)}) = 0.0000013$ .

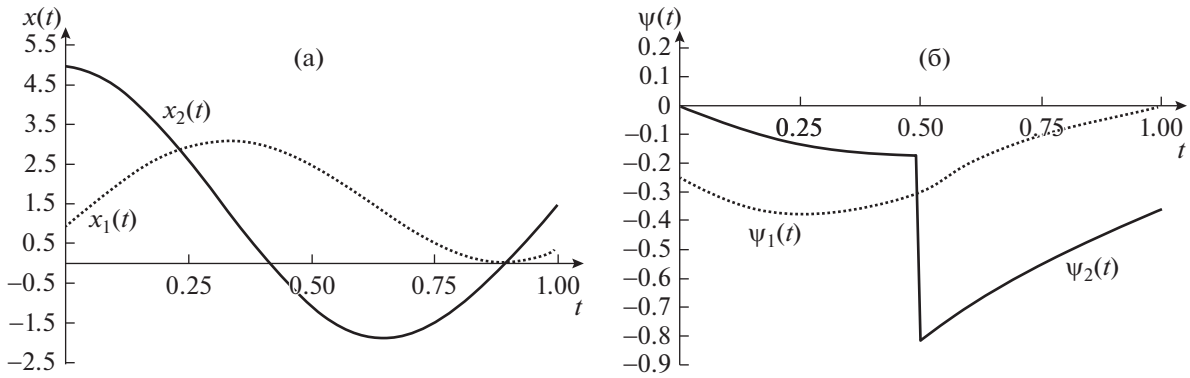
На фиг. 1 приведены графики полученных решений прямой и сопряженной задач.

**Задача 2.** Рассмотрим задачу, которая отличается от предыдущей целевым функционалом

$$J(\vartheta) = \int_0^1 [2x_1(t) + x_2(t) - 4 \sin 5t - 3 \cos 5t - 2t^2 + t - 4]^2 dt + [x_2(0.5) + 0.9034]^2 \rightarrow \min$$



**Фиг. 1.** Полученные решения прямой (а) и сопряженной (б) задач.



Фиг. 2. Полученные на 10-й итерации решения прямой (а) и сопряженной (б) задач.

и наличием следующих ограничений на оптимизируемые параметры:

$$-3 \leq \vartheta_1 \leq 3, \quad -1 \leq \vartheta_2 \leq 1.$$

В этой задаче точное оптимальное решение неизвестно. Для численного решения использовалась итерационная процедура метода проекции градиента (3.1). Ясно, что сопряженная система дифференциальных уравнений будет такая же, что и в задаче 1, а в формулах компонентов градиента функционала (3.7) будут отсутствовать последние слагаемые:

$$\begin{aligned} \text{grad } J(\vartheta) = & \left( -3\psi_1(0) - 2(\psi_2(0.5^-) - \psi_2(0.5^+)) - 4(x_2(0.5) + 0.9034); \right. \\ & \left. \psi_1(0) + (\psi_2(0.5^-) - \psi_2(0.5^+)) + 2(x_2(0.5) + 0.9034) \right)^T. \end{aligned}$$

Для численного решения прямой и сопряженной задач с нелокальными условиями использовались те же схемы, что и для задачи 1.

На фиг. 2 и в табл. 2 приведены полученные результаты решения.

Для начального вектора параметров  $\vartheta^{(0)} = (2.5; -0.5)$  функционал был равен  $J(\vartheta^{(0)}) = 893.82897$ , а после десятой итерации значения функционала и параметров соответственно были равны:  $J(\vartheta^{(10)}) = 0.0505632$ ,  $\vartheta^{(10)} = (-3.0000; 0.1817)$ .

На фиг. 2 и в табл. 2 приведены результаты решения прямой и сопряженных задач, полученные на десятой итерации итерационной процедуры (3.1). Ясно, что полученное минимальное значение функционала больше 0 и превышает соответственно оптимальное значение функцио-

Таблица 2. Полученные значения решения прямой и сопряженной задач

t	Результаты 1-й итерации				Результаты 10-й итерации			
	$x_1^{(1)}(t)$	$x_2^{(1)}(t)$	$\psi_1^{(1)}(t)$	$\psi_2^{(1)}(t)$	$x_1^{(10)}(t)$	$x_2^{(10)}(t)$	$\psi_1^{(10)}(t)$	$\psi_2^{(10)}(t)$
0	0.9047	4.8446	-740.1077	0.0000	0.9599	4.9412	-0.2515	0.0000
10	1.8900	4.3333	-728.5217	-68.0958	1.9349	4.4568	-0.3297	-0.0656
20	2.6635	3.1695	-690.3040	-121.6801	2.6962	3.3247	-0.3713	-0.1160
30	3.0501	1.5999	-630.4063	-161.2770	3.0674	1.7922	-0.3752	-0.1496
40	2.9765	-0.0322	-555.3486	-187.8747	2.9731	0.2037	-0.3486	-0.1678
50	2.4900	-1.3701	-472.3502	-1133.6904	2.4582	-1.0838	-0.3045	-0.8157
60	1.7488	-2.1320	-311.2200	-966.6195	1.6771	-1.7878	-0.2036	-0.6978
70	0.9858	-2.1794	-184.5663	-817.9093	0.8572	-1.7699	-0.1292	-0.5962
80	0.4553	-1.5509	-92.3471	-687.8175	0.2443	-1.0691	-0.0801	-0.5106
90	0.3765	-0.4512	-32.1263	-576.6231	0.0451	0.1079	-0.0445	-0.4359
100	0.8896	0.8007	-0.0000	-484.5452	0.3797	1.4380	-0.0000	-0.3596



нала задачи 1. В задаче 2 существенно изменилось поведение сопряженной переменной  $\psi_2(t)$ , а фазовые траектории  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  поменялись не существенно. Это объясняется тем, что подынтегральные функции в целевых функционалах обеих задач одинаковы и определяются близостью траекторий  $(x_1(t), x_2(t))$  к заданным функциям, являющихся оптимальными траекториями в задаче 1. Как видно, сами оптимизируемые параметры в задачах отличаются более существенно.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача оптимизации значений правых частей линейных неразделенных многоточечных условий для линейной системы дифференциальных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности определяемых параметров, содержащие формулы для градиента целевого функционала. Для численного решения задачи применены итерационные методы первого порядка, использующие полученные формулы градиента функционала.

Проведенные исследования могут быть использованы в задачах оптимального управления с управлением в правых частях дифференциальных уравнений, в задачах с другими видами нелокальных условий (с неразделенными интегральными, с неразделенными точечными и интегральными слагаемыми). Результаты работы могут быть использованы также в задачах с другими видами нелокальных функциональных уравнений (интегро-дифференциальных, нагруженных и других).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
2. *Нахушева В.А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006.
3. *Пулькина Л.С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 74–83.
4. *Алиханов А.А.* Нелокальная краевая задача В.А. Стеклова второго класса для простейших уравнений математической физики // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2013. Т. 1. № 30. С. 15–23.
5. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On the solution of boundary value problems with nonseparated multipoint and integral conditions // Differ. Equations. 2013. V. 49. № 9. P. 1114–1125.
6. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* The correct solvability of a linear multipoint boundary value problem // Mat. J. 2005. V. 5. № 15. P. 30–38.
7. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости нелокальной задачи для системы дифференциальных уравнений соболевского типа с многоточечным условием // Изв. вузов. Матем. 2019. № 12. С. 3–15.
8. *Devadze D., Beridze V.* Optimality Conditions and Solution Algorithms of Optimal Control Problems for Nonlocal Boundary-Value Problems // J. Math. Sci. 2016. V. 218. P. 731–736.
9. *Антипин А.С.* Терминальное управление краевыми моделями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 2. С. 257–285.
10. *Антипин А.С., Хорошилова Е.В.* О синтезе обратной связи для задачи терминального управления моделями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 1973–1991.
11. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 739–751.
12. *Dzhumabaev D.S.* On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integrodifferential equations // J. Comput. Appl. Math. 2016. V. 294. № 2. P. 342–357.
13. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1585–1595.
14. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1096–1109.
15. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикл. матем. механ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.
16. *Васильева О.О., Мизуками К.* Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Известия АН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.

17. *Васильева О.О., Мизуками К.* Оптимальное управление краевой задачей // Изв. вузов. Матем. 1994. № 12. С. 33–41.
18. *Sharifov Y.A., Mammadova N.B.* Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // Differ. Equations. 2014. V. 50. № 3. P. 403–411.
19. *Assanova A.T.* Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2017. V. 170. P. 1–12.
20. *De la Vallee-Poussin, Ch.J.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre  $n$  // J. Math. Pures Appl. 1929. V. 8. № 9. P. 125–144.
21. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
22. *Кигурадзе И.Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Нов. достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.
23. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optim. Lett. 2019. V. 13. № 3. P. 451–473.
24. *Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р.* Численное решение задачи определения мест и объемов утечек при неустановившемся движении жидкости в трубопроводной сети сложной структуры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 1966–1982.
25. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численное решение задачи определения количества и мест замеров состояния при управлении процессом нагрева с обратной связью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 1. С. 83–94.
26. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
27. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. С. 824.
28. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
29. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
30. *Moszynski K.* A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differential equation // Algorytmy. Varshava. 1964. 11. № 3. P. 25–43.
31. *Абрамов А.А.* Вариант метода прогонки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 349–352.
32. *Абрамов А.А., Бураго Н.Г. и др.* Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач // Сообщения по программному обеспечению ЭВМ. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 63 с.

---

---

**ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

---

---

УДК 519.626

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ  
СИСТЕМЫ В КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ УПРАВЛЕНИЙ**

© 2021 г. А. Н. Квитко

*199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербургский гос. университет, Россия  
e-mail: alkvit46@mail.ru, a.kvitko@spbu.ru*

Поступила в редакцию 01.09.2020 г.  
Переработанный вариант 17.10.2020 г.  
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения дифференцируемой управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние фазового пространства с учетом ограничения на управление и внешнее возмущение. Получен конструктивный критерий, гарантирующий указанный перевод. Эффективность алгоритма иллюстрируется при решении конкретной практической задачи и ее численном моделировании. Библ. 34. Фиг. 1.

**Ключевые слова:** управляемость, граничные условия, стабилизация.

**DOI:** 10.31857/S0044466921040074

**ВВЕДЕНИЕ**

Одним из важных направлений развития математической теории управления является исследование проблемы перевода различных управляемых систем дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Задачи построения управляющих функций, обеспечивающие указанный перевод, называются граничными задачами. Им посвящено большое количество работ. Наиболее близкие (по тематике данной статьи) результаты содержатся в публикациях [1]–[31] и [34]. Основные аспекты исследования граничных задач включают в себя вопросы, связанные с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих существование их решений, см. [1]–[6], [8]–[10], [12]–[17], [20]–[22], [24]–[26], [29]–[31] и [34]; нахождения и оценки границ конечных состояний, при которых возможен перевод из заданного начального состояния при ограничениях на ресурс управления, см. [1], [4], [7], [8], [10], [11], [18], [19], [23], [27], [28] и [31], а также разработкой аналитических или численных методов построения искомых управляющих функций и соответствующих им функций фазовых координат, см. [1]–[4], [7], [25] и [31]. В настоящее время проблема граничных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных систем специального вида. Однако теория решения граничных задач для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана. Основные усилия автора направлены на разработку достаточно простого для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений алгоритма решения локальной граничной задачи для широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом ограничений на управление и внешние возмущения, а также нахождение конструктивного критерия, гарантирующего существование искомого решения. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной задачи к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты исследования данной работы наиболее тесно связаны с результатами, полученными в [23], [25], [31]. В работе Р. Калмана [2] получен алгоритм решения граничной задачи для линейной стационарной управляемой системы и найден критерий глобальной управляемости в терминах матриц ее правой части. В [3] и [25] приведены достаточные условия калмановского типа локальной управляемости нелинейной стационарной системы в окрестности как нулевого, так и ненулевого положений

равновесия. Суть их в том, что вопрос о локальной управляемости в окрестности положений равновесия сводится к вопросу глобальной управляемости системы, полученной посредством линеаризации исходной нелинейной системы в окрестности указанных положений равновесия. В результате найденное достаточное условие локальной управляемости совпадает с условием глобальной управляемости, сформулированным в [2]. В [31], в отличие от работ [23], [25], для нелинейных стационарных систем с достаточно гладкими правыми частями, разработан алгоритм решения локальной граничной задачи с учетом ограничения на управление и внешние возмущения. Кроме того, получено достаточное условие калмановского типа локальной нуль управляемости. При этом линеаризация системы проводится в окрестности точки, которая может и не быть положением равновесия для исходной системы. В настоящей статье рассматривается задача перевода нелинейной стационарной системы в начало координат из произвольной точки фазового пространства, лежащей в окрестности начала координат. Эта задача близка по постановке той, которая была рассмотрена в [31]. Главное отличие ее результатов состоит в том, что алгоритм построения искомой управляющей функции и соответствующей траектории применим для более широкого класса систем. А именно значительно ослаблено требование гладкости правой части исходной системы и в постановке задачи наложено дополнительное условие на конечные значения управляющей функции. Кроме того, доказано, что условие калмановского типа локальной управляемости, совпадающее с условием, полученным в работе [31], является не только достаточным, но и необходимым.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)^T$ ,  $\mathbf{u} \in R^r$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $r \leq n$ ,  $\mathbf{F} \in R^n$ ,

$$\mathbf{f} \in C^{2n}(R^n \times R^r; R^n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)^T, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad (1.3)$$

$$\text{rank } S = n, \quad S = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B), \quad (1.4)$$

$$\|\mathbf{u}\| < N. \quad (1.5)$$

Пусть  $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ , – фиксированное состояние.

**Задача.** Найти пару функций:

$$\mathbf{x}(t) \in C^1([0, 1]; R^n), \quad \mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \in C^1([0, 1] \times R^n \times R^n; R^r), \quad (1.6)$$

удовлетворяющих системе (1.1), условию (1.6), а также условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}(0, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(1, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Указанную пару  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$  будем называть *решением* задачи (1.1), (1.7).

**Определение.** Будем говорить, что задача (1.1), (1.7) локально разрешима, если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{F}$ , удовлетворяющих условиям  $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ ,  $\|\mathbf{F}\| < \varepsilon$  существует решение задачи (1.1), (1.7).

**Теорема.** Пусть для правой части системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3). Тогда для локальной разрешимости задачи (1.1), (1.7) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (1.4). При этом соответствующее решение задачи (1.1), (1.7) может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная идея решения поставленной задачи состоит в том, чтобы посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение исходной задачи свести к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения нахо-

дится вспомогательное управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части этой системы. На заключительном этапе находится решение задачи Коши для вспомогательной системы, замкнутой указанным управлением, и осуществляется переход к исходным зависимым и независимым переменным.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим задачу: найти пару функций  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ , удовлетворяющую системе (1.1), условиям (1.6), а также условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}(0, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow 1, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Указанную пару будем называть *решением* задачи (1.1), (2.1).

Переходя к пределу в решении задачи (1.1), (2.1), при  $t \rightarrow 1$  получаем решение задачи (1.1), (1.7).

Сделаем в системе (1.1) преобразование независимой переменной  $t$  по формуле:

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (2.2)$$

где  $\alpha > 0$  – некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной  $\tau$  система (1.1) и условия (2.1) примут вид:

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + \alpha e^{-\alpha\tau} \mathbf{F}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{u}(t(\tau), \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{c}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{d}(0, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad \mathbf{d}(\tau, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$\tau \in [0, +\infty), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)^T.$$

Пару функций  $\mathbf{c}(\tau) \in C^1([0, \infty); R^n)$ ,  $\mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \in C^1([0, \infty) \times R^n \times R^n; R^r)$ , удовлетворяющую системе (2.3) и условиям (2.5), будем называть *решением* задачи (2.3), (2.5). Имея решение задачи (2.3), (2.5) с помощью формул (2.2), (2.4) можно получить решение задачи (1.1), (2.1). Введем обозначения

$$\tilde{\mathbf{c}} = \theta_i \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i \mathbf{d}, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^r m_i,$$

$$k! = k_1! \dots k_n!, \quad m! = m_1! \dots m_r!.$$

Используя свойство (1.2), (1.3) и разложение правой части системы (1.1) в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , систему (2.3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{d\tau} = & \alpha e^{-\alpha\tau} F_i + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_j + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_j c_k + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_j d_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_j d_k \right] + \dots + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n-1} \frac{1}{k! m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n} \frac{1}{k! m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r}}(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ограничим область изменения  $\mathbf{c}(\tau)$ ,  $\mathbf{F}$  неравенствами

$$\|\mathbf{c}(\tau)\| < C_1, \quad \|\mathbf{F}\| < C_1, \quad \tau \in [0, \infty). \quad (2.7)$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций  $c_i(\tau) : c_i(\tau) \rightarrow c_i^{(2n)}(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразо-

ваний, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент  $\mathbf{c}^{(2n)}$  и  $\mathbf{d}$ , в области (1.5), (2.7) удовлетворяли оценке  $O(e^{-2n\alpha\tau} \|\mathbf{F}\|)$  при  $\tau \rightarrow \infty, \|\mathbf{F}\| \rightarrow 0$ .

На первом этапе выполним замену  $c_i(\tau), i = 1, \dots, n$ , по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.8}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|} f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \dots \partial u_r^{m_r}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

После подстановки (2.8) в левую и правую части системы (2.6) с учетом введенного обозначения получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} = & -\alpha e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_j + \frac{1}{2} \alpha \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) e^{-3\alpha\tau} F_j F_k + \alpha \left( e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_j^{(1)} - \right. \\ & \left. - e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_k c_j^{(1)} \right) + \alpha \left( e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) e^{-2\alpha\tau} F_j d_k \right) + \\ & + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_j^{(1)} c_k^{(1)} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_k c_j^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_j d_k + \tag{2.9} \\ & + \dots + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n-1} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\mathbf{0}, \mathbf{0}) (c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_1)^{k_1} \times \dots \times (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_n)^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r} + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) (c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_1)^{k_1} \times \dots \times (c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau} F_n)^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

...

Из (2.5), (2.8) следует

$$c_i^{(1)}(0) = -\bar{x}_i + F_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.10}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (2.9) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов  $\mathbf{c}^{(1)}$  и  $\mathbf{d}$ , в области (1.5), (2.7) удовлетворяют условию  $O(e^{-2\alpha\tau} \|\mathbf{F}\|)$ ,  $\tau \rightarrow \infty, \|\mathbf{F}\| \rightarrow 0$ . На втором этапе сделаем замену

$$\begin{aligned} c_i^{(1)}(\tau) = & c_i^{(2)}(\tau) + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_j = c_i^{(2)}(\tau) + e^{-2\alpha\tau} \phi_i^{(2)}(\mathbf{F}), \\ \phi_i^{(2)}(\mathbf{F}) = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_j, \quad \phi_i^{(2)}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.11}$$

В результате в новых переменных система (2.9) и начальные условия (2.10) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_i^{(2)}}{d\tau} = & \alpha \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) e^{-3\alpha\tau} F_j F_k + e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \phi_j^{(2)} - e^{-4\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_k \phi_j^{(2)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} e^{-5\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \phi_j^{(2)} \phi_k^{(2)} \right) + \alpha \left( e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_j^{(2)} - e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_k c_j^{(2)} + \right. \\ & \left. + e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \phi_k^{(2)} c_j^{(2)} \right) + \alpha \left( e^{-\alpha\tau} \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_k - e^{-2\alpha\tau} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) F_j d_k + \right. \\ & \left. + e^{-3\alpha\tau} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \phi_j^{(2)} d_k \right) + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) c_k^{(2)} c_j^{(2)} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_k c_j^{(2)} + \tag{2.12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) d_j d_k + \dots + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n-1} \frac{1}{k!m!} D^{k+m} f_i(\mathbf{0}, \mathbf{0}) (c_1^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \phi_1^{(2)}) - \\
 & - e^{-\alpha\tau} F_1^{k_1} \times \dots \times (c_n^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \phi_n^{(2)}) - e^{-\alpha\tau} F_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n} \frac{1}{k!m!} D^{|k|+|m|} f_i(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) (c_1^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \phi_1^{(2)}) - \\
 & - e^{-\alpha\tau} F_1^{k_1} \times \dots \times (c_n^{(2)} + e^{-2\alpha\tau} \phi_n^{(2)}) - e^{-\alpha\tau} F_n^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r}, \quad i = 1, \dots, n, \\
 & c_i^{(2)}(0) = -\bar{x}_i + F_i - \phi_i^{(2)}(\mathbf{F}). \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

В отличие от предыдущей замены, в правой части системы (2.12) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов  $\mathbf{c}^{(2)}$  и  $\mathbf{d}$ , в области (1.5), (2.7) удовлетворяют оценке  $O(e^{-3\alpha\tau} \|\mathbf{F}\|)$ ,  $\tau \rightarrow \infty, \|\mathbf{F}\| \rightarrow 0, i = 1, \dots, n$ . Используя (2.8)–(2.13) и индуктивный переход на  $k$ -м шаге, получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau) = c_i^{(k)} + e^{-k\alpha\tau} \phi_i^{(k)}(\mathbf{F}), \quad \phi_i^{(k)}(\mathbf{0}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.14}$$

Если применить преобразования (2.14)  $2n$  раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора  $\mathbf{c}^{(2n)}$  и содержащие коэффициенты  $e^{-i\alpha\tau}, i = 1, \dots, n$ , а также слагаемые, линейные по компонентам вектора  $\mathbf{d}$  и содержащие коэффициенты  $e^{-i\alpha\tau}, i = 1, \dots, n$ , то согласно (2.8)–(2.14) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{c}^{(2n)}}{d\tau} &= P\mathbf{c}^{(2n)} + Q\mathbf{d} + \mathbf{R}_1(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \mathbf{R}_2(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \mathbf{R}_3(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \mathbf{R}_4(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau), \\
 \mathbf{R}_1 &= (R_1^1, \dots, R_1^n)^T, \quad \mathbf{R}_2 = (R_2^1, \dots, R_2^n)^T, \quad \mathbf{R}_3 = (R_3^1, \dots, R_3^n)^T, \quad \mathbf{R}_4 = (R_4^1, \dots, R_4^n)^T.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Функции  $R_1^i$  содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора  $\mathbf{c}^{(2n)}$  с коэффициентами  $e^{-i\alpha\tau}, i \geq n + 1$ , а также аналогичные слагаемые, содержащиеся в сумме  $\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|=2n}$  правой части и не содержащие степеней компонент вектора  $\mathbf{d}$ . Функции  $R_2^i$  содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора  $\mathbf{d}$  с коэффициентами  $e^{-i\alpha\tau}, i \geq n + 1$ , а также аналогичные слагаемые, содержащиеся в сумме  $\alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n}$  правой части системы и не содержащие степеней компонент вектора  $\mathbf{c}^{(2n)}$ . В  $R_3^i$  содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов  $\mathbf{c}^{(2n)}$  и  $\mathbf{d}$ . Функция  $R_4^i$  состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов  $\mathbf{c}^{(2n)}$  и  $\mathbf{d}$ . Матрицы  $P, Q$  и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 P &= \alpha e^{-\alpha\tau} (A + e^{-\alpha\tau} P_1(\mathbf{F}) + \dots + e^{-(n-1)\alpha\tau} P_{n-1}(\mathbf{F})), \\
 Q &= \alpha e^{-\alpha\tau} (B + e^{-\alpha\tau} Q_1(\mathbf{F}) + \dots + e^{-(n-1)\alpha\tau} Q_{n-1}(\mathbf{F})),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}^{(2n)}(0) &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{F} - \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{F}) - \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{F}) - \dots - \mathbf{f}^{(2n)}(\mathbf{F}), \\
 \mathbf{f}^{(i)} &= (\phi_1^{(i)}, \dots, \phi_n^{(i)})^T, \quad \mathbf{f}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, 2n.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Введем новую управляющую функцию  $\mathbf{v}(\tau)$ , связанную с  $\mathbf{d}(\tau)$  уравнениями

$$\frac{d\mathbf{d}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)^T, \quad \mathbf{v} \in R^r. \tag{2.18}$$

Положим

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{0}. \tag{2.19}$$

Тогда систему (2.15), (2.18) и начальные данные (2.17), (2.19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}}{d\tau} &= \bar{P}\bar{\mathbf{c}}^{(2n)} + \bar{Q}\mathbf{v} + \bar{\mathbf{R}}_1(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \bar{\mathbf{R}}_2(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \bar{\mathbf{R}}_3(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \\ &\quad + \bar{\mathbf{R}}_4(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau), \quad \bar{\mathbf{c}}^{(2n)} = (\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d})_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{\mathbf{R}}_1 &= (R_1^1, \dots, R_1^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \quad \bar{\mathbf{R}}_2 = (R_2^1, \dots, R_2^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{\mathbf{R}}_3 &= (R_3^1, \dots, R_3^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \quad \bar{\mathbf{R}}_4 = (R_4^1, \dots, R_4^n, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \\ \bar{P} &= \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r \times n+r}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E \end{pmatrix}_{n+r \times r}, \\ \bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(0) &= \bar{\mathbf{c}}_0^{(2n)}, \quad \bar{\mathbf{c}}_0^{(2n)} = (\mathbf{c}^{(2n)}(0), 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где  $O_i, -i = 1, \dots, 3$ , – матрицы с нулевыми элементами соответствующих размерностей,  $E$  – единичная матрица. Индексы  $n + r \times 1, n + r \times n + r, n + r \times r$  указывают на размерности введенных соответствующих векторов и матриц.

Рассмотрим задачу: найти пару функций  $\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \in C^1[0, \infty), \mathbf{v}(\tau) \in C[0, \infty)$ , удовлетворяющую системе (2.20) и условиям

$$\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(0, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \bar{\mathbf{c}}_0^{(2n)}, \quad \bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad \mathbf{d}(\tau, 0, 0) \equiv \mathbf{0}. \tag{2.22}$$

Указанную пару  $\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}), \mathbf{v}(\tau)$  будем называть *решением* задачи (2.20), (2.22). Легко видеть, что имея пару функций  $(\mathbf{c}^{(2n)}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) = \bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau)$ , входящую в решение задачи (2.20), (2.22) и используя формулы (2.14), (2.11) и (2.8), получаем решение задачи (2.3), (2.5).

Для удобства дальнейших рассуждений введем область изменения  $\mathbf{c}^{(2n)}$ , согласованную с областью (2.7). Из условий (2.14), (2.11), (2.8) вытекает равенство  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(2n)} + \chi(\mathbf{F}), \chi(\mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\mathbf{F} \rightarrow 0$ . Отсюда  $\|\mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{c}^{(2n)}\| + \|\chi(\mathbf{F})\|$ . В силу сказанного следует существование  $C_2 > 0, C_2 < C_1$  таких, что для всех  $\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{F}$  принадлежащих области

$$\|\mathbf{c}^{(2n)}\| < C_2, \quad \|\mathbf{F}\| < C_2 \tag{2.23}$$

соответствующая функция  $\mathbf{c}(\tau)$  будет принадлежать области (2.7)

### 3. ОЦЕНКА СЛАГАЕМЫХ ПРАВой ЧАСТИ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЛЕММЫ

Из построения системы (2.15) следует, что в области (1.5), (2.23) имеют место оценки

$$\|P_i(\mathbf{F})\| \rightarrow 0, \quad \|Q_j(\mathbf{F})\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{F}\| \rightarrow 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad j = 2, \dots, n-1, \tag{3.1}$$

$$\|\mathbf{R}_1(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\| \leq e^{-(n+1)\alpha\tau} L_1 \|\mathbf{c}^{(2n)}\|, \quad \|\mathbf{R}_2(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\| \leq e^{-(n+1)\alpha\tau} L_2 \|\mathbf{d}\|, \tag{3.2}$$

$$\|\mathbf{R}_3(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\| \leq e^{-\alpha\tau} L_3 \left( \|\mathbf{c}^{(2n)}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2 \right), \quad \|\mathbf{R}_4(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\| \leq L_4(\mathbf{F}) e^{-(2n+1)\alpha\tau}. \tag{3.3}$$

Кроме того, из определения  $\mathbf{R}_4$  следует

$$L_4(\mathbf{F}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{F}\| \rightarrow 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}}{d\tau} = \bar{P}\bar{\mathbf{c}}^{(2n)} + \bar{Q}\mathbf{v}. \tag{3.5}$$



**Лемма.** Пусть для системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.4). Тогда существует  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_1 < C_2$  такое, что для всех  $\mathbf{F} \in R^n : \|\mathbf{F}\| < \varepsilon_1$  существует управление  $\mathbf{v}(\tau)$  вида

$$\mathbf{v} = M(\tau)\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}, \tag{3.6}$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (3.5), (3.6).

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ И ТЕОРЕМЫ

**Доказательство леммы.** Пусть  $\mathbf{L}_1^j(\tau)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , есть  $j$ -й столбец матрицы  $\bar{Q}$ . Построим матрицу

$$S_1(\tau) = \left\{ \mathbf{L}_1^1(\tau), \mathbf{L}_2^1(\tau), \dots, \mathbf{L}_{k_1}^1(\tau), \mathbf{L}_1^2(\tau), \dots, \mathbf{L}_{k_2}^2(\tau), \dots, \mathbf{L}_1^r(\tau), \dots, \mathbf{L}_{k_r}^r(\tau) \right\},$$

$$\mathbf{L}_i^j(\tau) = P\bar{\mathbf{L}}_{i-1}^j(\tau) - \frac{d\bar{\mathbf{L}}_{i-1}^j}{d\tau}(\tau), \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 2, \dots, k_j. \tag{4.1}$$

Здесь  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , – максимальное количество столбцов вида  $\mathbf{L}_1^j, \dots, \mathbf{L}_{k_j}^j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , таких, что векторы  $\mathbf{L}_1^1(\tau), \mathbf{L}_2^1(\tau), \dots, \mathbf{L}_{k_1}^1(\tau)$ ,  $\mathbf{L}_1^2(\tau), \dots, \mathbf{L}_{k_2}^2(\tau), \dots, \mathbf{L}_1^r(\tau), \dots, \mathbf{L}_{k_r}^r(\tau)$  линейно независимы. Пусть  $\bar{\mathbf{L}}_1^j(\tau)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , есть  $j$ -й столбец матрицы  $Q$ . Рассмотрим матрицу

$$S_2(\tau) = \left\{ \bar{\mathbf{L}}_1^1(\tau), \bar{\mathbf{L}}_2^1(\tau), \dots, \bar{\mathbf{L}}_{k_1}^1(\tau), \bar{\mathbf{L}}_1^2(\tau), \dots, \bar{\mathbf{L}}_{k_2}^2(\tau), \dots, \bar{\mathbf{L}}_1^r(\tau), \dots, \bar{\mathbf{L}}_{k_r}^r(\tau) \right\},$$

$$\bar{\mathbf{L}}_i^j(\tau) = P\bar{\mathbf{L}}_{i-1}^j(\tau) - \frac{d\bar{\mathbf{L}}_{i-1}^j}{d\tau}(\tau), \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 2, \dots, k_j.$$

Покажем, что при достаточно малых  $\|\mathbf{F}\|$  из области (2.23) имеем

$$\text{rank } S_2(\tau) = n, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{4.2}$$

Пусть  $\bar{\bar{\mathbf{L}}}_1^j(\tau)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , есть  $j$ -й столбец матрицы  $\alpha e^{-\alpha\tau} B$ . Построим матрицу

$$S_3(\tau) = \left\{ \bar{\bar{\mathbf{L}}}_1^1(\tau), \bar{\bar{\mathbf{L}}}_2^1(\tau), \dots, \bar{\bar{\mathbf{L}}}_{k_1}^1(\tau), \bar{\bar{\mathbf{L}}}_1^2(\tau), \dots, \bar{\bar{\mathbf{L}}}_{k_2}^2(\tau), \dots, \bar{\bar{\mathbf{L}}}_1^r(\tau), \dots, \bar{\bar{\mathbf{L}}}_{k_r}^r(\tau) \right\},$$

$$\bar{\bar{\mathbf{L}}}_i^j(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau} A\bar{\bar{\mathbf{L}}}_{i-1}^j(\tau) - \frac{d\bar{\bar{\mathbf{L}}}_{i-1}^j}{d\tau}(\tau), \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 2, \dots, k_j.$$

Из равенств (2.16) и условия (3.1) следует существование  $\bar{\varepsilon}_1 > 0$  такого, что для всех  $\mathbf{F}$  из области:  $\|\mathbf{F}\| < \bar{\varepsilon}_1$ ,  $\bar{\varepsilon}_1 < C_2 \text{rank } S_2(\tau) = \text{rank } S_3(\tau)$ ,  $\tau \in [0, \infty)r$ . Рассуждая методом от противного и используя (1.4), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\text{rank } S_2(\tau) = \text{rank } S_3(\tau) = n, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Кроме того, из структуры матрицы (4.1) и условия (4.2) следует, что  $\text{rank } S_1(\tau) = n + r$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ , а также

$$\|S_1^{-1}(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty. \tag{4.3}$$

Ниже будем считать, что  $\|\mathbf{F}\| < \varepsilon_1$ . Выполним в системе (3.5) замену переменных

$$\bar{\mathbf{c}}^{(2n)} = S_1(\tau)\mathbf{y}. \tag{4.4}$$

В результате преобразования (4.4) получим систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = S_1^{-1}(\tau)(P\bar{S}_1(\tau) - \frac{dS_1}{d\tau}(\tau))\mathbf{y} + S_1^{-1}(\tau)\bar{Q}\mathbf{v}.$$

Согласно [32] имеем

$$S_1^{-1}(\tau) \left( P\bar{S}_1(\tau) - \frac{dS_1}{d\tau}(\tau) \right) = \{ \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_{k_1}, \bar{\Phi}_{k_1}(\tau), \dots, \bar{\mathbf{e}}_{k_1+\dots+k_{r-1}+2}, \dots, \bar{\mathbf{e}}_{k_1+\dots+k_r}, \bar{\Phi}_{k_r}(\tau) \},$$

$\bar{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T$ , где 1 стоит на  $i$ -м месте,  $\bar{\Phi}_{k_j}(\tau) = (-\phi_{k_1}^1(\tau), \dots, -\phi_{k_1}^{k_1}(\tau), \dots, -\phi_{k_j}^1(\tau), \dots, -\phi_{k_j}^{k_j}(\tau), 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^T$ ;  $-\phi_{k_j}^i$  являются коэффициентами разложения вектора  $L_{k_j+1}^j$  по векторам  $L_i^1$ ;  $i = 1, \dots, k_1, \dots, L_i^j$ ;  $i = 1, \dots, k_j$ , т.е.

$$L_{k_j+1}^j = -\sum_{i=1}^{k_1} \phi_{k_1}^i(\tau)L_i^1 - \dots - \sum_{i=1}^{k_j} \phi_{k_j}^i(\tau)L_i^j; \tag{4.5}$$

$S_1^{-1}(\tau)\bar{Q} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{k_j+1}, \dots, \bar{e}_{\gamma+1}\}_{n+r \times r}$ ;  $\gamma = \sum_{j=1}^{r-1} k_j$ . Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_{k_j}}{d\tau} &= \{\bar{e}_2^{k_i}, \dots, \bar{e}_{k_j}^{k_j}, \bar{\Phi}_{k_j}(\tau)\}y_{k_j} + \bar{e}_1^{k_i}v_j; \quad j = 1, \dots, r, \\ y_{k_j} &= (y_{k_i}^1, \dots, y_{k_j}^{k_j})_{k_j \times 1}^T; \quad \bar{e}_i^{k_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{k_j \times 1}^T, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где единица стоит на  $i$ -м месте,  $\bar{\Phi}_{k_j}(\tau) = (-\phi_{k_j}^1(\tau), \dots, -\phi_{k_j}^{k_j}(\tau))_{k_j \times 1}^T$ . Пусть  $y_{k_j}^{k_j} = \psi(\tau)$ . Фазовые переменные системы (4.6) связаны с функцией  $\psi(\tau)$  и ее производными равенствами:

$$\begin{aligned} y_{k_j}^{k_j} &= \psi(\tau), \\ y_{k_j}^{k_j-1} &= \psi^{(1)}(\tau) + \phi_{k_j}^{k_j}(\tau)\psi(\tau), \\ y_{k_j}^{k_j-2} &= \psi^{(2)}(\tau) + \phi_{k_j}^{k_j}(\tau)\psi^{(1)}(\tau) + \left( \frac{d\phi_{k_j}^{k_j}}{d\tau}(\tau) + \phi_{k_j}^{k_j-1}(\tau) \right)\psi(\tau), \\ &\dots \\ y_{k_j}^1 &= \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau)\psi^{(k_j-2)} + \dots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Дифференцируя последнее равенство (4.7), сводим систему (4.6) к уравнениям

$$\psi^{(k_j)}(\tau) + \varepsilon_{k_j-1}(\tau)\psi^{(k_j-1)}(\tau) + \dots + \varepsilon_0(\tau)\psi(\tau) = v_j, \quad j = 1, \dots, r. \tag{4.8}$$

**Замечание.** Из (2.16), определения функций  $\phi_{k_j}^i(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, k_j$ , и условия (4.5) следует, что в (4.6)–(4.8) функции  $\phi_{k_j}^1(\tau), \dots, \phi_{k_j}^{k_j}(\tau)$ , их производные, а также функции  $r_{k_j-2}(\tau), \dots, r_0(\tau)$ ,  $\varepsilon_{k_j-1}(\tau), \dots, \varepsilon_0(\tau)$  ограничены. Пусть

$$v_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i})\psi^{(k_j-i)}(\tau), \quad j = 1, \dots, r, \tag{4.9}$$

где  $\gamma_{k_j-i}$ ,  $i = 1, \dots, k_j$ , выбраны так, чтобы корни  $\lambda_{k_i}^1, \dots, \lambda_{k_i}^{k_i}$  уравнений

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \dots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda_{k_i}^1, \dots, \lambda_{k_i}^j, \quad i \neq j, \quad \lambda_{k_i}^j < -(2n+1)\alpha - 1, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Возвращаясь в (4.9) к исходным переменным, получаем  $v_j = \delta_{k_j}(\tau)T_{k_j}^{-1}(\tau)S_{1k_j}^{-1}(\tau)\bar{e}^{(2n)}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $\delta_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$ ,  $T_{k_j}(\tau)$  – матрица равенства (4.7), т.е.  $y_{k_j} = T_{k_j}(\tau)\bar{\psi}(\tau)$ ,  $\bar{\psi}(\tau) = (\psi^{(k_j-1)}(\tau), \dots, \psi(\tau))^T$ ;  $S_{1k_j}^{-1}(\tau)$  – матрица, состоящая из соответствующих  $k_j$ -строк матрицы  $S_1^{-1}(\tau)$ . Найденное управление можно записать в виде (3.6), где

$$M(\tau) = \delta_k(\tau)T_k^{-1}(\tau)S_{1k}^{-1}(\tau) = (\delta_{k_1}(\tau)T_{k_1}^{-1}(\tau)S_{1k_1}^{-1}(\tau), \dots, \delta_{k_r}(\tau)T_{k_r}^{-1}(\tau)S_{1k_r}^{-1}(\tau))^T. \tag{4.10}$$

Пусть  $\Psi(\tau)$ ,  $\Psi(0) = E$  ( $E$  – единичная матрица) – фундаментальная матрица системы (4.8), замкнутая управлением (4.9), т.е. системы (4.8) при условии, что в ее правую часть подставлена

функция (4.9). Очевидно, что элементами матрицы  $\Psi(\tau)$  являются экспоненты с отрицательными показателями и их производные.

Рассмотрим систему (3.5), замкнутую управлением (3.6), (4.10)

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(4n)}}{d\tau} = C(\tau)\bar{\mathbf{c}}^{(4n)}, \quad C(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \quad (4.11)$$

Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу  $T(\tau)$ , где на ее диагонали стоят матрицы  $T_{k_i}, i = 1, \dots, r$ . С учетом (4.4), (4.7) фундаментальная матрица  $\Phi(\tau), \Phi^{-1}(0) = E$  системы (4.11) имеет вид

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)T^{-1}(0)S_1^{-1}(0). \quad (4.12)$$

На основании (4.3), замечания и (4.12) следует, что можно подобрать число  $\lambda > 0$  такое, что имеют место оценки

$$\|\Phi(\tau)\| \leq Ke^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \quad \|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| \leq Ke^{-\lambda(\tau-t)\tau}e^{(n-1)\alpha t}, \quad \tau \geq t, \quad \tau \in [0, \infty). \quad (4.13)$$

В качестве величины  $\varepsilon_1 > 0$ , которая фигурирует в формулировке леммы, можно положить  $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ . Лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** Достаточность. Рассмотрим систему (2.20) при условии, что в ее правую часть подставлено управление (3.6), (4.10). Согласно (4.11) ее можно записать в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}}{d\tau} = C\bar{\mathbf{c}}^{(2n)} + \bar{\mathbf{R}}_1(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \tau, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_2(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \tau, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_3(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \tau, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_4(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \tau, \mathbf{F}). \quad (4.14)$$

Покажем, что все ее решения с начальными данными (2.21) при достаточно малых  $\bar{\mathbf{x}}$  и  $\mathbf{F}$  экспоненциально убывают. Выполним в системе (4.14) замену переменной по формуле

$$\bar{\mathbf{c}}^{(2n)} = e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(0) = \bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(0), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^T, \quad \mathbf{z}_1 \in R^n, \quad \mathbf{z}_2 \in R^r. \quad (4.15)$$

В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{d\tau} &= D\mathbf{z} + e^{n\alpha\tau}\bar{\mathbf{R}}_1(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2, \tau, \mathbf{F}) + e^{n\alpha\tau}\bar{\mathbf{R}}_2(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2, \tau, \mathbf{F}) + \\ &+ e^{n\alpha\tau}\bar{\mathbf{R}}_3(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2, \tau, \mathbf{F}) + e^{n\alpha\tau}\bar{\mathbf{R}}_4(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2, \tau, \mathbf{F}), \quad D(\tau) = C(\tau) + n\alpha E. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Пусть  $\Phi_1(\tau)$  – фундаментальная матрица линейной части системы (4.16). Тогда из (4.13) и (4.15) следуют оценки

$$\|\Phi_1(\tau)\| \leq Ke^{-\beta\tau}, \quad \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leq Ke^{-\beta(\tau-t)}e^{n\alpha t}, \quad \beta = \lambda - n\alpha, \quad \tau \geq t. \quad (4.17)$$

Выберем  $\alpha > 0$  так, чтобы было выполнено неравенство  $\beta > 0$ . Решение системы (4.16) с начальными данными (4.15), (2.21) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tau) &= \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)\mathbf{z}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\bar{\mathbf{R}}_1(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_2(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}) + \\ &+ \bar{\mathbf{R}}_3(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_4(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}))dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tau) &= \Phi_1(\tau)\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(0) + \int_0^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\bar{\mathbf{R}}_1(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_2(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}) + \\ &+ \bar{\mathbf{R}}_3(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}) + \bar{\mathbf{R}}_4(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2, t, \mathbf{F}))dt, \quad \tau \in [0, \tau_1]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из равенств (4.18), (4.19) и условий (3.2), (3.3), (4.17) следует, что в области (1.5), (2.23) справедливы оценки

$$\|\mathbf{z}(\tau)\| \leq Ke^{-\beta(\tau-\tau_1)}\|\mathbf{z}(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\beta(\tau-t)}K(\bar{L}e^{-\alpha t}\|\mathbf{z}(t)\| + L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t})dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty),$$

$$\|z(\tau)\| \leq Ke^{-\beta(\tau-\tau_1)} \|\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(0)\| + \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-t)} K(\bar{L}e^{-\alpha t} \|z(t)\| + L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t}) dt, \quad \tau \in [0, \tau_1].$$

Применяя к последним двум неравенствам известный результат [33, с. 185], получаем

$$\|z(\tau)\| \leq Ke^{-\mu(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1)\| + K \int_{\tau_1}^\tau e^{-\mu(\tau-t)} L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t} dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \quad \mu = \beta - K\bar{L}e^{-\alpha\tau_1}, \quad (4.20)$$

$$\|z(\tau)\| \leq K_1 e^{-\mu_1\tau} \|\bar{\mathbf{c}}_0^{(2n)}\| + K \int_0^\tau e^{-\mu_1(\tau-t)} L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t} dt, \quad \tau \in [0, \tau_1], \quad \mu_1 = \beta - \bar{K}L. \quad (4.21)$$

Зафиксируем  $\tau_1 > 0$  так, чтобы было выполнено неравенство  $\mu > 0$ . Тогда после вычисления интегралов во вторых слагаемых правой части (4.20) и (4.21) получим

$$\|z(\tau)\| \leq Ke^{-\mu(\tau-\tau_1)} \|z(\tau_1)\| + K_1 e^{-2n\alpha\tau} L_4(\mathbf{F}), \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \quad (4.22)$$

$$\|z(\tau)\| \leq K_2 \|\bar{\mathbf{c}}_0^{(2n)}\| + K_3 L_4(\mathbf{F}), \quad \tau \in [0, \tau_1], \quad K_i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.23)$$

В (4.22), (4.23) константы  $K_i > 0, i = 1, 2, 3$ , зависят от области (1.5), (2.23).

Из (4.22), (4.23), (3.4) и формулы (2.17) следует, что можно выбрать  $\bar{\varepsilon}_2 : 0 < \bar{\varepsilon}_2 < \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$  так, чтобы для всех  $\bar{\mathbf{x}}, F : \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \bar{\varepsilon}_2, \|\mathbf{F}\| \leq \bar{\varepsilon}_2$  функция  $z(\tau)$  будет экспоненциально убывать и принадлежать области (1.5), (2.23). Используя формулу (4.15), получаем известную функцию  $\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau)$ . Ее вторая компонента даст известную функцию  $\mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ . Согласно (4.15), (4.22), (4.23) имеет место оценка

$$\|\bar{\mathbf{c}}^{(2n)}\| \leq K_4 e^{-n\alpha\tau} \|\bar{\mathbf{c}}_0^{(2n)}\|, \quad K_4 > 0. \quad (4.24)$$

Из оценки (4.24) видно, что соответствующая пара функций  $\mathbf{c}^{(2n)}(\tau), \mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$  является решением задачи (2.20), (2.22). Далее, если в функции  $\mathbf{c}^{(2n)}(\tau)$  по формулам (2.14), (2.11) и (2.8) перейти к функции  $\mathbf{c}(\tau)$ , то получим известные функции  $\mathbf{c}(\tau), \mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ , которые являются решением задачи (2.3), (2.5). В свою очередь подстановка функций  $\mathbf{c}(\tau), \mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ , в формулы (2.4), (2.2) и предельный переход при  $t \rightarrow 1$  даст известные функции  $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ , которые являются решением исходной задачи (1.1), (1.7).

Необходимость. Пусть условие (1.4) не выполнено. Предположим противное: существует  $\varepsilon > 0$ : такое, что для всех  $\bar{\mathbf{x}} \in R^n, \mathbf{F} \in R^n : \|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \|\mathbf{F}\| < \varepsilon$  существует решение задачи (1.1), (1.7). Тогда для указанных  $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}$  существует решение задачи (2.3), (2.5).

Не умаляя общности, можно считать, что это решение принадлежит области (1.5), (2.7).

Систему (2.3) с учетом (1.2), (1.3) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} A\mathbf{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} B\mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) + \alpha e^{-\alpha\tau} \mathbf{R}(\mathbf{c}, \mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})) + \alpha e^{-\alpha\tau} \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^T, \quad (4.25)$$

$$R_i(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} (\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) c_j c_k + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k} (\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) c_j d_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k} (\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) d_j d_k \right], \quad (4.26)$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \theta_i \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i \mathbf{d}, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

Из равенства (4.26) следует, что в области (1.5), (2.7) справедливы оценки

$$\|R_i\| \leq L(\|\mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2), \quad L > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

В свою очередь из условия (1.2), (1.3) и (1.6) и теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров, получаем равенства

$$\begin{aligned} c_i(\tau, \bar{x}, \mathbf{F}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial \bar{x}_j}(\tau, \theta_i \bar{x}, \theta_i \mathbf{F}) \bar{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial F_j}(\tau, \theta_i \bar{x}, \theta_i \mathbf{F}) F_j, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n, \\ d_i(\tau, \bar{x}, \mathbf{F}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial d_i}{\partial \bar{x}_j}(\tau, \bar{\theta}_i \bar{x}, \bar{\theta}_i \mathbf{F}) \bar{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial d_i}{\partial F_j}(\tau, \bar{\theta}_i \bar{x}, \bar{\theta}_i \mathbf{F}) F_j, \quad \bar{\theta}_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (4.28)$$

В (4.28)  $\theta_i \bar{x}$ ,  $\theta_i F$ ,  $\bar{\theta}_i \bar{x}$ ,  $\bar{\theta}_i F$  – средние точки из области  $\|\bar{x}\| < \varepsilon$ ,  $\|\mathbf{F}\| < \varepsilon$ .

Пусть  $\text{rank } S = k$ ,  $k < n$ . Пусть  $\mathbf{b}_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , есть  $j$ -й столбец матрицы  $B$ . Введем в рассмотрение матрицу  $S_4 = \{\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \dots, A^{k_1-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r, \dots, A^{k_r-1}\mathbf{b}_r, \mathbf{l}_{k+1}, \dots, \mathbf{l}_n\}_{n \times n}$ .

Здесь  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  – максимальное количество столбцов вида  $\mathbf{b}_j, \dots, A^{k_j-1}\mathbf{b}_j$  таких, что векторы  $\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1, \dots, A^{k_1-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r, A\mathbf{b}_r, \dots, A^{k_r-1}\mathbf{b}_r$  линейно независимы, вектора  $\mathbf{l}_j$ ,  $j = k+1, \dots, n$ , выбраны так, чтобы

$$\text{rank } S_4 = n. \quad (4.29)$$

Используя (4.29), выполняем в системе (4.25) замену переменной  $\mathbf{c}$  по формуле

$$\mathbf{c} = S_4 \mathbf{y}. \quad (4.30)$$

Тогда согласно (4.30) и [32] в новых переменных система (4.25) и условия (2.5) примут вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O_1 & A_3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{pmatrix} B_1 \\ O_2 \end{pmatrix} \mathbf{d} + \alpha e^{-\alpha\tau} S_4^{-1} R(S_4 \mathbf{y}, \mathbf{d}(\tau, S_4 \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F})) + \alpha e^{-\alpha\tau} S_4^{-1} \mathbf{F}, \quad \bar{\mathbf{y}} = S_4^{-1} \bar{\mathbf{x}}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{y}(0) = \bar{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{d}(0, S_4 \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F}) = 0,$$

$$\mathbf{y}(\tau) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau, S_4 \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad \mathbf{d}(\tau, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \quad (4.32)$$

$$\forall \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F} : \|S_4 \bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon, \quad \|S_4^{-1} \mathbf{F}\| < \varepsilon.$$

В правой части (4.31)  $A_1, A_2, A_3, B_1$  – матрицы с постоянными коэффициентами соответственно размерностей  $k \times k$ ,  $k \times n - k$ ,  $n - k \times n - k$ ,  $k \times r$ . Блоки  $O_1, O_2$  являются матрицами с нулевыми элементами соответственно размерностей  $n - k \times k$ ,  $n - k \times r$ . Представим вектор  $\mathbf{y}(\tau)$ , который входит в решение задачи (4.31), (4.32) и вектор начальных данных  $\bar{\mathbf{y}}$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\tau) &= (\tilde{\mathbf{y}}(\tau), \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau))^T, \quad \tilde{\mathbf{y}}(\tau) = (y_1(\tau), \dots, y_k(\tau))^T, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (y_{k+1}(\tau), \dots, y_n(\tau))^T, \quad \bar{\mathbf{y}} = (\bar{\tilde{\mathbf{y}}}, \bar{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}})^T, \\ \bar{\tilde{\mathbf{y}}} &= (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k)^T, \quad \bar{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}} = (\bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_n)^T. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение систему, состоящую из последних  $n - k$  уравнений системы (4.31), предположив дополнительно, что в ее правую часть подставлены известные функции  $\tilde{\mathbf{y}}(\tau)$ ,  $\mathbf{d}(\tau, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ , удовлетворяющие (4.32). При этом  $\tilde{\mathbf{y}}(\tau)$  удовлетворяет начальному условию  $\tilde{\mathbf{y}}(0) = \bar{\tilde{\mathbf{y}}} = (0, \dots, 0)_{k \times 1}^T$ . Тогда остальные  $n - k$  компонент  $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (\tilde{\tilde{y}}_{k+1}(\tau), \dots, \tilde{\tilde{y}}_n(\tau))_{n-k \times 1}^T$  вектора  $\mathbf{y}(\tau)$  удовлетворяют системе

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \tilde{\tilde{\mathbf{y}}} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{S}_4^{-1} \mathbf{R}(S_4 \mathbf{y}, \mathbf{d}(\tau, S_4 \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F})) + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{S}_4^{-1} \mathbf{F}, \quad (4.33)$$

где  $\bar{S}_4^{-1}$  – матрица, состоящая из последних  $n - k$  строк матрицы  $S_4^{-1}$ .

Согласно (4.32) для решения системы (4.33) должны быть выполнены условия

$$\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(0) = \bar{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}}, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty \quad \forall \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}, \mathbf{F} : \|\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}\| < \frac{\varepsilon}{\|\bar{S}_4^{-1}\|}, \quad \|\mathbf{F}\| < \frac{\varepsilon}{\|\bar{S}_4^{-1}\|}. \quad (4.34)$$

Покажем, что решения системы (4.33) не удовлетворяют условию (4.34). Очевидно, что  $\Phi(\tau) = e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{A_3}$  – фундаментальная матрица системы  $\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} A_3 \tilde{\mathbf{y}}$ , нормированная в нуле. Решение системы (4.33) с начальными данными (4.34) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{F}) = e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{A_3} \tilde{\mathbf{y}} + \int_0^\tau e^{-e^{-\alpha t} A_3} e^{e^{-\alpha t} A_3} \alpha e^{-\alpha t} \bar{S}_4^{-1} [\mathbf{R}(S_4 \mathbf{y}, \mathbf{d}(\tau, S_4 \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F})) + \mathbf{F}] dt, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Отсюда

$$e^{-e^{-\alpha\tau} A_3} e^{-A_3} \tilde{\mathbf{y}}(\tau, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{F}) = \tilde{\mathbf{y}} + e^{-A_3} \int_0^\tau e^{e^{-\alpha t} A_3} \alpha e^{-\alpha t} \bar{S}_4^{-1} [\mathbf{R}(S_4 \mathbf{y}, \mathbf{d}(\tau, S_4 \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F})) + \mathbf{F}] dt, \quad \tau \in [0, \infty). \quad (4.35)$$

Пусть  $\mathbf{F}$  удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{F}\| = \|\tilde{\mathbf{y}}\|^2. \quad (4.36)$$

После несложных соображений с учетом (4.27), (4.28), (4.30), (4.35) и (4.36) в области (1.5), (2.7) получим оценку

$$\begin{aligned} \|e^{e^{-\alpha\tau} A_3} e^{-A_3} \|\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{F})\| &\geq \|\tilde{\mathbf{y}}\| (1 - L_1 \|\tilde{\mathbf{y}}\|), \quad \tau \in [0, \infty), \quad L_1 > 0 \\ \forall \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{F} : \|\tilde{\mathbf{y}}\| &< \frac{\varepsilon}{\|\bar{S}_4^{-1}\|}, \quad \|\mathbf{F}\| < \frac{\varepsilon}{\|\bar{S}_4^{-1}\|}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Выберем  $\tilde{\mathbf{y}}$  так, чтобы были выполнены условия

$$\|\tilde{\mathbf{y}}\| < \frac{1}{L_1}, \quad \|\tilde{\mathbf{y}}\| < \frac{\varepsilon}{\|\bar{S}_4\|}, \quad 1 > \|\tilde{\mathbf{y}}\| > q > 0. \quad (4.38)$$

Из (4.37) следует, что при  $\tilde{\mathbf{y}}$  и  $\mathbf{F}$  из области (4.38) для решения системы (4.33) выполнено условие

$$\|\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{F})\| > q_1 > 0, \quad \tau \in [0, \infty),$$

которое противоречит условию (4.34). Указанное обстоятельство доказывает необходимость выполнения условия (1.4) в формулировке теоремы.

Теорема доказана.

## 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу управления однозвенным роботом-манипулятором при переносе груза в заданную точку. В соответствии с [34] система уравнений, описывающая движение манипулятора с учетом возмущений, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_2 - a_2 \sin x_1 + u + F, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $x_1$  – угол отклонения манипулятора от вертикальной оси,  $x_2$  – скорость изменения угла отклонения,  $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$ ,  $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$ ,  $a_2 = g L^{-1} \left( m_0 + \frac{M}{2} \right) m_1^{-1}$ ,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\bar{\alpha}$  – коэффициент трения,  $m_0$  – масса переносимого груза,  $L$  – длина манипулятора,  $M$  – масса манипулятора,  $F$  – возмущение.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ . Рассмотрим граничные условия

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad u(0) = 0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad u(1) = 0, \quad u(t, \mathbf{0}, 0) \equiv 0. \quad (5.2)$$

Вспомогательная система (2.20) и условия (2.22) для задачи (5.1), (5.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \\ \frac{dc_2}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2 + \alpha e^{-\alpha\tau} w + \alpha e^{-\alpha\tau} F, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \nu, \\ c_1(0) &= \bar{x}_1, \quad c_2(0) = \bar{x}_2, \quad d(0) = 0, \quad w(\tau, 0, 0) \equiv 0, \quad c_i(\tau) \rightarrow 0, \\ w(\tau) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для решения задачи (5.3), (5.4) выполним замены переменных  $c_2(\tau), c_1(\tau)$  по формулам

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - Fe^{-\alpha\tau}, \quad c_1(\tau) = c_1^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\tau}F. \quad (5.5)$$

В результате аналог системы (2.15), (2.18) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_1^{(1)}}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} c_2^{(2)}, \\ \frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin\left(c_1^{(1)} + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\tau}F\right) - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2^{(1)} + \alpha e^{-2\alpha\tau} a_1 F + \alpha e^{-\alpha\tau} w, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \nu. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Линейная часть системы (5.6) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{P}\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{Q}\nu\bar{c} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, w)^T, \\ \bar{P} &= \begin{vmatrix} 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0 \\ -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 & -\alpha e^{-\alpha\tau} a_1 & \alpha e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha e^{-\alpha\tau} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решение задачи стабилизации системы (5.7) состоит из следующих этапов.

1. Построение матрицы  $S_1 = \{L_1, L_2, L_3\}$ ,  $L_1 = \bar{Q}$ ,  $L_2 = \bar{P}\bar{Q} - \frac{dL_1}{d\tau}$ ,  $L_3 = \bar{P}L_2 - \frac{dL_2}{d\tau}$ . Реализуется средствами компьютерной алгебры.

2. Построение матрицы  $\bar{S}_1 = S_1^{-1} \left( \bar{P}S_1 - \frac{dS_1}{d\tau} \right)$ . Реализуется средствами компьютерной алгебры.

3. Построение матрицы

$$T = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_3(\tau) - \left( \frac{d\varphi_3(\tau)}{d\tau} \right) + \varphi_2(\tau) \\ 0 & 1 & -\varphi_3(\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

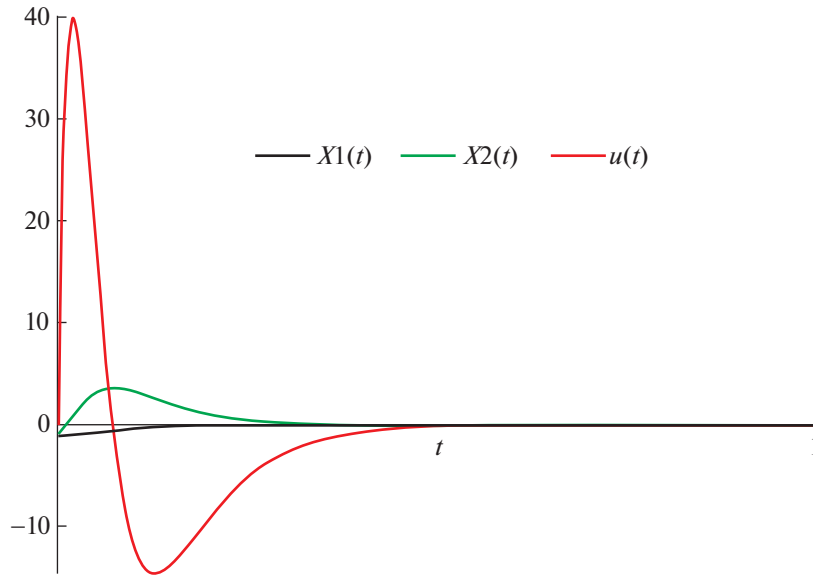
и уравнения

$$\psi^{(3)} + \varepsilon_2(\tau)\psi^{(2)} + \varepsilon_1(\tau)\psi^{(1)} + \varepsilon_0(\tau)\psi = \nu.$$

Реализуется средствами компьютерной алгебры.

4. Построение строки  $\delta(\tau) = (\varepsilon_2(\tau) - \gamma_2, \varepsilon_1(\tau) - \gamma_1, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$ , где константы  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  являются коэффициентами полинома с корнями  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ .

Реализуется средствами компьютерной алгебры.



Фиг. 1. Графики функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $u(t)$ .

5. Построение строки

$$M(\tau) = \delta(\tau)T^{-1}(\tau)S_1^{-1}(\tau).$$

Реализуется средствами компьютерной алгебры.

В результате получаем закон вспомогательного управления  $\upsilon(\tau)$ :

$$\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{c}, \quad \bar{c} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, w)^T,$$

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{\alpha\tau}a_1a_2\alpha + 3\alpha a_2 + 6a_2 - \frac{1}{\alpha^2}e^{2\alpha\tau}(8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 22\alpha + 6) \\ -a_1^2\alpha + a_2e^{-\alpha\tau}\alpha + 3a_1\alpha + 6a_1 - \frac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}(7\alpha^2 + 18\alpha + 11) \\ a_1\alpha e^{-\alpha\tau} - 3\alpha - 6 \end{pmatrix}^T. \tag{5.8}$$

Используя формулы (5.5) и (2.2), получаем закон управления (5.8) в исходных переменных  $x_1, x_2, t$ :

$$\bar{\upsilon}(t) = \bar{M}(t)\bar{c} + \bar{v}(t), \quad \bar{c} = (x_1, x_2, u)^T,$$

$$\bar{M}(t) = M(\tau(t)) = \begin{pmatrix} -(1-t)a_1a_2\alpha + 3\alpha a_2 + 6a_2 - \frac{1}{\alpha^2}(1-t)^{-2}(8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 22\alpha + 6) \\ -a_1^2\alpha + a_2(1-t)\alpha + 3a_1\alpha + 6a_1 - \frac{1}{\alpha}(1-t)^{-1}(7\alpha^2 + 18\alpha + 11) \\ a_1\alpha(1-t) - 3\alpha - 6 \end{pmatrix}^T, \tag{5.9}$$

$$\bar{v}(t) = \bar{M}(t)\left(-\frac{1}{2}F(1-t)^2, (1-t)F, 0\right)^T.$$

На заключительном этапе находим решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_2 - a_2 \sin x_1 + u + F, \\ \dot{u} &= (1-t)^{-1}\bar{v}(t), \end{aligned}$$



после подстановки в ее правую часть замкнутой управлением (5.9), на промежутке  $[0, 99]$  с начальными данными:

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad d(0) = 0.$$

В процессе численного моделирования находилось решение задачи (5.1), (5.2) при  $N = 45$ ,  $\bar{x}_1 = -0.1$  рад,  $\bar{x}_2 = -0.1$  рад/сек,  $\bar{\alpha} = 0.1$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $L = 10$  м,  $M = 20$  кг,  $m_0 = 1$  кг,  $F = 0.1$ ,  $g = 9.8$ .

На фиг. 1 представлены графики функций фазовых координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и управления  $u(t)$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Простота реализации алгоритма обусловлена тем, что наиболее трудоемкая ее часть, связанная с построением вспомогательной системы и стабилизацией ее линейной части, может быть выполнена аналитическими методами и реализована средствами компьютерной алгебры. Результаты решения задачи управления роботом-манипулятором и ее численное моделирование показывают, что предложенный в работе метод может быть применен при решении конкретных практических задач с использованием персональных ЭВМ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Каллман Р., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории управления. М.: Наука, 1972.
4. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
5. Walczak S. A note on the controllability of nonlinear systems // Math. Systems Theory. 1984. V. 17. № 4. P. 351–356.
6. Лепс Н.Л. Геометрический метод исследования управляемости билинейных систем второго порядка // Автоматика и телемехан. 1984. № 1. С. 19–25.
7. Комаров В.А. Синтез ограниченных управлений для линейных неавтономных систем // Автоматика и телемехан. 1984. № 10. С. 44–50.
8. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемехан. 1984. № 6. С. 30–36.
9. Dirk A. Controllability for polynomial systems // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. 1984. V. 63. P. 542–545.
10. Крищенко А.П. Управляемость и множество достижимости нелинейных стационарных систем // Кибернетика и вычисл. техн. (Киев). 1984. № 62. С. 3–10.
11. Комаров В.А. Оценка множества достижимости для линейных систем // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1984. № 1. С. 83–87.
12. Huashu O. On the controllability of nonlinear control system // Comput. and Math. 1985. V. 10. № 6. P. 441–451.
13. Furi M., Zeza P. Topological methods for global controllability of nonlinear systems // J. Optim. Theory and Appl. 1985. V. 45. № 2. P. 231–256.
14. Balachandran K. Global and local controllability of nonlinear systems // IEEE Proc. 1985. № 1. P. 14–17.
15. Пантелеев В.П. Об управляемости нестационарных линейных систем // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 4. С. 623–628.
16. Коробов В.И. Почти полная управляемость линейных стационарных систем // Укр. Матем. ж. 1986. Т. 38. № 2. С. 163–169.
17. Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г. Критерии управляемости нелинейных систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 18–22.
18. Константинов Г.И., Сидоренко Г.В. Внешние оценки множеств достижимости управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1986. № 3. С. 28–34.
19. Черноусько Ф.Л., Янгин А.А. Аппроксимация множеств достижимости при помощи пересечения и объединения эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1987. № 4. С. 145–152.
20. Айсагалиев С.А. Управляемость нелинейных систем управления // Изв. АН Каз. ССР. Физ. матем. 1987. № 3. С. 7–10.
21. Benzaid Z. Global null controllability of perturbed linear periodic systems // JEE Trans. Autom. Contr. 1987. V. 32. № 7. P. 623–625.
22. Леваков А.А. К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. ур-ния. 1987. V. 23. № 5. С. 798–806.

23. *Лотов А.В.* О внешних оценках построения множества достижимости для нелинейных управляемых систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 4. С. 483–493.
24. *Айсагалиев С.А.* К теории управляемости нелинейных систем // Автоматика и телемехан. 1991. № 2. С. 35–41.
25. *Sontag E.D.* Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems. New York: Springer, 1998.
26. *Мастерков Ю.В.* К вопросу о локальной управляемости в критическом случае // Изв. вузов. Матем. 1999. № 2. Вып. 441. С. 68–74.
27. *Попова С.Н.* К свойству локальной достижимости линейной управляемой системы // Дифференц. ур-ния. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
28. *Бердышев Ю.И.* О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 4. С. 22–26.
29. *Korobov V.I.* Geometric criterion for controllability under arbitrary constraints on the control // J. Optim. Theory Appl. 2007. V. 134. Issue 2. P. 161–176.
30. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010.
31. *Kvitko A., Yakusheva D.* On one boundary problem for nonlinear stationary controlled system // International Journal of Control. 2019. V. 92. Issue 4. P. 828–839.
32. *Смирнов Е.Я.* Стабилизация программных движений. Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, Санкт-Петербург, 1997.
33. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
34. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.

