СОДЕРЖАНИЕ

Том 61, номер 11, 2021 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Сравнение диссипативно-дисперсионных свойств компактных разностных схем
для численного решения уравнения адвекции

Е. Н. Аристова, Г. О. Астафуров 1747

О точности бикомпактных схем в задаче о распаде вихря Тейлора—Грина

М. Д. Брагин, Б. В. Рогов 1759

О множестве матриц с кквадратом $J_n(1)$

Х. Д. Икрамов 1779

Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова:
тенденции XXI века

В. П. Ильин 1786

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Метод проекции градиента с шагом Армихо на многообразиях

М. В. Балашов, Р. А. Камалов 1814

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Численное решение интегроалгебраических уравнений
со слабой граничной особенностью k-шаговыми методами

М. Н. Ботороева, О. С. Будникова, М. В. Булатов, С. С. Орлов 1825

Нестационарная задача теплопроводности для плоскости с трещиной
на стыке двух неоднородных материалов

А. В. Глушко, Е. А. Логинова 1839

Существование и устойчивость решения системы двух нелинейных уравнений диффузии
в среде с разрывными характеристиками

Н. Т. Левашова, Б. В. Тищенко 1850

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. II

В. И. Власов, С. Л. Скороходов 1873

Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями,
имеющими стационарные точки

И. В. Денисов 1894

Постановка и метод решения задачи бимформинга для локализации
акустического источника на основе данных вычислительного эксперимента

Т. К. Козубская, Г. М. Плаксин, И. Л. Софронов 1904

Нелинейные уравнения теории ионно-звуковых волн в плазме

М. О. Корпусов 1927

Гидродинамические течения в нагреваемых трубах
с расчетом погранслоя по БГК-модели

Е. А. Забродина, О. В. Николаева, Н. Н. Фимин, В. М. Чечёткин 1937

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1747–1758

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

СРАВНЕНИЕ ДИССИПАТИВНО-ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ КОМПАКТНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ

Е. Н. Аристова[1,*], Г. О. Астафуров[1,]**

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: aristovaen@mail.ru

**e-mail: astafurov.gleb@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.11.2020 г.
Переработанный вариант 14.02.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

В работе исследованы диссипативно-дисперсионные свойства эрмитовой характеристической схемы для решения одномерного уравнения адвекции. Метод основан на эрмитовой интерполяции, использующей не только значения функции в узлах, но также и значения пространственной производной функции в узлах. Используется вычисление производных на новом шаге по времени, обеспечивающее правильное перераспределение входящих потоков по выходным граням. Отметим, что схема строится в рамках одной ячейки, что позволяет ее отнести к классу бикомпактных схем. Восстановление производных на новом слое по времени производится с использованием интегрального среднего и формулы Эйлера–Маклорена. Проведен сравнительный анализ данной схемы с современными консервативными схемами, такими как бикомпактная схема Б.В. Рогова и схема В.М. Головизнина и Б.Н. Четверушкина. Показано, что эрмитова характеристическая схема обладает малой диссипацией и экстрамалой дисперсией для схем своего класса. Дисперсия эрмитовой характеристической схемы меньше дисперсии полудискретной бикомпактной схемы Рогова. В свою очередь, последняя схема при реализации метода трапеций аппроксимации по времени обладает нулевой диссипацией. Близкие идеи использования характеристических схем с дополнительным алгоритмом, обеспечивающим консервативность, использованы в наиболее простой в реализации схеме Головизнина–Четверушкина. Для сравнения выбраны схемы с компактным шаблоном и близкими чертами, используемыми для замыкания разностной схемы. Библ. 24. Фиг. 8.

Ключевые слова: уравнение адвекции, уравнение переноса, бикомпактные схемы, характеристические схемы, дисперсия разностной схемы, диссипация разностной схемы, модификация CIP.

DOI: 10.31857/S0044466921110028

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует огромное число схем для численного решения уравнения переноса. Приложение этих схем к реальным задачам делится на два больших класса: решение нелинейных систем уравнений типа уравнений газовой динамики или решение уравнения переноса излучения и/или нейтральных частиц. Специфика каждого класса задач предъявляет свои требования к качеству используемых разностных схем. Для решения задач высокотемпературной радиационной газовой динамики требуются схемы, позволяющие строить аппроксимацию уравнения переноса излучения в пределах одной ячейки. Это значительно упрощает ситуацию около внешних границ и контактных разрывов решения. При этом желательно стоить схемы более высокого порядка, чем первый–второй. Схемы, которые имеют порядок аппроксимации более высокий, чем это позволяет тривиальный анализ размеров шаблона, называются компактными; схемы, в которых высокий порядок аппроксимации достигается на двухточечном шаблоне по каждой переменной, называются бикомпактными. В последнее десятилетие был предложен класс бикомпактных схем на основе использования метода прямых [1]–[8]. Пространственные производные дискретизуются, временные производные оставляются в дифференциальной форме. Полученная полудискретная бикомпактная схема может интегрироваться по времени любым методом, чаще всего используются диагонально-неявные методы Рунге–Кутты, например, третьего порядка аппроксимации. Для увеличения порядка аппроксимации по пространству используется расширение списка переменных и включение в него либо дополнительных переменных, например, интегрального среднего по ячейке, либо введение дополнительных внутренних точек шаблона. Схема консервативна, позволяет считать задачи методом бегущего счета или итерируемой факторизации в многомерных геометриях [9]. Метод не использует характеристические свойства уравнения переноса. Этот метод активно развивается, и на его основе получены прекрасные результаты в приложениях к задачам газовой динамики. С нашей точки зрения, этот метод обладает двумя недостатками. Первый – он работает на регулярных прямоугольных пространственных сетках, которые могут быть не слишком удобны при моделировании геометрии реальных технических устройств. Второй связан с особенностями решения уравнения переноса излучений и/или частиц. В этом случае уравнение переноса содержит недифференциальный член поглощения, так что точное решение уравнения вдоль каждой характеристики содержит экспоненциальный член. Развиваемый в настоящее время метод лебеговского осреднения уравнения переноса по энергии [10]–[15] обладает той особенностью, что сохраняет полный диапазон изменения коэффициента поглощения, который в центрах и в крыльях линий может отличаться на несколько порядков. Это означает, что при любом разумном выборе пространственной сетки в каких-то частях спектра ячейки будут оптически толстыми. Поэтому для нас важно, какая именно пространственная аппроксимация достигается в бикомпактных схемах. В [6] этот вопрос был исследован и показано, что пространственная аппроксимация бикомпактных схем четвертого порядка может быть получена для модельного уравнения Далквиста методом коллокации с функцией устойчивости

$$R(z) = \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12},$$

где z – безразмерная оптическая толщина ячейки. Это означает, что данный способ пространственной аппроксимации не обладает “L-устойчивостью”, т.е. плохо передает экспоненциально затухающие решения в ситуации большой оптической толщины ячеек. Эти причины побудили вернуться к интерполяционно-характеристическим (или сеточно-характеристическим) схемам, в которых экспоненциальные зависимости решения могут быть частично учтены явно. Порядки аппроксимации по пространству и времени в характеристических схемах жестко связаны между собой и определяются точностью построения интерполянта для вычисления значения искомой величины в точке пересечения характеристики, выпущенной назад, до пересечения с границами ячейки, на которых решение известно. В [16] была предложена модификация известного CIP-метода. CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-particle) метод и его модификация основаны на использовании эрмитовой интерполяции, требующей знания не только узловых значений переменных, но и узловых значений пространственной производной. Для данной схемы нельзя исследовать отдельно пространственную аппроксимацию и найти ее “функцию устойчивости” для уравнения Далквиста. Модификация CIP-метода основана на способе вычисления пространственных производных на новом временном шаге (т.е. на способе замыкания метода). В классическом CIP-методе вычисление производных на новом временном слое производится путем решения еще одного уравнения переноса, записанного для пространственных производных искомой функции (так называемых продолженных уравнений).

В данной работе исследуются диссипативно-дисперсионные свойства, основанные на эрмитовой интерполяции, и сравниваются с аналогичными свойствами бикомпактных схем, а также консервативной схемы второго порядка аппроксимации [17]. В последней схеме также используются переменные двух различных типов: узловые и консервативные. Это является общим для всех трех схем сравнения.

2. ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИКАЦИИ CIP-СХЕМЫ

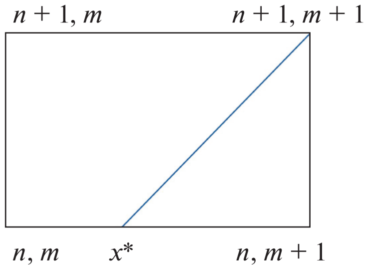
Поскольку диссипативно-дисперсионный анализ схем проводят для уравнения адвекции, повторим построение схемы для этого простейшего случая, не вдаваясь в его расширение на случай неоднородного уравнения переноса. Описание построения модификации схемы для неоднородного уравнения переноса, а также численные примеры приведены в работе [16].

Пусть задано линейное однородное уравнение переноса (уравнение адвекции)

$$Lu \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Дополним уравнение (1) начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le X. \tag{2}$$



Фиг. 1. Расчетная ячейка.

В предположении положительности скорости переноса a краевые условия поставим на левой границе

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Интерполяционно-характеристическая схема будет построена в рамках одной расчетной ячейки. Будем использовать аппроксимацию уравнения в рамках квадратной ячейки с вершинами (x_m, t^n), (x_{m+1}, t^n), (x_m, t^{n+1}), (x_{m+1}, t^{n+1}).

Для положительной скорости переноса a неизвестным сеточным значением искомой функции в каждой ячейке будет y_{m+1}^{n+1}. Выпустим из точки (x_{m+1}, t^{n+1}) характеристику $x - at = \text{const}$ назад до пересечения либо с нижней, либо с боковой гранью ячейки (см. фиг. 1). В первом случае число Куранта $\sigma = a\tau/h \le 1$, во втором $\sigma \ge 1$. Обозначим координату пересечения обратной характеристики с границами ячейки либо x^* $(\sigma \le 1)$, либо t^* $(\sigma \ge 1)$.

Для точного решения (1) значение из этой точки переносится без изменений в точку (x_{m+1}, t^{n+1}). Таким образом, точность метода определяется точностью восстановления неузлового значения y^*. В сеточно-характеристических методах для восстановления неузлового значения используется та или иная интерполяция.

Будем использовать кубическую интерполяцию Эрмита. Для случая $\sigma \le 1$ пересечения с нижней гранью ячейки она в барицентрических пространственных координатах p и q на отрезке $[x_m, x_{m+1}]$ имеет вид

$$P_3(p,q) = H^R(p,q)y_{m+1}^n + H^L(p,q)y_m^n + G^R(p,q)d_{m+1}^n h + G^L(p,q)d_m^n h. \tag{4}$$

Здесь H, G — базисные функции Эрмита:

$$\begin{gathered} p = (x^* - x_m)/h, \quad q = (x_{m+1} - x^*)/h, \quad p + q = 1, \quad h = x_{m+1} - x_m, \\ H^R = p(p + 2qp), \quad G^R = -p \cdot qp, \\ H^L = q(q + 2qp), \quad G^L = q \cdot qp, \end{gathered} \tag{5}$$

y_m^n — сеточные значения искомой функции, а d_m^n — сеточные значения пространственных производных искомой функции. Для случая $\sigma \ge 1$ точка начала характеристики, приходящей в точку (x_{m+1}, t^{n+1}), попадает на левую границу, интерполяция на этой границе расчетной ячейки рассматривается аналогично с учетом производных по времени для искомой функции. Если в массиве данных хранятся только пространственные производные, производные по времени могут быть рассчитаны из уравнения переноса (1).

Как уже было указано, интерполяция вида (4), (5) была использована во многих работах (см., например, [18]—[24] и литературу в них). Отличие предлагаемого подхода от упомянутых работ заключается в способе определения величин d_m^{n+1}, необходимых для возможности расчета величин на следующем временном слое. Как уже было сказано, в методе CIP стандартной процедурой является использование дифференциального продолжения уравнения (1), т.е. для пространственной производной также выписывается дифференциальное уравнение вида (1), которое должно решаться совместно с исходным уравнением переноса:

$$\frac{\partial}{\partial x} Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{1'}$$

В качестве начальных данных для вычисления d_{m+1}^{n+1} в точке x^* берется значение пространственной производной интерполянта (4). С нашей точки зрения, в приложении к задачам переноса излучений и частиц, у этого подхода есть два недостатка: во-первых, уравнение (1) допускает разрывные решения, и в этом случае производная уже должна рассматриваться как обобщенная функция, и, во-вторых, при рассмотрении неоднородного уравнения переноса с переменным коэффициентом поглощения продолженное уравнение будет содержать не только производную, но и саму функцию, что затрудняет построение схемы.

В предлагаемой модификации CIP-метода не используется дифференциальное продолжение уравнения (1'). Предположим, что в начальный момент времени мы знаем не только узловые значения функции $u_0(x_m)$, но и значения ее производной:

$$d_m^0 = u_0'(x_m). \tag{6}$$

Для замыкания алгоритма нам необходима процедура получения сеточных значений d_{m+1}^{n+1}. Для граничного узла значение производной в случае краевых условий (3) может быть рассчитано из (1), (3) как $d_0^{n+1} = -\dot{\varphi}(t^{n+1})/a$. Для однородного уравнения переноса производная d_{m+1}^{n+1} может быть вычислена как производная интерполянта в точке x^*: $d_{m+1}^{n+1} = P_3'(p,q)$. Однако такой вариант вычисления производной не обобщается на неоднородное уравнение. Мы поступим иначе. Вычислим интегральное среднее на нижнем отрезке $[x^*, x_{m+1}]$ либо точно от интерполянта P_3, либо по формуле Симпсона. В силу характеристических свойств однородного уравнения (1) это интегральное среднее будет совпадать с интегральным средним по отрезку $[t^n, t^{n+1}]$ в точке x_{m+1} справа. Значение пространственной производной d_{m+1}^n может быть из уравнения (1) пересчитано в производную по времени: $g_{m+1}^n = -ad_{m+1}^n$. Тогда на правой границе нам известны два узловых значения y_{m+1}^n, y_{m+1}^{n+1}, интегральное среднее $\bar{y}_{m+1}$ и значение временной производной искомой функции g_{m+1}^n. Эти данные позволяют получить значение g_{m+1}^{n+1} из формулы Эйлера–Маклорена:

$$\bar{y}_{m+1} \equiv \frac{1}{\tau}\int_{t^n}^{t^{n+1}} u(x_{m+1},t)dt = \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1}) - \frac{\tau}{12}(g_{m+1}^{n+1} - g_{m+1}^n) + \frac{1}{720}u_{tttt}^{(4)}\tau^4. \tag{7}$$

В свою очередь, величина g_{m+1}^{n+1} может быть пересчитана в пространственную производную $d_{m+1}^{n+1} = -g_{m+1}^{n+1}/a$ из уравнения (1). Восстановление производных, исходя из сохранения интегральных средних, делает модификацию метода CIP консервативным для достаточно гладких решений (для разрывного начального профиля схема не является консервативной), а также позволяет обобщить схему на случай неоднородного уравнения переноса. Использование формулы Эйлера–Маклорена для замыкания системы уравнений идеологически очень близко к бикомпактным схемам Рогова.

В дальнейшем при ссылках на эту схему мы будем использовать обозначение CIP(3,3) как указание на порядки аппроксимации по времени и пространству.

3. КРАТКИЙ ВЫВОД ПОЛУДИСКРЕТНОЙ БИКОМПАКТНОЙ СХЕМЫ РОГОВА

Бикомпактная схема Рогова строится методом прямых. Полудискретная форма уравнений получается смешанным FD–FV-методом. Для повышения порядка аппроксимации рассматриваются не только узловые значения переменных, но и интегральные средние величины по пространственной ячейке. Интегрированием уравнения (1) по пространственной ячейке получается первое уравнение полудискретной формы схемы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{y}_m + \frac{a}{h}(y_{m+1} - y_m) = 0. \tag{8}$$

Интегрированием уравнения (1)' с использованием замыкающего соотношения формулы Эйлера–Маклорена (7) можно получить второе уравнение полудискретной системы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(y_{m+1} - y_m) + \frac{6a}{h}(y_{m+1} - 2\bar{y}_m + y_m) = 0. \tag{9}$$

Система уравнений (8), (9) может быть проинтегрирована по времени любым из известных методов, обычно используются диагонально-неявные методы Рунге–Кутты третьего порядка аппроксимации. Методы третьего порядка аппроксимации сложны для диссипативно-дисперсионного анализа. Б.В. Рогов в [8] провел анализ полностью дискретных схем для неявной схемы Эйлера по времени и метода трапеций, который он называет методом типа Кранка–Николсон. Мы будем сравнивать диссипативно-дисперсионные свойства с реализацией метода трапеций по времени, а также с идеальными результатами полудискретной схемы (8), (9).

Для реализации метода трапеций будем использовать ссылку на схему как BiC(4, 2) как указание на четвертый порядок аппроксимации по пространству и второй по времени, а на полудискретную схему как BiC(4, ∞).

4. КРАТКИЙ ВЫВОД КОНСЕРВАТИВНОЙ СХЕМЫ ГОЛОВИЗНИНА–ЧЕТВЕРУШКИНА

Консервативная схема Головизнина–Четверушкина также использует переменные двух видов: характеристические и консервативные. Узловые характеристические переменные вычисляются интерполяционно-характеристическим методом второго порядка (по схеме Бима–Уорминга) с использованием значения в полуцелом пространственном узле. Для обеспечения консервативности схемы введены консервативные переменные, отвечающие серединам сторон ячеек. На нижней стороне ячейки по известным значениям y_m^n, $y_{m+1/2}^n$, y_{m+1}^n в трех точках строится интерполяция второго порядка, значение которой в точке пересечения с обратной характеристикой определяет y_{m+1}^{n+1}. Таким образом, с учетом $\sigma = a\tau/h$ получаем для характеристических переменных

$$y_{m+1}^{n+1} = y_{m+1}^n - 2\sigma(1.5y_{m+1}^n - 2y_{m+1/2}^n + 0.5y_m^n) + 2\sigma^2(y_{m+1}^n - 2y_{m+1/2}^n + y_m^n). \tag{10}$$

В полуцелых узлах по времени промежуточные консервативные переменные определяются из соотношений

$$y_{m+1}^{n+1/2} = (y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1})/2, \quad y_m^{n+1/2} = (y_m^n + y_m^{n+1})/2.$$

Для расчета значений консервативных переменных в полуцелых узлах по пространству используется схема «крест» для уравнения переноса

$$\frac{y_{m+1/2}^{n+1} - y_{m+1/2}^n}{\tau} + a\frac{y_{m+1}^{n+1/2} - y_m^{n+1/2}}{h} = 0. \tag{11}$$

Исключая промежуточные величины, для консервативных переменных получаем

$$y_{m+1/2}^{n+1} = y_{m+1/2}^n - 0.5\sigma(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1} - y_m^n - y_m^{n+1}). \tag{12}$$

Ссылки на схему (10), (12) будем оформлять в виде GC(2,2) как указание на порядки аппроксимации по пространству и по времени.

5. ДИССИПАТИВНО-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ CIP(3,3) ПРИ ЧИСЛАХ КУРАНТА, МЕНЬШИХ ЕДИНИЦЫ

В силу того, что и формула Симпсона, и формула Эйлера–Маклорена точны на многочленах третьей степени, то нетрудно показать, что для уравнения адвекции предлагаемый в разд. 2 способ вычисления пространственной производной на новом слое по времени эквивалентен переносу ее значения, получаемого дифференцированием интерполянта в точке x^*, вдоль характеристики. Этот же способ вычисления производной для уравнения адвекции применяется для анализа и в классической схеме CIP (см. [21]). Проведем упрощенный (по сравнению с [21]) фурье-анализ полученной разностной схемы на диссипативно-дисперсионные свойства. Будем искать точное решение дифференциального уравнения адвекции в виде

$$u(x,t) = e^{\lambda t}e^{ikx}. \tag{13}$$

Подстановка фурье-гармоники в уравнение (1) для точного решения задачи дает связь

$$\lambda = -ika. \tag{14}$$

Каждая фурье-гармоника движется с одной и той же скоростью a, не изменяясь по амплитуде (λ – чисто комплексное). Для численного решения используем аналог (13) для узловых значений функции и узловых значений производной

$$y_m^n = e^{\lambda n\tau}e^{ikmh}, \quad d_m^n = \beta e^{\lambda n\tau}e^{ikmh}. \tag{15}$$

Пусть число Куранта меньше 1, тогда характеристика приходит на нижнюю грань ячейки. Вычисление производных базисных функций дает

$$\frac{\partial H^R}{\partial x} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial H^R}{\partial p} - \frac{\partial H^R}{\partial q}\right) = \frac{6pq}{h}, \quad \frac{\partial H^L}{\partial x} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial H^L}{\partial p} - \frac{\partial H^L}{\partial q}\right) = -\frac{6pq}{h},$$
$$\frac{\partial G^R}{\partial x} = \frac{p(1-3q)}{h}, \quad \frac{\partial G^L}{\partial x} = \frac{q(1-3p)}{h}. \tag{16}$$

Точка пересечения характеристики с нижним слоем x^* соответствует значению барицентрических координат $q = \sigma$, $p = 1 - \sigma$. Перенос значений функции и производной из этой точки в узел (t^{n+1}, x_{m+1}) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} y_{m+1}^{n+1} &= p(p+2pq)y_{m+1}^n + q(q+2pq)y_m^n - p^2qh\cdot d_{m+1}^n + pq^2h\cdot d_m^n, \\ hd_{m+1}^{n+1} &= 6pq\cdot y_{m+1}^n - 6pq\cdot y_m^n + p(1-3q)h\cdot d_{m+1}^n + q(1-3p)h\cdot d_m^n. \end{aligned} \tag{17}$$

Подстановка в эту систему гармоники (15) приводит к системе для коэффициента β:

$$\begin{aligned} e^{\lambda\tau} &= p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh} - p^2qh\beta + pq^2h\beta e^{-ikh}, \\ h\beta e^{\lambda\tau} &= 6pq - 6pqe^{-ikh} + p(1-3q)h\beta + q(1-3p)h\beta e^{-ikh}, \end{aligned} \tag{18}$$

или

$$\begin{aligned} h\beta[pq(-p+qe^{-ikh})] + [p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh} - e^{\lambda\tau}] &= 0, \\ h\beta[p(1-3q) + q(1-3p)e^{-ikh} - e^{\lambda\tau}] + [6pq - 6pqe^{-ikh}] &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Условие совместности системы приводит к квадратному уравнению относительно $e^{\lambda\tau}$:

$$\begin{gathered} (e^{\lambda\tau})^2 - e^{\lambda\tau}[p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh} + p(1-3q) + q(1-3p)e^{-ikh}] + \\ + [p(p+2pq) + q(q+2pq)e^{-ikh}][p(1-3q) + q(1-3p)e^{-ikh}] - 6p^2q^2[1-e^{-ikh}][p-qe^{-ikh}] = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Это уравнение имеет два корня, корень, отвечающий дисперсионному соотношению для данной схемы, соответствует знаку “плюс” перед корнем из детерминанта. При $q = \sigma$, $p = 1 - \sigma$:

$$\begin{gathered} \lambda = \frac{1}{\tau}\ln\Big(1 - 2\sigma + \sigma^3 + \sigma e^{-ikh}(-1 + 3\sigma - \sigma^2) + e^{-ikh}\sigma(1-\sigma)\times \\ \times\sqrt{\sigma^2 - 4\sigma + 1 - 2e^{ikh}(\sigma^2 - \sigma - 5) + e^{2ikh}(\sigma^2 + 2\sigma - 2)}\Big). \end{gathered} \tag{21}$$

Разложение (21) в ряд Тейлора для длинноволновых гармоник $kh \ll 1$ дает

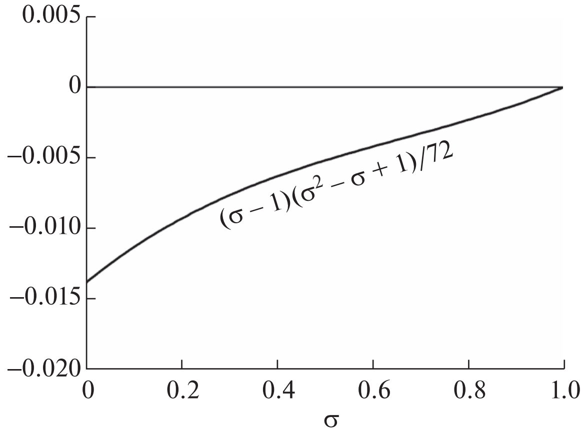
$$\begin{gathered} \lambda = -iak + \frac{1}{72}ak(\sigma-1)(\sigma^2-\sigma+1)(kh)^3 + \frac{i}{540}ak(\sigma^2-1)(2\sigma-1)(\sigma-2)(kh)^4 - \\ - \frac{1}{648}ak(\sigma-1)(\sigma^2-\sigma+1)^2(kh)^5 + O)((kh)^6). \end{gathered} \tag{22}$$

Выражение (22) показывает, что эрмитова характеристическая схема действительно обладает третьим порядком аппроксимации, главный член погрешности по сравнению с (10) – диссипативный. На фиг. 2 представлена величина коэффициента при $(kh)^3$. Отрицательность коэффициента означает, что схема диссипативна (и, следовательно, устойчива).

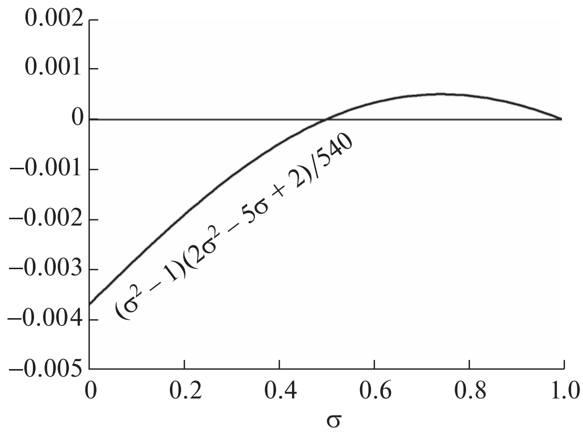
Коэффициент при дисперсионном члене разложения представлен на фиг. 3. Для длинноволновых гармоник фазовая скорость переноса:

$$a^* \approx a(1 - (\sigma^2 - 1)(2\sigma - 1)(\sigma - 2)(kh)^4/540). \tag{23}$$

Там, где коэффициент отрицателен (для $0 < \sigma < 0.5$), дисперсия опережающая, так как эффективная скорость выше, чем a. И наоборот, там, где коэффициент положителен, дисперсия запаздывающая (для $0.5 < \sigma < 1$).



Фиг. 2. Коэффициент диссипации схемы в зависимости от числа Куранта при малых значениях безразмерного волнового числа kh.



Фиг. 3. Коэффициент при дисперсионном члене разложения (22) при различных числах Куранта при малых значениях безразмерного волнового числа kh.

6. СРАВНЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

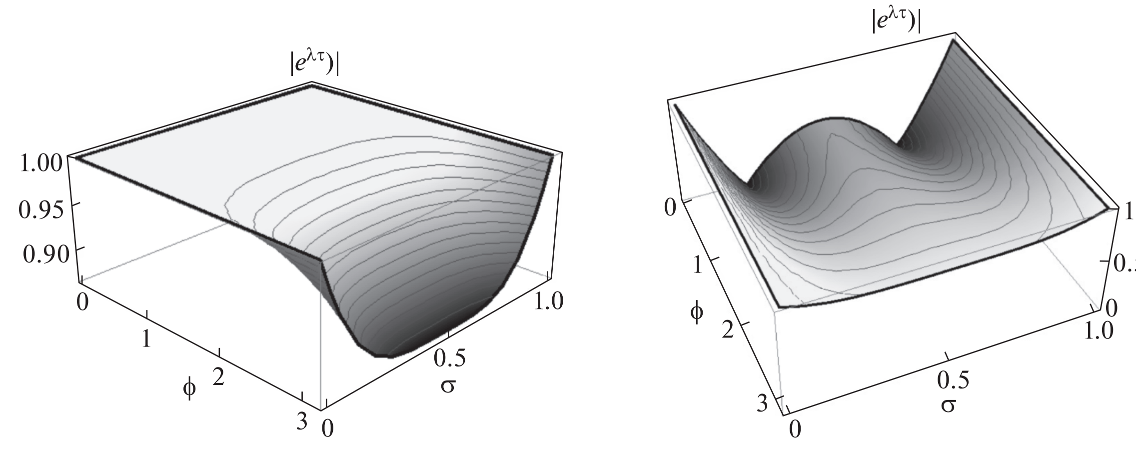
На фиг. 4 представлены значения амплитудного множителя CIP(3,3)-схемы при значениях безразмерной величины $\phi = kh$ от 0 до π и числе Куранта от 0 до 1. Паразитный корень приведен только для того, чтобы убедиться в устойчивости схемы.

Схемы Рогова BIC(4,2) и BIC(4,∞) бездиссипативны в силу полной симметричности схемы. Поэтому рисунки $\left|e^{\lambda\tau}\right| = 1$ не приводятся. Для схемы Головизнина–Четверушкина GC(2,2) фурье-анализ дает дисперсионное соотношение

$$e^{\lambda\tau} = \frac{1}{2}\Big(2 - 3\sigma + 2\sigma^3 - \sigma\Big(e^{-i\phi}(1 - 4\sigma + 2\sigma^2) - [e^{-i2\phi}(1 - 4\sigma + 2\sigma^2)^2 + \\ + e^{-i\phi}(22 - 40\sigma + 8\sigma^2 + 16\sigma^3 - 8\sigma^4) - 7 + 16\sigma - 12\sigma^2 + 4\sigma^4]^{0.5}\Big)\Big).$$

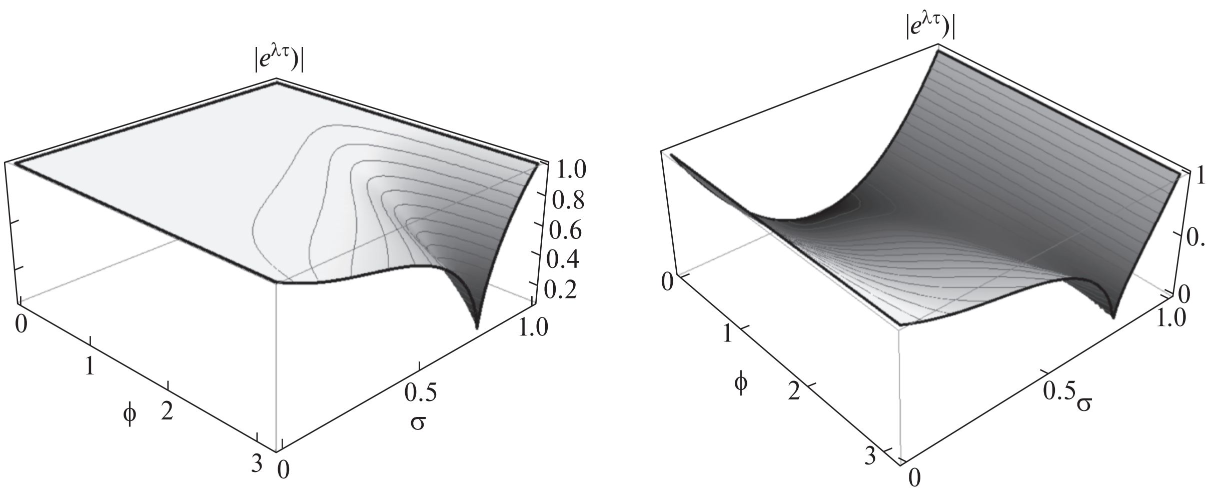
На фиг. 5 представлены значения амплитудного множителя схемы GC(2,2) при значениях безразмерной величины $\phi = kh$ от 0 до π и числе Куранта от 0 до 1.

Сравнение фиг. 4 и 5 показывает, что схема CIP(3,3) обладает достаточно малой диссипацией по сравнению со схемой GC(2,2). Эти схемы обладают разным порядком аппроксимации. Однако заметим, что схемы четного порядка аппроксимации обладают преимущественной дисперсионной ошибкой. Диссипативная ошибка появляется в следующем члене разложения λ по степеням ϕ. Схемы нечетного порядка аппроксимации обладают преимущественной диссипативной ошибкой. Поэтому сравнение схемы CIP(3,3) со схемой GC(2,2) по диссипации происходит в



(а) (б)

Фиг. 4. Временной множитель амплитуды $\left|e^{\lambda\tau}\right|$ в зависимости от числа Куранта $0 \le \sigma \le 1$ и безразмерного волнового числа $0 \le kh \le \pi$ для схемы CIP(3, 3). (а) Физический корень (шаг линий уровня 0. 01), (б) паразитный корень (шаг линий уровня 0.1).



(а) (б)

Фиг. 5. Временной множитель амплитуды $\left|e^{\lambda\tau}\right|$ в зависимости от числа Куранта $0 \le \sigma \le 1$ и безразмерного волнового числа $0 \le kh \le \pi$ для схемы GC(2, 2). (а) Физический корень (шаг линий уровня 0.05), (б) паразитный корень (шаг линий уровня 0.05).

одном и том же порядке по ϕ (в третьем). Нетрудно видеть, что эрмитова схема обладает значительно меньшей диссипацией.

7. СРАВНЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Бикомпактные схемы Рогова обладают численной дисперсией, поэтому приведем дисперсионные соотношения для полудискретной схемы BiC(4, ∞):

$$\lambda = \frac{a(3 + 3e^{i\phi} - [-3 + 42e^{i\phi} - 3e^{i2\phi}]^{0.5})}{h(1 - e^{i\phi})}, \tag{24}$$

и схемы метода трапеций BiC(4, 2):

$$e^{\lambda\tau} = \frac{\sin(\phi/2)(2 - 6\sigma^2) + i\sigma[42 - 6\cos\phi]^{0.5}}{\sin(\phi/2)(2 + 6\sigma^2) - i6\sigma\cos(\phi/2)}. \tag{25}$$

Заметим, что для полудискретной бикомпактной схемы (24) у временного показателя пропадает зависимость от числа Куранта. На фиг. 6 приведены зависимости отношения численной скорости переноса гармоник к их точному значению a^*/a в зависимости от числа Куранта σ и безразмерного волнового числа ϕ.

Главные дисперсионные члены эрмитовой схемы и схемы Рогова имеют четвертый порядок аппроксимации по ϕ, а схема Головизнина–Четверушкина – второй. Поэтому наиболее интересно сравнение по свойствам со схемой своего класса: с полудискретной схемой Рогова BiC(4, ∞). Эрмитова схема CIP(3,3) показывает меньшую дисперсию фурье-гармоник по сравнению с полудискретной бикомпактной схемой Рогова. Если отношение a^*/a для эрмитовой схемы для коротковолновых возмущений изменяется в пределах от 0.98 до 1.06, то для полудискретной бикомпактной схемы диапазон изменения от 1 до 1.1. Для полностью дискретных схем Рогова дисперсия может быть больше.

8. ДИССИПАТИВНО-ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ ПРИ ЧИСЛАХ КУРАНТА, БОЛЬШИХ ЕДИНИЦЫ

С математической точки зрения в уравнении адвекции при постоянной скорости переноса переменные x и t равноправны. На этом можно было бы поставить точку, так как формально мы можем просто поменять местами переменные. Однако проведем полный анализ диссипативно-дисперсионных свойств и в этом случае. Интерполяция будет вестись по левому ребру ячейки

$$P_3(p,q) = H^U(p,q)y_m^{n+1} + H^D(p,q)y_m^n + G^U(p,q)g_m^{n+1}\tau + G^D(p,q)g_m^n\tau. \tag{26}$$

Здесь H, G – базисные функции Эрмита:

$$\begin{gathered} p = (t^* - t^n)/\tau, \quad q = (t^{n+1} - t^*)/\tau, \quad p + q = 1, \quad \tau = t^{n+1} - t^n, \\ H^U = p(p + 2qp), \quad G^U = -p \cdot qp, \qquad (27) \\ H^D = q(q + 2qp), \quad G^D = q \cdot qp. \end{gathered} \tag{27}$$

В этом случае схема для уравнения адвекции также будет эквивалентна переносу из точки t^* не только значения функции, но и значения ее временной производной. Аналогичный фурье-анализ типа (18) для функции и ее производной по времени

$$\begin{gathered} e^{ikh} = p(p + 2qp) + e^{-\lambda\tau}q(q + 2qp) + \tau\beta(-p^2q) + \tau\beta e^{-\lambda\tau}pq^2, \\ \tau\beta e^{ikh} = 6pq + e^{-\lambda\tau}(-6pq) + \tau\beta \cdot p(1 - 3q) + \tau\beta e^{-\lambda\tau}q(1 - 3p) \end{gathered}$$

с учетом связи $p + q = 1$ приводит к квадратному уравнению

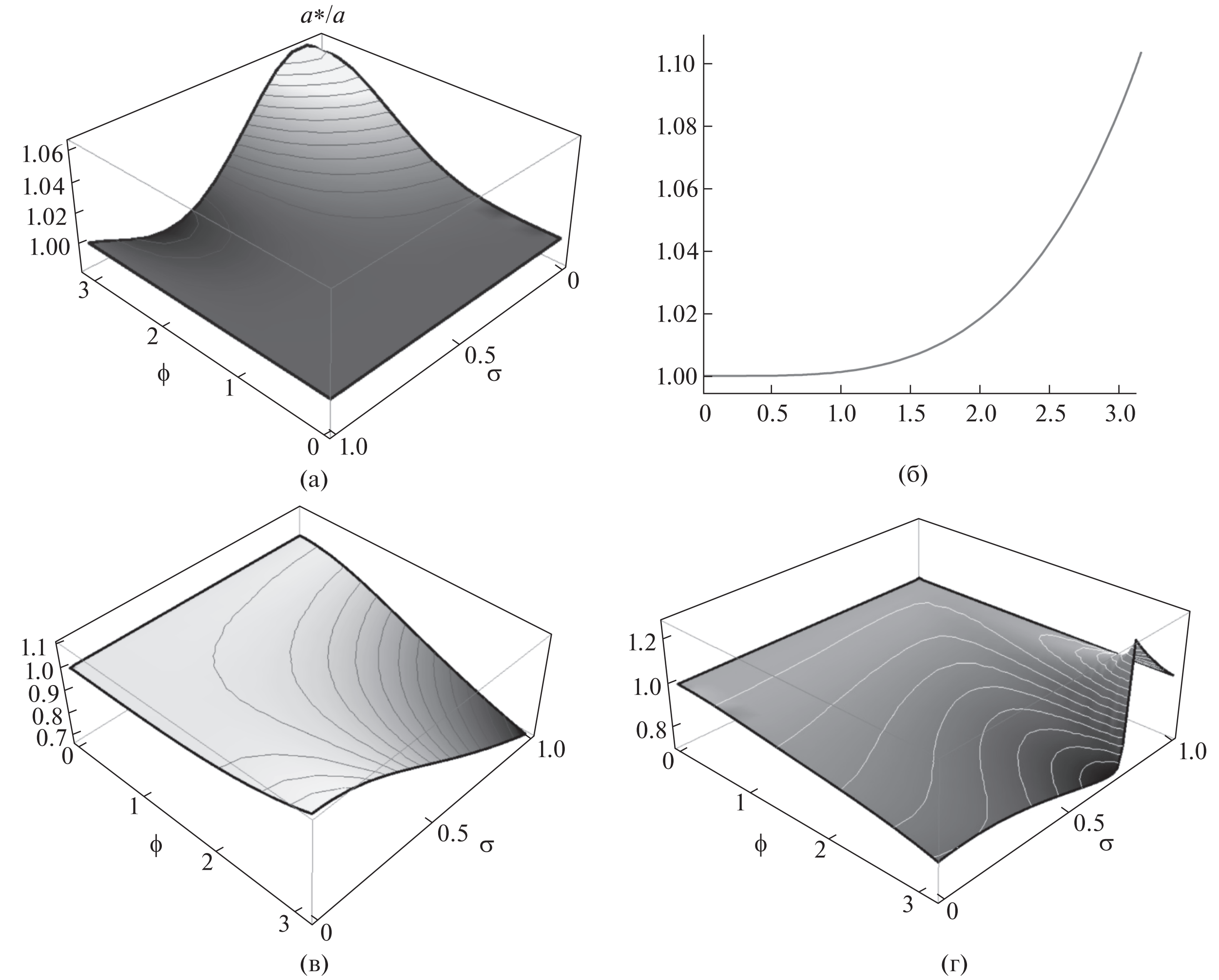
$$\begin{gathered} (e^{2ikh} + (1 - q)^4 - 2e^{ikh}(1 - 2q + q^3))(e^{\lambda\tau})^2 - \\ - 2q[1 - 2q^2 + q^3 - e^{ikh}(1 - 3q + q^2)](e^{\lambda\tau}) + q^4 = 0. \end{gathered}$$

Точка пересечения t^* с левым ребром ячейки будет иметь координаты:

$$q = \frac{h/a}{\tau} = \sigma^{-1},$$

тогда корни этого квадратного уравнения

$$\begin{gathered} e^{\lambda\tau} = q\Big[1 - 2q^2 + q^3 - e^{ikh}(1 - 3q + q^2) \pm (1 - q)\times \\ \times\sqrt{1 + 2q - 2q^2 + 2e^{ikh}(-1 + q + 5q^2) + e^{2ikh}(1 - 4q + q^2)}\Big]\times \\ \times\left((1 - q)^4 - 2e^{ikh}(1 - 2q^2 + q^3) + e^{2ikh}\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{28}$$



Фиг. 6. Зависимость отношения a^*/a скорости переноса гармоники с безразмерным волновым числом $0 \le \phi \le \pi$ к точной скорости переноса, равной a, при различных числах Куранта для эрмитовой схемы CIP(3, 3), бикомпактных схем Рогова BiC(4, ∞) и BiC(4, 2), и схемы Головизнина–Четверушкина GC(2, 2). (а) CIP(3, 3) (шаг линий уровня 0.005), (б) BiC(4, ∞), (в) BiC(4, 2) (шаг линий уровня 0.03), (г) GC(2, 2) (шаг линий уровня 0.05). Изменение направления оси по числу Куранта на Фиг. 6. сделано для лучшей видимости поведения функций.

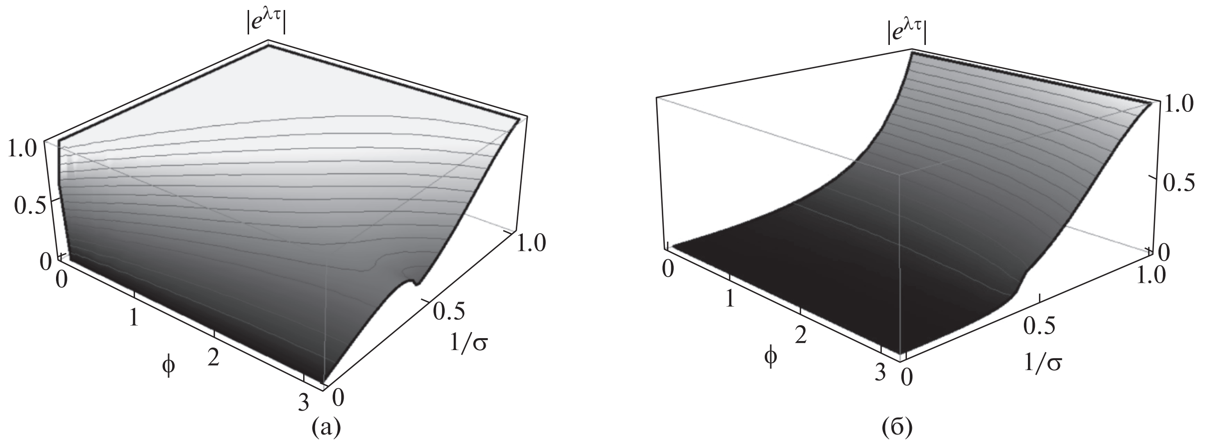
Выраженный через число Куранта физически осмысленный корень соответствует дисперсионному соотношению со знаком “+” перед корнем. Разложение в ряд Тейлора для длинноволновых гармоник дает дисперсионное соотношение:

$$\lambda = -iak - \frac{1}{72}ak(\sigma - 1)(\sigma^2 - \sigma + 1)(kh)^3 + \frac{i}{540}ak(\sigma^2 - 1)(2\sigma - 1)(\sigma - 2)(kh)^4 - \\ - \frac{1}{648}ak(\sigma - 1)(\sigma^2 - \sigma + 1)^2(kh)^5 + O((kh)^6). \quad (29) \qquad (29)$$

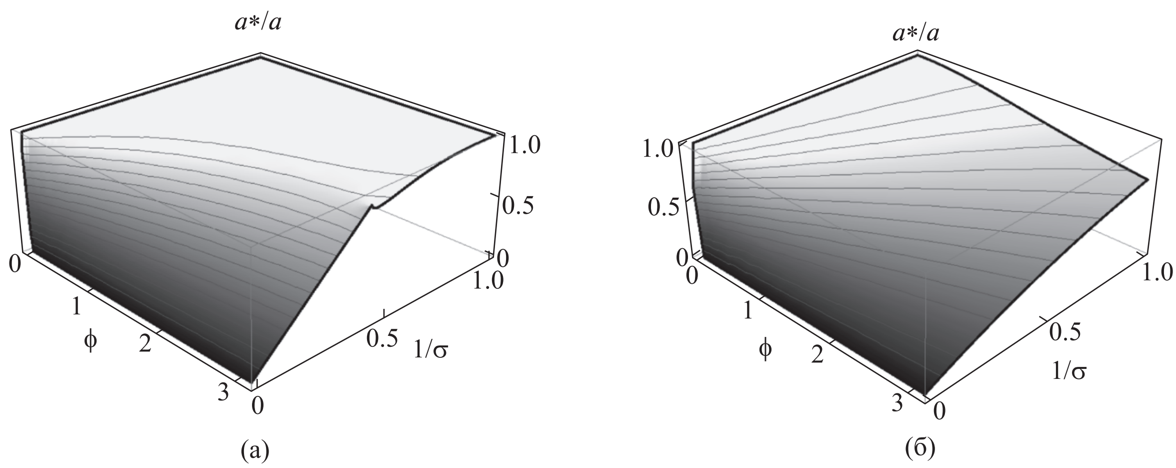
На фиг. 7 представлен временной множитель амплитуды в зависимости от обратного числа Куранта при числах Куранта больше единицы. Представлены оба корня для доказательства устойчивости схемы.

На фиг. 8 изображена зависимость отношения a^*/a в зависимости от угла и обратного числа Куранта для схемы CIP(3, 3) и BiC(4, 2). Чтобы избежать перехода с ветви на ветвь для аргумента от выражения (28), выражение (28) умножается на -1, после чего из аргумента вычитается π.

Для полудискретной бикомпактной схемы график для чисел Куранта остается таким же, как это представлено на фиг. 6б. Однако расхождение по мере увеличения числа Куранта между идеальным дисперсионным соотношением и реальным значительно увеличивается, и не в пользу



Фиг. 7. Временной множитель амплитуды $\left|e^{\lambda\tau}\right|$ в зависимости от обратного числа Куранта $0 \le q = \sigma^{-1} \le 1$ и безразмерного волнового числа $0 \le kh \le \pi$ для CIP(3, 3). (а) Физический корень (шаг линий уровня 0.0625), (б) паразитный корень (шаг линий уровня 0.0625).



Фиг. 8. Зависимость отношения a^*/a скорости переноса гармоники с безразмерным волновым числом $0 \le \phi \le \pi$ к точной скорости переноса, равной a, в зависимости от обратного числа Куранта для эрмитовой характеристической схемы и дискретной бикомпактной схемы Рогова. (а) CIP(3, 3) (шаг линий уровня 0.0625), (б) BiC(4, 2) (шаг линий уровня 0.0625).

реального. Фигура 8 показывает, что дисперсия метода CIP достаточно мала и при числах Куранта, больших единицы.

9. ВЫВОДЫ

Все рассмотренные схемы построены на минимальном двухточечном шаблоне. Все они показывают неплохие диссипативно-дисперсионные свойства. Схема Головизнина–Четверушкина проста в реализации, что делает ее очень привлекательной в глазах вычислителей. Бикомпактные схемы при симметричной временной аппроксимации обладают нулевой диссипацией, что бесценно при рассмотрении задач аэроакустики. Предлагаемая в работе [16] модификация CIP -метода допускает обобщение на неоднородное уравнение переноса и неструктурированные сетки. Использование характеристик сближает модификацию CIP-метода со схемой Головизнина–Четверушкина, а использование формулы Эйлера–Маклорена – с бикомпактной схемой Рогова. Эрмитова характеристическая схема обладает достаточно малой диссипацией и экстрамалой дисперсией. Последнее свойство важно в задачах переноса излучений и частиц, поскольку значительно уменьшает амплитуду паразитных колебаний на границах раздела сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рогов Б.В., Михайловская М.Н.* Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // Докл АН. 2010. Т. 430. № 4. С. 470–474.
2. *Рогов Б.В., Михайловская М.Н.* Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 6. С. 98–110.
3. *Рогов Б.В., Михайловская М.Н.* Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
4. *Аристова Е.Н., Рогов Б.В.* О реализации граничных условий в бикомпактных схемах для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 10. С. 3–14.
5. *Aristova E.H., Rogov B.V.* Bicompact scheme for the multidimensional stationary linear transport equation // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 3–14.
6. *Аристова Е.Н., Рогов Б.В., Чикиткин А.В.* Оптимальная монотонизация высокоточной бикомпактной схемы для нестационарного многомерного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 973–988.
7. *Chikitkin A.V., Rogov B.V.* Family of central bicompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics. 2019. V. 142. P. 151–170.
8. *Rogov B.V.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics. 2019. V. 139. P. 136–155.
9. *Рогов Б.В., Чикиткин А.В.* О сходимости и точности метода итерируемой приближенной факторизации операторов многомерных высокоточных бикомпактных схем // Матем. моделирование. 2019. Т. 31. № 12 .С. 119–144.
10. *Цветкова И.Л., Шильков А.В.* Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 1. С. 91–100.
11. *Шильков А.В.* Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. № 2. С. 63–81.
12. *Shilkov A.V.* Generalized Multigroup Approximation and Lebesgue Averaging Method in Particle Transport Problems // Transp. Theory and Stat. Physics. 1994. V. 23. № 6. P. 781–814.
13. *Шильков А.В., Герцев М.Н.* Верификация метода лебеговского осреднения // Матем. моделирование. 2015. Т. 27. № 8. С. 13–31.
14. *Аристова Е.Н., Герцев М.Н., Шильков А.В.* Метод лебеговского осреднения в серийных расчетах атмосферной радиации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 6. С. 1033–1047.
15. *Шильков А.В.* Метод лебеговых моментов для решения уравнения переноса нейтронов // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 5. С. 59–94.
16. *Аристова Е.Н., Овчаров Г.И.* Эрмитова характеристическая схема для неоднородного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 3. С. 3–18.
17. *Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н.* Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 20–29.
18. *Yabe T., Aoki T., Sakaguchi G. et al.* The compact CIP (cubic-interpolated pseudo-particle) method as a general hyperbolic solver // Computers & Fluids. 1991. V. 19. № 3/4. P. 421–431.
19. *Tsai T.-L., Chiang S.-W., Yang J.-G.* Characteristics method with cubic–spline interpolation for open channel flow computation // Int. J. Numerical Methods in Fluids. 2004. V. 46. P. 663–683.
20. *Yabe T., Xiao F., Utsumi T.* The constrained interpolation profile method for multiphase analysis // J. Comput. 2001. V. 169. № 2. P. 556–593.
21. *Aoki T.* Stability and accuracy of the cubic interpolated propagation scheme // Comput. Phys. Commun. 1997. V. 101. № 1–2. P. 9–20.
22. *Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И.* Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 2. С. 123–132.
23. *Фаворская А.В., Петров И.Б.* Численное моделирование волновых процессов в скальных массивах сеточно-характеристическим методом // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 3. С. 37–51.
24. *Петров И.Б., Фаворская А.В., Хохлов Н.И.* Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1804–1811.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1759–1778

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

О ТОЧНОСТИ БИКОМПАКТНЫХ СХЕМ В ЗАДАЧЕ О РАСПАДЕ ВИХРЯ ТЕЙЛОРА–ГРИНА

М. Д. Брагин[1,*], Б. В. Рогов[1,]**

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

**e-mail: michael@bragin.cc*

***e-mail: rogov.boris@gmail.com*

Поступила в редакцию 13.10.2020 г.
Переработанный вариант 13.10.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Впервые для нестационарных уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости строится высокоточная бикомпактная схема, имеющая четвертый порядок аппроксимации по пространству и второй – по времени. Для ее получения применяется метод расщепления по физическим процессам Марчука–Стрэнга. При дискретизации конвективной части уравнений дополнительно используется локально-одномерное расщепление по пространственным направлениям. На точном решении задачи о двумерном вихре Тейлора–Грина демонстрируется сеточная сходимость предлагаемой схемы с порядком выше теоретического. По разработанной бикомпактной схеме рассчитывается задача о распаде трехмерного вихря Тейлора–Грина (рассматриваются оба режима, и ламинарный, и турбулентный). Показывается, что эта схема хорошо разрешает вихревые структуры и с высокой точностью воспроизводит турбулентный спектр кинетической энергии. Библ. 29. Фиг. 8. Табл. 1.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, вихрь Тейлора–Грина, высокоточные схемы, неявные схемы, компактные схемы, бикомпактные схемы.

DOI: 10.31857/S0044466921110053

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование турбулентных течений вязкой жидкости является чрезвычайно востребованным при решении многих прикладных технических задач. Стандартный промышленный подход к расчету таких течений состоит в применении методики RANS (осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса) и численных схем второго порядка аппроксимации по пространству. Он позволяет достичь больших успехов в предсказании средних характеристик установившихся безотрывных течений, например, силы сопротивления, действующей на пассажирский самолет в крейсерском режиме полета. Однако этот подход оказывается недостаточно точным при исследовании более сложных явлений, таких как отрывные течения, генерация шумов свободными струями и обтекаемыми телами, смешение потоков жидкости при внутренних течениях и так далее [1]–[4]. Поскольку современное состояние вычислительной техники все еще не позволяет использовать DNS (прямое численное моделирование) при реальных числах Рейнольдса с разрешением всех пространственных масштабов течения на сетке, в настоящее время, по-видимому, единственной альтернативой оказывается методика LES (моделирование крупных вихрей), в которой крупные вихри непосредственно разрешаются и рассчитываются на сетке доступного размера, а более мелкие вихри и их влияние моделируются исходя из тех или иных априорных соображений. В свою очередь, LES-моделирование требует развития и использования численных схем, которые не только формально имеют пространственную аппроксимацию высокого порядка, но и обладают минимальными численными дисперсией и диссипацией [4], [5]. Подходящими видами схем для LES-моделирования представляются разрывные схемы Галеркина (подробные обзоры их применения могут быть найдены в работах [3], [5]), компактные схемы [6]–[8], схемы типа КАБАРЕ [9], [10].

В работах [11]–[22] предложен и развивается класс высокоточных бикомпактных схем. Аппроксимация пространственных производных в них является симметричной компактной (четвертого, шестого, восьмого и так далее порядков), при этом ее шаблон целиком помещается в одну ячейку сетки. В одномерном случае он включает в себя лишь два целых узла, что объясняет название этих схем. Отличительной чертой бикомпактных схем является сочетание нескольких положительных свойств: (а) спектральное разрешение, лучшее по сравнению с классическими компактными схемами равного порядка аппроксимации по пространству [18]–[20]; (б) равное число граничных условий в дифференциальной и дискретной постановках задачи; (в) неявность (слабые ограничения по устойчивости); (г) экономичность реализации, близкая к явным схемам. Первое из перечисленных свойств говорит о том, что бикомпактные схемы могут быть полезны для расчетов турбулентных течений по методике LES или ILES (неявный LES [23]). Однако, несмотря на всестороннюю изученность дисперсионных и диссипативных свойств бикомпактных схем в случае простейшего линейного уравнения переноса (в [18] рассмотрены полудискретные схемы четвертого порядка, в [19] – полудискретные схемы порядка не меньше шестого, в [20] – полностью дискретные схемы), еще ни разу эти свойства не были наглядно продемонстрированы на каком-нибудь практически значимом примере.

Таким образом, мы приходим к цели настоящей работы: (а) обобщить бикомпактные схемы на нестационарные трехмерные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости; (б) посчитать задачу о распаде трехмерного вихря Тейлора–Грина в турбулентном режиме. Хотя эта задача предельно проста по своей постановке (к примеру, см. [24]), ее решение претерпевает весьма сложную эволюцию: начальный одночастотный вихрь дробится на вытянутые, нитеобразные вихревые структуры, которые затем истончаются и сильно спутываются между собой, постепенно превращаясь в однородную изотропную турбулентность. Эти процессы происходят и в более сложных, реальных постановках, поэтому задача о вихре Тейлора–Грина является широко употребимым тестом для численных схем, предназначенных для счета турбулентных течений.

Работа излагается следующим образом. В разд. 1 описывается бикомпактная схема с аппроксимацией четвертого порядка по пространству и второго порядка по времени для нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости. В разд. 2 проверяется сеточная сходимость этой схемы на точном решении задачи о двумерном вихре Тейлора–Грина. В разд. 3 приводятся и анализируются результаты расчетов по этой схеме задачи о распаде трехмерного вихря Тейлора–Грина (как в ламинарном, так и в турбулентном режимах).

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА

1.1. Система уравнений

Рассмотрим безграничный объем ньютоновской несжимаемой жидкости. Ее изотермическое течение подчиняется уравнениям Навье–Стокса:

$$\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

где x, y, z – декартовы пространственные координаты, t – время, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости жидкости, p – давление жидкости, $\mathrm{Re} = \mathrm{const} > 0$ – число Рейнольдса, символ $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, символ $\otimes$ – знак тензорного произведения. Система уравнений (1) уже записана в безразмерной форме, при этом конвективный член $(\mathbf{v} \times \nabla)\mathbf{v}$ в левой части уравнений движения представлен с помощью уравнения неразрывности в дивергентном виде как $\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$.

1.2. Расщепление по физическим процессам

Построим для уравнений Навье–Стокса (1) бикомпактную схему четвертого порядка аппроксимации по пространству. Воспользуемся методом расщепления Марчука–Стрэнга [25[, [26] по физическим процессам. Систему (1) можно разбить на три части – конвективную:

$$\partial_t \mathbf{v} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = 0, \tag{2}$$

вязкую:

$$\partial_t \mathbf{v} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \mathbf{v} \tag{3}$$

и часть с давлением и уравнением неразрывности:

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

Дискретизацию каждой из этих частей обсудим по отдельности, а затем опишем общий алгоритм счета.

Ясно, что любая машинная реализация упомянутого алгоритма потребует конечности расчетной области и постановки каких-то условий на ее границах. Поскольку в настоящей работе проводятся расчеты задачи о распаде вихря Тейлора–Грина, имеющей периодическое решение, ограничимся для определенности областью $D = (0, 2\pi)^3$ и периодическими условиями на ее границе ∂D.

1.3. Сетка и представление решения на ней

Введем в замкнутой области $\bar{D}$ сетку

$$\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z,$$
$$\Omega_d = \{d_0, d_{1/2}, d_1, d_{3/2}, \ldots d_{N_d}\}, \quad d_0 = 0, \quad d_{N_d} = 2\pi,$$
$$d_{i+1/2} = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}, \quad h_{d,i+1/2} = d_{i+1} - d_i - \text{шаг по оси } Od, \quad i = 0, 1, \ldots, N_d - 1, \quad d = x, y, z.$$

Условимся нумеровать узлы по направлениям x, y, z индексами j, k, ℓ соответственно. Введем также временные слои $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \ldots$, а через τ обозначим (быть может, переменный) шаг по времени. Определим несколько сеточных функций:

1) $\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}$ – задана во всех узлах сетки Ω (индексы j, k, ℓ принимают как целые, так и полуцелые значения) и аппроксимирует в них скорость $\mathbf{v}$ в момент времени $t = t^n$, $n = 0, 1, \ldots$;

2) $\mathbf{v}^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}'_x)^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}'_y)^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}'_z)^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}''_{xy})^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}''_{yz})^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}''_{xz})^n_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}'''_{xyz})^n_{j,k,\ell}$ – заданы только в целых узлах сетки Ω (индексы j, k, ℓ принимают только целые значения) и аппроксимируют в них при $t = t^n$ значения скорости $\mathbf{v}$ и семи ее производных по x, y, z, xy, yz, xz, xyz соответственно. На совокупность этих сеточных функций можно смотреть как на одну сеточную функцию с большим числом компонент на один узел (24 компоненты – 3 компоненты скорости и по 7 производных для каждой из них). Отметим, что такая функция "хранит" примерно столько же чисел, сколько и функция $\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}$, это количество порядка $24N_xN_yN_z$ при $N_x, N_y, N_z \gg 1$;

3) $p^n_{j,k,\ell}$, $(p'_x)^n_{j,k,\ell}$, $(p'_y)^n_{j,k,\ell}$, $(p'_z)^n_{j,k,\ell}$, $(p''_{xy})^n_{j,k,\ell}$, $(p''_{yz})^n_{j,k,\ell}$, $(p''_{xz})^n_{j,k,\ell}$, $(p'''_{xyz})^n_{j,k,\ell}$ – то же, что и в п. 2), только для давления p.

1.4. Аппроксимация конвективной части уравнений Навье–Стокса

Представим систему (2) в виде

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{F}^x(\mathbf{v}) + \partial_y \mathbf{F}^y(\mathbf{v}) + \partial_z \mathbf{F}^z(\mathbf{v}) = 0, \tag{5}$$

где векторы $\mathbf{F}^d(\mathbf{v}) = v_d\mathbf{v}$, $d = x, y, z$. Так как мы уже начали пользоваться методом расщепления для численного решения системы (1), разумно продолжить пользоваться этим методом и для дискретизации системы (2), чтобы добиться наибольшей экономичности результирующей численной схемы для полной системы (1). Применим к системе многомерных уравнений (5) локально-одномерное расщепление по пространству [25], [27], [28] (см. также [16]) и глобальное потоковое расщепление Лакса–Фридрихса (см. [12]), что приведет к ее разбиению на шесть одномерных систем вида:

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_d \mathbf{F}^{d,\pm}(\mathbf{v}) = 0, \quad d = x, y, z, \tag{6}$$

где расщепленные потоки $\mathbf{F}^{d,\pm}(\mathbf{v})$ задаются следующими выражениями:

$$\mathbf{F}^{d,\pm}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{F}^d(\mathbf{v}) \pm C_2^d \mathbf{v}, \quad d = x, y, z. \tag{7}$$

Параметры $C_2^d > 0$ подбираются так, чтобы на некотором множестве $\mathbf{v}$, например, множестве значений сеточной функции $\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}$, матрицы Якоби

$$\mathbf{A}^{d,+}(\mathbf{v}) = \partial_\mathbf{v} \mathbf{F}^{d,+}(\mathbf{v}) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^{d,-}(\mathbf{v}) = \partial_\mathbf{v} \mathbf{F}^{d,-}(\mathbf{v})$$

потоков (7) были соответственно положительно- и отрицательно-определенными. В расчетах настоящей работы параметры C_2^d остаются фиксированными в течение каждого перехода со слоя t^n на слой t^{n+1}, но между этими переходами пересчитываются по формуле:

$$C_2^d = (1 + 2\delta) \max_{j,k,\ell} \left|(v_d)^n_{j,k,\ell}\right|, \quad d = x, y, z, \tag{8}$$

где $\delta > 0$ – константа, отвечающая за “запас” положительной/отрицательной определенности матриц $\mathbf{A}^{\pm}(\mathbf{v})$.

Наконец, каждая из шести систем (6) решается при помощи одномерной бикомпактной схемы с аппроксимацией по времени методом трапеций (как в схеме Кранка–Николсона). В силу аналогичности этих систем друг другу мы остановимся подробно только на системе с потоком $\mathbf{F}^{x,+}(\mathbf{v})$. Для нее указанная бикомпактная схема запишется следующим образом [12]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}A_0^x(\hat{\mathbf{V}}-\check{\mathbf{V}})_{j+1/2,k,\ell}+\frac{1}{2}\Lambda_1^x(\hat{\mathbf{F}}^{x,+}+\check{\mathbf{F}}^{x,+})_{j+1/2,k,\ell}=0,\\ \frac{1}{\tau}\Lambda_1^x(\hat{\mathbf{V}}-\check{\mathbf{V}})_{j+1/2,k,\ell}+\frac{1}{2}\Lambda_2^x(\hat{\mathbf{F}}^{x,+}+\check{\mathbf{F}}^{x,+})_{j+1/2,k,\ell}=0,\\ j=0,1,2,\ldots,N_x-1,\quad k=0,1/2,1,3/2,\ldots,N_y,\quad \ell=0,1/2,1,3/2,\ldots,N_z.\end{gathered}\tag{9}$$

Поясним обозначения: $\hat{\mathbf{V}}_{j,k,\ell}$ и $\check{\mathbf{V}}_{j,k,\ell}$ – это сеточные функции типа $\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}$; первая означает искомое решение на неком промежуточном слое $t=\hat{t}$, а вторая – известное решение на промежуточном слое $t=\check{t}$; в данном случае $\hat{t}-\check{t}=\tau$. Далее, в описании общего алгоритма счета объясняется, что конкретно фигурирует в схеме (9) вместо $\hat{\mathbf{V}}$ и $\check{\mathbf{V}}$. Символами A_0^x, Λ_1^x, Λ_2^x обозначены следующие одномерные сеточные операторы:

$$A_0^xU_{j+1/2,k,\ell}=\frac{U_{j,k,\ell}+4U_{j+1/2,k,\ell}+U_{j+1,k,\ell}}{6},\quad \Lambda_1^xU_{j+1/2,k,\ell}=\frac{U_{j+1,k,\ell}-U_{j,k,\ell}}{h_{x,j+1/2}},$$
$$\Lambda_2^xU_{j+1/2,k,\ell}=\frac{4(U_{j,k,\ell}-2U_{j+1/2,k,\ell}+U_{j+1,k,\ell})}{h^2_{x,j+1/2}},$$

где $U_{j,k,\ell}$ – произвольная сеточная функция, определенная во всех узлах Ω. Потоки $\hat{\mathbf{F}}^{x,+}_{j,k,\ell}$ и $\check{\mathbf{F}}^{x,+}_{j,k,\ell}$ для всех j, k, ℓ (и целых, и полуцелых) определяются формулами:

$$\hat{\mathbf{F}}^{x,+}_{j,k,\ell}\equiv\mathbf{F}^{x,+}(\hat{\mathbf{V}}_{j,k,\ell}),\quad \check{\mathbf{F}}^{x,+}_{j,k,\ell}\equiv\mathbf{F}^{x,+}(\check{\mathbf{V}}_{j,k,\ell})\quad \forall j,k,\ell.$$

Схема (9) дополняется периодическим граничным условием:

$$\hat{\mathbf{V}}_{0,k,\ell}=\hat{\mathbf{V}}_{N_x,k,\ell}\quad \forall k,\ell.\tag{10}$$

Искомое решение $\hat{\mathbf{V}}$ вычисляется из нелинейных сеточных уравнений (9), (10) посредством метода Ньютона (с относительной погрешностью rtol > 0) и одномерных циклических двухточечных прогонок вдоль оси Ox. Устойчивость этих прогонок гарантируется знакоопределенностью матриц $\mathbf{A}^{x,+}(\hat{\mathbf{V}}_{j,k,\ell})$. Обозначим нахождение решения $\hat{\mathbf{V}}$ по известному решению $\check{\mathbf{V}}$ символически как действие оператора послойного перехода $S^{x,+}_{\mathrm{conv}}(\tau)$:

$$\hat{\mathbf{V}}=S^{x,+}_{\mathrm{conv}}(\tau)\check{\mathbf{V}}.$$

Поток с противоположным знаком $\mathbf{F}^{x,-}(\mathbf{v})$, а также направления y, z (т.е. все остальные одномерные системы (6)) рассматриваются аналогично; операторы перехода соответствующих им одномерных бикомпактных схем обозначим через $S^{x,-}_{\mathrm{conv}}(\tau)$ и $S^{d,\pm}_{\mathrm{conv}}(\tau)$, $d=y,z$.

Итоговая симметризованная по x, y локально-одномерная бикомпактная схема для конвективной части (2) определяется своим оператором перехода $S_{\mathrm{conv}}(\tau)$:

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{V}}=S_{\mathrm{conv}}(\tau)\check{\mathbf{V}},\quad S_{\mathrm{conv}}(\tau)=S^x_{\mathrm{conv}}\left(\frac{\tau}{2}\right)S^y_{\mathrm{conv}}\left(\frac{\tau}{2}\right)S^z_{\mathrm{conv}}(\tau)S^y_{\mathrm{conv}}\left(\frac{\tau}{2}\right)S^x_{\mathrm{conv}}\left(\frac{\tau}{2}\right),\\ S^d_{\mathrm{conv}}(\tau)=S^{d,-}_{\mathrm{conv}}(\tau)S^{d,+}_{\mathrm{conv}}(\tau),\quad d=x,y,z.\end{gathered}\tag{11}$$

Данная схема аппроксимирует периодическую краевую задачу для уравнений (2) с погрешностью $O(\tau^2,h^4)$ при $\tau,h\to 0$, где h – максимальный пространственный шаг.

Заметим, что для аппроксимации по времени совсем не обязательно использовать метод трапеций, вместо него, к примеру, можно выбрать любой другой A- или L-устойчивый диагонально-неявный метод Рунге—Кутты высокого порядка. Наше предпочтение методу трапеций обусловлено двумя факторами.

1. Порядок аппроксимации метода трапеций равен двум, что совпадает с порядком метода расщепления Марчука—Стрэнга.

2. Этот второй порядок экономично достигается лишь за одну неявную стадию.

1.5. Аппроксимация вязкой части уравнений Навье—Стокса

Сделаем небольшое отступление от нашего изложения, чтобы продемонстрировать, откуда получаются сеточные операторы, необходимые для написания бикомпактной схемы для системы (3).

Пусть $u(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция. Введем тогда сеточные функции $u_j = u(x_j)$ и $(u'_x)_j = du(x_j)/dx$, где индекс j пробегает только целые значения. Обратимся к ячейке $x \in [x_j, x_{j+1}]$: имея на ее границах четыре значения: u_j, u_{j+1}, $(u'_x)_j$, $(u'_x)_{j+1}$, мы можем построить по ним кубический интерполяционный полином Эрмита $u_h(x)$, который будет приближать функцию $u(x)$ внутри ячейки с погрешностью $O(h^4_{x,j+1/2})$ при $h_{x,j+1/2} \to 0$. Нетрудно показать, что для полинома $u_h(x)$ имеют место такие формулы (ради компактности записи опускаем индекс $j+1/2$ у шага $h_{x,j+1/2}$):

$$\begin{gathered}
\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} u_h(x)dx = \frac{u_j + u_{j+1}}{2} + \frac{h_x}{12}[(u'_x)_j - (u'_x)_{j+1}] \equiv \tilde{A}_0^x u_{j+1/2}, \\
\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{du_h(x)}{dx}dx = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} \equiv \tilde{\Lambda}_1^x u_{j+1/2}, \\
\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d^2u_h(x)}{dx^2}dx = \frac{(u'_x)_{j+1} - (u'_x)_j}{h_x} \equiv \tilde{\Lambda}_2^x u_{j+1/2}, \\
\frac{1}{h_x}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d^3u_h(x)}{dx^3}dx = \frac{6}{h_x^2}\left((u'_x)_j - 2\frac{u_{j+1} - u_j}{h_x} + (u'_x)_{j+1}\right) \equiv \tilde{\Lambda}_3^x u_{j+1/2}
\end{gathered} \tag{12}$$

(член $h_x\tilde{A}_0^x u_{j+1/2}$ совпадает с известной квадратурой Эйлера—Маклорена). Формулы (12) определяют сеточные операторы $\tilde{A}_0^x$, $\tilde{\Lambda}_1^x$, $\tilde{\Lambda}_2^x$, $\tilde{\Lambda}_3^x$, действующие на сеточные функции, заданные только в целых узлах и дополненные своими сеточными функциями-производными. Эти новые сеточные операторы представляются в виде комбинаций трех более простых операторов M_0^x, Δ_0^x, P^x:

$$M_0^x u_{j+1/2} = \frac{u_j + u_{j+1}}{2}, \quad \Delta_0^x u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j, \quad P^x u_j = (u'_x)_j;$$

$$\tilde{A}_0^x = M_0^x - \frac{h_x}{12}\Delta_0^x P^x, \quad \tilde{\Lambda}_1^x = \frac{1}{h_x}\Delta_0^x, \quad \tilde{\Lambda}_2^x = \frac{1}{h_x}\Delta_0^x P^x, \quad \tilde{\Lambda}_3^x = \frac{12}{h_x^2}\left(M_0^x P^x - \frac{1}{h_x}\Delta_0^x\right).$$

Очевидно, оператор P^x при действии на сеточную функцию u_j заменяет ее значение на значение соответствующей ей сеточной функции-производной $(u'_x)_j$ в том же узле.

Вернемся к системе (3). Возьмем ее саму и семь ее дифференциальных следствий — производных по x, y, z, xy, yz, xz, xyz, осредним эти восемь векторных уравнений по ячейке $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}] \times [z_\ell, z_{\ell+1}]$ (т.е. проинтегрируем и поделим на объем ячейки), сведем кратные интегралы к повторным, одномерные интегралы приблизим по формулам (12), для аппроксимации по времени применим метод трапеций. В результате перечисленных действий получится следующая бикомпактная схема для системы (3):

$$\frac{1}{\tau}\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}} - \check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}} + \check{\mathbf{v}})_C,$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\tau}\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
\frac{1}{\tau}\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
\frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
\frac{1}{\tau}\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
\frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
\frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
\frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}-\check{\mathbf{v}})_C = \frac{1}{2\mathrm{Re}}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}+\check{\mathbf{v}})_C,\\
C = (j+1/2, k+1/2, \ell+1/2) - \text{мультииндекс},\\
j = 0, 1, 2, \ldots, N_x - 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y - 1, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z - 1.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Сеточные функции $\hat{\mathbf{v}}_{j,k,\ell}$ и $\check{\mathbf{v}}_{j,k,\ell}$ – это сеточные функции типа $\mathbf{v}^n_{j,k,\ell}$; первая означает некое промежуточное искомое решение, а вторая – некое известное решение (сказанное распространяется также на отвечающие им всем их сеточные функции-производные). Ради ясности перечислим все возможные варианты действия операторов P^x, P^y, P^z:

$$
\begin{gathered}
P^x\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}'_x)_{j,k,\ell}, \quad P^y\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}'_y)_{j,k,\ell}, \quad P^z\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}'_z)_{j,k,\ell}, \quad P^xP^y\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}''_{xy})_{j,k,\ell},\\
P^yP^z\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}''_{yz})_{j,k,\ell}, \quad P^xP^z\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}''_{xz})_{j,k,\ell}, \quad P^xP^yP^z\mathbf{v}_{j,k,\ell} = (\mathbf{v}'''_{xyz})_{j,k,\ell},
\end{gathered}
$$

причем все они полагаются коммутирующими между собой:

$$
P^{d_1}P^{d_2} = P^{d_2}P^{d_1} \quad \forall d_{1,2} = x, y, z, \quad d_1 \neq d_2.
$$

Дискретные уравнения (13) дополняются периодическими граничными условиями, по сути представляющими из себя проекцию граничных условий для системы дифференциальных уравнений (3):

$$
\begin{gathered}
\hat{\mathbf{v}}_{0,k,\ell} = \hat{\mathbf{v}}_{N_x,k,\ell}, \quad (\hat{\mathbf{v}}'_x)_{0,k,\ell} = (\hat{\mathbf{v}}'_x)_{N_x,k,\ell}\\
\hat{\mathbf{v}}_{j,0,\ell} = \hat{\mathbf{v}}_{j,N_y,\ell}, \quad (\hat{\mathbf{v}}'_y)_{j,0,\ell} = (\hat{\mathbf{v}}'_y)_{j,N_y,\ell},\\
\hat{\mathbf{v}}_{j,k,0} = \hat{\mathbf{v}}_{j,k,N_z}, \quad (\hat{\mathbf{v}}'_z)_{j,k,0} = (\hat{\mathbf{v}}'_z)_{j,k,N_z},\\
j = 0, 1, 2, \ldots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Соотношения (14) являются достаточными, поскольку граничные условия для остальных искомых сеточных функций $(\hat{\mathbf{v}}''_{xy})_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}''_{yz})_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}''_{xz})_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}'''_{xyz})_{j,k,\ell}$ получаются путем подходящего применения операторов P^x, P^y, P^z к равенствам (14) (например, к первым двум из них необходимо применять операторы P^y, P^z и P^yP^z, что соответствует дифференцированию вдоль границы условий для системы (3)).