---

---

**ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

---

---

УДК 519.65

**A MODIFIED TRAPEZOIDAL BROYDEN'S METHOD  
FOR NONLINEAR EQUATIONS<sup>1)</sup>**

© 2021 г. Song WU<sup>1</sup>, Hai Jun WANG<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou, 221116, P. R. China*

*\*e-mail: hjwcumt@163.com*

Поступила в редакцию 28.06.2019 г.  
Переработанный вариант 06.06.2020 г.  
Принята к публикации 16.12.2020 г.

**Модифицированный трапецеидальный метод Бройдена для решения нелинейных уравнений.** Разработана и реализована альтернативная аппроксимация матрицы Якоби для этого метода. Разработанный метод имеет большую эффективность благодаря снижению числа итераций и разрешению аппроксимативной матрицы в точках сингулярности. Дана оценка свойств локальной сходимости метода и представлены численные результаты, иллюстрирующие его эффективность. Библ. 16. Фиг. 5. Табл. 4.

**Ключевые слова:** модифицированный трапецеидальный метод Бройдена.

**DOI:** 10.31857/S0044466921040104

---

<sup>1)</sup>Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 532.59:534.1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ  
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ДВИЖУЩИМСЯ  
НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ<sup>1)</sup>

© 2021 г. В. В. Булатов<sup>1,\*</sup>, Ю. В. Владимиров<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия

\*e-mail: [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)

\*\*e-mail: [vladimyura@yandex.ru](mailto:vladimyura@yandex.ru)

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.  
Переработанный вариант 04.06.2020 г.  
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Рассматривается задача о построении аналитических решений, описывающих поля внутренних гравитационных волн от нелокального источника возмущений, движущегося на поверхности стратифицированной среды конечной глубины. Для модельной формы источника с радиальной симметрией в линейном приближении получены аналитические решения, выражающиеся через собственные функции основной вертикальной спектральной задачи внутренних волн. Предложены два метода представления решения, в том числе на основе теоремы Миттаг–Леффлера о разложении мероморфной функции. Приведены результаты расчетов волновых полей для различных режимов волновой генерации, иллюстрирующих два метода аналитического представления волнового поля. Библ. 18. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, теорема Миттаг–Леффлера, волновые моды.

**DOI:** 10.31857/S0044466921040037

ВВЕДЕНИЕ

Важным механизмом возбуждения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах является их генерация источниками возмущений различной физической природы: естественного (движущиеся возмущения атмосферного давления, обтекание неровностей рельефа океана, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров (см. [1]–[5]). В частности, касательное напряжение ветра, создаваемое движущимся ураганом, может формировать на океанической поверхности структуру в виде движущейся воронки с почти радиальной симметрией. Как показывают результаты мониторинга Мирового океана, движущиеся возмущения морской поверхности являются одним из основных природных механизмов генерации интенсивных ВГВ (см. [4], [5]). Аналитические результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные представления требуют разработки численных и асимптотических методов их исследования. При математическом моделировании генерации ВГВ, возбуждаемых нелокальными источниками возмущений, наиболее распространенными являются два способа (см. [6], [7]). Первый заключается в численном решении системы уравнений гидродинамики, описывающей ВГВ, к недостаткам которого следует отнести ограниченность области пространства, в котором возможно численное решение задачи (см. [8]–[10]). При изучении дальнего распространения ВГВ прямые численные расчеты нецелесообразны, так как в дальней зоне волновые поля относительно малы по амплитуде и обычно их можно описать посредством линейных уравнений. Кроме того, эффекты вязкости, вращения среды и ее сжимаемости пренебрежимо малы и не сказываются на дальнем распространении ВГВ (см. [1]–[3], [6], [7]). Поэтому волновое поле в дальней зоне можно описать сравнительно простыми аналитическими формулами. Распространение диспергирующих ВГВ в стратифицированных сре-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00111А.

дах и создаваемые ими волновые картины на больших расстояниях от источников возмущений (много больших его характерных размеров) практически не зависят от их формы и определяются только законом дисперсии и скоростью источника. Поэтому второй способ состоит в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму нелокального источника, функцией, имеющей достаточно простое аналитическое представление (см. [11]–[14]). Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих поля ВГВ, возбуждаемых движущимся нелокальным модельным источником возмущений в слое стратифицированной среды конечной толщины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается задача о полях ВГВ, возникающих при движении нелокального источника возмущений в слое невязкой стратифицированной среды толщины  $H$ . Источник движется на поверхности среды  $z = 0$  с постоянной скоростью  $V$  в горизонтальном направлении оси  $x$ , ось  $z$  направлена вверх, форма нелокального источника описывается функцией  $s(x, y)$ . Рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В движущейся системе координат и в приближении Буссинеска имеем следующее уравнение для малых возмущений вертикальной компоненты скорости  $W(x, y, z)$  (см. [1], [6], [7]):

$$V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + N^2(z) \Delta W = 0, \tag{1.1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz},$$

где  $N^2(z)$  – квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести), которая далее предполагается постоянной,  $N^2(z) = N^2 = \text{const}$ ,  $\rho_0(z)$  – невозмущенная плотность среды по глубине,  $g$  – ускорение свободного падения. Линеаризованное граничное условие на поверхности имеет вид (см. [2], [3], [6], [7])

$$W = V \frac{\partial s(x, y)}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{1.2}$$

На дне используется условие непротекания

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = -H. \tag{1.3}$$

В безразмерных координатах и переменных  $x^* = \pi x/H$ ,  $y^* = \pi y/H$ ,  $z^* = \pi z/H$ ,  $M = V/c$ ,  $W^* = W/c$ ,  $c = NH/\pi$  уравнение (1.1) и граничные условия (1.2), (1.3) переписутся следующим образом (индекс “\*” далее опускается):

$$M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + \Delta W = 0, \tag{1.4}$$

$$W = M \frac{\partial s(x, y)}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{1.5}$$

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = -\pi. \tag{1.6}$$

Относительно функции  $s(x, y)$  можно сделать следующие предположения: эта функция обладает цилиндрической симметрией  $s(x, y) = s(\rho)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho s(\rho) d\rho < \infty$ . Далее задача будет решаться методом Фурье. Для аналитического описания формы нелокального источника необходимо выбрать такую функцию  $s(\rho)$  и двойное преобразование Фурье (с точностью до множителя  $2\pi$ , совпадающее с преобразованием Фурье–Бесселя), которое имеет особые точки только в виде простых полюсов. В этом случае появляется возможность построить и исследовать аналитические представления решений для функции  $W(x, y, z)$ . Более сложная структура особых точек Фурье образа функции  $s(\rho)$ , например, наличие точек ветвления, не позволяет решить задачу аналитически. Рассмотрим семейство функций  $g_m(r, a) = (r/2a)^m K_m(ar)/\Gamma(m + 1)$ , где  $K_m(\tau)$  – функция порядка МакДональда,  $\Gamma(\tau)$  – гамма-функция Эйлера. Функции  $g_m(r, a)$  имеют непре-

рывные производные до порядка  $2m - 1$  включительно. Преобразование Фурье–Бесселя для функции  $g_m(r, a)$  имеет вид

$$G_m(k, a) = 2\pi \int_0^\infty g_m(r, a) r J_0(kr) dr = (k^2 + a^2)^{-m-1},$$

где  $J_0(kr)$  – функция Бесселя нулевого порядка (см. [15], [16]). Так как искомое решение  $W(x, y, z)$  должно иметь непрерывные вторые производные, то далее в качестве функции, описывающей форму нелокального источника, будем использовать следующее выражение:  $s(\rho) = g_2(\rho, a) = -s_0 \rho^2 a^2 K_2(a\rho)/2$ , где параметр  $s_0$  – максимальная высота (вертикальный масштаб) нелокального источника ( $s(0) = -s_0$ ),  $a$  – характерная ширина (горизонтальный масштаб) этого источника. С ростом значения параметра  $a$  характерная ширина источника уменьшается. Выбор этой модельной функции позволяет описать генерацию ВГВ движущейся областью возмущения атмосферного давления, которая, как правило, обладает достаточно выраженной радиальной симметрией (см. [5], [9], [11]).

Решение (1.4)–(1.6) будем искать в виде интеграла Фурье

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu. \quad (1.7)$$

Тогда для определения функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$  необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 (\mu^{-2} M^{-2} - 1) \varphi = 0, \quad (1.8)$$

$$\varphi = -i\mu MS(k) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (1.9)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = -\pi. \quad (1.10)$$

Здесь  $k^2 = \mu^2 + \nu^2$ ,  $S(k)$  – преобразование Фурье–Бесселя от функции  $s(\rho)$ :

$$S(k) = 2\pi \int_0^\infty \rho s(\rho) J_0(k\rho) d\rho = -8\pi a^4 s_0 (k^2 + a^2)^{-3}.$$

Решение (1.8)–(1.10) имеет вид

$$\varphi(\mu, \nu, z) = iA(\mu, \nu) \frac{\sin(kr(z + \pi))}{\sin(kr\pi)}, \quad A(\mu, \nu) = -\mu MS(k), \quad r = (\mu^{-2} M^{-2} - 1)^{1/2}. \quad (1.11)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Далее подставим (1.11) в (1.7) и сместим контур интегрирования на комплексной плоскости переменной  $\mu$  вверх на величину  $\varepsilon > 0$ . Контур интегрирования необходимо сдвинуть для того, чтобы удовлетворить условию излучения, т.е. отсутствию волн уходящих вперед от источника возмущений. Разложение функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$ , определяемой выражением (1.11), в ряд по собственным функциям краевой задачи (1.8) с нулевыми граничными условиями при  $z = 0, -\pi$  имеет вид

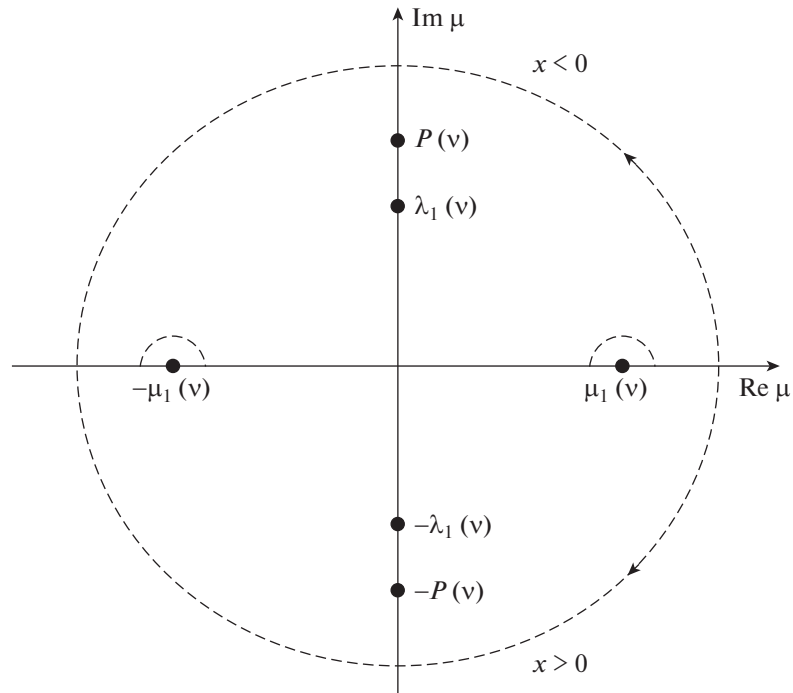
$$\varphi(\mu, \nu, z) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\mu, \nu, z), \quad R_m(\mu, \nu, z) = \frac{2iA(\mu, \nu)}{\pi} \frac{m \sin mz}{k^2 r^2 - m^2}. \quad (2.1)$$

Ряд (2.1) сходится к  $\varphi(\mu, \nu, z)$  поточечно (по переменной  $z$ ), но неравномерно, так как не выполняется граничное условие (1.9) при  $z = 0$ . По  $m$  ряд (2.1) сходится условно и медленно, так как общий член ряда имеет порядок  $1/m$ . Далее для исследования функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$ , определяемой выражением (1.11), используем теорему Миттаг–Леффлера о разложении мероморфной (по переменной  $kr$ ) функции для случая простых полюсов (см. [17]):

$$\varphi(\mu, \nu, z) = \frac{2iA(\mu, \nu)}{\pi} \left( \frac{z + \pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mz}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin mz}{k^2 r^2 - m^2} \right). \quad (2.2)$$

Выражение (2.2), объединив в котором второе и третье слагаемые, можно представить в виде

$$\varphi(\mu, \nu, z) = \frac{iA(\mu, \nu)(z + \pi)}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(\mu, \nu, z), \quad Q_m(\mu, \nu, z) = \frac{2iA(\mu, \nu)}{\pi} \frac{k^2 r^2 \sin mz}{m(k^2 r^2 - m^2)}. \quad (2.3)$$



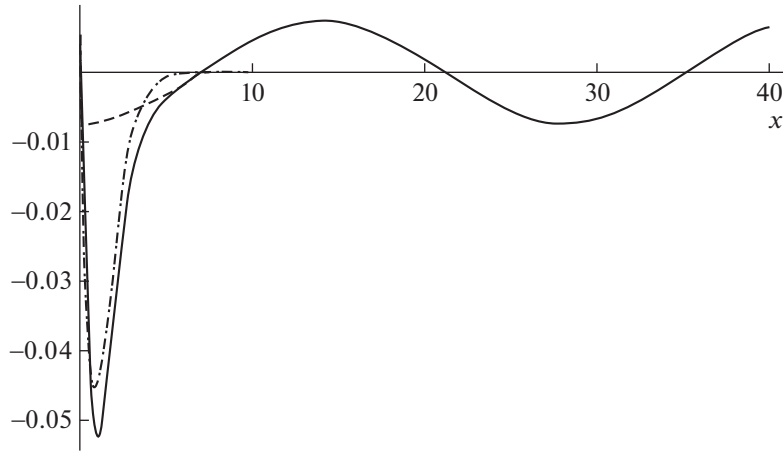
Фиг. 1. Контур интегрирования в комплексной плоскости переменной  $\mu$ .

Первое слагаемое в (2.3) – простейшая линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.9), (1.10), второе слагаемое – взято с обратным знаком разложение в ряд по тригонометрическим функциям, третье слагаемое – это ряд (2.1). Ряд (2.3) также может быть получен из ряда (2.2) с помощью метода Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов (см. [18]). Этот метод широко используется в задачах о генерации полей ВГВ источниками различной физической природы в стратифицированных средах (см. [6], [7]).

Для проведения интегрирования по переменной  $\mu$  в (1.7) необходимо исследовать поведение полюсов функции  $\phi(\mu, \nu, z)$ . Эта функция имеет следующие полюса по  $\mu$ . Две серии полюсов,  $\mu = \pm\mu_m(\nu)$ ,  $\lambda = \pm i\lambda_m(\nu)$ , которые определяют соответствующие дисперсионные зависимости:  $\mu_m(\nu) = (0.5(B_m - C_m))^{1/2}$ ,  $\lambda_m(\nu) = (0.5(B_m + C_m))^{1/2}$ , где  $B_m = ((m^2 - M^{-2} + \nu^2)^2 + 4\nu^2 M^{-2})^{1/2}$ ,  $C_m = m^2 - M^{-2} + \nu^2$ . Также существует пара полюсов  $\mu = \pm p(\nu)$ ,  $p(\nu) = (a^2 + \nu^2)^{1/2}$ , которые зависят только от фурье-образа функции  $s(\rho)$ , определяющей форму нелокального источника. Вычеты в точках  $\mu = \pm\mu_m(\nu)$ ,  $\lambda = \pm i\lambda_m(\nu)$  одинаковы для выражений (2.1), (2.3), вычеты в точках  $\pm ip(\nu)$  – различные для этих выражений.

Проведем почленное интегрирование по переменной  $\mu$  в (1.7). Контур интегрирования необходимо замкнуть вниз при  $x > 0$  и вверх при  $x < 0$ . На фиг. 1 штриховой линией изображен контур интегрирования и качественная картина расположения полюсов для первой волновой моды  $n = 1$ . Все дальнейшие вычисления будут приведены для следующих значений безразмерных параметров:  $M = 3.05$ ,  $S_0 = 0.046$ ,  $a = 2.44$ . В размерных единицах типичная глубина океана равна  $H \approx 10^3$  м, тогда вертикальный масштаб нелокального источника будет составлять десятки метров, горизонтальный масштаб будет равен нескольким сотням метров и скорость движения источника – десятки сантиметров в секунду. Поэтому использованные для численных расчетов характерные значения параметров  $M$ ,  $S_0$ ,  $a$  полностью соответствуют наблюдаемым в Мировом океане пространственно-временным характеристикам областей возмущения морской поверхности от движущихся тайфунов, генерирующих интенсивные ВГВ (см. [4], [11]).

Действительные полюса  $\mu_m(\nu)$  растут с увеличением номера моды  $m$  и ограничены:  $\mu_1(\nu) < \mu_2(\nu) < \dots < N/V$ . Мнимые полюса  $\lambda_m(\nu)$  неограниченно растут с увеличением номера моды  $m$  и  $\lambda_m(\nu) \approx m$  при больших значениях  $m$ . Для данных параметров задачи значение  $p(\nu)$  на-



Фиг. 2. Подынтегральная функция и вклад полюсов в зависимости от горизонтальной координаты  $x$ .

ходится в интервале  $\lambda_2(\nu) < p(\nu) < \lambda_3(\nu)$ . При параметрах, определяющих иные вертикальные и горизонтальные масштабы нелокального источника возмущений, значения  $p(\nu)$  находятся в других интервалах, и вклад от этих полюсов может заметно влиять на структуру полного волнового поля особенно в ближней зоне.

Обозначим далее

$$D_m(\nu, z, x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(\mu, \nu, z) d\mu, \quad P_m(\mu, \nu, z) = R_m(\mu, \nu, z) \exp(-i\mu x). \tag{2.4}$$

При  $x > 0$  имеем

$$D_m(\nu, z, x) = -2\pi i \left( \operatorname{res}_{-\mu_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{\mu_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{-i\lambda_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{-ip_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) \right).$$

При  $x < 0$  имеем

$$D_m(\nu, z, x) = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{-i\lambda_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{ip_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) \right).$$

Сумма вычетов в действительных полюсах  $\mu = \pm\mu_m(\nu)$  равна

$$\frac{i\mu_m^3(\nu)mM^2 A(\mu_m(\nu), \nu)}{\pi(\mu_m^4(\nu)M^2 + \nu^2)} \cos(\mu_m(\nu)x) \sin(mz).$$

Вычеты в точках  $\lambda = \pm i\lambda_m(\nu)$  равны

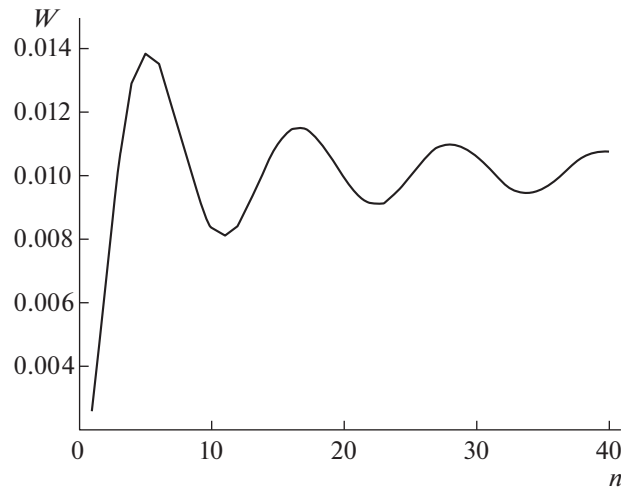
$$\frac{\lambda_m^3(\nu)mM^2 A(\pm i\lambda_m(\nu), \nu)}{\pi(\lambda_m^4(\nu)M^2 + \nu^2)} \exp(-\lambda_m(\nu)x) \sin(mz).$$

Аналитические выражения для вычетов в точках  $\pm ip(\nu)$  в силу их громоздкости не приводятся. На фиг. 2 представлены результаты расчетов главного значения интеграла (2.4) при  $m = 1$ ,  $\nu = 0.9$ ,  $z = -\pi/2$  (сплошная линия), вклада действительных вычетов (штриховая линия) и вклада мнимых вычетов (штрихпунктирная линия). Из приведенных результатов следует, что при больших значениях  $x$  основной вклад вносят действительные вычеты, при малых значениях  $x$  — мнимые вычеты. Тогда решение  $W(x, y, z)$  задачи (1.1)–(1.3) можно представить в виде суммы волновых мод:

$$W(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x, y, z), \tag{2.5}$$

$$W_m(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} D_m(\nu, z, x) \exp(-i\nu y) d\nu.$$





Фиг. 3. Зависимость  $W(x, y, z)$  от числа суммируемых волновых мод.

При больших значениях  $x, y$  (вдали от нелокального источника возмущений) интегралы (2.5) можно вычислить методом стационарной фазы (см. [6], [7], [14]). Решение для вертикальной компоненты скорости ВГВ можно также представить в другом виде. Возьмем обратное преобразование Фурье от (2.3). Тогда, исходя из аналитического выражения для функции  $s(\rho)$  и учитывая соотношение

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} S(k) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu = s(\rho),$$

имеем

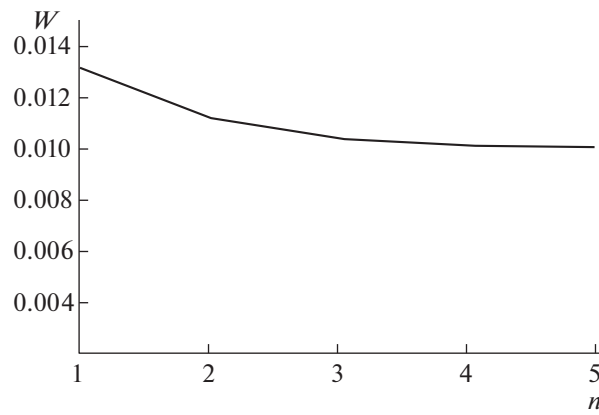
$$\frac{-i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \mu MS(k) \frac{z + \pi}{\pi} \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu = \frac{xMs'(\rho)(z + \pi)}{\pi\rho}.$$

Отсюда можно получить

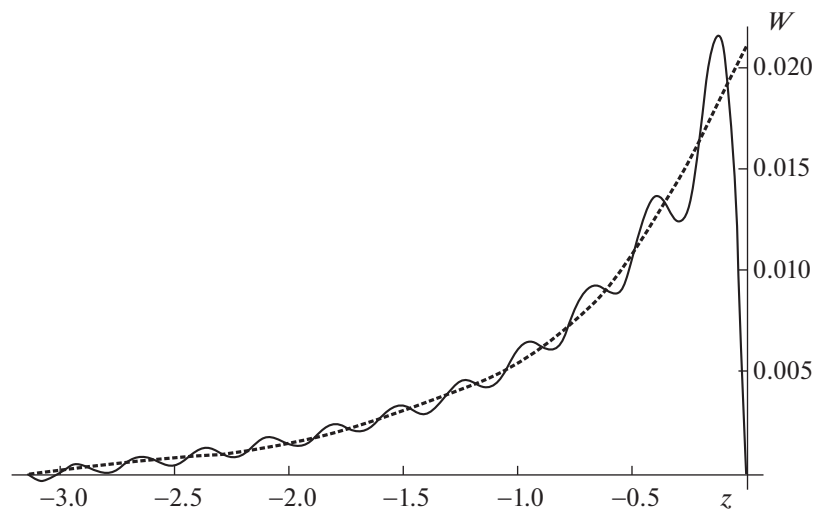
$$W(x, y, z) = \frac{xMs'(\rho)(z + \pi)}{\pi\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, y, z), \tag{2.6}$$

$$w_m(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu,$$

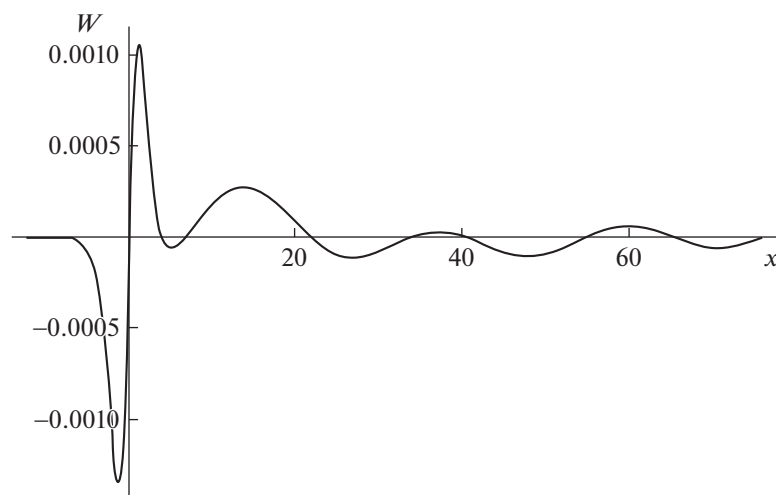
где слагаемые  $w_m(x, y, z)$  вычисляются аналогично  $W_m(x, y, z)$ , за исключением вычетов в точках  $\pm ip(\nu)$ . На фиг. 3, 4 изображены графики (полигоны) зависимости полного решения  $W(x, y, z)$  от значений  $n$ . Параметр  $n$  определяет общее число суммируемых волновых мод в выражениях (2.5), (2.6). Численные расчеты проводились при значениях  $x = 1, y = 0.5, z = -0.55$  для двух способов представления решения, определяемых соответственно выражениями (2.5) (фиг. 3) и (2.6) (фиг. 4). Из представленных результатов следует, в частности, что точность порядка 1% достигается при  $n = 4$  для второго метода (фиг. 4), в то время как эта же точность для первого метода достигается при  $n = 40$  (фиг. 3). На фиг. 5 приведены зависимости  $W(x, y, z)$  от вертикальной координаты  $z$  при  $x = 1, y = 0.5$ : сплошная линия – расчеты по формулам (2.5) при  $n = 23$ , пунктир – расчеты по формулам (2.6) при  $n = 4$ . На фиг. 6 изображены зависимости  $W(x, y, z)$  от горизонтальной координаты  $x$ , рассчитанные по формулам (2.6) при  $z = -0.6, y = 2.2, n = 4$ . Как показывают численные расчеты, при больших значениях  $x, y$  основной вклад в полное поле  $W(x, y, z)$  вносят слагаемые, отвечающие действительным полюсам, вклад от мнимых полюсов, описывающих форму нелокального источника, экспоненциально мал. Вблизи нелокального источника возмущений основной вклад в полное поле  $W(x, y, z)$  вносят слагаемые, отвечающие мнимым полюсам, и в ближней зоне представление решения в виде (2.6) обеспечивает более быструю сходимость ряда к искомому решению.



Фиг. 4. Зависимость  $W(x, y, z)$  от числа суммируемых волновых мод.



Фиг. 5. Зависимость  $W(x, y, z)$  от вертикальной координаты  $z$ .



Фиг. 6. Зависимость  $W(x, y, z)$  от горизонтальной координаты  $x$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о построении аналитических решений, описывающих генерацию ВГВ от нелокального источника возмущений, который движется на поверхности стратифицированной среды конечной глубины. Использовано модельное распределение формы источника, обладающее радиальной симметрией, которое качественно верно описывает основные пространственно-временные характеристики природных источников генерации ВГВ в океане. Полученное решение представляет собой сумму волновых мод. Изучены два способа аналитического представления решения. Первый метод – разложение решения в ряд по собственным функциям основной спектральной задачи уравнения внутренних волн. Второй метод основан на теореме Миттаг–Леффлера о разложении мероморфных функций для случая простых полюсов. Приведены результаты численных расчетов ВГВ, иллюстрирующих два метода аналитического представления решений. Показано, что поля ВГВ на больших расстояниях от движущегося нелокального источника (много больших его размеров) практически не зависят от его формы и определяются законом дисперсии и скоростью источника. Форма источника определяет свойства возбуждаемых волновых полей только в ближней зоне.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001. 406 p.
2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: Introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2010. 394 p.
4. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
5. *Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V., Velarde M.G. (Eds.)* The ocean in motion. Springer Oceanography. Berlin: Springer Inter. Publ. AG, 2018. 625 p.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* A general approach to ocean wave dynamics research: modelling, asymptotics, measurements. М.: ОнтоПринт, 2019. 587 с.
8. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 720. P. 104–139.
9. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2019. № 3. С. 83–97.
10. *Lecoanet D., Bars M.Le, Burns K.J., Vasil G.M., Brown B.P., Quataert E., Oishi J.S.* Numerical simulations of internal wave generation by convection in water // *Phys. Rev. E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics.* 2015. V. 9. P. 1–10.
11. *Voelker G.S., Myers P. G., Walter M., Sutherland B. R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // *Dynam. Atm. Oceans.* 2019. V. 86. P. 16–133.
12. *Wang H., Chen K., You Y.* An investigation on internal waves generated by towed models under a strong halocline // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29. P. 065104.
13. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // *Успехи физ. наук.* 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
14. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Vladimirov I.Yu.* Far fields of internal gravity waves from a source moving in the ocean with an arbitrary buoyancy frequency distribution // *Russian J. Earth Sci.* 2019. V. 19. № 5. P. ES5003.
15. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344 с.
16. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2-х частях. М.: URSS, 2015. 864 с.
17. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного М.: Наука, 1989. 480 с.
18. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Лань, 2002. 408 с.

УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.634

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ  
НАНОПЛАЗМОНИКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА  
ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ (ОБЗОР)<sup>1)</sup>

© 2021 г. Ю. А. Еремин<sup>1,\*</sup>, А. Г. Свешников<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1, стр. 52, МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, Россия

<sup>2</sup> 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

\*e-mail: eremin@cs.msu.ru

\*\*e-mail: sveshnikov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 24.09.2020 г.  
Переработанный вариант 24.09.2020 г.  
Принята к публикации 16.11.2020 г.

Представлен обзор работ по проблеме влияния квантового эффекта нелокального экранирования на характеристики полей в задаче дифракции поля плоской волны на наноразмерных структурах, в том числе расположенных вблизи прозрачной подложки. На основе метода Дискретных источников строятся эффективные компьютерные модели анализа подобных структур. Исследование влияния эффекта нелокальности осуществляется в рамках модели Обобщенного нелокального отклика. Рассматриваются характеристики полей несферических слоистых наночастиц, расположенных как в активной среде, так и на поверхности прозрачной подложки. Показано, что эффект нелокальности оказывает существенное влияние на оптические характеристики в дальней и ближней зонах. Установлено, что учет эффекта нелокальности приводит к снижению интенсивности плазмонного резонанса до 2.5 раз при небольшом сдвиге в область коротких длин волн. В случае наличия подложки рассмотрены вопросы возбуждения частиц, как распространяющейся, так и неизлучающей волной. Показано, что наибольший эффект проявляется для несферических геометрий слоистых частиц, располагающихся в области неизлучающих волн. Библ. 104. Фиг. 10.

**Ключевые слова:** метод Дискретных источников, математические модели, квантовая наноплазмоника, эффект нелокальности, неизлучающие волны.

**DOI:** 10.31857/S0044466921040049

ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные плазмоны, которые являются следствием гибридизации между поверхностными зарядами и электромагнитными полями, инициировали появление предмета плазмоники как независимой части нанофотоники (см. [1], [2]). Благодаря плазмонным эффектам, стало возможным получать сверхвысокое усиление поля и его концентрацию в объемах, на порядки превышающих рэлеевский предел разрешающей способности оптического оборудования. В результате появился широкий спектр практических приложений, таких как наноразмерные фотонные схемы (см. [3]), оптические усилители (см. [4]), спектроскопия комбинационного рассеяния поверхности (см. [5]), биосенсирование (см. [6]) и др.

Оптические свойства поверхностных плазмонов очень успешно описываются на основе системы уравнений Максвелла. Это описание предполагает классическое поведение как электронов, так и электромагнитных полей в металлических наноструктурах. Наиболее привлекательная особенность поведения наноплазмонных частиц состоит в том, что частицы меньшего размера могут реализовывать усиление поля большее, чем частицы большего диаметра (см. [7]). По мере развития технологического прогресса размер элементов плазмонных структур неуклонно уменьшался. Это привело к тому, что классического описания поведения электромагнитного

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00558) и Московского центра Фундаментальной и прикладной математики (проект “Моделирование элементов плазмонного нанолазера с учетом квантовой нелокальности”).

поля оказалось недостаточно, так как стали проявляться такие квантово-механические явления, как нелокальность и туннельные эффекты, а также двойственность волна—частица. Учет этих эффектов создает много новых возможностей для расширения границ фундаментальной науки и прикладных квантовых технологий (см. [8]).

Металлодиэлектрические структуры привлекают все более пристальное внимание, благодаря совершенствованию технологии их синтеза, возникшей в конце XX века (см. [9]). Такие структуры обеспечивают большую гибкость в управлении плазмонным резонансом (ПР), а также в достижении желаемого усиления электромагнитных полей. Это происходит в результате появления дополнительных параметров по сравнению с однородными частицами. Действительно, в случае однородных частиц манипулирование положением ПР в частотной области и его амплитудой достигается за счет размеров, материала и формы частиц. В то время, как при использовании гибридных частиц появляется дополнительный слой, который существенно расширяет возможности управления. К подобным структурам относятся, в частности, многослойные сферические и сфероидальные оболочки (см. [10]), которые в последние годы представляют повышенный интерес для исследователей в области наноплазмоники. В частности, частицы ядро—оболочка, построенные из композитных наноматериалов, стали весьма востребованными для катализа (см. [11]), сенсоров (см. [12]), фотометрического усиления (см. [13]) и солнечных элементов (см. [14]).

Фундаментальной научной проблемой в рамках квантовой плазмоники является проблема разработки и реализации наноразмерных источников когерентного излучения. Идея состоит в том, чтобы использовать плазмонные поля вместо фотонных, применяемых в обычных лазерах. Дело в том, что плазмонные поля позволяют преодолеть дифракционное ограничение размера лазера. Плазмонные нанолазеры, основанные на использовании слоистых 3D резонаторов, имеют преимущества наноразмера, низкого энергетического порога и супермалого времени отклика (см. [15]). Плазмонный нанолазер (ПН) носит название SPASER (Surface Plasmon Amplification by Simulated Emission of Radiation, далее — “спасер”) (см. [16], [17]). Первыми, кто предложил концепцию лазерного резонатора, основанного на поверхностных плазмонах, взаимодействующих с усиливающей средой, были Сударкин и Демкович (см. [18]). Теория спасера была впервые разработана Стокманом и Бергманом в 2003 г. (см. [19]). Первая демонстрация ПН была реализована Ногиновым и соавт. (см. [20]). Группа Ногинова в действующем прототипе спасера использовала в качестве резонатора одиночную золотую наночастицу сферической формы диаметром 14 нм, заключенную в кварцевую оболочку и расположенную на поверхности стеклянной призмы. Одна из возможных конструкций спасера состоит из наночастиц благородного металла, выступающих в роли нанорезонаторов, заключенных в усиливающую среду (см. [15]). В настоящее время продолжаются многочисленные исследования и разработки различных перспективных схем плазмонных нанолазеров (см. [17], [21]).

При изучении оптических свойств металлодиэлектрических плазмонных наноструктур основное внимание уделялось теоретическому анализу их спектральных свойств в дальнем поле, особенно таких характеристик, как рассеяние и экстинкция. Известно, что из-за небольшого размера этих структур по сравнению с длиной оптической волны дипольное приближение для полей представляется достаточным при описании полей в дальней зоне, что делает теоретическое исследование относительно простым. Однако существуют некоторые важные приложения, такие как молекулярная флуоресценция (см. [22]), химический катализ (см. [11]), фототермическое усиление (см. [23]) и 3D резонатор ПН (см. [17]), которые существенно определяются взаимодействием с ближним полем плазмонных структур. В этих случаях требуются более продвинутые теоретические методы для моделирования происходящих физических процессов, особенно в ближнем поле.

В рамках классического описания полей предполагается, что смещение в каждой точке зависит от приложенного электрического поля в той же точке. В этом случае среда описывается диэлектрической проницаемостью, как функцией, зависящей только от частоты возбуждающего поля. Дело в том, что когда характерный размер металлических наночастиц становится сравнимым с длиной волны Ферми электронов в этом металле (~5 нм для золота и серебра), возникает так называемая пространственная нелокальность металла (см. [24]). В этом случае электрическое поле нелокально зависит от плотности тока, индуцированного внешним полем, всюду внутри частицы. Последнее обстоятельство ведет к тому, что для частиц размером менее 10 нм требуется полное квантово-механическое описание. Например, Time-dependent density functional theory (TDDFT) или теория функционала плотности, зависящей от времени, которая описывает коллективное движение электронов, моделируя поведение каждого электрона на основе уравне-

ния Шрёдингера. Она хорошо подходит для объяснения экспериментальных результатов, но применима лишь к плазмонным частицам диаметром всего в несколько нанометров (см. [25]). Суть в том, что когда размер плазмонных структур становится меньше длины свободного пробега возбужденных электронов, столкновениями между электронами нельзя пренебрегать. Следовательно, движение проводящих электронов будет связано не только с полем, приложенным в данной точке, но также и с полями в других точках. Таким образом, проявляется эффект нелокальности (ЭН). С целью описания оптических свойств плазмонных наночастиц были разработаны различные методы, учитывающие квантовые эффекты, встроенные в рамки классической электромагнитной теории Максвелла. Они также известны как квазиклассические подходы. Одной из наиболее популярных моделей, рассматривающих подобные нелокальные эффекты, является гидродинамическая модель Друде (ГМД) (см. [26], [27]). ГМД описывает поведение электронов внутри металла как жидкость, подчиняющуюся законам гидродинамики. Подобное рассмотрение приводит к необходимости учета возникающего продольного электрического поля, которого нет в классической модели Максвелла ( $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ).

В рамках ГМД плазмонное затухание обычно моделируется зависящей от геометрии и материала частицы диэлектрической проницаемостью (см. [28]), в которой частота затухания корректируется в соответствии с уменьшенной средней длиной свободного пробега электронов. Однако последнее обстоятельство не позволяет непосредственно использовать ГМД для исследования частиц несферической формы. Подобное неудобство было преодолено в рамках разработанной модели Обобщенного нелокального отклика (ОНО) (см. [29]). В рамках модели ОНО зависящее от размера затухание плазмона возникает естественным образом, благодаря дополнительной составляющей гидродинамического описания индуцированных зарядов в металле, а именно, коэффициенту диффузии электронов. Модель ОНО в последнее время достигла значительных успехов в области нанопластики и наноплазмоники (см. [30]). Эта теория оказывается особенно эффективной для одновременного описания, как эффекта нелокального экранирования, так и затухания Ландау (см. [31]). В настоящее время квазиклассические модели квантовых эффектов в наноплазмонике являются наиболее востребованными, так как позволяют правильно описывать поведение оптических характеристик плазмонных наночастиц, не прибегая к чисто квантовым подходам, численные реализации которых обладают исключительно высокими требованиями к временным и компьютерным ресурсам.

Чтобы обеспечить надежные, точные и контролируемые результаты моделирования, численная электромагнитная модель должна учитывать все особенности взаимодействия в плазмонных структурах вплоть до измерения Ангстрема. Обзор различных численных методов анализа наноплазмонных структур можно найти в [32]–[34]. Среди наиболее популярных подходов следует отметить следующие:

1. Прямые методы, которые непосредственно применяются к системе уравнений Максвелла. В эту категорию включаются метод конечных разностей во временной области (FDTD) (см. [35]) и метод конечных элементов (FEM) (см. [36]), работающий в частотной области. Метод FDTD – один из самых популярных методов в нанопластики из-за простоты его концепции и способности охватывать широкий круг задач нанопластики. Сравнительно недавно была предложена модификация этого метода – разрывный метод Галеркина во временной области (DGTD). Он обладает несколькими привлекательными особенностями по сравнению с FDTD, такими как простота адаптации к сложной геометрии рассеивателя и составу материалов, более высокая точность и естественный параллелизм (см. [37]). FEM – еще один популярный метод, действующий в частотной области, который позволяет точно вычислять электромагнитные поля. В последние годы был предложен гибридный разрывный метод Галеркина (HDG) для решения задач в частотной области. Он вобрал в себя практически все преимущества разрывных методов Галеркина, вместе с тем, по вычислительной сложности он приближается к FEM (см. [38], [9]). Следует отметить, что перечисленные методы требуют дополнительных усилий для вычисления полей в дальней зоне.

2. Полуаналитические объемные методы: приближение дискретными диполями (DDA) (см. [34]) и метод объемных интегральных уравнений (VIE) (см. [33]). Данные методы также требуют дополнительных преобразований для вычисления полей в дальней зоне.

3. Полуаналитические поверхностные методы: метод поверхностных интегральных уравнений (SIE) (см. [33]), метод T-матриц (см. [40]), метод множественных мультиполей (MMP) (см. [41]) и метод дискретных источников (см. [42]).

В настоящее время имеется ряд статей, в которых описывается численная схема для анализа наноплазмонных структур с эффектом нелокальности (см. [43]–[46]). В то же время большин-

ство численных результатов получены лишь для двумерных конструкций, т.е. для случая задач рассеяния, обладающего цилиндрической симметрией. Исключение составляют работы, связанные с исследованием частиц, в том числе гибридных, обладающих сферической симметрией (см. [30]). Что касается произвольных геометрий рассеивателей, то имеющиеся численные результаты в большинстве получены с использованием пакета COMSOL Multiphysics (см. [47]).

Для плазмонных структур, состоящих из однородных или слоистых плазмонных частиц, поверхностные методы представляются наиболее подходящими (см. [33]). Причина в том, что включение нелокального отклика требует решения векторного уравнения Гельмгольца с очень большим волновым числом, которое может превосходить классическое на два порядка. Большинство прямых методов ограничиваются дискретизацией шага порядка 0.2 нм, что недостаточно для моделирования нелокального отклика. Фактически дискретизация определяется длиной волны Ферми внутри плазмонного материала, что требует дискретизации шага менее 1 Å для достижения разумной точности (см. [48]). Кроме того, поверхностные методы позволяют решать задачи рассеяния сразу для всего набора внешних возбуждений и не требуют дополнительных преобразований из ближней зоны в дальнюю для вычисления рассеянных полей.

## 2. КОНЦЕПЦИЯ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Анализ рассеяния электромагнитных волн локальными объектами и структурами широко применяется в электромагнетизме, оптике, компьютерной томографии, метрологии и многих других областях. Это обусловлено, главным образом, развитием и внедрением передовых технологий, а также разработкой новых подходов к обработке и интерпретации данных измерений. С теоретической точки зрения граничные задачи теории рассеяния относятся к классическим задачам математической физики, представляющим собой внешние краевые задачи для систем уравнений в частных производных, которые в достаточно общем виде могут быть записаны как

$$\hat{L}(U) = 0, \quad M \in D_e := R^3 / \bar{D}_i, \tag{2.1}$$

с граничным условием на поверхности локального рассеивателя  $D_i$ :

$$\hat{l}(U)|_{\partial D_i} = -\hat{l}(U^0)|_{\partial D_i}, \tag{2.2}$$

и условиям на бесконечности для обеспечения единственности.

$$\tag{2.3}$$

Здесь  $\hat{L}$  – матричный оператор граничной задачи рассеяния (система уравнений Гельмгольца в случае акустических волн, система Максвелла в электромагнитном случае, система уравнений упругости для задач сейсмологии и пр.),  $\hat{l}$  – матричный оператор граничных условий (условий сопряжения),  $\partial D_i \in C^{(1,\alpha)}$  – замкнутая гильбертова поверхность, ограничивающая односвязную область  $D_i$  и  $U^0$  – возбуждающее поле.

При рассмотрении граничных задач теории дифракции существенно, что рассеивающий объект расположен на значительном удалении от источников первичного поля. В этом случае возбуждающее поле на поверхности рассеивателя представляет собой аналитическую функцию вещественных переменных. Это обстоятельство позволяет использовать концепцию квазирешения для построения приближенного решения (см. [49]).

Суть концепции квазирешения в рассматриваемом случае заключается в построении аналитической конструкции для приближенного решения граничной задачи (2.1)–(2.3)  $U^\delta$ , которое должно удовлетворять аналитически уравнению (2.1) и условию на бесконечности (2.3), а граничное же условие на поверхности рассеивателя удовлетворяется приближенно, как

$$\|\hat{l}(U^\delta) + \hat{l}(U^0)|_{L_2(\partial D_i)}\| \leq \delta. \tag{2.4}$$

Последнее обстоятельство достигается с использованием соответствующего вычислительного алгоритма, позволяющего численно определять параметры выбранного представления для приближенного решения так, чтобы обеспечить заданную величину невязки на поверхности рассеивателя (2.4). Таким образом, граничная задача (2.1)–(2.3), первоначально сформулированная во всем пространстве, сводится к задаче аппроксимации полей на поверхности препятствия. Фундаментальную роль при решении задачи аппроксимации играет то обстоятельство, что выполнение условия (2.4) при достаточно малом  $\delta$  обеспечивает близость в равномерной метрике приближенного решения к точному всюду вне рассеивателя.

Действительно, в предположении существования единственного решения граничной задачи дифракции (2.1)–(2.3) существует соответствующий тензор Грина  $\vec{G}(M, M_0)$ , удовлетворяющий условию

$$\hat{L}(\vec{G}) = -\delta(M, M_0), \quad M_0 \in D_e,$$

и условиям не бесконечности. Откуда, используя формулу Грина, нетрудно получить соотношение корректности для граничной задачи рассеяния вида

$$\|U(M) - U^\delta(M)_{C(d)}\| \leq \text{const}(\hat{G})\hat{I}(U^\delta) + \hat{I}(U^0)_{L_2(\partial D_i)}, \quad (2.5)$$

где  $d$  – любой компакт в  $D_e$ . Итак, чтобы обеспечить сходимость приближенного решения к точному решению в равномерной метрике вне рассеивателя, достаточно аппроксимировать с произвольной точностью граничное условие (2.2) в метрике  $L_2$ . Таким образом, решение исходной граничной задачи дифракции сводится к задаче аппроксимации граничных значений внешнего возбуждения на поверхности локального препятствия  $D_i$ .

Вопрос об обеспечении выполнения условия (2.4) для произвольного  $\delta \rightarrow 0$  является центральным при построении приближенного решения. Это может быть реализовано различными способами. Большую роль в этом плане играет носитель множества дискретных источников. В [50], [51] подробно изложена схема построения полных и замкнутых систем МДИ, которые используются при решении задач рассеяния. Применительно к системе Максвелла в качестве носителя может быть выбрана замкнутая поверхность, тогда в качестве источников достаточно выбрать три ортогональных электрических диполя, распределенных по поверхности. В случае разомкнутой поверхности достаточной оказывается система тангенциальных электрических и магнитных диполей. При выборе в качестве носителя отрезка прямой “базисная” система функций будет представлять собой систему распределенных мультиполей низшего порядка (Lowest Order Distributed Multipoles) (см. [52]).

Предположим, что выбран какой-то носитель дискретных источников  $\gamma$ . Это может быть поверхность или ее часть, часть кривой в пространстве или отрезок прямой. Тогда представление для приближенного решения задачи (2.1)–(2.3) можно записать как

$$U^\delta(M) = \hat{T}_\gamma(M), \quad (2.6)$$

где  $\hat{T}_\gamma$  – некоторый линейный оператор, определенный на  $L_2(\gamma)$ . Нас будет интересовать его свойства в совокупности с граничным оператором (2.2) на поверхности  $\partial D_i$ , т.е. свойства оператора

$$\hat{I}\hat{T}_\gamma(P), \quad P \in \partial D_i. \quad (2.7)$$

Поскольку  $U^\delta(M)$  является аналитической функцией всюду вне носителя, то достаточно будет показать, что замыкание области значений оператора  $\hat{I}\hat{T}_\gamma$  совпадает с пространством  $L_2(\partial D_i)$ . Для этого достаточно показать, что ядро сопряженного к  $\hat{I}\hat{T}_\gamma$  оператора пусто (см. [53]). Обоснование последнего факта обычно достигается сведением к однородным уравнениям метода нулевого поля, которые, в свою очередь, эквивалентны однородной граничной задаче рассеяния (2.1)–(2.3), имеющей нулевое решение (см. [52], [54]).

Теоретические основы метода вспомогательных источников (Method of Auxiliary Sources – MAS) были заложены в работах В.Д. Купрадзе (см. [55]) и М.А. Алексидзе (см. [56]). Различные модификации этого подхода использовались в многочисленных практических приложениях, как в России, так и за рубежом. В приложении к двумерным задачам следует отметить работы Р. Заридзе [57], [58], К. Яшуура (K. Yasuura) [59], [60], И. Левиатана (Y. Leviatan) [61], [62] и Г. Фикиориса (G. Fikioris) [63]. В случае пространственных задач рассеяния, не обладающих осевой симметрией, этот подход более известен как метод множественных мультиполей (Multiple Multipole Method – MMP). Наряду с работами авторов [64], [65] здесь необходимо отметить школу Х. Хафнера (Ch. Hafner) (см. [66], [67]), который и ввел понятие MMP. С последними инновациями в области MAS–MMP можно ознакомиться в [68].

МДИ представляется одним из наиболее эффективных и гибких инструментов для построения квазирешения в задачах рассеяния волн (среди прочих численно-аналитических методов). В рамках МДИ приближенное решение строится как конечная линейная комбинация полей диполей и мультиполей с неизвестными амплитудами. Это представление аналитически удовле-



творяет уравнению (2.1) и условию излучения на бесконечности. Неизвестные амплитуды дискретных источников (ДИ) должны определяться из граничного условия (2.2). Одна из наиболее привлекательных особенностей МДИ заключается в гибком выборе полей ДИ, которые используются для построения приближенного решения. В рамках МДИ нет никаких ограничений на выбор источников поля. Поля ДИ должны лишь удовлетворять уравнению (2.1), условию излучения и образовывать полную и замкнутую функциональную систему на поверхности локального препятствия. В этом случае обеспечивается сходимость приближенного решения к точному решению, т.е. выполнение (2.4) для произвольного значения  $\delta$ . В силу (2.5) возможно контролировать погрешность приближенного решения, оценивая невязку поля на поверхности рассеивателя. Это обстоятельство приобретает особое значение в случае необходимости вычисления величины полного поля вблизи поверхности рассеивателя.

В случае рассмотрения осесимметричных структур наибольшее распространение получила система распределенных мультиполей низшего порядка, впервые реализованная в [69]. В этом случае источники как внешнего, так и внутреннего поля располагаются на отрезке оси симметрии внутри рассеивателя. Подобная схема позволяет эффективно исследовать вытянутые тела вращения (см. [70]). Причем для представления внутреннего поля используются функции Бесселя. В случае сплюснутых рассеивателей была предложена процедура продолжения полей с оси в комплексную плоскость по координате источника (см. [71]). Расположение источников в комплексной плоскости позволило рассматривать сплюснутые рассеиватели с большим соотношением осей (см. [72], [73]). Кроме того, при рассмотрении осесимметричных структур решение строится с учетом поляризации исходного излучения. Последнее означает, что оно имеет различный вид для Р и S поляризаций. Вместе с тем численная схема определения амплитуд ДИ организована таким образом, чтобы решать единую систему уравнений для Р и S поляризаций, кроме гармоник, не зависящих от азимутальной переменной (см. [74]).

Большое число работ по МДИ связано с рассмотрением осесимметричных структур в присутствии слоистой среды (см. [75]–[77]). В этом случае представление для решения в области вне локального рассеивателя строится на основе тензора Грина слоистой среды (см. [78]). Данное обстоятельство позволяет сохранить численную схему определения амплитуд ДИ без изменений. Интересно, что подобный подход был предложен еще в [79], но в те годы оказался не востребованным.

В самые последние годы МДИ был обобщен на анализ плазмонных структур с учетом эффекта пространственной дисперсии (см. [80]–[82]). При этом численная схема метода практически остается без изменений и позволяет учитывать как наличие продольных полей внутри плазмонного металла, так и присутствие дополнительного граничного условия на поверхностях разрыва параметров среды. В рамках подобного подхода исследовались однородные наночастицы и линейные кластеры (см. [80]). Отметим, что учет продольных полей ведет к необходимости использования различного числа ДИ для представления продольных и поперечных полей, что легко реализуется в рамках МДИ. В последующих разделах мы остановимся подробно на исследовании несферических слоистых частиц, расположенных как в свободном пространстве, так и на поверхности прозрачной призмы (см. [81], [82]).

### 3. ТЕОРИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ОТКЛИКА

В 70-х годах прошлого столетия было замечено, что наноразмерные металлические частицы при облучении светом проявляют аномальные рассеивающие свойства. Возникла гипотеза о том, что индекс рефракции подобных частиц отличается от индекса рефракции металлических пленок, которые служат основой для измерений индексов. Пионером в изучении этого явления явился израильский ученый Р. Руппин (R. Ruppin) (см. [83]). Именно его работы заложили теоретические основы анализа влияния эффекта нелокального взаимодействия на рассеивающие свойства наноразмерных металлических частиц (см. [84], [85]). Однако в те годы потребности практического использования этих результатов не представлялись актуальными.

В данном разделе приводится краткий обзор теории нелокального отклика, следуя публикациям [24], [31]. Как известно, основным соотношением, связывающим вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  и вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , является соотношение

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \int \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}', \quad (3.1)$$

где  $\omega$  – частота колебаний поля,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума и  $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  – скалярная нелокальная диэлектрическая проницаемость металла. В приближении стандартного локального отклика имеет место соотношение  $\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\varepsilon(\omega)$ , откуда получаем

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon(\omega)$  – пространственно независимая диэлектрическая проницаемость с учетом частотной дисперсии. В рамках модели нелокального отклика векторное волновое уравнение для электрического поля записывается как

$$\text{rot rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \int \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}', \quad (3.3)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  – скорость света в вакууме. В нелокальном случае диэлектрическая проницаемость может быть представлена в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\varepsilon(\omega) + f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega), \quad (3.4)$$

где  $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega)$  – скалярная функция нелокального отклика. Функция нелокального отклика предполагается симметричной и короткодействующей, откуда следует (см. [24]), что

$$\int f(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{r} d^3 \mathbf{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int f(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{r}^2 d^3 \mathbf{r} = 2\xi^2,$$

где  $\mathbf{r}^2 = x^2 \mathbf{e}_x + y^2 \mathbf{e}_y + z^2 \mathbf{e}_z$ ,  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  – базис в декартовой системе координат, а  $\xi$  – масштаб взаимодействия нелокального отклика. Согласно этому предположению и учитывая разложение  $\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$  в ряд Тейлора второго порядка в окрестности  $\mathbf{r}$ , интеграл (3.3) может быть вычислен аналитически и векторное волновое уравнение (3.3) принимает вид

$$\text{rot rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\varepsilon(\omega) + \xi^2 \Delta] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.5)$$

Из последнего соотношения видно, что скалярный нелокальный отклик определяется Лапласианом в векторном волновом уравнении. Гидродинамическая модель Друде и модель обобщенного нелокального оптического отклика являются теориями, описывающими нелокальный отклик и приводящими к векторному волновому уравнению в форме (3.5). Это позволяет получить простые формулы для вычисления масштаба длины  $\xi$ .

В гидродинамической модели для газа свободных электронов энергия электронной плазмы выражается через электронную плотность  $n(\mathbf{r}, t)$  и поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Динамика  $n(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , обусловленная электрическим полем  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , получается дифференцированием энергии по этим переменным. Дифференцирование энергии по скорости и электронной плотности дает, соответственно, гидродинамическое уравнение движения и уравнение непрерывности. Эти уравнения решаются с помощью линеаризации. В результате в частотной области мы приходим к векторному волновому уравнению следующего вида (см. [31]):

$$\text{rot rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_b \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - j\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.6)$$

и соотношению для плотности тока в виде

$$\left(\frac{\beta^2}{\omega^2 - j\gamma\omega}\right) \nabla[\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)] + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.7)$$

Здесь  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = -en_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}, \omega)$  – плотность тока свободных зарядов,  $n_0$  – равновесная электронная плотность свободных электронов,  $\beta^2 = \left(\frac{3}{5}\right) v_F^2$ ,  $v_F$  – скорость Ферми,  $\gamma$  – скорость затухания

Друде,  $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}$  – плазменная частота металла,  $\sigma(\omega) = -j\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega - j\gamma}$  – проводимость Друде, связанная с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\omega)$  посредством соотношения вида

$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b - j \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} = \varepsilon_b - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega}$ , и  $\varepsilon_b$  – диэлектрическая проницаемость, соответствующая свя-

занным зарядам (bound charges). Очевидно, в пределе  $\beta \rightarrow 0$ , т.е.  $v_F \rightarrow 0$ , основное соотношение (3.7) упрощается, сводясь ко всем известному закону Ома  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .

Гидродинамическая модель включает в себя конвективный ток, но пренебрегает диффузионными токами. Это создает проблемы при рассмотрении рассеивателей, форма которых отличается от сферической. В данном случае приходится корректировать параметр  $\gamma$ , описывающий скорость затухания (damping rate) электронов в металле (см. [28]). В модели обобщенного нелокального оптического отклика гидродинамическая теория дополнительно учитывает диффузию электронов. Учет электронной диффузии меняет уравнение непрерывности, которое в своей линеаризованной форме представляет собой конвекционно-диффузионное уравнение. В этой модели плотность токов свободных зарядов учитывает диффузионный член  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = -en_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}, \omega) + eD \nabla n(\mathbf{r}, \omega)$ , где  $D$  – коэффициент диффузии, и основное соотношение для плотности токов свободных зарядов становится (см. [29])

$$\left( \frac{\beta^2}{\omega^2 - j\gamma\omega} + j \frac{D}{\omega} \right) \nabla[\text{div } \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)] + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.8)$$

Для того чтобы получить векторное волновое уравнение для поля, исключим плотность тока из уравнений (3.6) и (3.8). Применяя оператор  $\nabla(\text{div})$  к уравнению (3.6) и учитывая, что  $(\text{div rot } \mathbf{F}) = 0$ , подставим результат в (3.8), в итоге получаем

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) + j\omega \varepsilon_0 \xi^2 \nabla[\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r})], \quad (3.9)$$

тогда уравнение (3.6) преобразуется к виду

$$\text{rot rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 [\varepsilon(\omega) + \xi^2(\omega) \nabla(\text{div})] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.10)$$

где  $\xi$  – масштаб длины в обобщенной модели нелокального оптического отклика имеет вид

$$\xi^2(\omega) = \varepsilon_b \frac{\beta^2 + D(\gamma + j\omega)}{\omega^2 - j\gamma\omega}. \quad (3.11)$$

Очевидно, что векторное волновое уравнение (3.10) такое же, как в (3.5), но в нем оператор Лапласа заменен на оператор градиента от дивергенции.

Фактически присутствие оператора Лапласа в (3.5) является следствием использования скалярной функции, описывающей нелокальный отклик  $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega)$ . Из (3.3) и (3.10) следует, что в теории нелокального отклика вектор электрической индукции, включающий вклады как связанных, так и свободных зарядов имеет вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 [\varepsilon(\omega) + \xi^2(\omega) \nabla(\text{div})] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.12)$$

Действительно, векторное волновое уравнение (3.10) эквивалентно уравнениям Максвелла для немагнитных сред вида

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.13)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega \varepsilon_0 [\varepsilon(\omega) + \xi^2(\omega) \nabla(\text{div})] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (3.14)$$

Применяя преобразования  $\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  и  $\sqrt{\mu_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ , можно переписать уравнения Максвелла в безразмерном виде

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -jk_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.15)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = jk_0 [\varepsilon(\omega) + \xi^2(\omega) \nabla(\text{div})] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.16)$$

где  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c}$  – волновое число в вакууме. В данном случае электрическое поле представляет собой суперпозицию вихревого поперечного и невихревого продольного полей, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.17)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, \omega) = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) = 0$ . Подставляя (3.17) в (3.10) и используя тождество  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$ , мы получаем, что поперечное и продольное поля удовлетворяют следующим волновым уравнениям:

$$\Delta \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, \omega) + k_T^2(\omega) \mathbf{E}_T(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.18)$$

$$\Delta \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) + k_L^2(\omega) \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (3.19)$$

где поперечное и продольное волновые числа задаются соотношениями

$$k_T^2(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega), \quad (3.20)$$

$$k_L^2(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\xi^2(\omega)}. \quad (3.21)$$

Таким образом, нелокальный отклик возбуждает дополнительно продольную волну в металлической среде. Эта волна обусловлена плотностью зарядов и не влияет на магнитное поле, так как

$$\mathbf{H} = \left(\frac{j}{\omega \mu_0}\right) \operatorname{rot} \mathbf{E}_T \text{ и } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Присутствие продольной волны требует введения дополнительного граничного условия, наряду с обычными условиями непрерывности для тангенциальных компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на границах раздела сред. Для того чтобы получить дополнительное граничное условие, рассмотрим диэлектрическую среду 1 и металлическую среду 2 с границей раздела  $S$ . Положим, что единичный вектор нормали  $\hat{\mathbf{n}}$  в точке  $\mathbf{r}$  на  $S$  направлен в диэлектрическую среду 1. Вектор электрической индукции, заданный формулой (3.2), может быть записан как

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_b(\mathbf{r}) - \frac{j}{\omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (3.22)$$

где в соответствии с (3.9) нелокальный отклик порождается плотностью токов свободных зарядов  $\mathbf{J}$ , тогда как

$$\mathbf{D}_b(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_b \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (3.23)$$

есть вектор индукции электрического поля связанных зарядов, и  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации.

Из закона Гаусса для электрического поля  $\operatorname{div} \mathbf{D}_b = \rho$ , где  $\rho$  — плотность свободных зарядов, применяя теорему Гаусса для замкнутой поверхности, включающей границу раздела, мы получаем граничное условие  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_{b1} - \mathbf{D}_{b2}) = \rho_s$ , где

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} h [\rho(\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{n}}) + \rho(\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{n}})] \quad (3.24)$$

есть плотность свободных поверхностных зарядов. Предполагая, что плотность свободных поверхностных зарядов исчезающе мала, т.е.  $\rho_s = 0$ , мы получаем условие непрерывности нормальной составляющей вектора электрической индукции связанных зарядов

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_{b1} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_{b2},$$

которое дает дополнительное граничное условие

$$\varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \varepsilon_b \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \quad (3.25)$$

где  $\varepsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрической среды 1. Если  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_b$ , то нормальная составляющая электрического поля разрывна на границе раздела. Этот скачок электрического поля обусловлен электрическим зарядом, возникающим при поляризации связанных электронов в диэлектрике и металле. Определяя плотность связанных поверхностных зарядов по формуле  $\rho_{sb} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ , из (3.23) и непрерывности  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_b$  получаем

$$\rho_{sb} = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1). \quad (3.26)$$

Именно эта плотность поверхностных зарядов ответственна за многие эффекты, возникающие при учете наличия продольных полей в плазменных наночастицах (см. [86]).

Однако из уравнения непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{J} = -j\omega\rho$  мы имеем граничные условия  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = -j\omega\rho_s$ . Предполагая снова, что плотность свободных зарядов на границе раздела

равна нулю, получаем условие непрерывности нормальной составляющей плотности токов свободных зарядов  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_2$ . Поскольку диэлектрик не проводит ток (в диэлектриках нет свободных электронов), то  $\mathbf{J}_1 = 0$ . Следовательно, на границе раздела диэлектрика и проводника нормальная компонента плотности тока свободных зарядов в металле обращается в нуль, т.е.  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_2 = 0$ . Другими словами, свободные электроны не выходят за поверхность металла. Условие (3.25) известно, как “hard wall boundary condition” (см. [87]). Более общие дополнительные граничные условия на поверхности между двумя плазмонными металлами можно найти в [88].

#### 4. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ: СЛОИСТАЯ НАНОЧАСТИЦА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Гибридные частицы, состоящие из слоев диэлектрика или полупроводника и плазмонных металлов, вызывают все больший интерес. Это связано с появлением дополнительных параметров, которые можно использовать для оптимизации плазмонного отклика. Действительно, в случае однородной частицы варьировать можно лишь ее форму, в то время как в случае слоистой структуры можно выбирать дополнительно параметры диэлектрика, его толщину и уже потом форму гибридной частицы. В классе несферических частиц “ядро–оболочка” удлиненные частицы сфероидальной формы обеспечивают простой контроль центральной частоты плазмонного резонанса (ПР) за счет изменения длины частицы (см. [89], [90]). Существует множество практических приложений, требующих оптимизации оптических свойств частиц “ядро–оболочка” с тонкой металлической оболочкой (см. [91], [92]), что обуславливает необходимость создания моделей несферических частиц, учитывающих нелокальный эффект в плазмонной металлической оболочке.

Будем рассматривать математическую модель задачи рассеяния плоской волны на осесимметричной слоистой частице с внутренней областью  $D_i$ , областью слоя  $D_s$  и внешней неограниченной областью  $D_e$ . Пусть области разделены гладкими,  $\partial D_{i,s} \in C^{(1,\alpha)}$ , поверхностями с общей осью симметрии  $Oz$ . Будем полагать, что плоская волна  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  распространяется под углом  $\pi - \theta_0$  по отношению к оси  $Oz$ . Тогда математическая постановка задачи рассеяния в рамках ОНО может быть записана в следующем виде:

$$\text{rot } \mathbf{H}_{i,e} = jk\varepsilon_{i,e} \mathbf{E}_{i,e}, \quad \text{rot } \mathbf{E}_{i,e} = -jk\mathbf{H}_{i,e} \quad \text{в } D_{e,i}, \quad (4.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_s = jk[\varepsilon_s + \xi^2 \nabla(\text{div})] \mathbf{E}_s, \quad \text{rot } \mathbf{E}_s = -jk\mathbf{H}_s \quad \text{в } D_s, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_s(P)) = 0, \quad \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_s(P)), \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i(P) = \varepsilon_L \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_s(P), \quad P \in \partial D_i,$$

$$\mathbf{n}_s \times (\mathbf{E}_s(Q) - \mathbf{E}_e(Q)) = \mathbf{n}_s \times \mathbf{E}^0(Q), \quad \mathbf{n}_s \times (\mathbf{H}_s(Q) - \mathbf{H}_e(Q)) = \mathbf{n}_s \times \mathbf{H}^0(Q), \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_L \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{E}_s(Q) = \varepsilon_e \mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{E}_e(Q) + \mathbf{E}^0(Q)), \quad Q \in \partial D_s,$$

с условиями излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0, \quad r = |M|. \quad (4.5)$$

Здесь  $\{\mathbf{E}_{i,s}, \mathbf{H}_{i,s}\}$  – полные поля в областях  $D_{i,s}$ ,  $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$  – рассеянное поле в  $D_e$ ,  $\mathbf{n}_{i,s}$  – единичные внешние нормали к поверхностям  $\partial D_{i,s}$ ,  $\varepsilon_{i,s,e}$  – диэлектрические проницаемости сред в соответствующих областях, при этом  $\text{Im } \varepsilon_{i,e} = 0$ ,  $\text{Im } \varepsilon_{s,L} \leq 0$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ , временная зависимость величин выбрана в виде  $\exp(j\omega t)$ .

В данном случае параметры, связанные с моделью ОНО, имеют вид

$$\xi^2(\omega) = \varepsilon_L \frac{\beta^2 + D(\gamma + j\omega)}{\omega^2 - j\gamma\omega}, \quad \varepsilon_L = \varepsilon_s + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega}. \quad (4.6)$$

Как уже отмечалось ранее, поле в оболочке  $D_s$  разделяется на поперечную и продольную компоненты  $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{sT} + \mathbf{E}_{sL}$ , для которых  $\text{div } \mathbf{E}_{sT} = 0$  и  $\text{rot } \mathbf{E}_{sL} = 0$ . Заметим, что магнитное поле внутри металлической оболочки остается чисто поперечным.