Схема (13), (14) аппроксимирует периодическую краевую задачу для системы (3) с погрешностью $O(\tau^2, h^4)$. Важно отметить, что описанный выше метод получения бикомпактной пространственной аппроксимации четвертого порядка для многомерного уравнения теплопроводности обобщает метод работы [11], в которой был рассмотрен только одномерный случай.

Обозначим оператор послойного перехода бикомпактной схемы (13), (14) как $S_{\mathrm{visc}}(\tau)$:

$$
\hat{\mathbf{v}} = S_{\mathrm{visc}}(\tau)\,\check{\mathbf{v}}. \tag{15}
$$

Здесь и далее, записывая “$\hat{\mathbf{v}}$” без индексов, мы будем иметь в виду всю восьмерку сеточных функций $\hat{\mathbf{v}}_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}'_x)_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}'_y)_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}'_z)_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}''_{xy})_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}''_{yz})_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}''_{xz})_{j,k,\ell}$, $(\hat{\mathbf{v}}'''_{xyz})_{j,k,\ell}$ (аналогично для $\check{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v}^n$).

Поясним теперь, как именно из уравнений (13), (14) вычисляется искомое решение $\hat{\mathbf{v}}$. Предлагается использовать метод итерируемой приближенной факторизации (ИПФ). Пусть $\hat{\mathbf{v}}^{(s)}$ – приближение с номером s к искомому решению $\hat{\mathbf{v}}$ ($s = 0, 1, \ldots$), начальное приближение $\hat{\mathbf{v}}^{(0)} = \check{\mathbf{v}}$; обозначим через $\delta\hat{\mathbf{v}}^{(s+1)} = \hat{\mathbf{v}}^{(s+1)} - \hat{\mathbf{v}}^{(s)}$. Введем сеточные операторы:

$$B_1^d(\alpha) = \tilde{A}_0^d - \alpha\tilde{\Lambda}_2^d, \quad B_2^d(\alpha) = \tilde{\Lambda}_1^d - \alpha\tilde{\Lambda}_3^d, \quad d = x, y, z, \tag{16}$$

где $\alpha > 0$ – параметр. Тогда уравнения метода ИПФ, записанные посредством операторов (16), имеют вид:

$$\begin{aligned}
&B_1^z(\tau^*)B_1^y(\tau^*)B_1^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{1C}^{(s)}, \quad B_2^z(\tau^*)B_1^y(\tau^*)B_1^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{4C}^{(s)},\\
&B_1^z(\tau^*)B_1^y(\tau^*)B_2^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{2C}^{(s)}, \quad B_2^z(\tau^*)B_1^y(\tau^*)B_2^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{7C}^{(s)},\\
&B_1^z(\tau^*)B_2^y(\tau^*)B_1^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{3C}^{(s)}, \quad B_2^z(\tau^*)B_2^y(\tau^*)B_1^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{6C}^{(s)},\\
&B_1^z(\tau^*)B_2^y(\tau^*)B_2^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{5C}^{(s)}, \quad B_2^z(\tau^*)B_2^y(\tau^*)B_2^x(\tau^*)\delta\hat{\mathbf{v}}_C^{(s+1)} = \varphi_{8C}^{(s)},
\end{aligned} \tag{17}$$

где $\tau^* = \tau/(2\mathrm{Re})$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{1C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{2C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{3C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{4C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{5C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{6C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{7C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C,\\
\varphi_{8C}^{(s)} &= \tau^*(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x)(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} + \check{\mathbf{v}})_C - \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\hat{\mathbf{v}}^{(s)} - \check{\mathbf{v}})_C.
\end{aligned}$$

Граничные условия для (17) получаются путем добавления “δ” и верхнего индекса “$(s+1)$” в соотношения (14). Искомое приращение $\delta\hat{\mathbf{v}}^{(s+1)}$ находится из уравнений (17) обращением пар одномерных операторов $(B_1^d(\tau^*), B_2^d(\tau^*))$ в такой последовательности: по z, по y, по x. В свою очередь, обращение каждой такой пары на всей сетке сводится к совокупности независимых одномерных циклических двухточечных прогонок, устойчивых коль скоро $\tau^* > 0$, т.е. всегда. Конечно, тот факт, что векторное уравнение (3) распадается на три независимых скалярных уравнения для компонент скорости, отражается и в схеме (13), и в методе ИПФ (17), благодаря чему все вычисления можно выполнять отдельно для каждой компоненты скорости независимо от других компонент (т.е., например, сначала находится $\hat{v}_x$, далее $\hat{v}_y$, потом $\hat{v}_z$). Итерирование кончается, если выполнено условие сходимости

$$\max_{j,k,\ell}\left|\delta(\hat{v}_d)_{j,k,\ell}^{(s+1)}\right| \le \mathrm{rtol}\cdot\max_{j,k,\ell}\left|(\hat{v}_d)_{j,k,\ell}^{(s+1)}\right|, \quad d = x, y, z.$$

1.6. Аппроксимация части уравнений Навье–Стокса, отвечающей за силы давления и несжимаемость жидкости

Здесь мы будем действовать иначе – сперва дискретизируем уравнения (4) по времени при помощи неявного методом Эйлера:

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \check{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla\hat{p}, \quad \operatorname{div}\hat{\mathbf{v}} = 0.$$

Затем, взяв дивергенцию от обеих частей первого уравнения и воспользовавшись вторым уравнением, получим два независимых уравнения:

$$\Delta\hat{p} = \frac{1}{\tau}\operatorname{div}\check{\mathbf{v}}, \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \check{\mathbf{v}} - \tau\nabla\hat{p}. \tag{19}$$

Таким образом, численное решение (4) разбивается на две отдельные подзадачи: решение уравнения Пуассона для давления (18) и пересчет скорости жидкости по формуле (19).

Построение бикомпактной схемы для уравнения Пуассона (18) не составляет большого труда. Совершая в точности те же операции, что и при выводе схемы (13) для уравнения (3), получаем искомую схему:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_x)_C + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{A}_0^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x(\check{v}_x)_C + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_x)_C + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_x)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x(\check{v}_x)_C + \tilde{A}_0^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{A}_0^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_x)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{A}_0^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_2^x(\check{v}_x)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{A}_0^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_z)_C),\\
&(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_3^x + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_3^y\tilde{\Lambda}_1^x + \tilde{\Lambda}_3^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x)\hat{p}_C = \frac{1}{\tau}(\tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_2^x(\check{v}_x)_C + \tilde{\Lambda}_1^z\tilde{\Lambda}_2^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_y)_C + \tilde{\Lambda}_2^z\tilde{\Lambda}_1^y\tilde{\Lambda}_1^x(\check{v}_z)_C),\\
&j = 0, 1, 2, \ldots, N_x - 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y - 1, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z - 1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение Пуассона (18), как и полная система уравнений Навье–Стокса, решается при периодических граничных условиях, проекция которых на сетку дает дискретные граничные условия для схемы (20):

$$\begin{gathered}
\hat{p}_{0,k,\ell} = \hat{p}_{N_x,k,\ell}, \quad (\hat{p}'_x)_{0,k,\ell} = (\hat{p}'_x)_{N_x,k,\ell}\\
\hat{p}_{j,0,\ell} = \hat{p}_{j,N_y,\ell}, \quad (\hat{p}'_y)_{j,0,\ell} = (\hat{p}'_y)_{j,N_y,\ell},\\
\hat{p}_{j,k,0} = \hat{p}_{j,k,N_z}, \quad (\hat{p}'_z)_{j,k,0} = (\hat{p}'_z)_{j,k,N_z},\\
j = 0, 1, 2, \ldots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z.
\end{gathered} \tag{21}$$

Бикомпактная схема (20), (21) аппроксимирует периодическую краевую задачу для уравнения Пуассона (18) с погрешностью $O(h^4)$. Заметим, что в погрешности нет члена $O(h^4/\tau)$: хотя дивергенция скорости делится на τ, она сама обязана иметь асимптотику $O(\tau)$, так как при сгущении сетки численное распределение давления сходится к точному и составляет конечную величину $O(1)$.

Для реализации схемы (20) применяется метод ИПФ. Уравнения этого метода для нее совершенно аналогичны тем, что были приведены выше для схемы (13). Разница состоит лишь в том, что в качестве аргумента у операторов $B_{1,2}^d(\cdot)$, $d = x, y, z$, выступает не модифицированный временной шаг τ^*, а параметр $\theta > 0$ – настраиваемый параметр итерационного метода.

Обозначим нахождение давления $\hat{p}$ по схеме (20), (21) символически как действие оператора $S_{\text{ell}}(\tau)$ на $\check{\mathbf{v}}$:

$$\hat{p} = S_{\text{ell}}(\tau)\,\check{\mathbf{v}}. \tag{22}$$

Обратимся к пространственной дискретизации соотношения (19). Для компоненты скорости v_x имеем

$$\hat{v}_x = \check{v}_x - \tau\partial_x\hat{p}. \tag{23}$$

Проекция на сетку соотношения (23) и его дифференциальных следствий – производных по y, z, yz дает следующие формулы:

$$\begin{gathered}(\hat{v}_x)_{j,k,\ell} = (\check{v}_x)_{j,k,\ell} - \tau(\hat{p}'_x)_{j,k,\ell},\\ ((\hat{v}_x)'_y)_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)'_y)_{j,k,\ell} - \tau(\hat{p}''_{xy})_{j,k,\ell},\\ ((\hat{v}_x)'_z)_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)'_z)_{j,k,\ell} - \tau(\hat{p}''_{xz})_{j,k,\ell},\\ ((\hat{v}_x)'_{yz})_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)'_{yz})_{j,k,\ell} - \tau(\hat{p}'''_{xyz})_{j,k,\ell},\\ j = 0, 1, 2, \ldots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z.\end{gathered} \tag{24}$$

Легко видеть, что формулы (24) позволяют найти лишь четыре из восьми искомых сеточных функций. Оставшиеся четыре функции должны вычисляться из еще не рассмотренных дифференциальных следствий (23) – его производных по x, xy, xz, xyz. Ясно, что эти следствия нельзя спроецировать на сетку, так как тогда мы, например, столкнемся со второй производной от давления по x, которая не содержится непосредственно в решении для $\hat{p}$. Вспомним пример с функцией $u(x)$, в рамках которого выведены формулы (12). Аппроксимируем значение $u''_{xx}(x_j)$ с погрешностью $O(h_x^3)$ на трехточечном шаблоне $\{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ по значениям сеточных функций u_j и $(u'_x)_j$ и обозначим эту аппроксимацию через $D_2^x u_j$:

$$u''_{xx}(x_j) = D_2^x u_j + O(h_x^3). \tag{25}$$

На равномерной сетке оператор D_2^x выражается в виде

$$D_2^x u_j = \frac{2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})}{h_x^2} - \frac{(u'_x)_{j+1} - (u'_x)_{j-1}}{2h_x},$$

а формула (25) повышает свою точность до $O(h_x^4)$. Используя трехточечную аппроксимацию (25), напишем расчетные формулы для оставшейся половины $\hat{v}_x$:

$$\begin{gathered}((\hat{v}_x)'_x)_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)'_x)_{j,k,\ell} - \tau D_2^x\hat{p}_{j,k,\ell},\\ ((\hat{v}_x)''_{xy})_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)''_{xy})_{j,k,\ell} - \tau D_2^x(\hat{p}'_y)_{j,k,\ell},\\ ((\hat{v}_x)''_{xz})_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)''_{xz})_{j,k,\ell} - \tau D_2^x(\hat{p}'_z)_{j,k,\ell},\\ ((\hat{v}_x)'''_{xyz})_{j,k,\ell} = ((\check{v}_x)'''_{xyz})_{j,k,\ell} - \tau D_2^x(\hat{p}''_{yz})_{j,k,\ell},\\ j = 0, 1, 2, \ldots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z.\end{gathered} \tag{26}$$

Заметим, что диапазоны изменения индексов j, k, ℓ в формулах (26) приведены корректно: например, значение $\hat{p}_{-1,k,\ell}$ заменяется на $\hat{p}_{N_x-1,k,\ell}$ в силу периодичности вычисляемого решения задачи.

Что касается дискретизации соотношения (19) применительно к v_y и v_z, то она выводится в полной аналогии с рассуждениями предыдущего абзаца, поэтому выписывать варианты формул (24), (26) для v_y и v_z мы не будем. Обозначим нахождение $\hat{\mathbf{v}}$ по формулам (24), (26) и их аналогам для v_y и v_z символически как действие оператора перехода $S_{\text{pr}}(\tau, \hat{p})$:

$$\hat{\mathbf{v}} = S_{\text{pr}}(\tau, \hat{p})\,\check{\mathbf{v}}. \tag{27}$$

1.7. Переходы между разными представлениями поля скоростей

Для составления полного алгоритма счета осталось рассмотреть и описать две операции: пересчет численного решения $\mathbf{v}^n$ в решение $\mathbf{V}^n$ и наоборот.

Переход от $\mathbf{v}^n$ к $\mathbf{V}^n$ осуществляется достаточно просто: решение $\mathbf{v}^n$ содержит всю информацию, необходимую для построения в каждой ячейке сетки трикубического (то есть трехмерного аналога бикубического) интерполяционного полинома Эрмита. Отметим, что совокупность этих полиномов представляет из себя трикубический сплайн гладкости 1. Этот сплайн позволяет посчитать скорость жидкости в любой точке $\overline{D}$ с четвертым порядком точности, в частности, в полуцелых узлах сетки Ω. Следуя нашим обозначениям, обозначим пересчет $\mathbf{v}^n$ в $\mathbf{V}^n$ через действие оператора $S_{\mathbf{v}\to\mathbf{V}}$:

$$\mathbf{V}^n = S_{\mathbf{v}\to\mathbf{V}}\mathbf{v}^n. \tag{28}$$

Переход от $\mathbf{V}^n$ к $\mathbf{v}^n$ выполняется при помощи пятиточечной конечно-разностной аппроксимации для первой производной с третьим порядком точности. На равномерной сетке формулы пересчета $\mathbf{V}^n$ в $\mathbf{v}^n$ имеют четвертый порядок точности и записываются в виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}^n_{j,k,\ell} = \mathbf{V}^n_{j,k,\ell}, \quad (\mathbf{v}'_x)^n_{j,k,\ell} = \frac{8(\mathbf{V}^n_{j+1/2,k,\ell} - \mathbf{V}^n_{j-1/2,k,\ell}) - (\mathbf{V}^n_{j+1,k,\ell} - \mathbf{V}^n_{j-1,k,\ell})}{6h_x} \equiv D_1^x\mathbf{V}^n_{j,k,\ell},\\
(\mathbf{v}'_y)^n_{j,k,\ell} = D_1^y\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}, \quad (\mathbf{v}'_z)^n_{j,k,\ell} = D_1^z\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}, \quad (\mathbf{v}''_{xy})^n_{j,k,\ell} = D_1^yD_1^x\mathbf{V}^n_{j,k,\ell},\\
(\mathbf{v}''_{yz})^n_{j,k,\ell} = D_1^zD_1^y\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}, \quad (\mathbf{v}''_{xz})^n_{j,k,\ell} = D_1^zD_1^x\mathbf{V}^n_{j,k,\ell}, \quad (\mathbf{v}'''_{xyz})^n_{j,k,\ell} = D_1^zD_1^yD_1^x\mathbf{V}^n_{j,k,\ell},\\
j = 0, 1, 2, \ldots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_y, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots, N_z.
\end{gathered} \tag{29}$$

Поставим в соответствие этим формулам пересчета оператор $S_{\mathbf{V}\to\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{v}^n = S_{\mathbf{V}\to\mathbf{v}}\mathbf{V}^n. \tag{30}$$

1.8. Результирующая бикомпактная схема и общий алгоритм счета

Введенные выше операторы перехода (11), (15), (22), (27), (28) и (30) позволяют записать результирующую бикомпактную схему в максимально лаконичном виде:

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{v}} = S_{\text{visc}}\left(\frac{\tau}{2}\right)S_{\mathbf{V}\to\mathbf{v}}S_{\text{conv}}(\tau)S_{\mathbf{v}\to\mathbf{V}}S_{\text{visc}}\left(\frac{\tau}{2}\right)S_{\text{pr}}\left(\frac{\tau}{2}, p^n\right)\mathbf{v}^n,\\
p^{n+1} = S_{\text{ell}}\left(\frac{\tau}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v}^{n+1} = S_{\text{pr}}\left(\frac{\tau}{2}, p^{n+1}\right)\tilde{\mathbf{v}}.
\end{gathered} \tag{31}$$

Бикомпактная схема (31) аппроксимирует систему уравнений Навье–Стокса (1) с погрешностью $O(\tau^2, h^3)$ на неравномерных пространственных сетках и с погрешностью $O(\tau^2, h^4)$ на равномерных сетках. В любом случае, при $\tau = O(h)$ погрешность аппроксимации составляет $O(\tau^2)$. Отметим, что при такой связи между шагами τ и h максимальное конвективное (гиперболическое) число Куранта остается постоянным при сгущении сетки, что вполне уместно и желательно при расчетах течений с доминированием процесса конвекции, т.е. при больших числах Рейнольдса.

Далее схему (31) мы будем сокращенно называть T2B4. Тем самым мы подчеркиваем, что для счета по времени применяется метод трапеций второго порядка, а для дискретизации пространственных производных в уравнениях (2), (3), (18) – бикомпактная аппроксимация четвертого порядка.

Дадим также словесное описание общего алгоритма счета по схеме T2B4. Переход со слоя t^n на слой t^{n+1} делится на 9 этапов.

Шаг 1. Вычислить параметры потокового расщепления C_2^d, $d = x, y, z$, по формуле (8).

Шаг 2. Добавить к скорости $\mathbf{v}^n$ слагаемое $(-(\tau/2)\nabla p^n)$ по формулам (24), (26) и их вариантам для v_y, v_z.

Шаг 3. Сделать полшага $(\tau/2)$ по бикомпактной схеме (13), (14) для вязкой части уравнений Навье–Стокса, взяв в качестве $\check{\mathbf{v}}$ скорость, найденную на шаге 2.

Шаг 4. Построить в каждой ячейке сетки трикубический интерполяционный полином Эрмита для скорости, найденной на шаге 3. При помощи этого полинома посчитать значения скорости в полуцелых узлах сетки Ω, отбросив после этого значения производных скорости в целых узлах.

Шаг 5. Сделать полный шаг (τ) по локально-одномерной бикомпактной схеме (11) для конвективной части уравнений Навье–Стокса, взяв вместо $\check{\mathbf{V}}$ скорость, полученную на шаге 4.

Шаг 6. Посчитать по формулам (29) значения производных скорости, найденной на шаге 5, в целых узлах сетки Ω, отбросив после этого значения скорости в полуцелых узлах.

Шаг 7. Сделать полшага ($\tau/2$) по бикомпактной схеме (13), (14) для вязкой части уравнений Навье–Стокса, взяв в качестве $\check{\mathbf{v}}$ скорость, найденную на шаге 6.

Шаг 8. Найти по бикомпактной схеме (20), (21) искомое давление на верхнем слое p^{n+1}, заменив при этом шаг τ на $\tau/2$, а скорость $\check{\mathbf{v}}$ на скорость, найденную на шаге 7.

Шаг 9. Получить искомую скорость на верхнем слое $\mathbf{v}^{n+1}$, добавив к скорости, найденной на шаге 7, слагаемое $(-(\tau/2)\nabla p^{n+1})$ по формулам (24), (26) и их вариантам для v_y, v_z.

2. ДВУМЕРНЫЙ ВИХРЬ ТЕЙЛОРА–ГРИНА: ПРОВЕРКА СХЕМЫ НА СЕТОЧНУЮ СХОДИМОСТЬ

Продемонстрируем сеточную сходимость бикомпактной схемы T2B4 (31) на точном решении задачи о двумерном вихре Тейлора–Грина:

$$\begin{gathered} v_x = e^{-t/\mathrm{Re}}\cos x \sin y, \quad v_y = -e^{-t/\mathrm{Re}}\sin x\cos y, \quad v_z = 0, \\ p = -\frac{1}{4}e^{-2t/\mathrm{Re}}(\cos 2x + \cos 2y). \end{gathered} \tag{32}$$

В отличие от своего трехмерного аналога, двумерный одночастотный вихрь Тейлора–Грина не распадается, а сохраняет свою структуру, экспоненциально затухая во времени, что ясно из формул для решения (32).

Хотя задачу о двумерном вихре Тейлора–Грина можно и разумно решать в плоскости Oxy на двумерной сетке, мы проведем вычисления во всех трех измерениях на трехмерной сетке, чтобы проверить именно трехмерную схему T2B4 и алгоритм счета для нее, описанные в разд. 1.

Расчеты выполним при $\mathrm{Re} = 10$ до момента времени $t_{\max} = 0.5$. Пространственные сетки равномерные, имеют размеры $N \times N \times 2$, где N пробегает значения 25, 50, 100, 200, 400; шаг $\tau = \mathrm{const}$, количество шагов по времени берется равным 10, 20, 40, 80, 160 соответственно (конвективное число Куранта в начальный момент времени $t = 0$ равно 0.4, вязкое – примерно 0.08 для сетки с $N = 25$). Параметр потокового расщепления $\delta = 0.2$, параметр метода ИПФ при решении уравнения Пуассона $\theta = 0.2$, относительная точность для всех итерационных методов $\mathrm{rtol} = 10^{-10}$.

В табл. 1 приведены абсолютные погрешности E_∞ и локальные порядки сходимости k_∞ бикомпактной схемы T2B4 в норме L_∞ в момент времени $t = t_{\max}$. Любопытно, что в данной конкретной задаче апостериорные порядки сходимости превосходят ожидаемый теоретический (второй): порядки сходимости для компонент скорости v_x и v_y меняются от 3 до 2.4; для давления p – от примерно 2.25 до 2.4; погрешность в компоненте v_z как минимум в 10^3 раз меньше погрешностей в компонентах v_x и v_y на каждой сетке и быстро (с 4–5 порядком) стремится к величине, почти десятикратно меньшей rtol. Подводя итог, можно констатировать, что в данной постановке задачи о двумерном вихре Тейлора–Грина бикомпактная схема T2B4 сходится с порядком больше 2.

Добавим, что метод ИПФ для схем (13) и (20) при $N = 100$ сходится до относительной погрешности $\mathrm{rtol} = 10^{-10}$ за 25 и 40 итераций соответственно; при менее жестком ограничении на точность итераций в $\mathrm{rtol} = 10^{-7}$ ИПФ сходится за 2 и 15 итераций соответственно.

Таблица 1. Абсолютные погрешности E_∞ и локальные порядки сходимости k_∞ бикомпактной схемы T2B4 в норме L_∞ в задаче о двумерном вихре Тейлора–Грина

N	E_∞, k_∞ для v_x		E_∞, k_∞ для v_y		E_∞, k_∞ для v_z		E_∞, k_∞ для p	
25	9.93E–04		9.84E–04		1.34E–07		8.13E–04	
50	1.25E–04	2.99	1.21E–04	3.02	3.96E–09	5.08	1.70E–04	2.26
100	1.68E–05	2.90	1.50E–05	3.01	3.11E–10	3.67	3.22E–05	2.40
200	2.79E–06	2.60	2.64E–06	2.50	7.63E–12	5.35	5.74E–06	2.49
400	5.25E–07	2.41	4.88E–07	2.44	7.28E–12	0.07	1.10E–06	2.39

3. ТРЕХМЕРНЫЙ ВИХРЬ ТЕЙЛОРА–ГРИНА

3.1. Начальное условие задачи

Начальное условие задачи о трехмерном вихре Тейлора–Грина имеет вид:

$$
\begin{gathered}
v_x\big|_{t=0} = \sin x \cos y \cos z, \quad v_y\big|_{t=0} = -\cos x \sin y \cos z, \quad v_z\big|_{t=0} = 0, \\
p\big|_{t=0} = \frac{1}{16}(\cos 2x + \cos 2y)(2 + \cos 2z).
\end{gathered} \tag{33}
$$

Хотя $v_z\big|_{t=0} = 0$, начальное давление $p\big|_{t=0}$ имеет ненулевой градиент по z, который создает движение жидкости вдоль оси Oz, приводящее к распаду (разрушению) исходного одночастотного вихря (33). Известно (см. [24]), что при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} < 500$ трехмерный вихрь Тейлора–Грина распадается в ламинарном режиме, а при остальных Re – в турбулентном.

Посчитаем эту задачу по бикомпактной схеме T2B4 (31) при $\mathrm{Re} = 400, 800, 1600$, рассмотрев тем самым оба режима распада. Счет будем вести до времени $t_{\max} = 20$. Перечислим параметры схемы T2B4, общие для всех расчетов: $\delta = 0.2$, $\theta = 0.2$, $\mathrm{rtol} = 10^{-7}$. Сетки для всех вариантов задачи равномерные и по пространству, и по времени.

Необходимо также сделать два пояснения. Во-первых, (средняя удельная) кинетическая энергия жидкости E_K определяется как

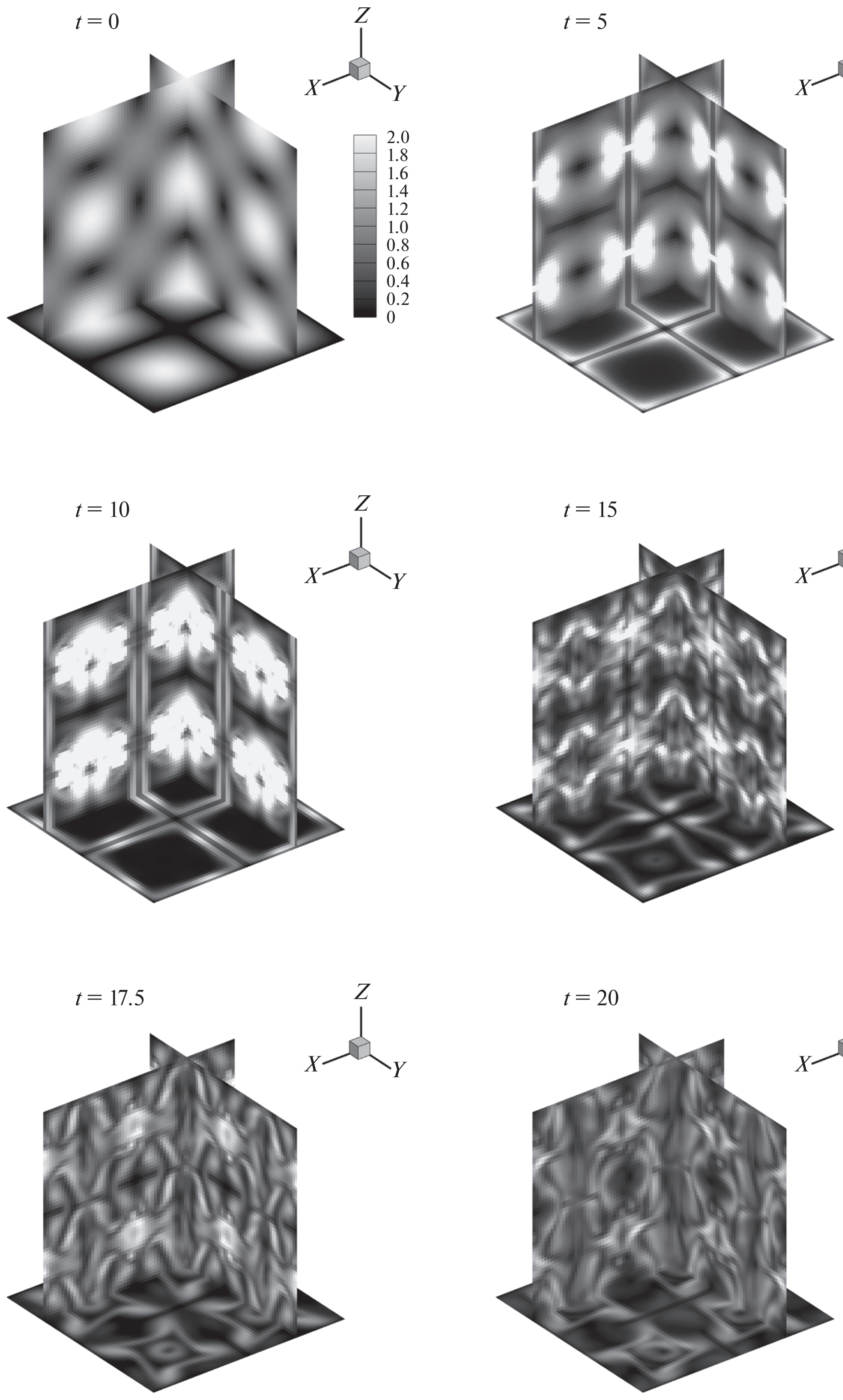
$$
E_K = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_D \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} dxdydz
$$

и вычисляется по квадратурной формуле трапеций. Во-вторых, значения вектора вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ в целых узлах сетки Ω вычисляются из сеточных функций $(\mathbf{v}'_x)_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}'_y)_{j,k,\ell}$, $(\mathbf{v}'_я)_{j,k,\ell}$ непосредственно (без дополнительных аппроксимаций) по формуле:

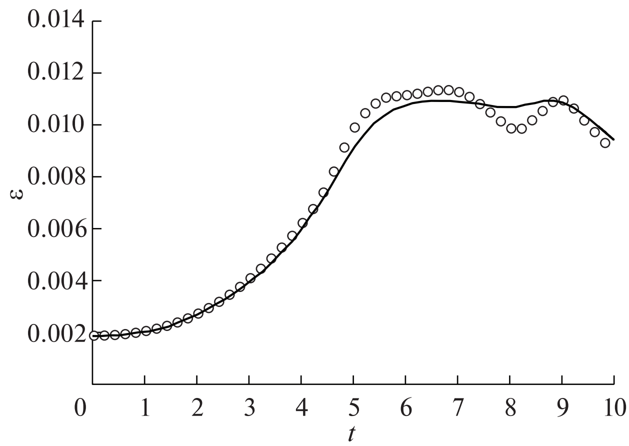
$$
\boldsymbol{\omega}_{j,k,\ell} = \begin{bmatrix} ((v_z)'_y)_{j,k,\ell} - ((v_y)'_z)_{j,k,\ell} \\ ((v_x)'_z)_{j,k,\ell} - ((v_z)'_x)_{j,k,\ell} \\ ((v_y)'_x)_{j,k,\ell} - ((v_x)'_y)_{j,k,\ell} \end{bmatrix}.
$$

3.2. Результаты для Re = 400

Возьмем сетку по пространству 64^3 ячеек, положим временной шаг $\tau = 0.02$ (конвективное число Куранта равно 0.5). Посчитанное поле модуля завихренности $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ изображено в моменты времени $t = 0$, 5, 10, 15, 17.5, 20 на фиг. 1. Видно, что распад начального вихря действительно происходит в ламинарном режиме: активного перемешивания слоев жидкости не наблюдается, завихренность по своей структуре остается упорядоченно ячеистой, с течением времени (при $t > 10$) вытягиваясь в длинные филаменты (волокна) и затухая. На фиг. 2 показаны две кривые скорости диссипации кинетической энергии $\varepsilon = -dE_K/dt$: одна получена по схеме T2B4, другая взята из работы [24] и полагается эталонной. Хотя в окрестности $t = 8$ схема T2B4 несколько занижает диссипацию E_K, в целом можно сказать, что на достаточно грубой сетке 64^3 ячеек схема T2B4 воспроизводит эту зависимость близко к эталону.



Фиг. 1. Поле завихренности $\omega = |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|$ в сечениях $x = \pi/2$, $y = \pi/2$, $z = 0$ в моменты времени $t = 0$, 5, 10, 15, 17.5, 20 при $\mathrm{Re} = 400$ (ламинарный режим). Результаты получены по бикомпактной схеме T2B4 на сетке 64^3 ячеек.



Фиг. 2. Скорость диссипации кинетической энергии жидкости при $\mathrm{Re} = 400$. Маркеры – расчет по бикомпактной схеме T2B4 на сетке 64^3 ячеек, сплошная линия – эталонная зависимость из работы [24].

3.3. Результаты для Re = 800

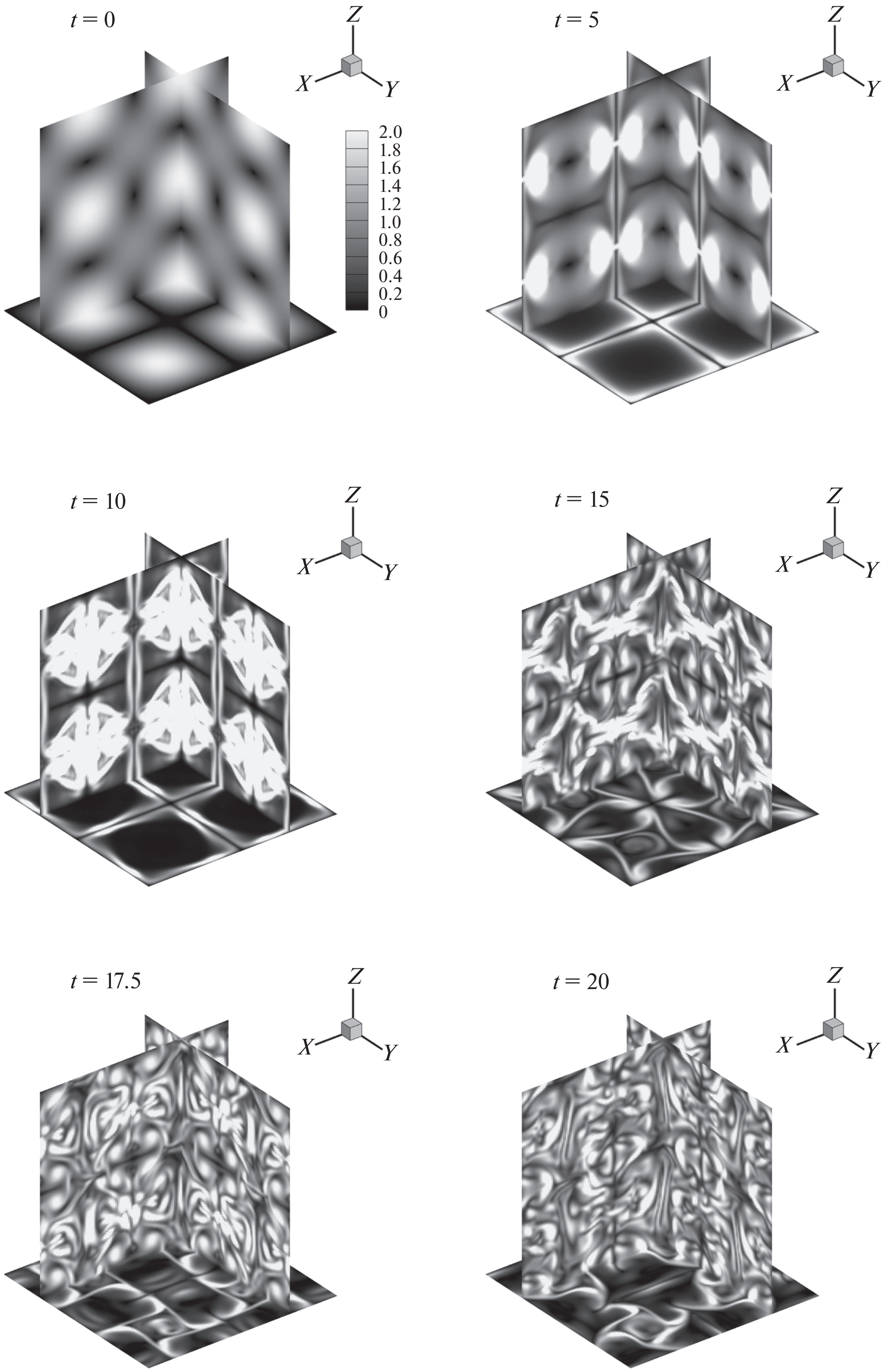
Возьмем более подробную сетку по пространству 128^3 ячеек, временной шаг пропорционально уменьшим до $\tau = 0.01$. Визуализация найденного поля ω в разные моменты времени приведена на фиг. 3. Из этой визуализации следует, что течение сохраняет более-менее упорядоченную ячеистую структуру вплоть до момента времени $t = 17.5$; однако, ко времени $t = 20$ движение жидкости становится полностью турбулентным, как и ожидалось. Из данных с фиг. 4 можно заключить, что при $\mathrm{Re} = 800$ схема T2B4, как и в предыдущем варианте задачи при $\mathrm{Re} = 400$, дает верную скорость диссипации кинетической энергии.

3.4. Результаты для Re = 1600

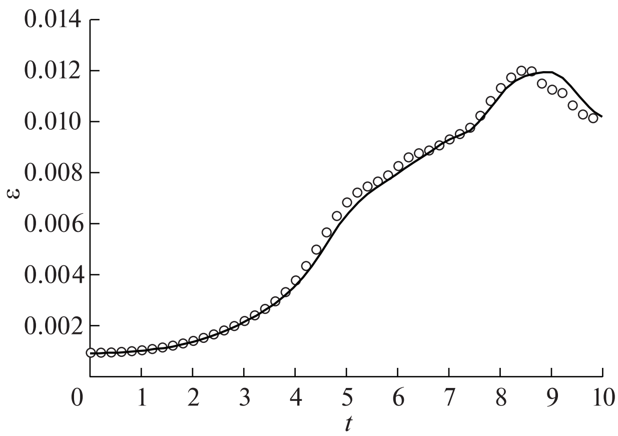
Параметры сетки выберем такими же, как в предыдущем варианте: по пространству 128^3 ячеек, по времени шаг $\tau = 0.01$. Отметим, что в данном варианте задачи на данной сетке “чистая” (без монотонизации) бездиссипативная бикомпактная схема T2B4 “разваливается” в момент времени $t \approx 7.4$, сразу после начала интенсивного вихреобразования. Эта проблема устраняется, если оператор перехода $S_{\mathrm{conv}}(\tau)$ (11) лимитирован при помощи метода консервативной монотонизации [21]. Положим параметр этого метода $C_1 = 0.5$, что на порядок меньше тех значений, которые обычно употребляются при расчетах задач с сильными разрывами (см. [21]).

На фиг. 5 приведена визуализация поля ω в разные моменты времени. Что разумно, течение при $\mathrm{Re} = 1600$ по сравнению с течением при $\mathrm{Re} = 800$ характеризуется более сильным производством завихренности; уже к моменту времени времени $t = 15$ всякая связь с начальной структурой движения потеряна, а при $t = 20$ вычислительная область целиком заполнена практически однородной изотропной турбулентностью.

Перейдем к анализу кривых диссипации кинетической энергии с фиг. 6. Из этой фигуры ясно, что при $\mathrm{Re} = 1600$ монотонизированная схема T2B4 воспроизводит зависимость $\varepsilon(t)$ хуже, чем ее чистая версия при $\mathrm{Re} = 400, 800$. Тем не менее нельзя не заметить две особенности. Во-первых, монотонизированная схема T2B4 дает кривую диссипации, примерно правильную по форме, но смещенную влево на $\Delta t \approx 0.3$. Другими словами, процесс превращения кинетической энергии в тепло идет по траектории верной формы, но с небольшим опережением. Во-вторых, если судить по данным для “чистой” схемы T2B4 (очевидно, доступным только до момента ее развала), то метод консервативной монотонизации не дает существенной численной прибавки к реальной диссипации. Из второго замечания следует, что опережение в диссипации кинетической энергии связано с подробностью сетки и погрешностями чистой бикомпактной аппроксимации, а не с методом консервативной монотонизации.



Фиг. 3. Поле завихренности $\omega = |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|$ в сечениях $x = \pi/2$, $y = \pi/2$, $z = 0$ в моменты времени $t = 0$, 5, 10, 15, 17.5, 20 при $\mathrm{Re} = 800$ (турбулентный режим). Результаты получены по бикомпактной схеме T2B4 на сетке 128^3 ячеек.



Фиг. 4. Скорость диссипации кинетической энергии жидкости при Re = 800. Маркеры – расчет по бикомпактной схеме T2B4 на сетке 128^3 ячеек, сплошная линия – эталонная зависимость из работы [24].

Важнейшим требованием к любой численной схеме для счета турбулентных течений является то, что она должна как можно точнее воспроизводить спектр кинетической энергии $\sigma_K(k,t)$, где k – волновое число, пробегающее значения $0, 1, \ldots, N_{\min}/2$, $N_{\min} = \min(N_x, N_y, N_z)$. Уточним, что $\sigma_K(k,t)$ вычисляется по формуле (например, см. [24]):

$$\sigma_K(k,t) = \sum_{|\mathbf{k}'|\in[k-1/2,k+1/2)} \frac{|\mathbf{A}(\mathbf{k}',t)|^2}{2},$$

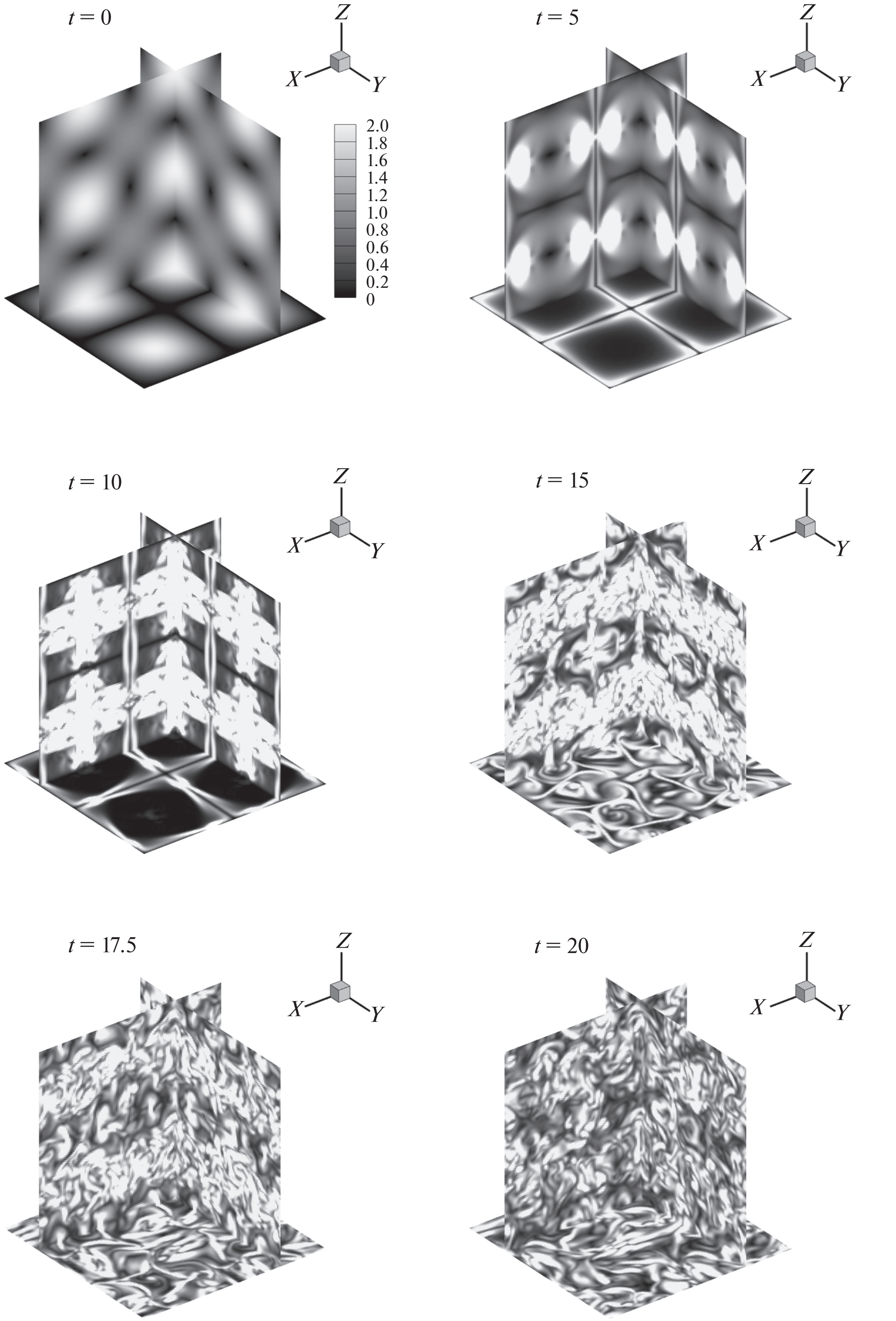
где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – вектор волновых чисел, $k_d = 0, \pm 1, \ldots, \pm N_d/2$, $d = x, y, z$, $\mathbf{A}(\mathbf{k},t)$ – коэффициент ряда Фурье скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_D \mathbf{v}(\mathbf{r},t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dxdydz, \qquad \mathbf{r} = (x,y,z).$$

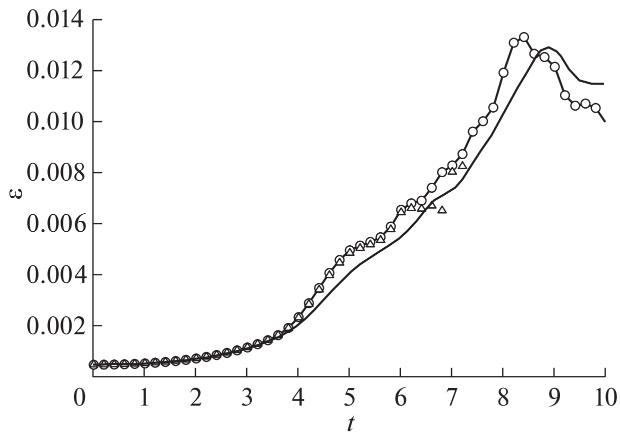
Коэффициент $\mathbf{A}(\mathbf{k},t)$ вычисляется по значениям только сеточной функции $\mathbf{v}_{j,k,\ell}$ при помощи квадратурной формулы трапеций и алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Фигура 7 позволяет выяснить, насколько хорошо этому требованию удовлетворяет монотонизированная бикомпактная схема T2B4. Сравнение с эталонным спектром, полученным в работе [29] по псевдоспектральной схеме с очень высоким разрешением в 512^3 степеней свободы (фактически это спектр сошедшегося решения), показывает, что схема T2B4 безукоризненно разрешает инерционный интервал, но несколько преувеличивает затухание мелких вихрей в диссипативном интервале. Впрочем, у схемы T2B4 диссипативный участок спектра не сваливается резко вниз, а идет почти параллельно эталону, что свидетельствует об умеренности численной диссипации, вносимой методом консервативной монотонизации [21].

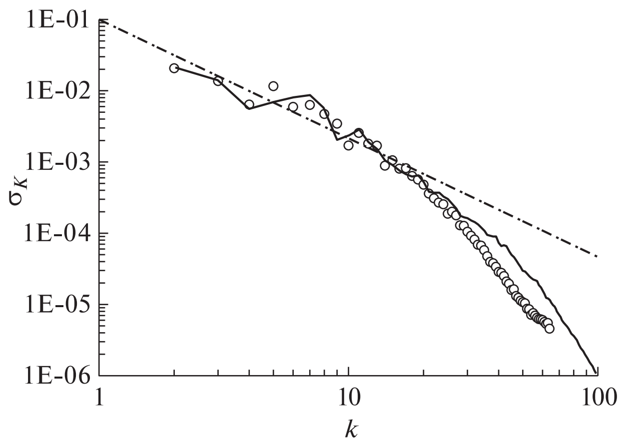
Интересно сделать более серьезную проверку бикомпактной схемы T2B4 на разрешение спектра: выполним расчеты на менее подробной сетке из 64^3 ячеек и на совсем редкой сетке из 32^3 ячеек ($\tau = 0.02$ и 0.04 соответственно). Консервативную монотонизацию при этом выключим ($C_1 = 0$), так как схема T2B4 на этих сетках досчитывает задачу до конца без монотонизации. На фиг. 8 изображены полученные спектры. Очевидно, схема T2B4 корректно, без “загибов вниз”, воспроизводит инерционный участок спектра даже на сетке из 32^3 ячеек, не разрешающей все мелкие вихри и часть вихрей среднего масштаба. Из этого можно сделать вывод, что бикомпактная схема T2B4 позволяет правильно рассчитывать динамику крупных вихрей, что очень важно при LES-моделировании.



Фиг. 5. Поле завихренности $\omega = |\mathrm{rot}\, \mathbf{v}|$ в сечениях $x = \pi/2$, $y = \pi/2$, $z = 0$ в моменты времени $t = 0$, 5, 10, 15, 17.5, 20 при $\mathrm{Re} = 1600$ (турбулентный режим). Результаты получены по монотонизированной бикомпактной схеме T2B4 на сетке 128^3 ячеек.



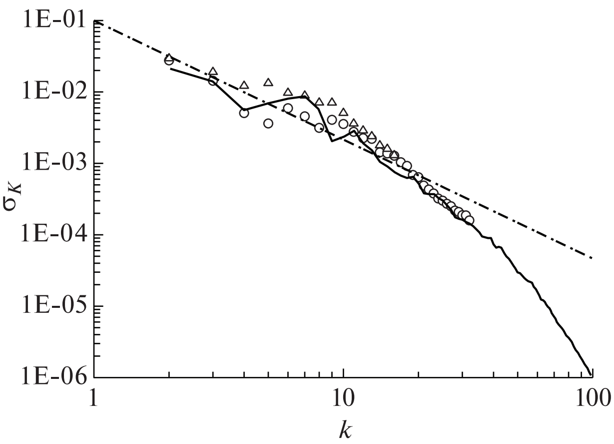
Фиг. 6. Скорость диссипации кинетической энергии жидкости при Re = 1600. Круглые маркеры со сплошной линией – расчет по монотонизированной бикомпактной схеме T2B4 на сетке 128^3 ячеек, треугольные маркеры – расчет по той же схеме без монотонизации, сплошная линия без маркеров – эталонная зависимость из работы [24].



Фиг. 7. Спектр кинетической энергии жидкости при Re = 1600 в момент времени t = 8.5. Маркеры – расчет по монотонизированной бикомпактной схеме T2B4 на сетке 128^3 ячеек, сплошная линия – эталонный расчет [29] по псевдоспектральной схеме с 512^3 степенями свободы, штрихпунктир – кривая $\sigma_K = 0.1k^{-5/3}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для нестационарных уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости впервые разработана высокоточная бикомпактная схема. Она получена методом расщепления по физическим процессам Марчука–Стрэнга. Для счета конвективной части исходной системы уравнений применена уже известная локально-одномерная бикомпактная схема. Для счета вязкой части и части, отвечающей за силы давления и несжимаемость жидкости, выведены новые бикомпактные схемы. Методика построения последних обобщает уже имеющийся подход, ранее изложенный применительно к одномерному уравнению теплопроводности. При дискретизации каждой части расщепленной системы уравнений пространственные производные аппроксимированы с четвертым порядком, а временные (если они есть) – методом трапеций со вторым порядком. Реализация бикомпактных схем для вязкой части и для уравнения Пуассона на давление использует метод итерируемой приближенной факторизации (ИПФ). В свою очередь, счет по этому ме-



Фиг. 8. Спектр кинетической энергии жидкости при Re = 1600 в момент времени t = 8.5. Круглые маркеры – расчет по бикомпактной схеме T2B4 на сетке 64^3 ячеек, треугольные маркеры – расчет по той же схеме на сетке 32^3 ячеек, сплошная линия – эталонный расчет [29] по псевдоспектральной схеме с 512^3 степенями свободы, штрихпунктир – кривая $\sigma_K = 0.1k^{-5/3}$.

тоду и по схеме для конвективной части сведены к совокупности независимых одномерных двухточечных прогонок, из чего следует экономичность результирующей бикомпактной схемы для суммарной системы уравнений.

Предлагаемая бикомпактная схема, обозначаемая как T2B4, испытана на сеточную сходимость в задаче о двумерном вихре Тейлора–Грина с известным точным решением. Конкретно в этой задаче схема T2B4 показала порядок сходимости выше теоретического, равного 2. При умеренных требованиях на относительную точность итераций (10^{-7} для сетки 100×100) метод ИПФ сходится достаточно быстро, за 2 итерации в вязкой части и за 15 итераций в уравнении Пуассона на давление.

По схеме T2B4 при числах Рейнольдса Re = 400, 800, 1600 посчитана задача о распаде трехмерного вихря Тейлора–Грина. Выяснено, что конвективный оператор перехода схемы T2B4 при Re = 1600 на сетках подробнее 64^3 ячеек требует лимитирования наклонов (чтобы обеспечить устойчивость счета), для чего выбран метод консервативной монотонизации [21]. При всех рассмотренных Re установлено хорошее согласие с эталонными данными для скорости диссипации кинетической энергии. Показано, что схема T2B4 при Re = 1600 с высоким качеством воспроизводит спектр кинетической энергии, в том числе и на очень грубой сетке 32^3 ячеек, не разрешающей даже часть вихрей среднего масштаба в инерционном интервале спектра. Расчет на более подробной сетке 128^3 ячеек, разрешающей часть диссипативного интервала спектра, выявил умеренность численной диссипации, вносимой методом консервативной монотонизации. Полученные результаты говорят о том, что бикомпактные схемы перспективны в приложении к расчетам ламинарно-турбулентных переходов и для моделирования турбулентных течений в рамках подходов LES/ILES.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor–Green vortex / D. Drikakis, C. Fureby, F. Grinstein, D. Youngs // J. Turbul. 2007. V. 8. № 20. P. 1–12.

2. *Kawai S., Lele S.K.* Large-eddy simulation of jet mixing in supersonic crossflows // AIAA J. 2010. V. 48. № 9. P. 2063–2083.

3. *Bull J.R., Jameson A.* Simulation of the Taylor–Green vortex using high-order flux reconstruction schemes // AIAA J. 2015. V. 53. № 9. P. 2750–2761.

4. *El Rafei M., Könözsy L., Rana Z.* Investigation of numerical dissipation in classical and implicit large eddy simulations // Aerospace. 2017. V. 4. № 59. P. 1–20.
5. *De la Llave Plata M., Couaillier V., Pape M.-C.* On the use of a high-order discontinuous Galerkin method for DNS and LES of wall-bounded turbulence // Comput. Fluids. 2018. V. 176. P. 320–337.
6. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
7. *Толстых А.И.* Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015. 350 с.
8. *Grimich K., Cinnella P., Lerat A.* Spectral properties of high-order residual-based compact schemes for unsteady compressible flows // J. Comput. Phys. 2013. V. 252. P. 142–162.
9. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, И.А. Короткин. М.: Изд-во Московского университета, 2013. 472 с.
10. *Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов С.А.* Беспараметрический метод расчета турбулентного течения в плоском канале в широком диапазоне числе Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1545–1558.
11. *Рогов Б.В., Михайловская М.Н.* О сходимости компактных разностных схем // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 1. С. 99–116.
12. *Михайловская М.Н., Рогов Б.В.* Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
13. *Рогов Б.В.* Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 2. С. 264–274.
14. *Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V.* High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 150–163.
15. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 958–972.
16. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* О точном пространственном расщеплении многомерного скалярного квазилинейного гиперболического закона сохранения // Докл. АН. 2016. Т. 469. № 2. С. 143–147.
17. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 313–325.
18. *Рогов Б.В., Брагин М.Д.* О свойствах спектрального разрешения симметричных бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации // Докл. АН. 2017. Т. 475. № 2. С. 140–144.
19. *Chikitkin A.V., Rogov B.V.* Family of central bicompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 142. P. 151–170.
20. *Rogov B.V.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2019. V. 139. P. 136–155.
21. *Bragin M.D., Rogov B.V.* Conservative limiting method for high-order bicompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2020. V. 151. P. 229–245.
22. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Высокоточные бикомпактные схемы для численного моделирования течений многокомпонентных газов с несколькими химическими реакциями // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 6. С. 21–36.
23. *Boris J.P.* On large eddy simulation using subgrid turbulence models // Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads. Lecture Notes in Physics. 1990. P. 344–353.
24. Small-scale structure of the Taylor–Green vortex / M.E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag et al. // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 411–452.
25. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
26. *Strang G.* On the construction and comparison of difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. № 2. P. 506–517.
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
28. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решений многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
29. A comparison of vortex and pseudo-spectral methods for the simulation of periodic vertical flows at high Reynolds numbers / W.M. Van Rees, A. Leonard, D.I. Pullin, P. Koumoutsakos // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. P. 2794–2805.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1779–1785

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.61

Светлой памяти Александра Александровича Абрамова посвящается

О МНОЖЕСТВЕ МАТРИЦ С КОКВАДРАТОМ $J_n(1)$

© 2021 г. Х. Д. Икрамов

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 21.02.2020 г.
Переработанный вариант 21.02.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Показано, что комплексные матрицы с коквадратом $J_n(1)$ можно описать как невырожденные матрицы X, в алгебраической форме которых $X = Y + iZ$ вещественные матрицы Y и Z суть решения матричного уравнения $(J_n(1))^\top W - W(J_n(1))^{-1} = 0$. Описан вид таких матриц Y и Z. Библ. 2.

Ключевые слова: конгруэнтность, коквадрат, матричное уравнение Стейна, матричное уравнение Сильвестра, элементарный делитель.

DOI: 10.31857/S0044466921110089

1. Пусть A — невырожденная комплексная $n\times n$-матрица. Матрица $\mathscr{C}_A = A^{-*}A$ называется коквадратом матрицы A. Спектр и жорданова структура коквадрата дают много информации о нормальной форме A относительно конгруэнций. В данной статье конгруэнция понимается как преобразование вида

$$A \to P^*AP,$$

где P — произвольная невырожденная матрица.

Предположим, что жорданова форма коквадрата $\mathscr{C}_A$ состоит из единственной жордановой клетки

$$J_n(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $\lambda_0 = e^{i\theta}$ — число с модулем 1. В этом случае нормальная форма F_A матрицы A относительно конгруэнций представляет собой $n\times n$-матрицу

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdots & i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1 & \cdots & & \\ 1 & i & \cdots & & \end{pmatrix},$$

взятую со скалярным множителем $e^{i\theta/2}$ или $-e^{i\theta/2}$ (см. [1, § 4.5]). Ту же нормальную форму имеет всякая матрица, конгруэнтная матрице A.

Положим $\lambda_0 = 1$. В предлагаемой статье рассматривается следующая задача: описать множество $\mathcal{K}_n$ всех невырожденных $n \times n$-матриц, коквадратом которых является жорданова клетка $J_n(1)$.

2. Множество

$$\mathcal{K}_n = \{X \mid X^{-*}X = J_n(1)\} \tag{2}$$

является многообразием в матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$, рассматриваемом как вещественное линейное пространство. Переписывая определение коквадрата в виде

$$X = X^* J_n(1) \tag{3}$$

и отказываясь от требования невырожденности матрицы X, мы погружаем $\mathcal{K}_n$ в вещественное линейное подпространство $\mathcal{L}_n$ решений уравнения (3).

Какова размерность подпространства $\mathcal{L}_n$? Положив

$$X = Y + iZ, \quad Y, Z \in M_n(\mathbf{R}), \tag{4}$$

заменим комплексное уравнение (3) парой вещественных уравнений

$$Y = Y^\top J_n(1), \tag{5а}$$

$$Z = -Z^\top J_n(1). \tag{5б}$$

Подпространства решений этих уравнений обозначим соответственно через $\mathcal{Y}_n$ и $\mathcal{Z}_n$. Очевидно, что они пересекаются только по нулевой матрице, поэтому подпространство

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{Y}_n + \mathcal{Z}_n \tag{5в}$$

есть прямая сумма $\mathcal{Y}_n$ и $\mathcal{Z}_n$.

Из (5а) выводим

$$Y^\top = (J_n(1))^\top Y.$$

Подставляя это выражение для $Y^\top$ в (5а), приходим к однородному уравнению Стейна для матрицы Y:

$$Y = (J_n(1))^\top Y J_n(1).$$

Умножая обе части справа на $(J_n(1))^{-1}$, получаем однородное уравнение Сильвестра:

$$(J_n(1))^\top Y - Y(J_n(1))^{-1} = 0. \tag{6}$$

К этому же уравнению (6) (с заменой Y на Z) приводят аналогичные выкладки с уравнением (5б).

Итак, обе матрицы Y и Z в формуле (4) принадлежат подпространству $\mathcal{S}_n$ вещественных решений линейного однородного матричного уравнения (6). Размерность этого подпространства известна. Оба матричных коэффициента уравнения, т.е. матрицы $(J_n(1))^\top$ и $(J_n(1))^{-1}$, имеют единственный элементарный делитель $(\lambda - 1)^n$. Согласно формуле (19) из [2, глава VIII],

$$\dim \mathcal{S}_n = n.$$

Поскольку $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{Z}_n$ и $\mathcal{W}_n$ вложены в $\mathcal{S}_n$, то

$$\dim \mathcal{W}_n \le n.$$

Размерности подпространств $\mathcal{W}_n$ и $\mathcal{L}_n$ одинаковы, поэтому

$$\dim \mathcal{L}_n \le n. \tag{7}$$

Ниже мы показываем, что, в действительности,

$$\dim \mathcal{L}_n = \dim \mathcal{S}_n = n.$$

3. Приведем вид общих решений уравнений (5а) и (5б) для малых порядков n. Символы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε используются для обозначения свободных параметров. Начнем с уравнения (5а).

$n = 2$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$n = 3$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & -\alpha & \beta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$n = 4$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & -\alpha & \beta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$n = 5$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & -\alpha & -\alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 2\alpha & \alpha-\beta & -\beta & \gamma \end{pmatrix}. \tag{11}$$

$n = 6$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 2\alpha & \alpha-\beta & -\beta & \gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Перейдем теперь к уравнению (5б).

$n = 2$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & -\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$n = 3$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & -\delta & -\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

$n = 4$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & \delta & -\dfrac{\delta}{2} \\ 0 & -\delta & -\dfrac{\delta}{2} & \varepsilon \\ \delta & \dfrac{3\delta}{2} & \dfrac{\delta}{2}-\varepsilon & -\dfrac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

$n = 5$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -\dfrac{\delta}{2} \\ 0 & 0 & -\delta & -\dfrac{\delta}{2} & \varepsilon \\ 0 & \delta & \dfrac{3\delta}{2} & \dfrac{\delta}{2} - \varepsilon & -\dfrac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

4. Покажем, как выводятся эти представления общих решений на примере уравнения (5а) при $n = 5$. Транспонируем это уравнение и положим $J_5(1) = I_5 + J_5(0)$:

$$Y^\top = Y + (J_5(0))^\top Y,$$

или

$$Y - Y^\top = -(J_5(0))^\top Y. \quad (17)$$

Таким образом, матрица

$$(J_5(0))^\top Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} \end{pmatrix},$$

отличаясь лишь знаком от матрицы $Y - Y^\top$, должна быть кососимметричной. Отсюда выводим

$$y_{11} = y_{21} = y_{31} = y_{41} = 0,$$

$$y_{12} = y_{23} = y_{34} = y_{45} = 0,$$

$$y_{22} = -y_{13}, \quad y_{32} = -y_{14}, \quad y_{42} = -y_{15},$$

$$y_{33} = -y_{24}, \quad y_{43} = -y_{25}, \quad y_{44} = -y_{35}.$$

Матрицы $Y, -(J_5(0))^\top Y$ и $Y - Y^\top$ теперь выглядят так:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ 0 & -y_{13} & 0 & y_{24} & y_{25} \\ 0 & -y_{14} & -y_{24} & 0 & y_{35} \\ 0 & -y_{15} & -y_{25} & -y_{35} & 0 \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} \end{pmatrix},$$

$$-(J_5(0))^\top Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{13} & -y_{14} & -y_{15} \\ 0 & y_{13} & 0 & -y_{24} & -y_{25} \\ 0 & y_{14} & y_{24} & 0 & -y_{35} \\ 0 & y_{15} & y_{25} & y_{35} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y - Y^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{13} & y_{14} & y_{15} - y_{51} \\ 0 & 0 & 0 & y_{24} + y_{15} & y_{25} - y_{52} \\ -y_{13} & -y_{14} & 0 & y_{25} & y_{35} - y_{53} \\ -y_{14} & -y_{15} - y_{24} & -y_{25} & 0 & -y_{54} \\ -y_{15} + y_{51} & y_{52} - y_{25} & y_{53} - y_{35} & y_{54} & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство двух последних матриц дает соотношения

$$y_{13} = y_{14} = 0, \quad y_{51} = y_{15},$$

$$y_{24} + y_{15} = 0 \Rightarrow y_{24} = -y_{15},$$

$$y_{25} = -y_{24} = y_{15},$$

$$y_{25} - y_{52} = -y_{15} \Rightarrow y_{52} = y_{25} + y_{15} = 2y_{15},$$

$$y_{35} - y_{53} = -y_{25} \Rightarrow y_{53} = y_{35} + y_{25} = y_{15} + y_{35},$$

$$y_{54} = y_{35}.$$

Полагая $y_{15} \equiv \alpha$, $y_{35} \equiv -\beta$ и $y_{55} \equiv \gamma$, приходим к формуле (11).

5. Внимательный взгляд на формулы (8)–(16) обнаруживает такую закономерность: при фиксированном порядке n общее решение Y зависит от $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ свободных параметров, а общее решение Z – от $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ свободных параметров. Это наблюдение относится пока лишь к малым значениям n. В данном разделе мы покажем по индукции, что указанная закономерность верна для всех n.

Базисом индукции могут служить сами представления (8)–(16). Индуктивный переход проанализируем для определенности для уравнения (5a). При этом будем различать случаи нечетного и четного n.

Пусть $n = 2k - 1$ и Y_{2k-1} – произвольное решение уравнения (5a) для этого значения n, т.е.

$$Y_{2k-1} = Y_{2k-1}^{\top} J_{2k-1}(1).$$

Сопоставление формул (9) и (10) показывает, что общее решение для $n = 4$ получается из общего решения для $n = 3$ окаймлением нулевой строкой сверху и нулевым столбцом слева. Это же верно для перехода от $n = 5$ к $n = 6$ (см. формулы (11) и (12)). Исходя из этого наблюдения, построим матрицу

$$Y_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(2k-1)} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & Y_{2k-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

порядка $2k$ и вычислим произведение $Y_{2k}^{\top} J_{2k}(1)$:

$$Y_{2k}^{\top} J_{2k}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(2k-1)} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & Y_{2k-1}^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_{2k-1}^{\top} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & J_{2k-1}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(2k-1)} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & Y_{2k-1}^{\top} J_{2k-1}(1) \end{pmatrix} = Y_{2k}.$$

Таким образом, все матрицы вида (18) являются решениями уравнения (5a) при $n = 2k$ и, согласно индуктивному предположению, образуют линейное подпространство размерности $\left\lceil \frac{2k-1}{2} \right\rceil = k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Рассмотрим теперь случай четного $n = 2k$. Сопоставление формул (8) и (9), а также (10) и (11), приводит к такому выводу: общее решение для $n = 2k + 1$ получается из общего решения для $n = 2k$ окаймлением (ненулевыми) строкой и столбцом (снизу и справа). Само по себе окаймление не увеличивает число свободных параметров, а новым свободным параметром становится последний диагональный элемент $y_{2k+1,2k+1}$.

Итак, пусть Y_{2k} – произвольное решение уравнения (5a) для $n = 2k$, т.е.

$$Y_{2k} = Y_{2k}^{\top} J_{2k}(1).$$

Будем искать решение уравнения (5a) для $n = 2k + 1$ в виде

$$Y_{2k+1} = \begin{pmatrix} Y_{2k} & a \\ b^{\top} & \gamma \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь a и b – это вектор-столбцы размерности $2k$, а γ – скаляр.

Вычислим произведение $Y_{2k+1}^{\top}J_{2k+1}(1)$:

$$Y_{2k+1}^{\top}J_{2k+1}(1) = \begin{pmatrix} Y_{2k}^{\top} & b \\ a^{\top} & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{2k}(1) & e_{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{2k}^{\top}J_{2k}(1) & Y_{2k}^{\top}e_{2k} + b \\ a^{\top}J_{2k}(1) & a^{\top}e_{2k} + \gamma \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Проверим совместность системы условий

$$Y_{2k}^{\top}e_{2k} + b = a, \tag{22а}$$

$$a^{\top}J_{2k}(1) = b^{\top}, \tag{22б}$$

$$a^{\top}e_{2k} + \gamma = \gamma. \tag{22в}$$

Уравнение (22в) удовлетворяется тогда и только тогда, когда последняя компонента вектора a равна нулю. (Заметим, что это условие выполнено при $n = 3$ и $n = 5$.) Положив $a_{2k} = 0$, транспонируем уравнение (22б):

$$b = (J_{2k}(1))^{\top}a. \tag{23}$$

Подставляя это выражение в (22а), имеем

$$((J_{2k}(1))^{\top} - I)a = -Y_{2k}^{\top}e_{2k},$$

или

$$(J_{2k}(0))^{\top}a = -Y_{2k}^{\top}e_{2k}.$$

Первые компоненты левой и правой частей равны нулю, так как обе матрицы $(J_{2k}(0))^{\top}$ и $Y_{2k}^{\top}$ имеют нулевые первые строки. Остальные компоненты этого равенства однозначно определяют элементы вектора a в позициях $1, 2, \ldots, n-1$. Напомним, что $a_{2k} = 0$.

Итак, нужный нам вектор a однозначно определяется вектором $Y_{2k}^{\top}e_{2k}$, т.е. последней строкой матрицы Y_{2k}. Вслед за a находим b по формуле (23). Оба вектора зависят от тех же k свободных параметров, что и Y_{2k}.

Матрица (21), соответствующая этим векторам a и b, совпадает с Y_{2k+1}, каково бы ни было число γ. Это число является новым свободным параметром, и суммарное число параметров в общем решении равно $k + 1 = \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil$.

Из проведенного исследования заключаем, что линейное подпространство $\mathcal{T}_n$ решений уравнения (5а) имеет размерность не меньшую, чем $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Аналогичным образом показываем, что линейное подпространство $\mathcal{U}_n$ решений уравнения (5б) имеет размерность не меньшую, чем $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. В соответствующем анализе используются наблюдения, почерпнутые из формул (13)–(16): при переходе от четного n к $n+1$ происходит окаймление нулевыми строкой и столбцом сверху и слева; при переходе от нечетного n к $n+1$ окаймление, напротив, производится (ненулевыми) строкой и столбцом снизу и справа.

6. Подведем итог.

Подпространства $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{U}_n$ пересекаются только по нулевому вектору. Поэтому (см. (4)) вещественное линейное подпространство $\mathcal{L}_n$, составленное из решений уравнения (3), имеет размерность, не меньшую, чем $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$. С другой стороны, в разд. 2 было показано (см. (7)), что

$$\dim \mathcal{L}_n \le \dim \mathcal{S}_n = n.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. $\dim \mathcal{L}_n = \dim \mathcal{S}_n = n$.

Вопрос, поставленный в начале статьи, получает следующий ответ: множество $\mathcal{K}_n$ матриц, имеющих коквадрат $J_n(1)$, состоит из всех невырожденных решений уравнения (3). Решения этого уравнения образуют подпространство размерности n. Все они имеют нижнюю антитреугольную форму, что следует из представления (4) и рассуждений разд. 5.

7. Все матрицы из $\mathcal{K}_n$ имеют один и тот же коквадрат $J_n(1)$. Тем не менее не все они конгруэнтны. Покажем это на примере простейшего случая $n = 2$.

Матрицы X из $\mathcal{K}_2$ имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ -i\delta & \alpha - i\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Тёплицево разложение матрицы X таково:

$$\frac{1}{2}(X + X^*) = \begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ -i\delta & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2i}(X - X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Эрмитовы матрицы $\frac{1}{2}(X + X^*)$ имеют при всех $\delta \neq 0$ одно положительное и одно отрицательное собственные значения, а потому все они конгруэнтны. Вырожденные матрицы $\frac{1}{2i}(X - X^*)$ имеют при $\delta \neq 0$ единственное собственное значение, которое положительно при $\delta < 0$ и отрицательно, если $\delta > 0$. Поэтому матрицы X с $\delta < 0$ не могут быть конгруэнтны матрицам X с $\delta > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1786–1813

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРЕДОБУСЛОВЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КРЫЛОВА: ТЕНДЕНЦИИ XXI ВЕКА[1)]

© 2021 г. В. П. Ильин[1,2]

[1] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

[2] 630073 Новосибирск, пр-т К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, Россия

e-mail: ilin@sscc.ru

Поступила в редакцию 11.02.2020 г.
Переработанный вариант 16.03.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Предлагается аналитический обзор основных проблем, а также новых математических и технологических находок в развитии методов решения СЛАУ. Данная стадия математического моделирования становится "узким горлышком", поскольку здесь объемы вычислительных ресурсов растут нелинейно с увеличением числа степеней свободы задачи. Важно отметить, что эффективность и производительность вычислительных методов и технологий в значительной степени зависят от учета специфики класса решаемых прикладных проблем: задачи электромагнетизма, гидро-газодинамики, упруго-пластичности, многофазной фильтрации, тепломассопереноса и т.д. Развитие крыловских итерационных процессов ориентировано главным образом на построение двухуровневых алгоритмов с различными ортогональными, проекционными, вариационными и спектральными свойствами, включая аппарат не только полиномиальных, но и рациональных или гармонических приближений. Дополнительное ускорение таких алгоритмов осуществляется на основе подходов дефляции или агментации с использованием некоторых систем базисных векторов. Активные исследования направлены на конструирование экономичных предобусловливающих операторов, на основе многообразных принципов: новые многосеточные схемы и параллельные методы декомпозиции областей, мультипредобусловливание, вложенные и попеременно-треугольные факторизации, малоранговые и другие алгоритмы аппроксимации обратных матриц и т.д. Достижение высокой производительности и масштабируемого распараллеливания базируется на средствах гибридного программирования с использованием инструментов межузловых сообщений, многопотоковых вычислений, векторизации операции и графических ускорителей. Современные тенденции математического и программного обеспечения заключаются в создании интегрированного инструментального окружения, ориентированного на длительный жизненный цикл и массовые инновации в актуальных приложениях. Библ. 98.

Ключевые слова: разреженные СЛАУ, предобусловливание, итерационные методы, подпространства Крылова, симметричные и несимметричные матрицы, алгоритмы декомпозиции, многосеточные подходы, приближенная факторизация.

DOI: 10.31857/S0044466921110090

1. ВВЕДЕНИЕ

Предобусловленные итерационные методы в подпространствах Крылова для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – одно из важнейших мировых достижений вычислительной математики в XX веке. Их значение особенно актуализируется с развитием суперкомпьютерного моделирования и решением междисциплинарных прямых и обратных, нелинейных и нестационарных многомерных проблем со сложными геометрическими и материальными свойствами. Современные требования к точности решения задач с реальными данными приводят к системам сверхбольших размерностей (10^{10}–10^{11} и более) и огромными числами обусловленности (до 10^{14} и выше), когда вычисления со стандартной двойной точностью становятся

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-11-50073) по конкурсу обзорных статей "Экспансия", а также грантам МиНВО РФ № 2020-0012.

уже на грани доступного. При этом вычислительные затраты на решение СЛАУ составляют больше 80% для крупномасштабных машинных экспериментов.