Будем строить приближенное решение граничной задачи (1) на основе метода Дискретных источников. Разделим поле падающей плоской волны на P и S поляризации, тогда

$$\mathbf{E}^{0,P} = (\mathbf{e}_x \cos \theta_0 + \mathbf{e}_z \sin \theta_0) \chi(x, z), \quad \mathbf{H}^{0,P} = -\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{e}_y \chi(x, z), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{E}^{0,S} = \mathbf{e}_y \chi(x, z), \quad \mathbf{H}^{0,S} = \sqrt{\varepsilon_e} (\mathbf{e}_x \cos \theta_0 + \mathbf{e}_z \sin \theta_0) \chi(x, z), \quad (4.8)$$

где  $\chi(x, z) = \exp\{-jk_e(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\}$ ,  $k_e = k\sqrt{\varepsilon_e}$ , а  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  – декартов базис.

Будем строить поперечные поля в областях  $D_{i,s,e}$  на основе векторных потенциалов, индуцированных источниками, распределенными вдоль оси симметрии рассеивателя, следующего вида (см. [51]):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} &= Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \{\mathbf{e}_\rho \cos[(m+1)\varphi] - \mathbf{e}_\varphi \sin[(m+1)\varphi]\}, \quad \alpha = i, s, \pm, e; \\ \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} &= Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \{\mathbf{e}_\rho \sin[(m+1)\varphi] + \mathbf{e}_\varphi \cos[(m+1)\varphi]\}, \quad \mathbf{A}_n^{3,\alpha} = Y_0^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь

$$Y_m^{e,s,\pm}(\zeta, z_n^{e,s,\pm}) = h_m^{(2,1)}(k_{e,s} R_{z_n^{e,s,\pm}}) \left( \frac{k_{e,s} \rho}{R_{z_n^{e,s,\pm}}} \right)^m, \quad Y_m^i(\zeta, z_n^i) = j_m(k_i R_{z_n^i}) \left( \frac{\rho}{R_{z_n^i}} \right)^m,$$

где  $h_m^{(2,1)}$  – сферические функции Ханкеля, соответствующие “уходящим” (+) и “приходящим” (–) волнам,  $j_m$  – сферические функции Бесселя,  $k_{i,s} = k\sqrt{\varepsilon_{i,s}}$ ,  $\zeta = (\rho, z)$ ,  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $R_{z_n}^2 = \rho^2 + (z - z_n)^2$ ,  $\{z_n^\alpha\}_{n=1}^{N_\alpha^m}$  – координаты дискретных источников, распределенных вдоль оси вращения  $Oz$ , число которых может различаться в зависимости от номера гармоники по  $\varphi$ .

В свою очередь, приближенное решение для продольных полей в оболочке строится на основе скалярных потенциалов, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца вида (3.19) с волновым числом  $k_L^2 = \frac{\varepsilon_s}{\xi^2}$  и будет иметь вид (см. [93])

$$\Psi_{mn}^{P\pm} = h_{m+1}^{(2,1)}(k_L R_{z_n^{s,\pm}}) \left( \frac{\rho}{R_{z_n^{s,\pm}}} \right)^{m+1} \cos[(m+1)\varphi], \quad \Psi_n^\pm = j_0(k_L R_{z_n^\pm}). \quad (4.10)$$

Следует отметить, что внутри оболочки поля представляются в виде суммы уходящих и приходящих волн, т.е.  $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{s+} + \mathbf{E}_{s-}$ ,  $\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_{s+} + \mathbf{H}_{s-}$ . Тогда конкретные представления для поперечных и продольных полей в случае поляризации P приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T,\alpha}^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} \left\{ p_{mn}^\alpha \frac{j}{k\varepsilon_\alpha} \text{rot rot } \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} + q_{mn}^\alpha \frac{j}{\varepsilon_\alpha} \text{rot } \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^\alpha \frac{j}{k\varepsilon_\alpha} \text{rot rot } \mathbf{A}_n^{3,\alpha}, \\ \mathbf{E}_{L\pm}^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_L^m} p_{mn}^{L\pm} \nabla \Psi_{mn}^{P\pm} + \sum_{n=1}^{N_L^0} r_n^{L\pm} \nabla \Psi_n^\pm, \quad \mathbf{H}_\alpha^N = \frac{j}{k} \text{rot } \mathbf{E}_\alpha^N, \quad \alpha = i, e, s, \pm. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В случае S поляризации для построения продольных полей используются следующие потенциалы:

$$\Psi_{mn}^{S\pm} = h_{m+1}^{(2,1)}(k_L R_{z_n^{s,\pm}}) \left( \frac{\rho}{R_{z_n^{s,\pm}}} \right)^{m+1} \sin[(m+1)\varphi]. \quad (4.12)$$

В свою очередь, представление для приближенного решения в этом случае может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T,\alpha}^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} \left\{ p_{mn}^\alpha \frac{j}{k \epsilon_\alpha} \text{rot rot } \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} + q_{mn}^\alpha \frac{j}{\epsilon_\alpha} \text{rot } \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^\alpha \frac{j}{\epsilon_\alpha} \text{rot } \mathbf{A}_n^{3,\alpha}, \\ \mathbf{E}_{L\pm}^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_L^m} p_{mn}^{L\pm} \nabla \Psi_{mn}^{S\pm}, \quad \mathbf{H}_\alpha^N = \frac{j}{k} \text{rot } \mathbf{E}_\alpha^N, \quad \alpha = i, e, s, \pm. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Видно, что представления для решения в различных областях  $D_{i,s,e}$  выглядят различным образом. Особое значение имеет представление для полей внутри оболочки, которое включает в себя продольные поля

$$\mathbf{E}_s^N = \mathbf{E}_{Ts+}^N + \mathbf{E}_{Ts-}^N + \mathbf{E}_{L+}^N + \mathbf{E}_{L-}^N, \tag{4.14}$$

следует отметить, что представления для полей (4.11), (4.13) удовлетворяют модифицированной системе уравнений Максвелла (4.1), (4.2) и условиям излучения, остается удовлетворить условиям сопряжения для полей (4.3), (4.4).

Для определения вектора неизвестных амплитуд ДИ будем использовать обобщенный метод коллокаций (см. [94]). Для этого на образующей поверхности вращения  $\partial D_{i,s}$  выберем точки коллокаций  $\tau_{\beta l} = (\rho_{\beta l}, z_{\beta l})$ ,  $\beta = i, s$ ;  $\{\tau_{il}\}_{l=1}^{K_i}$ ,  $\{\tau_{sl}\}_{l=1}^{K_s}$ . И запишем условия сопряжения в виде проекционных соотношений вида

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s \times \int_0^{2\pi} (\mathbf{E}_s^N(\tau_{sl}, \varphi) - \mathbf{E}_e^N(\tau_{sl}, \varphi)) e^{-jm\varphi} d\varphi &= \mathbf{n}_s \times \int_0^{2\pi} \mathbf{E}^0(\tau_{sl}, \varphi) e^{-jm\varphi} d\varphi, \\ \mathbf{n}_s \times \int_0^{2\pi} (\mathbf{H}_s^N(\tau_{sl}, \varphi) - \mathbf{H}_e^N(\tau_{sl}, \varphi)) e^{-jm\varphi} d\varphi &= \mathbf{n}_s \times \int_0^{2\pi} \mathbf{H}^0(\tau_{sl}, \varphi) e^{-jm\varphi} d\varphi, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\mathbf{n}_s \times \int_0^{2\pi} (\epsilon_L \mathbf{E}_s^N(\tau_{sl}, \varphi) - \epsilon_e \mathbf{E}_e^N(\tau_{sl}, \varphi)) e^{-jm\varphi} d\varphi = \mathbf{n}_s \times \int_0^{2\pi} \epsilon_e \mathbf{E}^0(\tau_{sl}, \varphi) e^{-jm\varphi} d\varphi,$$

$$\mathbf{n}_i \times \int_0^{2\pi} (\mathbf{E}_i^N(\tau_{il}, \varphi) - \mathbf{E}_s^N(\tau_{il}, \varphi)) e^{-jm\varphi} d\varphi = 0,$$

$$\mathbf{n}_i \times \int_0^{2\pi} (\mathbf{H}_i^N(\tau_{il}, \varphi) - \mathbf{H}_s^N(\tau_{il}, \varphi)) e^{-jm\varphi} d\varphi = 0, \quad m = \overline{0, M}, \tag{4.16}$$

$$\mathbf{n}_i \times \int_0^{2\pi} (\epsilon_i \mathbf{E}_i^N(\tau_{il}, \varphi) - \epsilon_L \mathbf{E}_s^N(\tau_{il}, \varphi)) e^{-jm\varphi} d\varphi = 0.$$

Таким образом, для каждой отдельной гармоники по  $\varphi$  для определения вектора неизвестных амплитуд ДИ,  $\mathbf{p}_m^N = \{p_{mn}^{e,i,s,\pm}, q_{mn}^{e,i,s,\pm}, r_n^{e,i,s,\pm}; p_{mn}^{L\pm}, q_{mn}^{L\pm}, r_n^{L\pm}\}$ , размерностью  $2N_i^m + 4N_s^m + 2N_L^m + 2N_e^m$ , у нас имеется  $5K_i + 5K_s$  уравнений. Тогда для каждой гармоники  $m = \overline{0, M}$  мы имеем матрицу размерности  $(5K_i + 5K_s) \times (2N_i^m + 4N_s^m + 2N_L^m + 2N_e^m)$ . При использовании обобщенного метода коллокаций матрица получается переопределенной (см. [51]). Сначала осуществляется регуляризация по А.Н. Тихонову в норме  $l_2$  (см. [95]). Псевдорешение полученной системы осуществляется факторизацией QR матрицы (см. [96]) с последующим вычислением псевдорешений для всего набора внешних возбуждений. Здесь уместно заметить, что, несмотря на различие представлений для Р и S поляризаций (4.11), (4.13), удается свести вычисление амплитуд ДИ к единой матрице для всех гармоник, кроме не зависящих от  $\varphi$  (см. [51]).

Важной характеристикой, описывающей реакцию рассеивателя на внешнее возбуждение, служит диаграмма направленности рассеянного поля. Она определяется как (см. [97])

$$\mathbf{E}_e(M)/|\mathbf{E}^0(M)| = \frac{\exp(-jk_e r)}{r} \mathbf{F}(\theta, \varphi) + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Следуя асимптотике полей (4.11), компоненты  $\theta$ ,  $\varphi$  диаграммы направленности для Р поляризации принимают следующий вид:

$$F_\theta^P(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^M (jk_e \sin \theta)^m \cos(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{mn}^e \cos \theta + q_{mn}^e\} \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\} - \\ - jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}, \quad (4.18)$$

$$F_\varphi^P(\theta, \varphi) = -jk_e \sum_{m=0}^M (jk_e \sin \theta)^m \sin(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{mn}^e + q_{mn}^e \cos \theta\} \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\},$$

а для поляризации S компоненты диаграммы могут быть записаны как

$$F_\theta^S(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^M (jk_e \sin \theta)^m \sin(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{mn}^e - q_{mn}^e \cos \theta\} \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}, \\ F_\varphi^S(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^M (jk_e \sin \theta)^m \cos(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{mn}^e \cos \theta - q_{mn}^e\} \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\} + \\ + jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}. \quad (4.19)$$

Таким образом, определив амплитуды ДИ, можно легко вычислять компоненты диаграммы рассеяния (4.18), (4.19).

В задачах дифракции интерес представляет вычисление интенсивности рассеянного поля DSC, которая на единичной сфере определяется соотношением

$$DSC^{P,S}(\theta, \varphi) = |F_\theta^{P,S}(\theta, \varphi)|^2 + |F_\varphi^{P,S}(\theta, \varphi)|^2,$$

а также сечение рассеяния: суммарная интенсивность рассеянного поля

$$\sigma_{sc}^{P,S}(\theta_0) = \int_{\Omega} DSC^{P,S}(\theta_0, \theta, \varphi) d\omega, \quad (4.20)$$

где  $\Omega$  – единичная сфера:  $\Omega = \{0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ; 0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ\}$ . Размерность интенсивности и СР в силу определения (4.17) – мкм<sup>2</sup>.

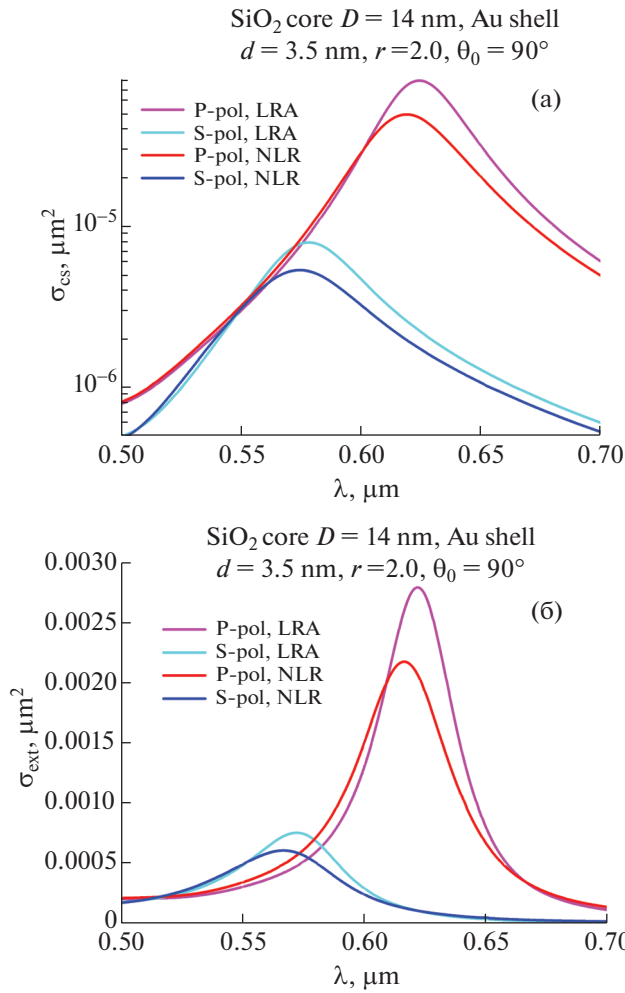
Если бы в основу представлений (4.18), (4.19) были положены сферические гармоники, то в силу их ортогональности на  $\Omega$  СР представлялось бы, как сумма квадратов амплитуд этих гармоник. В нашем случае легко убедиться, что функции  $\sin^m \theta \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}$  в рамках одной гармоники Фурье для различных положений ДИ не являются ортогональными. Покажем, что тем не менее СР может быть вычислено аналитически (см. [72]). Представим СР следующим образом:

$$\sigma_{sc}^{P,S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [F_\theta^{P,S}(\theta, \varphi) F_\theta^{P,S*}(\theta, \varphi) + F_\varphi^{P,S}(\theta, \varphi) F_\varphi^{P,S*}(\theta, \varphi)] \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Подставляя выражения (4.18), (4.19) и интегрируя по  $\varphi$ , получаем, что для определения СР (4.20) достаточно уметь вычислять следующие интегралы:

$$\int_0^\pi \sin^{2m} \theta \exp\{\gamma_{nl} \cos \theta\} \sin \theta d\theta = I_m^{(0)} := \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \exp\{\gamma_{nl} x\} dx, \\ I_m^{(1)} := \int_{-1}^1 (1-x^2)^m x \exp\{\gamma_{nl} x\} dx, \quad I_m^{(2)} := \int_{-1}^1 (1-x^2)^m x^2 \exp\{\gamma_{nl} x\} dx, \quad (4.21)$$





**Фиг. 1.** Результаты расчета сечений экстинкций  $\sigma_{sc}^{P,S}(\lambda)$  (а) и  $\sigma_{ext}^{P,S}(\lambda)$  (б) в зависимости от длины волны  $\lambda$  для сферической частицы,  $r = 2$ ,  $d = 3.5$  нм,  $\theta_0 = 90^\circ$ : 1 – P-поляризация, локальный случай (LRA); 2 – S, LRA; 3 – P, нелокальный (NLR); 4 – S, NLR.

где  $\gamma_{nl} = jk_e(z_n^e - z_l^e)$ . Интегрируя по частям  $I_m^{(0)}$ , легко убедиться, что имеет место следующее базовое рекуррентное соотношение:

$$I_m^{(0)} = a_m I_{m-2}^{(0)} - b_m I_{m-1}^{(0)}, \quad m \geq 2, \tag{4.22}$$

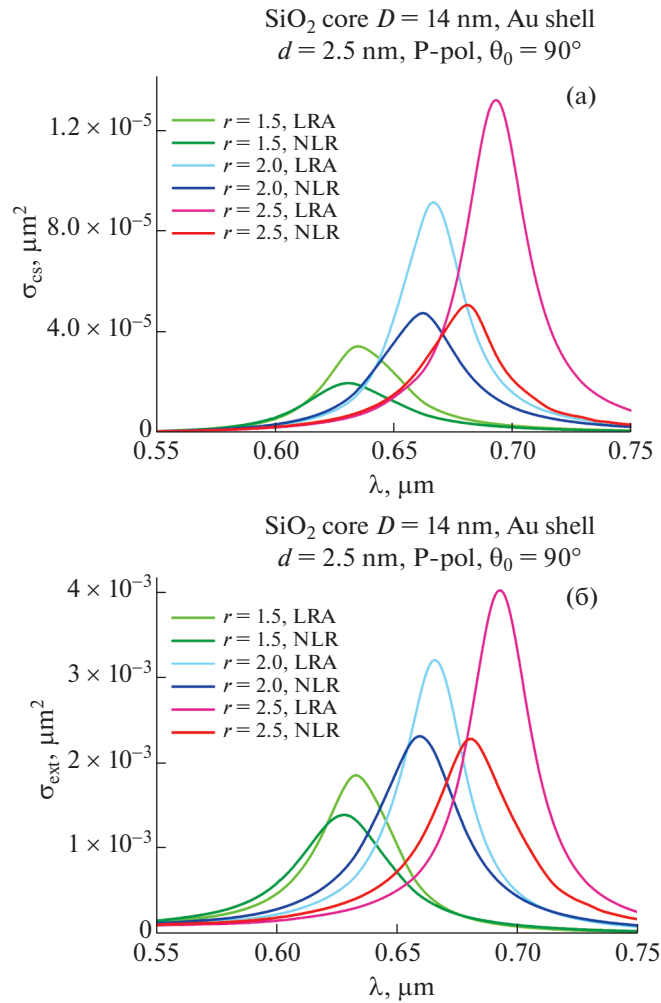
где  $a_m = 4m(m-1)/\gamma_{nl}^2$ ,  $b_m = 2m(2m-1)/\gamma_{nl}^2$ ,  $I_0^{(0)} = [\exp(\gamma_{nl}) - \exp(-\gamma_{nl})]/\gamma_{nl}$ ,  $I_1^{(0)} = 2[\exp(\gamma_{nl}) + \exp(-\gamma_{nl})]/\gamma_{nl}^2 - 2[\exp(\gamma_{nl}) - \exp(-\gamma_{nl})]/\gamma_{nl}^3$  при  $\gamma_{nl} \neq 0$ .

Также очевидно, что  $I_m^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \gamma} I_m^{(0)}$ ,  $I_m^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} I_m^{(0)}$ ,  $m \geq 0$ . Случай  $\gamma_{nl} = 0$  является тривиальным,

так как все интегралы  $I_m^{(0,1,2)}$ ,  $m \geq 0$ , берутся аналитически.

Перейдем к результатам моделирования. Будем рассматривать слоистую частицу, состоящую из диэлектрического ядра SiO<sub>2</sub> ( $n_i = 1.46$ ) сферической формы, покрытую золотой (Au) оболочкой толщиной  $d$ , располагающейся в воде ( $n_e = 1.333$ ). Нас будут интересовать численные результаты анализа оптических характеристик рассеяния и интенсивности ближнего поля в области длин волн. В частности, мы будем рассматривать поведение сечения рассеяния (4.20) и сечения экстинкции

$$\sigma_{ext}^P(\theta_0) = -\frac{4\pi}{k_e} \text{Im} F_\theta^P(\pi - \theta_0, \pi), \quad \sigma_{ext}^S(\theta_0) = \frac{4\pi}{k_e} \text{Im} F_\theta^S(\pi - \theta_0, \pi),$$



**Фиг. 2.** Результаты расчета сечений экстинкций  $\sigma_{sc}^{P,S}(\lambda)$  (а) и  $\sigma_{ext}^{P,S}(\lambda)$  (б) для  $d = 2.5$  нм,  $\theta_0 = 90^\circ$ , P – поляризация: 1 – вытянутость  $r = 1.5$ , LRA; 2 –  $r = 1.5$ , NLR; 3 –  $r = 2.0$ , LRA; 4 –  $r = 2.0$ , NLR; 5 –  $r = 2.5$ , LRA; 6 –  $r = 2.5$ , NLR.

а также коэффициента усиления поля на внешней поверхности слоистой частицы  $\partial D_s$ :

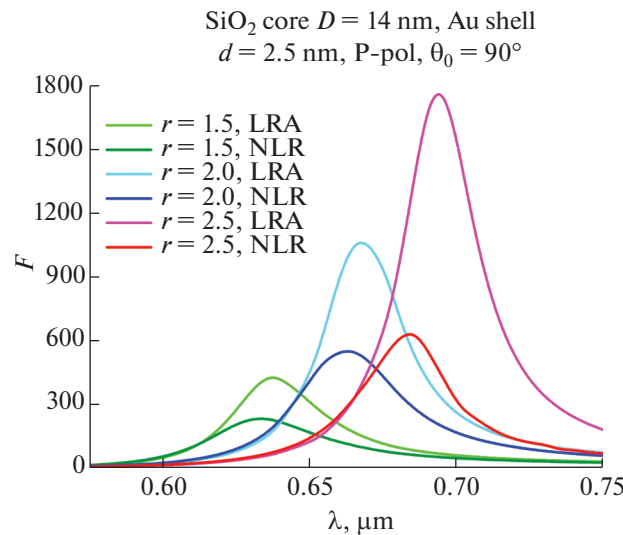
$$F(\theta_0, \lambda) = \int_{\partial D_s} |\mathbf{E}_e^N + \mathbf{E}^0|^2 d\sigma / \int_{\partial D_s} |\mathbf{E}^0|^2 d\sigma. \quad (4.23)$$

Напомним, что МДИ позволяет вычислять ближние поля, компоненты диаграммы рассеяния и сечения экстинкции с учетом ЭН в аналитическом виде. Соответствующие квантовые параметры для золота в рамках модели ОНО будут равняться (см. [31])

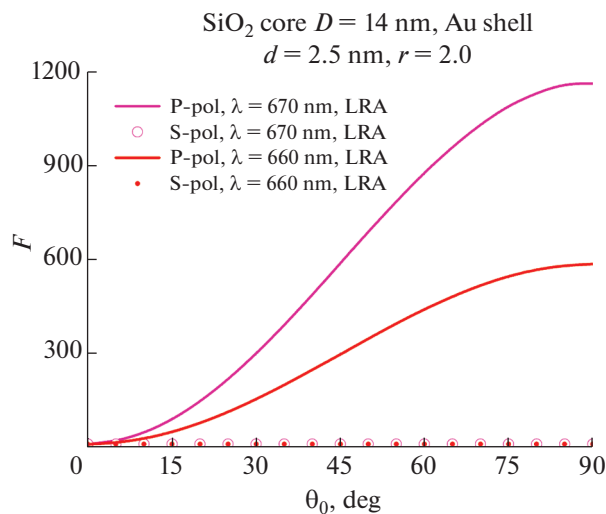
$$\hbar\omega_p = 9.02 \text{ эВ}, \quad \hbar\gamma = 0.071 \text{ эВ}, \quad v_F = 1.39 \times 10^{12} \text{ мкм/с}, \quad D = 8.62 \times 10^8 \text{ мкм}^2/\text{с}. \quad (4.24)$$

Задавая длину волны внешнего возбуждения  $\lambda$  и вычисляя соответствующее значение  $\omega$ , легко определить значения нелокальных параметров  $\epsilon_L$  и  $k_L$  (4.6). Отметим, что локальное значение диэлектрической проницаемости для золота  $\epsilon_s$  определялось с учетом частотной дисперсии материала Au (см. [98]). Пусть эквиобъемный диаметр ядра  $D_c = 14$  нм, а толщины оболочки выбраны равными  $d = 2.5, 3.5$  нм.

На фиг. 1а приведены значения полного сечения рассеяния, соответствующего решению задачи дифракции плоской волны, падающей под углом  $\theta_0 = 90^\circ$  на сфероидальную частицу с соотношением осей  $r = 2$ , толщина оболочки при этом  $d = 3.5$  нм. Волна распространяется перпендикулярно большей оси сфероида. Из фиг. 1а следует, что S и P поляризации реализуют плаз-



**Фиг. 3.** Результаты расчета  $F^P(\lambda)$  для  $d = 2.5$  нм,  $\theta_0 = 90^\circ$ , P – поляризация: 1 –  $r = 1.5$ , LRA; 2 –  $r = 1.5$ , NLR; 3 –  $r = 2.0$ , LRA; 4 –  $r = 2.0$ , NLR; 5 –  $r = 2.5$ , LRA; 6 –  $r = 2.5$ , NLR.



**Фиг. 4.** Результаты расчета  $F^{P,S}(\theta_0)$  в зависимости от угла падения  $\theta_0$  для  $d = 2.5$  нм,  $r = 2.0$ : 1 –  $\lambda = 670$  нм, P – поляризация, LRA; 2 –  $\lambda = 670$  нм, S, LRA; 3 –  $\lambda = 660$  нм, P, NLR; 3 –  $\lambda = 660$  нм, S, NLR.

монный резонанс (ПР) в разных частях спектра, кроме того, P поляризованное излучение доминирует. Учет ЭН приводит к снижению амплитуды ПР (damping) при небольшом сдвиге в область коротких волн (blue shift). Тот же характер поведения кривых можно наблюдать на фиг. 16, где приведены результаты для сечения экстинкции. В этом случае снижение амплитуды ПР достигает 20%.

На фиг. 2а, б изображены результаты расчетов поведения сечения рассеяния и экстинкции для сфероида в зависимости от соотношения осей при толщине пленки  $d = 2.5$  нм. Как следует из рисунков, при увеличении вытянутости сфероида, т.е. увеличении объема и поверхности плазмонного слоя влияние ЭН существенно усиливается. В этом случае снижение амплитуды ПР может достигать до 2.5 раз.

На фиг. 3 представлены результаты расчета коэффициента усиления поля на внешней поверхности слоистой частицы. В этом случае учет ЭН оказывается наиболее заметным и снижение ПР может достигать значения 70%. Наконец, фиг. 4 демонстрирует зависимость коэффициента

усиления от угла падения волны для значений  $\lambda$ , соответствующих положению ПР в области длин волн при вытянутости  $r = 2$ . Видно, что коэффициент монотонно возрастает и достигает своего максимума при  $\theta_0 = 90^\circ$ . Аналогичные результаты имеют место для сечения экстинкции.

Итак, резюмируя изложенное выше, следует отметить, что вытянутость частицы существенно влияет как на положение ПР, так и его амплитуду. Максимальное значение рассмотренные величины принимают в случае Р поляризации излучения и падения волн перпендикулярно большей оси частицы. В то же время учет ЭН оказывает существенное влияние на амплитуду ПР при небольшом смещении вправо в области длин волн и должен однозначно учитываться при оценке амплитуд полей как в ближней, так и дальней зонах.

## 5. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ: СЛОИСТАЯ НАНОЧАСТИЦА НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОЗРАЧНОЙ ПОДЛОЖКИ

В целом ряде приложений, упомянутых выше, возникает необходимость в исследовании оптических свойств наночастиц, расположенных на диэлектрической подложке. В этом случае весьма важно строго учитывать взаимодействие между частицей и поверхностью подложки. Эти обстоятельства возникают как при попытках обнаружения и определения структуры привнесённых частиц, так и решении проблем синтеза слоистых структур для получения требуемых спектральных свойств (см. [99], [100]). Кроме того, детальный анализ свойств 3D резонаторов плазмонного нанолазера также требует полного учета взаимодействия слоистой частицы с активной средой и прозрачной подложкой (см. [17]). В этом плане следует отметить, что в современной литературе, кроме работ авторов [101], [102], отсутствуют результаты моделирования поведения полей слоистых частиц, расположенных на подложке, с учетом эффекта нелокальности.

Перейдем к построению математической модели. Пусть все пространство  $\mathbb{R}^3$  разделено на два полупространства: активная среда  $D_0 : (z > 0)$  и прозрачная подложка  $D_1 : (z < 0)$ . Обозначим через  $\Sigma : (z = 0)$  плоскую границу раздела сред. Пусть сферическая слоистая частица целиком располагается в верхнем полупространстве  $D_0$ . Внутреннее диэлектрическое ядро частицы обозначим  $D_i$ , а область металлической оболочки  $D_s$ . Соответствующие сферические поверхности будем обозначать как  $\partial D_{i,s}$ . Все среды предполагаются немагнитными, а их диэлектрические проницаемости обозначим  $\varepsilon_v$ ,  $v = 0, 1, i, s$ .

Перейдем к формулировке математической постановки граничной задачи рассеяния для системы Максвелла с учетом модели ОНО. Она во многом сходна с граничной задачей (4), но имеет существенные отличительные особенности. Обозначим  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  — поле плоской электромагнитной волны линейной поляризации, распространяющейся из верхнего полупространства в полуплоскости  $\varphi = \pi$  под углом  $\pi - \theta_0$  относительно нормали к подложке, совпадающей с осью  $Oz$ . Тогда постановка граничной задачи рассеяния с учетом ЭН может быть записана в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_v = jk\varepsilon_v \mathbf{E}_v, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_v = -jk\mathbf{H}_v \quad \text{в } D_v, \quad v = 0, 1, i, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_s = jk[\varepsilon_s + \xi^2 \nabla(\operatorname{div})]\mathbf{E}_s, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = -jk\mathbf{H}_s \quad \text{в } D_s, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_s(P)) &= 0, & \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_s(P)), \\ \varepsilon_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i(P) &= \varepsilon_L \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_s(P), & P \in \partial D_i, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s \times (\mathbf{E}_s(Q) - \mathbf{E}_0(Q)) &= \mathbf{n}_s \times \mathbf{E}_0^0(Q), & \mathbf{n}_s \times (\mathbf{H}_s(Q) - \mathbf{H}_0(Q)) &= \mathbf{n}_s \times \mathbf{H}_0^0(Q), \\ \varepsilon_L \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{E}_s(Q) &= \varepsilon_e \mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{E}_0(Q) + \mathbf{E}_0^0(Q)), & Q \in \partial D_s, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_0(Q) - \mathbf{E}_1(Q)) = 0, \quad \mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_0(Q) - \mathbf{H}_1(Q)) = 0, \quad Q \in \Sigma, \quad (5.5)$$

с условиями излучения на бесконечности вида

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}_v^s \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_v^s \right) &= 0, \quad r = |M|, \quad v = 0, 1, \quad z \neq 0, \\ \max \left( \left| \mathbf{E}_v^s \right|, \left| \mathbf{H}_v^s \right| \right) &= O(\rho^{-0.5}), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad v = 0, 1, \quad z = \pm 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\{\mathbf{E}_\nu, \mathbf{H}_\nu\}$  – полные поля в областях  $D_\nu$ ,  $\nu = 0, 1, i$ ,  $\{\mathbf{E}_\nu^s, \mathbf{H}_\nu^s\}$  – рассеянное поле в  $D_{0,1}$ ,  $\mathbf{n}_{i,s}$  – единичные внешние нормали к поверхностям  $\partial D_{i,s}$ ,  $\epsilon_\nu$ ,  $\nu = 0, 1, i, s$  – диэлектрические проницаемости сред в соответствующих областях, при этом  $\text{Im } \epsilon_{i,0,1} = 0$ ,  $\text{Im } \epsilon_{s,L} \leq 0$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ , временная зависимость величин, как и прежде, выбрана в виде  $\exp(j\omega t)$ .

Отметим, что условия излучения выбраны таким образом, чтобы обеспечить стремление к нулю потока энергии на бесконечности в отсутствие внешнего возбуждения (см. [103]).

Конкретизируем остальные величины, входящие в постановку задачи (5). Поле  $\{\mathbf{E}_0^0, \mathbf{H}_0^0\}$  представляет собой результат решения задачи отражения и преломления поля плоской волны  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  на плоскости раздела полупространств  $\Sigma$ . Рассеянные поля  $\{\mathbf{E}_\nu^s, \mathbf{H}_\nu^s\}$  определяются как  $\mathbf{E}_\nu^s = \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu^0$ ,  $\mathbf{H}_\nu^s = \mathbf{H}_\nu - \mathbf{H}_\nu^0$ ,  $\nu = 0, 1$ . В силу построения поля внешнего возбуждения и граничных условий на  $\Sigma$  рассеянное поле  $\{\mathbf{E}_{0,1}^s, \mathbf{H}_{0,1}^s\}$  также должно удовлетворять условиям сопряжения для тангенциальных компонент на бесконечной границе  $\Sigma$ .

Так как частица располагается целиком в верхнем полупространстве  $D_0$ , то суммарное поле падающей и отраженной волн  $\{\mathbf{E}_0^0, \mathbf{H}_0^0\}$  для P и S поляризаций приобретает вид

$$\mathbf{E}_0^{0(P,S)} = \mathbf{E}_0^{P,S(-)} + R_{P,S} \mathbf{E}_0^{P,S(+)}, \quad \mathbf{H}_0^{0(P,S)} = \mathbf{H}_0^{P,S(-)} + R_{P,S} \mathbf{H}_0^{P,S(+)}. \quad (5.6)$$

Здесь  $\mathbf{E}_0^{P,S(-)} = \mathbf{E}^{0(P,S)}$ ,  $\mathbf{H}_0^{P,S(-)} = \mathbf{H}^{0(P,S)}$ ,  $\mathbf{E}_0^{P(\pm)} = \mathbf{e}_0^\pm \cdot \chi_0^\pm$ ,  $\mathbf{H}_0^{P(\pm)} = -\mathbf{e}_y n_0 \cdot \chi_0^\pm$ ,  $\mathbf{E}_0^{S(\pm)} = \mathbf{e}_y \cdot \chi_0^\pm$ ,  $\mathbf{H}_0^{S(\pm)} = \mathbf{e}_0^\pm n_0 \cdot \chi_0^\pm$ ,  $\chi_0^\pm = \exp\{-jk_0(x \sin \theta_0 \pm z \cos \theta_0)\}$ ,  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ ,  $k_0 = kn_0$ ,  $\mathbf{e}_0^\pm = (\mp \mathbf{e}_x \cos \theta_0 + \mathbf{e}_z \sin \theta_0)$ .

Поскольку мы будем рассматривать наряду с возбуждением плоской волной, падающей из  $D_0$ , также случай возбуждения неизлучающей волной, распространяющейся из призмы, то в этом случае преломленное поле в верхнее полупространство имеют вид

$$\mathbf{E}_0^{0(P,S)} = T_{P,S} \mathbf{E}_0^{P,S(+)}, \quad \mathbf{H}_0^{0(P,S)} = T_{P,S} \mathbf{H}_0^{P,S(+)}. \quad (5.7)$$

(в данном случае в отличие от падения сверху),  $\theta_0$  – угол преломления, под которым волна проходит из призмы в  $D_0$ , а  $R_{P,S}$ ;  $T_{P,S}$  – коэффициенты отражения и преломления Френеля (см. [104]).

Построим приближенное решение задачи (4) для рассеянного поля в  $D_0$  с учетом осевой симметрии и поляризации, удовлетворяя квазиклассической системе уравнений Максвелла во всех областях постоянства параметров среды, условиям излучения и дополнительно условиям сопряжения для полей на бесконечной границе раздела полупространств  $\Sigma$ . В основу представления для рассеянного поля положим компоненты Фурье тензора Грина полупространства, которые могут быть записаны в виде интегральных представлений Вейля–Зоммерфельда (см. [50])

$$G_m^{e,h}(\zeta, z_n) = \int_0^\infty J_m(\lambda \rho) v_{11}^{e,h}(\lambda, z, z_n) \lambda^{m+1} d\lambda,$$

$$g_m^{e,h}(\zeta, z_n) = \int_0^\infty J_m(\lambda \rho) v_{31}^{e,h}(\lambda, z, z_n) \lambda^{m+1} d\lambda,$$

где  $J_m(\cdot)$  – цилиндрическая функция Бесселя, точка  $\zeta = (\rho, z)$  располагается в полуплоскости  $\varphi = \text{const}$ , а точки локализации мультиполей распределены вдоль оси симметрии  $z_n \in 0z$  строго внутри  $D_i \cup D_s$ . Спектральные функции электрического и магнитного типов  $v_{11}^{e,h}$ ,  $v_{31}^{e,h}$  обеспечивают выполнение условий сопряжения на границе интерфейса  $z = 0$ . В данном случае для них справедливы следующие выражения:

$$v_{11}^{e,h}(\lambda, z, z_n) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\eta_0 |z - z_n|\}}{\eta_0} + A_{11}^{e,h}(\lambda) \frac{\exp\{-\eta_0(z + z_n)\}}{\eta_0}, & z_n > 0, \quad z \geq 0, \\ B_{11}^{e,h}(\lambda) \frac{\exp\{\eta_1 z - \eta_0 z_n\}}{\eta_0}, & z_n > 0, \quad z \leq 0, \end{cases}$$

$$v_{31}^{e,h}(\lambda, z, z_n) = \begin{cases} A_{31}^{e,h}(\lambda) \exp\{-\eta_0(z + z_n)\}, & z_n > 0, \quad z \geq 0, \\ B_{31}^{e,h}(\lambda) \exp\{\eta_1 z - \eta_0 z_n\}, & z_n > 0, \quad z \leq 0. \end{cases}$$

Спектральные коэффициенты  $A, B$  определяются из одномерной задачи с условиями сопряжения при  $z = 0$ , откуда легко получается, что

$$A_{11}^{e,h}(\lambda) = \frac{\gamma_0^{e,h} - \gamma_1^{e,h}}{\gamma_0^{e,h} + \gamma_1^{e,h}}, \quad B_{11}^{e,h}(\lambda) = \frac{2\gamma_0^{e,h}}{\gamma_0^{e,h} + \gamma_1^{e,h}}, \quad A_{31}^{e,h}(\lambda) = \frac{2\delta}{(\gamma_0^e + \gamma_1^e)(\gamma_0^h + \gamma_1^h)},$$

$$B_{31}^{e,h}(\lambda) = \left(1, \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{2\delta}{(\gamma_0^e + \gamma_1^e)(\gamma_0^h + \gamma_1^h)}, \quad \delta = 1/\epsilon_0 - 1/\epsilon_1,$$

где  $\eta_v = \sqrt{\lambda^2 - k_v^2}$ ,  $\gamma_v^e = \eta_v$ ,  $\gamma_v^h = \eta_v/\epsilon_v$ ,  $v = 0, 1$ .

Будем строить решения с учетом поляризации. Начнем с P поляризации. Тогда для построения приближенного решения для рассеянного поля в  $D_0$  мы будем использовать векторные потенциалы, которые в цилиндрической системе координат могут быть записаны как

$$\mathbf{A}_{mn}^{e,P} = G_m^e(\zeta, z_n) \{ \mathbf{e}_\rho \cos[(m+1)\varphi] - \mathbf{e}_\varphi \sin[(m+1)\varphi] \} - g_{m+1}^e(\zeta, z_n) \mathbf{e}_z \cos[(m+1)\varphi],$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{h,P} = G_m^h(\zeta, z_n) \{ \mathbf{e}_\rho \sin[(m+1)\varphi] + \mathbf{e}_\varphi \cos[(m+1)\varphi] \} - g_{m+1}^h(\zeta, z_n) \mathbf{e}_z \sin[(m+1)\varphi],$$

$$\mathbf{A}_n^{e,P} = G_0^h(\zeta, z_n) \mathbf{e}_z.$$

Само же приближенное решение принимает вид

$$\mathbf{E}_v^{N,P} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,P} \frac{j}{k\epsilon_v} \text{rot rot } \mathbf{A}_{mn}^{e,P} + q_{mn}^{0,P} \frac{j}{\epsilon_v} \text{rot } \mathbf{A}_{mn}^{h,P} \right\} + \sum_{n=1}^{N_0^0} r_n^{0,P} \frac{j}{k\epsilon_v} \text{rot rot } \mathbf{A}_n^{e,P}, \tag{5.8}$$

$$\mathbf{H}_v^{N,P} = \frac{j}{k} \text{rot } \mathbf{E}_v^{N,P}, \quad v = 1, 0.$$

Последний член в формуле (5.8) соответствует вертикальным электрическим диполям. Отметим, что представление для решения в областях  $D_{0,1}$  записывается с единым набором амплитуд  $\{p_{mn}^{0,P}, q_{mn}^{0,P}, r_n^{0,P}\}$ . Последнее обстоятельство является следствием использования тензора Грина для представления решения (5.8).

Обратимся к случаю S поляризации. В этом случае соответствующие векторные потенциалы принимают вид

$$\mathbf{A}_{mn}^{e,S} = G_m^e(\zeta, z_n) \{ \mathbf{e}_\rho \sin[(m+1)\varphi] + \mathbf{e}_\varphi \cos[(m+1)\varphi] \} - g_{m+1}^e(\zeta, z_n) \mathbf{e}_z \sin[(m+1)\varphi],$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{h,S} = G_m^h(\zeta, z_n) \{ \mathbf{e}_\rho \cos[(m+1)\varphi] - \mathbf{e}_\varphi \sin[(m+1)\varphi] \} - g_{m+1}^h(\zeta, z_n) \mathbf{e}_z \cos[(m+1)\varphi],$$

$$\mathbf{A}_n^{h,S} = G_0^e(\zeta, z_n) \mathbf{e}_z.$$

Соответственно приближенное решение для S поляризации будет

$$\mathbf{E}_v^{N,S} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,S} \frac{j}{k\epsilon_v} \text{rot rot } \mathbf{A}_{mn}^{e,S} + q_{mn}^{0,S} \frac{j}{\epsilon_v} \text{rot } \mathbf{A}_{mn}^{h,S} \right\} + \sum_{n=1}^{N_0^0} r_n^{0,S} \frac{j}{\epsilon_v} \text{rot } \mathbf{A}_n^{h,S}, \tag{5.9}$$

$$\mathbf{H}_v^{N,S} = \frac{j}{k} \text{rot } \mathbf{E}_v^{N,S}, \quad v = 1, 0.$$

В данном случае последнее слагаемое (5.9) соответствует вертикальным магнитным диполям. Итак, приближенные решения (5.8), (5.9) удовлетворяют системе уравнений Максвелла (5.1) в  $D_{0,1}$ , условиям излучения, а также условиям сопряжения (5.5) на бесконечной границе раздела полупространств в силу использования компонент тензора Грина. Таким образом, для завершения построения приближенного решения остается построить приближенное решение для внутренней области. Заметим, что это построение нами уже представлено в предыдущем разделе (4.11), (4.13).

Подчеркнем, что численный алгоритм определения неизвестных амплитуд ДИ остается в точности тем же самым, что и в случае свободного пространства. Таким образом, используются проекционные соотношения вида (4.15), (4.16).

Для вычисления характеристик рассеяния в дальней зоне нам понадобится диаграмма направленности рассеянного поля  $\mathbf{F}^{0,1}(\theta, \varphi)$ , которая определяется в верхнем и нижнем полупространствах  $D_{0,1}$  как

$$\mathbf{E}_{0,1}^s(M)/|\mathbf{E}^0(z=0)| = \frac{\exp(-jk_{0,1}r)}{r} \mathbf{F}^{0,1}(\theta, \varphi) + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Тогда компоненты  $(\theta, \varphi)$  диаграммы на  $\Omega^+ = \{0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ; 0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ\}$  – единичной верхней полусфере для Р поляризации – принимают вид

$$F_\theta^{P(0)}(\theta, \varphi) = jk_0 \sum_{m=0}^M (jk_0 \sin \theta)^m \cos(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,P} \left[ \bar{G}_n^{e(0)} \cos \theta + j \frac{k_0}{\epsilon_0} \bar{g}_n^{e(0)} \sin^2 \theta \right] + q_{mn}^{0,P} \bar{G}_n^{h(0)} \right\} - jk_0 \sin \theta \sum_{n=1}^{N_0^0} r_n^{0,P} \bar{G}_n^{h(0)}, \quad (5.11)$$

$$F_\varphi^{P(0)}(\theta, \varphi) = -jk_0 \sum_{m=0}^M (jk_0 \sin \theta)^m \sin(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,P} \bar{G}_n^{e(0)} + q_{mn}^{0,P} \left[ \bar{G}_n^{h(0)} \cos \theta + j \frac{k_0}{\epsilon_0} \bar{g}_n^{h(0)} \sin^2 \theta \right] \right\},$$

$$F_\theta^{S(0)}(\theta, \varphi) = jk_0 \sum_{m=0}^M (jk_0 \sin \theta)^m \sin(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,S} \left[ \bar{G}_n^{e(0)} \cos \theta + j \frac{k_0}{\epsilon_0} \bar{g}_n^{e(0)} \sin^2 \theta \right] - q_{mn}^{0,S} \bar{G}_n^{h(0)} \right\},$$

$$F_\varphi^{S(0)}(\theta, \varphi) = jk_0 \sum_{m=0}^M (jk_0 \sin \theta)^m \cos(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,S} \bar{G}_n^{e(0)} - q_{mn}^{0,S} \left[ \bar{G}_n^{h(0)} \cos \theta + j \frac{k_0}{\epsilon_0} \bar{g}_n^{h(0)} \sin^2 \theta \right] \right\} + j \frac{k_0}{\epsilon_0} \sin \theta \sum_{n=1}^{N_0^0} r_n^{0,S} \bar{G}_n^{e(0)}, \quad (5.12)$$

где соответствующие спектральные функции  $\bar{G}_n^{e,h(0)}$ ,  $\bar{g}_n^{e,h(0)}$  могут быть представлены как

$$\bar{G}_n^{e,h(0)}(\theta) = \exp\{jk_0 z_n \cos \theta\} + A_{11}^{e,h}(k_0 \sin \theta) \exp\{-jk_0 z_n \cos \theta\}, \quad z_n > 0,$$

$$\bar{g}_n^{e,h(0)}(\theta) = jk_0 \cos \theta A_{31}^{e,h}(k_0 \sin \theta) \exp\{-jk_0 z_n \cos \theta\}.$$

Отметим, что при  $\epsilon_0 = \epsilon_1$  представления для диаграмм рассеяния (5.11), (5.12) переходят в соответствующие представления для свободного пространства (4.18), (4.19).

Используя технику, аналогичную [50], нетрудно получить представления для диаграммы направленности в нижнем полупространстве  $\Omega^- = \{90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ; 0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ\}$ , компоненты которой приобретают вид

$$F_\theta^{P(1)}(\theta, \varphi) = jk |\cos \theta| \sum_{m=0}^M (jk_1 \sin \theta)^m \cos(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,P} \left[ \bar{G}_n^{e(1)} \cos \theta + j \frac{k_1}{\epsilon_1} \bar{g}_n^{e(1)} \sin^2 \theta \right] + q_{mn}^{0,P} \bar{G}_n^{h(1)} \right\} - jk |\cos \theta| \sin \theta \sum_{n=1}^{N_0^0} r_n^{0,P} \bar{G}_n^{h(1)}, \quad (5.13)$$

$$F_\varphi^{P(1)}(\theta, \varphi) = -jk |\cos \theta| \sum_{m=0}^M (jk_1 \sin \theta)^m \sin(m+1)\varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,P} \bar{G}_n^{e(1)} + q_{mn}^{0,P} \left[ \bar{G}_n^{h(1)} \cos \theta + j \frac{k_1}{\epsilon_1} \bar{g}_n^{h(1)} \sin^2 \theta \right] \right\}$$

и, соответственно, для S поляризации

$$\begin{aligned}
 F_{\theta}^{S(1)}(\theta, \varphi) &= jk |\cos \theta| \sum_{m=0}^M (jk_1 \sin \theta)^m \sin(m+1) \varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,S} \left[ \bar{G}_n^{e(1)} \cos \theta + j \frac{k_1}{\varepsilon_1} \bar{g}_n^{e(1)} \sin^2 \theta \right] - q_{mn}^{0,S} \bar{G}_n^{h(1)} \right\}, \\
 F_{\varphi}^{S(1)}(\theta, \varphi) &= jk |\cos \theta| \sum_{m=0}^M (jk_1 \sin \theta)^m \cos(m+1) \varphi \sum_{n=1}^{N_0^m} \left\{ p_{mn}^{0,S} \bar{G}_n^{e(1)} - q_{mn}^{0,S} \left[ \bar{G}_n^{h(1)} \cos \theta + j \frac{k_1}{\varepsilon_1} \bar{g}_n^{h(1)} \sin^2 \theta \right] \right\} + \\
 &\quad + j \frac{k_1}{\varepsilon_1} |\cos \theta| \sin \theta \sum_{n=1}^{N_0^0} r_n^{0,S} \bar{G}_n^{e(1)},
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

где спектральные функции  $\bar{G}_n^{e,h(1)}$ ,  $\bar{g}_n^{e,h(1)}$  записываются в виде

$$\begin{aligned}
 \bar{G}_n^{e,h(1)}(\theta) &= (k_1, jk) B_{11}^{e,h}(k_1 \sin \theta) \exp \left\{ -jk \left( \sqrt{1 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta} \right) z_n \right\}, \quad z_n > 0, \\
 \bar{g}_n^{e,h(1)}(\theta) &= (k_1, jk) B_{31}^{e,h}(k_1 \sin \theta) \exp \left\{ -jk \left( \sqrt{1 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta} \right) z_n \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, определяя амплитуды ДИ для рассеянного поля, из проекционных соотношений (4.15), (4.16) можно легко вычислять компоненты диаграммы направленности (5.11)–(5.14) всюду на единичной сфере, а также поля (5.8), (5.9) в непосредственной близости от оболочки слоистой частицы. Подчеркнем еще раз, что диаграмма рассеяния, как в нижнем, так и верхнем полупространстве, вычисляется на основе одних и тех же амплитуд ДИ  $\{p_{mn}^0, q_{mn}^0, r_n^0\}$ , что является следствием использования тензора Грина, реализующего единое представление для рассеянного поля всюду в  $D_{0,1}$ .

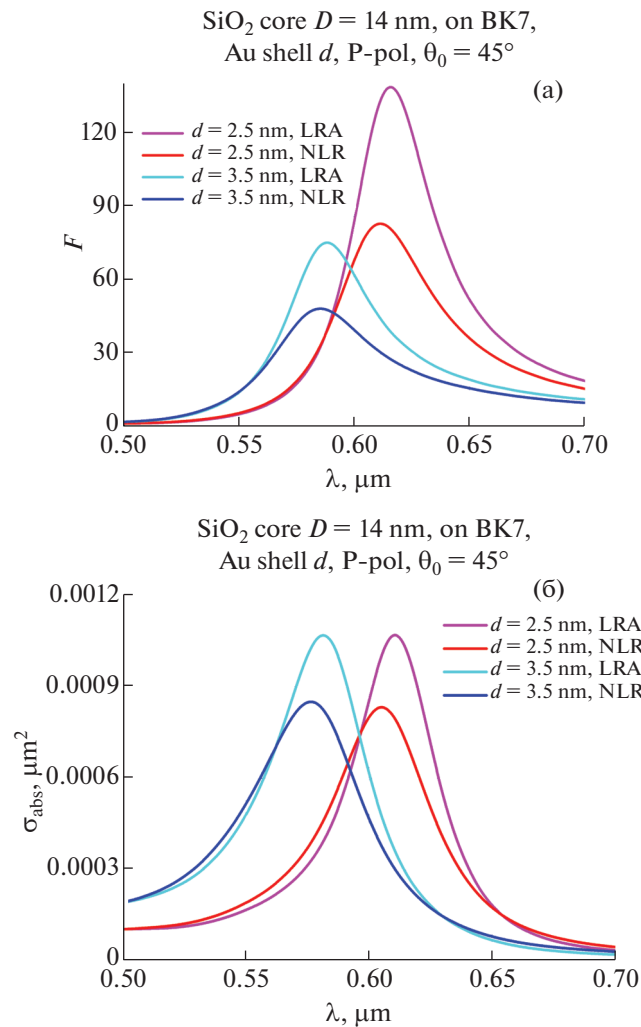
Перейдем к обсуждению результатов моделирования. Прежде всего отметим, что, как показано в [101], случай частицы в присутствии подложки существенно отличается от частицы в свободном пространстве. Например, для наночастиц в свободном пространстве зачастую используют квазистатические (см. [1]) или дипольное приближения (см. [10]). Однако в случае подложки подобные приближения не работают в силу того, что взаимодействие частицы с подложкой вносит дополнительные моменты в представление для ближнего поля, и для его описания необходимо привлекать мультипольные, а не только дипольные источники.

Будем рассматривать слоистую частицу, состоящую из  $\text{SiO}_2$  ( $n_i = 1.46$ ) ядра сферической формы, покрытую золотой (Au) оболочкой толщиной  $d$ , располагающейся в активной среде R6G ( $n_e = 1.326$ ) на поверхности стеклянной призмы BK7 ( $n_1 = 1.52$ ). Нас интересуют численные результаты анализа коэффициента усиления ближнего поля (4.23) и сечения поглощения на внешней границе слоя в диапазоне длин волн

$$\sigma_{abs}^{P,S}(\theta_0, \lambda) = -\text{Re} \int_{\partial D_0} (\mathbf{E}_0^N + \mathbf{E}_0^0) \times (\mathbf{H}_0^N + \mathbf{H}_0^0)^* d\sigma.$$

Поскольку мы будем рассматривать возбуждение плоской волной, распространяющейся не только из верхнего полупространства, но и из-под поверхности призмы, то необходимо определить область неизлучающих волн, располагающуюся за углом полного внутреннего отражения. В соответствии с законом Снеллиуса (см. [104]) имеет место соотношение  $n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$ . Откуда преломленный угол  $\theta_0 = \arcsin[(n_1/n_0) \sin \theta_1]$ . В случае, когда волна падает из более плотной среды в менее плотную  $n_1 > n_0$ , существует критический угол  $\theta_c = \arcsin(n_0/n_1)$ , за которым ( $\theta_1 > \theta_c$ ) волна не проходит в верхнее полупространство, так как полностью отражается от поверхности призмы  $\Sigma$ . При этом энергия распространяется вдоль поверхности раздела полупространств и экспоненциально затухает в направлении, перпендикулярном к поверхности призмы. В этом случае оказывается, что  $\sin \theta_0 > 1$  и  $\cos \theta_0 = -j\sqrt{\sin^2 \theta_0 - 1}$ . Таким образом, амплитуда плоской волны в  $D_0$  приобретает вид  $\exp\{-jk_0 x \sin \theta_0\} \exp\{-k_0 z \sqrt{\sin^2 \theta_0 - 1}\}$ . В нашем конкретном случае критический угол равняется  $\theta_c = 60.735^\circ$ . Следовательно, при углах падения  $\theta_1 > 60.735^\circ$  мы попадаем в область неизлучающих волн.



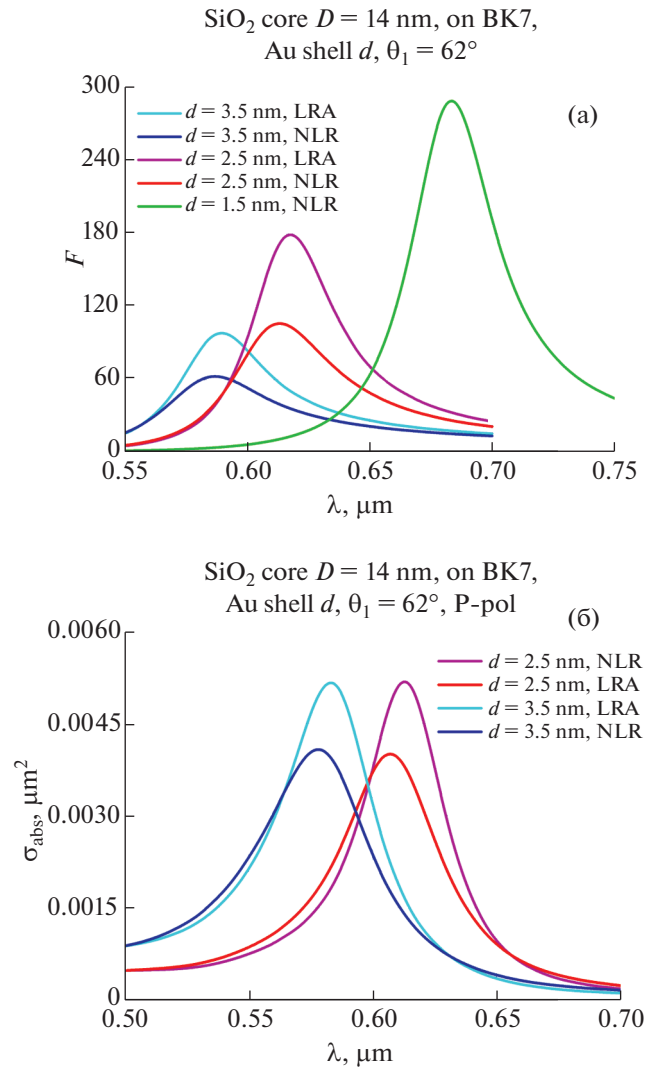


**Фиг. 5.** Результаты расчета  $F^P(\lambda)$  в зависимости от длины волны (а) и для сечения поглощения  $\sigma_{abs}^P$  (б),  $\theta_0 = 45^\circ$ , P – поляризация: 1 –  $d = 2.5$  нм, LRA; 2 –  $d = 2.5$  нм, NLR; 3 –  $d = 3.5$  нм, LRA; 4 –  $d = 3.5$  нм, NLR.

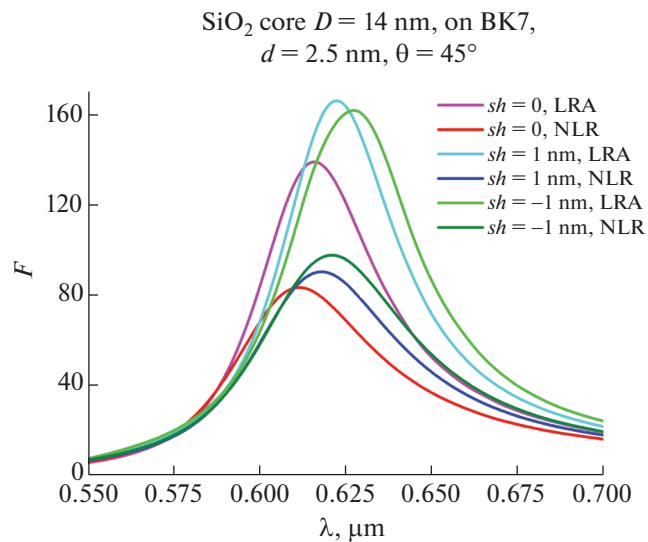
Зафиксируем диаметр диэлектрического ядра слоистой частицы ядра  $D_c = 14$  нм, а толщины золотой оболочки будут, как и ранее,  $d = 2.5, 3.5$  нм. Квантовые параметры будем выбирать в соответствии с (4.24).

На фиг. 5а приведены значения коэффициента усиления (4.23), соответствующего возбуждению плоской волной, распространяющейся из верхнего полупространства под углом  $\theta_0 = 45^\circ$ . Как показали проведенные исследования (см. [101]), этот угол реализует максимальные значения интенсивности ближнего поля. На фиг. 5а видно, что уменьшение толщины золотой пленки приводит к смещению ПР в область длинных волн, при этом учет ЭН приводит к снижению амплитуды ПР до 45%. Сходные с предыдущим результаты можно видеть на фиг. 5б, где изображено сечение поглощения. Однако смещение ПР не сопровождается в данном случае возрастанием его амплитуды, кроме того, учет ЭН приводит к менее заметному уменьшению амплитуды ПР.

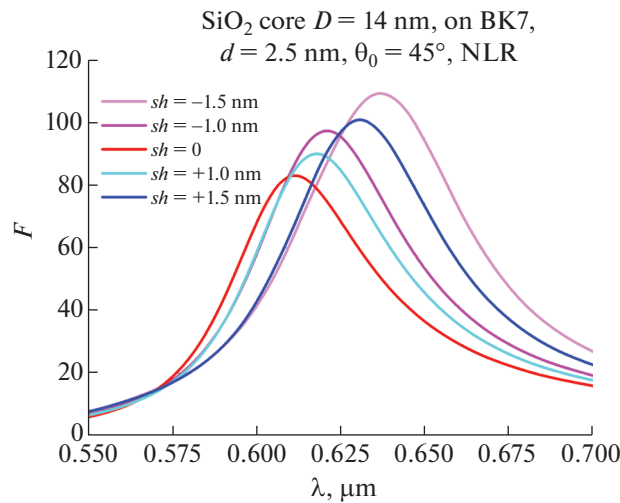
На фиг. 6а приведены результаты возбуждения частицы неизлучающей волной, соответствующей углу падения  $\theta_1 = 62^\circ$ . Несмотря на сходство с фиг. 5а в этом случае амплитуда ПР существенно больше. Что касается снижения при учете ЭН, то оно близко к отмеченному на фиг. 5а. Последняя кривая соответствует толщине слоя  $d = 1.5$  нм с учетом ЭН и нужна для интерпретации результатов, относящихся к асимметричным частицам. На фиг. 6б изображено сечение поглощения и результаты качественно схожи с изображенными на фиг. 5б. Однако легко заметить,



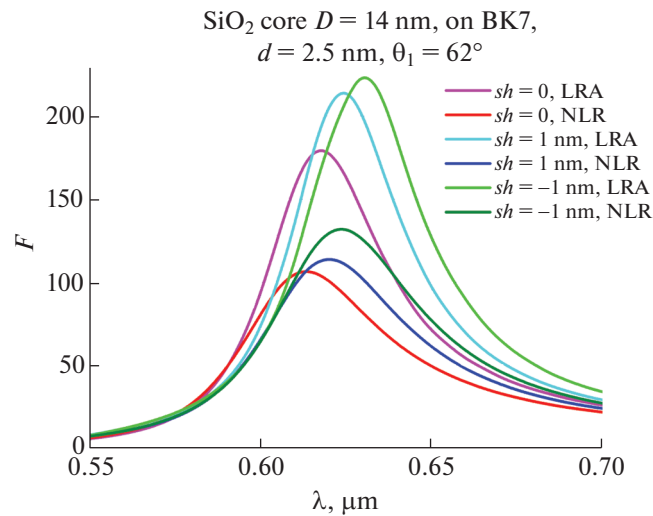
**Фиг. 6.** Результаты расчета  $F^P(\lambda)$  в зависимости от длины волны (а) и для сечения поглощения  $\sigma_{abs}^P(\lambda)$  (б),  $\theta_1 = 62^\circ$ :  
1 –  $d = 3.5$  нм, LRA; 2 –  $d = 3.5$  нм, NLR; 3 –  $d = 2.5$  нм, LRA; 4 –  $d = 2.5$  нм, NLR; 5 –  $d = 1.5$  нм, NLR.



**Фиг. 7.** Результаты расчета  $F^P(\lambda)$ ,  $d = 2.5$  нм,  $\theta_0 = 45^\circ$ : 1 – сдвиг  $sh = 0$ , LRA; 2 –  $sh = 0$ , NLR; 3 – сдвиг  $sh = 1$  нм, LRA; 4 –  $sh = 1$  нм, NLR; 5 – сдвиг  $sh = -1$  нм, LRA; 6 –  $sh = -1$  нм, NLR.



**Фиг. 8.** Результаты расчета  $F^P(\lambda)$ ,  $d = 2.5$  нм,  $\theta_0 = 45^\circ$ , NLR: 1 – сдвиг  $sh = -1.5$  нм; 2 –  $sh = -1$  нм; 3 –  $sh = 0$ ; 4 –  $sh = 1$  нм; 5 – сдвиг  $sh = 1.5$  нм.

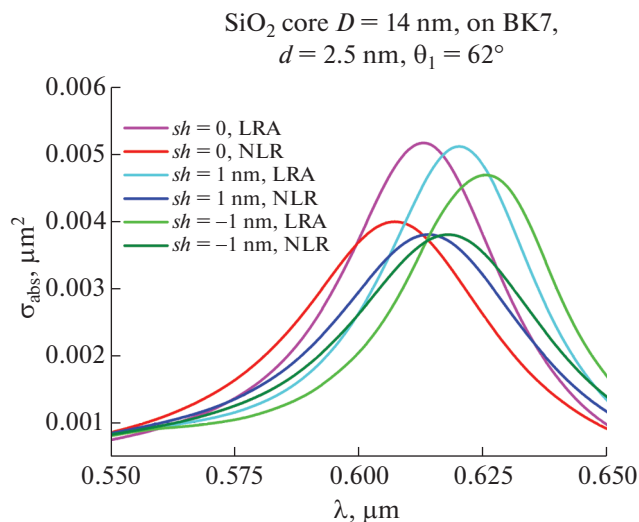


**Фиг. 9.** То же, что на фиг. 7, но при возбуждении неизлучающей волной  $\theta_1 = 62^\circ$ .

что величины сечения поглощения  $\sigma_{abs}^P$  возросли почти в 5 раз по сравнению с возбуждением частицы, распространяющейся волной.

Далее мы будем исследовать влияния асимметрии на оптические характеристики. На фиг. 7 приведены значения коэффициента усиления при возбуждении распространяющейся волной для толщины пленки  $d = 2.5$  нм при различных величинах смещения  $sh$  центра ядра относительно центра внешней поверхности оболочки по оси симметрии. Значение смещения  $\pm$  соответствуют смещению центра вверх и вниз соответственно. Видно, что при любом смещении ПР сдвигается вправо и возрастает. Это еще более заметно на фиг. 8 с результатами, соответствующими учету ЭН: любое смещение вверх и вниз ведет к смещению вправо и увеличению амплитуды ПР.

Сходные с фиг. 7 результаты имеют место для случая возбуждения частицы неизлучающей волной (фиг. 9). Снова любая асимметрия ведет к увеличению амплитуды ПР, что легко объяснить, рассматривая результат на фиг. 6а для  $d = 1.5$  нм. Однако в случае сечения поглощения на-



Фиг. 10. То же, что на фиг. 9, но для сечения поглощения  $\sigma_{abs}^p(\lambda)$ .

блюдается противоположная тенденция, что можно видеть на фиг. 10, где амплитуда ПР снижается вместе с увеличением асимметрии.

Резюмируя полученные результаты, отмечаем, что асимметрия слоистой частицы приводит к изменениям в положении ПР и его амплитуде. При этом в случае с коэффициентом усиления асимметрия ведет к его увеличению, в то время как в случае с сечением поглощения она ведет к снижению величины. По-видимому, увеличение коэффициента усиления связано с появлением тонкой части оболочки, что, как отмечено на фиг. 6а, приводит к существенному росту коэффициента усиления. Во всех рассмотренных случаях учет эффекта нелокальности приводит к снижению ПР при небольшом сдвиге влево в области длин волн (blue shift).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Дискретных источников показал себя эффективным инструментом компьютерного анализа математических моделей при исследовании влияния квантового эффекта нелокального отклика на оптические характеристики несферических слоистых наночастиц, располагающихся как в свободном пространстве, так и вблизи поверхности прозрачной призмы. Установлено, что эффект нелокальности оказывает существенное влияние на характеристики полей как в ближней, так и дальней зонах. В частности, показано, что снижение амплитуды плазмонного резонанса может достигать до 2.5 раз. Установлено, что в случае присутствия прозрачной призмы наибольший эффект проявляется при возбуждении слоистых частиц неизлучающей волной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов В.В. Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2009.
2. Pelton M., Bryant G. Introduction to metal-nanoparticle plasmonics. John Wiley & Sons, 2013.
3. Stockman M.I. Nanoplasmonic sensing and detection // Science. 2015. V. 348. P. 287.
4. Oulton R.F., Sorger V.J., Zentgraf T. et al. Plasmon lasers at deep subwavelength scale // Nature. 2009. V. 461. P. 629.
5. Ding S.Y., Yi J., Li J.F. et al. Nanostructure-based plasmon-enhanced Raman spectroscopy for surface analysis materials // Nat. Rev. Mater. 2016. V. 1. P. 16021.
6. Jeong Y., Kook Y.-M., Lee K., Kohb W.G. Metal enhanced fluorescence (MEF) for biosensors: General approaches and a review of recent developments // Biosensors and Bioelectronics. 2018. V. 111. P. 102.
7. Eremina E., Eremin Y., Wriedt T. Computational nano-optic technology based on discrete sources method (review) // J. Modern Opt. 2011. V. 58. № 5, 6. P. 384.
8. Xu D., Xiong X., Wu L. et al. Quantum plasmonics: new opportunity in fundamental and applied photonics // Adv. Opt. Photon. 2018. V. 10. № 4. P. 703.