Наибольший исследовательский интерес представляют алгебраические системы с разреженными матрицами, возникающими из аппроксимаций краевых задач методами конечных разностей, конечных объемов, конечных элементов и разрывными алгоритмами Галеркина различных порядков точности на неструктурированных сетках (см. обзор в [1]). В этих случаях портреты, или графы, матриц имеют нерегулярную структуру, т.е. распределение ненулевых элементов задается только перечислением, а их значения хранятся в сжатых форматах, что составляет важную особенность при реализации алгоритмов на современных супер-ЭВМ гетерогенной архитектуры с распределенной и иерархической общей памятью. Спектральные и структурные свойства СЛАУ сильно отличаются для различных приложений: задач электромагнетизма, гидро-газодинамики, упруго-пластичности, уравнений тепло-массопереноса и т.д., что порождает огромное разнообразие алгоритмов, развитие которых идет в направлении как исследования новых итерационных процессов с различными ортогональными, вариационными и проекционными свойствами, так и построения эффективных предобусловленных матриц. Симбиоз этих двух отдельных методологий и определяет успех в данной области. В значительной степени итоги исследований были отражены в книгах О. Аксельсона (см. [2]), Х. Эльмана, Д. Сильвестра и А. Ватена (см. [3]), Г.И. Марчука и Ю.А. Кузнецова (см. [4]), Й. Саада (см. [5]), Ван дер Ворста (см. [6]), М.А. Ольшанского и Е.Е. Тыртышникова (см. [7]), Й. Лайзена и З. Стракоса (см. [8]), автора [9], [10], а также в огромном количестве журнальных статей и трудов конференций.

Если говорить об обобщении крыловских итерационных методов, то здесь следует отметить многообразные подходы к обогащению соответствующих подпространств, в которых из различных вариационных, ортогональных или проекционных принципов определяются векторы невязок или направлений поиска новых итерационных приближений, включая алгоритмы дефляции, агментации и комбинирования со спектральной оптимизацией или с принципами наименьших квадратов. Любопытно, что возникали также попытки построить некоторые “альтернативы” методам в подпространствах Крылова: ускорение Андерсона (которое изначально было предложено для решения нелинейных систем, см. [11]–[13]), подпространства Сонневельда (см. [14]), но на проверку они оказывались вариациями на общую тему.

Все возрастающий поток литературы по методам решения СЛАУ содержит богатую палитру идей по конструированию предобусловливающих матриц, которые должны легко обращаться, повышать скорость сходимости итерационных алгоритмов, а в итоге обеспечивать их производительность в целом. Здесь вторую молодость обрели многосеточные методы, которые асимптотически являются оптимальными по порядку (объем вычислений пропорционален числу степеней свободы дискретной задачи). Значительное развитие получили также методологии матричных разложений, в том числе малоранговые приближения матриц, вложенные и переменно-треугольные факторизации. Разнообразные подходы сформировали единообразную технологию построения мультипредобусловленных процессов в подпространствах Крылова, в общем случае многоуровневых, а также аддитивных алгоритмов декомпозиции областей (МДО, или DDM – от Domain Decomposition Methods), представляющих собой главный инструмент распараллеливания для многомерных задач на многопроцессорных вычислительных системах (МВС). Методы масштабируемого распараллеливания и обеспечения высокой производительности алгоритмов DDM на суперкомпьютерах гетерогенной архитектуры с распределенной и иерархической общей памятью представляют ключевую проблему современной вычислительной алгебры (см. [5], [16]–[19]). Отметим, что свою специфику имеют методы решения СЛАУ, возникающих при неявных аппроксимациях начально-краевых задач (см. обзор в [20]). В частности, как показано в [21], за счет выбора на каждом временном шаге начальных итерационных приближений на основе обобщения алгоритма предиктор-корректор, можно значительно повысить эффективность расчетов.

Практическая востребованность алгебраических вычислений за полувековую историю привела к огромному объему программного обеспечения, как коммерческого, так и общедоступного, достаточно полный список которого приведен Дж. Донгарра в [22], а систематизация реализуемых алгоритмов приведена в [23]. Здесь следует отметить и общезначимые инструментарии типа SPARSE BLAS, и широкого распространения библиотеки PETSc, HYPRE, MKL INTEL и т.д. Международным сообществом вычислителей-алгебраистов разработаны стандартизованные форматы представления матриц с соответствующими конверторами, а также обширные коллекции матриц из реальных задач моделирования, играющих незаменимую роль для систематического тестирования и сравнительного анализа алгоритмов. Важной тенденцией последних десятилетий является переход от конкретных библиотек и пакетов прикладных программ (ППП) к интегрированным вычислительным окружениям (ИВО), примерами чего являются системы DUNE , INMOST, OPEN FOAM, MATLAB, а также БСМ (Базовая Система Моделирования), концепция которой описана в [24] и включает принципы гибкого расширения состава моделей и алгоритмов, адаптацию к эволюции компьютерных архитектур, переиспользование внешних программных продуктов и согласованное участие различных групп разработчиков, что должно облегчить создание эффективной инструментальной экосистемы нового поколения с длительным жизненным циклом, объединяющей сообщества математиков-программистов и пользователей из различных прикладных областей. В целом проблема высокопроизводительного решения СЛАУ для широкого класса практических задач вовлекает огромный объем разнообразных задач и представляет собой перспективное поле деятельности по интеллектуализации как исследовательских, так и технологических направлений.

Данная работа построена следующим образом. В разд. 2 представлены общие современные принципы конструирования итерационных методов в подпространствах Крылова, в том числе двухуровневых. Раздел 3 содержит краткий обзор подходов к построению предобусловливающих матриц, в разд. 4 описываются технологии распараллеливания и повышения производительности методов решения СЛАУ, включая вопросы их программной реализации и эффективного использования в проблемах моделирования реальных процессов и явлений, а в Заключении обсуждаются перспективы развития исследуемых вопросов.

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ КРЫЛОВСКИХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Мы будем рассматривать вещественные алгебраические системы вида

$$Au = f, \quad A = \{a_{l,m}\} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad u = \{u_l\}, \quad f = \{f_l\} \in \mathcal{R}^N, \tag{1}$$

с положительно-полуопределенными матрицами

$$(Av, v) \geq \delta\|v\|^2, \quad \delta \geq 0, \quad (v, w) = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i, \quad \|v\|^2 = (v, v),$$

среди которых важный класс представляют симметричные положительно-определенные (СПО) матрицы с $\delta > 0$. Решаемые СЛАУ могут быть представлены в блочной форме

$$\begin{gathered} A_{q,q}u_q + \sum_{r\in\Omega q} A_{q,r}u_r = f_q, \quad q = 1, 2, \ldots, P, \\ A = \{A_{q,r}\}, \quad A_{q,r} \in \mathcal{R}^{N_q,N_r}, \quad f_q \in \mathcal{R}^{Nq}, \quad N_1 + \ldots + N_P = N, \end{gathered} \tag{2}$$

где Ω_q есть множество номеров матричных строк, составляющих q-ю блочную строку матрицы A, а P – ее блочный порядок.

Одна из актуальных блочных структур порождает алгебраические системы седлового типа:

$$Au \equiv \begin{bmatrix} D & C^{\mathrm{T}} \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = f, \quad D \in \mathcal{R}^{N_1,N_1}, \quad C \in \mathcal{R}^{N_2,N_1}; \quad u_1, f_1 \in \mathcal{R}^{N_1}, \tag{3}$$

которые возникают из аппроксимаций смешанных постановок краевых задач, а также в методах оптимизации. Матрица A из (3) обратима, если выполняются условия

$$\operatorname{rank}(D) = N_1, \quad \operatorname{rank}(C) = N_2, \quad \ker(D) \cap \ker(C) = \{0\}, \quad N_2 \leq N_1.$$

Наряду с исходной будем рассматривать предобусловливающие матрицы, которые обозначим символом B с какими-либо индексами. Выбор предобусловливателей осуществляется по условиям экономичной обратимости и улучшения обусловленности предобусловленных матриц вида $B^{-1}A$ или AB^{-1}, которые в совокупности должны повысить производительность программной реализации алгоритма.

Достаточно общим представлением стационарного одношагового итерационного процесса для решения СЛАУ (1) является так называемая первая каноническая формула

$$u^{n+1} = u^n + B^{-1}r^n, \quad r^n = f - Au^n,$$

где r^n есть вектор невязки. Ей соответствует вторая каноническая форма

$$u^{n+1} = Tu^n + g, \quad T = (1 - B^{-1}A), \quad g = -B^{-1}f,$$

где T называется матрицей перехода. Критерием окончания итераций является выполнение следующего условия (см. подробнее [25], [26]):

$$\|r^n\| \le \varepsilon_1 \|f\| + \varepsilon_2 \|A\| \cdot \|u^n\|, \quad 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1,$$

хотя зачастую для простоты полагается $\varepsilon_2 = 0$. Вопрос об оценке обеспечиваемой при этом ошибке итерационного приближения $\|u - u^n\|$ отнюдь не тривиальный, в особенности при учете используемой точности машинной арифметики, и ему посвящено достаточно много серьезных исследований (см. [8] и цитируемую там литературу).

2.1. Алгоритмы для симметричных СЛАУ

Зарождение и первый период развития, который можно отнести к 1950—1965 годам, итерационных методов в подпространствах Крылова, следует связать с именами авторов пионерских работ К. Ланцоша (1950, 1952), В.Е. Арнольди (1951), М.Р. Хестенеса и Е.Л. Штифеля (1951, 1952), Е.Х. Крейга (1954, 1955), Ю.В. Воробьёва (1958), Д.К. Фаддеева и В.Н. Фаддеевой (1958, 1960), В.М. Фридмана (1962), Дж. Голуба (1965) и Р. Варги (1962). Список последующих исследований насчитывается сотнями.

Мы начнем рассмотрение алгоритмов решения симметричных СЛАУ, имея целью дать единообразный взгляд на эту активно развивающуюся и сейчас тематику, а также осветить актуальные вопросы вычислительной производительности методов.

Пусть итерационное приближение u^n и соответствующий вектор невязки $r^n = f - Au^n$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u^n &= u^{n-1} + \alpha_{n-1}p^{n-1} = u^0 + \alpha_0 p^0 + \ldots + \alpha_{n-1}p^{n-1}, \\ r^n &= r^{n-1} - \alpha_{n-1}Ap^{n-1} = r^0 - \alpha_0 Ap^0 - \ldots - \alpha^{n-1}Ap^{n-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

где α_k и p^k суть итерационные параметры и направляющие векторы. В данном представлении мы опишем семейство алгоритмов сопряженных направлений, характеризуемых различными вариационными и проекционными свойствами, определяемыми соответствующими скалярными произведениями и нормами векторов:

$$(u, v)_\gamma = (A^\gamma u, v), \quad \|u\|_\gamma^2 = (u, u)_\gamma, \tag{5}$$

где показатели степени будем брать равными $\gamma = 0, 1, 2$. Предположим, что направляющие векторы являются A^γ-ортогональными, т.е.

$$(A^\gamma p^n, p^k) = \rho_k^{(\gamma)}\delta_{n,k}, \quad \rho_k^{(\gamma)} = (A^\gamma p^k, p^k) = \|p^k\|_\gamma^2, \tag{6}$$

где $\delta_{n,k}$ есть символ Кронекера. Тогда невязки r^n удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_\gamma(r^n) = (A^{\gamma-2}r^n, r^n) = (r^0, r^0)_{\gamma-2} - \sum_{k=0}^{n-1}[2\alpha_k(r^0, A^{\gamma-1}p^k) - \alpha_k^2\rho_k]. \tag{7}$$

Отсюда следует, что при значении параметров

$$\alpha_k = \sigma_k/\rho_k, \quad \sigma_k = (r^0, p^k)_{\gamma-1} = (r^k, p^k)_{\gamma-1} \tag{8}$$

функционалы Φ_γ принимают минимальные значения

$$\Phi_\gamma(r^n) = \|r^0\|_{\gamma-2} - \sum_{k=0}^{n-1}(r^0, p^k)_{\gamma-1}^2/\rho_k. \tag{9}$$

Здесь и далее индекс γ у коэффициентов и векторов для краткости опускается, а матрица A пока предполагается невырожденной.

Для выполнения условия (6) есть два пути. Первый из них состоит в проведении A^γ-ортогонализации Ланцоша, которую можно записать в следующем виде:

$$p^0 = 0, \quad \overline{\beta}_1 p^1 = f, \quad k = 1, 2, \ldots, n: \\ \overline{\beta}_{n+1} p^{n+1} = Ap^n - \overline{\alpha}_n p^n - \overline{\beta}_n p^{n-1}, \quad \overline{\alpha}_n = (p^n, p^n)_{\gamma+1}, \tag{10}$$

где величины $\overline{\beta}_n$ выбираются по условию $\|p\|_\gamma = 1$. Другой путь (Хестенеса–Штифеля), имеющий наибольшее распространение в силу лучшей устойчивости, заключается в использовании двучленной рекурсии

$$p^0 = r^0, \quad p^n = r^n + \beta_{n-1} p^{n-1}, \quad \beta_{n-1} = (A^\gamma r^n, p^{n-1})/\rho_{n-1}, \tag{11}$$

который совместно с формулой для невязки в (4) приводит к другим соотношениям для направляющих векторов:

$$p^n = (1 + \beta_{n-1}) p^{n-1} - \alpha_{n-1} A p^{n-1} - \beta_{n-2} p^{n-2}. \tag{12}$$

С помощью соотношений (4), (11) можно установить свойство $A^{\gamma-1}$-ортогональности векторов невязок, а также более удобные (для $\gamma = 1, 2$) формулы итерационных коэффициентов:

$$(A^{\gamma-1} r^n, r^k) = \sigma_k \delta_{n,k}, \quad \sigma_k = \|r^n\|^2_{\gamma-1}, \quad \beta_k = \sigma_{k+1}/\sigma_k. \tag{13}$$

Для случая $\gamma = 0$, однако, вычисление α_k необходимо делать другим образом. Поскольку точное решение СЛАУ может быть представлено в виде разложения по базису

$$u = u^0 + \alpha_0 p^0 + \ldots + \alpha_{m-1} p^{m-1}, \quad m \le N,$$

то векторы ошибки итерационного приближения и соответствующей невязки записываются в следующей форме:

$$v^n = u - u^n = \alpha_n p^n + \ldots + \alpha_m p^m, \\ r^n = Av^n = \alpha_n A p^n + \ldots + \alpha_m A p^m. \tag{14}$$

Отсюда с помощью A^γ-ортогонализации векторов p^k имеем

$$\alpha_n = (v^n, p^n)_\gamma / \|p^n\|^2_\gamma = -\alpha_{n-1}(v^n, Ap^{n-1}) / \|p^n\|^2_\gamma = -\alpha_{n-1}(r^n, p^{n-1})_\gamma / \|p^n\|^2_\gamma. \tag{15}$$

Здесь использована ортогональность p^n векторам p^{n-1} и p^{n-2}, а также его связь с вектором Ap^{n-1} из (12). Расчет коэффициента β_{n-1} при этом надо проводить по формуле (11).

Рассматриваемые итерационные процессы обладают оптимальными свойствами, обеспечивая минимизацию соответствующих функционалов $\Phi_\gamma(r^n)$ вида (7) в подпространствах Крылова

$$\mathcal{K}_n(r^0, A) = \mathrm{Span}(r^0, Ar^0, \ldots, A^{n-1} r^0). \tag{16}$$

Данные алгоритмы при $\gamma = 0, 1, 2$ имеют названия методов минимальных итераций, или ошибок (см. [8]), а также сопряженных градиентов и сопряженных невязок соответственно (см. [5], [9], [27]).

Описанные подходы допускают простое обобщение на СЛАУ, предобусловленные с помощью некоторых СПО матриц B. Для сохранения симметричности систем это сделать целесообразно путем двухстороннего предобусловливания с помощью формально вводимой матрицы $B^{1/2}$. В результате система (1) принимает вид

$$\overline{A}\overline{u} = \overline{f}, \quad \overline{A} = B^{-1/2} A B^{-1/2}, \quad \overline{u} = B^{1/2} u, \quad \overline{f} = B^{-1/2} f. \tag{17}$$

В результате применения формул сопряженных направлений к СЛАУ (17) после некоторых преобразований для $\gamma = 1, 2$ получаем следующий итерационный процесс:

$$\hat{p}^0 = \hat{r}^0 = B^{-1} r^0 = B^{-1}(f - Au^0), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$u^n = u^{n-1} + \alpha_{n-1}\hat{p}^{n-1}, \quad \hat{r}^n = \hat{r}^{n-1} - \alpha_{n-1}A\hat{p}^{n-1},$$
$$\hat{p}^n = \hat{r}^n + \beta_{n-1}\hat{p}^{n-1}, \quad \alpha_{n-1} = \sigma_{n-1}/\rho_{n-1}, \quad \beta_{n-1} = \sigma_n/\sigma_{n-1}, \tag{18}$$
$$\sigma_{n-1} = (A^{\gamma-1}\hat{r}^{n-1}, \hat{r}^{n-1}), \quad \rho_{n-1} = (B^{-1}A\hat{p}^{n-1}, A^{\gamma-1}\hat{p}^{n-1}),$$

где новые векторы связаны со старыми соотношениями $\hat{p}^n = B^{-1}p^n$, $\hat{r}^n = B^{-1}r^n$. Для метода минимальных итераций с $\gamma = 0$ вычисление параметров $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ следует проводить по формулам (15), (11) с заменой величин r^k, p^k на $\overline{r}^k = B^{-1}r^k$, $\overline{p}^k = B^{-1}p^k$ соответственно.

Замечание 1. На практике зачастую актуальным является решение серии СЛАУ с одинаковой матрицей, но разными последовательно определяемыми правыми частями. В этом случае при реализации второй и последующих систем можно сэкономить значительный объем вычислений, если после первого расчета запомнить найденные векторы p^k и Ap^k и использовать их каким-то образом для расширения крыловского базиса при решении остальных СЛАУ. Этим вопросам посвящено много работ (см. [28] со списком литературы из 157 наименований), однако проблема существенного повышения "информативности" базиса итерационных процессов здесь пока требует дальнейших исследований.

Замечание 2. В книге [8] отмечался такой методический вопрос, что методы в подпространствах Крылова тесно связаны с проблемой моментов, играющей важную роль в теории операторов и многих прикладных задачах. Начала этой тематики заложены П.Л. Чебышевым, А.М. Марковым и Т. Стильтьесом.

Во многих актуальных приложениях большой интерес представляют алгебраические системы с симметричными матрицами, имеющими знакоопределенный спектр. Такие СЛАУ могут быть вырожденными, в том числе совместными или несовместными. Последние задачи имеют решение не в классическом смысле, а в обобщенном, т.е. в терминах проблемы наименьших квадратов. Для данных случаев определяется нормальное, или псевдообратное, решение, имеющее наименьшую норму и обеспечивающее минимум невязки:

$$\min\|u\|_2 : u = \operatorname{argmin}\|f - Au\|_2. \tag{19}$$

Такое решение всегда существует и является единственным, а его формальное представление получается с помощью левой трансформации Гаусса исходной системы ($A^{\mathrm{T}}Au = A^{\mathrm{T}}f$) и имеет вид

$$u^+ = (A^{\mathrm{T}}A)^+ f = (A^2)^+ Af, \tag{20}$$

где A^+ означает псевдообратную, или обобщенно обратную, матрицы A.

Для решения таких СЛАУ в работах М.А. Саундерса и соавт. (см. обзор в [29]) разработаны методы SYMMLQ, MINRES, MINRES–QLP, основанные на A-ортогонализации Ланцоша, которая в силу рекурсий (10) записывается в матричном виде как

$$AP_k = P_{k+1}T_k, \quad T_k = \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1 & \overline{\beta}_1 & & \\ \overline{\beta}_2 & \overline{\alpha}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \overline{\beta}_k \\ & & \overline{\beta}_k & \overline{\alpha}_k \\ & & & \overline{\beta}_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

где $P_k = [p^0, p^1, \ldots, p^{k-1}]$. При этом приближенное решение ищется в форме $u^k = P_kq^k$ и сводится к определению вектора $q^k \in \mathcal{R}^k$ по условию минимума невязки

$$r^k = f - AP_kq^k = \beta_1p^1 - P_{k+1}T_ky^k. \tag{22}$$

Данная задача реализуется с помощью LQ- или QR-преобразований трехдиагональной матрицы T_k с ортогональной матрицей Q на основе устойчивых операций отражения Хаусхолдера. Приведенные авторами результаты представительных численных экспериментов демонстрируют хорошую эффективность алгоритмов, а их программные реализации доступны в Интернете.

Скорость сходимости итераций в методах крыловского типа для положительно полуопределенного СЛАУ характеризуется оценкой числа итераций $n(\varepsilon)$, необходимой для подавления начальной ошибки в ε^{-1} раз:

$$n(\varepsilon) \le \frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\log_e \frac{2}{\varepsilon}, \quad \kappa = \lambda_{\max}/\lambda_{\min},$$

где κ в общем случае есть эффективное число обусловленности, которое для вырожденных матриц выражается через $\lambda_{\min}$ – минимальное ненулевое собственное число.

Для симметричных СЛАУ проблема устойчивого численного решения в основном была решена в XX веке, в том числе для знаконеопределенных, вырожденных и несовместных систем. Что касается классического метода сопряженных градиентов, то здесь особо следует отметить оригинальную теорию сходимости И.Е. Капорина (см. [30]), основанную на введенном им K-числе обусловленности, выражаемого через след и определитель матрицы.

Более конкретно рассмотрим предобусловленный алгоритм сопряженных градиентов в следующем виде:

$$\begin{gathered}
r^0 = f - Au^0, \quad p^0 = B^{-1}r^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \\
u^{n+1} = u^n + \alpha_n p^n, \quad r^{n+1} = r^n - \alpha_n A p^n, \\
p^{n+1} = B^{-1}r^{n+1} + \beta_n p^n, \quad \alpha_n = \sigma_n/\rho_n, \\
\beta_n = \sigma_{n+1}/\sigma_n, \quad \sigma_n = (r^n, B^{-1}r^n), \quad \rho_n = (p^0, Ap^n).
\end{gathered}$$

При этом для выполнения условия

$$(r^n, B^{-1}r^n) \le \varepsilon^2 (r^1, B^{-1}r^n)$$

в [31] доказывается достаточность проведения числа итераций

$$n(\varepsilon) = \log_2 K + \log_2 \varepsilon^{-1},$$

где K – число обусловленности предобусловленной матрицы $B^{-1}A$, определяемое как

$$K = K(B^{-1}A) = \left[\frac{1}{N}\operatorname{trace}(B^{-1}A)\right]^N \Big/ \det(B^{-1}A).$$

В [32] для ряда предобусловливателей проведена оптимизация итерационных алгоритмов в плане минимизации K – числа обусловленности.

2.2. Крыловские алгоритмы для несимметричных СЛАУ

Изложение конкретных подходов мы продолжим с достаточно широкого класса мультипредобусловленных алгоритмов полусопряженных направлений (SCD – Semi-Conjugate Direction, см. [31]). В общей блочной форме такие итерационные методы в подпространствах Крылова записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
r^0 = f - Au^0, \quad n = 0, \ldots: \quad u^{n+1} = u^n + P_n\bar{\alpha}_n, \\
r^{n+1} = r^n - AP_n\bar{\alpha}_n = r^q - AP_q\bar{\alpha}_q - \cdots - AP_n\bar{\alpha}_n, \quad 0 \le q \le n, \\
P_n = (p_1^n, \ldots, p_{M_n}^n) \in \mathcal{R}^{N,M_n}, \quad \bar{\alpha}_n = (\alpha_{n,1}, \ldots, \alpha_{n,M_n})^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{M_n}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $p_1^n, \ldots, p_{M_n}^n$ – направляющие векторы, составляющие на n-й итерации матрицу P_n, а $\bar{\alpha}_n$ – вектор итерационных параметров. Относительно векторов p_k^n в соотношениях (23) пока предполагается выполнение только условий ортогональности

$$\begin{gathered}
(Ap_k^n, A^\gamma p_{k'}^{n'}) = \rho_{n,k}^{(\gamma)}\delta_{n,n'}^{k,k'}, \quad \rho_{n,k}^{(\gamma)} = (Ap_k^n, A^\gamma p_k^n), \\
\gamma = 0, 1, \quad n' = 0, 1, \ldots, n-1, \quad k, k' = 1, 2, \ldots, M_n.
\end{gathered} \tag{24}$$

Однако, если при этом коэффициенты $\overline{\alpha}_n = \{\alpha_{n,l}\}$ определить по формулам

$$\alpha_{n,l} = \sigma_{n,l}/\rho^{(\gamma)}_{n,n}, \quad \sigma_{n,l} = (r^0, A^{\gamma}\overline{p}^{\,n}_l), \tag{25}$$

то из (23) получаем следующие выражения для функционалов невязки:

$$\Phi^{(\gamma)}_n(r^{n+1}) \equiv (r^{n+1}, A^{\gamma-1}r^{n+1}) = (r^q, A^{\gamma-1}r^q) - \sum_{k=q}^{n}\sum_{l=1}^{M_n}(r^q, A^{\gamma}p^k_l)^2\big/\rho^{(\gamma)}_{k,l}, \quad q = 0, 1, \ldots, n, \tag{26}$$

которые достигают своих минимумов в блочных подпространствах Крылова

$$K_M = \mathrm{Span}\{p^0_1, \ldots, p^0_{M_0}, Ap^1_1, \ldots, Ap^1_{M_1}, \ldots, Ap^n_1, \ldots, Ap^n_{M_n}\}, \quad M = M_0 + M_1 + \cdots + M_n, \tag{27}$$

при $\gamma = 1$, а в случае симметричности матрицы A и для $\gamma = 0$. Здесь следует отметить, что для несимметричных матриц при $\gamma = 0$ применение алгоритмов фактически ограничивается СЛАУ с матрицами, имеющими положительно определенную симметричную часть $A_s = 0.5(A + A^{\mathrm{т}})$, так как для кососимметричной матрицы, например, $(Au, u) = 0$ при $u = \{1\}$.

Свойства ортогональности направляющих векторов (24) можно обеспечить, если их определить с помощью “мультипредобусловленных” рекуррентных соотношений, в которых каждому вектору p^{n+1}_l соответствует “своя” предобусловливающая матрица $B_{n+1,l}$:

$$\begin{gathered}
p^0_l = B^{-1}_{0,l}r^0, \quad p^{n+1}_l = B^{-1}_{n+1,l}r^{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{M_k}\beta^{(\gamma)}_{n,k,l}p^k_l, \quad n = 0, 1, \ldots, \\
B_{n,l} \in \mathcal{R}^{N,N}, \quad i = 1, \ldots, M_n; \quad \gamma = 0, 1, 2, \\
\overline{\beta}^{(\gamma)}_{n,k} = \{\beta^{\gamma}_{n,k,l}\} = (\beta^{(\gamma)}_{n,k,1} \ldots \beta^{(\gamma)}_{n,k,M_n})^{\mathrm{т}} \in \mathcal{R}^{M_n}, \\
\beta^{(\gamma)}_{n,k,l} = -(A^{\gamma}p^k_l, AB^{-1}_{n+1,l}r^{n+1})\big/\rho^{\gamma}_{n,l}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, M_n.
\end{gathered} \tag{28}$$

Если матрица A является симметричной, то данные рекурсии превращаются из длинных в двучленные, и мы приходим к методам сопряженных градиентов или сопряженных невязок ($\gamma = 0, 1$ соответственно, в мультипредобусловленных или в классических вариантах). Для несимметричных СЛАУ эти алгоритмы называются методами полусопряженных градиентов и полусопряженных невязок (SCG или SCR – Semi-Conjugate Gradient или Semi-Graduate Residual). В блочных (мультипредобусловленных) методах сопряженных направлений для решения симметричных СЛАУ формулы (23)–(25) не меняются, а вычисление направляющих матриц P_n выполняется по следующим двучленным рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered}
P_{n+1} = Q_{n+1} + P_n\overline{\beta}^{(\gamma)}_n, \quad Q_{n+1} = \{q^{n-1}_l = B^{-1}_{n+1,l}r^{n+1}\} \in \mathcal{R}^{N,M_{n+1}}, \\
\overline{\beta}^{(\gamma)}_n = \{\beta^{(\gamma)}_{n,l} = \beta^{(\gamma)}_{n,n,l}\} \in \mathcal{R}^{M_n}.
\end{gathered}$$

Данные формулы, как и (28), содержат “встроенные” в них предобусловливающие матрицы. Если положить $B_{n+1,l} = I$ и $M_n = 1$ для всех n, то получим крыловский процесс “в чистом виде”, без предобусловливания. Отметим, что формулы (28) реализуют алгоритм ортогонализации Грама–Шмидта, для повышения устойчивости которого целесообразно перейти к модифицированному методу ортогонализации (MGS, см. [5], [33]).

Особенностью рассматриваемых алгоритмов при решении плохо обусловленных несимметричных СЛАУ является высокая ресурсоемкость, в смысле объемов и вычислений, и требуемой памяти при проведении большого количества итераций. Средство борьбы с данным недостатком – это сокращение количества хранимых и используемых направляющих векторов, которое может осуществляться двумя способами. Первый из них заключается в сокращении рекурсии с учетом только ее последних m векторов. Второй путь состоит в периодическом проведении рестартов, когда через заданное число m итераций вектор невязки вычисляется не из рекуррентной формулы, а из исходного уравнения, как на нулевой итерации:

$$r^{n_t} = f - Au^{n_t}, \quad n_t = mt, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{29}$$

где t – номер рестарта (далее вычисления до $n = n_{t+1}$ осуществляются по обычным рекурсиям вида (23)). Оба данных подхода приводят к существенному замедлению итерационного процесса.

Для устранения такого стагнирующего эффекта предлагается добавить второй уровень итераций с применением методов наименьших квадратов (МНК) (см. [34]). Пусть нам известны рестартовые приближения $u^{n_0}, u^{n_1}, \ldots, u^{n_t}$, $n_0 = 0$. Тогда для коррекции итерационного вектора u^{n_t}, который является начальным для очередного рестартового периода метода (23)–(29), будем использовать следующую линейную комбинацию:

$$\begin{gathered}\hat{u}^{n_t} = u^{n_t} + b_1 v_1 + \ldots + b_t v_t = u^{n_t} + v^{n_t}, \quad v^{n_t} = V_t \overline{b}, \quad \overline{b} = (b_1, \ldots, b_t)^{\mathrm{T}}, \\ V_t = \{v_k = u^{n_k} - u^{n_{k-1}}, k = 1, \ldots, t\} \in \mathcal{R}^{N,t},\end{gathered} \tag{30}$$

вектор коэффициентов $\overline{b}$ которой определяется по условию минимума нормы $\|r^{u_t}\|$ невязки из обобщенного решения переопределенной алгебраической системы

$$W_t \overline{b} = r^{n_t} \equiv f - Au^{n_t}, \quad W_t = AV_t. \tag{31}$$

Решение этой СЛАУ можно получить, например, с помощью QR- или SVD-разложений матрицы W_t. Нормальное решение с минимальной нормой $\|\overline{b}\|$ определяется после применения к (31) левой трансформации Гаусса

$$W_t^{\mathrm{T}} W_t \overline{b} = W_t r^{n_t}.$$

Более облегченный формат СЛАУ, в смысле уменьшения ее числа обусловленности, следует после умножения системы (31) слева на матрицу V_t^{T}:

$$C_t \overline{b} \equiv V_t^{\mathrm{T}} A V_t \overline{b} = V_t^{\mathrm{T}} r^{n_t}. \tag{32}$$

Если матрица V_t имеет полный ранг, то матрицы A и C_t будут невырожденными одновременно. При этом для вектора коррекции из (30) имеем $v^{n_t} = B_t r^{n_t} \equiv V_t (V_t^{\mathrm{T}} A V_t)^{-1} V_t^{\mathrm{T}} r^{n_t}$, где матрица $B_t = V_t \hat{A}^{-1} V_t^{\mathrm{T}}$, $\hat{A} = V_t^{\mathrm{T}} AV$, является малоранговой аппроксимацией матрицы A^{-1}. В рассматриваемом подходе все рестартовые векторы запоминаются в корректированном виде, а соответствующие невязки вычисляются по формуле $r^{n_t} = f - Au^{n_t}$. Если для какой-то рассматриваемой матрицы обратной не существует, то используется обобщенная обратная матрица. Многочисленные эксперименты с использованием МНК для ускорения крыловских процессов с рестартами показывают его высокую эффективность.

Отметим еще следующую возможность повышения производительности методов SCD с рестартами: при проведении итераций первого рестартового периода запомнить все направляющие векторы p^n, а также векторы Ap^n, и при вычислениях последующих рестартовых периодов новые векторы p^n и Ap^k не рассматривать, а использовать старые.

Описанный класс методов полусопряженных направлений с динамическим мультипредобусловливанием по скорости сходимости итераций эквивалентен другим известным алгоритмам решения несимметричных СЛАУ в подпространствах Крылова, среди которых наиболее популярен обобщенный метод минимальных невязок GMRES, основанный на ортогонализации Арнольди и существующий в различных вариантах. Данный алгоритм, предложенный в 1986 г. Й. Саадом и М. Шульцем (см. [5]), получил широкую и заслуженную популярность. Среди многочисленных его исследований отметим результаты Л.А. Книжнермана (см. [35]) по оценкам погрешности ортогонализации Арнольди.

Другой принцип построения крыловских итерационных процессов для решения несимметричных СЛАУ основан на построении последовательностей биортогональных векторов. В этом случае направляющие векторы вычисляются из коротких (двучленных) рекурсий, но на каждой итерации требуется двукратное вычисление векторно-матричного произведения. На идеях биортогонализации были построены алгоритмы BiCG, CGS, BiCGStab в разных модификациях, затем появились их аналоги с A-биортогонализацией направляющих векторов (см. обзор в [36]). Примыкающее к ним семейство алгоритмов IDR (Induced Dimension Reduction) (см. [37] и цитируемую там литературу) базируется на подпространствах Сонневельда. Среди других подходов следует рекомендовать методы квазиминимальных невязок QMR и наименьших квадратов (LSQR, LSMR) (см. [38]). В последние годы возродились также алгоритмы, основанные на бидиагональных преобразованиях Крейга–Голуба–Кахана (изначально предложенных в 1955 и в

1965 г.), содержательное исследование, обобщение и сравнительный анализ которых даны в [25], [39]. И наконец, отметим еще “гибкие” методы сопряженных градиентов (FCG) (см. [40]), являющиеся обобщением классических методов CG (в том числе предобусловленных) на несимметричный случай.

3. МЕТОДЫ ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЯ СЛАУ

В данном разделе при описании алгоритмов мы будем на качественном уровне затрагивать вопросы их потенциального распараллеливания. Более подробно технологические аспекты, определяющие производительность их реализации, будут обсуждаться позднее.

Помимо рассмотренного в (17), (18) конкретного способа использования предобусловливающей матрицы, это можно также сделать путем непосредственного предобусловливания (левого, правого или двустороннего) исходной СЛАУ:

$$\begin{gathered}\bar{A}u = \bar{f}, \quad \bar{A} = B^{-1}A, \quad \bar{f} = B^{-1}f,\\ \hat{A}\hat{u} = AB^{-1}Bu = f, \quad \hat{A} = AB^{-1}, \quad \hat{u} = Bu, \\ \check{A}\check{u} = B_1^{-1}AB_2^{-1}B_2u = B_1^{-1}f = \check{f}, \quad \check{A} = B_1^{-1}AB_2^{-1}, \quad \check{u} = B_2u,\end{gathered} \tag{33}$$

где B, B_1, B_2 – некоторые невырожденные матрицы. Отметим, что если матрица A симметрична, то для сохранения этого свойства у матрицы $\check{A}$ в последнем случае нужно выбрать $B_1 = B_2^{\mathrm{T}}$. Поскольку матрицы $\bar{A}$, $\hat{A}$ или $\check{A}$ полученных предобусловленных алгебраических систем уже должны иметь улучшенную обусловленность, то к их решению следует применять крыловские итерационные формулы “в чистом виде”, без дополнительного предобусловливания (хотя формально это не возбраняется, и можно использовать мультипредобусловливание, используя модификацию как итерационного процесса типа (28), так и самого СЛАУ, в соответствии с (33)).

Среди простейших способов предобусловливания мы отметим такие, как масштабирование и бинормализацию матриц. Первый из них заключается в диагональном конгруэнтном преобразовании ($\tilde{A} = DAD$) для получения единичной главной диагонали, а второй основан на выравнивании норм у строк и столбцов матрицы (см. обзор в [41], [42]). Такие подходы могут применяться как предварительные в сочетании с другими предобусловливателями.

Обращаясь к блочной структуре СЛАУ (2), наиболее естественным представляется применить для ее решения блочный метод Якоби, который в несколько обобщенном виде записывается как

$$B_{q,q}u_q^{n+1} \equiv (A_{q,q} + \theta D_q)u_q^{n+1} = f_q + \theta D_q u_q^n - \sum_{r\in\Omega_q} A_{q,r}u_r^n, \quad q = 1, 2, \ldots, P. \tag{34}$$

Здесь $\theta \in [0, 1]$ есть итерационный (компенсирующий) параметр, а D_q – диагональная матрица, определяемая из равенства

$$D_q e = \sum_{r\in\Omega_q} A_{q,r}e, \quad e = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{R}^{Nq}, \tag{35}$$

которое называется условием компенсации, или фильтрации (иногда введение матрицы D_q вида (35) называется также лампированием – от английского lumping). В некоторых случаях выбор θ обосновывается и описывается теоретически, позволяя существенно ускорить итерационный процесс. Имеются также обобщения принципа компенсации (35) на основе усложнения матриц D_q с ленточной структурой и использования нескольких компенсирующих (фильтрующих) векторов (см. [2], [9], [10]):

$$D_q y_s = \sum_{r\in\Omega_q} A_{q,r}y_s, \quad s = 1, 2, \ldots, S, \tag{36}$$

однако в целом данная проблема требует дальнейших исследований.

Альтернативные аналоги блочного метода Якоби, относящегося к классу итерационных алгоритмов одновременных смещений, или аддитивных, является метод Зейделя, а также его развитие – алгоритмы последовательной верхней релаксации и симметричной последовательной верхней релаксации (SOR и SSOR). Последний метод с некоторыми модификациями публиковался также под именами "попеременно-треугольные", неполной факторизации и "явные схемы переменных направлений" (см. [2], [9]). Эти методы последовательных смещений, или мультипликативные (новое приближение u_q^{n+1} может быть выполнено только после нахождения предыдущих подвекторов $u_1^{n+1}, \ldots, u_{q-1}^{n+1}$), обладают повышенной скоростью сходимости, в том числе к ним применим ускоряющий принцип компенсации вида (35), (36). Однако такие алгоритмы основаны на обращениях треугольных матриц, которые плохо распараллеливаются. Поэтому в эпоху многопроцессорных суперкомпьютеров они оказались менее актуальны, и мы на них здесь останавливаться не будем. С другой стороны, в [43] показано, что применение адаптивных методов последовательных смещений "по потоку" может значительно сокращать количество итераций.

Для многочисленных методов предобусловливания имеются свои теоретические обоснования и оценки скорости сходимости итераций (см. обзор в [44]–[46]). Особый случай представляет собой динамическое, или гибкое, предобусловливание с переменными матрицами (см. [17], [47]–[51]). В итерационных процессах при решении СЛАУ, возникающих из аппроксимации краевых задач на сетке с характерным шагом h и имеющих число обусловленности порядка $O(h^{-2})$, его величина обычно понижается до $O(h^{-1})$ за счет предобусловливателя, в результате чего количество итераций при использовании методов крыловского типа оценивается как $n(\varepsilon) = O(h^{-1/2})$. Однако следует иметь в виду, что эти асимптотические выражения могут включать большие константы в "плохих" задачах, характеризуемых сильным разбросом значений элементов матрицы A.

3.1. Алгоритмы декомпозиции областей

При решении сеточных СЛАУ, особенно узлового типа, каждая компонента искомого вектора ассоциируется с одним узлом сетки, а структура и портрет матрицы (конфигурация ее ненулевых элементов) изоморфны сеточному графу не направленному для симметричных матриц и направленному – для несимметричных). В этом случае матричная блочная структура вида (2) геометрически наглядно представляется как декомпозиция сеточной расчетной области Ω на сеточные подобласти Ω_q, в каждой из которых формируется своя подзадача, алгебраически соответствующая диагональному блоку $A_{q,q}$. Исторический приоритет в методах декомпозиции принадлежит теории многомерных краевых задач еще с XIX века, когда решение дифференциальных уравнений в сложных расчетных областях с помощью альтернирующего метода Шварца сводилось к исследованию последовательности вспомогательных задач в пересекающихся подобластях с использованием условий Дирихле на вводимых внутренних границах. Позднее такие подходы были обобщены на непрерывном уровне в работах В.В. Смелова, П.Л. Лионса, А.М. Мацокина, О. Видлунда, Ф. Натафа и соавт., Ю.В. Василевского, М.А. Ольшанского и многих других авторов (см. обзоры литературы в [5], [7], [17]–[19], [52]–[57]), а также перенесены на дискретный, или сеточный, уровень. В эпоху многопроцессорных суперкомпьютеров методы декомпозиции стали главным инструментом для распараллеливания вычислений при решении многомерных начально-краевых задач со сложными реальными данными, требующими высокого разрешения и оперативности расчетов.

Многообразие МДО можно классифицировать по трем главным характеристикам. Первая – это размерность декомпозиции, определяемая тем, проводится ли разбиение областей одним, двумя или тремя семействами координатных плоскостей. Вторая характеристика заключается в величине пересечений подобластей, которые в простейшем случае определяются без налегания, а параметризованные пересечения на сеточном уровне строятся путем послойного последовательного расширения каждой подобласти элементарными ячейками сетки. Третье направление развития МДО основано на обобщении типов интерфейсных краевых условий при проведении итераций по подобластям.

В целом реализация МДО осуществляется как двухуровневый итерационный процесс в подпространствах Крылова: верхний уровень – это аддитивный блочный метод Шварца–Якоби вида (34), который для простоты в стационарном варианте можно записать как

$$u^{n+1} = u^n + B_1^{-1}(f - Au^n), \quad u^n = \{u_q^n\}, \quad B_1 = \text{block} - \text{diag}\{B_{q,q}\}, \tag{37}$$

где B_1 есть соответствующий предобусловливатель, который фактически будет использоваться в крыловском процессе. На каждой n-й итерации (37) осуществляется синхронное, или параллельное, решение вспомогательных подзадач в подобластях Ω_q, которое формально заключается в обращении блоков предобусловливателя $B_{q,q}$. Это может быть сделано или прямыми, или итерационными методами, среди которых для больших алгебраических систем естественно выбрать предобусловленные алгоритмы в соответствующих подпространствах Крылова. Отметим, что в последнем случае мы приходим к задаче многократного решения СЛАУ с одинаковыми матрицами, но разными правыми частями, что можно сделать экономично путем переиспользования базисов крыловских подпространств, как это указывалось выше в замечании 1.

С точки зрения распараллеливания вычислений на МВС, предпочтительнее разбивать сеточную расчетную область на большее число подобластей Ω_q, $q = 1, 2, \ldots, P$, чтобы все соответствующие подсистемы решать синхронно на P процессорах. Однако при этом будет очевидным образом расти количество внешних итераций, которые можно оценить величиной $O(P^{1/d})$, где d есть геометрическая размерность области (в предположении, что декомпозиция формирует d-мерную “макросеть” из подобластей). Число внешних итераций можно сократить за счет увеличения размеров пересечения контактирующих подобластей (over-lapping), но тогда реализация каждого шага будет становиться более трудоемкой (на практике пересечение сеточных подобластей выбирается размером в несколько шагов h).

Для ускорения итераций крыловского типа в МДО существуют различные подходы, которые могут быть интерпретированы как применение некоторых дополнительных предобусловливателей, в том числе сглаживающего типа, в силу чего такие методы иногда называются гибридными (см. [58], [59]). Рассмотрим в качестве примера метод грубосеточной коррекции, основанный на принципе дефляции для выбора начального приближения u^0.

Пусть у нас имеется какой-то информационный базис из векторов $v_1, \ldots, v_m$, составляющих матрицу $V = (v_1 \ldots v_m) \in \mathcal{R}^{N,m}$, $m < N$. Выбирая какой-то произвольный вектор u^{-1}, будем искать начальное приближение и соответствующий вектор невязки в виде

$$u^0 = u^{-1} + Vc, \quad r^0 = r^{-1} - AVc, \quad r^{-1} = f - Au^{-1},$$

где вектор неизвестных коэффициентов $c = (c_1, \ldots, c_m)^{\mathrm{T}}$ определяется по условию минимума невязки r^0 из переопределенного уравнения

$$AVc = r^{-1}. \tag{38}$$

Умножая обе части (38) слева на $V^{\mathrm{T}}A^{\gamma}$ с параметром $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$, получаем семейство обобщенных решений

$$c = (V^{\mathrm{T}}A^{\gamma+1}V)^{+}V^{\mathrm{T}}A^{\gamma}r^{-1},$$

где случай $\gamma = 1$ соответствует нормальному решению, т.е. минимизирующему евклидовые нормы невязки $r^0 = r^{-1} - AVc$ и самого решения c. Отсюда для откорректированной невязки получаем выражения

$$V^{\mathrm{T}}A^{\gamma}r^0 = 0, \quad r^0 = Tr^{-1}, \quad T = I - AV(V^{\mathrm{T}}A^{\gamma+1}V)^{-1}V^{\mathrm{T}}A^{\gamma}, \tag{39}$$

которые соответствуют минимуму функционала

$$\Phi_{\gamma}(r^0) = (A^{\gamma-1}r^0, r^0).$$

Нетрудно видеть, что при этом векторы v_s играют роль направляющих векторов в подпространствах Крылова, т.е. они обеспечивают вектор невязки r^0 ортогональными и вариационными свойствами, аналогичными тем, которые имеются в методах сопряженных градиентов и сопряженных невязок при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ соответственно.

Следуя этим соображениям, далее для методов сопряженных направлений определим через r^0 начальный направляющий вектор из соответствующих ортогональных условий:

$$V^{\mathrm{T}} A^{\gamma+1} p^0 = 0, \quad p^0 = B_2^{-1} r^0, \quad B_2^{-1} = I - A^{\gamma+1} V (V^{\mathrm{T}} A^{2\gamma+2} V)^{-1} V^{\mathrm{T}} A^{\gamma+1}. \tag{40}$$

Введенная здесь матрица B_2 играет роль второго предобусловлителя, в дополнение к B_1 из (37), и может вместе с ним использоваться на последующих итерациях по формулам мульти-предобусловленных сопряженных направлений (см. [17]). Отметим, что в (40) степени матрицы A подобраны таким образом, чтобы обеспечить симметричность B_2.

Вопрос выбора базисных векторов $v_1, \ldots, v_m$, эффективно дополняющих подпространство Крылова, актуален во многих ускоряющих итерационных процедурах. Так, алгоритм грубосеточной коррекции, активно используемый в МДО, основан в простейшем случае на "геометрической" декомпозиции сеточной области Ω_q, а его компоненты равны 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит ли соответствующий узел q-й подобласти или нет. Дальнейшее развитие этого подхода заключается в переходе от кусочно-постоянных базисных функций v_q к кусочно-полиномиальным более высоких порядков (см. [53]).

3.2. Многосеточные методы

Изначально в пионерских работах Р.П. Федоренко и Н.С. Бахвалова многосеточные подходы базировались на спектрально-аппроксимационных принципах, с раздельным подавлением компонент ошибки, соответствующих низким и высоким частотам. Дальнейшее их развитие осуществлялось в геометрическом плане, в алгебраическом (наиболее популярное название — AMG, от Algebraic Multi-Grid), а также в комбинаторном (см. [5], [56], [60]–[67]).

Данные подходы занимают исключительное место в вычислительной алгебре, поскольку являются асимптотически оптимальными по порядку, т.е. требуют объема компьютерных ресурсов, пропорционального размерности СЛАУ. Наиболее общая алгебраическая методология базируется на универсальном принципе предобусловливания матриц. А реализация технологий с различным количеством вложенных сеток трактуется как рекурсивное применение двухсеточного алгоритма. Для простоты рассмотрим последовательность вложенных сеток $\Omega_m \subset \ldots \subset \Omega_2 \subset \Omega_1$, т.е. узлы более редкой сетки являются узлами "ближайшей" густой сетки Ω_k. Будем предполагать, что сетка Ω_k получается из Ω_{k+1} путем "сгущения вдвое", так что соответствующие количества узлов соотносятся как $N_k \approx 2^d N_{k+1}$, где d есть размерность области. Для решения исходной СЛАУ $Au = f$ на Ω, которую можно переобозначить как $A_1 u_1 = f_1$, строится неявно предобусловливатель B_1 с помощью приближенного решения системы со специально конструируемой матрицей A_2 для сетки Ω_2 и т.д., процесс "зацикливается".

В современной трактовке достаточно общего вида, многосеточный метод AMG может быть представлен следующими этапами итерационного решения алгебраической системы $A_k u_k = f_k$ на Ω_k.

1. На "густой" сетке Ω_k по заданному приближению для вектора u_k^n вычисляется невязка

$$r_k^n = f_k - A_k u_k^n, \quad A_1 = A. \tag{41}$$

2. Для вектора r_k^n производится препроцессинг (предварительное сглаживание), как правило, путем проведения нескольких итераций с помощью какого-либо простого алгоритма. Более конкретно, данная процедура реализуется за два шага. На первом вычисляется направляющий вектор

$$\hat{S}_k p_k^n = r_k^n, \tag{42}$$

где $\hat{S}_k$ — оператор, или матрица, этого этапа (presmoothing). Фактически $\hat{S}_k$ есть некоторая аппроксимация матрицы A_k (формальное представление результатов нескольких циклов применяемого итерационного метода сглаживания). На втором шаге определяется очередное (сглаженное) приближенное решение и соответствующая невязка:

$$\tilde{u}_k^n = u_k^n + \tilde{p}_k^n, \quad \tilde{r}_k^n = f - A_k \tilde{u}_k^n = r_k^n - A_1 \tilde{p}_k^n. \tag{43}$$

3. По определенному на густой сетке Ω_k вектору $\tilde{r}_k^n$ формируется вектор невязки $\tilde{r}_{k+1}^n$ на редкой сетке Ω_{k+1}:

$$\tilde{r}_{k+1}^n = R_k \tilde{r}_k^n, \quad R_k \in \mathcal{R}^{N_k, N_{k+1}}, \quad \tilde{r}_k^n \in \mathcal{R}^{N_k}, \tag{44}$$

где R_k есть некоторый оператор сужения, или ограничения (этап restriction). В простейшем случае данная операция есть проектирование вектора с сетки Ω_k на Ω_{k+1}.

4. На редкой сетке вычисляется направляющий вектор $\hat{p}_{k+1}^n$ из решения СЛАУ

$$A_{k+1}\hat{p}_{k+1}^n = \tilde{r}_{k+1}^n, \quad A_{k+1} \in \mathcal{R}^{N_{k+1}, N_{k+1}}, \quad \hat{p}_{k+1}^n, \hat{r}_{k+1}^n \in \mathcal{R}^{N_{k+1}}, \tag{45}$$

где A_{k+1} – матрица СЛАУ для сетки Ω_{k+1}, в некотором смысле наследующая аппроксимационные и алгебраические свойства оператора A_k на сетке Ω_k. Существуют различные приемы для построения матрицы A_k, которая иногда называется матрицей грубосеточной коррекции.

5. Найденный из решения системы (45) вектор $\hat{p}_{k+1}^n$ продолжается с редкой сетки Ω на густую сетку Ω_k (этап prolongation):

$$\check{p}_k^n = P_k \hat{p}_{k+1}^n, \quad P_k \in \mathcal{R}^{N_k, N_{k+1}}, \quad \check{p}_k^n \in \mathcal{R}^{N_k}. \tag{46}$$

В некотором смысле согласованным определением вводимых операторов является такое, которое удовлетворяет соотношению $A_k^{-1} \approx P_k A_{k+1}^{-1} R_k$. Если, например, матрица A_k симметрична, то для наследования этого свойства на редкой сетке Ω_{k+1} целесообразно выбирать $P_k = R_k^{\text{т}}$. В частности, при этом определяется так называемая Галёркинская аппроксимация $A_{k+1} = P_k^{\text{т}} A_k P_k$.

6. Для вектора $\check{p}_k^n$ определяются соответствующие векторы приближенного решения и невязки на густой сетке (resudial update)

$$\check{u}_k^n = \tilde{u}_k^n + \check{p}_k^n, \quad \check{r}_k^n = f_k - A_k \check{u}_k^n = r_k^n - A_k \check{p}_k^n, \quad \check{r}_k^n \in \mathcal{R}^{N_k}. \tag{47}$$

7. Проводится “пост-процессинг”, т.е. повторное сглаживание, для вновь полученных направляющего вектора и итерационного приближения решения на густой сетке Ω_k, с одновременным вычислением нового направляющего вектора $\hat{p}_k^n$ из решения вспомогательной СЛАУ с матрицей $\check{S}_k$ (оператор повторного сглаживания, этап postsmoothing):

$$\check{S}_k \hat{p}_k^n = \check{r}_k^n, \tag{48}$$

аналогично (42).

8. Итоговый направляющий вектор определяется как результат первой итерации AMG:

$$p_k^n = \hat{p}_k^n + \check{p}_k^n + \tilde{p}_k^n = B_k^{-1} r_k^n,$$

где B_k есть предобусловливающая матрица данной двухсеточной стадии метода, явный вид которой можно выразить через операторы сглаживания, ограничения, грубосеточной коррекции и продолжения, однако ее конкретное представление не суть важно, так как общая схема вычислений и ее реализация описываются формулами (41)–(48). Частных вариантов двухсеточного метода может быть достаточно много, и все они (при организации стационарного итерационного процесса) имеют вид

$$u_k^{n+1} = u_k^n + p_k^n = u_k^n + B_k^{-1} r_k^n, \tag{49}$$

представляющий собой двухуровневый итерационный процесс, поскольку операция умножения на B_k^{-1} включает решение СЛАУ с матрицей A_{k+1}, что при больших значениях N_{k+1} прямым алгоритмом делать нецелесообразно. Понятно, что на основе алгоритма (49) можно построить предобусловленный метод в подпространствах Крылова.

Но идея многосеточного подхода состоит в использовании рекурсивного принципа: для приближенного решения уравнений на редкой сетке Ω_{k+1} применяются приведенные выше приемы с использованием еще более редкой сетки Ω_{k+2} и т.д. При этом на каждой сетке Ω_k весь цикл вычислений по формулам (41)–(48) можно повторять заданное число γ раз, что может быть записано как обобщение соотношения (49):

$$u_k^{n+1} = u_k^n + B_k^{-\gamma} r_k^n. \tag{50}$$

На практике число таких повторов выбирается равным $\gamma = 1$ или $\gamma = 2$. В первом случае получаемая вычислительная схема называется V-циклом, а во втором – W-циклом. В [64] и [65] предложено развитие такого подхода: K-цикл, в котором при $\gamma = 2$ используется не стационарный итерационный процесс, а крыловского типа (более конкретно, "гибкий" метод сопряженных градиентов FCG из [40]). В последней формуле надо иметь в виду, что предобусловливатель B_k выражается рекурсивно для $k = 1, 2, \ldots, m-1$, а на последней m-й сетке СЛАУ вида (45) с матрицей A_{m+1} решается непосредственно (прямым или итерационным методом).

Конкретные реализации многосеточных подходов, ставших уже классическими, отличаются способами выбора матричных операторов, определяющих последовательные этапы приведенной вычислительной схемы.

3.3. Алгоритмы неполной факторизации

Наиболее классическими приемами предобусловливания СЛАУ являются многочисленные явные и неявные методы приближенной факторизации матриц, обширный анализ которых без аспектов распараллеливания приведен в [10]. Современные подходы к этим технологиям, включая перспективные аппроксимации матриц, обратных к треугольным множителям из неполных матричных разложений, приведены в [68]–[70] и цитируемой там литературе.

Типичная форма легко обращаемой предобусловленной матрицы заключается в приближенной факторизации вида

$$B = (G + L)G^{-1}(G + U) = G + L + U + LG^{-1}U. \tag{51}$$

Здесь L и U – нижняя и верхняя треугольные части исходной матрицы $A = D + L + U$, а D – некоторая блочно-диагональная или диагональная в частном случае матрица. Из общего требования $B \approx A$ блочно-диагональная матрица G строится с помощью соотношения

$$G = D - \overline{LG^{-1}U}, \tag{52}$$

где черта над матрицей обозначает ее какую-то ленточную аппроксимацию.

На основе формул (51), (52) конструируются различные методы симметричной последовательной верхней релаксации (при этом $G = 2\omega^{-1}D$), где ω есть итерационный параметр, а также явной и неявной неполной факторизации, содержательный анализ которых представлен в книгах [2], [5], [10], [68], а также в специальных обзорных статьях [51], [69], [70]. Широкое семейство алгоритмов основано на неполном LU-разложении исходной матрицы, которое в симметричном случае сводится к приближенному разложению Холеского. Качество аппроксимации матрицы и скорость сходимости повышаются за счет "уплотнения" матричных множителей, но при этом "дорожает" каждая итерация.

Схожий подход, но ориентированный на распараллеливание, заключается в конструировании разреженной аппроксимации обратной матрицы, устраняющей необходимость решения треугольных систем на каждой итерации. Описанные методы исследованы как в поточечном, так и в блочных вариантах. Оригинальные результаты в этих направлениях получены А.Ю. Ереминым, И.Е. Капориным, Л.Ю. Колотилиной, И.Н. Коньшиным и другими авторами в работах [31], [32], [71], [72]. Другое перспективное направление основано на факторизации, в том числе приближенной, иерархических матриц в HSS-форматах с использованием малоранговых блочных структур в LU-разложении (см. [73], [74]).

Наконец, отметим еще перспективное семейство алгоритмов построения предобусловливателей, базирующееся на сетевом программировании или на методах преобразования графов (см. [75]–[77]). Существенным является и такой момент, что если традиционно неполное треугольное разложение матриц реализуется для невырожденных матриц, то сейчас имеются его модификации и для положительно-полуопределенных случаев.

Один из общих подходов к ускорению итераций заключается в принципе компенсации, или согласования строчных сумм, который заключается в подборе матрицы G в (51), (52) по выполнению условий

$$By^{(l)} = Ay^{(l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, m, \tag{53}$$

на некотором заданном наборе из m пробных векторов (см. [49], [78] и цитируемую там литературу). В некоторых работах такой прием также называется фильтрацией.

Для удовлетворения условия (53) матрица G преобразуется к виду

$$G = D - \overline{LG^{-1}U} - \theta S, \tag{54}$$

где $\theta \in [0, \theta \in [0,1]]$, – некоторый компенсирующий параметр, а S – блочно-диагональная матрица, формируемая по условию

$$Sy^{(l)} = (LG^{-1}U - \overline{LG^{-1}U})y^{(l)}, \quad l = 1, 2, \ldots, m. \tag{55}$$

Среди методов неполной факторизации для решения сеточных СЛАУ наиболее быстрыми являются неявные, которые базируются на алгоритмах прогонки решения вспомогательных трехдиагональных систем. Такие алгоритмы эффективно распараллеливаются на МВС с помощью многопотоковых реализаций рекурсивных прогоночных процедур, основанных или на методах редукции исходных СЛАУ, или на методах окаймления. Отметим, что в [57] предложен двухпотоковый блочный вариант попеременно-треугольной факторизации исходной матрицы, когда каждый из множителей не является нижней или верхней треугольной матрицей, а состоит из блочных строк различной ориентации: одни являются нижними треугольными, а остальные – верхними треугольными (такое разложение названо авторами “twisted decomposition”, а в русскоязычной литературе данный подход традиционно определяется как алгоритм встречных прогонок, см. обзор в [27]).

Если матрица A симметричная, т.е. $D = D^{\mathrm{T}}$ и $L = U^{\mathrm{T}}$, то естественно выбирать матрицы G и B также симметричными, а для исходной СЛАУ – использовать двустороннее предобусловливание с сохранением симметрии итоговой системы:

$$\begin{gathered} \bar{A}\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{A} = L_B^{-1}AU_B^{-1}, \quad \bar{u} = U_B\bar{u}, \quad \bar{f} = L_B^{-1}f, \\ B = L_BU_B, \quad L_B = (G+L)U_G^{-1}, \quad G = L_GU_G, \quad U_G = L_G^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{56}$$

Предобусловленная матрица $\bar{A}$ после несложных преобразований может быть приведена к виду

$$\begin{gathered} \bar{A} = (I+\bar{L})^{-1} + (I+\bar{U})^{-1} + (I+\bar{L})^{-1}(\bar{D}-2I)(I+\bar{U})^{-1}, \\ \bar{D} = L_G^{-1}DU_G^{-1}, \quad \bar{L} = L_G^{-1}LU_G^{-1}, \quad \bar{U} = L_G^{-1}UU_G^{-1}, \end{gathered} \tag{57}$$

которое допускает реализацию векторно-матричного умножения в виде

$$\bar{A}v = (I+\bar{L})^{-1}[v + (\bar{D}-2I)w] + w, \quad w = (I+\bar{U})^{-1}v, \tag{58}$$

во многих случаях дающем существенную экономию вычислений. Отметим, что матричные представления (56)–(58) справедливы и без требований $L_B = U_B^{\mathrm{T}}$, $L_G = U_G^{\mathrm{T}}$, т.е. данные формулы приемлемы и для несимметричных СЛАУ.

Непосредственное обращение треугольных матриц, которое присутствует в описанных выше алгоритмах, плохо распараллеливается. Существуют специальные технологические приемы, позволяющие в определенной степени этот недостаток устранить (см., например, [79] и обзор литературы в [80]). Мы рассмотрим другой подход, использующий вместо L, U переменно-треугольные матрицы $\hat{L}, \hat{U}$, имеющие на части строк ненулевые элементы только слева от главной диагонали, а на остальных – только справа. Построение таких преобусловливателей мы проиллюстрируем на примере блочно-трехдиагональной матрицы

$$Au = \begin{bmatrix} D_1 & U_1 & & & 0 \\ L_2 & D_2 & U_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & U_{N_x-1} \\ 0 & & & L_{N_x} & D_{N_x} \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Переменно-треугольные матрицы в данном случае определим следующим образом:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ L_2 & 0 & 0 & & & 0 & \\ & L_3 & 0 & 0 & & & \\ & & L_4 & 0 & U_4 & & \\ & & & 0 & 0 & U_5 & \\ & 0 & & & 0 & 0 & U_6 \\ & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{bmatrix} 0 & U_1 & & & & & \\ 0 & 0 & U_2 & & & 0 & \\ & 0 & 0 & U_3 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & L_5 & 0 & 0 & \\ & 0 & & & L_6 & 0 & 0 \\ & & & & & L_7 & 0 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Поскольку в данном случае $A = D + \hat{L} + \hat{U}$, формулы неполной факторизации (51)–(58) для определения предобусловливателя B остаются в силе. Надо только заменить L и U на $\hat{L}$ и $\hat{U}$ соответственно. При этом трехдиагональные блоки матрицы $\bar{G} = \{\bar{G}_i\}$ находятся по формулам, аналогичным (28), (29), но только с помощью встречных рекурсий (блочных прогонок, см. [25]), которые мы выпишем для произвольного нечетного $N_x = 2m + 1$:

$$\begin{gathered} G_1 = D, \quad G_i = D_i - L_i G_{i-1}^{-1} U_{i-1} - \theta S_i, \quad i = 2, \ldots, m, \\ G_{N_x} = D_{N_x}, \quad G_i = D_i - U_i G_{i+1}^{-1} r U_{i+1} - \theta S_i, \quad i = N_x - 1, \ldots, m + 2, \\ S_i y^{(l)} = L_i (G_{i-1}^{-1} - G_{i-1}^{-1}) U_{i-1} y^{(l)}, \quad l = 1, \ldots, l_i, \\ G_{m+1} = D_{m+1} - L_{m+1} G_m^{-1} U_m - U_{m+1} G_{m+2}^{-1} L_{m+2} - \theta S_{m+1}, \\ S_{m+1} y^{(l)} = [L_{m+1}(G_m^{-1} - G_m^{-1}) U_m - U_{m+1}(G_{m+2}^{-1} - G_{m+2}^{-1})] y^{(l)}, \end{gathered} \tag{61}$$

где S_i суть диагональные матрицы для $l = 1$ и трехдиагональные при $l = 2$.

При использовании матрицы $\bar{B}$ в качестве предобусловливателя для какого-либо итерационного процесса на каждом шаге требуется решать вспомогательную систему вида

$$Bp \equiv (G + \hat{L}) G^{-1} (G + \hat{U}) p = r.$$

Ее решение можно найти из последовательных соотношений

$$(G + \hat{L}) v = r, \quad Gw = \hat{U} p, \quad p = v - w,$$

которые реализуются с помощью встречных матричных прогонок по следующим формулам:

$$\begin{gathered} v_1 = G_1^{-1} r_1, \quad i = 2, \ldots, m : v_i = G_1^{-1}(r_i - \hat{L}_i v_{i-1}), \\ v_{N_x} = G_{N_x}^{-1} r_{N_x}, \quad i = N_x - 1, \ldots, m + 2 : v_i = G_i^{-1}(r_i - \hat{U}_i v_{i+1}), \\ v_{m+1} = G_{m+1}^{-1}(r_{m+1} - \hat{L}_{m+1} v_m - \hat{U}_{m+1} v_{m+2}) = p_{m+1}, \\ i = m, \ldots, 1 : w_i = G_i^{-1} \hat{U}_i p_{i+1}, \quad p_i = v_i - w_i, \\ i = m + 2, \ldots, N_x : w_i = G_i^{-1} \hat{L}_i p_{i-1}, \quad p_i = v_i - w_i. \end{gathered} \tag{62}$$

В рекурсиях (61) и (62) этапы вычислений с увеличением индекса i и с его уменьшением можно назвать прямыми и обратными прогонками соответственно. Очевидно, что их реализации могут выполняться параллельно на двух потоках. Данный ограниченный параллелизм основан на односменной триангуляции вида (60) для матриц L, U. Данный подход можно обобщить на P — сменную триангуляцию, т.е. определить матрицы $\hat{L}, \hat{U}$ с условием $\hat{L} + \hat{U} = L + U$ как состоящие из P блочных строк, каждая из которых последовательно меняет тип триангуляции. Формулы блочных прогонок вида (61), (62) принимают более сложный вид, но могут распараллеливаться на P процессорах.

Матрица в (59) соответствует, например, пятиточечным уравнениям Лапласа на прямоугольной сетке с числом узлов $N = N_x \cdot N_y$. В этом случае D_i — трехдиагональные, а L_i и U_i — диагональные блоки. При переходе к трехмерным задачам на параллелепипедоидальной сетке с количеством узлов $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ матрица A может быть также представлена в блочно-трехдиагональном виде (59), но каждый диагональный блок D_k будет теперь иметь размерность $N = N_x \cdot N_y$ и представлять собой матрицу, структурно совпадающую с (59).

Развитие рассмотренных выше подходов для решения СЛАУ на трехмерных сетках получило название методов вложенных факторизаций (nested factorization), предложенных в 1983 г. Дж. Апплеярдом и И. Чешире, а впоследствии исследованных многими авторами (см. [57], [82], [83] и цитируемую там литературу). Пусть матрица A представлена в виде

$$A = D + L_1 + U_1 + L_2 + U_2 + L_3 + U_3, \tag{63}$$

где D — диагональная, а L_k и $U_k, k = 1, 2, 3,$ — нижние и верхние треугольные матрицы. Определим предобусловливающую матрицу B путем рекурсивной факторизации вида (51):

$$\begin{gathered} B = (P + L_3)P^{-1}(P + U_3) = P + L_3 + U_3 + L_3P^{-1}U_3, \\ P = (T + L_2)T^{-1}(T + U_2) = T + L_2 + U_2 + L_2T^{-1}U_2, \\ T = (M + L_1)M^{-1}(M + U_1) = M + L_1 + U_1 + L_1M^{-1}U_1, \end{gathered} \tag{64}$$

в результате чего получаем

$$B = M + A - D + L_1M^{-1}U_1 + L_2T^{-1}U_2 + L_3P^{-1}U_3. \tag{65}$$

В зависимости от способа определения матрицы M могут быть сформированы различные предобусловливатели B. Мы остановимся на простом случае, когда матрица (63) соответствует семиточечной аппроксимации задачи Дирихле для уравнения Пуассона в параллелепипеде на параллелепипедной сетке. Тогда при естественной упорядоченности узлов матрицы M, T и P можно сформировать диагональной, трехдиагональной и пятидиагональной соответственно, а предобусловливатель можно определить по формулам

$$\begin{gathered} M = D - L_1M^{-1}U_1 - \theta_2S_2 - \theta_3S_3, \\ B = A + L_2T^{-1}U_2 + L_3P^{-1}U_3 - \theta_2S_2 - \theta_3S_3. \end{gathered} \tag{66}$$

Здесь θ_2 и θ_3 — итерационные (релаксирующие) параметры, а S_2 и S_3 — диагональные матрицы, определяемые из условий согласования строчных сумм, аналогично рассмотренному выше:

$$S_2e = L_2T^{-1}U_2e, \quad S_3e = L_3P^{-1}U_3e. \tag{67}$$

Отметим, что вместо (67) можно использовать согласование не строчных, а столбцовых сумм (см. [83] и приведенную там литературу):

$$e^{\text{т}}S_2 = e^{\text{т}}L_2T^{-1}U_2, \quad e^{\text{т}}S_3 = e^{\text{т}}L_3P^{-1}U_3. \tag{68}$$

Рассмотренный трехуровневый метод вложенных факторизаций можно структурно упростить, сведя его к двухуровневому. Для этого перепишем исходную матрицу A из (63) в виде

$$A = D_3 + L_3 + U_3, \quad D_3 = D_2 + L_2 + U_2, \quad D_2 = D + L_1 + U_1. \tag{69}$$

В данном случае D_3 есть блочно-диагональная матрица с пятидиагональными блоками $D_{3,i}$ размерности N_yN_z, каждый из которых соответствует плоской задаче в сечении $x = \text{const}$ и имеет структуру матрицы A в (59). Тогда матрицу P в (64) определяем формулой

$$P = \{G_i = D_{3,i} - \theta S_i\}, \quad S_ie = L_{3,i}G_{i-1}^{-1}U_{i-1}e,$$

что соответствует определению $L_3P^{-1}U_3 = 0$ в (64). Отметим, что L_3 и U_3 можно определить как переменно-треугольные, и тогда реализацию алгоритма можно распараллеливать с помощью встречных блочных прогонок.

3.4. Методы решения седловых СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ с матрицей седлового типа

$$A\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} D & C^{\text{т}} \\ C & 0 \end{bmatrix}, \tag{70}$$

где $A \in \mathcal{R}^{N,N}$, $D \in \mathcal{R}^{N_1,N_1}$, $C \in \mathcal{R}^{N_2,N_1}$, $N = N_1 + N_2$ и $f \in \mathcal{R}^{N_1}$ и $p, g \in \mathcal{R}^{N_2}$. Матрица D предполагается симметричной и положительно-полуопределенной. При этом необходимым и достаточным условием невырожденности A является $\ker(D) \cap \ker(C) = \{0\}$, а достаточным условием является положительная определенность матрицы D на $\ker(C)$ и $\ker(C^{\text{т}}) = \{0\}$, что мы будем предполагать выполненным в дальнейшем.

Задачи с седловой точкой представляют собой широко распространенную форму математических постановок в проблемах моделирования, включая начально-краевые смешанные формулировки для дифференциальных классических или обобщенных уравнений, оптимизационные задачи и вычислительную алгебру (см. [84]–[87] и цитируемую там литературу). Мы делаем акцент на методах решения седловых СЛАУ с большими разреженными матрицами, возникающими при сеточных аппроксимациях многомерных краевых задач, которые появляются во многих актуальных приложениях: электромагнетизме, гидро-газодинамике, упруго-пластичности, многофазной фильтрации в пористых средах, в задачах оптимизации и т.д.

В силу особенностей блочной структуры седловых алгебраических систем, методам их решения посвящено значительное количество работ: обзоры Дж. Голуба и соавт. [84], Ф. Брецци [85], П. Василевского [72] и И. Нотея [86], монография Ю.В. Быченкова и Е.В. Чижонкова [87], цикл статей Ч. Грейфа и соавт. (в том числе для несимметричных СЛАУ седлового типа, см. [68], [85]) и М. Ариоли с соавт. [25], [75] (см. также обзоры в [90]–[92]).

Отметим, что без потери общности мы можем рассматривать седловую СЛАУ в виде

$$\begin{bmatrix} D & C^{\text{т}} \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Действительно, если мы возьмем какое-либо частное решение системы $C\hat{u} = g$, то вектор $u = \breve{u} + \hat{u}$, являющийся решением СЛАУ (70), будет удовлетворять системе

$$\begin{bmatrix} D & C^{\text{т}} \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \breve{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f - D\hat{u} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим также, что любые решения СЛАУ (71) удовлетворяют одновременно системе

$$\tilde{A}v = \tilde{A}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{D} & C^{\text{т}} \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \tilde{f}, \quad \tilde{D} = D + R, \quad R = C^{\text{т}}K_0^{-1}C, \tag{72}$$

где $v, \tilde{f} \in \mathcal{R}^N$, а $K_0 \in \mathcal{R}^{N_1,N_1}$ – произвольная невырожденная матрица. Поскольку последняя система формально является регуляризацией, или обобщением, СЛАУ (71), мы в дальнейшем останавливаемся на алгоритмах решения именно уравнения (72).

С использованием дополнения Шура

$$S = -C\tilde{D}^{-1}C^{\text{т}}$$

матрица системы (72) факторизуется в виде

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{D} & 0 \\ C & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \tilde{D}^{-1}C^{\text{т}} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Если матрицы $\bar{D}$, S заменить их приближениями (предобусловливателями) B_d и B_s, то получаем предобусловливатель матрицы B в виде неполной блочной факторизации

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_d & 0 \\ C & -B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B_d^{-1}C^{\text{т}} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{73}$$

Несколько более грубая аппроксимация, при использовании в (73) только одного (левого или правого) множителя приводит к неполному блочно-треугольному предобусловливанию с матрицей

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_d & C^{\text{т}} \\ 0 & -B_s \end{bmatrix} \tag{74}$$

или к неполному предобусловливателю Узавы

$$B_3 = \begin{bmatrix} B_d & 0 \\ C & -B_s \end{bmatrix}. \tag{75}$$

Реализация каждого шага соответствующих итерационных процессов может быть представлена несколькими стадиями, на которых пересчитывается только одна блочная компонента искомого решения (поэтому эти методы называются иногда сегрегационными). В несколько обобщенной форме такой стационарный алгоритм (без крыловского ускорения) представим следующими тремя стадиями (см. [83], [85], [86]):

$$\begin{aligned} \hat{u}_d^{n+1} &= u_d^n + Q_d^{(1)}(f_d - \bar{D}u_d^n - C^{\text{т}}u_c^n), \\ u_s^{n+1} &= u_s^n - B_s^{-1}(f_s - C\hat{u}_d^{-1}), \\ u_d^{n+1} &= \hat{u}_d^{n+1} + Q_d^{(2)}(f_d - \bar{D}A\hat{u}_d^{n+1} - C^{\text{т}}u_s^{n+1}). \end{aligned} \tag{76}$$

Здесь $Q_d^{(1)}$, $Q_d^{(2)}$ – некоторые аппроксимации матрицы, обратной или обобщенно обратной к предобусловливателю B_d. В частности, если $Q_d^{(1)} = B_d^{-1}$, $Q_d^{(2)} = 0$ или $Q_d^{(1)} = 0$, $Q_d^{(2)} = B_d^{-1}$, то из (76) мы получаем или алгоритм Узавы с предобусловливателем B_3 из (75) (при этом третья стадия опускается, т.е. $u_d^{n+1} = \hat{u}_d^{n+1}$), или неполное блочно-треугольное предобусловливание с матрицей B_2 из (74) (при этом первая стадия в (76) опускается и $u_d^{n+1} = u_d^n$).

Если матрица $Q_d = Q_d^{(1)} + Q_d^{(2)} - Q_d^{(2)}\bar{D}Q_d^{(1)}$ является невырожденной, то итерационному процессу (76) соответствует предобусловливатель

$$B_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CQ_d^{(1)} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_d^{-1} & 0 \\ 0 & -B_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q_d^{(2)}C^{\text{т}} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{77}$$

В этом случае для $Q_d^{(1)} = Q_d^{(2)} = B_d^{-1}$ из (77) следует так называемый симметризованный метод Узавы с предобусловливающей матрицей

$$B_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CB_d^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_d(2B_d - \bar{D})^{-1}B_d & 0 \\ 0 & B_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B_d^{-1}C^{\text{т}} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Одним из перспективных блочно-диагональных предобусловливателей для решения СЛАУ (72) является следующий:

$$B_6 = \begin{bmatrix} \tilde{D} + C^{\text{т}}K_1^{-1}C & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \tag{78}$$

где K_1 и K_2 – некоторые симметричные невырожденные матрицы.