9. Oldenburg S.J., Averitt R.D., Westcott S.L., Halas N.J. Nanoengineering of optical resonances // Chem. Phys. Lett. 1998. V. 288. № 2. P. 243.
10. Khlebtsov N.G., Khlebtsov B.N. Optimal design of gold nanomatryoshkas with embedded Raman reporters // J. Quantit. Spectr. Radiat. Trans. 2017. V. 190. P. 89.
11. Gawande M.B., Goswami A., Asefa T., et al. Core-shell nanoparticles: synthesis and applications in catalysis and electrocatalysis // Chemic. Soc. Rev. 2015. V. 44. P. 7540.
12. Frost R., Wadell C., Hellman A. et al. Core-shell nanoplasmonic sensing for characterization of biocorona formation and nanoparticle surface interactions // ACS Sensors. 2016. V. 1. P. 798.
13. Phan A.D., Nga D.T., Viet N.A. Theoretical model for plasmonic photothermal response of gold nanostructures solutions // Opt. Commun. 2018. V. 410. P. 108.
14. Zhang W., Saliba M., Stranks S.D. et al. Enhancement of perovskite-based solar cells employing core-shell metal nanoparticles // Nano Lett. 2013. V. 13. P. 4505.
15. Xu L., Li F., Liu Y., Yao F., Liu S. Surface plasmon nanolaser: Principle, Structure, Characteristics and Applications // Appl. Sci. 2019. V. 9. P. 861.
16. Premaratne M., Stockman M. Theory and technology of SPASERS review // Adv. Opt. Photon. 2017. V. 9. № 1. P. 79.
17. Балыкин В.И. Плазмонный нанолазер: современное состояние и перспективы // Успехи физ. наук. 2018. Т. 188. №9. С. 935.
18. Sudarkin A.N., Demkovich P.A. Excitation of surface electromagnetic wave on the boundary of a metal with an amplified medium // Sov. Phys. Tech. Phys. 1988. V. 34. P. 764.
19. Bergman D.J., Stockman M.I. Surface plasmon amplification by stimulated emission of radiation: quantum generation of coherent surface plasmons in nanosystems // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. N027402.
20. Noginov M.A., Zhu G., Belgrave A.M., et al. Demonstration of spaser-based nanolaser // Nature. 2009. V. 460. P. 1110.
21. Stockman M.I., Kneipp K., Bozhevolnyi S.I. et al. Roadmap on plasmonics // J. Opt. 2018. V. 20. N 043001.
22. Liaw J.W., Chen H.C., Kuo M.K. Comparison of Au and Ag nanoshells metal-enhanced fluorescence // J. Quantit. Spectr. Radiat. Trans. 2014. V. 146. P. 321.
23. Li Q., Zhang W., Zhao D., Qiu M. Photothermal enhancement in core-shell structured plasmonic nanoparticles // Plasmonics. 2014. V. 9. P. 623.
24. Raza S., Bozhevolnyi S.I., Wubs M., Mortensen N.A. Nonlocal optical response in metallic nanostructures. Topical Review // J. Phys. Condens. Matter. 2015. V. 27. N183204.
25. Barbry M., Koval P., Marchesin F., Esteban R. et al. Atomistic near-field nanoplasmonics: reaching atomic-scale resolution in nanooptics // Nano Lett. 2015. V. 15. P. 3410.
26. David C., García de Abajo F.J. Spatial Nonlocality in the Optical Response of Metal Nanoparticles // J. Phys. Chem. C. 2011. V. 115. P. 19470.
27. Ciraci C., Pendry J.B., Smith D.R. Hydrodynamic model for plasmonics: a macroscopic approach to a microscopic problem // Chem. Phys. Chem. 2013. V. 14. P. 1109.
28. Derkachova A., Kolwas K., Demchenko I. Dielectric function for gold in plasmonics applications: Size dependence of plasmon resonance frequencies and damping rates for nanospheres // Plasmonics. 2016. V. 11. P. 941.
29. Mortensen N.A., Raza S., Wubs M., Søndergaard T., Bozhevolnyi S.I. A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures // Nature Commun. 2014. V. 5. P. 3809.
30. Huang Y., Gao L. Superscattering of Light from Core-shell Nonlocal Plasmonic Nanoparticles // J. Phys. Chem. C. 2014. V. 118. № 51. P. 30170.
31. Wubs M., Mortensen N.A. Nonlocal response in plasmonic nanostructures / In Quantum Plasmonics; Bozhevolnyi S.I., Martin-Moreno L., Garcia-Vidal F.J. Eds. Springer Inter. Publ.: Cham, 2017. V. 185. Ch.: P. 279.
32. Kahnert M. Numerical solutions of the macroscopic Maxwell equations for scattering by non-spherical particles: A tutorial review // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2016. V. 178. P. 22.
33. Gallinet B., Butet J., Martin O.J.F. Numerical methods for nanophotonics: standard problems and future challenges (Review) // Laser Photon. Rev. 2015. V. 9 (6). P. 577.
34. Yurkin M.A. Computational approaches for plasmonics/In book: Handbook of Molecular Plasmonics, Chapter: 2. Eds. F. Della Sala, S. D'Agostino. Pan Stanford Publ., 2013. P. 83–135.
35. Taflove A., Hagness S.C. Computational electrodynamics – the finite-difference time-domain method, 3rd ed., Artech House Publ., 2005.
36. Jin J.M. The Finite element method in electromagnetics, 3rd ed. Wiley-IEEE Press, 2014.
37. Busch K., König M., Niegemann J. Discontinuous Galerkin methods in nanophotonics // Laser Photon. Rev. 2011. V. 5(6). P. 773.
38. Nguyen N.C., Peraire J., Cockburn B. Hybridizable discontinuous Galerkin methods for the time-harmonic Maxwell's equations // J. Comput. Phys. 2011. V. 230(19). P. 7151.

39. *Li L., Lanteri S., Perrussel R.* A hybridizable discontinuous Galerkin method combined to a Schwarz algorithm for the solution of 3d timeharmonic Maxwell's equation // *J. Comput. Phys.* 2014. V. 256 (1). P. 563.
40. *Khlebtsov N.G.* T-matrix method in plasmonics: An overview // *J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans.* 2013. V. 123. P. 184.
41. *Hafner Ch., Smajic J., Agio M.* Numerical methods for the electrodynamic analysis of nanostructures / Nano-clusters and nanostructured surfaces. *A.K. Ray*, Editor. 2010, American Sci. Publ.: Valencia, California, USA. P. 207–274.
42. *Eremin Yu.A., Sveshnikov A.G.* Mathematical models in nanooptics and biophotonics problems on the base of discrete sources method // *Comput. Maths. Math. Phys.* 2007. V. 47. № 2. P. 262.
43. *Huang Y.Q., Li J.C., Yang W.* Theoretical and numerical analysis of a nonlocal dispersion model for light interaction with metallic nanostructures // *Comput. Math. Appl.* 2016. V. 72. P. 921.
44. *Schmitt N., Scheid C., Lanteri S. et al.* A DGT method for the numerical modeling of the interaction of light with nanometer scale metallic structures taking into account non-local dispersion effects // *J. Comput. Phys.* 2016. V. 316 (1). P. 396.
45. *Li L., Lanteri S., Mortensen N.A., Wubs M.* A hybridizable discontinuous Galerkin method for solving nonlocal optical response models // *Comput. Phys. Commun.* 2017. V. 219. P. 99.
46. *Zheng X., Kupresak M., Mitra R., et al.* A boundary integral equation scheme for simulating the nonlocal hydrodynamic response of metallic antennas at deep-nanometer scales // *IEEE Trans. AP.* 2018. V. 66. № 9. P. 4759.
47. [www.comsol.com](http://www.comsol.com)
48. *Eremin Yu.A., Wriedt T., Hergert W.* Analysis of the scattering properties of 3D non-spherical plasmonic nanoparticles accounting for nonlocal effects // *J. Mod. Opt.* 2018. V. 65. P. 1778.
49. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Концепция квазиразрешения задач дифракции // *Матем. моделирование.* 1994. Т. 6. № 6. С. 76.
50. *Eremin Yu.A., Orlov N.V., Sveshnikov A.G.* Models of electromagnetic scattering problems based on discrete sources methods / Generalizes multipole techniques for electromagnetic and light scattering. Ed. T. Wriedt. *Elsevier Sci., Amsterdam*, 1999. P. 39.
51. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Математические модели задач нанооптики и биофотоники на основе метода дискретных источников // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 2. С. 266.
52. *Doicu A., Eremin Yu., Wriedt T.* Acoustic and electromagnetic scattering analysis using discrete sources. *Acad. Press, New York*, 2000.
53. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
54. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г., Скобелев С.П.* Метод нулевого поля в задачах дифракции волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. Т. 51. № 8. С. 1490.
55. *Купрадзе В.Д.* О приближенном решении задач математической физики // *Успехи матем. наук.* 1967. Т. 22. Вып. 2. С. 58.
56. *Алексидзе М.А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978.
57. *Поповиди-Заридзе Р.С., Цверикмазашвили З.С.* Численное решение задачи дифракции модифицированным методом неортогональных рядов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1977. Т. 17. № 2. С. 384.
58. *Zaridze R., Bit-Babik G., Tavzarashvili K. et al.* The method of auxiliary sources (MAS) – solution of propagation, diffraction and inverse problems using MAS / *Uzunoglu N.K., Nikita K.S., Kaklamani D.I.* (eds.) *Applied computational electromagnetics.* NATO ASI Ser. V. 171. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000. P. 33.
59. *Okuno Y., Yasuura K.* Numerical algorithm based on the mode-matching method with a singular-smoothing procedure for analysing edge-type scattering problems // *IEEE Trans. AP.* 1982. V. 30 (4). P. 580.
60. *Matsushima A., Matsuda T., Okuno Y.* Introduction to Yasuura's method of modal expansion with application to grating problems / The generalized multipole technique for light scattering. T. Wriedt, Yu. Eremin eds. Springer, 2018. P. 169.
61. *Leviatan Y.* Analytic continuation considerations when using generalized formulations for scattering problems // *IEEE Trans. AP.* 1990. V. 38. P. 1259.
62. *Tsitsas N.L., Zouros G.P., Fikioris G., Leviatan Y.* On methods employing auxiliary sources for two-dimensional electromagnetic scattering by non-circular shapes // *IEEE Trans. AP.* 2018. V. 66. № 10. P. 5443.
63. *Fikioris G., Tsitsas N.L.* Convergent fields generalized by divergent currents in the method of auxiliary sources / The generalized multipole technique for light scattering. T. Wriedt, Yu. Eremin eds. Springer, 2018. P. 93.
64. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах рассеяния электромагнитных волн // *Успехи соврем. радиоэлектроники.* 2003. № 10. С. 3.
65. *Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Анализ рассеивающих свойств неосесимметричных дефектов подложки методом дискретных источников // *Опт. спектр.* 2014. Т. 117. № 6. С. 964.
66. *Hafner Ch.* Post-modern electromagnetics using intelligent Maxwell solvers. Wiley, Chichester, 1999.
67. *Hafner Ch., Smajic J., Agio M.* Numerical methods for the electrodynamic analysis of nanostructures, in nano-clusters and nanostructured surfaces / *Ray A.K.* editor. American Sci. Publ.: Valencia, California, USA, 2010. P. 207.
68. *Wriedt T., Eremin Yu.* eds. The generalized multipole technique for light scattering. Springer, 2018.
69. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Исследование задач дифракции на диэлектрических телах методом дискретных источников // *Изв. Вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28. № 5. С. 647.

70. Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Анализ экстремальных рассеивателей на основе метода дискретных источников // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон. 2003. № 2. С. 18.
71. Еремин Ю.А. Представление полей в методе дискретных источников через источники в комплексной плоскости // Докл. АН. 1983. Т. 270. № 4. С. 864.
72. Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Новая концепция метода дискретных источников в задачах электромагнитного рассеяния // Матем. моделир. 2015. Т. 27. № 8. С. 3.
73. Eremina E., Eremin Yu., Wriedt T. Analysis of light scattering by erythrocytes based on discrete sources method // Opt. Commun. 2005. V. 244. P. 15.
74. Eremina E., Eremin Yu., Wriedt T. Modeling of light scattering properties of a nanoshell on a plane interface: influence of a core material and polarization // J. Comput. Theoret. Nanosci. 2008. V. 5. № 11. P. 2186.
75. Eremina E., Grishina N., Eremin Yu. et al. Total internal reflection microscopy with multilayered interface: light scattering model based on discrete sources method // J. Opt. A. 2006. V. 8. P. 999.
76. Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Эффект экстремального просачивания энергии через проводящую пленку с наноразмерной неоднородностью в области неизлучающих волн // Докл. АН. 2009. Т. 424. № 1. С. 22.
77. Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Анализ рассеивающих свойств внедренных частиц методом дискретных источников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 9. С. 1666.
78. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: Макс Пресс, 2008.
79. Eremin Yu.A., Zakharov E.V., Nesmeyanova N.I. The method of fundamental solutions in problems of diffraction of electromagnetic waves by bodies of revolution // Seven papers in Applied Math. V. 125. P. 51.
80. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Влияние квантовых эффектов на оптические свойства парных плазмонных частиц с субнанометровым зазором // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 118.
81. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод анализа влияния квантового эффекта нелокальности на характеристики плазмонного нанолазера // Докл. АН. 2020. Т. 490. С. 24.
82. Eremin Yu., Doicu A., Wriedt T. A numerical method for analyzing the near field enhancement of non-spherical dielectric-core metallic-shell particles accounting for the non-local dispersion // J. Opt. Soc. Am. A. 2020. V. 37. № 7. P. 1135.
83. Ruppin R. Optical properties of small metal spheres // Phys. Rev. B. 1975. V. 11. P. 2871.
84. Ruppin R. Optical properties of a spatially dispersive cylinder // J. Opt. Soc. Am. B. 1989. V. 6. P. 1559.
85. Ruppin R. Extinction properties of thin metallic nanowires // Opt. Commun. 2001. V. 190. P. 205.
86. Eremin Yu., Doicu A., Wriedt T. Discrete sources method for modeling the nonlocal optical response of a non-spherical particle dimer // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2018. V. 217. P. 35.
87. Tserkezis C., Yan W., Hsieh W. et al. On the origin of nonlocal damping in plasmonic monomers and dimers // Int. J. Mod. Phys. B. 2017. V. 31. N1740005.
88. Boardman A., Ruppin R. The boundary conditions between two spatially dispersive media // Surface Sci. 1981. V. 112. P. 153.
89. Komar P., Gosecka M., Gadzinowski M. et al. Core-shell spheroidal microparticles with polystyrene cores and rich in polyglycidol shells // Polymer. 2018. V. 146. P. 6.
90. Bhatia P., Verma S.S., Sinha M.M. Tuning the optical properties of Fe-Au core-shell nanoparticles with spherical and spheroidal nanostructures // Phys. Let. A. 2019. V. 383. № 21. P. 2542.
91. Evlyukin A., Nerkararyan K.V., Bozhevolnyi S.I. Core-shell particles as efficient broadband absorbers in infrared optical range // Opt. Express. 2019. V. 27. P. 17474.
92. Rajkumar S., Prabakaran M. Multi-functional core-shell Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>Au nanoparticles for cancer diagnosis and therapy // Colloids Surf. B: Biointerfaces. 2019. V. 174. P. 252.
93. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод Дискретных источников для исследования влияния нелокальности на характеристики резонаторов плазмонного нанолазера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 12. С. 2175.
94. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
95. Morozov V.A. Regularization Methods for Ill-Posed Problems // SIAM Rev. 1994. V. 36. № 3. P. 505–506.
96. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
97. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
98. <http://www.refractiveindex.info>.
99. Sidorenko I., Nizamov Sh., Hergenröder R. et al. Computer assisted detection and quantification of single adsorbing nanoparticles by differential surface plasmon microscopy // Microchim Acta. 2015. V. 183. P. 101.
100. Aşar D., Ertürk H., Mengüç M.P. Plasmonic responses of metallic/dielectric core-shell nanoparticles on a dielectric substrate // Mater. Res. Express. 2019. V. 6. N065006.
101. Еремин Ю.А. Анализ влияния нелокальности на характеристики ближнего поля слоистой частицы на подложке // Опт. Спектр. 2020. Т. 128. С. 1388.
102. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Влияние асимметрии геометрии слоистой частицы на подложке на оптические характеристики с учетом пространственной дисперсии // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 2020. № 5. С. 91.
103. Jerez-Hanckes C., Nédélec J.C. Asymptotics for Helmholtz and Maxwell Solutions in 3-D Open Waveguides // Commun. Comput. Phys. 2012. V. 11. № 2. P. 629.
104. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 713 с.

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.6

### МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ<sup>1)</sup>

© 2021 г. Р. Ф. Марданов<sup>1,\*</sup>, А. Е. Марданова<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup> 420008 Казань, ул. Кремлевская, 18, К(П)ФУ, Россия

\*e-mail: Renat.Mardanov@kpfu.ru

\*\*e-mail: AEMardanova@kpfu.ru

Поступила в редакцию 23.01.2020 г.

Переработанный вариант 23.01.2020 г.

Принята к публикации 16.12.2020 г.

Предложен метод граничных элементов для решения неоднородного бигармонического уравнения с правой частью, содержащей искомую функцию и ее производные. Точность численных результатов исследована для тестовой задачи сравнением с аналитическим решением. Получено численное решение задачи о расчете фильтрационного течения в пористой среде с неоднородным распределением проницаемости в рамках модели Бринкмана. Библ. 16. Фиг. 5. Табл. 1.

**Ключевые слова:** бигармоническое уравнение, метод граничных элементов, фильтрация, модель Бринкмана, неоднородная проницаемость.

DOI: 10.31857/S0044466921040086

#### ВВЕДЕНИЕ

Бигармоническое уравнение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка вида

$$\Delta^2 f = v, \quad (0.1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа. Уравнение (0.1) широко применяется в механике сплошных сред: например, в задачах расчета изгиба плоской упругой пластины под действием нагрузки [1] и течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса в рамках модели Стокса [2]. В приведенных примерах правая часть уравнения (0.1) является известной функцией, и численные методы решения таких задач хорошо развиты [3], [4].

Отдельный класс задач механики сводится к более сложному бигармоническому уравнению, правая часть которого содержит саму искомую функцию и ее производные. Классическим примером является задача о расчете вязкого течения в рамках модели Навье–Стокса с использованием переменных функции тока  $\psi$  и завихренности  $\omega = -\Delta\psi$ . В этом случае функция тока  $\psi$  удовлетворяет уравнению [5], [6]

$$\Delta^2 \psi = \text{Re} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad (0.2)$$

где  $\text{Re}$  – число Рейнольдса. Уравнение (0.2) нелинейное и его решение находится в основном численными итерационными методами [3], [7], [8].

Настоящая работа посвящена решению неоднородного бигармонического уравнения с линейной правой частью, содержащей искомую функцию и ее производные. Предложенный под-

<sup>1)</sup>Статья подготовлена в рамках реализации программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.



ход основан на методе граничных и областных элементов (МГОЭ) (boundary domain integral method (BDIM)) [5], [9]–[11], позволяющем решить задачу без организации итерационного процесса. Проведена апробация метода для тестовой задачи сравнением с известным аналитическим решением. В качестве примера практического применения выполнено решение задачи о расчете плоского фильтрационного течения в пористой среде с пространственно неоднородным распределением проницаемости. Полученное решение сопоставлено с результатом вычислительного эксперимента по детальному расчету течения вязкой жидкости в межпоровом пространстве модельной пористой среды в рамках модели Стокса. Результаты числовых расчетов для обеих задач подтвердили эффективность и хорошую точность предложенного численного метода.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим функцию  $f(x, y)$ , удовлетворяющую в области  $\Omega$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , неоднородному бигармоническому уравнению (0.1). Правая часть  $v(x, y)$  в общем случае зависит от искомой функции  $f$  и ее производных:

$$v = v_0 + v_1 f + v_2 \frac{\partial f}{\partial x} + v_3 \frac{\partial f}{\partial y} + v_4 \Delta f + v_5 \frac{\partial(\Delta f)}{\partial x} + v_6 \frac{\partial(\Delta f)}{\partial y}, \quad (1.1)$$

где заданные функции  $v_i = v_i(x, y)$ ,  $i = \overline{0, 6}$ , являются функциями координат  $(x, y)$ . Граничные условия могут иметь следующий вид:

$$f|_{\Gamma} = h_1(s), \quad f'|_{\Gamma} = h_2(s), \quad \Delta f|_{\Gamma} = h_3(s), \quad (\Delta f)'|_{\Gamma} = h_4(s), \quad (1.2)$$

где  $h_i(s)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  – известные функции,  $s$  – дуговая абсцисса контура  $\Gamma$ , отсчитываемая от некоторой точки так, что область  $\Omega$  остается слева, а штрих означает производную по направлению внешней нормали  $n$ , т.е.  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial n$ . Граница  $\Gamma$  разбита на участки  $\Gamma^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, N}$ , на каждом из которых заданы по два граничных условия вида (1.2), в зависимости от конкретной решаемой задачи.

Требуется определить функцию  $f(x, y)$ .

## 2. РЕШЕНИЕ

Для решения поставленной задачи используем МГОЭ по аналогии с тем, как это было сделано для уравнений Пуассона и Гельмгольца в работах [10], [11]. Перепишем уравнение (0.1) четвертого порядка в виде системы двух уравнений второго порядка

$$\Delta f = g, \quad \Delta g = v \quad (2.1)$$

для функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ . Используя известное интегральное соотношение Рэля–Грина для бигармонического уравнения [6], запишем эквивалентную пару интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \chi(x, y)f(x, y) = & \int_{\Gamma} [f(s)G_1'(x, y, s) - f'(s)G_1(x, y, s) + \\ & + g(s)G_2'(x, y, s) - g'(s)G_2(x, y, s)]ds + \int_{\Omega} v(\xi, \eta)G_2(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\chi(x, y)g(x, y) = \int_{\Gamma} [g(s)G_1'(x, y, s) - g'(s)G_1(x, y, s)]ds + \int_{\Omega} v(\xi, \eta)G_1(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

где  $\chi(x, y) = 2\pi$  для внутренних точек  $(x, y) \in \Omega$ ,  $\chi(x, y) = \beta$  для граничных точек  $(x, y) \in \Gamma$  ( $\beta$  – внутренний к области  $\Omega$  угол в точке на границе  $\Gamma$ ). Функции Грина для бигармонического уравнения имеют вид

$$G_1 = \ln \rho, \quad G_2 = \frac{\rho^2}{4}(\ln \rho - 1), \quad (2.4)$$

$$\rho(x, y, s) = \sqrt{(x_1(s) - x)^2 + (y_1(s) - y)^2}, \quad \rho(x, y, \xi, \eta) = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

где  $(x_1, y_1)$  – координаты точки интегрирования на границе  $\Gamma$  с дуговой абсциссой  $s$ , а  $(\xi, \eta)$  – координаты точки интегрирования в области  $\Omega$ .

Функция  $v(x, y)$  (1.1), которую с учетом (2.1) перепишем в виде

$$v = v_0 + v_1 f + v_2 \frac{\partial f}{\partial x} + v_3 \frac{\partial f}{\partial y} + v_4 g + v_5 \frac{\partial g}{\partial x} + v_6 \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (2.5)$$

содержит производные неизвестных функций  $f$  и  $g$ . Для получения замкнутой системы интегральных уравнений продифференцируем (2.2) и (2.3) по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} & \chi(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \int_{\Gamma} \left[ f(s) \frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial x} - f'(s) \frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + g(s) \frac{\partial G_2(x, y, s)}{\partial x} - g'(s) \frac{\partial G_2(x, y, s)}{\partial x} \right] ds + \int_{\Omega} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \chi(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \int_{\Gamma} \left[ f(s) \frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial y} - f'(s) \frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial y} + \right. \\ & \left. + g(s) \frac{\partial G_2'(x, y, s)}{\partial y} - g'(s) \frac{\partial G_2(x, y, s)}{\partial y} \right] ds + \int_{\Omega} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\chi(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \int_{\Gamma} \left[ g(s) \frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial x} - g'(s) \frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial x} \right] ds + \int_{\Omega} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta, \quad (2.8)$$

$$\chi(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \int_{\Gamma} \left[ g(s) \frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial y} - g'(s) \frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial y} \right] ds + \int_{\Omega} v(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta. \quad (2.9)$$

Согласно методу граничных элементов, представим границу  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$  в виде набора прямолинейных отрезков  $\Gamma_j$ , а область  $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$  в виде набора площадных элементов  $\Omega_k$  (трех- или четырехугольных). Функции  $f(s)$ ,  $f'(s)$ ,  $g(s)$ ,  $g'(s)$  аппроксимируем кусочно-постоянными функциями со значениями  $f_j$ ,  $f'_j$ ,  $g_j$ ,  $g'_j$  на отрезках  $\Gamma_j$ , а функции  $v_i(\xi, \eta)$ ,  $i = \overline{0, 6}$ ,  $f(\xi, \eta)$ ,  $\partial f / \partial x(\xi, \eta)$ ,  $\partial f / \partial y(\xi, \eta)$ ,  $g(\xi, \eta)$ ,  $\partial g / \partial x(\xi, \eta)$ ,  $\partial g / \partial y(\xi, \eta)$  – кусочно-постоянными функциями со значениями  $v_{ik}$ ,  $\tilde{f}_k$ ,  $\tilde{f}_{xk}$ ,  $\tilde{f}_{yk}$ ,  $\tilde{g}_k$ ,  $\tilde{g}_{xk}$ ,  $\tilde{g}_{yk}$  в площадных элементах  $\Omega_k$ . Тогда уравнения (2.2), (2.3), (2.6)–(2.9) с учетом (2.5) примут вид

$$\chi(x, y) f(x, y) = \sum_{j=1}^n \left\{ f_j \int_{\Gamma_j} G_1' ds - f'_j \int_{\Gamma_j} G_1 ds + g_j \int_{\Gamma_j} G_2' ds - g'_j \int_{\Gamma_j} G_2 ds \right\} + \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k \int_{\Omega_k} G_2 d\xi d\eta, \quad (2.10)$$

$$\chi(x, y) g(x, y) = \sum_{j=1}^n \left\{ g_j \int_{\Gamma_j} G_1' ds - g'_j \int_{\Gamma_j} G_1 ds \right\} + \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k \int_{\Omega_k} G_1 d\xi d\eta, \quad (2.11)$$

$$\chi(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \left\{ f_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'}{\partial x} ds - f'_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1}{\partial x} ds + g_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2'}{\partial x} ds - g'_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2}{\partial x} ds \right\} + \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2}{\partial x} d\xi d\eta, \quad (2.12)$$

$$\chi(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^n \left\{ f_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'}{\partial y} ds - f'_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1}{\partial y} ds + g_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2'}{\partial y} ds - g'_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2}{\partial y} ds \right\} + \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2}{\partial y} d\xi d\eta, \quad (2.13)$$

$$\chi(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \left\{ g_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'}{\partial x} ds - g'_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1}{\partial x} ds \right\} + \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1}{\partial x} d\xi d\eta, \quad (2.14)$$

$$\chi(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^n \left\{ g_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'}{\partial y} ds - g'_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1}{\partial y} ds \right\} + \sum_{k=1}^m \tilde{v}_k \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1}{\partial y} d\xi d\eta, \quad (2.15)$$

где

$$\tilde{v}_k = v_{0k} + v_{1k}\tilde{f}_k + v_{2k}f_{xk} + v_{3k}f_{yk} + v_{4k}\tilde{g}_k + v_{5k}g_{xk} + v_{6k}g_{yk}.$$

Рассмотрев выражения (2.10)–(2.11) в центрах линейных элементов  $\Gamma_i$  с координатами  $(x_{ci}, y_{ci})$ , запишем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \{A_{ij}^{(1)} f_j + B_{ij}^{(1)} f'_j + C_{ij}^{(1)} g_j + D_{ij}^{(1)} g'_j\} + \sum_{k=1}^m \{E_{ik1}^{(1)} \tilde{f}_k + E_{ik2}^{(1)} f_{xk} + E_{ik3}^{(1)} f_{yk} + E_{ik4}^{(1)} \tilde{g}_k + E_{ik5}^{(1)} g_{xk} + E_{ik6}^{(1)} g_{yk}\} = a_i, \\ \sum_{j=1}^n \{C_{ij}^{(2)} g_j + D_{ij}^{(2)} g'_j\} + \sum_{k=1}^m \{E_{ik1}^{(2)} \tilde{f}_k + E_{ik2}^{(2)} f_{xk} + E_{ik3}^{(2)} f_{yk} + E_{ik4}^{(2)} \tilde{g}_k + E_{ik5}^{(2)} g_{xk} + E_{ik6}^{(2)} g_{yk}\} = b_i, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $i = \overline{1, n}$ . Рассмотрев выражения (2.10)–(2.15) в центрах площадных элементов  $\Omega_l$  с координатами  $(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl})$ , запишем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \{A_{lj}^{(3)} f_j + B_{lj}^{(3)} f'_j + C_{lj}^{(3)} g_j + D_{lj}^{(3)} g'_j\} + \\ + \sum_{k=1}^m \{E_{lk1}^{(3)} \tilde{f}_k + E_{lk2}^{(3)} f_{xk} + E_{lk3}^{(3)} f_{yk} + E_{lk4}^{(3)} \tilde{g}_k + E_{lk5}^{(3)} g_{xk} + E_{lk6}^{(3)} g_{yk}\} = c_l, \\ \sum_{j=1}^n \{C_{lj}^{(4)} g_j + D_{lj}^{(4)} g'_j\} + \sum_{k=1}^m \{E_{lk1}^{(4)} \tilde{f}_k + E_{lk2}^{(4)} f_{xk} + E_{lk3}^{(4)} f_{yk} + E_{lk4}^{(4)} \tilde{g}_k + E_{lk5}^{(4)} g_{xk} + E_{lk6}^{(4)} g_{yk}\} = d_l, \\ \sum_{j=1}^n \{A_{lj}^{(5)} f_j + B_{lj}^{(5)} f'_j + C_{lj}^{(5)} g_j + D_{lj}^{(5)} g'_j\} + \\ + \sum_{k=1}^m \{E_{lk1}^{(5)} \tilde{f}_k + E_{lk2}^{(5)} f_{xk} + E_{lk3}^{(5)} f_{yk} + E_{lk4}^{(5)} \tilde{g}_k + E_{lk5}^{(5)} g_{xk} + E_{lk6}^{(5)} g_{yk}\} = e_l, \quad (2.17) \\ \sum_{j=1}^n \{A_{lj}^{(6)} f_j + B_{lj}^{(6)} f'_j + C_{lj}^{(6)} g_j + D_{lj}^{(6)} g'_j\} + \\ + \sum_{k=1}^m \{E_{lk1}^{(6)} \tilde{f}_k + E_{lk2}^{(6)} f_{xk} + E_{lk3}^{(6)} f_{yk} + E_{lk4}^{(6)} \tilde{g}_k + E_{lk5}^{(6)} g_{xk} + E_{lk6}^{(6)} g_{yk}\} = h_l, \\ \sum_{j=1}^n \{C_{lj}^{(7)} g_j + D_{lj}^{(7)} g'_j\} + \sum_{k=1}^m \{E_{lk1}^{(7)} \tilde{f}_k + E_{lk2}^{(7)} f_{xk} + E_{lk3}^{(7)} f_{yk} + E_{lk4}^{(7)} \tilde{g}_k + E_{lk5}^{(7)} g_{xk} + E_{lk6}^{(7)} g_{yk}\} = q_l, \\ \sum_{j=1}^n \{C_{lj}^{(8)} g_j + D_{lj}^{(8)} g'_j\} + \sum_{k=1}^m \{E_{lk1}^{(8)} \tilde{f}_k + E_{lk2}^{(8)} f_{xk} + E_{lk3}^{(8)} f_{yk} + E_{lk4}^{(8)} \tilde{g}_k + E_{lk5}^{(8)} g_{xk} + E_{lk6}^{(8)} g_{yk}\} = t_l, \end{aligned}$$

где  $l = \overline{1, m}$ . Таким образом, соотношения (2.16), (2.17) представляют собой систему  $2n + 6m$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $4n + 6m$  неизвестных:  $f_j, f'_j, g_j, g'_j, j = \overline{1, n}; \tilde{f}_k, f_{xk}, f_{yk}, \tilde{g}_k, g_{xk}, g_{yk}, k = \overline{1, m}$ . Коэффициенты СЛАУ определены следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} G_1'(x_{ci}, y_{ci}, s) ds - \beta_i \delta_{ij}, & B_{ij}^{(1)} &= - \int_{\Gamma_j} G_1(x_{ci}, y_{ci}, s) ds, \\ C_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} G_2'(x_{ci}, y_{ci}, s) ds, & D_{ij}^{(1)} &= - \int_{\Gamma_j} G_2(x_{ci}, y_{ci}, s) ds, \\ E_{ikp}^{(1)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} G_2(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta) d\xi d\eta, & a_i &= - \sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} G_2(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta) d\xi d\eta, \\ C_{ij}^{(2)} &= A_{ij}^{(1)}, & D_{ij}^{(2)} &= B_{ij}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{ikp}^{(2)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} G_1(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta) d\xi d\eta, & b_i &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} G_1(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta) d\xi d\eta, \\
A_{ij}^{(3)} &= \int_{\Gamma_j} G_1'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s) ds, & B_{ij}^{(3)} &= -\int_{\Gamma_j} G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s) ds, \\
C_{ij}^{(3)} &= \int_{\Gamma_j} G_2'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s) ds, & D_{ij}^{(3)} &= -\int_{\Gamma_j} G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s) ds, \\
E_{lkp}^{(3)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta) d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{1p}, & c_l &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta) d\xi d\eta, \\
C_{ij}^{(4)} &= A_{ij}^{(3)}, & D_{ij}^{(4)} &= B_{ij}^{(3)}, \\
E_{lkp}^{(4)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta) d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{4p}, & d_l &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta) d\xi d\eta, \\
A_{ij}^{(5)} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x} ds, & B_{ij}^{(5)} &= -\int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x} ds, \\
C_{ij}^{(5)} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x} ds, & D_{ij}^{(5)} &= -\int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x} ds, \\
E_{lkp}^{(5)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{2p}, & e_l &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta, \\
A_{ij}^{(6)} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y} ds, & B_{ij}^{(6)} &= -\int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y} ds, \\
C_{ij}^{(6)} &= \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y} ds, & D_{ij}^{(6)} &= -\int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y} ds, \\
E_{lkp}^{(6)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{3p}, & h_l &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta, \\
C_{ij}^{(7)} &= A_{ij}^{(5)}, & D_{ij}^{(7)} &= B_{ij}^{(5)}, \\
E_{lkp}^{(7)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{5p}, & q_l &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x} d\xi d\eta, \\
C_{ij}^{(8)} &= A_{ij}^{(6)}, & D_{ij}^{(8)} &= B_{ij}^{(6)}, \\
E_{lkp}^{(8)} &= v_{pk} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{6p}, & t_l &= -\sum_{k=1}^m v_{0k} \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y} d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{lk}$ ,  $\delta_{rp}$ ,  $r = \overline{1, 6}$  – символы Кронекера, а  $v_{pk} = v_p(\tilde{x}_{ck}, \tilde{y}_{ck})$ ,  $p = \overline{0, 6}$ . Для замыкания системы уравнений необходимо добавить к ней  $2n$  соотношений из двух граничных условий вида (1.2), записанных в точках  $(x_{ci}, y_{ci})$ .

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

При численной реализации предложенного метода решения основную сложность и расчетное время как при составлении матрицы СЛАУ (2.16), (2.17), так и при нахождении искомого

функций в расчетной точке с координатами  $(x, y)$  по формулам (2.10)–(2.15) занимает вычисление интегралов от функций  $G_1, G_1', G_2, G_2', \partial G_1/\partial x, \partial G_1/\partial y, \partial G_1'/\partial x, \partial G_1'/\partial y, \partial G_2/\partial x, \partial G_2/\partial y, \partial G_2'/\partial x, \partial G_2'/\partial y$  по линейным элементам  $\Gamma_j$  и областным элементам  $\Omega_k$ . Аналитические формулы вычисления интегралов по линейным элементам получены в работе [12]. Для областных интегралов введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int_{\Omega_k} G_1 d\xi d\eta, \quad I_2 = \int_{\Omega_k} G_2 d\xi d\eta, \quad I_3 = \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1}{\partial x} d\xi d\eta,$$

$$I_4 = \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_1}{\partial y} d\xi d\eta, \quad I_5 = \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2}{\partial x} d\xi d\eta, \quad I_6 = \int_{\Omega_k} \frac{\partial G_2}{\partial y} d\xi d\eta.$$

Аналитическая формула для вычисления  $I_1$  в случае, когда областным элементом является треугольник, получена в работе [10]. На основе подходов, использованных в этих работах, выведем аналитические формулы для вычисления интегралов  $I_2$ – $I_6$  также для случая треугольного областного элемента.

Воспользуемся обозначениями, введенными в работе [10]. Обозначим комплексную координату расчетной точки  $(x, y)$  через  $z = x + iy$ , комплексные координаты вершин треугольника  $\Omega_k$  через  $(z_1, z_2, z_3)$ , комплексную координату текущей точки интегрирования  $(\xi, \eta)$  в треугольнике –  $z^* = \xi + i\eta$ . Порядок индексации вершин треугольника должен быть таков, чтобы при обходе вершин с возрастанием индекса внутренность треугольника оставалась слева. Для сокращения записи введем новую комплексную координату  $\zeta = z^* - z$ , т.е. перейдем в новую комплексную плоскость, в которой начало координат  $\zeta = 0$  совпадает с расчетной точкой  $z$ . Тогда новые координаты вершин треугольника запишутся в виде (фиг. 1а)

$$\zeta_1 = z_1 - z, \quad \zeta_2 = z_2 - z, \quad \zeta_3 = z_3 - z.$$

Так же обозначим

$$\zeta_{21} = \zeta_2 - \zeta_1 = l_1 e^{i\gamma_1}, \quad \zeta_{32} = \zeta_3 - \zeta_2 = l_2 e^{i\gamma_2}, \quad \zeta_{13} = \zeta_1 - \zeta_3 = l_3 e^{i\gamma_3}, \tag{3.1}$$

где  $l_1, l_2, l_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – длины сторон треугольника и углы, которые они образуют с горизонталью соответственно. Во введенных обозначениях выражение для вычисления интеграла  $I_1$  в случае, когда  $z$  располагается снаружи треугольника, следующее [10]:

$$I_1 = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \left( \frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} [\zeta^2 (2 \ln \zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_3} + [\zeta^2 (2 \ln \zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \right) \right\}, \tag{3.2}$$

а когда  $z$  совпадает с одним из углов, например, с  $z_1$  имеем

$$I_1 = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \zeta_2 [\zeta (2 \ln \zeta - 3)]_{\zeta_2}^{\zeta_3} \right\}. \tag{3.3}$$

Здесь и ниже использовано обозначение, введенное в [10], [12]

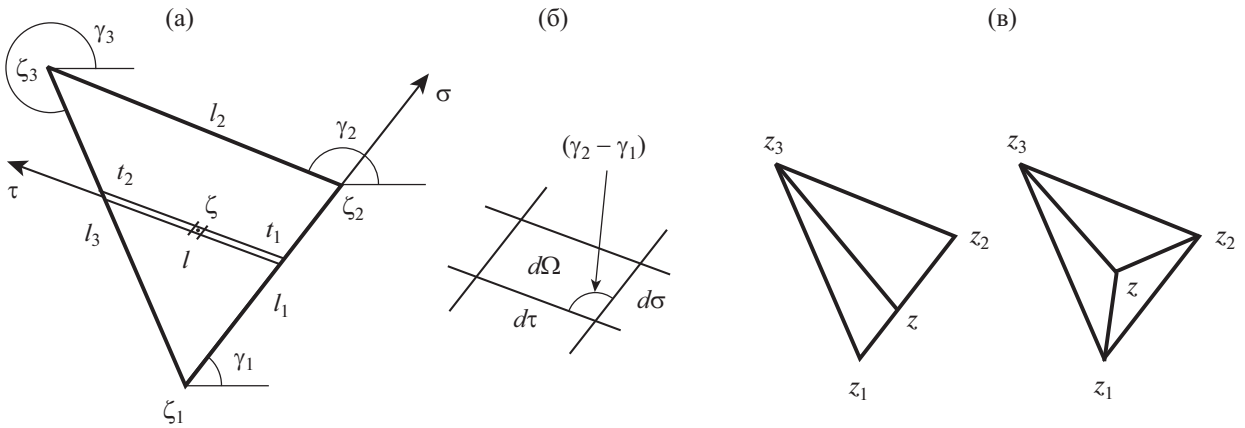
$$[f(\zeta)]_{t_1}^{t_2} = f(t_2) - f(t_1).$$

Вычислим интеграл  $I_2$ . Рассмотрим сначала случай, когда расчетная точка  $z$  находится снаружи треугольника. Для выполнения интегрирования введем локальные оси координат: ось  $\sigma$ , направленную вдоль стороны  $\zeta_1 \zeta_2$  треугольника, и ось  $\tau$ , направленную параллельно стороне  $\zeta_2 \zeta_3$  треугольника, но проходящую через текущую точку интегрирования  $\zeta$ . Элементарной площадью интегрирования является параллелограмм со сторонами  $d\sigma$  и  $d\tau$  и углом  $(\gamma_2 - \gamma_1)$  между ними (фиг. 1б), тогда площадь этого элемента равна

$$d\Omega = |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| d\tau d\sigma. \tag{3.4}$$

Из (2.4) имеем

$$G_2 = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \{ \zeta \bar{\zeta} (\ln \zeta - 1) \}.$$



Фиг. 1. Интегрирование по треугольнику.

Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение. Вывод аналитического выражения для вычисления интеграла  $I_2$  проведем, следуя методике вычисления интеграла  $I_1$  в [10]. Подставив последнее выражение в  $I_2$  с учетом (3.4), запишем

$$I_2 = \frac{1}{4} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Re} J, \quad J = \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} \zeta \bar{\zeta} (\ln \zeta - 1) d\tau d\sigma, \quad (3.5)$$

где  $l$  – длина отрезка интегрирования вдоль оси  $\tau$ . Так как при интегрировании вдоль оси  $\tau$  дифференциал  $d\zeta = e^{i\gamma_2} d\tau$ , то перейдем во внутреннем интеграле к интегрированию по комплексной переменной  $\zeta$ :

$$J = \int_0^{l_1} e^{-i\gamma_2} J_1 d\sigma, \quad J_1 = \int_{t_1}^{t_2} \zeta \bar{\zeta} (\ln \zeta - 1) d\zeta.$$

Подынтегральная функция в  $J_1$  не является аналитической, поэтому, воспользовавшись способом вычисления подобного интеграла по частям, приведенным в [12], найдем

$$J_1 = \frac{1}{4} \left[ \zeta^2 \bar{\zeta} (2 \ln \zeta - 3) - \frac{\zeta^3 e^{-2i\gamma_2}}{9} (6 \ln \zeta - 11) \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Для комплексных координат  $t_1$  и  $t_2$  (начальной и конечной точек интегрирования на оси  $\tau$ ) имеет место соотношение

$$t_1 = \zeta_1 + \sigma e^{i\gamma_1}, \quad t_2 = t_1 + \frac{\zeta_{32}}{\zeta_{21}} (t_1 - \zeta_1),$$

откуда

$$dt_1 = e^{i\gamma_1} d\sigma, \quad dt_2 = -\frac{\zeta_{13}}{\zeta_{21}} e^{i\gamma_1} d\sigma.$$

При вычислении интеграла по переменной  $\sigma$  перейдем к интегрированию по комплексным переменным  $t_1$  и  $t_2$ . С учетом последних соотношений подставим найденное значение интеграла  $J_1$  в  $J$ :

$$J = -\frac{e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)}}{4} \left[ \frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} \left( J_2 - \frac{e^{-2i\gamma_2}}{9} J_3 \right) + J_4 - \frac{e^{-2i\gamma_2}}{9} J_5 \right], \quad (3.6)$$

где

$$J_2 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_3} t_2^2 \bar{t}_2 (2 \ln t_2 - 3) dt_2, \quad J_3 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_3} t_2^3 (6 \ln t_2 - 11) dt_2,$$

$$J_4 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} t_1^2 \bar{t}_1 (2 \ln t_1 - 3) dt_1, \quad J_5 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} t_1^3 (6 \ln t_1 - 11) dt_1.$$

Вычислив эти интегралы

$$J_2 = \frac{1}{9} \left[ \zeta^3 \bar{\zeta} (6 \ln \zeta - 11) - \frac{e^{-2i\gamma_3}}{8} \zeta^4 (12 \ln \zeta - 25) \right]_{\zeta_1}^{\zeta_3},$$

$$J_4 = \frac{1}{9} \left[ \zeta^3 \bar{\zeta} (6 \ln \zeta - 11) - \frac{e^{-2i\gamma_1}}{8} \zeta^4 (12 \ln \zeta - 25) \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2},$$

$$J_3 = \frac{1}{8} [\zeta^4 (12 \ln \zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_3}, \quad J_5 = \frac{1}{8} [\zeta^4 (12 \ln \zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

и подставив их в (3.6), а затем полученное выражение в (3.5), в итоге найдем

$$I_2 = -\frac{1}{144} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \left( \frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} J_6 + J_7 \right) \right\},$$

$$J_6 = [\zeta^3 \bar{\zeta} (6 \ln \zeta - 11) - F(\zeta_3) \zeta^4 (12 \ln \zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_3},$$

$$J_7 = [\zeta^3 \bar{\zeta} (6 \ln \zeta - 11) - F(\zeta_2) \zeta^4 (12 \ln \zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_2},$$
(3.7)

где

$$F(\zeta_1) = \frac{e^{-2i\gamma_1} + e^{-2i\gamma_3}}{8}, \quad F(\zeta_2) = \frac{e^{-2i\gamma_2} + e^{-2i\gamma_1}}{8}, \quad F(\zeta_3) = \frac{e^{-2i\gamma_3} + e^{-2i\gamma_2}}{8}. \quad (3.8)$$

Если текущая точка  $z$  совпадает с одним из углов треугольника, то формула вычисления интеграла упрощается. Для случая, когда  $z$  совпадает с вершиной  $z_1$ , с учетом (3.1) имеем

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_{21} = \zeta_2, \quad \zeta_{13} = -\zeta_3. \quad (3.9)$$

Подставив эти значения в (3.7) и упростив выражение, с учетом (3.8) получим

$$I_2 = \frac{1}{144} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \zeta_2^2 [\zeta^2 \bar{\zeta} (6 \ln \zeta - 11) - \zeta^3 (12 \ln \zeta - 25) F(\zeta)]_{\zeta_2}^{\zeta_3} \right\}. \quad (3.10)$$

Для применения этой формулы в случае совпадения  $z$  с  $z_2$  или с  $z_3$  достаточно циклически переиндексировать вершины треугольника. Если текущая точка  $z$  располагается на одной из сторон треугольника или внутри него, то этот треугольник необходимо разбить на два или три треугольника (см. фиг. 1в) и вычислить интеграл как сумму двух или трех интегралов с учетом формулы (3.10).

Для вычисления интегралов  $I_3 - I_6$  продифференцируем формулы (3.2), (3.3), (3.7), (3.10) по  $x$  и  $y$  с учетом соотношений

$$\frac{d\zeta}{dx} = -1, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dx} = -1, \quad \frac{d\zeta}{dy} = -i, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dy} = i.$$

В итоге для случая, когда  $z$  расположена снаружи треугольника, получим

$$I_3 = \operatorname{Re} J_8, \quad I_4 = -\operatorname{Im} J_8,$$

$$I_5 = \frac{1}{144} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \left( \frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} ((1 - 8F(\zeta_3))J_9 + J_{10}) + (1 - 8F(\zeta_2))J_{11} + J_{12} \right) \right\},$$

$$I_6 = -\frac{1}{144} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Im} \left\{ e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \left( \frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} ((1 + 8F(\zeta_3))J_9 - J_{10}) + (1 + 8F(\zeta_2))J_{11} - J_{12} \right) \right\},$$

где

$$J_8 = |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \left( \frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} [\zeta(\ln \zeta - 1)]_{\zeta_1}^{\zeta_3} + [\zeta(\ln \zeta - 1)]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \right),$$

$$J_9 = [\zeta^3(6 \ln \zeta - 1)]_{\zeta_1}^{\zeta_3}, \quad J_{10} = 9[\zeta^2 \bar{\zeta}(2 \ln \zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_3},$$

$$J_{11} = [\zeta^3(6 \ln \zeta - 1)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}, \quad J_{12} = 9[\zeta^2 \bar{\zeta}(2 \ln \zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}.$$

Для случая, когда  $z$  совпадает с  $z_1$ , с учетом (3.9) имеем

$$I_3 = -\operatorname{Re} J_{13}, \quad I_4 = \operatorname{Im} J_{13},$$

$$I_5 = -\frac{1}{144} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Re} \left\{ e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \zeta_2 (J_{14} + J_{15} - J_{16}) \right\},$$

$$I_6 = \frac{1}{144} |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Im} \left\{ e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \zeta_2 (-J_{14} + J_{15} - J_{16}) \right\},$$

где

$$J_{13} = |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| e^{-i(\gamma_2 + \gamma_1)} \zeta_2 [\ln \zeta]_{\zeta_2}^{\zeta_3},$$

$$J_{14} = [\zeta^2(6 \ln \zeta - 1)]_{\zeta_2}^{\zeta_3}, \quad J_{15} = 9[\zeta \bar{\zeta}(2 \ln \zeta - 3)]_{\zeta_2}^{\zeta_3},$$

$$J_{16} = 8[\zeta^2(6 \ln \zeta - 1)F(\zeta)]_{\zeta_2}^{\zeta_3}.$$

Для вычисления интегралов  $I_1 - I_6$  по четырехугольному элементу достаточно разбить его на два треугольника по любой из диагоналей.

#### 4. ТЕСТОВЫЙ РАСЧЕТ

В тестовом расчете в качестве области  $\Omega = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$  возьмем квадрат с единичной стороной, левый нижний угол которого совпадает с началом координат. Каждую из сторон квадрата разобьем на равное количество  $n_1$  линейных элементов одинаковой длины, тогда общее число линейных элементов будет равно  $n = 4n_1$ . Расчетную область покроем равномерной квадратной сеткой размерности  $(n_1 \times n_1)$ , состоящей из одинаковых четырехугольных элементов. Таким образом, общее количество площадных элементов равно  $m = n_1^2$ . Для оценки точности введем величины абсолютной и относительной погрешностей:

$$\varepsilon_a^f = \max_k |f(x_k, y_k) - f_a(x_k, y_k)|, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_e^f = \frac{1}{K} \sum_k \left| \frac{f(x_k, y_k) - f_a(x_k, y_k)}{f_{\max}} \right|, \quad (4.2)$$

где  $f_a(x, y)$  – аналитическое решение, а  $f_{\max} = \max_{(x, y) \in \Omega} f_a(x, y)$ . В качестве набора контрольных точек  $(x_k, y_k)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , выберем точки, лежащие в углах областных элементов и образующие равномерную квадратную сетку размерности  $((n_1 + 1) \times (n_1 + 1))$ , покрывающую область  $\Omega$ . Аналогично введем абсолютную  $\varepsilon_a^g$  и относительную  $\varepsilon_e^g$  погрешности для функции  $g(x, y)$ .

В тестовой серии расчетов проведено решение неоднородного бигармонического уравнения (0.1) с правой частью (1.1), в которой функции  $v_i = v_i(x, y)$ ,  $i = \overline{0, 6}$ , приняты равными

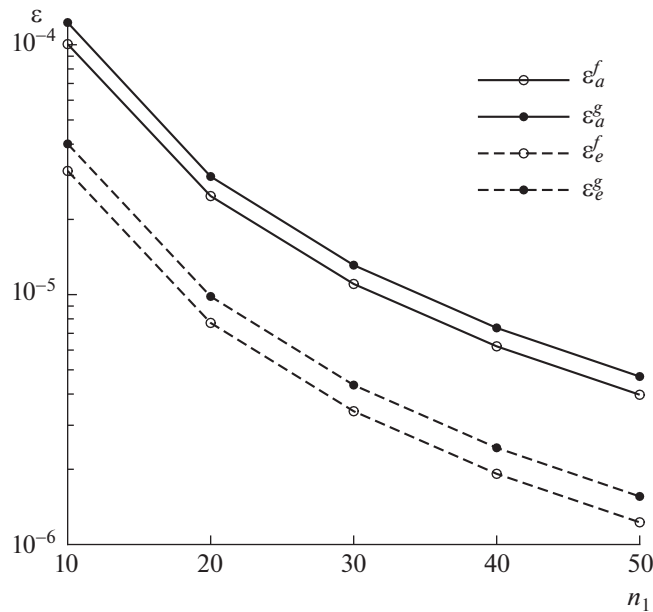
$$v_0 = x^2 y^2 \cos x, \quad v_1 = x, \quad v_2 = \sin x, \quad v_3 = y,$$

$$v_4 = \cos x, \quad v_5 = x^2 y, \quad v_6 = xy$$

и подобраны так, чтобы решением неоднородного бигармонического уравнения была функция

$$f_a(x, y) = -g_a(x, y) = y \sin x.$$





Фиг. 2. Зависимости погрешностей в тестовом расчете от  $n_1$ .

В качестве граничных зададим следующие условия:

$$f|_{\Gamma} = f_a(x_1(s), y_1(s)), \quad \Delta f|_{\Gamma} = g_a(x_1(s), y_1(s)).$$

В ходе тестовых расчетов определялись значения погрешностей  $\epsilon_a^f, \epsilon_a^g, \epsilon_e^f, \epsilon_e^g$  в зависимости от параметра  $n_1$ , определяющего детальность разбиения границы  $\Gamma$  и области  $\Omega$  на линейные и областные элементы. На фиг. 2 представлены результаты вычислений для значений  $n_1 = 10, 20, 30, 40, 50$ . Как видно из фигуры, абсолютная и относительная погрешности для функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  не велики и уменьшаются с ростом числа разбиений, что свидетельствует о хорошей точности и сеточной сходимости разработанного метода.

### 5. РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ БРИНКМАНА В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Продемонстрируем возможности предложенного метода на примере двумерной задачи о фильтрации жидкости в пористой области с неоднородным распределением проницаемости в рамках модели Бринкмана [13]

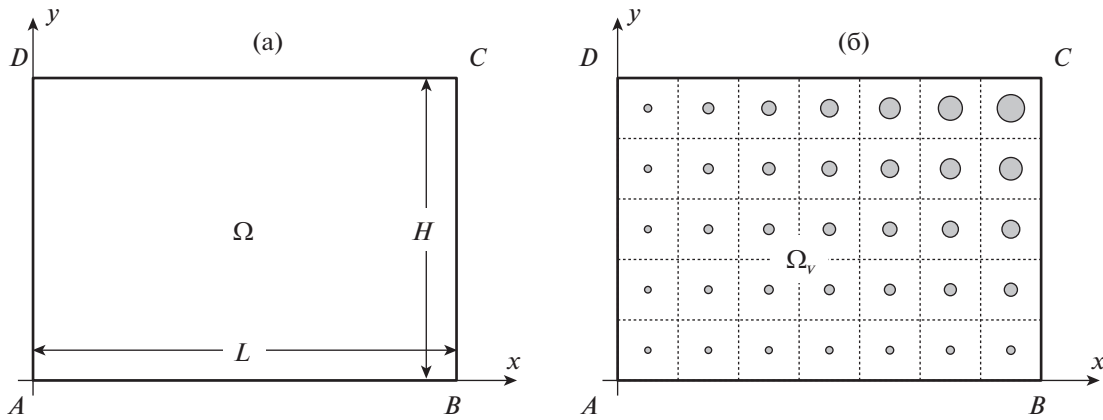
$$-\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} + \mu_b \Delta \mathbf{u} = 0, \tag{5.1}$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{5.2}$$

где  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  – вектор скорости фильтрации жидкости,  $p$  – давление,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $\mu_b = \mu_b(x, y)$  – эффективная вязкость фильтрационного потока,  $k = k(x, y)$  – проницаемость пористой среды. В качестве расчетной выберем прямоугольную область  $\Omega = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq H\}$  (фиг. 3а). Будем считать, что жидкость течет в области  $\Omega$  слева направо, поступая через отрезок  $AD$  и выходя через отрезок  $BC$ , а горизонтальные участки границы  $AB$  и  $CD$  являются линиями тока. Расход потока задан и равен  $Q$ .

На основании уравнения неразрывности (5.2) введем функцию тока  $\psi$  и завихренности  $\omega$  равенствами

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\Delta \psi. \tag{5.3}$$



Фиг. 3. Расчетные области  $\Omega$  (а) и  $\Omega_v$  (б).

Выбрав в качестве характерных размерных величин высоту  $H$  области и среднюю скорость потока  $U = Q/H$ , перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{H}, & \bar{y} &= \frac{y}{H}, & \bar{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{u}}{U}, & \bar{\Psi} &= \frac{\Psi}{UH}, & \bar{\omega} &= \frac{H}{U} \omega, \\ \bar{p} &= \frac{H}{U\mu} p, & \bar{\mu}_b &= \frac{\mu_b}{\mu}, & \bar{k} &= \frac{k}{H^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В дальнейшем черточки опустим и будем работать с безразмерными величинами.

Перепишем закон Бринкмана (5.1) с учетом (5.3) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \mu_b \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{k} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \mu_b \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Исключив из этих уравнений давление  $p$  и выразив член со старшей производной, получим

$$\Delta^2 \Psi = -\frac{1}{k^2 \mu_b} \left( \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{1}{k \mu_b} \omega + \frac{1}{\mu_b} \left( \frac{\partial \mu_b}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_b}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right). \quad (5.5)$$

Это уравнение является неоднородным бигармоническим уравнением вида (0.1), где с учетом (1.1)

$$\begin{aligned} f &= \Psi, & g &= -\omega, & v_0 &= v_1 = 0, & v_2 &= -\frac{1}{k^2 \mu_b} \frac{\partial k}{\partial x}, & v_3 &= -\frac{1}{k^2 \mu_b} \frac{\partial k}{\partial y}, \\ v_4 &= \frac{1}{k \mu_b}, & v_5 &= -\frac{1}{\mu_b} \frac{\partial \mu_b}{\partial x}, & v_6 &= -\frac{1}{\mu_b} \frac{\partial \mu_b}{\partial y}. \end{aligned}$$

Отметим, что если считать пористую среду однородной, то  $v_2 = v_3 = v_5 = v_6 \equiv 0$  и уравнение (5.5) перейдет в известное уравнение Бринкмана

$$\Delta^2 \Psi - S^2 \Delta \Psi = 0,$$

где  $S^2 = (k \mu_b)^{-1}$ .

Искомая функция  $\psi(x, y)$  удовлетворяет в области  $\Omega$  уравнению (5.5), а на ее границе следующим граничным условиям. На входном участке  $AD$  границы

$$\Psi = q(y), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad (5.6)$$

что соответствует заданному профилю скорости потока  $u_x(0, y) = \frac{dq}{dy}$ ,  $u_y(0, y) \equiv 0$ , где  $q(y)$  – известная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям  $q(0) = 0$ ,  $q(1) = 1$ . На выходном участке  $BC$  границы зададим мягкие граничные условия

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0. \tag{5.7}$$

На участках  $AB$  и  $CD$  потребуем выполнения условий непротекания

$$\psi = 0, \quad \omega = 0, \tag{5.8}$$

$$\psi = 1, \quad \omega = 0 \tag{5.9}$$

соответственно. Для решения краевой задачи (5.5)–(5.7) используем метод, описанный в разд. 2.

Для оценки точности численного решения получим решение этой же задачи с использованием микроскопического подхода, формируя пористую среду, составленную множеством цилиндров. Течение вязкой жидкости в межпоровом пространстве описывается в рамках модели Стокса

$$-\nabla p + \Delta \mathbf{v} = 0, \tag{5.10}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{5.11}$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  – истинная скорость вязкой жидкости. На основании равенства (5.11), записав соотношения, аналогичные (5.3), введем функцию тока  $\psi_s$  и завихренности  $\omega_s$  вязкого течения. Из (5.10) следует, что функция тока удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \psi_s = 0. \tag{5.12}$$

Рассмотрим модельную пористую среду, представляющую собой периодическую структуру продублированных в вертикальном и горизонтальном направлениях элементарных ячеек (ЭЯ), каждая из которых содержит твердое включение. Для настоящего расчета будем полагать, что ЭЯ имеет форму квадрата со стороной  $h$ , в центре которого расположено круговое включение радиуса  $r$ . Такая пористая среда аналогична модельной пористой среде конфигурации S1 в работе [14], однако, радиусы круговых включений в ЭЯ будем полагать различными, что позволит моделировать заданное неоднородное распределение проницаемости  $k(x, y)$  пористой среды. Таким образом, расчетная область  $\Omega$  полностью покрыта квадратной сеткой ЭЯ размерности  $(n_x \times n_y)$ , где  $n_x = L/h$ ,  $n_y = H/h$  (фиг. 3б). Для каждой ЭЯ локальное значение объемной концентрации твердых включений определим по формуле

$$\phi = \frac{\pi r^2}{h^2}, \tag{5.13}$$

тогда локальное значение пористости  $m = 1 - \phi$ .

Дадим следующую математическую постановку задачи вычислительного эксперимента. Требуется определить функцию тока  $\psi_s(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (5.12) в области  $\Omega_v$  – межпоровом пространстве пористой среды в области  $\Omega$ . На участках внешней границы области  $\Omega_v$  потребуем выполнения граничных условий (5.6), (5.7). На поверхности каждого твердого включения  $\ell_k$ ,  $k = 1, n_x n_y$ , зададим условия прилипания

$$\psi_s = \psi_k, \quad \frac{\partial \psi_s}{\partial n} = 0,$$

где  $\psi_k$  – неизвестное заранее значение функции тока на поверхности  $k$ -го включения. Для решения этой задачи используем метод граничных элементов (МГЭ) по аналогии с тем, как это было сделано в работах [12], [14]. Для твердых включений малого размера, для которых вычисленное по формуле (5.13) значение концентрации  $\phi < 0.01$ , воспользуемся подходом МГЭ с представлением неизвестных функций на границе включений усеченным рядом Фурье, описанным в [15]. Это позволит снизить количество искомых неизвестных без потери точности расчета.

По рассчитанной в области  $\Omega_v$  функции  $\psi_s(x, y)$  построим осредненную функцию  $\tilde{\psi}_s(x, y)$ , определенную во всех точках области  $\Omega$ , способом, описанным в [15]. Значения функции  $\tilde{\psi}_s(x, y)$  возьмем равными значениям  $\psi_s(x, y)$  в угловых точках и серединах сторон всех ЭЯ, а в их цен-

трах – соответствующим значениям  $\psi_k$  на поверхностях твердых включений, содержащихся в каждой ЭЯ. Перечисленные точки покрывают всю область  $\Omega$  равномерной квадратной сеткой. В остальных точках области  $\Omega$  осредненная функция тока строится билинейной интерполяцией по найденным значениям в узлах этой сетки. Будем называть решение в рамках микроскопического подхода вычислительным экспериментом.

Для сравнения решим также поставленную задачу в рамках модели Дарси. Уравнение для функции тока  $\psi_d$  фильтрационного течения по этой модели в случае неоднородного распределения проницаемости приведено в работе [11] и во введенных безразмерных переменных (5.4) имеет вид

$$\Delta\psi_d = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \psi_d}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \psi_d}{\partial y} \right). \quad (5.14)$$

Математическая постановка задачи следующая. Требуется определить функцию тока  $\psi_d(x, y)$ , удовлетворяющую в области  $\Omega$  уравнению (5.14), а на ее границе граничным условиям:

$$AB: \psi_d = 0, \quad BC: \frac{\partial \psi_d}{\partial n} = 0, \quad CD: \psi_d = 1, \quad AD: \psi_d = q(y).$$

Уравнение (5.14) представляет собой уравнение Пуассона с неизвестными функциями в правой части. Для его решения также воспользуемся МГОЭ, изложение которого для решения этого уравнения приведено в [11].

Зададим неоднородное распределение проницаемости в виде следующей зависимости:

$$k(x, y) = k_{\min} + k_0 \left( \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right) (k_{\max} - k_{\min}), \quad (5.15)$$

где  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  – заданные минимальное и максимальное значения проницаемости в области  $\Omega$ , а

$$k_0(\xi, \eta) = 1 - \varphi(\xi)\varphi(\eta), \quad \varphi(\xi) = \begin{cases} 2^{p-1}\xi^p, & 0 \leq \xi \leq 0.5, \\ 1 - 2^{p-1}(1 - \xi)^p, & 0.5 < \xi \leq 1. \end{cases}$$

График функции  $\varphi(\xi)$  для  $p = 4$  и изолинии функции  $k_0(\xi, \eta)$  приведены на фиг. 4.

Для проведения расчетов в рамках микроскопического подхода необходимо задать радиус твердого включения в каждой ЭЯ, исходя из локального значения проницаемости  $k(x_i, y_j)$ , вычисленного по формуле (5.15) в центре ЭЯ с координатами  $x_i = (i - 0.5)h$ ,  $i = \overline{1, n_x}$ ,  $y_j = (j - 0.5)h$ ,  $j = \overline{1, n_y}$ . Для высокопористых сред, пористость  $m$  которых близка к единице, значение проницаемости с большой степенью точности можно определить по формуле из работы [16], которая во введенных безразмерных переменных с учетом (5.13) имеет вид

$$k(\phi) = \frac{1}{8\pi\kappa^2} \left( -\ln \phi - 1.476 + 2\phi - 1.774\phi^2 + 4.076\phi^3 \right), \quad (5.16)$$

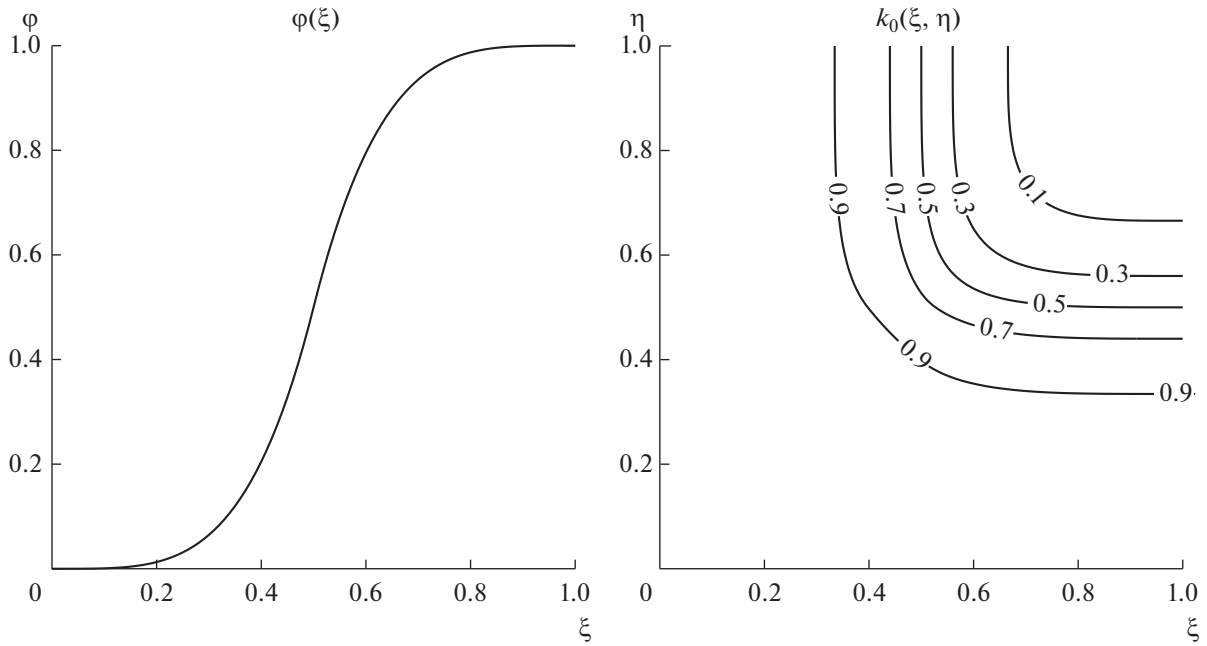
где  $\kappa = H/h$  – безразмерный геометрический параметр, определяющий отношение характерного линейного размера задачи к размеру ЭЯ. Из выражения (5.13) получим формулу для вычисления радиуса твердого включения

$$r(k) = h \sqrt{\frac{\phi(k)}{\pi}},$$

где  $\phi(k)$  – функция, обратная к (5.16).

Для вычисления эффективной вязкости воспользуемся формулой

$$\mu_b(k) = \left[ 1 + \left( \frac{\kappa\kappa^2}{\lambda_*^2} \right)^{-B} \right]^{1/B},$$



Фиг. 4. График функции  $\varphi(\xi)$  и изолинии функции  $k_0(\xi, \eta)$  для  $p = 4$ .

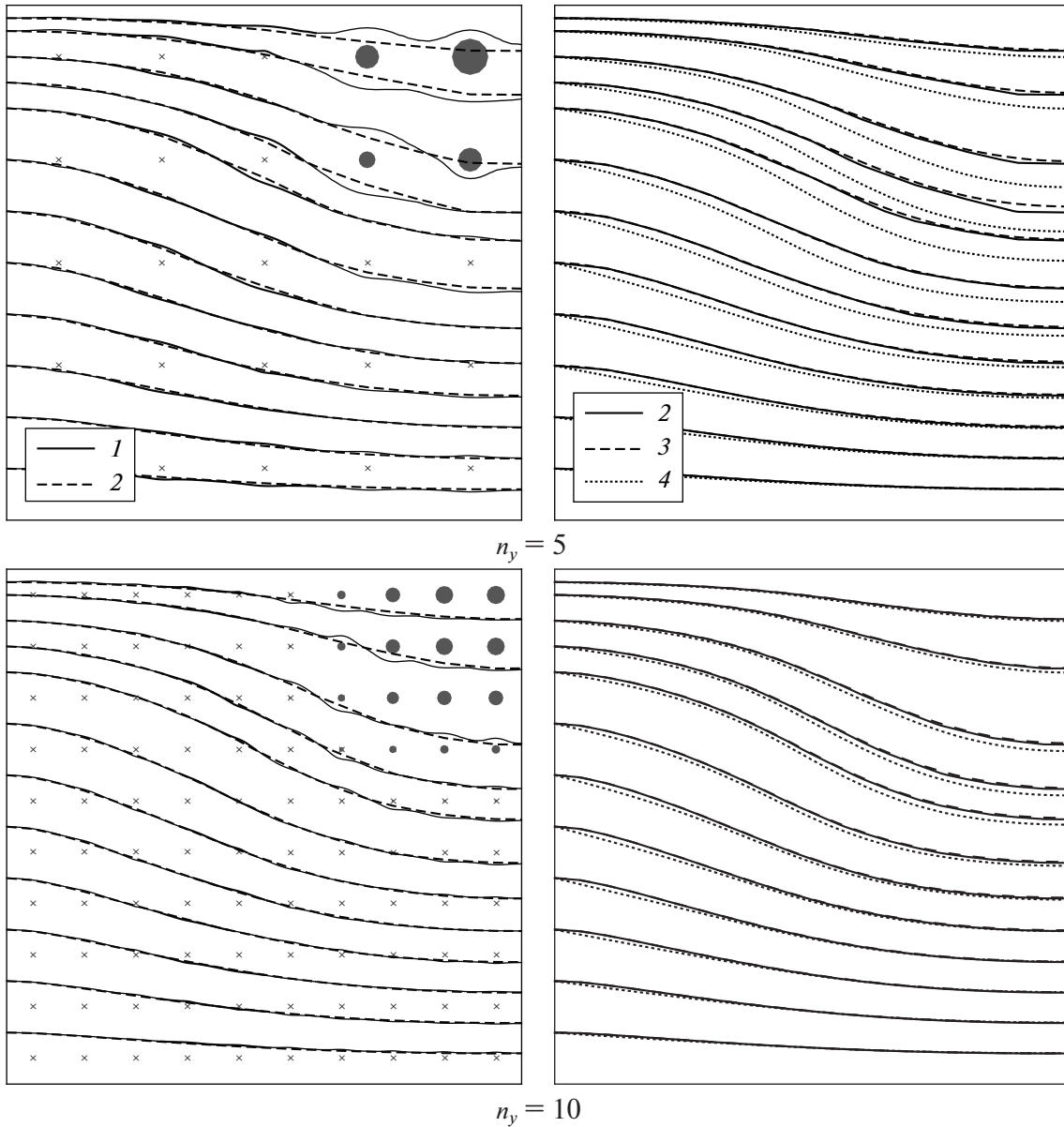
полученной в работе [14], где для рассматриваемой конфигурации модельной пористой среды  $B = 2.46$ ,  $\lambda_* = 0.375$ . Тогда имеем

$$\frac{\partial \mu_b}{\partial x} = \frac{d\mu_b}{dk} \frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_b}{\partial y} = \frac{d\mu_b}{dk} \frac{\partial k}{\partial y}.$$

При проведении расчетов положим  $L = 1$ , т.е.  $n_x = n_y$ . Сетка граничных и областных элементов для всех трех моделей построим аналогично тому, как это было сделано в тестовых расчетах в разд. 4, положив  $n_1 = 20, 40, 60$ . В вычислительном эксперименте каждую сторону внешней границы разобьем на  $n_1 = 100$  линейных элементов, а границы крупных твердых включений, расположенных в ЭЯ с локальным значением концентрации  $\phi \geq 0.01$ , аппроксимируем  $n_2 = 30$  линейными элементами. Значения  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  определим по формуле (5.16) для фиксированных предельных значений концентраций  $\phi_{\min} = 10^{-6}$ ,  $\phi_{\max} = 0.1$  и различных  $k = n_y$ .

Для оценки точности расчетов найдем погрешности  $\epsilon_a^\Psi$ ,  $\epsilon_a^{\Psi^d}$ ,  $\epsilon_e^\Psi$  и  $\epsilon_e^{\Psi^d}$  по формулам (4.1), (4.2), где в качестве численного решения положим  $f = \psi(x, y)$  (модель Бринкмана) и  $f = \psi_d(x, y)$  (модель Дарси) соответственно. В качестве тестового решения примем  $f_a = \tilde{\psi}_s(x, y)$ , полученную из вычислительного эксперимента. При этом максимальное значение функции тока для всех моделей в силу постановки задачи  $\psi_{\max} = 1$ .

На фиг. 5 приведены результаты расчетов для  $n_y = 5$  (сверху) и  $n_y = 10$  (снизу) в случае  $n_1 = 40$ . На левых графиках представлены результаты вычислительных экспериментов. Сплошными линиями показаны линии тока детального течения вязкой жидкости в межпоровом пространстве, а штриховыми линиями – изолинии осредненной функции тока  $\tilde{\psi}_s(x, y)$ . Твердые включения изображены серым цветом, а их положения в случае их малого размера помечены символом “x”. Из фигур видно, что изолинии осредненной функции тока повторяют общее поведение линий тока детального расчета, а в областях с высокой проницаемостью (т.е. с низкой концентрацией твердых включений) практически совпадают с ними. На правых графиках приведено сравнение изолиний осредненной функции тока  $\tilde{\psi}_s(x, y)$  (сплошная линия) с линиями тока фильтрационных течений по моделям Бринкмана (штриховые линии) и Дарси (пунктирные линии), построенных как изолинии функций  $\psi(x, y)$  и  $\psi_d(x, y)$  соответственно. Из фигур видно, что результаты расчета по модели Бринкмана с большей степенью точности совпадают с результатами вычисли-



**Фиг. 5.** Сравнение линий тока течения по модели Дарси и Бринкмана с результатами вычислительного эксперимента для  $n_y = 5, 10$ : 1 – вычислительный эксперимент, 2 – изолинии осредненной функции тока в вычислительном эксперименте, 3 – модель Бринкмана, 4 – модель Дарси.

тельного эксперимента, чем результаты по модели Дарси. Отметим, что линии тока, построенные по модели Бринкмана, визуально совпадают с изолиниями функции  $\tilde{\psi}_s$  практически всюду за исключением небольшой области больших градиентов функции  $k(x, y)$  (см. фиг. 4) при  $n_y = 5$ , а при  $n_y = 10$  – во всей расчетной области. Линии тока по модели Дарси не совпадают с изолиниями  $\tilde{\psi}_s$  во всей области  $\Omega$ , однако, различие становится меньше с увеличением  $n_y$ .

В табл. 1 представлены значения погрешностей  $\epsilon_a^\Psi$ ,  $\epsilon_a^{\Psi d}$ ,  $\epsilon_e^\Psi$  и  $\epsilon_e^{\Psi d}$  для значений  $n_y = 5, 10, 15, 20$ . Видно, что с увеличением  $n_y$  (т.е. с увеличением  $\kappa$ ) погрешности по моделям Дарси и Бринкмана уменьшаются. При этом погрешность модели Бринкмана во всех расчетах в несколько раз меньше погрешности модели Дарси. Аналогичные выводы были сделаны и в работе [14] для случая однородной пористой среды. Так же отметим, что при увеличении разбиений  $n_l$  погрешность мо-

**Таблица 1.** Погрешности  $\epsilon_a^\Psi$ ,  $\epsilon_a^{\Psi d}$ ,  $\epsilon_e^\Psi$  и  $\epsilon_e^{\Psi d}$ 

$n_1$	$n_y$	$\epsilon_a^\Psi$	$\epsilon_a^{\Psi d}$	$\epsilon_e^\Psi$	$\epsilon_e^{\Psi d}$
20	5	0.819e-2	0.281e-1	0.257e-2	0.155e-1
20	10	0.535e-2	0.111e-1	0.139e-2	0.466e-2
20	15	0.401e-2	0.801e-2	0.956e-3	0.253e-2
20	20	0.360e-2	0.647e-2	0.818e-3	0.164e-2
40	5	0.731e-2	0.288e-1	0.217e-2	0.160e-1
40	10	0.373e-2	0.112e-1	0.927e-3	0.500e-2
40	15	0.222e-2	0.808e-2	0.541e-3	0.280e-2
40	20	0.191e-2	0.657e-2	0.451e-3	0.186e-2
60	5	0.707e-2	0.290e-1	0.206e-2	0.161e-1
60	10	0.329e-2	0.113e-1	0.803e-3	0.508e-2
60	15	0.170e-2	0.809e-2	0.417e-3	0.287e-2
60	20	0.137e-2	0.659e-2	0.331e-3	0.193e-2

дели Бринкмана уменьшается, что свидетельствует о сеточной сходимости разработанного метода, а погрешность модели Дарси увеличивается, что свидетельствует о том, что эта погрешность является погрешностью модели, а не вычислительной погрешностью.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод граничных элементов решения неоднородного бигармонического уравнения с линейной правой частью, содержащей искомую функцию и ее производные. Его эффективность и точность продемонстрированы на тестовой задаче сравнением с аналитическим решением. В качестве примера решена задача расчета фильтрационного течения в пористой среде с заданным неоднородным распределением проницаемости в рамках модели Бринкмана. Для оценки точности полученного решения проведен вычислительный эксперимент по детальному расчету течения вязкой жидкости в межпоровом пространстве в рамках модели Стокса. Результаты численного расчета предложенным методом с хорошей степенью точности согласуются с результатами вычислительного эксперимента. Сравнение полученных решений с решением той же задачи в рамках модели Дарси показало, что погрешность модели Бринкмана при расчете предложенным методом в несколько раз меньше погрешности модели Дарси.

Авторы благодарят Ш.Х. Зарипова и В.Ф. Шарафутдинова за полезные замечания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
3. Флетчер К., Бреннер Г. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. М.: Мир, 1991. Т. 2. 504 с.
4. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диагол-МИФИ, 2010. 240 с.
5. Wu J. Problem of General Viscous Flow. Developments in BEM. London: Elsevier Applied Science Publication, 1982. V. 2.
6. Camp C.V., Gipson G.S. Boundary element analysis of nonhomogeneous biharmonic phenomena. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. 268 p.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
8. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. М.: Мир, 1990. 384 с.
9. Skerget L., Hribersek M., Kuhn G. Computational fluid dynamics by boundary-domain integral method // International Journal for Numerical Methods in Engng. 1999. V. 46. 8. P. 1291–1311.
10. Mardanov R.F., Zaripov S.K. Solution of Nonhomogeneous Helmholtz Equation with Variable Coefficient Using Boundary Domain Integral Method // Lobachevskii Journal of Math. 2018. V. 39. 6. P. 783–793.

11. *Mardanov R.F., Sharafutdinov V.F., Ibragimov I.Z., Zaripov S.K., Baganina A.E.* Solving the fluid flow problems with boundary domain integral method // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1158. 032027.
12. *Mardanov R.F., Dunnett S.J., Zaripov S.K.* Modeling of fluid flow in periodic cell with porous cylinder using a boundary element method // *Engng Analysis with Boundary Elements*. 2016. V. 68. P. 54–62.
13. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Appl. Sci. Res.* 1947. V. A1. 1. P. 27–34.
14. *Zaripov S.K., Mardanov R.F., Sharafutdinov V.F.* Determination of Brinkman model parameters using Stokes flow model // *Transport in Porous Media*. 2019. V. 130. 2. P. 529–557.
15. *Mardanov R.F., Zaripov S.K., Maklakov D.V.* Two-dimensional Stokes flows in porous medium composed of a large number of circular inclusions // *Engng Analysis with Boundary Elements*. 2020. V. 113. P. 204–218.
16. *Sangani A.S., Acrivos A.* Slow flow through a periodic array of spheres // *Internat. Journal of Multiphase Flow*. 1982. V. 8. 4. P. 343–360.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.63

БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ  
КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ<sup>1)</sup>

© 2021 г. М. Д. Брагин<sup>1,\*</sup>, Б. В. Рогов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

\*e-mail: michael@bragin.cc

\*\*e-mail: rogov.boris@gmail.com

Поступила в редакцию 01.07.2020 г.

Переработанный вариант 01.07.2020 г.

Принята к публикации 16.12.2020 г.

Бикомпактные схемы впервые обобщаются на линейное многомерное уравнение конвекции-диффузии. Для построения схем используются: метод прямых, интегроинтерполяционный метод, би- и трикубическая интерполяция Эрмита искомой функции в ячейке. Интегрирование по времени выполняется при помощи диагонально-неявных методов Рунге–Кутты. Предлагаемые бикомпактные схемы абсолютно устойчивы, консервативны, имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству на достаточно гладких решениях. Для реализации получаемых схем применяется экономичный итерационный метод, основанный на приближенной факторизации их многомерных уравнений. Каждая итерация метода сводится к совокупности независимых одномерных скалярных двухточечных прогонок. На ряде точных стационарных и нестационарных решений демонстрируется сходимость разработанных схем с высокими порядками, а также быстрая сходимость итерационного метода их реализации. Обсуждаются преимущества бикомпактных схем по сравнению с конечно-элементными схемами типа Галеркина. Библ. 26. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** уравнение конвекции-диффузии, высокоточные схемы, неявные схемы, компактные схемы, бикомпактные схемы.

DOI: 10.31857/S0044466921040025

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время существенное развитие получил класс высокоточных бикомпактных схем для уравнений гиперболического типа [1]–[8]. Эти схемы выводятся при помощи метода прямых и интегро-интерполяционного метода. В каждой ячейке искомое решение приближается финитным полиномом, построенным только по данным из этой ячейки, причем совокупность этих полиномов образует как минимум непрерывную функцию во всей расчетной области. В свою очередь, чтобы полином имел высокую степень (т.е. чтобы соответствующая бикомпактная схема была высокого порядка аппроксимации), вводятся дополнительные сеточные функции, определяемые либо в уже имеющихся целых узлах, либо в новых полужелтых узлах. По своему смыслу эти вспомогательные функции могут выражать саму искомую функцию, ее производные или первообразную. Для их отыскания используются дискретизированные дифференциальные следствия исходного уравнения в частных производных. С одной стороны, в результате перечисленных действий получается компактная конечно-разностная аппроксимация пространственных производных на шаблоне, который по каждому направлению включает не более двух целых узлов сетки, чем и объясняется название бикомпактных схем. С другой стороны, бикомпактные схемы в некотором понимании близки [5] к конечно-элементным схемам типа Галеркина, однако, схемы этих классов имеют разные, не тождественные уравнения.

Главным достоинством бикомпактных схем является сочетание следующих свойств: (а) спектральное разрешение, лучшее по сравнению с классическими компактными схемами равного порядка аппроксимации [4]; (б) совпадение числа граничных условий в дискретной (разностной) и дифференциальной задачах; (в) неявность (т.е. хорошая устойчивость); (г) низкая вычис-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, проект № 20-06-01.

лительная трудоемкость, близкая к явным схемам. На примере практически важных задач о распространении детонационных волн в идеальном (невязком) газе показано преимущество бикомпактных схем в сравнении с другими широко применяющимися в этой области схемами [7], [8].

Хорошее спектральное разрешение бикомпактных схем делает желательным их применение для расчетов турбулентных течений вязкой жидкости. Учесть вязкость можно, применяя, например, расщепление по физическим процессам и далее какие-либо известные схемы для аппроксимации параболической части нестационарной задачи. Тем не менее более естественным было бы включить эту часть однородным образом, в рамках того же численного подхода, что применяется в бикомпактных схемах. Здесь возникает новая проблема: бикомпактные схемы разработаны лишь для одномерных уравнений параболического типа [9]. Целью настоящей работы является решение этой проблемы применительно к линейному многомерному уравнению конвекции-диффузии.

Приложение компактных схем, в том числе мультиоператорных, к уравнениям параболического типа подробно рассматривается в монографии [10], а конечно-элементных схем Галеркина (преимущественно локальных разрывных схем Галеркина, LDG) – в работах [11], [12] (см. также ссылки в этих трех работах). Для сравнения, бикомпактные схемы отличаются от первых схем меньшим пространственным шаблоном, а от последних – меньшим количеством дополнительных зависимых переменных и возможностью использовать неявную аппроксимацию по времени без существенных потерь в эффективности (экономичности) счета. Отметим дополнительно, что для преодоления высокой вычислительной трудоемкости неявных DG-схем сейчас используются два подхода, представляющие самостоятельный интерес: явно-неявная аппроксимация по времени [13], [14] и гиперболизация либо на уровне схемы [15], либо на уровне исходных дифференциальных уравнений [16], [17].

Работа построена следующим образом. В разд. 1 выводятся полудискретные бикомпактные схемы для линейного многомерного уравнения конвекции-диффузии. В разд. 2 обсуждается интегрирование по времени в полностью дискретных бикомпактных схемах, строятся методы их эффективной реализации. В разд. 3 демонстрируется сеточная сходимость разработанных схем на гладких решениях одномерных и двумерных, стационарных и нестационарных смешанных (начально-краевых) задач.

## 1. ПОЛУДИСКРЕТНЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ

Рассмотрим сперва простейшее одномерное линейное уравнение диффузии:

$$\partial_t u = \nu \partial_x^2 u, \quad 0 < x < x_{\max}, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $u = u(x, t)$  – искомая скалярная функция,  $\nu = \text{const} > 0$  – заданный коэффициент, символ  $\partial_x \equiv \partial/\partial x$ . Не конкретизируя пока постановку начальных и граничных условий, обсудим вопрос построения бикомпактных схем для уравнения (1) и его более сложных версий.

Введем на отрезке  $x \in [0, x_{\max}]$  (в общем случае, неравномерную) сетку

$$\Omega = \Omega_x = \{x_0, x_1, \dots, x_{N_x}\}, \quad x_0 = 0, \quad x_{N_x} = x_{\max}; \\ h_{x,j+1/2} = x_{j+1} - x_j - \text{шаг по } x, \quad j = \overline{0, N_x - 1}.$$

Ради краткости записи индекс  $j + 1/2$  у шага  $h_x$  в дальнейшем опускается всюду, где это допустимо. Наряду с функцией  $u(x, t)$  мы будем использовать ее производную по  $x$ :

$$v_x = \partial_x u. \quad (2)$$

Определим на  $\Omega$  две сеточные функции:  $u_j(t)$  и  $v_{x,j}(t)$ , аппроксимирующие в узлах  $\Omega$  функции  $u(x, t)$  и  $v_x(x, t)$  соответственно.

Полудискретная бикомпактная схема четвертого порядка аппроксимации для уравнения (1) известна (см. [9]), она имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{h_x}{12} (v_{x,j+1} - v_{x,j}) \right) = \nu \frac{v_{x,j+1} - v_{x,j}}{h_x}, \\ \frac{v_{x,j} + v_{x,j+1}}{2} - \frac{h_x}{12\nu} \frac{d}{dt} (u_{j+1} - u_j) = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x}, \quad (3)$$

где индекс  $j = \overline{0, N_x - 1}$ . Схема (3) выводится методом прямых и интегро-интерполяционным методом. Уравнение (1) и соотношение (2) при фиксированном  $t = \text{const}$  осредняются по ячейке  $K_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$  (т.е. интегрируются по  $x$  от  $x_j$  до  $x_{j+1}$  и делятся на  $h_x$ ), после чего интегралы либо вычисляются точно по формуле Ньютона–Лейбница, либо приближенно по квадратурной формуле Эйлера–Маклорена с отбрасыванием остаточного члена  $O(h_x^4)$  ( $h_x \rightarrow 0$ ). При применении этой квадратуры к левой части соотношения (2) возникает производная  $\partial_x v_x$ , которая заменяется на  $v^{-1} \partial_x u$  при помощи уравнения (1).

Обратим внимание на последнее действие, а именно, на замену производной  $\partial v_x / \partial x$  при дискретизации (2) на  $v^{-1} \partial_x u$ . Ясно, что сделать аналогичное при переменном коэффициенте  $v$  или для двумерного уравнения диффузии (даже линейного) весьма проблематично: в первом случае придется отказаться от консервативной аппроксимации и привлечь производную  $\partial_x v$  (которая вообще может не существовать), а во втором случае помешает производная по  $y$ .

Найдем другой, более универсальный подход к конструированию бикомпактных схем для уравнения диффузии. Рассмотрим уравнение (1) с добавлением линейного конвективного члена и источника:

$$\partial_t u + c_x \partial_x u = v \partial_x^2 u + f(x, t), \quad 0 < x < x_{\max}, \quad t > 0, \tag{4}$$

где  $c_x = \text{const}$  – заданный коэффициент,  $f(x, t)$  – заданная функция. Переход от уравнения диффузии (1) к уравнению конвекции-диффузии (4) обусловлен возможностью испытать получаемые бикомпактные схемы на более интересных вычислительных примерах (см. разд. 3).

Построим в ячейке  $K_{j+1/2}$  по значениям  $u_j, u_{j+1}, v_{x,j}, v_{x,j+1}$  кубический интерполяционный полином Эрмита:

$$u_h(x, t; K_{j+1/2}) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3, \quad \xi = \frac{x - x_{j+1/2}}{h_x}, \quad x \in K_{j+1/2}, \tag{5}$$

где  $x_{j+1/2} = (x_j + x_{j+1})/2$ , а коэффициенты  $a_m = a_m(t)$ ,  $m = \overline{0, 3}$ , даются выражениями:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{h_x}{8} (v_{x,j+1} - v_{x,j}), & a_1 &= \frac{3}{2} (u_{j+1} - u_j) - \frac{h_x}{4} (v_{x,j} + v_{x,j+1}), \\ a_2 &= \frac{h_x}{2} (v_{x,j+1} - v_{x,j}), & a_3 &= h_x (v_{x,j} + v_{x,j+1}) - 2(u_{j+1} - u_j). \end{aligned}$$

Если функция  $u(x, t)$  достаточно гладкая, то полином (5) аппроксимирует ее в ячейке  $K_{j+1/2}$  с погрешностью  $O(h_x^4)$ . Далее, возьмем уравнение (4) и его дифференциальное следствие

$$\partial_t \partial_x u + c_x \partial_x^2 u = v \partial_x^3 u + \partial_x f(x, t) \tag{6}$$

(т.е. производную по  $x$ ) и, вновь следуя методу прямых и интегро-интерполяционному методу, при фиксированном  $t = \text{const}$  осредним эти уравнения по ячейке  $K_{j+1/2}$ . Искомую функцию  $u(x, t)$  при этом заменим на полином (5) с погрешностью  $O(h_x^4)$ . Приведем выражения для интегралов, появляющихся в процессе осреднения уравнений (4), (6) и замены  $u$  на  $u_h$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} u_h dx &= \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{h_x}{12} (v_{x,j+1} - v_{x,j}), & \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x u_h dx &= \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x}, \\ \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x^2 u_h dx &= \frac{v_{x,j+1} - v_{x,j}}{h_x}, & \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x^3 u_h dx &= \frac{6}{h_x^2} \left( v_{x,j} - 2 \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} + v_{x,j+1} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что формула для интеграла от  $u_h$  повторяет квадратуру Эйлера–Маклорена, чего и следовало ожидать. В итоге после выполнения всех действий мы приходим к полудискретной бикомпактной схеме четвертого порядка аппроксимации для уравнения (4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{u_j + u_{j+1}}{2} - \frac{h_x}{12} (v_{x,j+1} - v_{x,j}) \right) + c_x \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} &= v \frac{v_{x,j+1} - v_{x,j}}{h_x} + \Phi_{j+1/2}^{(1)}(t), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} \right) + c_x \frac{v_{x,j+1} - v_{x,j}}{h_x} &= \frac{6v}{h_x^2} \left( v_{x,j} - 2 \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} + v_{x,j+1} \right) + \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Phi_{j+1/2}^{(1)}(t) = \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} f(x, t) dx, \quad \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t) = \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x f(x, t) dx = \frac{f(x_{j+1}, t) - f(x_j, t)}{h_x}.$$

Нетрудно проверить, что схема (8) в точности переходит в схему (3) при  $c_x = 0$ ,  $f(x, t) \equiv 0$ . Укажем на то, что вышеизложенный метод построения бикомпактных схем для уравнения теплопроводности по своей идее схож с аналогичным методом [18] построения схем этого типа уже для гиперболических уравнений.

Отметим, что формулы (7) и схема (8) могут быть записаны более компактно при помощи сеточных операторов. Определим такие операторы:

$$\begin{aligned} M_0^x U_{j+1/2} &= \frac{U_j + U_{j+1}}{2}, \quad \Delta_0^x U_{j+1/2} = U_{j+1} - U_j, \quad P^x u_j = v_{x,j}, \\ A_0^x &= M_0^x - \frac{h_x}{12} \Delta_0^x P^x, \quad \Lambda_1^x = \frac{1}{h_x} \Delta_0^x, \quad \Lambda_2^x = \frac{1}{h_x} \Delta_0^x P^x, \quad \Lambda_3^x = \frac{12}{h_x^2} \left( M_0^x P^x - \frac{1}{h_x} \Delta_0^x \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $U_j$  – произвольная сеточная функция. Оператор  $P^x$  заменяет значение сеточной функции в узле на значение соответствующей ей сеточной функции-производной по  $x$  (в смысле интерполяции Эрмита) в этом же узле. Например, действие  $P^x$  на  $u_j$  дает  $v_{x,j}$ . Сразу уточним, что в настоящей работе этот оператор будет применяться не только к  $u_j$ , но и функциям типа производной от  $u_j$  по времени, приращения  $u_j$  за шаг по времени или за итерацию; в этом случае результат действия  $P^x$  будет означать соответственно производную от  $v_{x,j}$  по времени, приращение  $v_{x,j}$  за шаг по времени или за итерацию. Итак, с применением операторов (9) формулы (7) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} u_h dx &= A_0^x u_{j+1/2}, \quad \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x u_h dx = \Lambda_1^x u_{j+1/2}, \\ \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x^2 u_h dx &= \Lambda_2^x u_{j+1/2}, \quad \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x^3 u_h dx = \Lambda_3^x u_{j+1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

а схема (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A_0^x u_{j+1/2}) + c_x \Lambda_1^x u_{j+1/2} &= v \Lambda_2^x u_{j+1/2} + \Phi_{j+1/2}^{(1)}(t), \\ \frac{d}{dt} (\Lambda_1^x u_{j+1/2}) + c_x \Lambda_2^x u_{j+1/2} &= v \Lambda_3^x u_{j+1/2} + \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем теперь, каким именно образом новый метод построения бикомпактных схем является более универсальным по сравнению с [9].

Начнем с переменного коэффициента  $v$ . В этом случае диффузионный член в уравнении (4) примет вид:

$$\mathcal{D}u = \partial_x (v(x) \partial_x u) = \partial_x (v(x) v_x).$$

Его осреднение по ячейке выполняется точно по формуле Ньютона–Лейбница

$$\frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \mathcal{D}u dx = \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x (v(x) v_x) dx = \frac{v_{j+1} v_{x,j+1} - v_j v_{x,j}}{h_x}.$$

Если коэффициент  $v(x)$  терпит разрыв на одной из границ ячейки  $K_{j+1/2}$ , его можно определить там, например, как полусумму пределов слева и справа. При дискретизации дифференциального следствия необходимо будет вычислить интегральное среднее уже от производной  $\mathcal{D}u$  по  $x$ :

$$\frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x \mathcal{D}u dx = \frac{1}{h_x} \int_{K_{j+1/2}} \partial_x^2 (v(x)v_x) dx.$$

Здесь функция  $v_x$  заменяется на полином  $v_{x,h}$  – производную по  $x$  от полинома (5), а функция  $v(x)$  – либо на (а) интерполяционный полином второй степени, построенный по данным в точках  $x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}$ , либо на (б) производную от кубического интерполяционного полинома Эрмита для первообразной  $v(x)$ . В любом случае после замены интеграл преобразуется в алгебраическое выражение, содержащее сеточные значения  $v(x)$  и, быть может, значения ее первообразной (но не производной), а также значения сеточных функций  $u_j$  и  $v_{x,j}$ .

Перейдем к обобщению полудискретной схемы (8) и ее частного случая (3) на многомерные варианты уравнения (4), что и составляет основную цель и предмет настоящей работы.

Рассмотрим двумерную версию (4):

$$\begin{aligned} \partial_t u + c_x \partial_x u + c_y \partial_y u &= v(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + f(x, y, t), \\ (x, y) \in D &= (0, x_{\max}) \times (0, y_{\max}), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $u = u(x, y, t)$  – искомая функция,  $c_x = \text{const}$ ,  $c_y = \text{const}$ ,  $v = \text{const} > 0$  – заданные коэффициенты,  $f(x, y, t)$  – заданная функция.

По аналогии с сеткой  $\Omega_x$  введем на отрезке  $[0, y_{\max}]$  сетку  $\Omega_y$ :

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \{y_0, y_1, \dots, y_{N_y}\}, \quad y_0 = 0, \quad y_{N_y} = y_{\max}; \\ h_{y,k+1/2} &= y_{k+1} - y_k - \text{шаг по } y, \quad k = 0, N_y - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем сетку  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$  в замкнутой расчетной области  $\bar{D}$ . В отличие от одномерного случая, помимо функции  $u(x, y, t)$  мы будем работать не с одной, а с тремя дополнительными функциями:

$$v_x = \partial_x u, \quad v_y = \partial_y u, \quad v_{xy} = \partial_x \partial_y u.$$

Функциям  $u(x, y, t)$ ,  $v_x(x, y, t)$ ,  $v_y(x, y, t)$ ,  $v_{xy}(x, y, t)$  поставим в соответствие аппроксимирующие их сеточные функции  $u_{j,k}(t)$ ,  $v_{x,j,k}(t)$ ,  $v_{y,j,k}(t)$ ,  $v_{xy,j,k}(t)$ , заданные на  $\Omega$ . Аналогично оператором (9) определим сеточные операторы с верхним индексом “ $y$ ”. Операторы с верхним индексом “ $x$ ” действуют только по первому индексу сеточной функции, а операторы с верхним индексом “ $y$ ” – только по второму, например:

$$M_0^y \Delta_0^x U_C = M_0^y (U_{j+1,k+1/2} - U_{j,k+1/2}) = \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k} + U_{j+1,k+1} - U_{j,k+1}}{2},$$

где  $C = (j + 1/2, k + 1/2)$  – мультииндекс. Поясним принцип действия операторов  $P^x$ ,  $P^y$ :

$$\begin{aligned} P^x u_{j,k} &= v_{x,j,k}, & P^y u_{j,k} &= v_{y,j,k}, \\ P^x v_{y,j,k} &= P^x P^y u_{j,k} = v_{xy,j,k}, & P^y v_{x,j,k} &= P^y P^x u_{j,k} = v_{xy,j,k}. \end{aligned}$$

Ясно, что любой оператор с индексом “ $x$ ” коммутирует с любым оператором с индексом “ $y$ ”.

Полудискретная бикомпактная схема четвертого порядка аппроксимации для уравнения (12) строится аналогично одномерному случаю и тому, как это делается для уравнений гиперболического типа. Уравнение (12) и три его дифференциальных следствия:

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_x u + c_x \partial_x^2 u + c_y \partial_x \partial_y u &= v(\partial_x^3 u + \partial_x \partial_y^2 u) + \partial_x f(x, y, t), \\ \partial_t \partial_y u + c_x \partial_x \partial_y u + c_y \partial_y^2 u &= v(\partial_x^2 \partial_y u + \partial_y^3 u) + \partial_y f(x, y, t), \\ \partial_t \partial_x \partial_y u + c_x \partial_x^2 \partial_y u + c_y \partial_x \partial_y^2 u &= v(\partial_x^3 \partial_y u + \partial_x \partial_y^3 u) + \partial_x \partial_y f(x, y, t) \end{aligned}$$

(соответственно, производные по  $x$ , по  $y$ , смешанная производная по  $x, y$ ) при фиксированном  $t = \text{const}$  осредняются по прямоугольной ячейке

$$K_C = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$$

Дальше действовать можно двумя способами. Первый способ повторяет рассуждения в одномерном случае: в ячейке  $K_C$  строится двумерная версия полинома (5):

$$\begin{aligned} u_h(x, y, t; K_C) = & a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi^2 + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi^3 + a_7\xi^2\eta + \\ & + a_8\xi\eta^2 + a_9\eta^3 + a_{10}\xi^3\eta + a_{11}\xi^2\eta^2 + a_{12}\xi\eta^3 + a_{13}\xi^3\eta^2 + a_{14}\xi^2\eta^3 + a_{15}\xi^3\eta^3, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\xi = \frac{x - x_{j+1/2}}{h_x}, \quad \eta = \frac{y - y_{k+1/2}}{h_y}, \quad (x, y) \in K_C,$$

где  $y_{k+1/2} = (y_k + y_{k+1})/2$ . Коэффициенты  $a_m = \overline{a_m(t)}$ ,  $m = 0, 15$ , полинома (13) определяются значениями сеточных функций  $u_{j,k}, v_{x,j,k}, v_{y,j,k}, v_{xy,j,k}$  в вершинах (углах) ячейки  $K_C$ . Отметим, что выражения для коэффициентов полинома легче получить не из решения системы линейных уравнений, а по аналогии с одномерным случаем, используя введенные выше сеточные операторы. Затем полином (13) подставляется вместо функции  $u(x, y, t)$  в появляющиеся интегралы. Второй способ состоит в том, чтобы свести кратные интегралы к повторным и затем аппроксимировать одномерные интегралы по формулам (10). Оба способа приводят к одной и той же искомой схеме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_0^y A_0^x u_C) + c_x A_0^y \Lambda_1^x u_C + c_y \Lambda_1^y A_0^x u_C &= v(A_0^y \Lambda_2^x u_C + \Lambda_2^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(1)}(t), \\ \frac{d}{dt}(A_0^y \Lambda_1^x u_C) + c_x A_0^y \Lambda_2^x u_C + c_y \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C &= v(A_0^y \Lambda_3^x u_C + \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(2)}(t), \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^y A_0^x u_C) + c_x \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + c_y \Lambda_2^y A_0^x u_C &= v(\Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + \Lambda_3^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(3)}(t), \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C) + c_x \Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + c_y \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C &= v(\Lambda_1^y \Lambda_3^x u_C + \Lambda_3^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(4)}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

где индексы  $j = \overline{0, N_x - 1}$ ,  $k = \overline{0, N_y - 1}$ , а члены  $\Phi_C^1(t), \dots, \Phi_C^4(t)$  выражаются как

$$\begin{aligned} \Phi_C^{(1)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} f(x, y, t) dx dy, & \Phi_C^{(2)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} \partial_x f(x, y, t) dx dy, \\ \Phi_C^{(3)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} \partial_y f(x, y, t) dx dy, & \Phi_C^{(4)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_C} \partial_x \partial_y f(x, y, t) dx dy. \end{aligned}$$

Добавим, что интерполяция вида (13) называется бикубической (в трехмерном случае – трикубической). Каждая из совокупностей полиномов (5), (13) образует во всей соответствующей ей расчетной области гладкую кусочно-полиномиальную функцию, или сплайн гладкости 1. В связи с этим необходимо упомянуть работу [19], где уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости решались численно при помощи конечно-элементной схемы Галеркина, основанной на глобально гладкой аппроксимации точного решения трикубическим сплайном. Подход настоящей работы принципиально отличается от подхода [19] тем, что носители полиномов (5), (13) всегда занимают лишь одну ячейку сетки, а не несколько, как в [19].

Обратимся к вопросу о постановке начальных и граничных условий.

Корректная смешанная (начально-краевая) задача для одномерного уравнения (4) обязана включать в себя начальное условие

$$u|_{t=0} = u_*(x), \quad 0 \leq x \leq x_{\max}, \quad (15)$$

и два граничных условия, которые мы рассмотрим в общем виде:

$$(\alpha_1 u + \beta_1 v_x)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad (\alpha_2 u + \beta_2 v_x)|_{x=x_{\max}} = \mu_2(t), \quad t > 0, \quad (16)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – заданные постоянные параметры. Если функции  $u_*(x), \mu_{1,2}(t)$  гладкие, то условия (15), (16) дискретизируются в виде

$$u_j|_{t=0} = u_*(x_j), \quad v_{x,j}|_{t=0} = u'_*(x_j), \quad j = \overline{0, N_x}, \tag{17}$$

$$\frac{d(\alpha_1 u_0 + \beta_1 v_{x,0})}{dt} = \mu'_1(t), \quad \frac{d(\alpha_2 u_{N_x} + \beta_2 v_{x,N_x})}{dt} = \mu'_2(t), \quad t > 0 \tag{18}$$

(штрих сверху обозначает производную). Благодаря дифференцированию по времени в граничных условиях (18) индекс системы уравнений (11), (18) равен нулю (см. [20]), так как в ней отсутствуют алгебраические связи. В свою очередь, нулевой индекс позволяет избежать потенциального понижения порядка точности по времени при интегрировании системы (11), (18) высокоточными методами Рунге–Кутты.

Разумно проверить, является ли вообще одномерная схема (11), дополненная условиями (17) и (18), корректной в смысле баланса числа уравнений и неизвестных. Сетка  $\Omega$  состоит из  $N_x + 1$  узлов. На ней определены две искомые сеточные функции  $u_j(t)$  и  $v_{x,j}(t)$ , их начальные значения известны во всех узлах  $\Omega$  из условия (17). Значит, число неизвестных (функций времени) равно  $2N_x + 2$ . На каждую ячейку  $K_{j+1/2}, j = \overline{0, N_x - 1}$ , приходится по два уравнения схемы (11), следовательно, общее число уравнений схемы составляет  $2N_x$ . Кроме того, мы имеем два граничных условия (18), что дает еще два уравнения. Всего уравнений получается  $2N_x + 2$ , столько же, сколько и неизвестных, т.е. схема (11), дополненная условиями (17) и (18), действительно корректна.

Перейдем к двумерному уравнению (12). Корректная смешанная задача для него обязана включать в себя начальное условие

$$u|_{t=0} = u_*(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \tag{19}$$

и граничные условия на всей  $\partial D$ , которые мы, как и в предыдущем одномерном случае, рассмотрим в общем виде:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 u + \beta_1 v_x)|_{x=0} &= \mu_1(y, t), & (\alpha_2 u + \beta_2 v_x)|_{x=x_{\max}} &= \mu_2(y, t), \\ (\alpha_3 u + \beta_3 v_y)|_{y=0} &= \mu_3(x, t), & (\alpha_4 u + \beta_4 v_y)|_{y=y_{\max}} &= \mu_4(x, t), \\ 0 < y < y_{\max}, & 0 \leq x \leq x_{\max}, & t > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь  $\alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta_1, \dots, \beta_4$  – заданные постоянные параметры. Предполагая, что функция  $u_*(x, y)$  по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемая, мы можем ясным образом дискретизировать начальное условие (19):

$$\begin{aligned} u_{j,k}|_{t=0} &= u_*(x_j, y_k), & v_{x,j,k}|_{t=0} &= \partial_x u_*(x_j, y_k), & v_{y,j,k}|_{t=0} &= \partial_y u_*(x_j, y_k), \\ v_{xy,j,k}|_{t=0} &= \partial_x \partial_y u_*(x_j, y_k), & j = \overline{0, N_x}, & k = \overline{0, N_y}. \end{aligned} \tag{21}$$

При дискретизации граничных условий (20) мы не только проецируем их на сетку и дифференцируем по времени, но и дополнительно привлекаем их дифференциальные следствия – производные вдоль границы:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha_1 u_{0,k} + \beta_1 v_{x,0,k})}{dt} &= \partial_t \mu_1(y_k, t), & \frac{d(\alpha_2 u_{N_x,k} + \beta_2 v_{x,N_x,k})}{dt} &= \partial_t \mu_2(y_k, t), \\ \frac{d(\alpha_3 u_{j,0} + \beta_3 v_{y,j,0})}{dt} &= \partial_t \mu_3(x_j, t), & \frac{d(\alpha_4 u_{j,N_y} + \beta_4 v_{y,j,N_y})}{dt} &= \partial_t \mu_4(x_j, t), \\ \frac{d(\alpha_1 v_{y,0,k} + \beta_1 v_{xy,0,k})}{dt} &= \partial_y \partial_t \mu_1(y_k, t), & \frac{d(\alpha_2 v_{y,N_x,k} + \beta_2 v_{xy,N_x,k})}{dt} &= \partial_y \partial_t \mu_2(y_k, t), \\ \frac{d(\alpha_3 v_{x,j,0} + \beta_3 v_{xy,j,0})}{dt} &= \partial_x \partial_t \mu_3(x_j, t), & \frac{d(\alpha_4 v_{x,j,N_y} + \beta_4 v_{xy,j,N_y})}{dt} &= \partial_x \partial_t \mu_4(x_j, t), \\ k = \overline{0, N_y} & \text{ (в первой строке от 1 до } N_y - 1), & j = \overline{0, N_x}, & t > 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Конечно, задавать дискретные граничные условия в виде (22) можно только для дважды непрерывно дифференцируемых функций  $\mu_{1,2}(y, t)$ ,  $\mu_{3,4}(x, t)$ .

Проверим схему (14), дополненную условиями (21) и (22) на предмет совпадения числа уравнений и неизвестных. Сетка  $\Omega$  состоит из  $(N_x + 1)(N_y + 1)$  узлов, на ней определены четыре искомого сеточные функции  $u_{j,k}(t)$ ,  $v_{x,j,k}(t)$ ,  $v_{y,j,k}(t)$ ,  $v_{xy,j,k}(t)$ , начальные значения для которых известны из условия (21) во всех узлах  $\Omega$ . Таким образом, у нас есть  $4(N_x + 1)(N_y + 1)$  неизвестных (функций времени). Теперь посчитаем число уравнений. Число ячеек сетки равно  $N_x N_y$ , на каждую из них приходится четыре уравнения схемы (14), т.е. на всю сетку получается  $4N_x N_y$  уравнений схемы. Граничные условия (22) дают еще

$$2(N_y - 1) + 2(N_x + 1) + 2(N_y + 1) + 2(N_x + 1) = 4N_x + 4N_y + 4$$

соотношений. Суммируя число уравнений схемы и число дискретных соотношений на границе, получаем

$$4N_x N_y + 4N_x + 4N_y + 4 = 4(N_x + 1)(N_y + 1),$$

т.е. число уравнений, равное числу неизвестных, что говорит в этом смысле о корректности схемы (14), дополненной условиями (21) и (22).

Что касается трехмерного случая, то он рассматривается совершенно аналогично двумерному, поэтому мы не будем останавливаться на нем подробно. Приведем лишь само аппроксимированное уравнение:

$$\begin{aligned} \partial_t u + c_x \partial_x u + c_y \partial_y u + c_z \partial_z u &= v(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) + f(x, y, z, t), \\ (x, y, z) \in D &= (0, x_{\max}) \times (0, y_{\max}) \times (0, z_{\max}), \quad t > 0, \end{aligned}$$

а также полудискретную бикомпактную схему для него (без вывода):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A_0^z A_0^y A_0^x u_C) + c_x A_0^z A_0^y \Lambda_1^x u_C + c_y A_0^z \Lambda_1^y A_0^x u_C + c_z \Lambda_1^z A_0^y A_0^x u_C &= \\ = v(A_0^z A_0^y \Lambda_2^x u_C + A_0^z \Lambda_2^y A_0^x u_C + \Lambda_2^z A_0^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(1)}(t), \\ \frac{d}{dt} (A_0^z A_0^y \Lambda_1^x u_C) + c_x A_0^z A_0^y \Lambda_2^x u_C + c_y A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + c_z \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x u_C &= \\ = v(A_0^z A_0^y \Lambda_3^x u_C + A_0^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C + \Lambda_2^z A_0^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(2)}(t), \\ \frac{d}{dt} (A_0^z \Lambda_1^y A_0^x u_C) + c_x A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + c_y A_0^z \Lambda_2^y A_0^x u_C + c_z \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x u_C &= \\ = v(A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + A_0^z \Lambda_3^y A_0^x u_C + \Lambda_2^z \Lambda_1^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(3)}(t), \\ \frac{d}{dt} (\Lambda_1^z A_0^y A_0^x u_C) + c_x \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x u_C + c_y \Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x u_C + c_z \Lambda_2^z A_0^y A_0^x u_C &= \\ = v(\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_2^x u_C + \Lambda_1^z \Lambda_2^y A_0^x u_C + \Lambda_3^z A_0^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(4)}(t), \\ \frac{d}{dt} (A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C) + c_x A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + c_y A_0^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C + c_z \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C &= \\ = v(A_0^z \Lambda_1^y \Lambda_3^x u_C + A_0^z \Lambda_3^y \Lambda_1^x u_C + \Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(5)}(t), \\ \frac{d}{dt} (\Lambda_1^z \Lambda_1^y A_0^x u_C) + c_x \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + c_y \Lambda_1^z \Lambda_2^y A_0^x u_C + c_z \Lambda_2^z \Lambda_1^y A_0^x u_C &= \\ = v(\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + \Lambda_1^z \Lambda_3^y A_0^x u_C + \Lambda_3^z \Lambda_1^y A_0^x u_C) + \Phi_C^{(6)}(t), \\ \frac{d}{dt} (\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_1^x u_C) + c_x \Lambda_1^z A_0^y \Lambda_2^x u_C + c_y \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C + c_z \Lambda_2^z A_0^y \Lambda_1^x u_C &= \\ = v(\Lambda_1^z A_0^y \Lambda_3^x u_C + \Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C + \Lambda_3^z A_0^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(7)}(t), \end{aligned} \tag{23}$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C) + c_x \Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_2^x u_C + c_y \Lambda_1^z \Lambda_2^y \Lambda_1^x u_C + c_z \Lambda_2^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C = \\ = v(\Lambda_1^z \Lambda_1^y \Lambda_3^x u_C + \Lambda_1^z \Lambda_3^y \Lambda_1^x u_C + \Lambda_3^z \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C) + \Phi_C^{(8)}(t), \end{aligned}$$

где мультииндекс  $C = (j + 1/2, k + 1/2, l + 1/2)$ , индексы  $j = \overline{0, N_x - 1}$ ,  $k = \overline{0, N_y - 1}$ ,  $l = \overline{0, N_z - 1}$ , а члены  $\Phi_C^1(t), \dots, \Phi_C^8(t)$  выражаются как

$$\begin{aligned} \Phi_C^{(1)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} f(x, y, z, t) dx dy dz, & \Phi_C^{(2)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_x f(x, y, z, t) dx dy dz, \\ \Phi_C^{(3)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_y f(x, y, z, t) dx dy dz, & \Phi_C^{(4)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_z f(x, y, z, t) dx dy dz, \\ \Phi_C^{(5)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_x \partial_y f(x, y, z, t) dx dy dz, & \Phi_C^{(6)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_y \partial_z f(x, y, z, t) dx dy dz, \\ \Phi_C^{(7)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_z \partial_x f(x, y, z, t) dx dy dz, & \Phi_C^{(8)}(t) &= \frac{1}{h_x h_y h_z} \int_{K_C} \partial_x \partial_y \partial_z f(x, y, z, t) dx dy dz; \end{aligned}$$

$$K_C = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}] \times [z_l, z_{l+1}]$$

## 2. ПОЛНОСТЬЮ ДИСКРЕТНЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ И МЕТОДЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

Полностью дискретные бикомпактные схемы получаются в результате применения к полудискретным схемам (11), (14), (23) тех или иных численных методов интегрирования по времени, например, методов Рунге–Кутты. В этой работе мы используем два таких метода: неявный метод Эйлера и  $L$ -устойчивый жестко-точный диагонально-неявный метод Рунге–Кутты (DIRK) второго порядка со следующей таблицей Бутчера [21, теорема 5]:

$$\begin{array}{c|cc} a & a & \\ \hline 1 & 1 - a & a \\ \hline 1 - a & a & \end{array} \quad a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{24}$$

Бикомпактные схемы с аппроксимацией по времени неявным методом Эйлера мы будем сокращенно называть DIRK1B4 (независимо от числа пространственных измерений), а бикомпактные схемы с аппроксимацией по времени методом (24) – как SDIRK2B4. Погрешность аппроксимации у DIRK1B4 равна  $O(\tau, h^4)$  ( $\tau, h \rightarrow 0$ ), у SDIRK2B4 –  $O(\tau^2, h^4)$ , где  $\tau > 0$  – шаг по времени,  $h$  – максимальный пространственный шаг.

Рассмотрим произвольную полностью дискретную бикомпактную схему, интегрирование по времени в которой осуществляется многостадийным DIRK-методом, например, SDIRK2B4. Ясно, что реализация такой схемы на одном временном шаге сводится к композиции схем DIRK1B4 с правильно подобранными шагами по времени и промежуточными начальными и граничными условиями, подобно тому, как реализация многостадийных DIRK-методов сводится к композиции неявных методов Эйлера. Это обстоятельство делает достаточным обсуждение только реализации схем(ы) DIRK1B4.

Прежде всего опишем экономичный метод реализации одномерной схемы DIRK1B4. Он понадобится далее для описания реализации уже многомерных схем DIRK1B4.

Одномерная схема DIRK1B4 имеет вид

$$\begin{aligned} (A_0^x + c_x \tau \Lambda_1^x - v \tau \Lambda_2^x) u_{j+1/2}^{n+1} &= A_0^x u_{j+1/2}^n + \tau \Phi_{j+1/2}^{(1)}(t^{n+1}), \\ (\Lambda_1^x + c_x \tau \Lambda_2^x - v \tau \Lambda_3^x) u_{j+1/2}^{n+1} &= \Lambda_1^x u_{j+1/2}^n + \tau \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t^{n+1}), \end{aligned} \tag{25}$$

где  $u_j^{n+1}$  — неизвестная сеточная функция на временном слое  $t^{n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Уравнения (25) дополняются граничными условиями, являющимися результатом применения неявного метода Эйлера к условиям (18):

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_0^{n+1} + \beta_1 v_{x,0}^{n+1} &= \hat{\mu}_1^{n+1}, & \alpha_2 u_{N_x}^{n+1} + \beta_2 v_{x,N_x}^{n+1} &= \hat{\mu}_2^{n+1}, \\ \hat{\mu}_1^{n+1} &= \alpha_1 u_0^n + \beta_1 v_{x,0}^n + \tau \mu_1'(t^{n+1}), & \hat{\mu}_2^{n+1} &= \alpha_2 u_{N_x}^n + \beta_2 v_{x,N_x}^n + \tau \mu_2'(t^{n+1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Перепишем уравнения схемы (25) и граничные условия (26) в стандартном виде двухточечного векторного уравнения и граничных условий для него, см. [22]:

$$P_{j+1} V_{j+1} - Q_j V_j = F_{j+1}, \quad j = \overline{0, N_x - 1}, \quad (27)$$

$$P_0 V_0 = F_0, \quad Q_{N_x} V_{N_x} = F_{N_x+1}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} V_j &= \begin{bmatrix} u_j^{n+1} \\ v_{x,j}^{n+1} \end{bmatrix}, & F_{j+1} &= \begin{bmatrix} A_0^x u_j^n + \tau \Phi_{j+1/2}^{(1)}(t^{n+1}) \\ h_x \Lambda_1^x u_j^n + \tau h_x \Phi_{j+1/2}^{(2)}(t^{n+1}) \end{bmatrix}, \\ P_{j+1} &= \begin{bmatrix} \kappa_x^c + \frac{1}{2} & -\left(\kappa_x^d + \frac{1}{12}\right) h_x \\ \kappa_x^d + \frac{1}{12} & \left(\frac{\kappa_x^c}{12} - \frac{\kappa_x^d}{2}\right) h_x \end{bmatrix}, & Q_j &= \begin{bmatrix} \kappa_x^c - \frac{1}{2} & -\left(\kappa_x^d + \frac{1}{12}\right) h_x \\ \kappa_x^d + \frac{1}{12} & \left(\frac{\kappa_x^c}{12} + \frac{\kappa_x^d}{2}\right) h_x \end{bmatrix}, \\ P_0 &= [\alpha_1 \ \beta_1], & F_0 &= \hat{\mu}_1^{n+1}, & Q_{N_x} &= [\alpha_2 \ \beta_2], & F_{N_x+1} &= \hat{\mu}_2^{n+1}. \end{aligned}$$

Параметры  $\kappa_x^d$  и  $\kappa_x^c$  суть диффузионное и конвективное числа Куранта соответственно:

$$\kappa_x^d = \frac{v\tau}{h_x^2} > 0, \quad \kappa_x^c = \frac{c_x\tau}{h_x}.$$

Отметим, что каждая из матриц  $P_{j+1}^{-1}Q_j$ ,  $Q_j^{-1}P_{j+1}$  при любых  $\kappa_x^d > 0$ ,  $\kappa_x^c$  имеет по два вещественных собственных значения, одно из которых больше 1, а другое — меньше 1, причем произведение этих значений в точности равно 1. Следовательно, стандартный метод двухточечной матричной прогонки [22] непригоден для решения уравнения (27): независимо от направления прогонки многократное перемножение матриц  $P_{j+1}^{-1}Q_j$  или  $Q_j^{-1}P_{j+1}$  при больших  $N_x$  будет порождать очень большие числа, которые потенциально приведут к переполнению при счете на компьютере. Необходимо понимать, однако, что этот вывод говорит лишь о неустойчивости стандартного метода двухточечной матричной прогонки [22] при решении уравнения (27), сама же схема (25) абсолютно устойчива.

Предлагается решать уравнение (27) иначе. Во-первых, сделаем замену переменных:

$$V_j = L W_j, \quad j = \overline{0, N_x}, \quad L = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 & -\lambda_1 \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{c_x}{v} \pm \sqrt{\frac{c_x^2}{v^2} + \frac{4}{v\tau}} \right), \quad (29)$$

введя также параметры

$$z_1 = -\lambda_1 h_x = -\frac{\sqrt{(\kappa_x^c)^2 + 4\kappa_x^d} + \kappa_x^c}{2\kappa_x^d}, \quad z_2 = \lambda_2 h_x = -\frac{\sqrt{(\kappa_x^c)^2 + 4\kappa_x^d} - \kappa_x^c}{2\kappa_x^d}, \quad (30)$$

отрицательные при любых  $\kappa_x^d > 0$ ,  $\kappa_x^c$ . Во-вторых, умножим обе части (27) на матрицу

$$H_{j+1} = 12 \begin{bmatrix} -z_2 & z_2^2 \\ z_1 & z_1^2 \end{bmatrix}.$$

В результате этих действий уравнение (27) запишется в виде

$$H_{j+1} P_{j+1} L W_{j+1} - H_{j+1} Q_j L W_j = H_{j+1} F_{j+1}. \quad (31)$$

Благодаря специальному выбору матриц  $L$  и  $H_{j+1}$  матрицы  $H_{j+1}P_{j+1}L$  и  $H_{j+1}Q_jL$  являются диагональными, и векторное уравнение (31) в действительности представляет из себя совокупность двух независимых скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} (z_2^2 - 6z_2 + 12)W_{j+1}^{(1)} - (z_2^2 + 6z_2 + 12)W_j^{(1)} &= 12z_2(z_2F_{j+1}^{(2)} - F_{j+1}^{(1)}), \\ (z_1^2 + 6z_1 + 12)W_{j+1}^{(2)} - (z_1^2 - 6z_1 + 12)W_j^{(2)} &= 12z_1(z_1F_{j+1}^{(2)} + F_{j+1}^{(1)}), \end{aligned} \tag{32}$$

где  $W_j^{(1)}$  и  $W_j^{(2)}$  – компоненты вектора  $W_j$ ,  $F_{j+1}^{(1)}$  и  $F_{j+1}^{(2)}$  – компоненты вектора  $F_{j+1}$ . Первое уравнение в (32) решается слева-направо от граничного значения  $W_0^{(1)}$ , а второе – справа-налево от граничного значения  $W_{N_x}^{(2)}$ . Вводя функцию

$$R(z) = \frac{z^2 + 6z + 12}{z^2 - 6z + 12} < 1 \quad \forall z < 0 \tag{33}$$

и величины

$$G_{j+1}^{(1)} = \frac{12z_2(F_{j+1}^{(1)} - z_2F_{j+1}^{(2)})}{z_2^2 - 6z_2 + 12}, \quad G_{j+1}^{(2)} = \frac{12z_1(F_{j+1}^{(1)} + z_1F_{j+1}^{(2)})}{z_1^2 - 6z_1 + 12}, \tag{34}$$

мы приходим к прогоночным формулам для  $W_{j+1}^{(1)}$  и  $W_j^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} W_{j+1}^{(1)} &= a_{j+1}^{(1)}W_0^{(1)} + b_{j+1}^{(1)}, \quad a_{j+1}^{(1)} = R(z_{2,j+1/2})a_j^{(1)}, \\ b_{j+1}^{(1)} &= R(z_{2,j+1/2})b_j^{(1)} - G_{j+1}^{(1)}, \quad j = \overline{0, N_x - 1}, \quad a_0^{(1)} = 1, \quad b_0^{(1)} = 0; \\ W_j^{(2)} &= a_j^{(2)}W_{N_x}^{(2)} + b_j^{(2)}, \quad a_j^{(2)} = R(z_{1,j+1/2})a_{j+1}^{(2)}, \\ b_j^{(2)} &= R(z_{1,j+1/2})b_{j+1}^{(2)} - G_{j+1}^{(2)}, \quad j = \overline{N_x - 1, 0}, \quad a_{N_x}^{(2)} = 1, \quad b_{N_x}^{(2)} = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Дополнительный нижний индекс  $j + 1/2$  у параметров  $z_1$  и  $z_2$  подчеркивает их зависимость от пространственного шага  $h_x = h_{x,j+1/2}$ , который, как указывалось в начале разд. 1, может быть переменным. Добавим, что параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также матрица  $L$  не зависят от  $h_x$ , поэтому снабжать их индексом не нужно. Граничные же значения  $W_0^{(1)}$ ,  $W_{N_x}^{(2)}$  вычисляются из системы линейных уравнений, вытекающей из формул (28) и (35):

$$\begin{bmatrix} P_0L \cdot \text{diag}(1, a_0^{(2)}) \\ Q_{N_x}L \cdot \text{diag}(a_{N_x}^{(1)}, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0^{(1)} \\ W_{N_x}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 - P_0L \cdot [0 \ b_0^{(2)}]^T \\ F_{N_x+1} - Q_{N_x}L \cdot [b_{N_x}^{(1)} \ 0]^T \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Таким образом, мы построили метод решения уравнения (27) и, тем самым, метод реализации одномерной схемы DIRK1B4 (25): он состоит из формул (29), (30), (33)–(36). Этот метод является безусловно устойчивым в силу неравенства  $R(z) < 1$ , выполненного при всех  $z < 0$ , и отрицательности параметров  $z_{1,2}$  при любых  $\kappa_x^d > 0$ ,  $\kappa_x^c$ .

Из формулы (35) очевидно, что предлагаемый метод реализации одномерной бикомпактной схемы DIRK1B4 принадлежит семейству методов прогонки. Это говорит об экономичности этой схемы и других бикомпактных схем на ее основе для уравнения (4). Более того, несмотря на векторный характер искомого численного решения (напомним, что неизвестных сеточных функций две, это  $u_j^{n+1}$  и  $v_{x,j}^{n+1}$ ), оно вычисляется посредством независимых скалярных прогонок, а не матричной прогонки, что обеспечивает еще большую эффективность счета.

Полезно сравнить одномерную бикомпактную схему DIRK1B4 для уравнения (4) с ее ближайшим аналогом – разрывной схемой Галеркина (DG-схемой) того же четвертого порядка аппроксимации по  $x$ , такой же дискретизацией по  $t$  неявным методом Эйлера, для того же уравнения (4). Чтобы достичь четвертого порядка, такой DG-схеме понадобится аппроксимировать точное решение полиномом третьей степени в каждой ячейке [11]. В силу разрывности этой аппроксимации общее число неизвестных на каждом слое составит  $4N_x$  у DG-схемы против почти вдвое меньшего числа  $2(N_x + 1)$  у DIRK1B4. Один шаг по времени в этой DG-схеме сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональной матри-

цей. Наилучшим прямым методом решения этой системы уравнений является трехточечная матричная прогонка, которая в случае данной DG-схемы требует обращения и перемножения матриц размера  $4 \times 4$ . Один шаг по времени в схеме DIRK1B4 сводится к двум независимым двухточечным скалярным прогонкам, что немногим сложнее двух шагов по времени по какой-либо простейшей явной схеме. Отсюда следует вывод, что схема DIRK1B4 (а) оперирует с меньшим числом неизвестных (т.е. требует меньших объемов машинной памяти) и (б) существенно быстрее совершает каждый шаг по времени.

Обратимся к двумерной схеме DIRK1B4:

$$\begin{aligned} (A_0^y A_0^x + \tau c_x A_0^y \Lambda_1^x + \tau c_y \Lambda_1^y A_0^x - \tau v A_0^y \Lambda_2^x - \tau v \Lambda_2^y A_0^x) u_C^{n+1} &= A_0^y A_0^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(1)}(t^{n+1}), \\ (A_0^y \Lambda_1^x + \tau c_x A_0^y \Lambda_2^x + \tau c_y \Lambda_1^y \Lambda_1^x - \tau v A_0^y \Lambda_3^x - \tau v \Lambda_2^y \Lambda_1^x) u_C^{n+1} &= A_0^y \Lambda_1^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(2)}(t^{n+1}), \\ (\Lambda_1^y A_0^x + \tau c_x \Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau c_y \Lambda_2^y A_0^x - \tau v \Lambda_1^y \Lambda_2^x - \tau v \Lambda_3^y A_0^x) u_C^{n+1} &= \Lambda_1^y A_0^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(3)}(t^{n+1}), \\ (\Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau c_x \Lambda_1^y \Lambda_2^x + \tau c_y \Lambda_2^y \Lambda_1^x - \tau v \Lambda_1^y \Lambda_3^x - \tau v \Lambda_3^y \Lambda_1^x) u_C^{n+1} &= \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(4)}(t^{n+1}). \end{aligned} \quad (37)$$

Для реализации схемы (37) предлагается использовать итерационный метод, основанный на приближенной факторизации [23], [24] ее уравнений. Ранее этот метод успешно применялся для реализации многомерных бикompактных схем для линейных и квазилинейных уравнений гиперболического типа [25], [26].

Пусть  $\overset{s}{u}$  – приближение номер  $s$  к искомому решению  $u^{n+1}$  ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ), причем начальное приближение  $\overset{0}{u} = u^n$ . Определим сеточные операторы

$$B_1^d(\tau) = A_0^d + c_d \tau \Lambda_1^d - v \tau \Lambda_2^d, \quad B_2^d(\tau) = \Lambda_1^d + c_d \tau \Lambda_2^d - v \tau \Lambda_3^d, \quad d = x, y. \quad (38)$$

Заметим, что операторы  $B_1^x(\tau)$  и  $B_2^x(\tau)$  совпадают с операторами в скобках в левых частях одномерной схемы DIRK1B4 (25). Тогда уравнения метода итерированной приближенной факторизации для схемы (37), записанные относительно приращений  $\overset{s+1}{\delta u} = \overset{s+1}{u} - \overset{s}{u}$ , принимают вид

$$\begin{aligned} B_1^y(\tau) B_1^x(\tau) \overset{s+1}{\delta u}_C &= \overset{s}{R}_C^{(1)}, & B_1^y(\tau) B_2^x(\tau) \overset{s+1}{\delta u}_C &= \overset{s}{R}_C^{(2)}, \\ B_2^y(\tau) B_1^x(\tau) \overset{s+1}{\delta u}_C &= \overset{s}{R}_C^{(3)}, & B_2^y(\tau) B_2^x(\tau) \overset{s+1}{\delta u}_C &= \overset{s}{R}_C^{(4)}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{s}{R}_C^{(1)} &= A_0^y A_0^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(1)}(t^{n+1}) - (A_0^y A_0^x + \tau c_x A_0^y \Lambda_1^x + \tau c_y \Lambda_1^y A_0^x - \tau v A_0^y \Lambda_2^x - \tau v \Lambda_2^y A_0^x) \overset{s}{u}_C, \\ \overset{s}{R}_C^{(2)} &= A_0^y \Lambda_1^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(2)}(t^{n+1}) - (A_0^y \Lambda_1^x + \tau c_x A_0^y \Lambda_2^x + \tau c_y \Lambda_1^y \Lambda_1^x - \tau v A_0^y \Lambda_3^x - \tau v \Lambda_2^y \Lambda_1^x) \overset{s}{u}_C, \\ \overset{s}{R}_C^{(3)} &= \Lambda_1^y A_0^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(3)}(t^{n+1}) - (\Lambda_1^y A_0^x + \tau c_x \Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau c_y \Lambda_2^y A_0^x - \tau v \Lambda_1^y \Lambda_2^x - \tau v \Lambda_3^y A_0^x) \overset{s}{u}_C, \\ \overset{s}{R}_C^{(4)} &= \Lambda_1^y \Lambda_1^x u_C^n + \tau \Phi_C^{(4)}(t^{n+1}) - (\Lambda_1^y \Lambda_1^x + \tau c_x \Lambda_1^y \Lambda_2^x + \tau c_y \Lambda_2^y \Lambda_1^x - \tau v \Lambda_1^y \Lambda_3^x - \tau v \Lambda_3^y \Lambda_1^x) \overset{s}{u}_C. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что нахождение  $\overset{s+1}{\delta u}$  из уравнений (39) сводится к последовательному решению четырех серий одномерных сеточных уравнений типа (25):

$$\begin{aligned} B_1^y(\tau) U_C^{(1)} &= \overset{s}{R}_C^{(1)}, & B_1^y(\tau) U_C^{(2)} &= \overset{s}{R}_C^{(2)}, \\ B_2^y(\tau) U_C^{(1)} &= \overset{s}{R}_C^{(3)}, & B_2^y(\tau) U_C^{(2)} &= \overset{s}{R}_C^{(4)}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} B_1^x(\tau) \overset{s+1}{\delta u}_{j+1/2,k} &= U_{j+1/2,k}^{(1)}, & B_1^x(\tau) \overset{s+1}{\delta v}_{y,j+1/2,k} &= P^y U_{j+1/2,k}^{(1)}, \\ B_2^x(\tau) \overset{s+1}{\delta u}_{j+1/2,k} &= U_{j+1/2,k}^{(2)}, & B_2^x(\tau) \overset{s+1}{\delta v}_{y,j+1/2,k} &= P^y U_{j+1/2,k}^{(2)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где  $U_{j+1/2,k}^{(1)}, U_{j+1/2,k}^{(2)}$  – вспомогательные сеточные функции, определенные при  $j = \overline{0, N_x - 1}$ ,  $k = \overline{0, N_y}$ . Уравнения (40) дополняются граничными условиями

$$\alpha_3 U_{j+1/2,0}^{(m)} + \beta_3 P^y U_{j+1/2,0}^{(m)} = \alpha_4 U_{j+1/2,N_y}^{(m)} + \beta_4 P^y U_{j+1/2,N_y}^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2,$$

а уравнения (41) – граничными условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 \delta u_{0,k}^{s+1} + \beta_1 \delta v_{x,0,k}^{s+1} &= \alpha_2 \delta u_{N_x,k}^{s+1} + \beta_2 \delta v_{x,N_x,k}^{s+1} = 0, \\ \alpha_1 \delta v_{y,0,k}^{s+1} + \beta_1 \delta v_{xy,0,k}^{s+1} &= \alpha_2 \delta v_{y,N_x,k}^{s+1} + \beta_2 \delta v_{xy,N_x,k}^{s+1} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (40), (41) решаются методом, построенным в первой половине этого раздела для реализации одномерной схемы DIRK1B4. Итерационный процесс останавливается, как только выполнено неравенство

$$\frac{\|\delta u\|_\infty^{s+1}}{\|u^s\|_\infty} \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  – наперед заданная относительная точность вычислений.