Собственные числа и векторы предобусловленной матрицы $\bar{A} = B_6^{-1}\tilde{A}$ из "возмущенной" СЛАУ (72) определяются спектральной задачей

$$\lambda B_6 z = \tilde{A}z, \quad z = (z_1^{\text{т}}, z_2^{\text{т}})^{\text{т}}, \quad z_k \in \mathfrak{R}^{N_k}, \quad k = 1, 2,$$

имеющей в компонентном виде следующее представление:

$$\begin{aligned}(D + C^{\mathrm{T}}K_0C)z_1 + C^{\mathrm{T}}z_2 &= \lambda(\tilde{D} + C^{\mathrm{T}}K_1^{-1}C)z_1,\\ Cz_1 &= \lambda K_2 z_2.\end{aligned} \tag{79}$$

Анализ данной спектральной задачи позволяет получать интересные результаты для различных частных случаев. В [81], [82] показано, в частности, что уникальные спектральные свойства матрицы $\overline{A}$ получаются при сильной вырожденности блока $\tilde{D}$, актуальной для алгоритмов решения систем уравнений Максвелла. Например, справедливы следующие результаты.

Утверждение 1. *Пусть B_6 есть СПО-матрица, а $\{z_i,\ i = 1, 2, \ldots, N_1 - N_2\}$ — базис ядра матрицы C. Тогда предобусловленная матрица $B_6^{-1}\tilde{A}$ имеет $N_1 - N_2$ линейно независимых векторов $(z_i^{\mathrm{T}} 0) \in \mathfrak{R}^N$, которым соответствуют $N_1 - N_2$ кратных собственных значений $\lambda = 1$.*

Утверждение 2. *Пусть $K_1 = K_2 = K$, а $\tilde{D}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица с размерностью ядра, равной r. Тогда $\lambda = 1$ есть собственное значение матрицы $B_6^{-1}\tilde{A}$ с кратностью N_1, а $\lambda = -1$ — собственное значение кратности r. Остальные $N_2 - r$ собственных значений принадлежат интервалу $\lambda \in (-1, 0)$ и удовлетворяют соотношению*

$$\lambda = -\mu/(\mu + 1),$$

где μ суть $N_2 - r$ положительных обобщенных собственных значений

$$\mu\tilde{D}z = C^{\mathrm{T}}KCz.$$

Пусть $\{z_i,\ i = 1, 2, \ldots, N_1 - N_2\}$ есть базис ядра C, $\{x_i,\ i = 1, 2, \ldots, N_2 - 2\}$ — базис ядра $\tilde{D}$, а $\{y_i,\ i = 1, 2, \ldots, N_2 - r\}$ — совокупность линейно независимых векторов, дополняющих $\ker(\tilde{D}) \cup \ker(C)$ в базисе $\mathfrak{R}^{N_1}$. Тогда $N_1 - N_2$ векторов $(z_i, 0)$, r векторов $(x_i,\ K^{-1}Cx_i)$ и $N_2 - r$ векторов $(y_i,\ K^{-1}y_i)$ суть линейно независимые собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda = 1$, а r векторов $(x_i,\ K^{-1}x_i)$ — собственные векторы, соответствующие $\lambda = -1$.

В целом наличие в предобусловливателе B_6 различных матриц K_0, K_1, K_2 предоставляет широкие возможности для конструирования эффективных алгоритмов в конкретных случаях.

Мы рассмотрим далее семейство итерационных методов для решения седловых симметричных СЛАУ с матрицей $\tilde{A}$ из (72), основанное на эффективном подходе $G - K$-бидиагонализации Голуба—Кахана, которая изначально была предложена для сингулярного разложения прямоугольных матриц, но затем в работах М. Саундерса, М. Ариоли, Ч. Грейфа и других авторов успешно применялась для решения алгебраических систем, в том числе с учетом блочной седловой структуры.

Без ограничения общности исследуемую СЛАУ запишем в виде

$$\tilde{A}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{D} & C^{\mathrm{T}} \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D + C^{\mathrm{T}}K^{-1}C. \tag{80}$$

Легко проверить, что если в (72) функцию u заменить на $u + \tilde{D}^{-1}f$, то эта система примет форму (80) с правой частью $g = -C\tilde{D}^{-1}f$. Предполагается, что в (80) $\tilde{D}$ и K являются СПО-матрицами, а также выполняется неравенство $N_1 \geq N_2$.

Метод $G - K$-бидиагонализации базируется на построении $\tilde{D}$-ортогональных векторов v_k и K-ортогональных векторов q_k, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{T}}Q &= \tilde{D}V[B^{\mathrm{T}}0]^{\mathrm{T}}, \quad V^{\mathrm{T}}\tilde{D}V = I_{N_1},\\ CV &= KQ[B^{\mathrm{T}}0], \quad Q^{\mathrm{T}}KQ = I_{N_2},\end{aligned} \tag{81}$$

где $V = [v_1, \ldots, v_{N_1}] \in \mathcal{R}^{N_1,N_2}$, $Q = [q_1, \ldots, q_{N_1}]$, а $B \in \mathcal{R}^{N_2,N_2}$ есть двухдиагональная матрица

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{N_2-1} & \beta_{N_2-1} \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \alpha_{N_2} \end{bmatrix}.$$

Вводя новые неизвестные функции

$$u = Vz, \quad p = Qg \tag{82}$$

и умножая систему (80) на блочно-диагональную матрицу block-diag$(V^{\text{т}}, Q^{\text{т}})$, получаем

$$\begin{bmatrix} I_{N_2} & 0 & B \\ 0 & I_{N_1-N_2} & 0 \\ B^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q^\top g \end{bmatrix}, \quad z_1 \in \mathcal{R}^{N_2}, \quad z_2 \in \mathcal{R}^{N_1-N_2}. \tag{83}$$

Из (83) следует, что вектор u зависит от N_2 столбцов матрицы V, поскольку $z_2 = 0$. Таким образом, СЛАУ (83) редуцируется к виду

$$\begin{bmatrix} I_{N_2} & B \\ B^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q^{\text{т}} g \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Отсюда, полагая

$$q_1 = K^{-1}g/\|g\|_{K^{-1}}, \quad \alpha_1 \tilde{D}^{-1} v_1 = C^{\text{т}} q_1, \quad \|g\|_{K^{-1}} = (g, K^{-1}g)^{1/2},$$

находим начальный вектор v_1:

$$v_1 = w/\alpha_1, \quad \alpha_1 \sqrt{w^{\text{т}} C^{\text{т}} q_1}, \quad w = \tilde{D} C^{\text{т}} q_1. \tag{85}$$

Дальнейшие векторы v_n, q_i и элементы α_i, β_i матрицы B вычисляются из рекуррентных соотношений, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\begin{gathered} s = K^{-1}(Cv_n - \alpha_i K q_n), \quad \beta_{n-1} = \sqrt{s^{\text{т}} K s}, \\ q_{n+1} = s/\beta_{n+1}, \quad w = \tilde{D}^{-1}(C^{\text{т}} q_{n+1} - \beta_{n+1} \tilde{D} v_n), \\ \alpha_{n+1} = (w^{\text{т}} \tilde{D} w)^{1/2}, \quad v_{n+1} = w/\alpha_{n+1}. \end{gathered} \tag{86}$$

Последовательные приближения u^n в соответствии с (82) определяются по первым n столбцам матрицы V, т.е.

$$u^n = V_n z^n = \sum_{j=1}^{n} z_1^j v_j, \quad z^n = (z_1^1, \ldots, z_1^n), \tag{87}$$

где z_1^j – компоненты вектора z_1 из (84), вычисляемые по формулам

$$z_1^n = \|g\|_{N^{-1}}/\alpha_1, \quad z_{j+1}^n = -\beta_{j+1} z_j^n / \alpha_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, N_2. \tag{88}$$

Опуская детали вывода формул (см. подробнее [87]), мы приведем итоговые рекуррентные соотношения для итерационного решения:

$$\begin{gathered} u^{n+1} = u^n + z_1^{n+1} v_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N_2, \\ p^{n+1} = p^n - z_1^{n+1} d_{n+1}, \quad d_{n+1} = (q_{n+1} - \beta_{n+1}\alpha_n)/\alpha_{n+1}, \end{gathered} \tag{89}$$

где d_n есть n-й столбец $D = QB^{-1}$. Отметим, что описанный алгоритм обладает следующими свойствами оптимизации: на каждом n-м шаге ошибка итерационного приближения достигает своего минимума:

$$\min_{\substack{u_n \in \mathcal{U}_n \\ Cu^n - g \perp \mathcal{Q}_n}} \left\| u - u^n \right\|_{\tilde{D}}, \qquad \mathcal{U}_n = \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}, \quad \mathcal{Q}_n = \operatorname{Span}\{q_1, \ldots, q_n\}. \tag{90}$$

Как отмечается в [71], данный метод обладает высокой скоростью сходимости при решении СЛАУ, возникающих при конечно-элементных аппроксимациях непрерывных многомерных краевых задач седлового типа, т.е. в смешанных постановках. При этом существенным фактором является то, что на каждой итерации требуется решать возникающие алгебраические подсистемы с матрицами $\tilde{D}$ и K, которые в некотором смысле играют роль предобусловливателей. Их приближенное обращение приводит фактически к двухуровневым итерационным процессам в определенных подпространствах.

4. ВОПРОСЫ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Современное понимание качества алгоритма включает две главных характеристики: математическая эффективность и производительность его реализации на конкретной архитектуре суперкомпьютера. Первая сторона включает конструирование и оптимизацию итерационных методов с высокой скоростью сходимости, а также теоретические оценки вычислительной ресурсоемкости (необходимые объемы арифметических операций и памяти). Второй аспект является чисто практическим и характеризуется реальным временем выполнения алгоритма для определенного класса задач, что зависит от масштабируемости его распараллеливания, а также от технологий программирования на конкретной компьютерной платформе.

Наиболее интересующие нас СЛАУ имеют высокие порядки (10^8—10^{11}) и разреженные матрицы с большими числами обусловленности (10^{12}—10^{15}) и нерегулярной структурой. Это не только приводит к большому числу итераций, но и вынуждает работать с системами распределенной и иерархической общей памяти, а также существенно замедляет доступ к данным.

Основная количественная характеристика распараллеливания — это ускорение вычислений

$$S_p = T_1/T_p, \quad T_p = T_p^a + T_p^c,$$

где T_p — время решения задачи на p процессорах, складывающееся из времени информационных обменов и выполнения арифметических операций, которые описываются приближенными формулами

$$T^a = \tau_a N_a, \quad T^c = N_t(\tau_0 + \tau_c N_c).$$

Здесь τ_a и N_a — среднее время выполнения одного арифметического действия и их общее количество, N_t — число обменов, τ_0 и τ_c — время ожидания и длительность передачи одного числа, а N_c — средний объем одной коммуникации.

Поскольку для машинных констант справедливы неравенства $\tau_0 \gg \tau_c \gg \tau_0$, то для конструируемых алгоритмов следуют очевидные рекомендации: надо стараться минимизировать объем коммуникаций, а сами обмены осуществлять не маленькими, а большими порциями, т.е. по возможности осуществлять предварительное накопление буферов данных. Эти выводы тем более справедливы, что межпроцессорные передачи информации не только замедляют вычислительный процесс, но и являются наиболее энергозатратными операциями, и это становится существенным фактором в расходах на эксплуатацию суперкомпьютера (см. [93]).

Стратегия распараллеливания больших сеточных СЛАУ, возникающих из аппроксимации многомерных краевых задач, базируется на средствах гибридного программирования и аддитивных методах декомпозиции областей с двухуровневыми итерациями в подпространствах Крылова. Итерации верхнего уровня (по подобластям) осуществляются с помощью системы передачи сообщений MPI между процессами, каждый из которых выполняет (одновременно) решение алгебраической подсистемы в соответствующей подобласти. На каждой такой итерации происходят обмены значениями приближенных решений на интерфейсных граничных поверхностях контактирующих подобластей. Естественно, все матричные и векторные данные для подсистем предварительно формируются в распределенном по процессам виде. Решение СЛАУ в каждой из подобластей распараллеливается с помощью многопотоковых вычислений (системы типа OpenMP) на многоядерных процессорах с общей памятью. Дополнительное ускорение здесь может быть достигнуто путем векторизации операций (системы команд типа AVX, основанная на технологиях SIMD – Single Instruction Multi Data) (см. обзоры в [18]). К сожалению, здесь можно констатировать пока отсутствие штатных систем программирования с автоматическим распараллеливанием алгоритмов, так что успехи в масштабируемости ускорения расчетов в значительной степени зависят от квалифицированности и искусства математика-вычислителя.

Отметим, что традиционные блочные методы Якоби–Шварца, лежащие в основе параллельных алгоритмов декомпозиции областей, базируются на спектральной оптимизации итерационных процессов. В определенном смысле альтернативой им могут стать проекционные блочные методы Чиммино (см. [9], [94]), пока что недостаточно исследованные и мало используемые на практике.

С точки зрения распараллеливания перспективными являются неявные методы переменных направлений, или продольно-поперечных прогонок (см. [90] и обзор в [10]), активно развивавшиеся в 1960–1970-е годы и имеющиеся рекордную скорость сходимости итераций для модельных сеточных краевых задач. В последние десятилетия это направление обрело второе дыхание в связи с развитием рациональных аппроксимаций в подпространствах Крылова (см. [95]), в том числе при решении актуальных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра. Отметим, что в [93] предложен метод к повышению степени распараллеливания на основе разложения рациональных функций в простые дроби.

Существенное ускорение вычислений может быть получено за счет использования переменной точности машинной арифметики. Традиционным при решении больших СЛАУ является применение стандартной двойной точности с длиной представления вещественного числа с плавающей запятой в 64 бита, однако для экстремально плохо обусловленных матриц необходим переход к четверной точности (128 бит). Наоборот, на отдельных стадиях алгоритма допустимо применение простой и даже половинной точности (32 и 16 бит соответственно), выполняемых гораздо быстрее. Такой подход естественен на первых шагах итерационного процесса, когда ошибка приближенного решения еще относительно велика. Другая возможность использования пониженной точности существует в DDM при решении вспомогательных СЛАУ в подобластях. Необходимо иметь в виду, что такие приемы требуют тщательного анализа реализуемых численных погрешностей метода для обеспечения устойчивых расчетов в целом.

Дальнейшим резервом повышения производительности является оптимизация кода, которая может быть достигнута с помощью использования качественного вычислительного инструментария (например, SPARSE BLAS), применения различных опций компилятора и специальных свойств используемой суперкомпьютерной платформы. Отметим также, что за последние десятилетия в мире накоплено большое количество качественных программных библиотек по задачам вычислительной алгебры (PETSc, HYPRE, MKL INTEL и др., см. обзор в [22], [23]). Еще можно назвать серьезные разработки во ВНИЭФ РФЯЦ (г. Саров, см. [96]), в проектах по интегрированным вычислительным окружениям DUNE (см. [97]), INMOST (см. [98]) и BSM (см. [1], [24]).

Создание, сопровождение и развитие математического и программного обеспечения по эффективному решению СЛАУ – это непрерывный наукоемкий технологический процесс, включающий регулярные экспериментальные исследования, требующие своих интеллектуальных средств поддержки: системы автоматизации верификации и тестирования алгоритмов и их компьютерных реализаций, каталогизированные коллекции методических и практических задач, примером которых являются популярные Sparse Matrix Collections от различных разработчиков, а также многообразные демонстрационные и обучающие версии программно-информационных продуктов (помимо традиционных монографий, учебников и пользовательской документации с рекомендациями по применению тех или иных алгоритмов к решению конкретных задач).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Проблема высокопроизводительного решения СЛАУ с системной точки зрения – это широко востребованная сфера интеллектуальной деятельности, которая далеко не ограничивается написанием и обоснованием формул алгоритма, а включает и постановки новых практических задач или теоретических идей, и технологические аспекты программных реализаций, и вопросы их эффективного применения в суперкомпьютерном эксперименте.

Новые практические вызовы математического моделирования кардинально поднимут востребованность решения междисциплинарных и обратных задач с высоким разрешением на реальных данных, что только актуализирует высокопроизводительные решения СЛАУ с числом степеней свободы в десятки и сотни миллиардов и с экстремально плохой обусловленностью. Последние десятилетия методы вычислительной алгебры бурно развиваются как в теоретическом плане, так и в экспериментальном, и здесь сложились перспективные направления: малоранговые приближения матриц, в том числе рациональные аппроксимации, тензорные методологии, теоретико-графовые и комбинаторные подходы, методы агрегации и сегрегации, а также появляются новые оригинальные идеи в традиционных матричных факторизациях, алгебраических декомпозициях, многосеточных технологиях и т.д.

Другой важный фактор – это происходящее накопление огромного количества разнотипных задач (междисциплинарных, методических и практических, типовых и уникальных), а также методов и технологий их решения на разных классах компьютеров. При этом происходит переход количества обрабатываемых данных в качество, требующий концепции разработки математического и программного обеспечения нового поколения. Одна из главных его задач – создание активной базы математических знаний, призванной обеспечить автоматизацию или оптимизацию построения алгоритмов и их отображения на архитектуру суперкомпьютера, прототипом которой в определенной степени можно считать проект ALGOWIKI, разрабатываемый по технологиям Википедии под руководством Дж. Донгарры и Вл.В. Воеводина. Такая проблема относится к прерогативе искусственного интеллекта с машинным обучением, который вместе с технологиями работы с большими данными составляет фундамент современного моделирования. Достигнутые масштабы триады “задачи–методы–компьютеры” приводят к тому, что интегрированное вычислительное окружение для решения СЛАУ должно стать формой и содержанием иерархической инфраструктуры, составляющей инструментальную среду индустриального типа и реализующей дальнейшие этапы развития наукоемких вычислительно-информационных технологий, контуры которых очерчены в [1], [24], [93]. Чтобы углубленная специализация не привела к разобщению теоретиков-вычислителей, программистов-технологов и прикладных пользователей, их общие усилия должны быть направлены на создание интеллектуализированной экосистемы, поддерживающей межпрофесситехнологоональные и человеко-машинные интерфейсы как для интенсификации фундаментальных исследований, так и для быстроты реализации их инноваций.

Автор выражает искреннюю благодарность двум анонимным рецензентам, замечания которых значительно способствовали улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Il'in V.P.* Mathematical modeling. Part I. Continuous and discrete models. Novosibirsk, SBRAS Publ., 2017.
2. *Axelsson O.* Iterative solution methods. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
3. *Elman H.C., Silvester D.J., Wathen A.J.* Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics. Numerical mathematics and scientific computation. Oxford Univ. Press, 2nd ed., 2014.
4. *Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A.* Iterative methods and quadratic functionals (in Russian). CC SBRAS Publ., Novosibirsk, 1972.
5. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems, 2nd ed. SIAM, 2003.
6. *Van der Vorst H.A.* Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge Univ. Press, 2003.
7. *Olshanskii M.A., Tyrtyshnikov E.E.* Iterative methods for linear systems theory and applications. SIAM Philadelphia, 2014.
8. *Liesen J., Strakos Z.* Krylov subspace methods, principles and analysis. Oxford Univ. Press, 2013.
9. *Il'in V.P.* Finite element methods and technologies (in Russian). ICM&MG SBRAS, Publ., Novosibirsk, 2007.
10. *Il'in V.P.* Iterative incomplete factorization methods. Singapore, World Sci. Publ., 1992.
11. *Fang H., Saad Y.* Two classes of multisecant methods for nonlinear acceleration // Numer. Linear. Alg. Appl. 2009. V. 16. № 3. P. 197–221.
12. *Pratara P.P., Suryanarayana J.E.* Anderson acceleration of the Jacobi iterative method. An efficient alternative to Krylov methods for large, sparse linear systems // J. Comput. Phys. 2016. V. 306. P. 43–54.
13. *Walkert H.F., Ni P.* Anderson acceleration for fixed-point iterations // SIAM J. Assoc. Conput. Math. 2011. V. 49. P. 1715–1735.

14. *Il'in V.P.* Iterative processes in the Krylov—Sonneveld subspaces // J. Math. Sci. 2017. V. 24. № 6. P. 890—899.
15. *Butyugin D.S., Gurieva Y.L., Il'in V.P., Perevozkin D.V.* Some geometric and algebraic aspects of domain decomposition methods // LNCSE. 2016. V. 104. P. 117—126.
16. Domain Decomposition Methods. URL: http://ddm.org
17. *Il'in V.P.* Multi-preconditioned domain decomposition methods in the Krylov subspaces // LNCS, 10187, Springer, 2017. P. 95—106.
18. *Il'in V.P.* Problems of parallel solution of large systems of linear algebraic equations // J. Math. Sci. 2016. V. 216. № 6. P. 795—804.
19. *Toselli A., Widlund O.* Domain decomposition methods: algorithms and theory. Berlin: Springer, 2005.
20. *Vabishchevic P.N.* Incomplete iterative implicit schemes // Comput. Meth. Appl. Math. 2019.
21. *Il'in V.P.* High-performance computation of initial boundary value problems. Springer Nature Switzerland AG, L. Sokolinsky and M. Zymbler (Eds.): PCT 2018, CCIS 910, 2018, P. 186—199.
22. *Dongarra J.* List of freely available software for linear algebra on the web (2006). http://netlib.org/utk/people/JackDongarra/la-sw.html
23. *Barret R., Bery M., Chan T.F. Demmel J., Donato J. Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., van der Vorst H.A.* Templates for the solution of linear systems. Building blocks for iterative methods. SIAM Philadelphia, PA, 1994.
24. *Il'in V.P.* On an integrated computational environment for numerical algebra. Springer Nature Switzerland AG 2019 L. Sokolinsky and M. Zymbler (Eds.): PCT 2019, CCIS 1063, 2019, P. 91—106.
25. *Arioli M.* Generalized Golub—Kahan diagonalization and stopping criteria // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34. № 2. P. 57—592.
26. *Higham N.J.* Accuracy and stability of numerical algorithms. SIAM, Philadelphia, 2002.
27. *Il'in V.P.* Finite difference and finite volume methods for elliptic equations (in Russian). Novosibirsk ICM&MG SBRAN Publ., 2001.
28. *Soodhalter K.M., Sturler E., Kilmer M.* A survey of subspace recycling iterative methods. https://arxiv.org/abs/2001.10347
29. *Choi S.-C.T., Paige C.C., Saunders M.A.* INRES-QLP: A Krylov subspace method for indefinite or singular symmetric systems. SIAM, 2015, arXiv:1003.4042 [math.NA] 2
30. *Kaporin I.E.* New convergence results and preconditioning strategies for the conjugate gradient method // J. Numer. Linear. Algebra Applic. 1994. V. 1. № 2. P. 179—210.
31. *Kaporin I.E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its UTU+UTR+RTU-?Decomposition // J. Numer. Linear. Algebra Applic. 1998. V. 5. № 6. P. 483—509.
32. *Kaporin I.E., Konshin I.N.* A parallel block overlap preconditioning with inexact submatrix inversion for linear elasticity problems // J. Numer. Linear. Algebra Applic. 2002. V. 9. P. 141—162.
33. *Il'in V.P.* Methods of semiconjugate directions // Russian J. Numer. Anal. Math. Model. 2008. V. 23. № 4. P. 369—387.
34. *Il'in V.P.* Two-level least squares methods in Krylov subspaces // J. Math. Sci. 2019. V. 232. № 6. P. 892—901.
35. *Knizhnerman L.A.* Error bounds for the arnoldi method: a set of extreme eigenpairs // J. Numer. Linear. Algebra Applic. 1999. V. 296. P. 191—211.
36. *Il'in V.P.* Biconjugate direction methods in Krylov subspaces // J. Appl. Indust. Math. 2010. V. 4. № 1. P. 65—178.
37. *Neuenhofen M.P., Greif C.* MSTAB: stabilized inducted dimension reduction for KRYLOV subspace recycling // SIAM J. Sci. Comput. 2018. V. 40. № 2. P. 554—571.
38. *Saunders M.A., Simon H.D., Yip. E.L.* Two conjugate-gradient-type methods for unsymmetric linear equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. V. 25. № 4. P. 927—940.
39. *Estrin R., Greif C.* SPMR: a family of saddle-point minimum residual solvers // SIAM J. Sci. Cjmput. 2018. V. 40. № 3. P. 1884—1914.
40. *Notay Y.* Flexible conjugate gradients // SIAM J. Sci. Comput. 2000. V. 22. № 4. P. 1444—1460.
41. *Bradley A.M.* Algorithms of the equilibration of matrices and their application to limited-memory quasi-newton methods // PhD thesis, ICME, Stanford Univer., 2010.
42. *Livne O.E., Golub G.H.* Scaling by binormalization // J. Numer. Algorithms. 2004. V. 35. P. 97—120.
43. *Il'in V.P., Kellog R.* Analysis of flow directed iterations // J. Comp. Math. 1992. V. 10. № 1. P. 1—18.
44. *Arnold D.N., Faik R.S., Winther R.* Preconditioning in H(div) and applications // J. Math. Comput. 1997. V. 66. P. 937—984.
45. *Benzi M.* Preconditioning techniques for large linear systems: a survey // J. Comput. Phys. 2002. V. 82. № 2. P. 418—477.
46. *Higham N.J., Mary T.* A new preconditioner that exploits low-rank approximations for factorization error // SIAM J. Sci. Comput. 2019. V. 41. № 1. P. 59—82.

47. *Hiptmair R.* Operator preconditioning // J. Comput. Math. Appl. 2006. V. 52. № 5. P. 699–706.
48. *Mardal K., Winther R.* Preconditioning discretizations of systems of partial differential equations // J. Numer. Linear. Algebra Appl. 2011. V. 18. P. 1–40.
49. *Vassilevski P.S.* Multi-level block factorization preconditioners. New York: Springer, 2008.
50. *Wathen A.* Preconditioning // Acta Numer. 2015. № 24. P. 329–376.
51. *Bridson R., Greif C.* A multipreconditioned conjugate gradient algorithm // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. V. 27. № 4. P. 1056–1068.
52. *Dolean V., Jolivet P., Nataf F.* An introduction to domain decomposition methods: algorithms, theory and parallel implementation. SIAM, Philadelphia, 2015.
53. *Gurieva Y.L., Il'in V.P.* On coarse grid correction methods in the Krylov subspaces // J. Math. Sci. 2018. V. 232. № 6. P. 774–182.
54. *Laevsky Y.M., Matsokin A.M.* Decomposition methods for solving elliptic and parabolic boundary value problems (in Russian). 1999. V. 2. P. 361–372.
55. *Vassilevski Y.* A hybrid domain decomposition method based on aggregation // Numer. Linear. Alg. Appl. 2004. V. 11. P. 327–341.
56. *Vassilevski Y.V., Olshanskii M.A.* Short course on multi-grid and domain decomposition methods. Moscow, MAKS Press Publ., 2007.
57. *Xiang H., Nataf F.* Two-level algebraic domain decomposition preconditioners using Jacobi-Schwarz smoother and adaptive coarse grid corrections // J. Comput. Appl. Math. 2014. V. 261. P. 1–13.
58. *Gaul A., Gutknecht M.H., Hesenta J., Nabben R.* A framework for deflated and augmented Krylov subspace methods // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34. № 2. P. 495–518.
59. *Nabben R., Vuik C.* A comparison of deflation and coarse grid correction applied to porous media flow // SIAM J. Numer. Anal. 2004. V. 42. P. 631–647.
60. *Bank R., Falgout R., Jones T., Manteuffel T., McCormick S., Ruge J.* Algebraic multigrid domain and range decomposition (AMG-DD/AMG-RD) // SIAM J. Sci. Comput. 2015. V. 37. P. 113–136.
61. *Brandt A.* Algebraic multigrid theory: the symmetric case // J. Appl. Math. Comput. 1986. № 19. P. 23–56.
62. *Shaidurov V.V.* Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method // J. Comput. Math. Applic. 1996. V. 31. № 4/5. P. 161–171.
63. *Gurieva Y.L., Il'in V.P., Petukhov A.V.* On multigrid methods for solving two-dimensional boundary-value problems // J. of Math. Sci. 2020. V. 249. № 2. P. 118–127.
64. *Notay Y.* Algebraic multigrid for Stokes equations // SIAM J. Sci. Comput. 2017. V. 39. P. 88–111.
65. *Notay Y., Napov A.A.* An efficient multigrid method for graph Laplacian systems II: robust aggregation // SIAM J. Sci. Comput. 2017. V. 39. № 5. P. 379–403.
66. *Olshanskii M.A.* Lecture notes on multigrid methods. Moscow: INM RAS PUB, 2012.
67. *Tang J.M., Nabben R., Vuik C., Erlangga Y.A.* Comparison of two-level preconditioners derived from deflation, domain decomposition and multigrid methods // J. Sci. Comput. 2009. № 39. P. 340–370.
68. *Varga R.S.* Iterative analysis, Springer, 1962.
69. *Kolotilina L.Yu.* The convergence of certain incomplete block factorization splittings // J. Math. Sci. (New York). 1997. V. 86. № 4. P. 2828–2834.
70. *Yeremin A.Yu., Kolotilina L.Yu., Nikishin A.A.* Factorized sparse approximate inverse preconditioning III. Iterative construction of preconditioners // J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 101. № 4. P. 3237–3254.
71. *Kumar P., Grigori L., Nataf F., Nui Q.* On relaxed nested factorization and combination preconditioning // Inter. J. Comput. Math. 2016. V. 93. № 1. P. 178–199.
72. *Vassilevski P.S.* Preconditioning mixed finite element saddle-point elliptic probems // J. Numer. Linear Algebra Applic. 1996. V. 3. Iss. 1. P. 1–20.
73. *Hackbusch W.* Hierarchische matrizen: algorithmen and analysis. Berlin: Springer, 2009.
74. *Solovyev S.A.* Multifrontal hierarchically solver for 3D discretized elliptic equations, In: Dimov I., Faragi I., Vulkov L. (eds.) FDM 2014. LNCS, Springer, Cham, 2015, V. 9045, P. 371–378.
75. *Arioli M., Manzini M.* A network programming approach in solving Darcy‘s equations by mixed finite elements methods // Electron. Transact. on Numer. Analys. 2006. V. 22. P. 41–70.
76. *Bern M., Gilbert J., Hendrickson B., Nguyen N., Toledo S.* Support-graph preconditioners // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. V. 27. № 4. P. 930–951.
77. *Ponce C., Vassilevski P.S.* Solving graph Laplacian systems through recursive partitioning and two-grid preconditioning // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2017. V. 38. № 2. P. 621–648.
78. *Il'in V.P., Laevsky K.Yu.* Generalized compensation principle in incomplete factorization methods // Russian J. Numer. Anal. and Mathem. Model. 1997. V. 12. № 5. P. 399–412.
79. *Heath M., Romine C.* Parallel solution of triangular systems on distributed-memory multiprocessors // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1988. V. 9. № 3. P. 558–588.

80. *Hutter E., Solomonik E.* Communication-avoiding Cholesky QR-2 for rectangular matrices. arXiv: 1710.08471v6
81. *Ruhe A.* Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation // J. Linear Algebra Appl. 1984. V. 58. P. 39–405.
82. *Kuznetsova N.N., Diyankov O.V., Kotegov S.V., Krasnogorov I.V., Pravilnikov V.Y., Maliassov S.Y.* The family of nested factorizations // Russian J. Numer. Anal. Math. Model. 2007. V. 22. P. 393–412.
83. *Wang R., Nu Q, Lu L.* A twisted block tangential filtering decomposition preconditioner. Nath. Prob. In Engineer., 2009, Article ID 282307.
84. *Benzi M., Golub G.H., Liesen J.* Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica. 2005. V. 14. P. 1–137.
85. *Brezzi F.* Stability of saddle points in finite dimensions, frontiers in numerical analysis. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013, P. 17–61.
86. *Notay Y., Napov A.* Further comparison of additive and multiplicative coarse grid correction // J. Appl. Numer. Math. 2013. V. 65. P. 53–62.
87. *Bychenkov Y.V., Chizhonkov E.V.* Iterative methods for solving saddle point problems (in Russian). Moscow: Binom Publ., 2010.
88. *Greif C., Schotzau D.* Preconditioners for saddle point linear systems with highly singular (1.1) Blocks, in: Special Volume on Saddle Point Problems // Electron. Trans. J. Nшnег. Anal. 2006. V. 22. P. 114–121.
89. *Greif C., Shotzau D.* Preconditioners for the discretized harmonic Maxwell equations in mixed form // Numer. Linear Algebra Applic. 2007. V. 14. P. 281–287.
90. *Notay Y.* Convergence of some iterative methods for symmetric saddle point linear systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2019. V. 40. № 1. P. 122–146.
91. *Il'in V.P., Kazantsev G.Y.* Iterative solution of saddle-point systems of linear equations // J. Math. Sci. 2020. V. 249. № 2. P. 199–2008.
92. *Notay Y.* Algebraic two-level convergence theory for singular systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2016. V. 37. P. 1419–1439.
93. *Dongarra J., Grigori L., Higham N.J.* Numerical algorithms for high performance computational science // Phil. Trans. R. Soc. 2020, A 378.
94. *Il'in V.P.* Projection methods in Krylov subspaces // J. Math. Sci. 2019. V. 240. № 6. P. 772–782.
95. *Gorbenko N.I., Il'in V.P.* The additive Peaceman–Rachford method // J. Math. Sci. 2016. V. 216. № 6. P. 753–760.
96. *Aleinikov A.Y., Barabanov R.A., Bartenev Y.G., et al.* An application of parallel solvers for SLAEs in the applied packages for engineering (in Russian), in: Proceed. Inter. Conf. "Supercomputing and Mathematical Modelling", Unicef. Publ., 2015, P. 102–110.
97. *Bastian P., Blatt M.* Iterative solver template library (DUNE). https://www.dune-project.org/
98. *Vassilevski Y.V., Konshin I.N., Kopytov G.V., Terekhov K.M.* INMOST-program platform and graphic media for development of the parallel numerical methods on general type grids (in Russian). Moscow, MSU Publ., 2018.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1814–1824

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.853.6

МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА С ШАГОМ АРМИХО НА МНОГООБРАЗИЯХ

© 2021 г. М. В. Балашов[1,*], Р. А. Камалов[1,]**

[1] 117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Россия

*e-mail: balashov73@mail.ru

**e-mail: kamalov.ra@phystech.edu

Поступила в редакцию 23.10.2020 г.
Переработанный вариант 23.10.2020 г.
Принята к публикации 09.07.2021 г.

Рассматривается задача минимизации функции с непрерывным по Липшицу градиентом на проксимально гладком подмножестве, которое является гладким многообразием без края. Обсуждается метод проекции градиента с шагом Армихо и доказывается его линейная сходимость. Для различных матричных множеств и многообразий получена точная константа проксимальной гладкости. Библ. 21.

Ключевые слова: проксимальная гладкость, метод проекции градиента, невыпуклая экстремальная задача, шаг Армихо, матричные многообразия.

DOI: 10.31857/S004446692111003X

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. Введение

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ задачу

$$\min_{x\in S} f(x). \tag{1}$$

Для решения задачи (1) в выпуклом случае давно используется метод проекции градиента (далее МПГ), который появился в [1], [2]. Напомним, что если функция в (1) сильно выпуклая с непрерывным по Липшицу градиентом и множество S выпукло и замкнуто, то МПГ сходится со скоростью геометрической прогрессии (или линейной скоростью).

Мы предполагаем, что S – гладкое многообразие без края, а f – функция с непрерывным по Липшицу градиентом, которая необязательно выпуклая. Пусть T_x – касательное подпространство к S в точке $x \in S$ и $T_x^{\perp}$ – его ортогональное дополнение. Мы рассматриваем МПГ вида $x_0 \in S$, $k = 0$,

$$t_k > 0, \quad z_k = P_{T_{x_k}}(x_k - t_k f'(x_k)), \quad x_{k+1} = R_S z_k, \quad k = k+1. \tag{2}$$

Здесь P_A – оператор метрического проектирования на замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$, а $R_S z_k$ – некоторая ретракция (см. подробности в [3]) точки z_k на множество S, $R_S z_k \in S$. Часто используется $R_S = P_S$. Другой вид ретракции мы обсудим ниже.

Примером актуальной задачи (1) является задача минимизации гладкой функции f на некотором матричном многообразии S без края (см. [4], [5]).

Традиционно в задаче (1) используются варианты метода проекции градиента с шагами, связанными с локальными геодезическими на многообразии (см. [5]–[9]), а также метод Ньютона (см. [4], [7]).

В последнее время появилось много работ, где используется идеология (2). Основными трудностями являются выбор шага t_k и доказательство сходимости алгоритма при разумных предположениях.

В [10] рассмотрен МПГ в задаче (1) с шагом t_k Армихо (см. определение A1). Однако по сути доказана лишь асимптотика последовательности $\{x_k\}$, но не явные оценки сходимости (см. [10, Theorem 2.3]). Аналогичный результат при некотором фиксированном $t_k = t > 0$ для всех k получен и в [11, Corollary 4.2] при условии, что кривизны многообразия S ограничены. В обоих работах для линейной сходимости принципиально условие Лежанского–Поляка–Лоясевича (условие ЛПЛ) функции f на поверхности S (см. ниже определение 1). Близкий к алгоритму из [10] алгоритм с шагом Армихо рассмотрен в [12, Algorithm 2.1]. Однако в [12] исследовался только факт сходимости алгоритма без оценки скорости сходимости. Кроме того, множество S предполагалось выпуклым, а функция f невыпуклой.

Обозначим через $B_R(x)$ замкнутый шар с центром x радиуса R. В [13, Theorems 2, 3] получен следующий результат.