Основной объем вычислений на одной итерации метода (39) состоит из одномерных скалярных двухточечных прогонок, т.е. из простейших явных действий. Следовательно, вопрос об экономичности метода (39) сводится к тому, сколько итераций придется выполнить, прежде чем наступит сходимость с точностью  $\varepsilon$ . Очевидно, число итераций до сходимости во многом определяется постановкой дифференциальной задачи, поэтому разумно исследовать вычислительную эффективность метода (39) практически на конкретных примерах, что и делается в следующем разделе.

Для реализации трехмерной схемы DIRK1B4 также предлагается использовать метод итерируемой приближенной факторизации. Уравнения этого метода в трехмерном случае могут быть без труда выписаны, исходя из полудискретной схемы (23) по аналогии с формулами (37) и (39). Мы не будем этого делать, так как эти уравнения громоздки и не вносят чего-то принципиально нового по сравнению с вышесказанным, кроме того, примеры расчетов в разд. 3 ограничиваются одномерным и двумерным случаями.

### 3. СЕТОЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Испытаем бикомпактные схемы DIRK1B4 и SDIRK2B4 на смешанных задачах для одномерного уравнения (4) и двумерного уравнения (12). Для каждого из уравнений рассмотрим по две задачи: одной стационарной и одной нестационарной, что позволит продемонстрировать точность бикомпактных схем отдельно по пространству и по времени.

**Задача 1.** Исследуем сходимость схемы DIRK1B4 на стационарном (предельном) решении уравнения (4):

$$u(x, \infty) = \frac{\exp(\mathbf{R}x) - 1}{\exp(\mathbf{R}) - 1} + \frac{\sin \pi x}{\mathbf{R}}, \quad (42)$$

где  $\mathbf{R} = c_x/v$ . На этот параметр можно смотреть как на некий аналог числа Рейнольдса. Решение (42) получается при следующих входных данных:

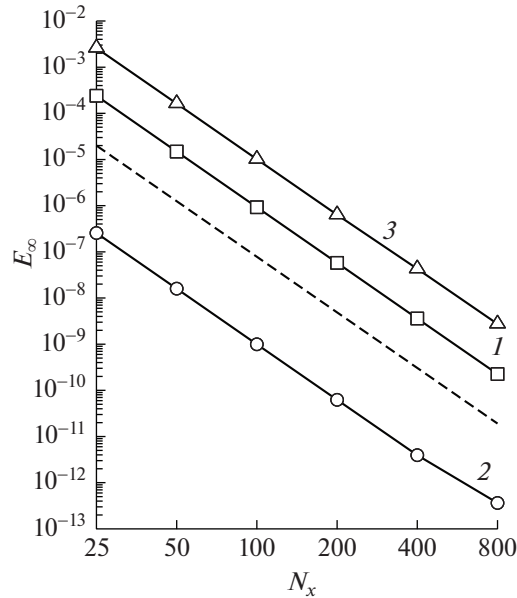
$$x_{\max} = 1, \quad f(x, t) = f(x) = \frac{\pi v}{c_x} (c_x \cos \pi x + \pi v \sin \pi x), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1.$$

Начальное условие можно взять любым; пусть это будет простейший линейный профиль, соединяющий граничные условия:

$$u|_{t=0} = 1 - x.$$

Заметим, что при  $\mathbf{R} \gg 1$  решение (42) содержит пограничный слой у правой границы расчетной области, т.е. у точки  $x = 1$ .

Для полноты проверки схемы DIRK1B4 и метода ее реализации, построенного в разд. 2, имеет смысл провести вычисления в широком диапазоне значений параметра  $\mathbf{R}$ . Полагая  $c_x = 1$ , возь-



**Фиг. 1.** Абсолютные погрешности  $u$  в норме  $L_\infty$  для схемы DIRK1B4 в задаче 1. Кривая 1 соответствует расчетам при  $\mathbf{R} = 10^4$ , кривая 2 – при  $\mathbf{R} = 1$ , кривая 3 – при  $\mathbf{R} = 10^{-4}$ . Штриховой линией изображена эталонная зависимость  $O(h^4)$ .

мом  $\nu = 10^{-4}$  ( $\mathbf{R} = 10^4$  есть погранслоем очень малой толщины),  $\nu = 1$  ( $\mathbf{R} = 1$ ),  $\nu = 10^4$  ( $\mathbf{R} = 10^{-4}$ ). Для расчетов с  $\mathbf{R} = 1, 10^{-4}$  выберем равномерные сетки с узлами  $x_j = jh_x$ ,  $h_x = 1/N_x$ , а для расчетов с  $\mathbf{R} = 10^4$  – неравномерные сетки с узлами

$$x_j = \frac{1 - \exp(-10j/N_x)}{1 - \exp(-10)}. \quad (43)$$

Число ячеек сетки  $N_x$  возьмем равным 25, 50, ..., 800. В случае  $\mathbf{R} = 10^4$  при  $N_x = 25$  на пограничный слой приходится 7 ячеек. Сгущение сеток проводится при постоянном конвективном числе Куранта  $\kappa_x^c = 10$  (для неравномерной сетки (43) оно равно 10 при максимальном  $h_x$ ), что означает  $\tau = O(h)$ ,  $\kappa_x^d \rightarrow \infty$  при  $h \rightarrow 0$ . Счет по времени прекращается, если выполнено неравенство

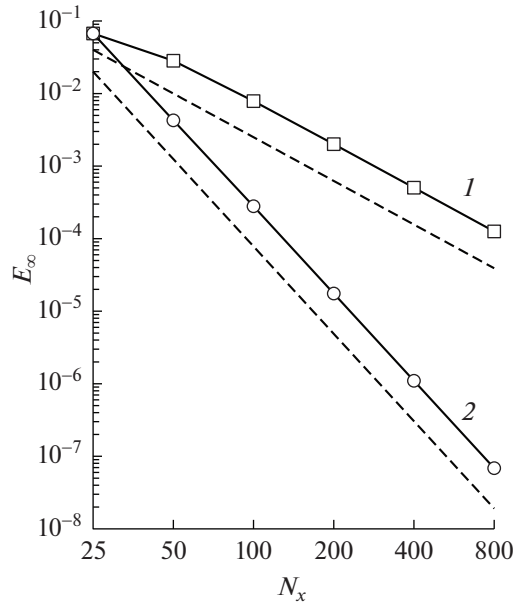
$$\frac{\|u^{n+1} - u^n\|_\infty}{\|u^n\|_\infty} \leq 10^{-14}.$$

На фиг. 1 в двойном логарифмическом масштабе изображены графики абсолютных погрешностей  $u$  в норме  $L_\infty$  как функций  $N_x$ . Из приведенных данных ясно, что схема DIRK1B4 действительно имеет четвертый порядок точности по пространству, и она не испытывает каких-либо проблем из-за очень малых или очень больших значений  $\mathbf{R}$  или значительной неравномерности сетки (43).

**Задача 2.** Изучим сходимость схемы SDIRK2B4 на нестационарном решении уравнения (4) с  $f(x, t) \equiv 0$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x - c_x t - 0.5)^2}{\nu(4t+1)}\right). \quad (44)$$

Параметры возьмем следующими:  $x_{\max} = 2$ ,  $c_x = 10$ ,  $\nu = 0.01$  ( $\mathbf{R} = 10^3$ ). Начальное и граничные условия для уравнения (4) получаются путем взятия решения (44) при  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  (такая смешанная задача моделирует задачу Коши на всей оси  $Ox$ ).



**Фиг. 2.** Абсолютные погрешности  $u$  в норме  $L_\infty$  для схемы SDIRK2B4 в задаче 2. Кривая 1 соответствует расчетам при  $\tau = O(h)$  ( $\kappa_x^c = \text{const}$ ,  $\kappa_x^d \rightarrow \infty$ ), кривая 2 – при  $\tau = O(h^2)$  ( $\kappa_x^c \rightarrow 0$ ,  $\kappa_x^d = \text{const}$ ). Штриховыми линиями изображены эталонные зависимости  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$ .

Расчеты проведем до момента времени  $t = 0.1$  на последовательности равномерных сеток с  $N_x = 25, 50, \dots, 800$ . Сгущение сетки при этом осуществим двумя способами: при  $\kappa_x^c = 0.5 = \text{const}$  ( $\tau = O(h)$ ,  $\kappa_x^d \rightarrow \infty$ ) и  $\kappa_x^c = 12.5/N_x = O(h)$  ( $\tau = O(h^2)$ ,  $\kappa_x^d = \text{const}$ ).

На фиг. 2 показаны графики абсолютных погрешностей  $u$  в норме  $L_\infty$  как функций  $N_x$ . Погрешности посчитаны в конечный момент времени  $t = 0.1$ . Хорошо видно, что при постоянном конвективном числе Куранта схема SDIRK2B4 сходится со вторым порядком, а при постоянном диффузионном числе Куранта – с четвертым порядком, как того и следовало ожидать.

**Задача 3.** Вернемся к схеме DIRK1B4 и проверим ее сходимость на стационарном решении теперь уже двумерного уравнения (12) с  $f(x, y, t) \equiv 0$ :

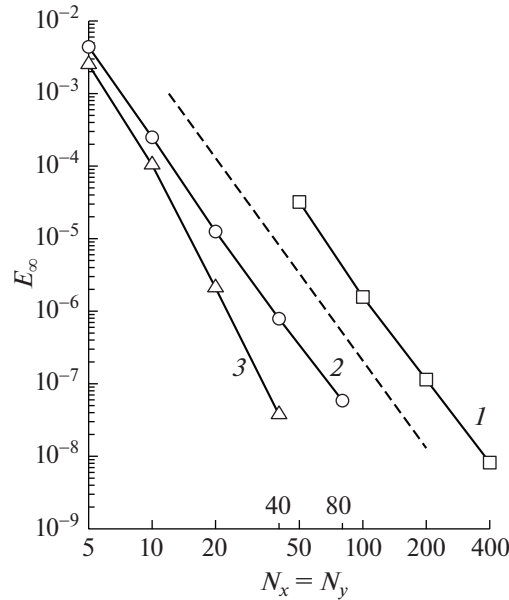
$$u(x, y, \infty) = \cos[2\pi(c_y x - c_x y)] \exp\left[-\frac{1 - \sqrt{1 + (4\pi v)^2}}{2v} (c_x x + c_y y)\right]. \tag{45}$$

Параметры расчетной области  $x_{\max} = y_{\max} = 1$ . Для постановки граничных условий берутся значения функции (45) на границе  $\partial D$  расчетной области  $D$ . Начальное условие можно выбрать любым, пусть это будет тождественный нуль:  $u|_{t=0} \equiv 0$ . Для двумерных задач определим параметр  $\mathbf{R}$  в виде

$$\mathbf{R} = \frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}{v}.$$

Решение (45) не содержит каких-либо особенностей (например, погранслоев) ни в пределе при  $\mathbf{R} \rightarrow 0$ , ни в пределе при  $\mathbf{R} \rightarrow \infty$ .

По аналогии с задачей 1 зафиксируем коэффициенты  $c_x = 1$ ,  $c_y = 2$  и проведем расчеты при разных значениях коэффициента  $v$ :  $v = \sqrt{5} \times 10^{-4}$  ( $\mathbf{R} = 10^4$ ),  $v = \sqrt{5}$  ( $\mathbf{R} = 1$ ),  $v = \sqrt{5} \times 10^4$  ( $\mathbf{R} = 10^{-4}$ ). Несмотря на формальное отсутствие у решения особенностей при малых и больших  $\mathbf{R}$ , варьировать  $v$  в таком широком диапазоне не бессмысленно: тем самым мы испытаем метод итерированной приближенной факторизации при сильном различии коэффициентов в уравнениях схемы.



**Фиг. 3.** Абсолютные погрешности  $u$  в норме  $L_\infty$  для схемы DIRK1B4 в задаче 3. Кривая 1 соответствует расчетам при  $R = 10^4$ , кривая 2 – при  $R = 1$ , кривая 3 – при  $R = 10^{-4}$ . Штриховой линией изображена эталонная зависимость  $O(h^4)$ .

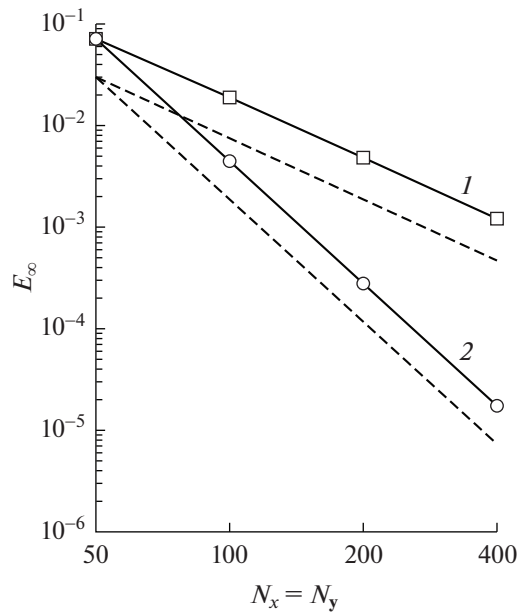
Для всех  $R$  вычисления выполним на равномерных сетках; при  $R = 10^4$  используем сетки с  $N_x = N_y = 50, 100, 200, 400$ , а при  $R = 1, 10^{-4}$  – сетки с  $N_x = N_y = 5, 10, 20, 40$  (и дополнительно 80 для  $R = 1$ ). Сгущение сеток делается при постоянном конвективном числе Куранта, независимо от значения  $R$ ;  $\kappa_y^c = 2\kappa_x^c = 1, 0.1, 10^{-5}$  при  $R = 10^4, 1, 10^{-4}$  соответственно. Параметр  $\varepsilon = 10^{-10}$ , счет по времени останавливается при выполнении неравенства

$$\frac{\|u^{n+1} - u^n\|_\infty}{\|u^n\|_\infty} \leq 10^{-10}.$$

На фиг. 3 изображены графики абсолютных погрешностей  $u$  в норме  $L_\infty$  как функций  $N_x$ . Очевидно, во всех случаях схема DIRK1B4 сходится с четвертым порядком точности (для  $R = 10^{-4}$  он даже несколько больше четырех). Из фиг. 1 становится понятным выбор столь грубых сеток для  $R = 1, 10^{-4}$  – уже при  $N_x = N_y = 40-80$  точность схемы приближается к точности итераций по факторизации.

Важно также привести и проанализировать данные о сходимости итераций по факторизации. Независимо от значения  $R$ , число итераций до сходимости  $s_\varepsilon$  меняется при увеличении  $n$  таким образом: при  $n = 1$  (первый шаг по времени) число  $s_\varepsilon$  очень велико, затем оно резко падает до нескольких десятков итераций и начинает монотонно убывать, и после некоторого  $n$  становится меньше десяти и быстро выходит на константу в три итерации. Для  $R = 10^4$  самое первое большое значение  $s_\varepsilon$  составляет примерно 750, а меньше десяти число  $s_\varepsilon$  становится примерно при  $n = 50$ . Для  $R = 1, 10^{-4}$  первое  $s_\varepsilon$  равно примерно 2000, меньше десяти  $s_\varepsilon$  становится примерно при  $n = 10$ . Такой характер зависимости  $s_\varepsilon(n)$  объясняется тем, что (а) начальное приближение на первом шаге по времени совпадает с достаточно грубо выбранным начальным условием, которое даже “не попадает” в граничные условия, и (б) с ростом  $n$  численное решение устанавливается из-за стационарности постановки задачи.





**Фиг. 4.** Абсолютные погрешности  $u$  в норме  $L_\infty$  для схемы SDIRK2B4 в задаче 4. Кривая 1 соответствует расчетам при  $\tau = O(h)$  ( $\kappa_{x,y}^c = \text{const}$ ,  $\kappa_{x,y}^d \rightarrow \infty$ ), кривая 2 – при  $\tau = O(h^2)$  ( $\kappa_{x,y}^c \rightarrow 0$ ,  $\kappa_{x,y}^d = \text{const}$ ). Штриховыми линиями изображены эталонные зависимости  $O(h^2)$  и  $O(h^4)$ .

**Задача 4** является двумерной версией задачи 2. Рассматривается сходимость схемы SDIRK2B4 на нестационарном решении уравнения (12) с  $f(x, y, t) \equiv 0$ :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4t + 1} \exp\left(-\frac{(x - c_x t - 0.5)^2 + (y - c_y t - 0.5)^2}{v(4t + 1)}\right). \tag{46}$$

Параметры  $x_{\max} = y_{\max} = 2$ ,  $c_x = c_y = 10$ ,  $v = 0.01$  ( $\mathbf{R} = \sqrt{2} \times 10^3$ ). Начальное и граничные условия для уравнения (12), подобно задаче 2, ставятся путем взятия точного решения (46) при  $t = 0$  и на  $\partial D$  (получающаяся смешанная задача моделирует задачу Коши на всей плоскости  $Oxy$ ).

Расчеты выполним до момента времени  $t = 0.1$  на последовательности равномерных сеток с  $N_x = N_y = 50, 100, 200, 400$ . Сгущение сетки при этом осуществим двумя способами: при  $\kappa_{x,y}^c = 0.5 = \text{const}$  ( $\tau = O(h)$ ,  $\kappa_{x,y}^d \rightarrow \infty$ ) и  $\kappa_{x,y}^c = 12.5/N_x = O(h)$  ( $\tau = O(h^2)$ ,  $\kappa_{x,y}^d = \text{const}$ ). Как и в задаче 3, относительная точность итераций по факторизации  $\epsilon = 10^{-10}$ .

На фиг. 4 приведены графики абсолютных погрешностей  $u$  в норме  $L_\infty$  как функций  $N_x$ . Нетрудно видеть, что апостериорные порядки сходимости схемы SDIRK2B4 совпадают с теоретическими, вторым при  $\kappa_{x,y}^c = \text{const}$  и четвертым при  $\kappa_{x,y}^c = O(h)$ . Поскольку решение гладкое и мало меняется за один шаг по времени, метод итерированной факторизации сходится очень быстро: На всех слоях число  $s_\epsilon = 6, 5, 4, 3$  (среднее по стадиям метода Рунге–Кутты) при  $N_x = 50, 100, 200, 400$  соответственно.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены новые бикомпактные схемы для линейного многомерного уравнения конвекции-диффузии. Эти схемы получены при помощи метода прямых, интегроинтерполяционного метода, а также би- и трикубической интерполяции Эрмита искомой функции в ячейке сетки. Для интегрирования по времени в этих схемах рекомендуется использовать диагонально-явные методы Рунге–Кутты. Построенные бикомпактные схемы абсолютно устойчивы, консервативны, имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству. Для реализации этих

схем разработан итерационный метод, основанный на приближенной факторизации их многомерных уравнений. Каждая итерация этого метода не является вычислительно трудоемкой, так как сводится к совокупности одномерных скалярных двухточечных прогонок.

На одномерных и двумерных, стационарных и нестационарных смешанных задачах проверена сеточная сходимость бикомпактных схем с аппроксимацией по времени неявным методом Эйлера и  $L$ -устойчивым жестко-точным диагонально-неявным методом Рунге–Кутты второго порядка. Расчеты проведены в широком диапазоне отношений конвективных скоростей и коэффициента диффузии, от  $10^4$  до  $10^{-4}$ . В одной из задач для разрешения очень тонкого пограничного слоя использована существенно неравномерная сетка. На стационарных задачах продемонстрирован четвертый порядок точности по пространству у выбранных бикомпактных схем. На нестационарных задачах бикомпактная схема второго порядка аппроксимации по времени показала второй порядок точности по времени при постоянном конвективном числе Куранта и четвертый при постоянном диффузионном числе Куранта. Число итераций до сходимости по факторизации в нестационарной двумерной задаче на не слишком грубых сетках оказалось равным 3–5, что вкуче с вычислительной простотой каждой итерации говорит о высокой экономичности предлагаемых бикомпактных схем.

В перспективе полученные в этой работе бикомпактные схемы для линейного многомерного уравнения конвекции-диффузии могут быть использованы совместно с уже имеющимися подобными схемами для уравнений гиперболического типа с целью расчетов течений вязкой жидкости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
2. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 958–972.
3. Chikitkin A.V., Rogov B.V. Family of central bicomcompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 142. P. 151–170.
4. Rogov B.V. Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomcompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 139. P. 136–155.
5. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Консервативная монотонизация бикомпактных схем: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 8. 26 с.
6. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Бикомпактные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа на декартовых сетках с адаптацией к решению: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 11. 27 с.
7. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Высокоточные бикомпактные схемы для сквозного счета детонационных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1381–1391.
8. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Высокоточные бикомпактные схемы для численного моделирования течений многокомпонентных газов с несколькими химическими реакциями // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 6. С. 21–36.
9. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. О сходимости компактных разностных схем // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 1. С. 99–116.
10. Толстых А.И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015. 350 с.
11. Cockburn B., Shu C.W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems // SIAM J. Numer. Anal. 2014. V. 35. № 6. P. 2440–2463.
12. Xu Y., Shu C.W. Local discontinuous Galerkin methods for high-order time-dependent partial differential equations // Commun. Comput. Phys. 2010. V. 7. P. 1–46.
13. Wang H.J., Shu C.W., Zhang Q. Stability and error estimates of the local discontinuous Galerkin method with implicit-explicit time-marching for advection-diffusion problems // SIAM J. Numer. Anal. 2015. V. 53. P. 206–227.
14. Local discontinuous Galerkin methods with explicit-implicit-null time discretizations for solving nonlinear diffusion problems / H. Wang, Q. Zhang, S. Wang, C.W. Shu // Sci. China Math. 2020. V. 63. P. 183–204.
15. Toro E.F., Montecinos G.I. Advection-diffusion-reaction equations: hyperbolization and high-order ADER discretizations // SIAM J. Sci. Comput. 2014. V. 36. № 5. P. A2423–A2457.
16. Nishikawa H. On hyperbolic method for diffusion with discontinuous coefficients // J. Comput. Phys. 2018. V. 367. P. 102–108.
17. Reconstructed discontinuous Galerkin methods for linear advection-diffusion equations based on first-order hyperbolic system / J. Lou, L. Li, H. Luo, H. Nishikawa // J. Comput. Phys. 2018. V. 369. P. 103–124.

18. *Bragin M.D., Rogov B.V.* Conservative limiting method for high-order bicomact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2020. V. 151. P. 229–245.
19. Численная реализация гидродинамической трехмерной модели формирования осадочных бассейнов / Б.М. Наймарк, А.Т. Исмаил-заде, А.И. Короткий и др. // *Тр. ИММ УрО РАН.* 1998. Т. 5. С. 143–173.
20. *Хайпер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
21. *Alexander R.* Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff O.D.E.'s // *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. V. 14. № 6. P. 1006–1021.
22. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
23. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
24. *Van der Houwen P.J., Sommeijer B.P.* Approximate factorization for time-dependent partial differential equations // *J. Comput. Appl. Math.* 2001. V. 128. № 1–2. P. 447–466.
25. *Рогов Б.В., Чикиткин А.В.* О сходимости и точности метода итерируемой приближенной факторизации операторов многомерных высокоточных бикомпактных схем // *Матем. моделирование.* 2019. Т. 31. № 12. С. 119–144.
26. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 3. С. 313–325.

## РАЗВИТИЕ УСКОРЕННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКОВОГО КЛАСТЕРА С ПРИМЕСЯМИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ<sup>1)</sup>

© 2021 г. И. А. Зарафутдинов\*, Ю. А. Питюк\*\*, О. А. Солнышкина\*\*\*

450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32, Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем, ФГБОУ,  
Башкирский государственный университет, Россия

\*e-mail: [ilnurzaraf2@gmail.com](mailto:ilnurzaraf2@gmail.com)

\*\*e-mail: [pityukyulia@gmail.com](mailto:pityukyulia@gmail.com)

\*\*\*e-mail: [olgasolnyshkina@gmail.com](mailto:olgasolnyshkina@gmail.com)

Поступила в редакцию 13.05.2020 г.  
Переработанный вариант 13.08.2020 г.  
Принята к публикации 18.11.2020 г.

В работе представлен эффективный численный подход для исследования динамики кластера, содержащего пузырьки и твердые частицы, под действием акустического поля в трехмерном случае. Численный подход включает в себя комбинацию метода граничных элементов и быстрого метода мультиполей для уравнения Лапласа. Аппаратное ускорение расчетов пузырькового кластера с примесями твердых частиц достигается путем применения технологии распараллеливания на графических процессорах. Эффективность разработанного метода подтверждается демонстрационными расчетами для структурированного кубического кластера из пузырьков и твердых сферических частиц. Проведен анализ динамики пузырькового кластера с примесями в зависимости от его размера и показано, что с увеличением размера кластера уменьшаются мобильность пузырьков и частиц, амплитуда изменения объема кластера и отдельных пузырьков, а также деформация крайних пузырьков кластера. Библ. 28. Фиг. 6. Табл. 1.

**Ключевые слова:** пузырек, твердая частица, акустическое поле, потенциальное течение, метод граничных элементов, быстрый метод мультиполей, графические процессоры.

**DOI:** 10.31857/S0044466921040141

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Нефтегазовая, медицинская, экологическая и другие отрасли промышленности требуют внедрения новых технологий, которые могут быть разработаны на основе фундаментальных исследований в микрофлюидике. Это обусловлено тем, что поведение макросистем очень сложно и во многом определяется гидродинамическими процессами на микроуровне, которые зависят от поведения отдельных микрочастиц. В связи с чем актуальной является задача анализа динамики отдельных микрообъектов, таких как пузырьки и твердые частицы в поле внешних сил.

В настоящее время существует большое число теоретических [1], [2] и экспериментальных [3], [4] работ, в которых рассматривается взаимодействие пузырька и частицы, находящихся на расстоянии, равном или большем размера самих объектов. Обзор по взаимодействию частицы и пузырька, находящихся на значительном расстоянии друг от друга, можно найти в работе [5].

В последние годы исследователи начали использовать методы вычислительной гидродинамики для эффективного моделирования столкновений пузырьков и частиц во флотационной машине [6], [7]. Несмотря на то что эти модели имеют прикладное значение, многие фундаментальные физические явления, такие как движение пузырьков и частиц, возникающие межфазные силы и процесс дренирования пленки, полностью не изучены. Однако учет межфазных сил является важным фактором при взаимодействии между частицей и пузырьком. В работе [8] тео-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 18-71-00068).

ретически исследована роль гидродинамических и поверхностных сил при взаимодействии пузырька и частицы, и обнаружено существование гидрофобных сил притяжения между поверхностями, покрытыми поверхностно-активными веществами. В [14] на основе теоретической модели рассчитана гидродинамическая сила, действующая со стороны жидкости на частицу. С изобретением атомно-силового микроскопа многие ученые начали экспериментально изучать межмолекулярные силы взаимодействия, возникающие между пузырьком и частицей [10], [11]. В [12] представлен численно-экспериментальный анализ сил взаимодействия при столкновении всплывающего пузырька с падающей твердой частицей в дистиллированной воде и растворе глицерина. В работах [13], [14] экспериментально изучали процесс прилипания частицы к поверхности большого воздушного пузырька. В [15] проведены аналогичные эксперименты по изучению траектории пузырьков на поверхности большой неподвижной частицы.

Для более полного понимания механизмов взаимодействия пузырьков и частиц при флотационном процессе необходимо рассматривать не только динамику нескольких микрообъектов, но и их кластера. Однако в большинстве теорий, описывающих совместную динамику пузырьков и частиц, трехмерными эффектами пренебрегается, (например, [16]), не учитывается деформация пузырьков, тем самым поток движения жидкости вокруг пузырька и частицы сильно идеализирован. В связи с этим актуальны создание математических моделей и реализация соответствующих программных модулей на базе эффективных методов и алгоритмов в трехмерном случае, которые более адекватно описывают рассматриваемые физические процессы. Основным масштабируемым алгоритмом, используемым в работе, является быстрый метод мультиполей (БММ), который признан одним из 10 лучших алгоритмов 20-го века [17]. Этот метод был разработан в конце 1980-х годов для решения задачи гравитации  $N$ -тел и имеет сложность  $O(N)$  или  $O(N \log N)$  [18]. БММ стал одним из самых мощных алгоритмов для решения уравнений Лапласа, Гельмгольца, Стокса, Максвелла и других классических уравнений математической физики. При решении краевых задач он может быть эффективно использован с методом граничных элементов (МГЭ) [19], [20], преимущество которого заключается в возможности отслеживать динамику межфазных границ путем дискретизации поверхности раздела фаз треугольными элементами, что является особенно ценным при моделировании деформируемых пузырьков. БММ допускает возможность получения дополнительного ускорения за счет распараллеливания на графических и центральных процессорах [21]. Наиболее современные работы по применению МГЭ для изучения взаимодействия твердой частицы с пузырьком представлены в [22], [23]. Однако в рассмотренных работах использовалась двумерная постановка и рассматривались большие пузырьки, возникающие при подводном взрыве.

В [24] успешно использовалась комбинация МГЭ и БММ для изучения динамики кластера пузырьков, содержащего более 2 млн расчетных узлов. В отличие от [24] гранично-интегральная формулировка для пузырькового кластера с примесями твердых частиц является более сложной [25]. Однако в ее основе по-прежнему лежат формулы Грина для оператора Лапласа, что позволяет переписать гранично-интегральные уравнения в терминах потенциала простого и двойного слоя. Далее будем называть ядра интегрального представления решений уравнения Лапласа через потенциалы простого и двойного слоя ядрами Лапласа. Таким образом, решение матрично-векторных уравнений для рассматриваемой задачи можно свести к вычислению ядер Лапласа, для которых наиболее эффективно применение БММ.

В работе [25] представлена модификация гранично-интегральной постановки для случая совместной динамики пузырьков и твердых сферических частиц, а также реализовано одно из решений по ускорению кода с применением графических процессоров. Однако распараллеливание кода только на графических процессорах не позволило достичь желаемого результата из-за квадратичной сложности алгоритма. Более того, при реализации кода в [25] не учитывалось представление через ядра Лапласа, а отдельно были построены схемы расчета для левой и правой части системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В связи с этим в данной работе для ускорения расчетов и увеличения масштаба задачи совместной динамики пузырьков и частиц в акустическом поле предложен новый эффективный подход, основанный на представлении левой и правой части СЛАУ через потенциалы двойного и простого слоя. Преимущество такого подхода заключается также в возможности применения БММ, который существенно уменьшает сложность вычисления матрично-векторных произведений (МВП) с матрицами специального вида.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение пузырька (обозначим индексом “ $b$ ”) объема  $V_b$ , ограниченного поверхностью  $S_b$ , и твердой частицы (обозначим индексом “ $p$ ”) объема  $V_p$ , ограниченного поверхностью  $S_p$ , в неограниченной идеальной несжимаемой жидкости. Движение жидкости в гравитационном поле ускорения  $\mathbf{g}$  описывается уравнениями Эйлера

$$\rho_l \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho_l \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (1)$$

где  $p$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\rho_l$  – давление в жидкости, скорость и плотность соответственно. Далее предполагается, что жидкость покоится на бесконечности, давление на бесконечности определяется согласно действующему акустическому полю  $P(t) = p_0 + P_a \sin(\omega t)$ , где  $p_0$ ,  $P_a$ ,  $\omega$  – начальное давление в жидкости, амплитуда и циклическая частота акустического поля соответственно.

Обозначим через  $\mathbf{r}_b$  и  $\mathbf{r}_p$  радиус-векторы точек на поверхностях  $S_b$  и  $S_p$ , а через  $\mathbf{n}_b$  и  $\mathbf{n}_p$  – нормали к этим точкам (направленные в жидкость) соответственно. Тем самым можно записать кинематические условия на поверхности пузырька и частицы

$$\mathbf{n}_b \cdot \mathbf{v}|_{r=r_b} = \mathbf{n}_b \cdot \frac{d\mathbf{r}_b}{dt}, \quad \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{v}|_{r=r_p} = \mathbf{n}_p \cdot \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}. \quad (2)$$

Будем считать, что газ внутри пузырька ведет себя политропно с показателем политропы  $k$ , тогда давление на границе пузырька вычисляется по формуле

$$p|_{s_b} = p_g - 2\gamma k, \quad p_g = p_{g0} \left( \frac{V_{b0}}{V_b} \right)^k,$$

где  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $k$  – средняя кривизна поверхности,  $p_g$  – давление в газе (индексом “0” обозначено начальное состояние).

Динамика твердого тела может быть описана следующим образом. Обозначим координаты и скорость центра масс частицы как  $\mathbf{R}_p$  и  $\mathbf{V}_p$  соответственно. Тогда поступательную скорость сферической частицы запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \mathbf{V}_p. \quad (3)$$

Для замыкания системы уравнений необходимо вычислить силу  $\mathbf{F}_p$ , действующую на частицу, которая имеет две компоненты, первая – гравитационная (массовая) и, вторая, действующая со стороны жидкости (поверхностная):

$$\mathbf{F}_p = m_p \mathbf{g} - \int_{S_p} p \mathbf{n} dS. \quad (4)$$

Кроме того, предполагается, что течение потенциальное, т.е.  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , где  $\phi$  – потенциал скорости, который удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \phi = 0$ . Тогда уравнение (1) для жидкости, покоящейся на бесконечности, можно переписать в форме интеграла Коши–Лагранжа, а потенциал скорости на границе пузырька и частицы определяется согласно динамическому условию

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - \frac{p}{\rho_l} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}|_s + P(t). \quad (5)$$

Тогда кинематические граничные условия (2) в случае потенциального течения запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_{r=r_b} = \mathbf{n}_b \cdot \frac{d\mathbf{r}_b}{dt}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{r=r_p} = \mathbf{n}_p \cdot \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}. \quad (6)$$

В отсутствие частицы задача сводится к интегрированию формулы, которая позволяет определить давление на границе пузырька, если известны текущие позиции точек на поверхности пузырька. Если в некоторый момент времени известен потенциал на поверхности пузырька, то можно решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа и определить нормальную производную потенциала скорости согласно условию (6). На основе чего можно найти положение поверхности пузырька на следующем шаге по времени. Потенциал скорости на следующем временном шаге можно вычислить согласно интегралу Коши–Лагранжа (5). Из первого условия (2) можно

найти скорость движения поверхности пузырька. Однако разработанная схема не работает для твердого тела, так как давление на поверхности частицы не определяется только ее положением, как в случае с пузырьком. Интеграл Коши–Лагранжа может быть использован, чтобы определить давление на поверхности, но тогда сила, действующая на твердое сферическое тело, должна быть вычислена с помощью формулы (4). Таким образом, сила, действующая на частицу, зависит от нормальной производной потенциала скорости, а это означает, что потенциал на поверхности частицы не может быть найден, как в случае с пузырьком. Поэтому на каждом временном шаге необходимо решать задачу для нахождения потенциала скорости частицы.

Для решения поставленной задачи методом граничных элементов гранично-интегральную формулировку, описывающую динамику пузырьков [24], [26], необходимо модифицировать с учетом наличия твердой частицы [25].

Подставив в формулу (4) давление, выраженное через потенциал в соответствии с интегралом Коши–Лагранжа (5), получим

$$\mathbf{F}_p = (\rho_p - \rho_l)V_p\mathbf{g} + \rho_l \int_{S_p} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \right) \mathbf{n} dS. \tag{7}$$

Используя (7), уравнение движения частицы можно записать в гранично-интегральной форме

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_p} \right) \mathbf{g} + \frac{\rho_l}{m_p} \left[ \frac{d}{dt} \int_{S_p} \phi \mathbf{n} dS + \int_{S_p} \left( \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \mathbf{n} - \frac{\partial\phi}{\partial n} \nabla\phi \right) dS \right]. \tag{8}$$

Введя новую переменную

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p - \frac{\rho_l}{m_p} \int_{S_p} \phi \mathbf{n} dS, \tag{9}$$

гранично-интегральное уравнение (8) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{U}_p}{dt} = \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_p} \right) \mathbf{g} + \frac{\rho_l}{m_p} \int_{S_p} \left( \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \mathbf{n} - \frac{\partial\phi}{\partial n} \nabla\phi \right) dS. \tag{10}$$

Соотношение (6) с учетом (2) и (9) может быть приведено к виду

$$q(\mathbf{y}) = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\rho_l}{m_p} \int_{S_p} \phi(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \mathbf{U}_p \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_p. \tag{11}$$

Уравнение (11) позволяет исключить производную потенциала скорости по нормали к поверхности частицы и приводит к следующему граничному интегральному уравнению:

$$\frac{1}{2}\phi(\mathbf{y}) = M_b[\phi](\mathbf{y}) - L_b[q](\mathbf{y}) + M_p[\phi](\mathbf{y}) - Q_p[\phi](\mathbf{y}) - H_p(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S = S_p \cup S_b, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} Q_p[\phi](\mathbf{y}) &= \int_{S_p} \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{\rho_l}{m_p} \mathbf{N}_p(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \\ H_p(\mathbf{y}) &= \mathbf{U}_p \cdot \mathbf{N}_p(\mathbf{y}), \quad \mathbf{N}_p(\mathbf{y}) = \int_{S_p} \mathbf{n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13}$$

$L[q]$  и  $M[\phi]$  – потенциалы простого и двойного слоя соответственно

$$\begin{aligned} L_i[q](\mathbf{y}) &= \int_{S_i} q(\mathbf{x}) G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \\ M_i[\phi](\mathbf{y}) &= \int_{S_i} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} dS(\mathbf{x}), \quad i = b, p, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  и  $\frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа и его нормальная производная:

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|. \quad (15)$$

Если потенциал и его нормальная производная известны в момент времени  $t$  на поверхности  $S(t) = S_b(t) \cup S_p(t)$ , то новые координаты точек и потенциал скорости на поверхности пузырька могут быть вычислены на следующем временном шаге. Неизвестные значения нормальной производной на поверхности пузырька  $q_b$  и значения потенциала на поверхности частицы  $\phi_p$  могут быть найдены из интегрального уравнения (12), если известны значения потенциала на поверхности пузырька  $\phi_b$  в соответствующих точках

$$\begin{aligned} L_b[q_b](\mathbf{y}) + (Q_p - M_p)[\phi_p](\mathbf{y}) &= \left(M_b - \frac{1}{2}I\right)[\phi_b](\mathbf{y}) - H_p(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_b, \\ L_b[q_b](\mathbf{y}) + \left(Q_p - M_p + \frac{1}{2}I\right)[\phi_p](\mathbf{y}) &= M_b[\phi_b](\mathbf{y}) - H_p(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_p. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений (СДУ) (5) и (6) для пузырька, (3) и (10) для частицы, которые на первых временных шагах решаются методом Рунге–Кутты 4-го порядка, а затем методом Адамса–Башфорта 4-го порядка. Правая часть СДУ находится из решения гранично-интегрального уравнения (16).

Рассмотренная постановка легко обобщается на случай нескольких пузырьков и частиц. Однако размер пузырькового кластера с примесями твердых частиц должен быть меньше длины волны акустического поля.

### 3. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ГРАНИЧНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Численный подход основан на дискретизации поверхности пузырька и частицы треугольной сеткой. Очевидно, что точность метода зависит от качества сетки, в связи с чем предложено использовать триангуляцию Делоне [27]. Для вычисления граничных интегралов в (16) используется метод трапеций второго порядка точности, расчетные узлы располагаются в вершинах треугольных элементов. Таким образом, используя данные методы аппроксимации, уравнение (16) можно переписать в дискретной форме:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_b} I_{ij}^{(G)} q_i + \sum_{i=N_b+1}^N \left( I_{ij}^{(Q_p)} - I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} \right) \phi_i &= \sum_{i=1}^{N_b} \left( I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} - \frac{1}{2} I_{ij}^{(I)} \right) \phi_i - \sum_{i=N_b+1}^N I_{ij}^{(H_p)}, \quad j = 1, \dots, N_b, \\ \sum_{i=1}^{N_b} I_{ij}^{(G)} q_i - \sum_{i=N_b+1}^N \left( I_{ij}^{(Q_p)} - I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} - \frac{1}{2} I_{ij}^{(I)} \right) \phi_i &= \sum_{i=1}^{N_b} I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} \phi_i - \sum_{i=N_b+1}^N I_{ij}^{(H_p)}, \quad j = N_b + 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_j$ ,  $N_b$ ,  $N_p$  – количество расчетных узлов на поверхности пузырьков и частиц соответственно,  $N = N_b + N_p$  – общее количество расчетных узлов на поверхности объектов,  $I_{ij}$  – тензор второго ранга, где верхний индекс соответствует оператору из (16),  $j = 1, \dots, N_b$  относятся к узлам на поверхности пузырьков,  $j = N_b + 1, \dots, N$  – к узлам на поверхности частиц.

Суть нового подхода заключается в представлении уравнения (16) через ядра уравнения Лапласа (14) и использовании ранее реализованных модулей для их расчета, которые показали свою эффективность для моделирования динамики структурированного пузырькового кластера [24].

Поскольку для расчета операторов  $Q_p$  и  $H_p$  в (13) используется ядро Лапласа  $G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (монополь), то представляется возможным переписать операторы в терминах оператора  $L_p$

$$\begin{aligned} Q_p[\phi](\mathbf{y}) &= \frac{\rho_l}{m_p} \int_{S_p} (L_p[\mathbf{n}](\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \phi(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \\ H_p(\mathbf{y}) &= \mathbf{U}_p \cdot L_p[\mathbf{n}](\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S = S_p \cup S_b, \end{aligned} \quad (18)$$



где

$$L_p[\mathbf{n}](\mathbf{y}) = \int_{S_p} \mathbf{n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}).$$

Тогда тензоры второго ранга в (17), соответствующие операторам  $Q_p$  и  $H_p$ , можно записать через диадик простого слоя

$$\begin{aligned} \sum_{i=N_b+1}^N I_{ij}^{(Q_p)} \phi_i &= \frac{\rho_L}{m_p} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=N_b+1}^N I_{ij}^{(G)} (n_{ik}^2 \phi_i S_i), \\ \sum_{i=N_b+1}^N I_{ij}^{(H_p)} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=N_b+1}^N I_{ij}^{(G)} (n_{ik} \tilde{U}_{ik} S_i), \end{aligned} \tag{19}$$

где  $n_{ik}$  есть  $k$ -компонента вектора нормали  $i$ -го узла,  $S_i$  – площадь, относящаяся к  $i$ -му узлу,  $\tilde{U}_{ik}$  есть  $k$ -компонента вектора, отвечающего за скорость движения  $i$ -го узла, которая определяется согласно формуле (9). Стоит отметить, что скорость движения каждого узла на поверхности частицы совпадает со скоростью движения центра масс этой частицы.

Диагональные (сингулярные) элементы, соответствующие ядрам  $G$  и  $\partial G/\partial n$ , вычисляются методом вычитания сингулярности на основе интегральных тождеств. Рассмотрим гармоническую и регулярную функцию  $\Phi$  в замкнутой области  $V$ . Для такой функции справедлива формула Грина

$$\frac{1}{2} \Phi(\mathbf{y}) = L[Q](\mathbf{y}) - M[\Phi](\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \tag{20}$$

В качестве такой функции можно взять  $\Phi(\mathbf{y}) \equiv 1$ . В этом случае  $Q = 0$  и интегральное уравнение (20) переписывается в виде

$$\frac{1}{2} = -M[1](\mathbf{y}), \quad M[1](\mathbf{y}) = \int_S \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})} dS(\mathbf{x}). \tag{21}$$

Таким образом, имеет место следующее тождество для определения сингулярных элементов ядра  $\partial G/\partial n$  методом вычитания сингулярности

$$\int_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} dS(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}. \tag{22}$$

Используя тождество (22), сингулярную и регулярную часть тензора  $I_{ij}^{(\partial G/\partial n)}$ , можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} &= S_i \frac{\partial G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\partial n(\mathbf{x}_i)}, \quad i \neq j, \\ I_{ii}^{(\partial G/\partial n)} &= -\frac{1}{2} I_{ij}^{(I)} - \sum_{i \neq j} I_{ij}^{(\partial G/\partial n)}, \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{23}$$

Для определения сингулярных элементов ядра  $G$  рассматриваются следующие тестовые функции  $\Phi_1(\mathbf{y}) \equiv x$ ,  $\Phi_2(\mathbf{y}) \equiv y$ ,  $\Phi_3(\mathbf{y}) \equiv z$ , которые также являются гармоническими и регулярными в замкнутой области  $V$ , где  $(x, y, z)$  – декартовы координаты точки  $\mathbf{y}$ . Тогда нормальная производная данных функций по поверхности  $S$  будет следующей  $Q_1(\mathbf{x}) \equiv n_x(\mathbf{x})$ ,  $Q_2(\mathbf{x}) \equiv n_y(\mathbf{x})$ ,  $Q_3(\mathbf{x}) \equiv n_z(\mathbf{x})$  (т.е. компоненты нормали  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  в точке  $\mathbf{x}$ ). Таким образом, используя формулу Грина, получаем тождества

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x &= L[n_x](\mathbf{y}) - M[x](\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} y &= L[n_y](\mathbf{y}) - M[y](\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} z &= L[n_z](\mathbf{y}) - M[z](\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{24}$$

Приведя тождества (24) к дискретному виду, получим переопределенную систему для расчета сингулярных элементов тензора  $I_{ij}^{(G)}$ :

$$F_j I_{ij}^{(G)} = C_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (25)$$

где  $F_j$  и  $C_j$  определяются в виде

$$F_j = -\left(n_x^j; n_y^j; n_z^j\right),$$

$$C_j = \begin{pmatrix} \tilde{I}_{ij}^{(G)} n_x^i - \left(I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} + \frac{1}{2} I_{ij}^{(I)}\right) x_i \\ \tilde{I}_{ij}^{(G)} n_y^i - \left(I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} + \frac{1}{2} I_{ij}^{(I)}\right) y_i \\ \tilde{I}_{ij}^{(G)} n_z^i - \left(I_{ij}^{(\partial G/\partial n)} + \frac{1}{2} I_{ij}^{(I)}\right) z_i \end{pmatrix}, \quad (26)$$

в (26)  $\tilde{I}_{ij}^{(G)}$  – элементы тензора  $I_{ij}^{(G)}$  с нулевыми диагональными элементами. Несингулярные элементы тензора  $I_{ij}^{(G)}$  вычисляются как

$$I_{ij}^{(G)} = S_i G(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (27)$$

Для расчета геометрических характеристик поверхности (нормали, площади, кривизна) используются алгоритмы и модули, описанные в [24]–[26].

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ

Тензорная формулировка (17) и (19) сводится к СЛАУ относительно неизвестных значений потенциала скорости  $\phi_p$  на поверхности частиц и нормальной производной потенциала скорости  $q_b$  на поверхности пузырьков:

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (28)$$

где  $A$  – расчетная матрица системы,  $\mathbf{X}$  – вектор неизвестных и  $\mathbf{b}$  – правая часть системы. Таким образом, при моделировании динамики  $K_b$  пузырьков и  $K_p$  частиц с общим числом узлов сетки  $N = (K_b + K_p) \cdot \Delta N$  требуется решать СЛАУ размером  $N \times N$ , где  $\Delta N$  – количество узлов дискретизации одного дисперсного включения.

Очевидно, что с увеличением количества объектов в кластере прямые методы решения СЛАУ с кубической сложностью алгоритма не справляются. В работе [25] было предложено не хранить расчетные матрицы, а решать полученную СЛАУ с помощью итерационного метода минимальных невязок (GMRES) с расчетом МВП на графических процессорах с использованием технологии CUDA. Однако в данной реализации не использовалась декомпозиция всех МВП через ядра Лапласа, а отдельно рассчитывались левая и правая части (28). Более того, реализованный алгоритм расчета МВП имел квадратичную сложность, что делало его неэффективным для моделирования систем с количеством расчетных узлов более 38000 [23]. В настоящей работе предложенная декомпозиция (17) и (19) позволяет ускорить расчеты и увеличить масштаб задачи за счет применения многоуровневого БММ, реализованного на гетерогенных вычислительных системах [21].

С учетом представления (17) и (19) для формирования левой части СЛАУ (28) необходимо четыре раза вызвать ядро Лапласа для потенциала простого слоя и один раз – для потенциала двойного слоя. Для расчета правой части СЛАУ (28) требуется три вызова ядра Лапласа для потенциала простого слоя и один вызов – для потенциала двойного слоя.

Особенность БММ состоит в декомпозиции всех матриц, формирующих СЛАУ (28) на разреженную и плотные матрицы:

$$A = A^{\text{sparse}} + A^{\text{dense}}. \quad (29)$$

В (29) разреженная матрица  $A^{\text{sparse}}$  учитывает ближнее взаимодействие источников  $\mathbf{x}_i$  и приемников  $\mathbf{y}_j$ , удовлетворяющих условию  $|\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_i| < r_c$ , где  $r_c$  соответствует радиусу, в котором оценивается ближнее взаимодействие. Значение  $r_c$  выбирается из необходимой точности и скорости

расчета, порядок  $r_c$  определяется расстоянием между расчетными узлами. Плотная матрица  $A^{\text{dense}}$  учитывает дальнейшее взаимодействие  $|y_j - x_i| \geq r_c$ . Отметим, что в МГЭ источники  $x_i$  и приемники  $y_j$  совпадают и являются узлами дискретизации. МВП  $A^{\text{sparse}} \mathbf{X}$  вычисляется напрямую по формулам, представленным выше, в то время как МВП  $A^{\text{dense}} \mathbf{X}$  вычисляется приближенно согласно мультипольному разложению в области с центром в точке  $\mathbf{x}_*$  [28]

$$A_{ij}^{\text{dense}} = \sum_{l=0}^{P_{\text{БММ}}^2 - 1} S_l(\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_*) R_l(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*) + O(\epsilon), \quad (30)$$

где  $S_l$  – сингулярные базисные функции,  $R_l$  – регулярные базисные функции, которые выбираются из соображений удобства и скорости сходимости рядов [28]. В (30) рассматриваются только первые  $P_{\text{БММ}}^2$  членов разложения, где  $P_{\text{БММ}}$  – параметр усечения, который определяет точность разложения  $\epsilon = \epsilon(P_{\text{БММ}}^2)$  и самого БММ.

При реализации многоуровневого БММ, кроме построения  $S$  и  $R$  разложений, используются также операторы трансляций. Трансляция разложений применяется для перехода от представления функции в одной области  $\Omega$  с центром  $\mathbf{x}^*$  к представлению функции в другой области  $\Omega'$  с центром  $\mathbf{x}^{*'} = \mathbf{x}^* + \mathbf{t}$ , где  $\mathbf{t}$  – вектор трансляции. Применяя оператор трансляции  $T(\mathbf{t})$  к коэффициентам известного разложения в области  $\Omega$  можно получить коэффициенты искомого разложения в области  $\Omega'$ . В БММ различают три типа операторов трансляции  $R|R$ ,  $S|S$  и  $S|R$ , где первая буква означает тип начального разложения, а вторая – тип конечного разложения.

Для применения многоуровневого БММ необходимо сформировать структуру данных на основе иерархического алгоритма разбиения трехмерного пространства с помощью восьмеричного дерева. Начальный куб уровня 0 разбивается на 8 дочерних кубов, которым присваивается уровень 1. Процесс восьмеричного деления продолжается до некоторого максимального уровня, определяемого из соображений оптимизации. Детальное описание БММ можно найти в публикации [28].

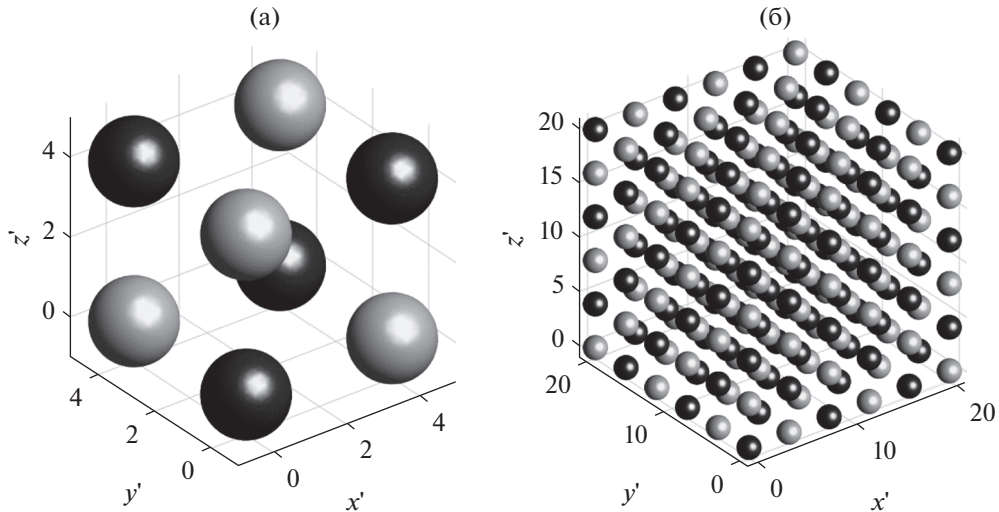
МВП для ближнего взаимодействия вычисляется напрямую на GPU с использованием технологии CUDA, а МВП для дальнего взаимодействия вычисляется через оценку разложений и операторов трансляций на CPU с использованием технологии OpenMP. Точность и время расчета плотной матрицы зависят от количества элементов в разложении  $P_{\text{БММ}}$ , чем больше значение этого параметра, тем больше времени требуется на вычисление этой части, но выше точность расчета дальнего взаимодействия [24], [26]. Реализация МВП на GPU позволяет снижать глубину иерархического дерева структуры данных, что обеспечивает дополнительное ускорение алгоритма [21].

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Все программные модули, кроме БММ, разработаны в среде Matlab. Расчеты проводились на персональном компьютере, оснащенный CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, 12 GB RAM с 12 физическими и 12 виртуальными ядрами и GPU NVIDIA Tesla K20 (Kepler), 5GB глобальной памяти.

Расчеты выполнены для безразмерных параметров с характерными величинами:  $L^* = r_{b0}$ ,  $P^* = p_0$ ,  $\rho^* = \rho_l$ ,  $U^* = \sqrt{p_0/\rho_l}$ ,  $T^* = L^*/U^* = r_{b0}/\sqrt{p_0/\rho_l}$ . Согласно ограничениям математической модели, описывающей физические процессы для больших чисел Рейнольдса и малых капиллярных чисел, были выбраны следующие безразмерные параметры:  $r'_{b0} = 1$ ,  $r'_p = 1$ ,  $\rho'_l = 1$ ,  $\rho'_p = 2$ ,  $p'_0 = 1$ ,  $P'_a = 1$ ,  $\omega'/(2\pi) = 0.2$ ,  $\gamma' = 0.073$ ,  $\kappa' = 1.4$ ,  $g' = 0$ , обозначения которых соответствуют размерным параметрам, описанным выше.

Для тестирования производительности реализованного подхода рассматривался структурированный кластер пузырьков и частиц, сформированный из  $n \times n \times n$  кубов, каждый из которых содержит четыре пузырька и четыре частицы. Центры дисперсных включений расположены на расстоянии четырех радиусов. Пример такого куба, который соответствует кубическому кластеру с параметром  $n = 1$ , представлен на фиг. 1а, где серым цветом раскрашены пузырьки, а черным – частицы. На фиг. 1б представлена форма кластера, состоящая из 27 кубов ( $n = 3$ ). Количество пузырьков и частиц в кластере размера  $n$  можно рассчитать по формуле  $K_b = K_p = 4n^3$ .



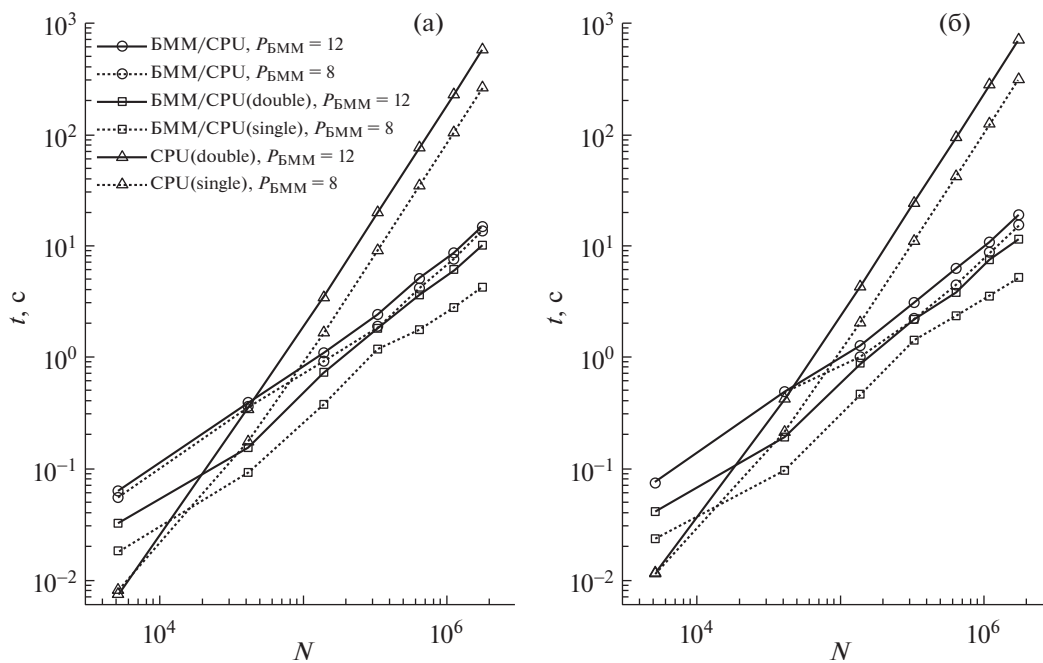
**Фиг. 1.** Структура кубического кластера, состоящего из пузырьков (серый цвет) и твердых частиц (черный цвет) для  $n = 1$  (а) и  $n = 3$  (б).

Для оценки производительности кода в зависимости от точности расчетов рассматривалось 6 случаев.

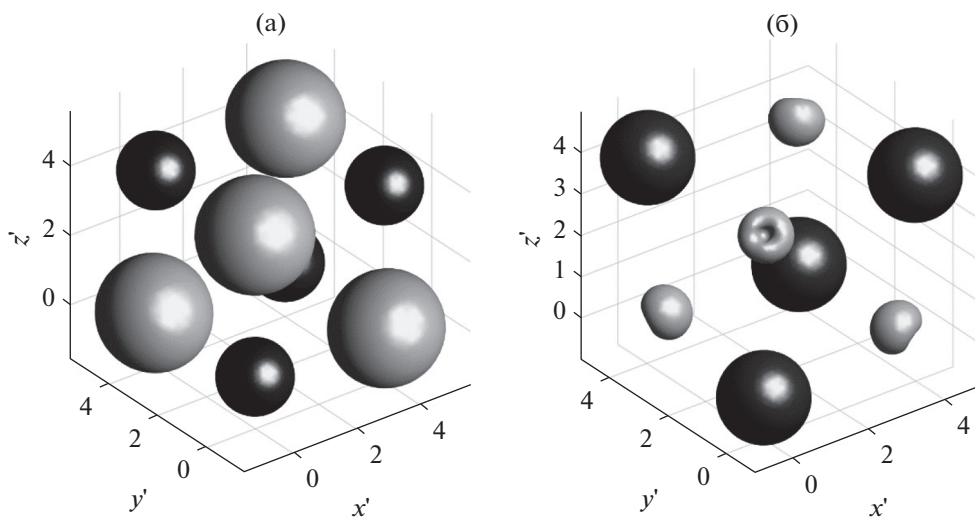
1. БММ/CPU: расчет всех MVP БММ с вычислением ближнего взаимодействия на CPU, дальнего взаимодействия с точностью  $P_{\text{БММ}} = 12$ , решение СЛАУ с точностью  $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-5}$ .

**Таблица 1.** Время выполнения расчетов (секунды) в зависимости от количества узлов дискретизации пузырькового кластера с примесями

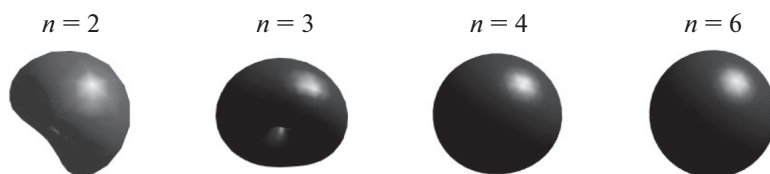
$K_b/K_p$		512/512	500/500	854/864	1372/1372
$n/N$		4/328704	5/642000	6/1109376	7/1761648
1. БММ/CPU $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-5}$ $P_{\text{БММ}} = 12$	Правая часть	2.4	5.1	8.6	14.9
	Левая часть	3.1	6.3	10.8	19.0
	СЛАУ	36.7	74.3	127.5	261.8
2. БММ/CPU $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-4}$ $P_{\text{БММ}} = 8$	Правая часть	1.9	4.2	7.5	13.4
	Левая часть	2.2	4.5	8.7	15.2
	СЛАУ	17.6	44.3	85.4	150.1
3. БММ/GPU (double) $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-5}$ $P_{\text{БММ}} = 12$	Правая часть	1.8	3.6	6.0	10.1
	Левая часть	2.2	3.8	7.4	11.3
	СЛАУ	25.8	45.6	87.8	157.3
4. БММ/GPU (single) $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-4}$ $P_{\text{БММ}} = 8$	Правая часть	1.4	1.8	2.8	4.2
	Левая часть	1.4	2.3	3.5	5.3
	СЛАУ	11.3	22.8	34.7	51.5
5. GPU (double) $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-5}$	Правая часть	19.6	75.1	224.7	566.0
	Левая часть	24.3	93.1	278.3	700.4
	СЛАУ	286.6	1099.3	3286.5	9671.3
6. GPU(single) $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-4}$	Правая часть	9.1	34.3	102.7	260.2
	Левая часть	11.1	41.7	124.2	312.3
	СЛАУ	86.9	409.5	1220.5	3070.5



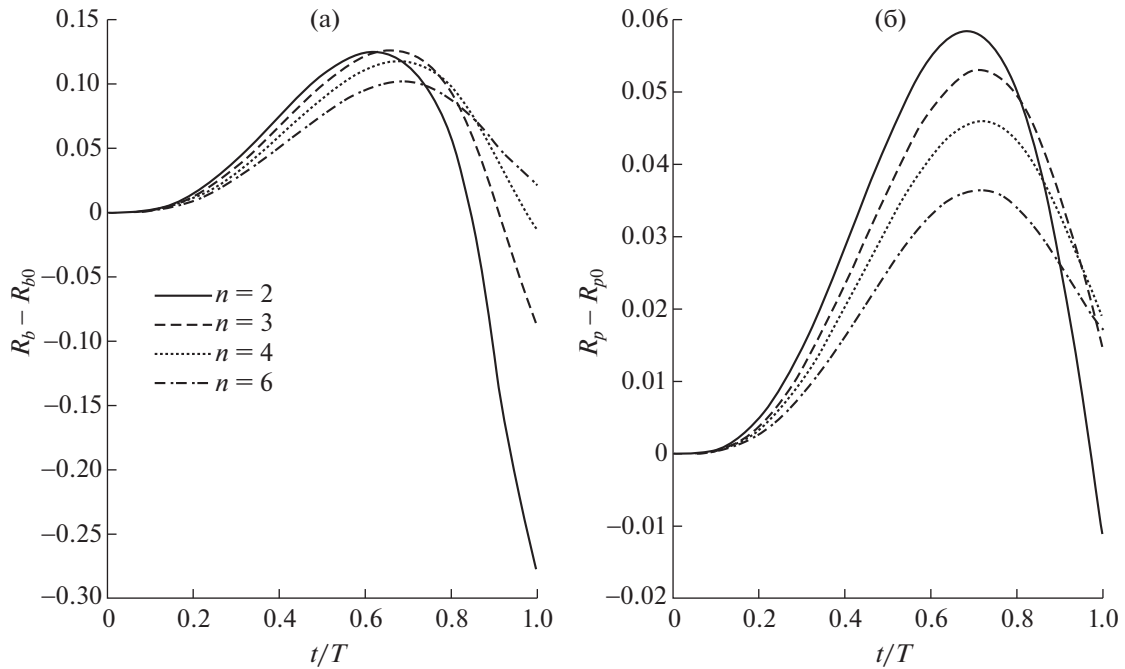
**Фиг. 2.** Время выполнения расчета правой части (а) и левой части (б) СЛАУ в зависимости от количества узлов дискретизации пузырькового кластера с примесями.



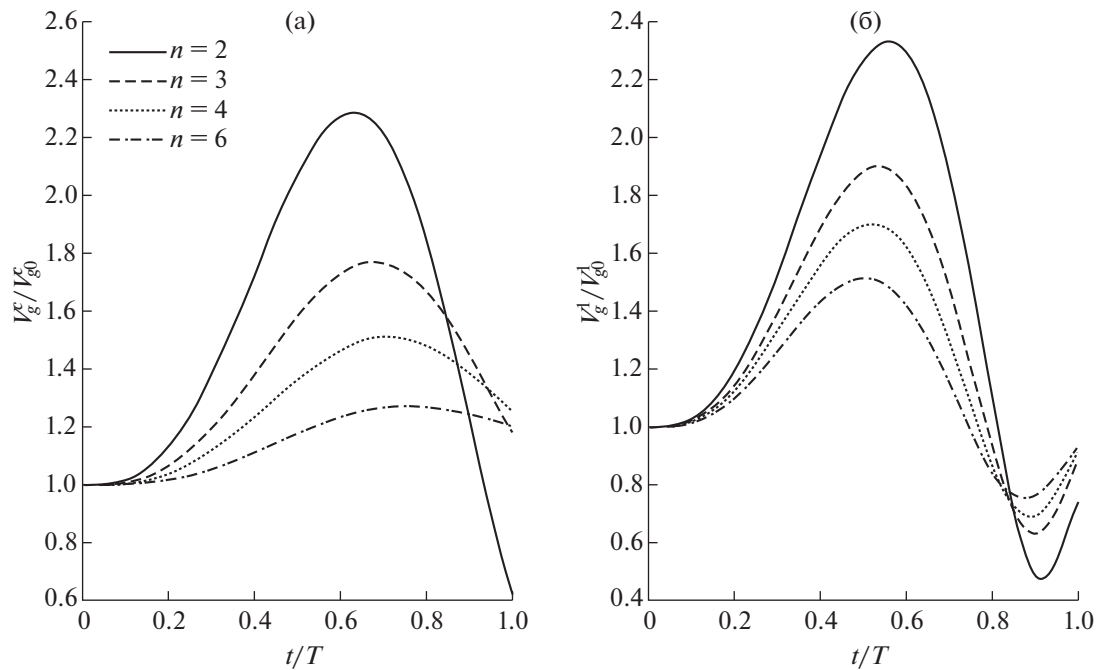
**Фиг. 3.** Динамика кубического кластера, содержащего четыре пузырька (серый цвет) и четыре частицы (черный цвет) в момент времени  $t = 0.6T$  (а) и  $t = 0.85T$  (б).



**Фиг. 4.** Форма углового пузырька в кластере в момент времени  $t = T$  в зависимости от размера пузырькового кластера с примесями.



Фиг. 5. Динамика центра масс углового пузырька (а) и угловой частицы (б) в зависимости от размера пузырькового кластера с примесями.



Фиг. 6. Динамика объема пузырькового кластера с примесями (а) и углового пузырька (б) в зависимости от размера пузырькового кластера с примесями.

2. БММ/CPU: расчет всех МВП БММ с вычислением ближнего взаимодействия на CPU, дальнего взаимодействия с точностью  $P_{\text{БММ}} = 8$ , решение СЛАУ с точностью  $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-4}$ .

3. БММ/GPU(double precision): расчет всех МВП БММ с вычислением ближнего взаимодействия на GPU с двойной точностью, дальнего взаимодействия с точностью  $P_{\text{БММ}} = 12$ , решение СЛАУ с точностью  $\epsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-5}$ .

4. БММ/GPU(single precision): расчет всех МВП БММ с вычислением ближнего взаимодействия на GPU с одинарной точностью, дальнего взаимодействия с точностью  $P_{\text{БММ}} = 8$ , решение СЛАУ с точностью  $\varepsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-4}$ .

5. GPU(double): расчет всех МВП на GPU с двойной точностью, решение СЛАУ с точностью  $\varepsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-5}$ .

6. GPU(single): расчет всех МВП на GPU с одинарной точностью, решение СЛАУ с точностью  $\varepsilon_{\text{GMRES}} = 10^{-4}$ .

В табл. 1 представлено среднее время расчета левой части, правой части и решения СЛАУ для пузырькового кластера с примесями для структур  $n = 4, 5, 6, 7$ . Из таблицы видно, что наибольшее ускорение получено в четвертом случае для БММ с расчетом ближнего взаимодействия на GPU с одинарной точностью. Однако стоит отметить, что ускорение в этом случае по сравнению с третьим достигается за счет потери точности вычислений из-за операций на GPU с одинарной точностью, меньшего количества элементов в разложении по сингулярному базису и точности GMRES. Так, например, для структуры из 1372 пузырьков и 1372 частиц, что соответствует  $N = 1761648$  расчетным узлам, расчет правой части занимает 4 с, расчет левой части – 5 с, GMRES сходится за 9 итераций, на решение СЛАУ требуется 51 с, что в 60 раз быстрее, чем требуется на аналогичный расчет на GPU с одинарной точностью. На фиг. 2 представлено время вычисления левой и правой части СЛАУ в логарифмической системе координат, откуда видно, что сложность модулей, реализованных с использованием БММ, (случай 1–4) линейная, а прямой расчет на GPU (случай 5, 6) имеет квадратичную сложность. Заметим, что для  $N \leq 40\,000$  эффективнее использовать модули 5 и 6.

На фиг. 3 представлены формы пузырькового кластера с примесями твердых сферических частиц, состоящего из четырех пузырьков и четырех частиц (фиг. 1а) в фазе расширения ( $t = 0.6T$ , фиг. 3а) и сжатия ( $t = 0.85T$ , фиг. 3б). Из фигуры видно, что при сжатии в пузырьках образуются струи, направленные в центр кластера. Проведен анализ деформации углового пузырька для различных размеров кластера (фиг. 4). Анализ показал, что в случаях  $n = 1, 2$  и 3 в крайних пузырьках формируются струи, направленные в центр кластера. Однако с увеличением размера кластера деформация крайних пузырьков уменьшается. Так, например, в случае структуры кластера, содержащего 854 пузырька и 854 частицы, что соответствует  $n = 6$ , форма углового пузырька остается сферической. С увеличением размера кластера также уменьшается мобильность пузырьков (фиг. 5а) и частиц (фиг. 5б), что обусловлено незначительными изменениями объема отдельных пузырьков (фиг. 6а) и кластера в целом (фиг. 6б), следовательно, и слабыми гидродинамическими потоками, создаваемыми осциллирующими пузырьками.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для проведения расчетов высокой вычислительной сложности требуются высокопроизводительные вычисления, которые включают в себя две составляющие: усовершенствованные масштабируемые алгоритмы и вычислительные системы с большим количеством ядер. В данной работе основу таких алгоритмов составил быстрый метод мультиполей (БММ), который позволяет решать СЛАУ с миллионами неизвестных на относительно недорогих персональных суперкомпьютерах, оборудованных графическими процессорами (GPU) и уже показал свою эффективность для прямого моделирования динамики пузырькового кластера [24]. Указанный подход был использован для ускорения метода граничных элементов, позволяющего эффективно рассчитывать динамику больших пузырьковых кластеров с примесями твердых сферических частиц.

На примере кубического структурированного кластера различных размеров продемонстрирована производительность разработанного подхода, основанного на представлении гранично-интегральной формулировки через ядра Лапласа и применении БММ. Достигнуто ускорение в 60 раз по сравнению с эффективной реализацией кода на GPU.

Численное моделирование показало, что деформация пузырьков сильно зависит от размеров кластера. В маленьких кластерах пузырек может испытывать сильные деформации с возмущением поверхностных мод высокого порядка, включая образование струи. Разработанный код можно использовать для изучения подобных эффектов с высокой дискретизацией поверхности. Таким образом, детальный анализ деформации пузырьков, влияния примесей на динамику пузырькового кластера, возникающих гидродинамических потоков имеет большое значение для

понимания физики процесса. Разработанный инструмент и результаты, полученные в настоящей работе, позволяют перейти к изучению более сложных эффектов в трехмерном случае, связанных с совместной динамикой пузырьков и твердых частиц.

Авторы выражают благодарность Н.А. Гумерову (Институт компьютерных исследований штата Мэриленд, США) за постановку задачи, компании Fantalgo, LLC (Мэриленд, США) за предоставление библиотеки БММ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ralston J., Dukhin S.S.* The interaction between particles and bubbles // *Colloids and Surfaces A*. 1999. V. 151. P. 3–14.
2. *Phan C.M., Nguyen A.V., Miller J.D., Evans G.M., Jameson G.J.* Investigations of bubble-particle interactions // *Int. J. Miner. Process.* 2003. V. 72. P. 239–254.
3. *Nguyen A.V., Ralston J., Schulze H.J.* On modelling of bubble-particle attachment probability in flotation // *Int. J. Miner. Process.* 1998. V. 53. P. 225–249.
4. *Sarrot V., Huang Z., Legendre D., Guiraud P.* Experimental determination of particles capture efficiency in flotation // *Chem. Engng. Sci.* 2007. V. 62. P. 7359–7369.
5. *Dai Z., Fornasiero D., Ralston J.* Particle-bubble collision models – a review // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2000. V. 96. P. 254.
6. *Koh P.T.L., Manickam M., Schwarz M.P.* Cfd simulation of bubble-particle collisions in mineral flotation cells // *Minerals Engng.* 2000. V. 13. P. 1455–1463.
7. *Koh P.T.L., Schwarz M.P.* Cfd modelling of bubble-particle collision rates and efficiencies in a flotation cell // *Minerals Engng.* 2003. V. 16. P. 1055–1059.
8. *Yoon R.H.* The role of hydrodynamic and surface forces in bubble-particle interaction // *Int. J. Miner. Process.* 2000. V. 58. P. 129–143.
9. *Nguyen A., Evans G.M.* The liquid flow force on a particle in the bubble-particle interaction in flotation // *J. Colloid Interface Sci.* 2002. V. 246. P. 100–104.
10. *Nguyen A., Nalaskowski J., Miller J.D.* A study of bubble-particle interaction using atomic force microscopy // *Minerals Engng.* 2003. V. 16. P. 1173–1181.
11. *Johnson D.J., Miles N.J., Hilal N.* Quantification of particle-bubble interactions using atomic force microscopy: a review // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2006. V. 127. P. 67–81.
12. *Hong T., Fan L.S., Lee D.J.* Force variations on particle induced by bubble-particle collision // *Int. J. Multiphase Flow.* 1999. V. 20. P. 117–129.
13. *Nguyen A.V., Evans G.M.* Attachment interaction between air bubbles and particles in froth flotation // *Exp. Therm. Fluid. Sci.* 2004. V. 28. P. 381–385.
14. *Verrelli D.I., Koh P.T.L., Nguyen A.V.* Particle-bubble interaction and attachment in flotation // *Chem. Engng. Sci.* 2011. V. 66. P. 5910–5921.
15. *Basarova P., Machon V., Hubicka M., Horn D.* Collision processes involving a single rising bubble and a larger stationary spherical particle // *Int. J. Miner. Process.* 2010. V. 94. P. 58–66.
16. *Hay T.A.* A Model of the Interaction of Bubbles and Solid Particles under Acoustic Excitation // Ph.D. Dissertation. 2008. 217 p.
17. *Dongarra J.J., Sullivan F.* The top 10 algorithms // *Comput. Sci. & Engng.* 2000. V. 2. P. 22–23.
18. *Greengard L., Rokhlin V.* A fast algorithm for particle simulations // *J. Comput. Phys.* 1987. V. 73. P. 325–348.
19. *Gumerov N.A., Duraiswami R.* A broadband fast multipole accelerated boundary element method for the three dimensional Helmholtz equation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. V. 125. P. 191–205.
20. *Nishimura N.* Fast multipole accelerated boundary integral equation methods // *Appl. Mech. Rev.* 2002. V. 55 (4). P. 299–324.
21. *Gumerov N.A., Duraiswami R.* Fast multipole methods on graphics processors // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. P. 8290–8313.
22. *Li S.C., Khoob B.C., Zhang A.M., Wang S.* Bubble-sphere interaction beneath a free surface // *Ocean Engng.* 2018. V. 169. P. 469–483.
23. *Li S.C., Khoob B.C., Zhang A.M., Wang S., Han R.* Transient interaction between a particle and an attached bubble with an application to cavitation in silt-laden flow // *Physics of Fluids.* 2018. V. 30 (8). 082111.



24. *Pityuk Yu.A., Gumerov N.A., Abramova O.A., Zarafutdinov I.A., Akhatov I.Sh.* Accelerated boundary element method for 3D simulations of bubble cluster dynamics in an acoustic field // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2019. V. 1063. P. 335–349.
25. *Zarafutdinov I.A., Gainetdinov A.R., Pityuk Yu.A., Abramova O.A., Gumerov N.A., Akhatov I.Sh.* GPU acceleration of bubble-particle dynamics simulation // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2018. V. 910. P. 235–250.
26. *Питюк Ю.А. (Иткулова Ю.А.), Абрамова О.А., Гумеров Н.А., Ахатов И.Ш.* Моделирование динамики пузырьков в трехмерных потенциальных течениях на гетерогенных вычислительных системах быстрым методом мультиполей и методом граничных элементов // Вычисл. методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 239–257.
27. *Скворцов А.В.* Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томского университета, 2002. 128 с.
28. *Gumerov N.A., Duraiswami R., Borovikov E.A.* Data structures, optimal choice of parameters, and complexity results for generalized multilevel fast multipole method in d dimensions. Technical Report CS-TR-4458. College Park: Univ. of Maryland, 2003.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ  
ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ УПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

© 2021 г. А. Ю. Круковский<sup>1</sup>, Ю. А. Повещенко<sup>1</sup>, В. О. Подрыга<sup>1,\*</sup>, П. И. Рагимли<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

\*e-mail: PVictoria@list.ru

Поступила в редакцию 21.03.2020 г.  
Переработанный вариант 08.06.2020 г.  
Принята к публикации 18.10.2020 г.

Построена конечно-разностная аппроксимация упругих сил на разнесенных лагранжевых сетках, основанная на методе опорных операторов. Для векторов смещений на нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные разумные ограничения, применительно к разностным схемам для задач теории упругости построены аппроксимации операций векторного анализа. С учетом энергетического баланса среды построенные семейства интегрально-согласованных аппроксимаций операций векторного анализа достаточны для дискретного моделирования этих процессов. Рассматриваются схемы, как использующие тензор напряжений в явном виде, так и разделяющие его на шаровую и сдвиговую компоненты (давление и девиатор). Последнее используется для построения однородных алгоритмов, применимых как для твердого тела, так и для испаренной фазы. При построении аппроксимаций используется линейная теория упругости. В явном виде получены результирующие силы в пространственной геометрии. Приведены расчеты распространения звуковых волн в алюминиевой пространственно-трехмерной ортогональной пластине вследствие торцевого удара. Библ. 13. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** метод опорных операторов, трехмерные конечно-разностные схемы, свойство консервативности, лагранжева сетка разнесенного типа.

DOI: 10.31857/S0044466921040062

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе использована идея построения численной методики для сквозного расчета совокупности процессов, возникающих при воздействии на вещество, находящееся первоначально в конденсированном состоянии, с высокоинтенсивным потоком энергии, переносимой излучением (см. [1]). Такого рода методики широко применяются в области физики высоких плотностей энергий. Например, взаимодействие лазерного излучения с материалом твердой мишени может протекать в различных режимах в зависимости от интенсивности воздействия и общей поглощенной энергии. Если интенсивность лазерного импульса достаточно велика, чтобы ионизировать испаренное вещество, то над поверхностью мишени возникает слой плазмы — “корона” или “подушка”, в которой поглощается основная доля лазерной мощности. Перенос энергии в плотное вещество мишени происходит за счет процессов электронной и лучистой теплопроводностей, а также из-за импульса отдачи аблированной плазмы. По веществу распространяется ударная волна, амплитуда которой уменьшается по мере продвижения в глубь мишени. На некотором расстоянии от поверхности вещества температура и давление за фронтом оказываются недостаточными, чтобы осуществить фазовый переход, и вещество остается в твердом состоянии. В этом случае для корректного описания динамики мишени необходим учет упругих сил и сдвиговых напряжений.

В настоящей работе мы рассматриваем реализации дискретной модели упругих сил, основанной на методе опорных операторов (см. [2]–[9]). Тестовые расчеты проведены на трехмерных разностных сетках, состоящих из шестигранников.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Движение вещества с учетом упругих сил и сдвиговых напряжений определяется уравнением неразрывности, балансами импульса и энергии, имеющими в лагранжевых переменных следующий вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{2.1}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\nabla P + \operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}, \tag{2.2}$$

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} t_v) = -P \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta} t_v) - \operatorname{div} \mathbf{W} + q, \tag{2.3}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\operatorname{div}(P\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{W} + q. \tag{2.4}$$

Здесь  $t$  – время,  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$  – субстанциональная производная,  $\operatorname{tr}()$  – след тензора,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $t_v = \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla\mathbf{v} \right)$  – симметризованный тензор скоростей деформаций,  $\rho$  – плотность,  $\eta = 1/\rho$  – удельный объем,  $P$  – давление,  $\xi$  – удельная внутренняя энергия, учитывающая деформационные процессы,  $\mathbf{W}$  – поток тепла,  $q$  – объемная плотность мощности сторонних источников.

Приведение тензора напряжений к виду с разделенными шаровой ( $P$ ) и сдвиговой (девиатор –  $\boldsymbol{\zeta}$ ) компонентами:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\zeta}, \quad P = -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})$$

( $\boldsymbol{\delta}$  – метрический тензор), является необходимым шагом для построения однородной разностной схемы, применимой как для твердого вещества, где вклады от диагонального ( $-P\boldsymbol{\delta}$ ) и недиагонального ( $\boldsymbol{\zeta}$ ) членов (отвечающих за объемные и сдвиговые деформации соответственно) сравнимы, так и для плазмы, где сдвиговые напряжения отсутствуют, но для корректного описания зависимости давления от плотности необходимо использование сложных моделей (см. [10]). Таким образом, вклады сдвиговых деформаций ( $\operatorname{div} \boldsymbol{\zeta}$ ) аппроксимируются либо на недеформированной сетке (см. [11]), либо в условиях отсутствия сдвиговой компоненты (модуль сдвига  $\mu = 0$ ), что покрывает всю область параметров для вещества.

Тензор напряжений при твердотельных деформациях имеет вид (см. [11])

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu t_U + \nu \operatorname{tr}(t_U)\boldsymbol{\delta}, \quad t_U = \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{U}}{dr} + \nabla\mathbf{U} \right).$$

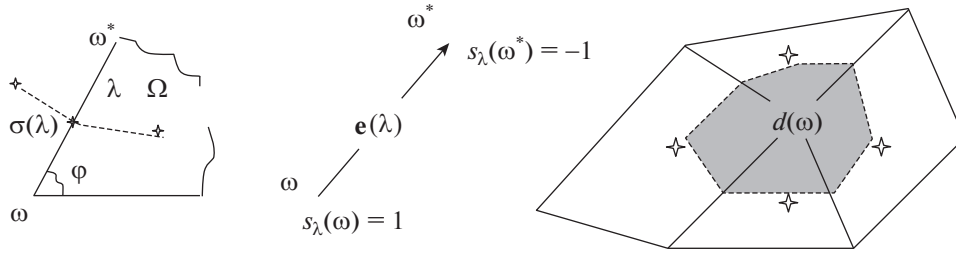
Здесь  $\mu$  (модуль сдвига) и  $\nu$  – неотрицательные коэффициенты Ламе,  $\mathbf{U}$  – вектор смещений относительно недеформированной сетки,  $t_U$  – симметризованный тензор смещений. В то же время в твердом теле, а также жидкости или плазме (в которых  $\mu = 0$ ) всегда справедливо

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\zeta} = 2\mu \left( t_U - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(t_U)\boldsymbol{\delta} \right).$$

При адиабатических деформациях внутренняя энергия единицы массы тела представима в виде (см. [11])

$$\xi = \frac{k_{ad}}{2\rho} (\operatorname{tr}(t_U))^2 + \frac{1}{4\mu\rho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta})^2 = \varepsilon(\rho, T) + \frac{1}{4\mu\rho} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\zeta})^2,$$

где  $k_{ad}$  – адиабатический модуль сжатия. Зависимость внутренней энергии от плотности и температуры  $\varepsilon(\rho, T)$  считается заданной.



Фиг. 1. Построение базисов.

### 3. МЕТОД ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ УПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

#### 3.1. Метрические сетки метода опорных операторов

Для типов сеток, состоящих из ячеек ( $\Omega$ ), образованных узлами ( $\omega$ ), гранями ( $\sigma$ ) и ребрами ( $\lambda$ ), характерно наличие замкнутой сопряженной (“сдвинутой”) сетки, состоящей, например, из доменов  $d(\omega)$  вокруг узлов  $\omega$  (фиг. 1).

Грани узлового домена определяются метрическим оператором сетки  $\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$  (см. также ниже). Базисы  $\varphi(\lambda)$  здесь попарно входят в ячейки  $\Omega(\lambda)$ , примыкающие к ребру  $\lambda$ . Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов с естественным условием нормировки  $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$ . Она определяет конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четырёхугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические (и т.д.), 3D сетки, а также их мортарные шшивки, адаптация (с введением новых узлов в ячейках  $\Omega$ , называемых дуальными) с сохранением самосопряженности и знакоопределенности соответствующих “дивергентно-градиентных” операций векторного анализа континуальных краевых задач. Дальнейшее изложение носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов  $V_{\varphi}$  иллюстрируется на примере треугольно-четырёхугольной 2D сетки.

В области  $O$  введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек ( $\Omega$ ), базисов ( $\varphi$ ), узлов ( $\omega$ ), ребер ( $\lambda$ ) и связанных с ними ( $\sigma(\lambda)$ ) границами балансовых узловых доменов  $d(\omega)$  (фиг. 1).

Базисы  $\varphi$  создаются системой исходных (ковариантных) ортов  $\mathbf{e}(\lambda)$ , образованных ребрами. Под центрами ячеек  $\Omega$  и ребер  $\lambda$  будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов  $\omega$ , их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром  $d\lambda$ ), представляет собой поверхность

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),$$

ориентированную так же, как и орт  $\mathbf{e}(\lambda)$ . Здесь  $\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$  – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами  $\mathbf{e}(\lambda)$ . Базисный объем дается формулой  $v_{\varphi} = \frac{1}{6} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$  для треугольной ячейки  $\Omega$ , содержащей базис  $\varphi$ , и  $v_{\varphi} = \frac{1}{4} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$  для четырехугольной ячейки, если  $\lambda_1(\varphi)$  и  $\lambda_2(\varphi)$  – ребра, образующие базис  $\varphi$ . Наконец,  $\sum_{\varphi(\lambda)}$  – суммирование по всем базисам  $\varphi$ , в образовании которых приняло участие ребро  $\lambda$ . Замкнутые вокруг узла  $\omega$  поверхности  $\sigma(\lambda(\omega))$  образуют узловые домены  $d(\omega)$ .

К узлам отнесем искомую сеточную функцию  $\mathbf{u}$ . На ребрах выделим положительное направление (фиг. 1) и отнесем к ним сеточную функцию

$$\Delta_{\lambda} \mathbf{u} = - \sum_{\omega(\lambda)} s_{\lambda}(\omega) \mathbf{u}_{\omega} = \mathbf{u}_{\omega'} - \mathbf{u}_{\omega}.$$

Сеточные тензорные поля  $X$  задаются своими представлениями в базисах  $X_{\varphi}$ .

Внутреннюю дивергенцию тензорного поля  $DIN: (\varphi) \rightarrow (\omega)$  определим, аппроксимируя теорему Гаусса на  $d(\omega)$ :

$$DIN X = \sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega) \tau_X(\lambda), \quad \tau_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\varphi}),$$

где  $\sum_{\lambda(\omega)}$  – суммирование по всем ребрам  $\lambda$ , имеющим общий узел  $\omega$ . Обозначая через  $(\ )_{\Delta}$  аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем

$$\begin{aligned} & \left( \int_O \text{tr}(\nabla \mathbf{U} X^T) dv \right)_{\Delta} = - \left( \int_O \mathbf{U} \text{div} X dv - \int_{\partial O} (X \mathbf{U}, \mathbf{ds}) \right)_{\Delta} = - \sum_{\omega} (\mathbf{u}_{\omega}, DIN X) = \\ & = \sum_{\varphi} v_{\varphi} \text{tr} \left( \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} X_{\varphi} \right) = \sum_{\varphi} v_{\varphi} \text{tr}(\nabla \mathbf{u}_{\varphi} X_{\varphi}^T) \equiv \langle \nabla \mathbf{u}, X \rangle = \langle X, \nabla \mathbf{u} \rangle = \sum_{\varphi} v_{\varphi} \text{tr}(t_{\Delta u \varphi} X_{\varphi}) \Big|_{X_{\varphi} = X_{\varphi}^T} = \langle t_{\Delta u}, X \rangle. \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \nabla \mathbf{u}, X \rangle$  определяется как скалярное произведение сеточных тензорных полей, аппроксимирующее  $\left( \int_O \text{tr}(\nabla \mathbf{U} X^T) dv \right)_{\Delta}$ .

Тензорные поля  $\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}$ ,  $\nabla \mathbf{u}$  и  $t_{\Delta u}$ , а также тензорное поле напряжений  $X_{\Delta u}$  даются своими представлениями в базисах

$$\begin{aligned} \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} &= \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_{\lambda} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \quad \nabla \mathbf{u}_{\varphi} = \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot \Delta_{\lambda} \mathbf{u}, \\ t_{\Delta u \varphi} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} + \nabla \mathbf{u}_{\varphi} \right), \quad X_{\Delta u \varphi} = 2\mu t_{\Delta u \varphi} + \nu \text{tr}(t_{\Delta u \varphi}) \delta. \end{aligned}$$

Под  $\sum_{\lambda(\varphi)}$  понимается суммирование по ребрам  $\lambda$ , образующим базис  $\varphi$ .

Произвольному сеточному векторному полю инкрементов  $\bar{\delta}_{\lambda} \in H_{\lambda}$  на ребрах  $\lambda$  (определяющему поле смещений  $\bar{\delta}^{\&}$ ) сопоставим поле симметризованного тензора смещений  $t_{\delta}$  и поле тензора напряжений  $X_{\delta}$  по формулам

$$\begin{aligned} t_{\delta \varphi} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda(\varphi)} \left( \bar{\delta}_{\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\varphi}(\lambda) + \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \cdot \bar{\delta}_{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{D\bar{\delta}^{\&}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi} + \nabla \bar{\delta}_{\varphi}^{\&} \right), \\ X_{\delta \varphi} &= 2\mu t_{\delta \varphi} + \nu \text{tr}(t_{\delta \varphi}) \delta. \end{aligned}$$

Для вариации континуального векторного поля смещения  $\delta \mathbf{U}$  на расстоянии  $\delta \mathbf{r}$  справедливо  $\delta \mathbf{U} = \left( \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}, \delta \mathbf{r} \right)$ . В силу определения взаимного базиса  $(\mathbf{e}(\lambda), \mathbf{e}'(\lambda')) = \delta_{\lambda\lambda'}$  для ребра  $\lambda(\varphi)$  очевиден сеточный аналог этого тождества:

$$\Delta_{\lambda} \mathbf{u} = \left( \left( \frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}} \right)_{\varphi}, \mathbf{e}(\lambda) \right).$$

Уточним также силу  $\tau_X(\lambda)$ , действующую на поверхность  $\sigma(\lambda)$  в поле напряжений  $X_{\Delta u}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{X_{\Delta u}}(\lambda) &= \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\Delta u \varphi}) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi} \left\{ \mu \sum_{\lambda'(\varphi)} [(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda')) \Delta_{\lambda'} \mathbf{u} + \right. \\ & \left. + (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), \Delta_{\lambda'} \mathbf{u}) \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda')] + \nu \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda) \sum_{\lambda'(\varphi)} (\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda'), \Delta_{\lambda'} \mathbf{u}) \right\}. \end{aligned}$$

На поле инкрементов  $\bar{\delta}_{\lambda} \in H_{\lambda O}$  (не вращающем среду твердотельно) эта сила определяет самосопряженный, положительно определенный метрический оператор  $G_O: (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ ,  $G_O = G_O^* > 0$ :

$$\tau_{X_{\delta}}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda), X_{\delta \varphi}), \quad \tau_{X_{\delta}} = G_O \bar{\delta}.$$

Для  $\bar{\partial}_1$  и  $\bar{\partial}_2$  из  $H_{\lambda O}$  скалярные произведения  $(\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2)_\lambda$  и  $\langle\langle \bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2 \rangle\rangle$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2)_\lambda &= \sum_\lambda (\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2)_\lambda, \\ (\bar{\partial}_1, G_O \bar{\partial}_2)_\lambda &= \sum_\phi v_\phi [2\mu \operatorname{tr}(t_{\partial 1\phi} t_{\partial 2\phi}) + \nu \operatorname{tr}(t_{\partial 1\phi}) \operatorname{tr}(t_{\partial 2\phi})] = \\ &= (G_O \bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2)_\lambda = \langle \nabla \bar{\partial}_1^\&, X_{\partial 2} \rangle = \langle \nabla \bar{\partial}_2^\&, X_{\partial 1} \rangle \equiv \langle\langle \bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2 \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Энергия деформации среды, производимой полем инкрементов  $\bar{\delta}_\lambda$ , есть энергия метрического оператора в этом поле:

$$(G_O \bar{\delta}, \bar{\delta})_\lambda = \langle\langle \bar{\delta}, \bar{\delta} \rangle\rangle.$$

### 3.2. Поворотной-нейтральные разностные схемы

Определим твердотельное вращение (2D и 3D сетка) как возмущение поля инкрементов  $\bar{\delta}_\lambda \in H_\lambda$  следующим образом:

$$\bar{\delta}_\lambda \rightarrow \bar{\delta}_\lambda + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)], \quad \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$$

Симметризованный тензор смещений  $t_{\partial\phi} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda(\phi)} (\bar{\delta}_\lambda \cdot \mathbf{e}'_\phi(\lambda) + \mathbf{e}'_\phi(\lambda) \cdot \bar{\delta}_\lambda)$  испытывает возмущение  $t_{\partial\phi} \rightarrow t_{\partial\phi} + t_{\omega\phi}$ .

Здесь

$$t_{\omega\phi} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda(\phi)} ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)] \cdot \mathbf{e}'_\phi(\lambda) + \mathbf{e}'_\phi(\lambda) \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)]).$$

Для произвольного вектора  $\mathbf{a}$  имеем

$$\begin{aligned} t_{\omega\phi} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \boldsymbol{\omega} \times \sum_{\lambda(\phi)} \mathbf{e}(\lambda) (\mathbf{e}'_\phi(\lambda), \mathbf{a}) \right] + \sum_{\lambda(\phi)} \mathbf{e}'_\phi(\lambda) ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)], \mathbf{a}) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}] + \sum_{\lambda(\phi)} \mathbf{e}'_\phi(\lambda) ([\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}], \mathbf{e}(\lambda)) \right\} = \frac{1}{2} \{ [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}] \} = 0, \end{aligned}$$

т.е. тензор  $t_{\omega\phi} = 0$ . Следовательно, тензор  $t_{\partial\phi}$  инвариантен к твердотельным вращениям  $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)]$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ . Такое свойство разностной схемы, смещения в которой входят только через инвариантный к твердотельным вращениям симметризованный тензор  $t_{\partial\phi}$  в базисах сетки, называется поворотной нейтральностью.

Упругие силовые и энергетические характеристики таких схем инвариантны не только к параллельному переносу, но и к твердотельным вращениям. Отсюда же следует, что для строгой положительной определенности оператора  $\text{DIN } X_u (X_{\Delta u\phi} = 2\mu t_{\Delta u\phi} + \nu \operatorname{tr}(t_{\Delta u\phi}) \delta)$  необходимо помимо параллельного переноса сетки ( $\Delta_\lambda \mathbf{u} \equiv 0$ ) исключить ее твердотельное вращение ( $\Delta_\lambda \mathbf{u} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}(\lambda)]$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ ). В трехмерном случае это достигается принципом “трех гвоздей”, т.е. в трех узлах, образующих плоскость, должны быть заданы нулевые смещения. Соответственно в двумерном случае должна быть закреплена прямая (двумя узлами).

### 3.3. Скалярно-дивергентные задачи

Упругие деформации в среде могут возникать под действием внешних сил и сопутствующих деформациям физических процессов (термоупругость, бароупругость и т.п.). Для соответствующих краевых задач методами теории опорных операторов также могут быть построены различные варианты разностных схем.

В пространственной области  $O$  с границей  $\partial O$  рассмотрим скалярно-дивергентную задачу

$$\operatorname{div} \mathbf{X}_u = f(r), \quad \mathbf{X}_u = K \nabla u$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с соответствующим интегральным соотношением:

$$\int_O (\mathbf{X} \nabla u) dv + \int_O u \operatorname{div} \mathbf{X} dv = \int_{\partial O} u(\mathbf{X}, \mathbf{ds}).$$

Здесь  $u$  – скаляр (температура, давление и т.п.),  $\mathbf{X}$  – произвольный вектор,  $\mathbf{X}_u$  – потоки, вызванные градиентом функции  $u$  в среде со свойствами проводимости, определяемыми тензором  $K$ .

Как и ранее (фиг. 1) в области  $O$  вводится семейство нерегулярных разностных сеток, обладающих метрическими свойствами, и соответствующих сеточных функций. Внутреннюю дивергенцию векторного поля  $\operatorname{DIN} : (\varphi) \rightarrow (\omega)$  определим аналогично п. 3.1, аппроксимируя теорему Гаусса на  $d(\omega)$ . Сеточное векторное поле  $\mathbf{X}$  задается своими представлениями в базисах  $\mathbf{X}_\varphi$ . Обозначая через  $( )_\Delta$  аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем

$$\left( \int_O (\mathbf{X}, \nabla u) dv \right)_\Delta = - \left( \int_O u \operatorname{div} \mathbf{X} dv - \int_{\partial O} u(\mathbf{X}, \mathbf{ds}) \right)_\Delta = - \sum_\omega (u_\omega, \operatorname{DIN} \mathbf{X}) = \sum_\varphi V_\varphi (\mathbf{X}_\varphi, \operatorname{GRAD} u).$$

Градиентное векторное поле  $\operatorname{GRAD} : (\omega) \rightarrow (\varphi)$  дается своими представлениями в базисах:

$$\operatorname{GRAD} u = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda u \mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \quad \Delta_\lambda u = - \sum_{\omega(\lambda)} S_\lambda(\omega) u_\omega = u_{\omega^*} - u_\omega.$$

Полагая в базисах  $\varphi$  в качестве  $\mathbf{X}_\varphi$  векторное поле  $\mathbf{X}_{v\varphi} = K_\varphi \operatorname{GRAD} v$ , получаем самосопряженный неотрицательный оператор  $\operatorname{DIN} \mathbf{X}_v : (\omega) \rightarrow (\omega)$  или  $\operatorname{DIN} K \operatorname{GRAD} : (\omega) \rightarrow (\omega)$ . Здесь потоковое векторное поле  $\mathbf{X}_v$  дается своими компонентами в базисах  $\mathbf{X}_{v\varphi}$ . Оно определяется градиентными свойствами скалярной сеточной функции  $v$ , заданной в узлах  $\omega$ , и сеточным тензорным полем проводимости  $K$ , задаваемым своими представлениями в базисах  $K_\varphi$ . Этот оператор будет строго положительным, если хотя бы в одном граничном узле связанной разностной сетки задана первая краевая задача, т.е. в этом граничном узле скалярная сеточная функция обращается в ноль.

### 3.4. Дифференциально-разностная схема

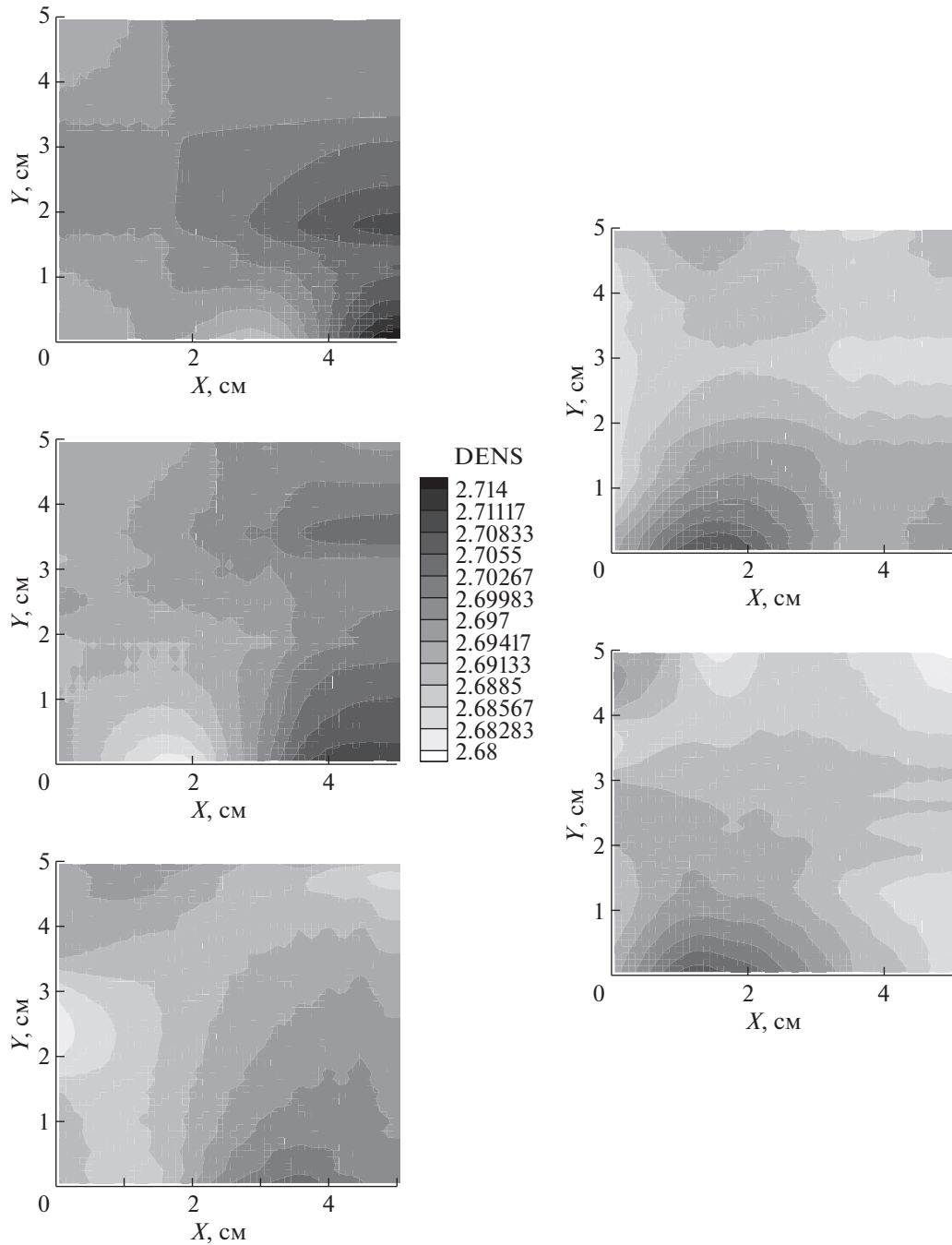
Введем обозначения для функций сетки метода опорных операторов (п. 3, см. также фиг. 1). К ее узлам  $\omega$  будем относить ранее представленные в континуальной модели компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  и смещения  $\mathbf{U}$ , а также термодинамические величины  $\rho, \eta, P, T, \xi, \varepsilon$ . Аналогичные разностные схемы, где термодинамические функции заданы в ячейках, представлены в [1], [12], [13]. Дифференциально-разностная схема в узлах сетки для уравнений (2.1)–(2.3) с “нулевыми” граничными условиями может быть записана как

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \operatorname{DIN} \mathbf{v}, \\ \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) &= \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi \operatorname{GRAD} P + \operatorname{DIN} \zeta, \\ \frac{d}{dt} (m\xi) &= -P \operatorname{DIN} \mathbf{v} + \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi \operatorname{tr}(\zeta_\varphi t_{\Delta v \varphi}) - \operatorname{DIN} \mathbf{W} + Vq. \end{aligned}$$

Здесь приузловой объем  $V_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi$  определяется базисными объемами  $V_\varphi$ . Приузловая масса постоянна  $m_\omega = \rho_\omega V_\omega = \operatorname{const}$ . Скорость  $\mathbf{v}_\varphi$  в базисе  $\varphi$  с центральным узлом  $\omega$  берется как  $\mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}_{\omega(\varphi)}$ . Сеточные тензорные поля сдвиговых напряжений задаются представлениями в базисах  $\zeta_\varphi = 2\mu_\varphi \left( t_{\Delta U \varphi} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(t_{\Delta U \varphi}) \delta \right)$ . Тепловой поток в базисах определяется как  $\mathbf{W}_\varphi = -\kappa_\varphi \operatorname{GRAD} T$ , где  $\kappa_\varphi(P_\omega, T_\omega)$  – теплопроводность в базисе  $\varphi$  (ячейки  $\Omega \supset \varphi$ , содержащей этот базис) с центральным узлом  $\omega(\varphi)$ . Учитывающая адиабатические деформации внутренняя энергия узла  $\omega$  с массой  $m$  определится как

$$m\xi = m\varepsilon(\rho, T) + \frac{1}{4} \sum_{\varphi(\omega)} \frac{V_\varphi}{\mu_\varphi} \operatorname{tr}(\zeta_\varphi^2).$$

Здесь модуль сдвига  $\mu_\varphi$  на сетке определяется в базисе  $\varphi$  аналогично теплопроводности  $\kappa_\varphi$ .



**Фиг. 2.** Динамика плотности на моменты (сверху вниз, слева направо) 2, 4, 6, 8 и 10 мкс,  $z = 0.05$  см.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассматривается движение вещества, описываемое уравнениями неразрывности, Эйлера и энергетическими балансами с адиабатическими деформациями твердой фазы в рамках линейной теории упругости (см. [11]).

Для исследования однородной конечно-разностной аппроксимации упругих сил в рамках решения сопряженных задач гидродинамики и упругости (см. [1]) в случае, когда вещество находится в твердом состоянии, проведено моделирование распространения звуковых волн в трехмерной ортогональной пластине вследствие удара, колебания пластины вследствие сдвиговой деформации или деформации изгиба.



Во всех этих случаях для вещества использовались параметры алюминия с плотностью  $\rho_s = 2700 \text{ кг/м}^3$ , модулем сдвига  $\mu = 26.1 \text{ ГПа}$  и модулем сжатия  $k = 72.9 \text{ ГПа}$ . Соответствующие значения скорости продольного и поперечного звука составляют  $c_p = \sqrt{\left(k + \frac{4}{3}\mu\right)\rho_s} = 6300 \text{ м/с}$  и  $c_s = \sqrt{\mu/\rho_s} = 3100 \text{ м/с}$ . Задача о распространении волны в плоской трехмерной пластине рассматривалась в следующей постановке:  $x \in [0; 10]$ ,  $y \in [0; 5]$ ,  $z \in [0; 0.1]$ ,  $v_x(t=0) = 0$ ,  $v_y(t=0) = v_0 e^{-4y-(x-5)^2}$ ,  $v_z(t=0) = 0$ . Здесь координаты выражены в сантиметрах; амплитуда волны  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  много меньше скорости звука в алюминии. В начальный момент времени вещество предполагалось недеформированным. На правой границе (фиг. 2) ставилось условие отражения, в то время как на остальных границах задавалось отсутствие внешних сил. Динамика мишени, полученная в расчетах в хуз-геометрии, представлена на фиг. 2. Для анализа вызванных лазерным воздействием гидродинамических и упруго-волновых процессов важна численная информация об обмене импульсом и энергией между испаренной и неиспаренной частями мишени. Для проверки качества методики в этом отношении, аналогично [1], проводился анализ динамики интегральных уравнений внутренней, кинетической и полной энергий, полученных в расчетах на сетке  $500 \times 200 \times 10$  (шаг  $0.01 \text{ см}$ ).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены семейства интегрально-согласованных аппроксимаций операций векторного анализа для дискретного моделирования упругих сил в твердой фазе на разнесенных лагранжевых сетках. С учетом энергетического баланса среды рассмотрены схемы, разделяющие тензор напряжений на шаровую (давление) и сдвиговую компоненты для построения однородных разностных алгоритмов, применимых для твердого тела и испаренной плазменной фазы. В рамках полученной методики проведены тестовые расчеты распространения звуковых волн в пространственно-трехмерной ортогональной пластине вследствие торцевого удара.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Гасилов В.А., Бойков Д.С., Попов С.Б. Однородные разностные схемы для сопряженных задач гидродинамики и упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2019. Т. 161. № 3. С. 377–392.
2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. ур-ния. 1981. Т. 17. № 7. С. 1317–1327.
3. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 5. С. 1092–1096.
4. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Самарский А.А. и др. Вариационно-операторные разностные схемы для уравнений математической физики. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983. 143 с.
5. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 3. С. 371–381.
6. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 10. С. 1477–1486.
7. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО “Критерий”, 1996. 275 с.
8. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 86–96.
9. Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Головченко Е.Н. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 10. 36 с.
10. Новиков В.Г., Никифоров В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
12. Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Клочкова Л.В., Сузан Д.В. Оценки сходимости итерационных алгоритмов численного решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 94. 17 с.
13. Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 6. 20 с.

УДК 517.95

## АНОМАЛИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРАХ, СОЕДИНЕННЫХ ТОНКИМ УПЛОЩЕННЫМ КАНАЛОМ<sup>1)</sup>

© 2021 г. С. А. Назаров<sup>1,\*</sup>, Л. Шенель<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9,  
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup> 91128 Palaiseau, France, Route de Saclay, INRIA/Centre de mathématiques appliquées, École Polytechnique,  
Université Paris-Saclay, France

\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

\*\*e-mail: lucas.chesnel@inria.fr

Поступила в редакцию 21.07.2020 г.  
Переработанный вариант 14.10.2020 г.  
Принята к публикации 16.11.2020 г.

Исследовано прохождение волн вдоль волновода, который образован двумя полубесконечными цилиндрами, соединенными перемычкой в виде тонкой прямоугольной пластины. Показано, что путем точной настройки размеров пластины можно добиться почти полного или даже полного прохождения поршневой моды на заданной наперед частоте, хотя по понятной причине в ситуации общего положения реализуется почти полное отражение волны. Результат получен при помощи асимптотического анализа коэффициентов рассеяния акустической волны, в частности, процедуры понижения размерности на перемычке. Обсуждаются доступные обобщения постановки задачи и смежные открытые вопросы. Библ. 51. Фиг. 9.

**Ключевые слова:** акустический волновод, тонкий соединительный канал, асимптотика коэффициентов рассеяния, почти полное отражение и прохождение поршневых мод.

DOI: 10.31857/S0044466921040098

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РЕЗУЛЬТАТЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть  $\omega$  – область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная простым гладким (для простоты) замкнутым контуром  $\partial\omega$ , а  $\Pi_{\pm}^{\varepsilon} \subset \mathbb{R}^3$  – полубесконечные цилиндры (далее полуцилиндры или рукава)

$$\Pi_{\pm}^{\varepsilon} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_1 > L^{\varepsilon} > 0, x' = (x_2, x_3) \in \omega\}. \quad (1)$$

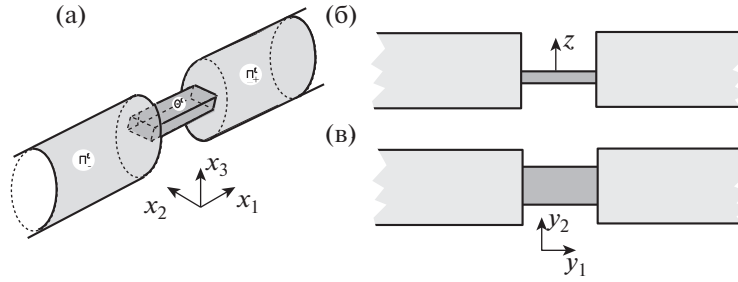
Масштабированием сведем к единице характерный размер сечения  $\omega$  и тем самым сделаем декартовы координаты  $x_1, x_2, x_3$  и все геометрические параметры безразмерными; в частности,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр. На торцах  $\omega_{\pm}^{\varepsilon} = \omega \times \{\pm L^{\varepsilon}\}$  полуцилиндров (1) выделим тонкие прямоугольники  $\gamma_{\pm}^{\varepsilon} = \{x : x_1 = \pm L^{\varepsilon}, |x_2| < \ell, |x_3| < \varepsilon/2\}$  и соединим их параллелепипедом

$$\Theta^{\varepsilon} = \{x : |x_1| < L^{\varepsilon}, |x_2| < \ell, |x_3| < \varepsilon/2\}, \quad (2)$$

играющим роль перемычки-канала. Интерпретируя область (фиг. 1)

$$\Omega^{\varepsilon} = \Theta^{\varepsilon} \cup \bigcup_{\pm} (\Pi_{\pm}^{\varepsilon} \cup \gamma_{\pm}^{\varepsilon}) \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-11-01003).



Фиг. 1. Трехмерный волновод с тонкой перемычкой (а): вид сбоку (б) и вид сверху (в). Перемычка тонирована.

как акустический волновод (см., например, [1]), рассмотрим спектральную задачу Неймана для оператора Лапласа  $\Delta_x$ , описывающую распространение волн и потому требующую постановки условий излучения (см. (8))

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \omega^2 u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{4}$$

$$\partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon. \tag{5}$$

При этом  $u^\varepsilon$  – давление в акустической среде, а волновое число  $\omega > 0$  поршневых мод

$$w^\pm(x_1) = e^{\pm i\omega x_1} \tag{6}$$

расположено ниже первой положительной частоты  $\omega_1(\mathbb{D})$  отсечки спектра в цилиндре  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$  (наименьшее положительное собственное значение задачи Неймана на сечении  $\mathbb{D}$ ), т.е. других распространяющихся акустических волн нет (ср. разд. 6, 3°).

Кроме того,  $\partial_\nu$  – производная вдоль внешней нормали, определенная всюду кроме ребер на границе  $\partial\Omega^\varepsilon$ . Параллелепипед (2) имеет малую высоту  $\varepsilon > 0$ , а его полудлина

$$L^\varepsilon = L + \varepsilon L' \tag{7}$$

также зависит от  $\varepsilon$  и будет выбрана специальным образом для обеспечения особых свойств волновода (3).

В статье будет построена асимптотика при  $\varepsilon \rightarrow +0$  порожденного приходящей в рукаве  $\Pi_-^\varepsilon$  волной  $w^+$  решения дифракционной задачи (4), (5)

$$u^\varepsilon(x) = \chi_-(x_1)(w^+(x_1 + L^\varepsilon) + R^\varepsilon w^-(x_1 + L^\varepsilon)) + \chi_+(x_1)T^\varepsilon w^+(x_1 - L^\varepsilon) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \tag{8}$$

а также комплексных коэффициентов рассеяния  $R^\varepsilon$  и  $T^\varepsilon$ , присутствующих в правой части (8) множителями при уходящих волнах  $w^\pm$  в рукавах  $\Pi_\pm^\varepsilon$ . При этом для упрощения дальнейших формул волны (6) включены в разложение (8) со сдвигом фазы,  $\chi_\pm$  – гладкие срезающие функции, локализирующие волны в полуцилиндрах,

$$\chi_\pm(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad x_1 > 3L, \quad \chi_\pm(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 < 2L,$$

а остаток  $\tilde{u}^\varepsilon(x)$  затухает на бесконечности со скоростью  $O(e^{-(\omega_1(\mathbb{D})^2 - \omega^2)^{1/2}|x_1|})$ . Согласно общим результатам [1], [2] решение (8) задачи (4), (5) существует вне зависимости от формы резонатора (перемычки (2)) и наличия или отсутствия захваченных волн  $u_{rr}^\varepsilon$  (решения однородной задачи с экспоненциальным затуханием на бесконечности). Само поле (8) находится с точностью до слагаемого  $cu_{rr}^\varepsilon$ , однако коэффициенты рассеяния определены однозначно и подчинены равенству

$$|R^\varepsilon|^2 + |T^\varepsilon|^2 = 1, \tag{9}$$

выражающему закон сохранения энергии.

Основной результат данной работы состоит в том, что при некоторой, тщательно подобранной, полудлине (7) перемишки  $\Theta^\varepsilon$  вместо привычного почти полного отражения волны  $w^+$ , входящей из рукава  $\Pi_-$ , реализуется почти полное ее прохождение, т.е. выполнены представления

$$T^\varepsilon = T^0 + \tilde{T}^\varepsilon, \quad R^\varepsilon = \tilde{R}^\varepsilon \quad (10)$$

с малыми остатками  $\tilde{T}^\varepsilon = o(1)$ ,  $\tilde{R}^\varepsilon = o(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$  и главным членом  $T^0 = 1$  или  $T^0 = -1$  коэффициента прохождения (см. окончательные формулы (63) и (70)). Полному прохождению отвечают равенства  $|T^0| = 1$ ,  $\tilde{T}^\varepsilon = 0$  и  $\tilde{R}^\varepsilon = 0$  в формулах (10). Разумеется, почти полное отражение характеризуется совершенно другими соотношениями при сохранении качества остатков

$$R^\varepsilon = 1 + \tilde{R}^\varepsilon, \quad T^\varepsilon = \tilde{T}^\varepsilon. \quad (11)$$

Впервые эффект почти полного отражения волны на околороговых частотах, названный аномалией Вайнштейна, был описан в [3] для полубесконечной круговой цилиндрической трубы с жесткими стенками, открытой в пространство. Похожие аномалии были обнаружены в статьях [4]–[9] и др. для волноводов иных геометрических форм, причем помимо почти полного отражения (11) были найдены условия, при которых происходит почти полное прохождение (10) волны, называемое инвертированной аномалией Вайнштейна и связанное с возникновением порогового резонанса [10]–[12]. Более того, известно, что в случае близкого расположения точки комплексного резонанса к вещественной оси наблюдается очень быстрая изменчивость коэффициентов рассеяния на частотах около этой точки. Такое явление выражает резонанс Фано [13], который подвергался многократным исследованиям как при помощи вычислительных [14]–[18], так и теоретических методов [19]–[23]. Рассматриваемая задача (4), (5) в значительной мере воспроизводит упомянутый механизм: при  $\varepsilon \rightarrow +0$  у нее появляются точки комплексного резонанса вблизи собственных значений предельной задачи (12)–(14), вызывающий быструю изменчивость коэффициентов рассеяния на околорезонансных частотах и, в частности, позволяющий достичь почти полного прохождения поршневой моды сквозь сколь угодно тонкий соединительный канал  $\Theta^\varepsilon$  путем тщательного подбора длины канала.

Похожие постановки задач рассматривались в [24]–[28], а именно, двумерные задачи о рассеянии волны, падающей под углом на стенку с периодически расположенными узкими щелями. В перечисленных работах применялось сведение задачи к интегральным уравнениям, которое подразумевает знание точной формулы для соответствующей функции Грина и, следовательно, не годится в нашей ситуации хотя бы потому, что сечение  $\omega$  трехмерного цилиндра – произвольная ограниченная область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Далее предлагается иной, всеохватывающий подход к построению асимптотики, опирающийся на метод сращиваемых разложений (ср. [29]–[39] и др. о сингулярно возмущенных эллиптических задачах при родственной геометрии). Вместе с тем предлагаемый подход отличается от упомянутых публикаций, так как не только толщина, но и длина (7) тонкого канала зависят от параметра  $\varepsilon$ , причем именно последнее обстоятельство позволяет добиться почти полного или даже полного прохождения поршневой моды.

Наиболее близкий асимптотический анализ представлен в работах [33], [34], где получены полные асимптотические разложения решений задач Неймана для уравнения Пуассона на сочленениях областей с различными предельными размерностями. Соответствующие процедуры применяются в окрестностях зон присоединения перемишки к полуцилиндрам, и поэтому переход к рассмотрению уравнения Гельмгольца (4) не встретил дополнительных трудностей. На самих областях  $\Theta^\varepsilon$  и  $\Pi_\pm^\varepsilon$  возможно разделение переменных, что упрощает решение соответствующих предельных задач. Схема обоснования полученных в разд. 2–4 асимптотик (см. (63) и (70)) описана в разд. 5 и основана на технике весовых пространств с отделенной асимптотикой в варианте, разработанном в [40]. В заключительном разд. 6 обсуждаются доступные обобщения, следствия и открытые вопросы.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Обсудим пару краевых задач, из решений которых в следующих разделах будут сформированы асимптотические представления акустического поля (8).

Введем новые обозначения для декартовых координат:  $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$  и  $z = x_3$ . Разделение переменных и устранение вертикальной координаты  $z$  в уравнении (4), суженном на перемычку  $\Theta^\varepsilon$ , приводит к двумерному уравнению Гельмгольца в прямоугольнике  $\theta = (-L, L) \times (-\ell, \ell) \ni y$

$$-\Delta_y v(y) = \omega^2 v(y), \quad y \in \theta, \tag{12}$$

снабженному вытекающими из (5) условиями Неймана

$$\pm \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) = 0, \quad y_2 = \pm \ell, \quad |y_1| < L, \tag{13}$$

и назначенными искусственно условиями Дирихле

$$v(y) = 0, \quad y_1 = \pm L, \quad |y_2| < \ell. \tag{14}$$

Отметим, что  $\theta$  – продольное сечение параллелепипеда  $\{x : |y_1| < L, |y_2| < \ell, |z| < \varepsilon/2\}$  (ср. (2) с заменой  $L^\varepsilon \mapsto L$ ), и далее не различаем в обозначениях двумерные фигуры и их погружения в пространство на плоскость  $\{x : z = 0\}$ .

Собственные значения и функции смешанной краевой задачи (12)–(14) имеют вид

$$\mu_{jk} = \frac{\pi^2 j^2}{4\ell^2} + \frac{\pi^2 m^2}{4L^2}, \tag{15}$$

$$v_{jk}(y) = \sin\left(\frac{\pi m}{2L}(y_1 + L)\right) \cos\left(\frac{\pi j}{2\ell}(y_2 + \ell)\right), \tag{16}$$

где  $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Далее рассматриваются специфические частоты

$$\omega_m = \frac{\pi m}{2L} \in (0, \omega_1(\mathbb{D})), \quad m = 1, \dots, M, \tag{17}$$

отвечающие числам (15) с индексом  $j = 0$ . Разумеется, при малом  $L$  множество (17) пусто, т.е.  $M = 0$ , но увеличение длины  $2L$  приводит к неограниченному росту размера  $M$  списка (17).

Еще одна двумерная задача, нужная для построения асимптотики, описывает явление пограничного слоя около зон  $\gamma_\pm^\varepsilon$  соединения перемычки и рукавов и ставится на объединении  $\Xi = \Xi^- \cup \Xi^+$  полуплоскости и полуполосы (см. фиг. 2а)

$$\Xi^- = \mathbb{R}_-^2 = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 < 0\}, \quad \Xi^+ = \{\xi : \xi_1 > 0, |\xi_2| < 1/2\}. \tag{18}$$

Эта задача имеет вид

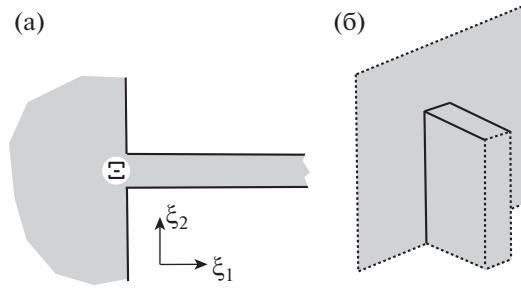
$$\begin{aligned} -\Delta_\xi Y(\xi) &= 0, & \xi \in \Xi, \\ \partial_\nu Y(\xi) &= 0, & \xi \in \partial\Xi, \end{aligned} \tag{19}$$

а используемый далее метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [41], [42], [43; гл. 2] и др.) оперирует ее решениями, ограниченными или полиномиально растущими в полуполосе при  $\xi_1 \rightarrow +\infty$ . Одно из таких решений очевидно: постоянная  $Y^0(\xi) = 1$ . Другое линейно независимое решение – гармоническая в области  $\Xi$  функция с нулевой нормальной производной на границе, однозначно определенная представлениями

$$Y^1(\xi) = \xi_1 + C_\Xi + O(e^{-\pi\xi_1}), \quad \xi_1 \rightarrow +\infty, \quad \xi \in \Xi^+, \tag{20}$$

$$Y^1(\xi) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad |\xi| \rightarrow +\infty, \quad \xi \in \Xi^-. \tag{21}$$

При этом  $C_\Xi$  – некоторая абсолютная постоянная. Связь коэффициентов при растущих слагаемых в (20) и (21) вызвана понятным ограничением: у гармонической функции  $Y^1$  равен нулю суммарный поток на бесконечность.



Фиг. 2. Сочленения полуплоскости с полуполосой (а) и полупространства с четвертушкой слоя (б).

### 3. НЕКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть заданная частота  $\omega \in (0, \omega_1(\mathfrak{D}))$  не совпадает с критическими (17), т.е.

$$\omega \neq \frac{\pi m}{2L} \quad \text{при всех} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

При этом производить “настройку” полудлины (7) не требуется – положим  $L' = 0$  и обозначим через  $\Pi_{\pm}^0$  полученные полуцилиндры (1). Асимптотическое строение решения (8) задачи (4), (5) весьма просто. Именно, в анзаце

$$u^{\varepsilon}(x) = u_{\pm}^0(x) + \varepsilon u'_{\pm}(x) + \dots \quad \text{на} \quad \Pi_{\pm}^0 \quad (23)$$

положим

$$u_{-}^0(x) = e^{+i\omega(x_1+L)} + e^{-i\omega(x_1+L)}, \quad u_{+}^0(x) = 0. \quad (24)$$

Иными словами, аналогично формулам (11) величины

$$R^0 = 1, \quad T^0 = 0 \quad (25)$$

фигурируют в асимптотических разложениях коэффициентов отражения и прохождения

$$\begin{aligned} R^{\varepsilon} &= R^0 + \varepsilon R' + \dots, \\ T^{\varepsilon} &= T^0 + \varepsilon T' + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа. Такой несложный вывод основан на следующем наблюдении: для обеспечения непрерывного перехода из рукавов  $\Pi_{\pm}^0$  на перемычку  $\Theta^{\varepsilon}$  главный член в асимптотическом анзаце

$$u^{\varepsilon}(x) = v^0(y) + \varepsilon v'(y) + \dots \quad \text{на} \quad \Theta^{\varepsilon} \quad (27)$$

нужно искать как решение уравнения Гельмгольца (12) с краевыми условиями Неймана (13) и Дирихле

$$v^0(y) = g_{\pm}(y_2), \quad y \in \gamma_{\pm}^0, \quad (28)$$

где  $\gamma_{\pm}^0 = \{y : y_1 = \pm L, |y_2| < \ell\}$  и

$$g_{-}(y_2) = u_{-}^0|_{y_1=-L} = 2, \quad g_{+}(y_2) = u_{+}^0|_{y_1=+L} = 0. \quad (29)$$

Благодаря введенному ограничению (22) на частоту  $\omega$  такая задача однозначно разрешима и

$$v^0(y) = 2 \cos(\omega(y_1 + L)) - 2 \operatorname{ctg}(2\omega L) \sin(\omega(y_1 + L)). \quad (30)$$

Производные главных членов анзацев (23) и (27) претерпевают скачки на соединительных прямоугольниках  $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ . Для их устранения построим поправочные члены анзацев. Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [41], [42], [43; гл. 2] и др.), интерпретируя

(23) и (27) как внешние разложения, пригодные на удалении от прямоугольников  $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ , и построим внутренние разложения в непосредственной близости от  $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ :

$$u^{\varepsilon}(x) = Z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) + \varepsilon Z'_{\pm}(\xi^{\pm}) + \dots \quad \text{в окрестности множеств } \overline{\gamma_{\pm}^{\varepsilon}}. \quad (31)$$

В правой части (31) аргументами служат растянутые координаты

$$\xi^{\pm} = (\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm}) = (\varepsilon^{-1}(L \mp y_1), \varepsilon^{-1}z), \quad (32)$$

а для координаты  $y_2$  сохранен исходный масштаб. Замена координат  $(y, z) \mapsto (\xi^{\pm}, y_2)$  и формальный переход к  $\varepsilon = 0$  трансформируют волновод (3) в множество  $\Xi \times (-\ell, \ell)$  (ср. определения (2) и (18)). Поскольку  $\Delta_x + \omega^2 = \varepsilon^{-2}\Delta_{\xi^{\pm}} + \dots$ , в результате возникает задача Неймана (19) в области  $\Xi$  с параметром  $y_2 \in (-\ell, \ell)$ .

В силу формул (30) и (32) имеем

$$v^0(y) = 2 - 2\omega \operatorname{ctg}(2\omega L)(y_1 + L) + O(|y_1 + L|^2) = 2 - 2\varepsilon\omega \operatorname{ctg}(2\omega L)\xi_1^- + O(\varepsilon^2|\xi_1^-|^2) \quad (33)$$

при  $y_1 \rightarrow -L + 0$  и

$$v^0(y) = -2\frac{\omega(y_1 - L)}{\sin(2\omega L)} + O(|y_1 - L|^2)2\varepsilon\frac{\omega\xi_2^+}{\sin(2\omega L)} + O(\varepsilon^2|\xi_2^+|^2) \quad (34)$$

при  $y_1 \rightarrow +L - 0$ . Таким образом, при учете представления (20) функции  $Y_1$  процедура сращивания разложений (27), (33), (34) и (31), (35) на уровнях  $1 = \varepsilon^0$  и  $\varepsilon$  показывает, что

$$Z_-^0(\xi) = 2, \quad Z_+^0(\xi) = 0 \quad (35)$$

и

$$Z'_{\pm}(\xi^{\pm}; y_1) = C_{\pm}^1 Y^1(\xi^{\pm}) + C_{\pm}^0(y_1), \quad (36)$$

где  $Y^1$  – упомянутое специальное решение задачи (19), а  $C_{\pm}^0(y_1)$  – произвольная постоянная (напомним, что  $y_2$  – параметр в этой задаче). Сравнивая соотношения (35), (36) и (31), (20), находим, что

$$C_-^1 = -2\omega \operatorname{ctg}(2\omega L), \quad C_+^1 = \frac{2\omega}{\sin(2\omega L)}. \quad (37)$$

Теперь произведем сращивание разложений (31) и (23). На уровне  $1 = \varepsilon^0$  сращивание обеспечено соотношениями (35) и (24). Кроме того, поправочный член  $u'_{\pm}$  в анзаце (23) должен удовлетворять задаче

$$\begin{aligned} -\Delta_x u'_{\pm}(x) &= \omega^2 u'_{\pm}(x), \quad x \in \Pi_{\pm}^0, \\ \partial_\nu u'_{\pm}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Pi_{\pm}^0 \setminus \overline{\gamma_{\pm}^0}, \end{aligned} \quad (38)$$

и вытекающим из (26) и (8) условиям излучения

$$u'_{\pm}(x) = G_{\pm}^1 e^{\pm i\omega(x_1 \mp L)} + \tilde{u}'_{\pm}(x) \quad (39)$$

с экспоненциально затухающими на бесконечности остатками  $\tilde{u}'_{\pm}$  и коэффициентами

$$G_-^1 = R', \quad G_+^1 = T'. \quad (40)$$

Коэффициенты (40) суть не что иное, как поправочные члены в представлениях (26) коэффициентов рассеяния. Наконец, благодаря представлению (21) придаем следующее сингулярное поведение поправочному члену  $u'_{\pm}$ :

$$u'_{\pm}(x) = C_{\pm}^1 \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r_{\pm}} + O(1), \quad r_{\pm} = \sqrt{(x_1 \mp L)^2 + x_3^2} \rightarrow +0. \quad (41)$$

Отметим, что соотношение (41) требует уточнения вблизи концевых точек  $\mathbb{O}_+^\pm = (\pm L, +\ell, 0)$  и  $\mathbb{O}_-^\pm = (\pm L, -\ell, 0)$  (см. разд. 5).

Поскольку  $\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r}$  – функция Грина для оператора Лапласа на полуплоскости  $\mathbb{R}_+^2$  с краевыми условиями Неймана и особенностью на границе, упомянутые остатки являются решениями задач

$$\mp \frac{\partial u'_\pm}{\partial x_1}(\pm L, x') = C_\pm^1 \delta_{\gamma_\pm^0}(x'), \quad x' \in \mathfrak{O},$$

где  $\delta_{\gamma_\pm^0}$  – дельта-функция Дирака, распределенная с единичной плотностью вдоль отрезка  $\gamma_\pm^0 \subset \mathfrak{O}_\pm$ . Применим формулу интегрирования по частям в интеграле

$$0 = \int_{\Pi_\pm^0(H)} (\Delta_x u'_\pm(x) + \omega^2 u'_\pm(x))(e^{+i\omega(x_1 \mp L)} + e^{-i\omega(x_1 \mp L)}) dx$$

по множеству  $\Pi_\pm^0(H) = \{x \in \Pi_\pm^0 : \pm x_1 < H, r_\pm > 1/H\}$  и вычислим предел при  $H \rightarrow +\infty$ . В результате выводим связи

$$i\omega|\mathfrak{O}|R' + 2\ell C_-^1 = 0, \quad i\omega|\mathfrak{O}|T' + 2\ell C_+^1 = 0,$$

где  $|\mathfrak{O}|$  – площадь сечения  $\mathfrak{O}$  полуцилиндров (1). Подставив сюда формулы (37) для величин  $C_\pm^1$ , находим выражения для поправок в анзацах (26) для коэффициентов рассеяния:

$$R' = -4i \frac{\ell}{|\mathfrak{O}|} \operatorname{ctg}(2\omega L), \quad T' = 4i \frac{\ell}{|\mathfrak{O}|} \frac{1}{\sin(2\omega L)}. \tag{42}$$

Отметим, что в силу равенств (25) и закона сохранения энергии (9) величина  $R'$  должна быть чисто мнимой. Кроме того,  $\sin(2\omega L) = 0$  и  $\operatorname{ctg}(2\omega L) = 0$  в критическом случае

$$\omega = \frac{\pi m}{2L} \in (0, \omega_1(\mathfrak{O})) \quad \text{при некотором } m \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

а значит, асимптотические представления коэффициентов рассеяния изменяются существенно (см. разд. 4), так как формулы (42) теряют смысл.

Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, поправочные слагаемые в анзацах (18) для акустического поля  $u^\varepsilon$  представимы в виде

$$u'_\pm(x) = C_\pm^1 \left( i \frac{2\ell}{\omega|\mathfrak{O}|} e^{\pm i(x_1 \mp L)} + \mathbf{u}(\pm x_1 - L, x') \right), \tag{44}$$

где  $\mathbf{u}$  – каноническое решение задачи в зафиксированном полуцилиндре

$$\begin{aligned} -\Delta_x \mathbf{u}(x) &= \omega^2 \mathbf{u}(x), & x \in \mathfrak{O} \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu \mathbf{u}(x) &= 0, & x \in \partial \mathfrak{O} \times \mathbb{R}_+, \\ -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(0, x') &= \delta_{\gamma_\pm^0}(x') - \frac{2\ell}{|\mathfrak{O}|}, & x' \in \mathfrak{O}. \end{aligned} \tag{45}$$

Оно затухает на бесконечности и согласно выкладке (42) допускает представление

$$\mathbf{u}(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r} + \mathbf{u}^*(x_1) + O(r), \quad r = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2} \rightarrow +0. \tag{46}$$

Здесь  $u_\pm^*$  – некоторая функция на отрезке  $(-\ell, \ell) \ni x_2 = y_2$ .



Во-вторых, можно найти поправочное слагаемое  $v'$  в анзаце (27) для поля  $u^\varepsilon$  на тонком канале. С этой целью уточним процедуру сращивания разложений (23), (31) внутри рукавов  $\Pi_\pm^0$  и (31), (27) на перемычке  $\Theta^\varepsilon$ . Сначала согласно соотношениям (36), (21) и (44), (46) находим, что

$$\left. \begin{aligned} C_\pm^1 Y^1(\xi^\pm) + C_\pm^0(y_2) &= -C_\pm^1 \pi^{-1} \ln(\varepsilon^{-1} r_\pm) + C_\pm^0(y_2) + \dots, \\ G_\pm' + C_\pm^1 \mathbf{u}(\pm x_1 - L, x') &= G_\pm' + C_\pm^1 (-\pi^{-1} \ln r_\pm + \mathbf{u}^\bullet(y_2)) + \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tag{47}$$

$$\Rightarrow C_\pm^0(y_2) = C_\pm^1 (\pi^{-1} |\ln \varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2)) + G_\pm'.$$

Подчеркнем, что

$$\ln |\xi^\pm| = \ln(\varepsilon^{-1} r_\pm) = \ln r_\pm + |\ln \varepsilon| \quad \varepsilon \leq 1,$$

а последнее соотношение – результат сравнения слагаемых, выделенных в первых двух строках (47), причем множители при  $\ln r_\pm$  совпали автоматически.

Затем формулы (36), (20) и (44), (46), а также очевидное равенство  $v'(y) = v'(\pm L, y_2) + O(|y_1 \mp L|)$  приводят к краевым условиям

$$v'(\pm L, y_2) = C_\pm^1 (\pi^{-1} |\ln \varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2) + C_\pm) + G_\pm', \quad y \in \gamma_\pm^0, \tag{48}$$

которые вместе с уравнениями (12) и (13) образуют однозначно разрешимую (по предположению (22)) смешанную краевую задачу для поправочного члена в анзаце (27). Подчеркнем, что этот член  $v'$  линейно зависит от большого параметра  $|\ln \varepsilon|$ , однако множитель  $\varepsilon$  делает поправку  $\varepsilon v'$  малой.

#### 4. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть теперь выполнено соотношение (43), т.е.  $\omega^2$  – собственное значение задачи (12)–(14) (ср. (17) и (15)). Подчеркнем, что эта задача по-прежнему ставится в фиксированном прямоугольнике  $\theta$ , однако истинная полудлина (7) перемычки (2) считается зависящей от параметра  $\varepsilon$ . Анзацы (23) в полуцилиндрах  $\Pi_\pm^\varepsilon$  остаются без изменений, но анзац (27) превращается в такой:

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} v^{-1}(y) + v^0(y) + \dots \quad \text{на } \Theta^\varepsilon. \tag{49}$$

Выбор частоты (43) предоставляет собственную функцию предельной задачи (12)–(14) в прямоугольнике  $\theta$ , определенную равенством (16) при  $j = 0$ . Таким образом, положим

$$v^{-1}(y) = av(y) = a \sin(\omega(y_1 + L)), \tag{50}$$

где  $a$  – подлежащая определению постоянная. Благодаря условиям Дирихле (14) формула Тейлора показывает, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} v^{-1}(y) + v^0(y) &= 0 + (C_\pm^1 \xi_2^\pm + v^0(\pm L, y_2)) + \dots, \\ C_-^1 &:= a \frac{\partial v}{\partial y_1}(-L, y_2) = a\omega, \quad C_+^1 := -a \frac{\partial v}{\partial y_1}(+L, y_2) - a\omega \cos(2\omega L) = (-1)^{1+m} a\omega. \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь использованы растянутые координаты (32), в которых по-прежнему фигурирует величина  $L = L^0$ . Поэтому область, где ставится задача (19) о пограничном слое, приобретает вид

$$\Xi' = \{ \xi \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 + L', \xi_2) \in \Xi \},$$

и в ней имеется решение  $Y'(\xi) = Y^1(\xi_1 + L', \xi_2)$  задачи Неймана со следующим поведением на бесконечности:

$$\begin{aligned} Y'(\xi) &= \xi_1 + (C_\pm + L') + O(e^{-\delta \xi_1}), \quad \xi_1 \rightarrow +\infty, \quad \delta > 0, \\ Y'(\xi) &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{\rho'} + O\left(\frac{1}{\rho'}\right), \quad \rho' = ((\xi_1 + L')^2 + \xi_2^2)^{-1/2} > 1. \end{aligned} \tag{52}$$

Производя сращивание разложений (51), (52) и (31) на перемычке  $\Theta^\varepsilon$ , обнаруживаем, что главные члены внутренних разложений принимают вид

$$Z_\pm^0(\xi^\pm) = C_\pm^1 Y'(\xi^\pm) + C_\pm^0(y_2), \tag{53}$$

где множители  $C_\pm^1$  взяты из (51), а  $C_\pm^0(y_2)$  – величины, которые предстоит вычислить.

Продолжим сращивание и при учете второго разложения (52) аналогично предыдущему разделу получим сингулярное условие для главного члена внешнего разложения (23)

$$u_\pm^0(x) = C_\pm^1 \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r_\pm^\varepsilon} + u_\pm^\bullet(x_2) + O(r_\pm^\varepsilon), \quad r_\pm^\varepsilon = ((x_1 \mp L^\varepsilon)^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow +0, \tag{54}$$

где обозначения аналогичны использованным в формуле (41). Итак,  $u_\pm^0$  – решения задач

$$-\Delta_x u_\pm^0(x) = \omega^2 u_\pm^0(x), \quad x \in \Pi_\pm^\varepsilon, \quad \partial_\nu u_\pm^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi_\pm^\varepsilon \setminus \bar{\gamma}_\pm^0, \tag{55}$$

дополненных сингулярными условиями (54) и обычными условиями излучения

$$\begin{aligned} u_-^0(x) &= e^{+i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + R^0 e^{-i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + \tilde{u}_-^0(x), \\ u_+^0(x) &= T^0 e^{+i\omega(x_1-L^\varepsilon)} + \tilde{u}_+^0(x). \end{aligned} \tag{56}$$

Задачи (55), (54), (56) зависят от малого параметра  $\varepsilon$  фиктивно: замена координат  $x \mapsto (x', x_3 \mp \varepsilon L')$  уничтожает эту зависимость. Выкладки, аналогичные приведенным к связям (42), показывают, что согласно формулам (51) для  $C_\pm^1$  нужные решения существуют при выполнении равенств

$$\begin{aligned} i\omega(R^0 - 1)|\mathfrak{D}| + 2\ell a\omega &= 0, \\ i\omega T^0|\mathfrak{D}| + 2\ell a(-1)^{1+m}\omega &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

и принимают вид

$$\begin{aligned} u_-^0(x) &= e^{+i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + R^0 e^{-i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + C'_- \mathbf{u}(-x_1 - L^\varepsilon, x'), \\ u_+^0(x) &= T^0 e^{+i\omega(x_1-L^\varepsilon)} + C'_+ \mathbf{u}(x_1 - L^\varepsilon, x'). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – решение задачи (45) в зафиксированном полуцилиндре  $\mathfrak{D} \times \mathbb{R}_+$ . Теперь похожая на представленную в (47) процедура сращивания внутри рукавов (1) приводит к следующим формулам для последних слагаемых во внутреннем разложении (45) около прямоугольников  $\gamma_\pm^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} C_-^0(y_2) &= 1 + R^0 + C'_-(\pi^{-1}|\ln \varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2)), \\ C_+^0(y_2) &= T^0 + C'_+(\pi^{-1}|\ln \varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2)). \end{aligned} \tag{58}$$

Процедура сращивания внешнего (49) и внутреннего (31) разложений на перемычке несколько отличается от изложенной в предыдущем разделе. Именно, при учете формул (51)–(53) и (58) выводим соотношения

$$\begin{aligned} v^0(-L, y_2) &= 1 + R^0 + a\omega(\pi^{-1}|\ln \varepsilon| + C_\Xi + L' + \mathbf{u}^\bullet(y_2)), \\ v^0(+L, y_2) &= T^0 + a\omega(-1)^{1+m}(\pi^{-1}|\ln \varepsilon| + C_\Xi + L' + \mathbf{u}^\bullet(y_2)). \end{aligned} \tag{59}$$

Выражение (50) для собственной функции  $\mathbf{v}$  превращает условие разрешимости задачи (12), (13), (59) в равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_1}(-L) \int_{-\ell}^{\ell} v^0(-L, y_2) dy_2 - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_1}(+L) \int_{-\ell}^{\ell} v^0(+L, y_2) dy_2 = \\ &= 2\ell\omega(1 + R^0 + (-1)^{1+m}T^0) + 4\ell a\omega(\pi^{-1}|\ln \varepsilon| + C_\Xi + L' + \bar{\mathbf{u}}^\bullet), \end{aligned} \tag{60}$$

где  $\bar{\mathbf{u}}^\bullet = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \mathbf{u}^\bullet(y_2) dy_2$  – среднее функции  $\mathbf{u}^\bullet$  по отрезку  $(-\ell, \ell)$ .

Теперь зафиксируем возмущение  $\epsilon L'$  полудлины (7):

$$L' = -\pi^{-1} |\ln \epsilon| - C_{\pm} - \bar{u}^*. \tag{61}$$

В результате соотношение (60) (без средней его части) принимает вид

$$1 + R^0 + (-1)^{1+m} T^0 = 0. \tag{62}$$

Наконец, решив систему трех линейных уравнений (57), (62), находим, что

$$R^0 = 0, \quad T^0 = (-1)^m \quad \text{и} \quad a = i \frac{|\omega|}{2\ell}. \tag{63}$$

Обратим внимание на то, что величина (61) отрицательна при малом  $\epsilon > 0$ , а значит, для достижения эффекта почти полного прохождения поршневой моды на частоте  $\omega \in (0, \omega_1(\omega))$  необходимо несколько уменьшить критическую длину  $L = L^0 = 2\omega/\pi m$  (ср. (43)).

### 5. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ И ТРЕХМЕРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ

Решение задачи (38) с условиями излучения (39) имеет сингулярность (41) на отрезке  $\gamma_{\pm}^0$ , которая требует отдельного изучения около его концов  $\mathcal{O}_{\pm}^+$  и  $\mathcal{O}_{\pm}^-$ . Согласно предназначению функция Грина  $\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{y_2^2 + r^2}}$  для задачи Неймана в полупространстве с особенностью на границе поведение эталонного решения  $u$  задачи (45) около отрезка описывается интегралом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dt}{\sqrt{(y_2 - t)^2 + r^2}} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\pm} \ln \left( \ell \pm y_2 + \sqrt{(\ell \pm y_2)^2 + r^2} \right), \tag{64}$$

где  $r = r_{\pm}$  – расстояние до прямой, продолжающей отрезок  $\gamma_{\pm}^0$ . В силу формулы (64) представление (46) решения задачи (45) включает функцию

$$u^*(y_2) = (2\pi)^{-1} \ln(\ell^2 - y_2^2) + \hat{u}^*(y_2) \tag{65}$$

с логарифмическими особенностями в точках  $y_2 = \pm \ell$  и регулярным остатком  $\hat{u}^* \in H^2(-\ell, \ell)$ . Такая – слабая – сингулярность не оказывает влияния на разрешимость трехмерных задач (38), (39), (41) и (45), однако ее появление в краевом условии лишает задачу (38), (48) привычной постановки в пространствах Соболева.

Обобщенная формулировка задачи (12), (13), (28) состоит в отыскании функции  $v$ , для которой разность  $v - g$  попадает в пространство  $H_0^1(\theta; \gamma_{\pm}^0)$ , и выполнено интегральное тождество [45]

$$\int_{\theta} \nabla_y v(x) \overline{\nabla_y \psi(x)} dx = \omega^2 \int_{\theta} v(x) \overline{\psi(x)} dx \tag{66}$$

с пробными функциями  $\psi \in H_0^1(\theta; \gamma_{\pm}^0)$ . Здесь  $H_0^1(\theta; \gamma_{\pm}^0)$  – подпространство функций из класса Соболева  $H^1(\theta)$ , подчиненных условиям Дирихле (14), а  $g$  – продолжение функций  $g_{\pm}$  с отрезков  $\gamma_{\pm}^0$  на прямоугольник  $\theta$  в классе  $H^1(\theta)$ . К сожалению, для сингулярных функций (65) нужного продолжения не существует, однако на помощь приходит теория Кондратьева [46] (см. также [2], [47] и др.), которая передает все основные свойства оператора задачи в обычном пространстве Соболева  $H^1(\theta)$  оператору той же задачи в весовом пространстве  $V_{\mu}^1(\theta)$  с нормой

$$\|v; V_{\mu}^1(\theta)\| = \left( \|s^{\mu} \nabla_y v; L^2(\theta)\|^2 + \|s^{\mu-1} v; L^2(\theta)\|^2 \right)^{1/2}$$

для весовых показателей  $\mu \in (-1, 1)$ ; здесь  $s(y)$  – расстояние от точки  $y \in \theta$  до вершин прямоугольника  $\theta$ . Нетрудно убедиться в том, что правые части (48) с составляющей (65) допускают продолжение в классе  $V_{\mu}^1(\theta)$  с любым показателем  $\mu > 0$ . Таким образом, задачу (12), (14), (48) приходится решать в весовом пространстве с положительным показателем  $\mu$  – правильная пере-

формулировка интегрального тождества (66) включает пробные функции  $\psi \in V_{-1}^1(\theta)$ , для которых выполнены условия Дирихле (14) и все интегралы оказываются сходящимися. Подчеркнем, что для собственной функции задачи (12)–(14) благодаря ее обращению в нуль в вершинах прямоугольника справедливо включение  $v \in V_{\varphi}^1(\theta)$  для всех показателей  $\varphi > -1$ , что и обеспечивает разрешимость нужных задач в прямоугольнике  $\theta$  и сходимость всех возникших ранее интегралов.

Указанные слабые сингулярности усугубляются при дифференцировании, т.е. на следующих шагах итерационного процесса, и, как следствие, вблизи коротких сторон прямоугольников  $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ , т.е. ребер параллелепипеда  $\Theta^{\varepsilon}$ , реализуется явление трехмерного пограничного слоя. Оно описывается при помощи задачи Неймана для уравнения Лапласа в области (фиг. 2б), являющейся объединением полупространства  $\mathbb{R}_-^3$  и четвертушки слоя  $\mathbb{K} \times (-1/2, 1/2)$ , где  $\mathbb{K}$  – квадрант плоскости (первый или четвертый), – как обычно, такая область получается в результате растяжения координат в  $\varepsilon^{-1}$  раз и формального перехода к  $\varepsilon = 0$ . Исследование разрешимости названной задачи и асимптотики ее решений на бесконечности не проводилось (ср. близкую по тематике работу [48]) и поэтому построение младших асимптотических членов в разложении решения (8) задачи (4), (5) встречает серьезные затруднения и остается важным открытым вопросом.

Вместе с тем обоснование главных членов асимптотик (23), (27) и (26) не требует информации о младших членах. В некритическом случае оно достаточно просто, так как функция  $u_{as}^{\varepsilon}$ , заданная формулами (24) в рукавах  $\Pi_{\pm}^0$  и (30) на перемычке  $\Theta^{\varepsilon}$ , была сделана непрерывной и удовлетворяющей задаче (4), (5) всюду, кроме прямоугольников  $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ , на которых ее производные по переменной  $x_3$  имеют ограниченные скачки  $J_{\pm}^{\varepsilon}$ . В результате разность  ${}^0u^{\varepsilon} = u^{\varepsilon} - u_{as}^{\varepsilon} \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon})$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\left(\nabla_x {}^0u^{\varepsilon}, \nabla_x \varphi^{\varepsilon}\right)_{\Omega^{\varepsilon}} - \omega^2 \left({}^0u^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}\right)_{\Omega^{\varepsilon}} = \mathcal{F}^{\varepsilon}(\varphi^{\varepsilon}) \quad \forall \varphi^{\varepsilon} \in W_{\beta, \tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^{\varepsilon}) \tag{67}$$

с непрерывным (анти)линейным функционалом  $\mathcal{F}^{\varepsilon}$  в правой части,

$$\mathcal{F}^{\varepsilon}(\varphi^{\varepsilon}) = \sum_{\pm} \int_{\gamma_{\pm}^{\varepsilon}} \overline{\varphi^{\varepsilon}(x', \pm L)} J_{\pm}^{\varepsilon}(x') dx'. \tag{68}$$

При этом  $\beta \in (0, \sqrt{\omega_1(\omega)^2 - \omega^2})$  и  $\tau \in (-1, 0)$  – весовые показатели, а  $W_{\beta, \tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$  – пополнение линейного множества  $C_c^{\infty}(\bar{\Omega}_{\varepsilon})$  (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по весовой норме

$$\|\varphi^{\varepsilon}; W_{\beta, \tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})\| = \left( \int_{\Omega^{\varepsilon}} e^{2\beta|x_1|} \left( s_{1, \varepsilon}^{\tau}(x) |\nabla_x \varphi^{\varepsilon}(x)|^2 + s_{0, \varepsilon}^{\tau}(x) |\varphi^{\varepsilon}(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2},$$

а весовые множители  $s_{j, \varepsilon}^{\tau}$  заданы формулами

$$s_{1, \varepsilon}^{\tau}(x) = \begin{cases} (\varepsilon + \min\{1, r_{\pm}\})^{2\tau}, & x \in \Pi_{\pm}^{\varepsilon}, \\ \varepsilon^{2\tau}, & x \in \Theta^{\varepsilon}, \end{cases} \quad s_{0, \varepsilon}^{\tau}(x) = \begin{cases} (\varepsilon + \min\{1, r_{\pm}\})^{2\tau-2}, & x \in \Pi_{\pm}^{\varepsilon}, \\ \varepsilon^{2\tau}(\varepsilon + L^{\varepsilon} - |y_1|)^{-2}, & x \in \Theta^{\varepsilon}, \end{cases}$$

и согласованы по порядку при подходе из перемычки и из рукавов к зоне их соединения.

Функции из пространства  $W_{\beta, \tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$  исчезают на бесконечности с экспоненциальной скоростью, и поэтому решение задачи (67) ищется в классе  $W_{-\beta, -\tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})$  функций с некоторым экспоненциальным ростом на бесконечности. Вместе с тем носитель функционала (68) компактен, а значит, этот функционал попадает в сопряженное пространство  $W_{\beta, \tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^{\varepsilon})^*$ . Таким образом, общие результаты монографии [2; гл. 5] (см. также статьи [49], [50] и др.) показывают, что решение, подчиненное условиям излучения

$${}^0u^{\varepsilon}(x) = \chi_{-}(x_1) \mathcal{R}^{\varepsilon} e^{-i\omega(x_1 + L^{\varepsilon})} + \chi_{+}(x_1) \mathcal{T}^{\varepsilon} e^{+i\omega(x_1 - L^{\varepsilon})} + \tilde{u}^{\varepsilon}(x),$$

обладает экспоненциально затухающим ( $\beta > 0$ ) остатком, становится единственным (захваченных волн нет) и допускает оценку

$$\left\| \widetilde{u}^\varepsilon; W_{\beta, -\tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \right\| + |\mathcal{R}^\varepsilon| + |\mathcal{T}^\varepsilon| \leq c_\varepsilon \left\| \mathcal{F}^\varepsilon; W_{\beta, \tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \right\|. \tag{69}$$

Множитель  $c_\varepsilon$ , вообще говоря, зависит от малого параметра  $\varepsilon$ , но развитая в работе [40] техника весовых пространств с отделенной асимптотикой (см. также [43], [2]) доказывает, что в некритическом случае (22) этот множитель равномерно ограничен относительно параметра  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  с некоторым  $\varepsilon_0 > 0$ . Наконец, очевидная оценка функционала (68)

$$|\mathcal{F}^\varepsilon(V^\varepsilon)| \leq c \sum_{\pm} |\gamma_{\pm}^\varepsilon|^{1/2} \left\| V^\varepsilon; L^2(\gamma_{\pm}^\varepsilon) \right\| \leq c\varepsilon^{1/2} \left\| V^\varepsilon; L^2(\gamma_-^\varepsilon \cup \gamma_+^\varepsilon) \right\|$$

вместе с обычным следовым неравенством (см., например, [45])

$$\left\| V^\varepsilon; L^2(\gamma_-^\varepsilon \cup \gamma_+^\varepsilon) \right\| \leq c\varepsilon^{1/2} \left( \left\| \nabla_x V^\varepsilon; L^2(\Theta^\varepsilon) \right\| + \left\| (\varepsilon + L^\varepsilon - |y_1|)^{-1} V^\varepsilon; L^2(\Theta^\varepsilon) \right\| \right)$$

предоставляет мажоранту  $c\varepsilon^{\tau+1/2}$  для правой части (69). Поскольку левая часть (69) содержит модули коэффициентов рассеяния  $\mathcal{R}^\varepsilon = R^\varepsilon - R^0$  и  $\mathcal{T}^\varepsilon = T^\varepsilon - T^0$ , получаем оценку асимптотических остатков в представлениях (11) коэффициентов отражения и прохождения волны (8):

$$|\widetilde{R}^\varepsilon| + |\widetilde{T}^\varepsilon| \leq c\varepsilon^\delta \quad \forall \delta < 1. \tag{70}$$

В критическом случае (43) требуется модификация рассуждений и выкладок из [40], в частности, областью определения оператора задачи (67) объявляется пространство функций, представимых в виде

$$u^\varepsilon(x) = u_0^\varepsilon(x) + \varepsilon^{-1} a^\varepsilon \mathcal{X}^\varepsilon(x_1) \sin(\omega(x_1 + L)) \tag{71}$$

и имеющих норму  $\inf \left( \left\| u_0^\varepsilon; W_{\beta, -\tau}^{1, \varepsilon}(\Omega^\varepsilon) \right\| + |a^\varepsilon| \right)$ , причем инфимум вычисляется по всем представлениям (71), а  $\mathcal{X}^\varepsilon$  – гладкая срезающая функция,

$$\mathcal{X}^\varepsilon(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad |x_1| > L^\varepsilon + 2\varepsilon, \quad \mathcal{X}^\varepsilon(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad |x_1| < L^\varepsilon + \varepsilon. \tag{72}$$

Появление в (71) дополнительного слагаемого с собственной функцией задачи (12)–(14), локализованного на перемычке  $\Theta^\varepsilon$  благодаря множителю (72) и гладко продолженного на рукава  $\Pi_{\pm}^\varepsilon$ , согласуется с анзацем (43). Поэтому более сложная конструкция приближенного решения задачи (4), (5) приводит к прежней оценке (70) остатков в асимптотических формулах (10) и (63) для коэффициентов рассеяния из (8), а значит, действительно наблюдается почти полное прохождение поршневых мод (6). Именно упомянутые формулы представляют собой основной асимптотический результат работы.

### 6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, ДОСТУПНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

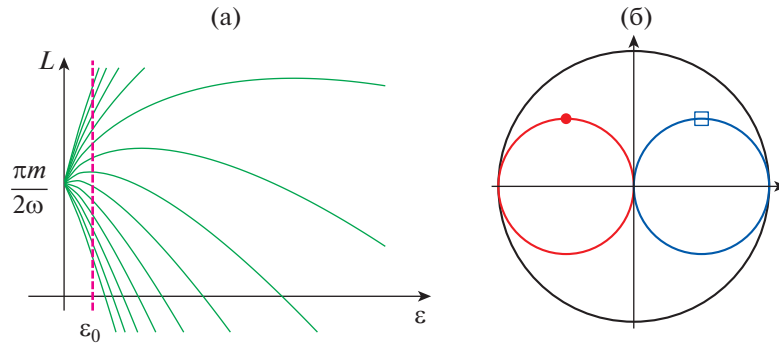
1°. Можно изменить постановку вопроса: зафиксировать длину  $L > 0$  перемычки и отыскивать частоты  $\omega_m^\varepsilon \in (0, \omega_1(\mathbb{D}))$ , при которых происходит почти полное прохождение волны. Эти частоты находятся по формуле

$$\omega_m^\varepsilon = \frac{\pi m}{2L} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{L} \left( \frac{1}{\pi} |\ln \varepsilon| + C_{\Xi} + \bar{u}^\bullet + O(\varepsilon^{3/2}) \right) \right), \tag{73}$$

где  $m$  – натуральное число на интервале  $(0, 2L)$ . Если  $L < (2\omega_1(\mathbb{D}))^{-1}\pi$ , то критических частот (73) не существует.

2°. Пусть точная настройка (61) приращения длины перемычки (7) нарушена, т.е.

$$L' = t - \pi^{-1} |\ln \varepsilon| - C_{\Xi} - \bar{u}^\bullet \quad \text{при} \quad t \neq 0.$$



**Фиг. 3.** Графики длин канала при разных значениях параметра  $t \in \mathbb{R}$  (а). Окружности (помечены символами  $\bullet$  и  $\square$ ), заметаемые главными членами коэффициентов рассеяния  $T^0(t)$  и  $R^0(t)$  при нечетном  $m \in \mathbb{N}$  (б).

Графики функций  $\varepsilon \mapsto (2\omega)^{-1}\pi m + \varepsilon L'$  приведены на фиг. 3а. Решение алгебраической системы (57), (60) принимает вид

$$R^0(t) = 1 - \frac{b}{b - it}, \quad T^0(t) = \frac{(-1)^m b}{b - it}, \quad a(t) = -\frac{1}{t + ib}, \quad \text{где } b = \frac{2\ell}{|\omega|}. \quad (74)$$

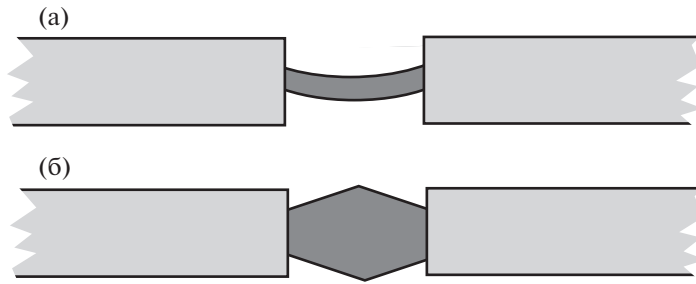
Кривые  $\{R^0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  и  $\{T^0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ , изображенные на фиг. 3б, показывают, что главные асимптотические члены коэффициентов отражения  $R^\varepsilon$  и прохождения  $T^\varepsilon$  при приращении  $\varepsilon \ell$  длины  $L^\varepsilon$  канала двигаются вдоль окружностей с радиусом  $\frac{1}{2}$  и соответственно с центрами в точках  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2}(-1)^m$  на вещественной оси. В частности, формулы (74) поясняют, как при изменении длины перемычки (в быстром масштабе  $\varepsilon^{-1}(1 + |\ln \varepsilon|)^{-1}$ ) почти полное прохождение поршневой моды трансформируется в ее почти полное отражение:

$$R^0(0) = 0, \quad T^0(0) = (-1)^m, \quad \text{но } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} R^0(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} T^0(t) = 0.$$

Подчеркнем, что в случае  $L' = 0$ , т.е. при невозмущенной критической длине  $L^\varepsilon = \pi m / 2\omega$  соотношения (11) приобретают остатки  $\tilde{R}^\varepsilon, \tilde{T}^\varepsilon = O((1 + |\ln \varepsilon|)^{-1})$ , т.е. эффект почти полного отражения сохраняется, правда, с большими погрешностями.

3°. Разработанные процедуры нуждаются в переработке при рассмотрении частот  $\omega$  выше первой положительной точки отсечки  $\omega_1(\omega)$  непрерывного спектра, в частности, потому, что помимо поршневых мод возникают другие уходящие волны в каждом из рукавов (1), и приходится искать асимптотики нескольких коэффициентов рассеяния, главным членом которых требуется придать вполне определенные значения (возможность сделать это — сложная алгебраическая задача). Остается совершенно открытым вопрос о возможности обеспечить почти полное прохождение двух разных волн, приходящих с бесконечности в рукаве  $\Pi_-^\varepsilon$ . При этом обращение в нуль всех коэффициентов отражения вовсе не означает почти полное прохождение какой-либо волны из-за перераспределения энергии между несколькими волнами в “принимающем” рукаве  $\Pi_+^\varepsilon$ .

4°. Благодаря симметрии волновода  $\Omega^\varepsilon$  относительно плоскости  $\{x : x_1 = 0\}$  можно не только сделать малым коэффициент отражения  $R^\varepsilon$ , но и обратить его в нуль, т.е. добиться полного прохождения поршневой моды через тонкий канал  $\Theta^\varepsilon$ . Для этой цели пригодна схема, разработанная в [51], [23] и предлагающая представить поле (8) как сумму  $u_D^\varepsilon + u_N^\varepsilon$  решений задач в половине  $\Omega_+^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : x_1 > 0\}$  волновода (3) с искусственными условиями Дирихле и Неймана на малой усекающей поверхности  $\{x \in \Theta^\varepsilon : x_1 = 0\}$ . Функция  $u_D^\varepsilon$  гладко зависит от параметра  $L$ , так как при



Фиг. 4. Перемычка переменной толщины – вид сбоку (а). Перемычка с изломанным сечением – вид сверху (б).

нечетном  $m$  число  $(2L)^{-2} \pi^2 m^2$  не является собственным для аналогичной (12)–(14) предельной двумерной задачи на половине  $\theta_+ = \{y \in \theta : y_1 > 0\}$  прямоугольника  $\theta$ . В то же время у решения  $u_N^\varepsilon$  сохраняется быстрая осцилляция коэффициента отражения, а значит, повторение аргументов из работ [51], [23] позволяет убедиться в том, что кривая  $L \mapsto R^\varepsilon$  проходит через нуль при вариации полудлины  $L$  в малой окрестности ее критического значения  $L^\varepsilon$ .

5°. Представленный в статье асимптотический анализ годится и в случае тонкой перемычки переменной толщины (фиг. 4а) или искривленного продольного сечения (фиг. 4б)

$$\Theta^\varepsilon = \{x : y \in \theta, -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\}.$$

Здесь  $H_\pm \in C^2(\bar{\theta})$  – профильные функции,  $H = H_- + H_+ > 0$  в замыкании  $\bar{\theta}$  области  $\theta \in \mathbb{R}^2$ , расположенной в полосе  $\{y : |y_1| < L\}$  и ограниченной кусочно-гладким контуром  $\partial\theta$ , который состоит из отрезков  $\gamma_\pm^0 \{y : y_1 = \pm L, |y_2 - h_\pm| < \ell_\pm\}$  и замкнутых дуг, соединяющих пары точек  $(-L, h_- \pm \ell_-)$   $(+L, h_+ \pm \ell_+)$ . Разумеется, погружения названных отрезков на плоскости  $\{x : x_3 = \pm L\}$  должны попасть вовнутрь торцов  $\mathfrak{W}_\pm^0$  полуцилиндров  $\Pi_\pm^0$ .

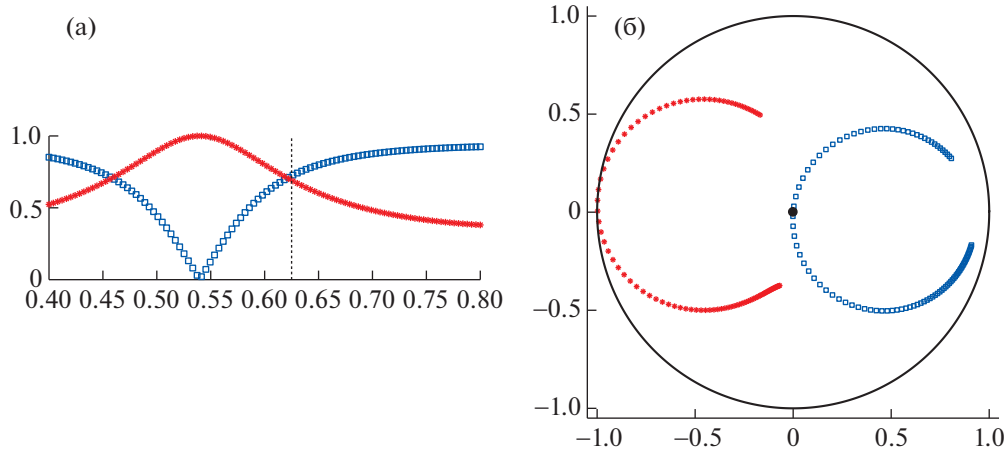
Если спектральный параметр  $\omega^2$  не является собственным значением предельной задачи (ее вывод несложен – см., например, [43; гл. 11])

$$\begin{aligned} -\nabla_y(H(y)\nabla_y v(y)) &= \omega^2 H(y)v(y), & y \in \theta, \\ v(y) &= 0, & y \in \gamma_\pm^0, \\ \partial_\nu v(y) &= 0, & y \in \partial\theta \setminus (\gamma_-^0 \cup \gamma_+^0), \end{aligned}$$

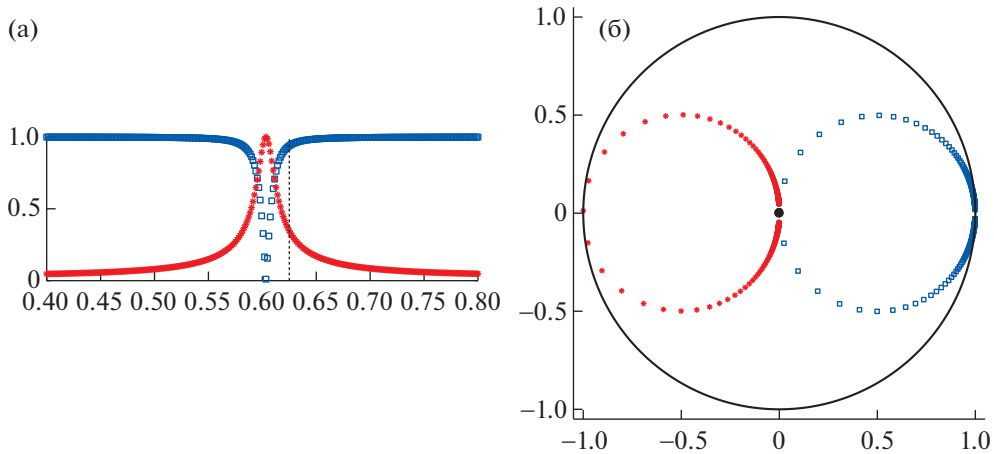
то построение асимптотики решения (8) задачи (4), (5) в целом следует схеме, изложенной в данной статье. Если же  $\omega^2$  – простое собственное число (критический случай), то асимптотические анзацы (23), (49) и (31) сохраняются, однако процедура “точной настройки”, обеспечивающая почти полное прохождение волны  $w^+$ , усложняется существенно: в частности, около торцов полуцилиндров  $\Pi_-^\varepsilon$  и  $\Pi_+^\varepsilon$  могут потребоваться разные приращения длины перемычки  $\Theta^\varepsilon$ .

6°. Если  $\omega^2 = \mu_{jk}$  и  $\mu_{jk}$  – собственное значение задачи (12)–(14) с индексом  $j \geq 1$ , но выполнено требование (22), то задача (12), (13), (28) с данными (29) разрешима, а значит, эффект почти полного прохождения отсутствует. Вместе с тем он может проявиться выше первой частоты отсечки, т.е. при  $\omega > \omega_1(\mathfrak{W})$  для распространяющихся волн, отличных от поршневой. Такой феномен нуждается в отдельном изучении (ср. разд. 3°).

7°. На протяжении всей статьи считалось, что грани  $\gamma_\pm^\varepsilon$  параллелепипеда (2) лежали строго внутри торцов полуцилиндров (1) – это сделано для унификации изложения. Вместе с тем при квадратном сечении  $\mathfrak{W} = \{x' : |x_2| < \ell, |x_3| < 1/2\}$  и канале (2) задача (4), (5) допускает разделение переменных и после исключения переменной  $x_2$  сводится к задаче Неймана в двумерной области  $\{x \in \Omega^0 : x_2 = 0\}$ , содержащейся в единичной полосе (см. формулы (1)–(3) и фиг. 1б), в которой



**Фиг. 5.** Графики (а) модулей коэффициентов рассеяния  $L \mapsto |R(L)|$  ( $\square$ ) и  $L \mapsto |T(L)|$  ( $*$ ) при  $\varepsilon = 0.2$ , причем вертикальная штрихпунктирная линия относится к критическому значению  $L = 0.603 \approx L_*$ . Сами коэффициенты внутри единичного круга на комплексной плоскости (б).



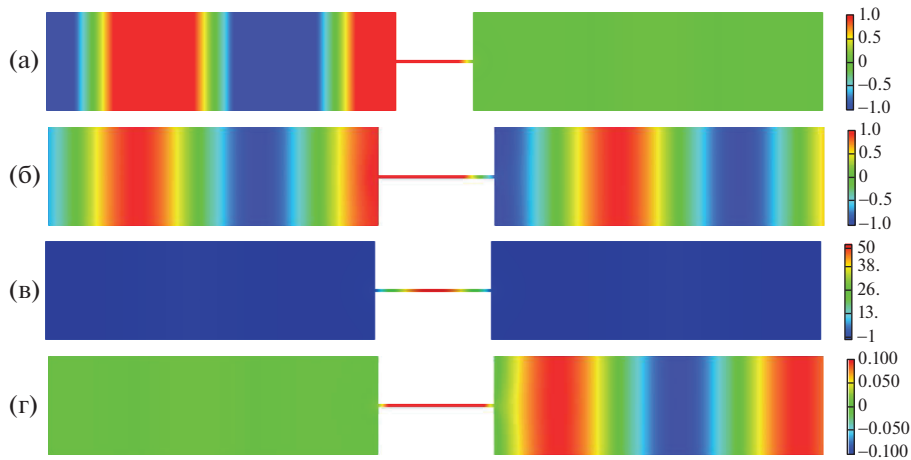
**Фиг. 6.** То же, что на фиг. 5, но при  $\varepsilon = 0.02$ .

$\omega_1(\infty) = \pi$ . Для вычислений в усеченном волноводе применен P2-метод конечных элементов и на усекающих отрезках назначены прозрачные искусственные краевые условия с оператором Стеклова–Пуанкаре (Dirichlet-to-Neumann mapping), удерживая пятнадцать членов в разложении Фурье. При  $\omega = 0.8\pi < \omega_1(\infty)$  первая критическая полудлина равна  $L_c = 0.625$  (ср. (17) и (43)). Коэффициенты рассеяния вычисляем по найденному решению при помощи соотношений

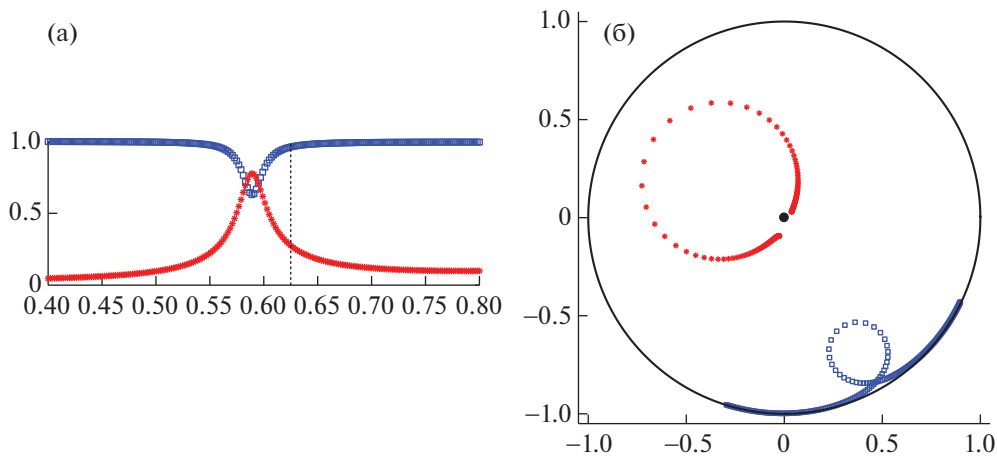
$$R^\varepsilon = \int_{-1/2}^{1/2} (u^\varepsilon(-H, x_3) - w^+(-H + L^\varepsilon)) w^+(-H + L^\varepsilon) dx_3, \quad T^\varepsilon = \int_{-1/2}^{1/2} u^\varepsilon(+H, x_3) w^- (+H - L^\varepsilon) dx_3,$$

где  $H > L$ . На фиг. 5 и 6 представлены коэффициенты рассеяния для полудлин  $L$  из интервала  $(0.4, 0.8) \ni L_c$ , причем  $\varepsilon = 0.2$  на фиг. 5 и  $\varepsilon = 0.02$  на фиг. 6. Как предсказал асимптотический анализ, для большинства рассмотренных значений  $L$  коэффициент прохождения  $T(L)$  близок к нулю, однако для некоторого  $L_*$  наблюдается эффект почти полного прохождения поршневой моды, причем  $L_* < L_c$  и можно уточнить значение  $L_*$  так, чтобы обеспечить условие  $R(L_*) = 0$  полного прохождения поршневой моды. Более того, изменчивость коэффициентов рассеяния увеличивается при уменьшении  $\varepsilon$ , а также  $L^\varepsilon \rightarrow L_c$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .





**Фиг. 7.** (а) – функция  $\text{Re } u^\epsilon$  при  $L = 0.4$ , (б), (в) – соответственно  $\text{Re } u^\epsilon$  и  $\text{Im } u^\epsilon$  при  $L = 0.603 \approx L_*$ , (г) – рассеянное поле  $\text{Re}(u^\epsilon - w^+)$  при  $L = 0.603 \approx L_*$ . Всюду  $\epsilon = 0.02$ .



**Фиг. 8.** (а) – графики модулей коэффициентов рассеяния  $L \mapsto |R(L)|$  ( $\square$ ) и  $L \mapsto |T(L)|$  ( $*$ ), причем вертикальная штрихпунктирная линия относится к критическому значению  $L = 0.603 \approx L_*$ , (б) – сами коэффициенты внутри единичного круга на комплексной плоскости.



**Фиг. 9.** Поле  $\text{Re } u^\epsilon$  при  $L = 0.4$  и  $\epsilon = 0.05$  для асимметричного волновода.

На фиг. 7 представлены конкретные вычисления поля  $u^\epsilon$  при  $\epsilon = 0.02$  в случае общего положения, для которого коэффициент прохождения близок к нулю, и при  $L \approx L_*$ . В последнем случае действительно рассеянное поле экспоненциально затухает при  $x_1 \rightarrow -\infty$ , причем в согласии с формулами (49), (50) и (63) внутри канала  $\Theta^\epsilon$  величина  $\text{Re } u^\epsilon$  приобрела порядок  $\epsilon^{-1} = P$ .

Фиг. 8 включает те же графики коэффициентов рассеяния при  $L \in (0.4, 0.8)$ , что и на фиг. 5, однако для несимметричного волновода, схематично изображенного на фиг. 9 и не обладающего

симметрией относительно оси ординат. Последнее обстоятельство не позволяет применить изложенный ранее асимптотический анализ. На фиг. 8 видно, что модуль коэффициента отражения существенно отличен от нуля, т.е. эффект почти полного прохождения, вообще говоря, отсутствует при потере волноводом симметрии. Вместе с тем результат вычислений на фиг. 9 подсказывает, что, возможно, симметрия все-таки не нужна для достижения полного прохождения волны, однако сделать этот вывод на основе асимптотического анализа не удастся.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mumtaz P., Lu C.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
2. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
3. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966.
4. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // *SIAM J. Appl. Math.* 2009. V. 70. P. 1201–1218.
5. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // *Матем. сборник.* 2015. Т. 206. № 6. С. 15–48.
6. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // *ZAMM.* 2016. V. 96. № 10. P. 1245–1260.
7. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // *Wave Motion.* 2017. V. 68. P. 218–241.
8. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Дифракция на решетке из поглощающих экранов разной высоты. Новые уравнения // *Зап. научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН.* 2014. Т. 422. С. 62–89.
9. *Назаров С.А.* О прохождении волн через малое отверстие в перегородке акустического волновода // *Сибирск. матем. журнал.* 2018. Т. 59. № 1. С. 110–129.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // *Comm. Math. Phys.* 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
11. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // *Proc. London Math. Soc.* 2008. V. 97. № . P. 718–752.
12. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // *J. of Math. Anal. and Appl.* 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
13. *Fano U.* Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts // *Physical Review.* 1961. V. 124. № 6. P. 1866–1878.
14. *Duan Y., Koch W., Linton C.M., McIver M.* Complex resonances and trapped modes in ducted domains // *J. Fluid. Mech.* 2007. V. 571. P. 119–147.
15. *Cattapan G., Lotti P.* Fano resonances in stubbed quantum waveguides with impurities // *Eur. Phys. J. B.* 2007. V. 60. № 1. P. 51–60.
16. *El Boudouti E.H., Mrabti T., Al-Wahsh H., Djafari-Rouhani B., Akjouj A., Dobrzynski L.* Transmission gaps and Fano resonances in an acoustic waveguide: analytical model // *J. Phys. Condens. Matter.* 2008. V. 20. № 25. 255212.
17. *Hohage T., Nannen L.* Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2009. V. 47. № 2. P. 972–996.
18. *Hein S., Koch W., Nannen L.* Trapped modes and Fano resonances in two-dimensional acoustical duct-cavity systems // *J. Fluid. Mech.* 2012. V. 692. P. 257–287.
19. *Shipman S.P., Venakides S.* Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. № 2. 026611.
20. *Shipman S.P., Tu H.* Total resonant transmission and reflection by periodic structures // *SIAM J. Appl. Math.* 2012. V. 72. № 1. P. 216–239.
21. *Shipman S.P., Welters A.T.* Resonant electromagnetic scattering in anisotropic layered media // *J. Math. Phys.* 2013. V. 54. № 10. 103511.
22. *Abeynanda G.S., Shipman S.P.* Dynamic resonance in the high-Q and near-monochromatic regime // 2016. ММЕТ, IEEE, 10.1109, ММЕТ. 7544100.
23. *Chesnel L., Nazarov S.A.* Non reflection and perfect reflection via Fano resonance in waveguides // *Comm. Math. Sci.* 2018. V. 16. № 7. P. 1779–1800.
24. *Kriegsmann G.A.* Complete transmission through a two-dimensional diffraction grating // *SIAM J. Appl. Math.* 2004. V. 65. № 1. P. 24–42.
25. *Bonnetier É., Triki F.* Asymptotic of the Green function for the diffraction by a perfectly conducting plane perturbed by a sub-wavelength rectangular cavity // *Math. Method. Appl. Sci.* 2010. V. 33. № 6. P. 772–798.

26. *Lin J., Zhang H.* Scattering and field enhancement of a perfect conducting narrow slit // *SIAM J. Appl. Math.* 2017. V. 77. № 3. P. 951–976.
27. *Lin J., Zhang H.* Scattering by a periodic array of subwavelength slits I: field enhancement in the diffraction regime // *Multiscale Model. Sim.* 2018. V. 16. № 2. P. 922–953.
28. *Lin J., Shipman S., Zhang H.* A mathematical theory for Fano resonance in a periodic array of narrow slits // arXiv preprint arXiv:1904.11019, 2019.
29. *Beale J.T.* Scattering frequencies of resonators // *Comm. Pure Appl. Math.* 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
30. *Арсеньев А.А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1976. Т. 16. № 3. С. 718–724.
31. *Гадильшин Р.Р.* О собственных частотах тел с тонкими отрезками. I // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
32. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // *Asymptot. Anal.* 1994. V. 8. № 2. P. 105–143.
33. *Назаров С.А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // *Труды семинара им. И.Г. Петровского.* Вып. 18. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 3–78.
34. *Назаров С.А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // *Труды семинара им. И.Г. Петровского.* Вып. 18. М.: Изд-во МГУ, 1997. С. 155–195.
35. *Назаров С.А.* Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // *Труды семинара им. И.Г. Петровского.* Вып. 24. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 95–214.
36. *Гадильшин Р.Р.* О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой” // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2005. Т. 69. № 2. С. 45–110.
37. *Joly P., Tordeux S.* Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion // *SIAM Multiscale Model. Simul.* 2006. V. 5. № 1. P. 304–336.
38. *Бахарев Ф.Л., Назаров С.А.* Лакуны в спектре волновода, составленного из областей с различными предельными размерностями // *Сибирск. матем. журнал.* 2015. Т. 56. № 4. С. 732–751.
39. *Bonnet-Ben Dhia A.-S., Chesnel L., Nazarov S.A.* Perfect transmission invisibility for waveguides with sound hard walls // *J. Math. Pures Appl.* 2018. V. 111. P. 79–105.
40. *Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J.* Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // *Asymptotic Analysis.* 2020. V. 118. № 1. P. 81–122.
41. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
42. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
43. *Maz'ya W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenewskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
44. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
45. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
46. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Труды Московск. матем. общества.* 1963. Т. 16. С. 219–292.
47. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997.
48. *Назаров С.А.* Задача Неймана в угловых областях с периодическими и параболическими возмущениями границы // *Труды Московск. матем. общества.* 2007. Т. 69. С. 183–243.
49. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // *Теор. и матем. физ.* 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
50. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // *Функциональный анализ и его приложения.* 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
51. *Chesnel L., Nazarov S.A., Pagneux V.* Invisibility and perfect re ectivity in waveguides with finite length branches // *SIAM J. Appl. Math.* 2018. V. 78. № 4. P. 2176–2199.

## ВИХРЕВЫЕ ФАНТОМЫ В СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ О ПРОТЕКАНИИ КОЧИНА–ЮДОВИЧА<sup>1)</sup>

© 2021 г. О. В. Трошкин

117218 Москва, Нахимовский пр-т, 36, кор. 1, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

e-mail: troshkin1955@mail.ru

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.  
Переработанный вариант 04.06.2020 г.  
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Впервые увиденным в ярких вспышках света и обусловленным большим числом Рейнольдса спонтанным появлением нестационарных вихрей турбулентности, неизменно выравнивающих параболический профиль скорости в трубе, динамика сплошной среды отнюдь не исчерпывается. В окружающем пространстве наблюдаемы также и стационарные смерчи, и водовороты, приближаемые обычно аналитическими зависимостями, разложимыми в степенные ряды. Вопрос же о существовании, пусть сколь угодно гладкого, но не аналитического, а стало быть фантомного, т.е. классически уже не приближаемого полиномами с какой-либо заданной степенью точности, или, словом, точно не вычисляемого, но устанавливаемого со временем стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости в граничной задаче о протекании Кочина–Юдовича, как оказалось, тоже сводится к такого же рода вихрям, конкретно, к нахождению их бесконечно гладкого невычисляемого массового расхода как функции тока, разрешающей двумерную задачу Дирихле для отрицательного оператора Лапласа, с правой частью – бесконечно гладкой срезкой Соболева, известной еще в 30-х годах 20-го века, ставшей по ее окончанию сглаживателем Фридрихса. Эта задача кратко обсуждается ниже. Библ. 14. Фиг. 1.

**Ключевые слова:** стационарные гидродинамические уравнения Эйлера, задача о протекании Кочина–Юдовича, фантомные вихри неединственности.

DOI: 10.31857/S0044466921040128

### 1. ГЛАДКО ВМОРОЖЕННЫЕ ВИХРИ

Принимая во внимание срезку Соболева [1] и сглаживатель Фридрихса [2] и задавшись прямоугольником и достаточно малым расстоянием,

$$V : |x| < l, \quad 0 < y < h, \quad \varepsilon < \min(l, h/2) \quad \text{для} \quad l, h, \varepsilon = \text{const} > 0,$$

рассмотрим плоскопараллельное стационарное поле скоростей несжимаемой жидкости,

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega = -\Delta\psi = -\psi_{xx} - \psi_{yy},$$

из линий уровня  $\psi(x, y) = \text{const}$  массового расхода, или функции тока  $\psi$  Дезина [3],

$$\psi = Uh \exp \frac{\varepsilon^2}{r^2 - \varepsilon^2} \quad \text{или} \quad \psi = 0 \quad \text{для} \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \quad \text{или} \quad r \geq \varepsilon,$$

соответственно, образующей плоский вихрь, как бы замороженный в покоящуюся сплошную среду бесконечно гладкого линейного многообразия (см. [4])

$$C_0^\infty = \{ \psi \in C^\infty = C^\infty(\bar{V}) : \psi|_{\partial V} = 0 \}.$$

<sup>1)</sup>Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (фундаментальные научные исследования, ГП 14) по теме № 0065-2019-0005 “Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых и реагирующих средах с использованием многопроцессорных вычислительных систем” (№ АААА-А19-119011590092-6).

Другой пример замороженного вихря доставляет нетривиальное решение  $\psi = \psi(x, y) > 0$ ,  $(x, y) \in V$ , граничной задачи

$$-\Delta\psi = f(\psi) = 1 - e^{-1/\psi^2} \quad \text{в } V \quad \text{для } \psi \in C_0^\infty \quad \text{и } \psi \neq 0, \quad (1)$$

где строгий принцип максимума  $-\Delta\psi > 0$  при  $\psi \in C_0^\infty$  (см. [5]) влечет  $\psi > 0$  в  $V$ .

Разрешимость же задачи (1) гарантирует отрицательная производная

$$f'_\psi = \left(-e^{-1/\psi^2}\right)'_\psi = -2e^{-1/\psi^2}/\psi^3 < 0, \quad \psi \neq 0,$$

что для гильбертовых норм

$$\|\nabla\phi\| = \sqrt{\langle |\nabla\phi|^2 \rangle} \quad \text{и} \quad \|\phi\| = \sqrt{\langle \phi^2 \rangle} \quad \text{при} \quad \langle \phi \rangle = \int_V \phi dV \quad \text{и} \quad dV = dx dy,$$

предполагает как положительную определенность квадратичной формы

$$(E''\phi, \phi) = \|\nabla\phi\|^2 - \langle f'_\psi \phi^2 \rangle \geq \|\nabla\phi\|^2 \geq \lambda_{\min} \|\phi\|^2, \quad \lambda_{\min} = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2,$$

повторного дифференциала Фреше [6], так и, по известным конструкциям Соболева [7, § 16], наличие минимума  $\psi$  у функционала

$$E = E[\psi] = \frac{1}{2} \|\nabla\psi\|^2 - \int_0^\psi f(\tau) d\tau,$$

в его критической точке  $\psi$ , в замыкании

$$W^1 = \left\{ \psi : \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla\psi_n - \nabla\psi\| = 0, \psi_n \in C_0^\infty \right\}$$

пространства  $C_0^\infty$ , обобщенно разрешающей задачу (1),

$$(E', \phi) = \langle \nabla\psi \cdot \nabla\phi \rangle - \langle f(\psi)\phi \rangle = 0 \quad \text{для любой } \phi \in C_0^\infty \subset W^1$$

и обладающей к тому же требуемой гладкостью,  $\psi \in C_0^\infty$ , обеспечиваемой как необходимыми приграничными оценками [8], так и тождеством

$$\langle \nabla\psi \cdot \nabla\phi \rangle = -\langle \phi \Delta\psi \rangle \quad \text{при } \psi \in C_0^\infty.$$

## 2. ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ ВИХРИ ПРОСТОГО ПРОТЕКАНИЯ

В подвижной стационарной жидкой среде замороженные вихри превращаются в точно невычисляемые, но сколь угодно гладкие вихревые фантомы бесконечно гладкого неаналитического расхода  $\psi$  и завихренности  $\omega$ , по-прежнему связанные лапласианом и скалярным коммутатором в области течения,

$$-\Delta\psi = v_x - u_y = \omega \quad \text{и} \quad [\psi, \omega] = \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = u\omega_x + v\omega_y = 0 \quad \text{в } V, \quad (2)$$

что и обеспечивает выполнение соотношений (1) для  $\omega = f(\psi)$ .

Взяв теперь в роли такой области канал  $V$  с непроницаемыми стенками  $y = 0, h$  и постоянной завихренностью  $\omega$  на участке втекания  $x = -l$  границы  $\partial V$ , приходим к следующей граничной задаче Кочина–Юдовича [9], в ее стационарной постановке [10], [11] для (2),

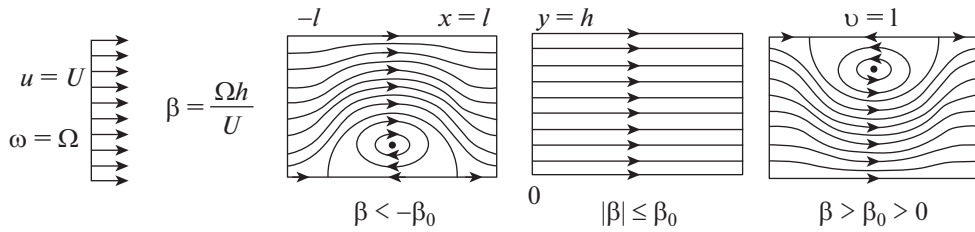
$$\omega|_{x=-l} = \Omega = \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad u|_{x=\mp l} = U = \text{const} > 0 \quad \text{и} \quad v|_{y=0,h} = 0. \quad (3)$$

Как известно [10], последняя обладает единственным аналитическим решением из

$$\omega = \Omega \quad \text{и} \quad \psi = \psi_* = Uy + \Omega h\Phi + \text{const} \quad \text{для} \quad -\Delta\Phi = 1/h \quad \text{в } V \quad \text{и} \quad \Phi|_{\partial V} = 0,$$

одиночный вихрь которой с расходом  $\Phi$  оказывается симметричным,

$$\Phi(-x, y) = \Phi(x, y) = \Phi(x, h - y), \quad |x| \leq l, \quad 0 \leq y \leq h,$$



Фиг. 1. Картины аналитического течения (2), (3).

и, сверх того, выпуклым отдельно по  $x$  и  $y$ ,

$$\Phi_{xx}, \Phi_{yy} < 0 \quad \text{в} \quad V \quad \text{при} \quad \Phi|_{\partial V} = 0.$$

Им же определяется число

$$\beta_0 = 1/\Phi_y(0,0) = -1/\Phi_y(0,h) > 0,$$

которое оказывается критическим значением безразмерного параметра

$$\beta = \frac{\Omega h}{U} \quad \text{для} \quad u(x,y) = u(-x,y) \leq u(0,y) = U + \Omega h \Phi_y(0,y),$$

или для

$$u(0,0) = U(1 + \beta/\beta_0) \quad \text{и} \quad u(0,h) = U(1 - \beta/\beta_0),$$

как на фиг. 1.

### 3. ФАНТОМЫ ПРОСТОГО ПРОТЕКАНИЯ

Как и в покоящейся среде разд. 1, в простом протекании из разд. 2 каждый фантом возникает при нарушении принципа максимума

$$0 = \min_{\partial V} \psi \leq \psi|_V \leq \max_{\partial V} \psi = Uh$$

для секундного расхода  $\psi$  перемешиваемой жидкости в замыкании  $\bar{V} = V + \partial V$  области течения  $V$ , т.е. при  $|\beta| > \beta_0$ , как выше на фиг. 1. Он как бы садится на вычисляемый аналитический вихрь, если регулируемый на участке втекания  $x = -l$  секундный расход  $\psi$  в области течения  $V$  превосходит измеряемый на границе:  $\max_V \psi > \max_{\partial V} \psi$  при  $\beta > \beta_0$  либо  $\min_V \psi < \min_{\partial V} \psi$  при  $\beta < -\beta_0$ .

Конкретно для задачи (2), (3) это происходит следующим образом.

Желаемое однозначное продолжение центрального условия

$$-\Delta\psi = \Omega \quad \text{с} \quad 0 \leq \psi(-l, 0 \leq y \leq h) \leq Uh \quad \text{на} \quad -\infty < \psi = \psi(x,y) < \infty \quad \text{в} \quad V$$

с участка втекания  $x = -l$  на всю область стационарного течения  $V$  действительно возможно только для вычисляемых расходов, т.е. для аналитических функций тока  $\psi = \psi_* \in C^*$  [10].

В классе же  $C^\# = C^\infty \setminus C^*$  такое продолжение уже неединственно [11]:

$$-\Delta\psi = \omega = \Omega + \varepsilon\Omega \begin{cases} e^{Uh/(\psi_* - \psi)}, & \psi > \psi_*, \\ 0, & 0 \leq \psi \leq \psi_*, \\ e^{Uh/\psi}, & \psi < 0, \end{cases} \quad \text{в} \quad V, \quad (\psi - \psi_*)|_{\partial V} = 0, \quad |\beta| > \beta_0, \quad (4)$$

и, как и в разд. 1, приводит к нетривиальному решению

$$\psi = \psi_* + Uh\varphi, \quad \varphi > 0 \quad \text{для} \quad -\Delta\varphi = \frac{-\Delta\psi + \Delta\psi_*}{Uh} = \varepsilon\beta e^{-1/\varphi} \quad \text{в} \quad V, \quad \varphi|_{\partial V} = 0,$$

задачи (2), (4), или решению  $\varphi \in C_0^\#$  задачи (4), поскольку производная

$$\left( \varepsilon \beta \exp\left(\frac{-1}{\varphi}\right) \right)_\varphi = \frac{\varepsilon \beta}{\varphi^2} \exp\left(\frac{-1}{\varphi}\right) > 0 \quad \text{при} \quad \beta > \beta_0 > 0,$$

и

$$\psi = \psi_* - Uh\varphi, \quad \varphi > 0 \quad \text{для} \quad -\Delta\varphi = \frac{\Delta\psi - \Delta\psi_*}{Uh} = -\varepsilon\beta e^{1/\varphi} \quad \text{в} \quad V, \quad \varphi|_{\partial V} = 0,$$

в альтернативном случае

$$\left( -\varepsilon\beta \exp\frac{1}{\varphi} \right)_\varphi = \frac{\varepsilon\beta}{\varphi^2} \exp\frac{1}{\varphi} < 0 \quad \text{при} \quad \beta < -\beta_0 < 0,$$

чтобы обеспечить положительную определенность квадратичной формы функционала задачи (4), как в разд. 1.

#### 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Включение ньютоновых вязкости и условий прилипания в простое протекание для плоского периодического канала [12], разумеется, избавит его от катастрофы неединственности стационарного течения, обусловленной рассмотренными выше фантомами, или пространственными вихревыми трубками, продолжаемыми, однако, вихревыми кольцами без закрутки [13], но с осевой симметрией [14].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Новый метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных нормального гиперболического типа // Матем. сб. 1936. Т. 1(43). № 1. С. 39–72. *S. Soboleff.* Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations lineaires hyperboliques normales. Rec. Math. Mat. Sbornik. N.S., 1936, V. 1(43), No. 1. P. 39–72.
2. *Friedrichs K.O.* The identity of weak and strong extensions of differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V. 55. P. 132–151.
3. *Дезин А.А.* Об одном классе векторных полей. Комплексный анализ и его приложения. М.: Наука, 1978. С. 203–208. *Dezin A.A.* A class of vector fields // in “Complex analysis and its applications”. Moscow: Nauka, 1978. P. 203–208.
4. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. 207 с. *Dezin A.A.* Partial differential equations: An introduction to a general theory of linear boundary value problems. Springer, 1987. 161 p.
5. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 287 с. *Landis E.M.* Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type. Translation of Mathematical Monographs. US—Rhode Island—Providence: American Mathematical Society. 1997. V. 171. 203 p.
6. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems.—Amsterdam—Oxford: North—Holland Publ. Company, 1976. 402 p. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
7. *Sobolev S.L.* Some applications of functional analysis in mathematical physics. Translation of Mathematical Monographs. US—Rhode Island—Providence: American Mathematical Society, 1963. V. 7. 239 p. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. Изд. 3-е. 337 с.
8. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. Iss. 4. P. 623–727. 1964. V. 17. Iss. 1. P. 35–92. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 208 с.
9. *Юдович В.И.* Двумерная нестационарная задача протекания идеальной жидкости через заданную область // Матем. сб. 1964. Т. 64. С. 562–588. *Yudovich V.I.* A two-dimensional problem of unsteady flow of an ideal incompressible fluid across a given domain // Amer. Math. Soc. Translations. 1966. V. 57. P. 277–304.

10. *Трошкин О.В.* О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. Вып. 4(262). С. 129–158. *Troshkin O.V.* Topological analysis of the structure of hydrodynamic flows // Russian Mathematical Surveys. 1988. V. 43. No. 4. P. 153–190.
11. *Трошкин О.В.* Двумерная задача о протекании для стационарных уравнений Эйлера // Матем. сб. 1989. Т. 180. В. 3. С. 354–374. *Troshkin O.V.* A two-dimensional flow problem for steady-state Euler equations // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1990. V. 66. No. 2. P. 363–382.
12. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. *Ladyzhenskaya O.A.* The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. 2014 Reprint of 1963 Edition—NY: Gordon and Breach, 1969. 224 p.
13. *Moffatt H.K.* Generalised vortex rings with and without swirl // Fluid Dynamic Research. 1988. V. 3. P. 22–30.
14. *Troshkin O.V.* On Smooth Vortex Catastrophe of Uniqueness for Stationary Flows of an Ideal Fluid // Comput. Math. and Math. Phys. 2019. V. 59. No. 10. P. 1742–1752. *Трошкин О.В.* О гладкой вихревой катастрофе единственности стационарных течений идеальной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 1803–1814.