Теорема A. *Пусть многообразие S гладкое и проксимально гладкое с константой $\frac{\pi}{2}R$ многообразие без края, $x_0 \in S$. Предположим, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция обладает следующими свойствами*:

1) *f липшицево дифференцируема с константой L_1*,

2) $L = \sup\limits_{x : \varrho(x,S)<R} \|f'(x)\| < +\infty$, *где* $\varrho(x,S) = \inf_{s\in S}\|x - s\|$,

3) *выполнено условие ЛПЛ для функции f на $S \cap \mathcal{L}_f(f(x_0))$, $\mathcal{L}_f(f(x_0)) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \le f(x_0)\}$, с константой $\mu > 0$, т.е. для всех $x \in S \cap \mathcal{L}_f(f(x_0))$*

$$\mu(f(x) - \inf_{x\in S} f) \le \|P_{T_x} f'(x)\|^2. \tag{3}$$

Пусть $t_0 = \dfrac{1}{\frac{2L}{R} + L_1}$ *и* $t \in (0, t_0]$. *Положим* $q(t) = t - t^2\frac{L}{R} - t^2\frac{L_1}{2}$. *Тогда итерации* $x_0 \in S$,

$$1)\quad z_k = x_k - tP_{T_{x_k}} f'(x_k), \qquad x_{k+1} = S \cap (z_k + T_{x_k}^{\perp}) \cap B_R(x_k),$$

или

$$2)\quad z_k = x_k - tP_{T_{x_k}} f'(x_k), \qquad x_{k+1} = P_S z_k,$$

сходятся с линейной скоростью по функции

$$f(x_{k+1}) - f_* \le (1 - \mu q(t))(f(x_0) - f_*), \qquad f_* = \inf_{x\in S} f(x).$$

При этом

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\|P_{T_{x_k}} f'(x_k)\|^2 q(t). \tag{4}$$

Кроме того, для случая 1) *имеет место следующая линейная скорость сходимости по точке*

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \le \frac{t^2 + t^4\frac{L^2}{R^2}}{q(t)}(1 - \mu q(t))^k (f(x_0) - f_*), \qquad f_* = \inf_{x\in S} f(x). \tag{5}$$

Отметим, что $1 - \mu q(t) \in (0, 1)$.

В случае итераций 1) пересечение $S \cap (z_k + T_{x_k}^{\perp}) \cap B_R(x_k)$ одноточечно для всякого k (см. [13, Lemma 5]).

Покажем, что условие (5) действительно означает линейную сходимость к решению (1). Положим

$$\theta = \sqrt{1 - \mu q(t)} \in (0, 1),\ C = \frac{t^2 + t^4\frac{L^2}{R^2}}{q(t)}(f(x_0) - f_*)$$

Для $M \geq N$

$$\|x_M - x_N\| \leq \sum_{k=N}^{M-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{C\theta^N}{1-\theta} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Значит, $x_N \to x_* \in S$. Очевидно, что $\|x_N - x_*\| \leq \frac{C\theta^N}{1-\theta}$, т.е. сходимость $\{x_k\}$ линейная. В силу [13, Theorem 2] $f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq q(t)\|P_{T_{x_k}} f'(x_k)\|^2$ для всех k и в силу условия ЛПЛ

$$f(x_k) - f_* \leq \|P_{T_{x_k}} f'(x_k)\|^2 \big/ \mu \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{q(t)\mu}.$$

Отсюда $f(x_*) = f_*$.

Условие ЛПЛ с показателем 2 является одним из наиболее общих условий на гладкую функцию на многообразии, которое обеспечивает линейную сходимость градиентных методов (см. [10]). В частности, сильно выпуклая функция на многообразии при определенном соотношении константы сильной выпуклости и других параметров удовлетворяет условию ЛПЛ, а также некоторые функции с условием квадратичного роста на множестве (см. [13, Theorem 1]). Также условию ЛПЛ удовлетворяет квадратичная форма на сфере или, более общо, квадратичная форма на многообразии Штифеля (см. [14]).

Теорема A решает вопрос об оценке скорости сходимости алгоритма и выборе шага $t_k = t$ через константы Липшица L, L_1 и константу проксимальной гладкости R многообразия. Константа μ из условия ЛПЛ возникает в оценке (5), она не нужна для выбора шага t. Ключевое отличие в доказательстве теоремы A от приведенных выше результатов состоит в использовании проксимальной гладкости множества S, что позволяет получить оценку сходимости (5) в явном виде.

Тем не менее на практике константы L, L_1 и R могут быть неизвестны. В этой ситуации становится актуальным выбор шага t_k в (2) по некоторому правилу, которое не требует знания упомянутых констант. Правило Армихо как раз и является одним из таких способов выбора шага t_k.

В работе рассмотрены два способа выбора шага t_k по правилу Армихо. Это правило A1, заимствованное в [10], а также правило A2, сформулированное нами.

В обоих случаях мы получаем явную оценку скорости сходимости метода (2) для правил выбора шага A1 и A2.

При правиле A1 нам не нужно знать никаких констант.

В случае, когда константа проксимальной гладкости известна и известна оценка сверху для константы L, можно применять правило A2. Правило A2 имеет техническое преимущество: в отличие от правила A1 при подсчете шага t_k ретракцию точки на множество нужно вычислять 1 раз.

В Приложении мы приводим точные константы проксимальной гладкости R для основных матричных многообразий.

1.2. Основные обозначения

Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать вещественное евклидово пространство n измерений со скалярным произведением (x, y) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $B_R(x)$ замкнутый шар с центром x радиуса R. Далее по тексту для задачи (1) T_x – касательное подпространство к многообразию S в точке $x \in S$, $f'(x)$ – градиент Фреше функции f в точке x. Для точки $x_k \in S$ для краткости обозначим $\xi_k = P_{T_{x_k}} f'(x_k)$. Отметим, что $(f'(x_k), \xi_k) = \|\xi_k\|^2$.

Если f' – липшицева функция с константой L_1, то для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ верны оценки (см. [15, Лемма 1.2.3])

$$f(x) + (f'(x), y - x) - \frac{L_1}{2}\|y - x\|^2 \leq f(y) \leq f(x) + (f'(x), y - x) + \frac{L_1}{2}\|y - x\|^2.$$

Лебеговым множеством функции f для $\beta \in \mathbb{R}$ называют множество $\mathcal{L}_f(\beta) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq \beta\}$.

Определение 1 (см. [10], [16, Definition 1]). Пусть S является C^1 многообразием, функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Пусть $\mu > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $f_* = \inf_{x \in S} f(x)$. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию ЛПЛ на множестве $S \cap \mathcal{L}_f(\beta)$, если $\|P_{T_x} f'(x)\|^2 \geq \mu(f(x) - f_*)$ $\forall x \in S \cap \mathcal{L}_f(\beta)$.

Определим $O(n)$ – ортогональные матрицы размера $n \times n$. Для матриц $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ и $Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ определим скалярное произведение $(X, Y) = \operatorname{tr} X^{\mathrm{T}Y}$ и норму Фробениуса $\|X\| = \sqrt{\operatorname{tr} X^{\mathrm{T}} X}$. Напомним (см. [17, Theorem 7.3.2]), что для каждой матрицы $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ранга r существует сингулярное разложение вида $X = U \Sigma V^{\mathrm{T}}$, где

$$U \in O(n), V \in O(k), \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Числа $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ называются сингулярными числами матрицы X. Для случая $k \leq n$ договоримся обозначать оставшиеся $k - r$ нулей на главной диагонали матрицы Σ через $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_k$.

Мы будем пользоваться следующей формулой (см. [17, Corollary 7.3.5]) для $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$:

$$\sum_{i=1}^{k} (\sigma_i(X) - \sigma_i(Y))^2 \leq \|X - Y\|^2. \tag{6}$$

Через I_k обозначим единичную матрицу размера $k \times k$.

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется проксимально гладким (прокс-регулярным, слабо выпуклым) с константой $R > 0$ (см. [18], [19]), если функция расстояния $\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_A(R) = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 < \varrho(x, A) < R\}$. Эквивалентным условием проксимальной гладкости множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является условие, что для всякой точки $x \in U_A(R)$ метрическая проекция $P_A(x)$ является одноточечным множеством.

Напомним определения основных матричных многообразий и множеств (далее $k \leq n$):

(i) многообразие Штифеля $\mathcal{S}_{n,k} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} | X^{\mathrm{T}} X = I_k\}$;

(ii) многообразие Грассмана $\mathcal{G}_{n,k}$ – множество всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Мы рассматриваем реализацию $\mathcal{G}_{n,k}$ вида $\mathcal{G}_{n,k} = \{XX^{\mathrm{T}} | X \in \mathcal{S}_{n,k}\}$ (см. [20]), т.е. подмножество во множестве симметричных матриц $n \times n$;

(iii) многообразие $\mathfrak{M}_r = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} | \operatorname{rank} X = r, \sigma_i(X) \geq \sigma_0 > 0 \ \ \forall i = \overline{1, r}\}$ – матрицы ранга r с сингулярными числами $\geq \sigma_0 > 0$;

(iv) множество $\mathfrak{L}_r = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} | 0 < \operatorname{rank} X \leq r, \sigma_i(X) \geq \sigma_0 > 0 \ \ \forall i = \overline{1, \operatorname{rank}(X)}\}$ – матрицы ранга $> 0, \leq r$ с сингулярными числами $\geq \sigma_0 > 0$.

В [21] было показано, что $\mathcal{S}_{n,k}$ – проксимально гладкое множество с $R = 1$, а $\mathcal{G}_{n,k}$ (в указанной реализации) – проксимально гладкое множество с $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Там же приводятся формулы для метрической проекции матрицы на многообразие Штифеля или Грассмана. Точные значения констант проксимальной гладкости для множеств $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{L}_r$ и метрические проекции на них найдены нами в Приложении.

2. РЕТРАКЦИИ И ПРАВИЛО АРМИХО

Мы будем рассматривать две возможности для ретракции.

Во-первых, в качестве ретракции выступает оператор метрического проектирования P_S. В Приложении мы покажем, что, например, на большинство матричных многообразий метрическая проекция может быть найдена с помощью сингулярного разложения матрицы.

Во-вторых, мы рассмотрим упомянутый в теореме A выбор $x_{k+1} = (z_k + T_{x_k}^{\perp}) \cap S \cap B_R(x_k)$. В [13, Theorem 2] доказано, что при условии $t_k \|\xi_k\| \le \frac{\sqrt{3}}{2} R$ точка x_{k+1} определена корректно и однозначно. Далее будем обозначать указанную ретракцию через R_S.

Пусть $d > 0$; $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Мы рассмотрим два способа выбора шага в алгоритме (2) по правилу Армихо.

Определение A1 (см. [10]). Определим t_k на k-м шаге по правилу

$$z_k = x_k - t_k \xi_k, \quad x_{k+1} \in P_S z_k, \quad \text{где}$$

$$t_k = \max_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{ d\beta^m \mid f(x_{k+1}) \le f(x_k) - \alpha d \beta^m \|\xi_k\|^2 \}.$$

Отметим, что несмотря на проксимальную гладкость S, мы не можем гарантировать попадание точки z_k в проксимальный слой множества S, поэтому множество $P_S z_k$ может быть неодноточечно и x_{k+1} выбирается из него произвольно.

Определение A2. Пусть $\alpha_1 \in (0, 1)$, $\alpha_1 < \alpha$, множество S проксимально гладкое с константой $\frac{\pi}{2} R$ и функция f липшицева с константой $\le L$. Определим t_k на k-м шаге по правилу

$$d < \alpha_1 \frac{\sqrt{3} R}{2L}, \quad z_k = x_k - t_k \xi_k, \quad \text{где}$$

$$t_k = \max_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{ d\beta^m \mid f(z_k) \le f(x_k) - \alpha d \beta^m \|\xi_k\|^2 \}.$$

При этом $x_{k+1} = P_S z_k$ или $x_{k+1} = R_S z_k$.

Покажем, что обе ретракции в случае определения $A2$ корректно определены. Действительно, когда шаг t_k найден, вычисляется $x_{k+1} = P_S z_k$. В силу $t_k \le d < \alpha_1 \frac{\sqrt{3} R}{2L}$ точка $z_k = x_k - t_k \xi_k$ находится в проксимальном слое: $\varrho(z_k, S) \le \|z_k - x_k\| = t_k \|\xi_k\| < \alpha_1 \frac{R}{L} L = \alpha_1 R < R$. Поэтому $P_S z_k$ — одноточечное множество.

В случае $x_{k+1} = R_S z_k$ имеем $t_k \|\xi_k\| \le t_k L \le \frac{\sqrt{3}}{2} R$, что, как отмечалось выше, гарантирует существование и единственность $R_S z_k$.

Обсудим очевидные свойства правил A1 и A2. Правило A1 не требует знания констант Липшица L_1 для f', L для f и константы проксимальной гладкости S для выбора t_k, в отличие от теоремы A. В силу теоремы A (см. (4)) при $t_k < t_0$ имеем

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\|\xi_k\|^2 \left[t_k - \left(\frac{L}{R} + \frac{L_1}{2} \right) t_k^2 \right],$$

правая часть последнего неравенства очевидно меньше $-\alpha t_k \|\xi_k\|^2$ при достаточно малых t_k. Следовательно, максимум в определении t_k по правилу Армихо A1 достигается. Очевидным недостатком является необходимость находить проекцию $P_S z_k$ точки z_k на множество S при переборе $m = 0, 1, \ldots$.

Правило A2 требует точное знание (либо оценку снизу) константы R и оценки сверху для константы Липшица функции f. Преимуществом является необходимость всего одного проектирования вектора $f'(x_k)$ на подпространство T_{x_k}. Далее t_k ищется перебором $m = 0, 1, \ldots$ аналогично правилу Армихо в безусловной минимизации. Когда шаг t_k найден, вычисляется x_{k+1}: $x_{k+1} = P_S z_k$ или $x_{k+1} = R_S z_k$.

3. СХОДИМОСТЬ МПГ В ЗАДАЧЕ (1) С ШАГОМ АРМИХО

3.1. Шаг Армихо A1

Теорема 1. *Предположим, что в задаче* (1) *функция* f *липшицева с константой* L, *функция* f' *липшицева с константой* L_1, S — *проксимально гладкое множество с константой* $\frac{\pi}{2}R$. *Числа* L, L_1, R *неизвестны. Пусть выполнено условие ЛПЛ для функции* f *на* $S \cap \mathcal{L}_f(f(x_0))$.

Определим $B = \min\left\{d; \frac{\beta(1-\alpha)}{C}\right\}$, *где* $C = \frac{L_1}{2} + \frac{L}{R}$. *Тогда алгоритм* (2) *с выбором шага A*1 *сходится с линейной скоростью по функции* (8) *и по точке* (9).

Доказательство. Рассмотрим алгоритм с шагом A1 и случаи *а* и *б*:

(*а*) Если $\alpha t_k > t_k - Ct_k^2$, т.е. $t_k > \frac{1-\alpha}{C}$, то на k-м шаге имеем

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\frac{\alpha(1-\alpha)}{C}\|\xi_k\|^2.$$

(*б*) Пусть $t_k - Ct_k^2 \ge \alpha t_k$, т.е. $t_k \le \frac{1-\alpha}{C} < \frac{1}{C}$.

Если $d > \frac{1-\alpha}{C}$, то $t_k \ge \frac{(1-\alpha)\beta}{C}$ в силу определения шага Армихо A1.

Если $d \le \frac{1-\alpha}{C}$, то $t_k = d$ (и $m = 0$). Покажем это. По теореме А (4) при $t_k < \frac{1}{C}$ (оценка (4) верна для всех t_k)

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\|\xi_k\|^2 (t_k - Ct_k^2) \le -\alpha t_k \|\xi_k\|^2. \tag{7}$$

Максимальное t_k, удовлетворяющее предыдущей формуле, равно d.

Таким образом, в случаях (а) и (б), которые исчерпывают весь диапазон $t_k > 0$,

$$t_k \ge B := \min\left\{d; \frac{\beta(1-\alpha)}{C}\right\}.$$

В силу неравенства ЛПЛ

$$\|\xi_k\|^2 \ge \mu(f(x_k) - f_*), \quad \text{где} \quad f_* = \inf_{x\in S} f(x),$$

получаем, что

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\alpha\mu B(f(x_k) - f_*).$$

Для функции $\varphi(x) = f(x) - f_*$ имеем

$$\varphi(x_{k+1}) \le (1 - \alpha\mu B)\varphi(x_k), \quad B = \min\left\{d; \frac{\beta(1-\alpha)}{C}\right\}. \tag{8}$$

Для сходимости по точке с учетом формулы

$$\alpha B\|\xi_k\|^2 \le f(x_k) - f(x_{k+1}) \le \varphi(x_k)$$

и неравенства $\|\xi_k\| \le L$ имеем

$$\begin{gathered} \|x_{k+1} - x_k\| \le 2\|z_k - x_k\| = 2t_k\|\xi_k\| \le 2d\|\xi_k\|, \\ \|x_{k+1} - x_k\|^2 = 4d^2\|\xi_k\|^2 \le \frac{4d^2}{\alpha B}\varphi(x_k). \end{gathered} \tag{9}$$

Теорема доказана.

3.2. Шаг Армихо А2

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1) *известна константа* $\frac{\pi}{2}R$ *проксимальной гладкости множества* S (*или ее оценка снизу*), *а также известна оценка сверху* L *константы Липшица* f. *Пусть* f' — *липшицева функция с неизвестной константой* L_1. *Предположим, что выполнено условие ЛПЛ для функции* f *на* $S \cap \mathcal{L}_f(f(x_0))$.

Пусть $\alpha_1 \in (0, 1)$, $\alpha > \alpha_1$ *и* $d \le \alpha_1 \frac{\sqrt{3}R}{2L}$. *Тогда алгоритм* (2) *с выбором шага А2 сходится с линейной скоростью по функции* (14) *и по точке* (15) (*для* R_S) *или* (16) (*для* P_S).

Доказательство. Рассмотрим ретракцию R_S. Для $z_k = x_k - t_k\xi_k$ имеем

$$f(z_k) - f(x_k) \le (f'(x_k), z_k - x_k) + \frac{L_1}{2}\|z_k - x_k\|^2 =$$
$$= -t_k\|\xi_k\|^2 + \frac{L_1}{2}t_k^2\|\xi_k\|^2 = -\|\xi_k\|^2\left(t_k - \frac{L_1}{2}t_k^2\right).$$

Рассмотрим альтернативы (а) и (б):

(а) $\alpha t_k > t_k - \frac{L_1}{2}t_k^2$, т.е. $t_k > \frac{2(1-\alpha)}{L_1}$,

(б) $\alpha t_k \le t_k - \frac{L_1}{2}t_k^2$, т.е. $t_k \le \frac{2(1-\alpha)}{L_1}$.

Аналогично п. (б) теоремы 1, $t_k \ge \frac{2\beta(1-\alpha)}{L_1}$ в случае (*б*) при условии $d \ge \frac{2(1-\alpha)}{L_1}$. Если $d < \frac{2(1-\alpha)}{L_1}$, то, опять же аналогично доказательству теоремы 1, $t_k = d$ и $m = 0$.

Итак, в любом случае $t_k \ge E := \min\left\{d; \frac{2\beta(1-\alpha)}{L_1}\right\}$.

Имеем

$$\begin{gathered} f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(z_k) + f(z_k) - f(x_k), \\ f(z_k) - f(x_k) \le -\alpha t_k\|\xi_k\|^2. \end{gathered} \tag{10}$$

По теореме Пифагора $\|x_{k+1} - x_k\|^2 = \|x_k - z_k\|^2 + \|z_k - x_{k+1}\|^2$. При этом при условии $t_k\|\xi_k\| < \frac{\sqrt{3}}{2}R$ (см. [13, Theorem 2 (20)])

$$\|z_k - x_{k+1}\| \le \frac{\|x_k - z_k\|^2}{R}. \tag{11}$$

В силу (11)

$$f(x_{k+1}) - f(z_k) \le L\|x_{k+1} - z_k\| \le \frac{L}{R}\|x_k - z_k\|^2 \le \frac{L}{R}t_k^2\|\xi_k\|^2. \tag{12}$$

Из (10) и (12) получаем

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \le -\alpha t_k\|\xi_k\|^2 + \frac{L}{R}t_k^2\|\xi_k\|^2 = -t_k\|\xi_k\|^2\left(\alpha - \frac{L}{R}t_k\right).$$

В силу условий $d \le \alpha_1\frac{\sqrt{3}R}{2L}$, $\alpha > \alpha_1$ имеем

$$t_k \le d < \alpha_1\frac{R}{L}, \quad \alpha - \frac{L}{R}t_k > \alpha - \frac{L}{R}\alpha_1\frac{R}{L} = \alpha - \alpha_1 > 0,$$
$$-t_k\|\xi_k\|^2\left(\alpha - \frac{L}{R}t_k\right) \le -t_k\|\xi_k\|^2(\alpha - \alpha_1).$$

Вспоминая, что $t_k \geq E$, окончательно получаем

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -E(\alpha - \alpha_1)\|\xi_k\|^2. \tag{13}$$

По условию ЛПЛ $\|\xi_k\|^2 \geq \mu(f(x_k) - f_*)$ и для $\varphi(x) = f(x) - f_*$ имеем

$$\varphi(x_{k+1}) \leq (1 - E(\alpha - \alpha_1)\mu)\varphi(x_k), \qquad E = \min\left\{d; \frac{2\beta(1-\alpha)}{L_1}\right\}. \tag{14}$$

С учетом формулы (11)

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 = \|x_k - z_k\|^2 + \|z_k - x_{k+1}\|^2 \leq t_k^2\|\xi_k\|^2 + \frac{\|x_k - z_k\|^4}{R^2} \leq$$

$$\leq D\|\xi_k\|^2, \quad \text{где} \quad D = d^2 + \frac{d^4L^2}{R^2}.$$

Применяя (13), получаем

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq D\|\xi_k\|^2 \leq \frac{D}{E(\alpha - \alpha_1)}(f(x_k) - f(x_{k+1})) \leq \frac{D}{E(\alpha - \alpha_1)}\varphi(x_k). \tag{15}$$

Заметим, что для ретракции P_S оценка (14) также остается верной в силу теоремы А.

Для сходимости по точке с учетом формулы (11) и неравенства $\|\xi_k\| \leq L$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|x_{k+1} - z_k\| + \|z_k - x_k\| \leq \|R_S z_k - z_k\| + \|z_k - x_k\| \leq \frac{\|z_k - x_k\|^2}{R} + \|z_k - x_k\|,$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq t_k\|\xi_k\| + \frac{t_k^2\|\xi_k\|^2}{R}.$$

Отсюда с учетом формулы (13) получаем

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|\xi_k\|^2 d^2\left(1 + \frac{dL}{R}\right)^2 \leq \frac{d^2\left(1 + \frac{dL}{R}\right)^2}{E(\alpha - \alpha_1)}\varphi(x_k). \tag{16}$$

Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 1. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \notin S$. Пусть существует $y \in P_S(x)$ и существует число $\lambda > 0$ такое, что $y \in P_S(x + \lambda(x - y))$. Тогда множество $P_S(x)$ является одноточечным.*

Зафиксируем вещественное число $\sigma_0 > 0$.

Теорема 3. *Константа проксимальной гладкости множества $\mathfrak{M}_r$ $(r < k)$ в точности равна $\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Пусть ее сингулярное разложение задается формулой $Y = U_Y\Sigma V_Y^{\mathrm{T}}$. Определим матрицу $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times k}$ следующим образом: $\Lambda_{ii} = \max(\sigma_0, \sigma_i(Y))$ $\forall i = \overline{1, r}$, остальные элементы матрицы Λ положим равными 0. Докажем, что матрица $Z \in \mathbb{R}^{n\times k}$, сингулярное разложение которой задано формулой $Z = U_Y\Lambda V_Y^{\mathrm{T}}$, принадлежит множеству $P_{\mathfrak{M}_r}(Y)$. Рассмотрим произвольную матрицу $X \in \mathfrak{M}_r$, имеющую сингулярное разложение $X = U\Lambda_1V^{\mathrm{T}}$. Тогда с учетом формулы (6) верна следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\|Y - Z\|^2 = \left\|U_Y\Sigma V_Y^{\mathrm{T}} - U_Y\Lambda V_Y^{\mathrm{T}}\right\|^2 = \left\|\Sigma - U_Y^{\mathrm{T}}U_Y\Lambda V_Y^{\mathrm{T}}V_Y\right\|^2 = \|\Sigma - \Lambda\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(\Sigma) - \sigma_i(\Lambda))^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(\Sigma) - \sigma_i(\Lambda_1))^2 = \sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(Y) - \sigma_i(X))^2 \leq \|Y - X\|^2.$$

Таким образом, $Z \in P_{\mathfrak{M}_r}(Y)$, а $\varrho^2(Y, \mathfrak{M}_r) = \|Y - Z\|^2 = \sum_{i=1}^{k}(\sigma_i(\Sigma) - \sigma_i(\Lambda))^2$.

Пусть верно $\varrho(Y,\mathfrak{M}_r) < \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$. Докажем, что $\sigma_r(Y) \neq \sigma_{r+1}(Y)$. Предположим противное, т.е., что $\sigma_r(Y) = \sigma_{r+1}(Y)$. Рассмотрим две альтернативы. Если $\sigma_r(Y) \geq \sigma_0$, то $\sum_{i=1}^k (\sigma_i(\Sigma) - \sigma_i(\Lambda))^2 \geq \sigma_0^2$, а значит, $\varrho(Y,\mathfrak{M}_r) \geq \sigma_0$, что противоречит $\varrho(Y,\mathfrak{M}_r) < \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$. Если $\sigma_r(Y) < \sigma_0$, то $\sum_{i=1}^k (\sigma_i(\Sigma) - \sigma_i(\Lambda))^2 \geq (\sigma_r(Y) - \sigma_0)^2 + (\sigma_{r+1}(Y) - 0)^2 = (\sigma_r(Y) - \sigma_0)^2 + (\sigma_r(Y) - 0)^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{2}$, что противоречит $\varrho(Y,\mathfrak{M}_r) < \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $\sigma_r(Y) \neq \sigma_{r+1}(Y)$. Рассмотрим матрицы $Y(\lambda) = Y + \lambda(Y - Z) = U_Y(\Sigma + \lambda(\Sigma - \Lambda))V_Y^{\mathrm{T}}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности операций сложения и умножения на скаляр существует такое число $\hat{\lambda} > 0$, что выражение $U_Y(\Sigma + \hat{\lambda}(\Sigma - \Lambda))V_Y^{\mathrm{T}}$ является сингулярным разложением матрицы $Y(\hat{\lambda})$ (это следует из того, что $\sigma_r(Y) \neq \sigma_{r+1}(Y)$), и при этом $\max(\sigma_0, \sigma_i(Y(\hat{\lambda}))) = \max(\sigma_0, \sigma_i(Y) + \hat{\lambda}(\sigma_i(Y) - \max(\sigma_0, \sigma_i(Y)))$ $\forall i = \overline{1, r}$. Итак, $Z \in P_{\mathfrak{M}_r}(Y(\hat{\lambda}))$. По лемме 1 получаем, что множество $P_{\mathfrak{M}_r}(Y)$ является одноточечным. Таким образом, множество $\mathfrak{M}_r$ $(r < k)$ является проксимально гладким с $R_{\mathfrak{M}_r} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$.

Докажем, что константа проксимальной гладкости множества $\mathfrak{M}_r$ $(r < k)$ неулучшаема. Рассмотрим матрицу Σ, заданную следующим образом: $\Sigma_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, r-1}$, $\Sigma_{ii} = \frac{\sigma_0}{2}$ $\forall i = \overline{r, r+1}$, остальные элементы матрицы Σ положим равными 0. Аналогично приведенным выше рассуждениям (используя формулу (6)) получаем, что $\varrho(\Sigma,\mathfrak{M}_r) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим матрицы M и N, заданные следующим образом: $M_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, r}$, остальные элементы матрицы M положим равными 0; $N_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, r-1}$, $N_{r+1,r+1} = \sigma_0$, остальные элементы матрицы N положим равными 0. Заметим (пользуясь формулой (6)), что $M, N \in P_{\mathfrak{M}_r}(\Sigma)$. Таким образом, $R_{\mathfrak{M}_r} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$, причем эта константа неулучшаема. Теорема доказана.

Теорема 4. *Константа проксимальной гладкости множества* $\mathfrak{M}_k$ *в точности равна* σ_0.

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$, для которой верно $\varrho(Y,\mathfrak{M}_k) < \sigma_0$. Пусть ее сингулярное разложение задается формулой $Y = U_Y\Sigma V_Y^{\mathrm{T}}$. Аналогично доказательству теоремы 3 получаем, что верно неравенство $\sigma_k(Y) > 0$, которое обеспечивает одноточечность множества $P_{\mathfrak{M}_k}(Y)$. Таким образом, множество $\mathfrak{M}_k$ является проксимально гладким с $R_{\mathfrak{M}_k} = \sigma_0$.

Покажем, что константа проксимальной гладкости множества $\mathfrak{M}_k$ неулучшаема. Рассмотрим матрицу Σ, заданную следующим образом: $\Sigma_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, k-1}$, остальные элементы матрицы Σ положим равными 0. Аналогично доказательству теоремы 3 получаем, что $\varrho(Y,\mathfrak{M}_k) = \sigma_0$. Рассмотрим матрицы M и N, заданные следующим образом: $M_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, k}$, остальные элементы матрицы M положим равными 0; $N_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, k-1}$, $N_{k,k} = -\sigma_0$, остальные элементы матрицы N положим равными 0. Заметим (пользуясь формулой (6)), что $M, N \in P_{\mathfrak{M}_k}(\Sigma)$. Таким образом, $R_{\mathfrak{M}_k} = \sigma_0$, причем эта константа неулучшаема. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению множеств $\mathfrak{L}_r$. Заметим, что $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{M}_1$.

Теорема 5. *Константа проксимальной гладкости множества* $\mathfrak{L}_r$ $(r > 1)$ *в точности равна* $\frac{\sigma_0}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$, для которой верно $\varrho(Y,\mathfrak{L}_r) < \frac{\sigma_0}{2}$. Пусть ее сингулярное разложение задается формулой $Y = U_Y\Sigma V_Y^{\mathrm{T}}$. Вследствие того, что $\mathfrak{L}_r = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{M}_i$, множество $P_{\mathfrak{L}_r}(Y)$ может оказаться неодноточечным только в следующих случаях:

(*а*) Существует $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ такое, что множество $P_{\mathfrak{M}_i}(Y)$ является неодноточечным и при этом $P_{\mathfrak{M}_i}(Y) \subset P_{\mathfrak{L}_r}(Y)$. Из теорем 3 и 4 $\varrho(Y, \mathfrak{M}_i) \geq \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$, а следовательно, $\varrho(Y, \mathfrak{L}_r) \geq \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$, что противоречит $\varrho(Y, \mathfrak{L}_r) < \frac{\sigma_0}{2}$.

(*б*) Существуют $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $i < j$, такие, что $\varrho(Y, \mathfrak{M}_i) = \varrho(Y, \mathfrak{M}_j) = \varrho(Y, \mathfrak{L}_r)$. Из доказательства теоремы 3 матрицы $Z_l = U_Y \Lambda_l V_Y^{\mathrm{T}}$, где матрицы Λ_l заданы следующим образом: $(\Lambda_l)_{mm} = \max(\sigma_0, \sigma_m(Y))$ $\forall m = \overline{1, l}$, а их остальные элементы равны 0, принадлежат $P_{\mathfrak{M}_l}(Y)$, $l \in \{i, j\}$. Покажем, что $\max(\sigma_m, \sigma_0) = \sigma_0$ $\forall m \in i+1, \ldots, j$. Действительно, иначе $\varrho(Y, \mathfrak{M}_i) = \|Y - Z_i\| \geq \sigma_0$, что противоречит $\varrho(Y, \mathfrak{L}_r) < \frac{\sigma_0}{2}$. Учитывая это, получаем

$$0 = \|Y - Z_j\|^2 - \|Y - Z_i\|^2 = \sum_{m=1}^{k} \left(\sigma_m(\Sigma) - \sigma_m(\Lambda_j)\right)^2 - \sum_{m=1}^{k} \left(\sigma_m(\Sigma) - \sigma_m(\Lambda_i)\right)^2 =$$

$$= \sum_{m=i+1}^{j} \left((\sigma_m(\Sigma) - \sigma_m(\Lambda_j))^2 - \sigma_m^2(\Sigma)\right) = \sum_{m=i+1}^{j} \left(\sigma_m^2(\Lambda_j) - 2\sigma_m(\Sigma)\sigma_m(\Lambda_j)\right) =$$

$$= \sum_{m=i+1}^{j} \left((\sigma_0^2 - 2\sigma_m(\Sigma)\sigma_0)\right).$$

Таким образом, $\sum_{m=i+1}^{j} \sigma_m(\Sigma) = \frac{N\sigma_0}{2}$, где $N = j - i$. По неравенствам между средними $\sum_{m=i+1}^{j} \sigma_m^2(\Sigma) \geq \frac{\left(\sum_{m=i+1}^{j} \sigma_m(\Sigma)\right)^2}{N} = \frac{N\sigma_0^2}{4}$. Используя это, получаем

$$\varrho^2(Y, \mathfrak{L}_r) = \varrho^2(Y, \mathfrak{M}_i) = \sum_{m=1}^{k} (\sigma_m(\Sigma) - \sigma_m(\Lambda_i))^2 = \sum_{m=1}^{i} (\sigma_m(\Sigma) - \max(\sigma_m(\Sigma), \sigma_0))^2 +$$

$$+ \sum_{m=i+1}^{j} \sigma_m^2(\Sigma) + \sum_{j+1}^{k} \sigma_m^2(\Sigma) \geq \frac{N\sigma_0^2}{4} \geq \frac{\sigma_0^2}{4},$$

что противоречит $\varrho(Y, \mathfrak{L}_r) < \frac{\sigma_0}{2}$. Итак, для любой матрицы $Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$, для которой верно $\varrho(Y, \mathfrak{L}_r) < \frac{\sigma_0}{2}$, множество $P_{\mathfrak{L}_r}(Y)$ является одноточечным. Таким образом, множество $\mathfrak{L}_r$ $(r > 1)$ является проксимально гладким с $R_{\mathfrak{M}_r} = \frac{\sigma_0}{2}$.

Докажем, что константа проксимальной гладкости множества $\mathfrak{L}_r$ $(r > 1)$ неулучшаема. Рассмотрим матрицу Σ, заданную следующим образом: $\Sigma_{ii} = \sigma_0$ $\forall i = \overline{1, r-1}$, $\Sigma_{rr} = \frac{\sigma_0}{2}$, остальные элементы положим равными 0. Аналогично доказательству теоремы 3 получаем

$$\varrho^2(\Sigma, \mathfrak{M}_i) = \begin{cases} (r - 1 - i)\sigma_0^2 + \dfrac{\sigma_0^2}{4}, & i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}, \\ \dfrac{\sigma_0^2}{4}, & i = r. \end{cases}$$

Итак, $\varrho(\Sigma, \mathfrak{L}_r) = \varrho(\Sigma, \mathfrak{M}_{r-1}) = \varrho(\Sigma, \mathfrak{M}_r) = \frac{\sigma_0}{2}$. Таким образом, $R_{\mathfrak{L}_r} = \frac{\sigma_0}{2}$, причем эта константа неулучшаема. Теорема доказана.

Пусть $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$ – произвольная матрица. Пусть ее сингулярное разложение задается формулой $Y = U_Y \Sigma V_Y^{\mathrm{T}}$. Определим $\forall l = \overline{1,k}$ матрицы Λ_l следующим образом: $(\Lambda_l)_{mm} = \max(\sigma_0, \sigma_m(Y))$ $\forall m = \overline{1,l}$, а их остальные элементы положим равными 0. Определим матрицы Z_l следующим образом: $Z_l = U_Y \Lambda_l V_Y^{\mathrm{T}}$ $\forall l = \overline{1,k}$.

Следствие 1. Матрица $Z_l \in \mathbb{R}^{n\times k}$ принадлежит множеству $P_{\mathfrak{M}_l}(Y)$ $\forall l = \overline{1,k}$.

Следствие 2. Матрица $Z_l \in \mathbb{R}^{n\times k}$, для которой $\|Y - Z_l\|$ минимально ($l = \overline{1,r}$), принадлежит множеству $P_{\mathfrak{L}_r}(Y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goldstein A.A.* Convex programming in Hilbert space // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. № 5. P. 709–710.
2. *Levitin E.S., Polyak B.T.* Constrained minimization methods // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1966. V. 6. № 5. P. 787–823.
3. *Absil P.-A., Malick J.* Projection-like retraction on matrix manifolds // SIAM J. Optim. 2012. V. 22. № 1. P. 135–158.
4. *Edelman A., Arias T., Smith S.T.* The geometry of algorithms with orthogonality constraints // J. Matrix Anal. Appl. 1998. V. 20. № 2. P. 303–353.
5. *Absil P.-A., Mahony R., Sepulchre R.* Matrix Manifolds. Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford, 2008. 240 p.
6. *Luenberger D.G.* The gradient projection methods along geodesics // Management Sci. 1972. V. 18. № 11. P. 620–631.
7. *Hager W.W.* Minimizing a quadratic over a sphere // SIAM J. Optim. and Contr. 2001. V. 12. № 1. P. 188–208.
8. *Neto J.X. da Cruz, De Lima J.X. da Cruz, Oliveira P.R.* Geodesic algorithms on Riemannian manifolds // Balkan J. of Geom. and its Appl. 1998. V. 3. № 2. P. 89–100.
9. *Udrişte C.* Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds // Math. and Its Appl. Ser. Springer, 1998. V. 297.
10. *Schneider R., Uschmajew A.* Convergence results for projected line search methods on varieties of low-rank matricies via Lojasiewicz inequality // SIAM J. Optim. 2015. V. 25. № 1. P. 622–646.
11. *Merlet B., Nguyen T.N.* Convergence to equilibrium for discretizations of gradient-like flows on Riemannian manifolds // Different. Integral Equat. 2013. V. 26. P. 571–602.
12. *Birgin E.G., Martinez J.M., Raydan M.* Nonmonotone Spectral Projected Gradient Methods on Convex Sets // SIAM J. Optim. 2000. V. 10. № 4. P. 1196–1211.
13. *Balashov M.V.* The Gradient Projection Algorithm for Smooth Sets and Functions in Nonconvex Case // Set-Valued and Variat. Anal. 2021.V. 29.P. 341–360. https://doi.org/10.1007/s11228-020-00550-4
14. *Huikang Liu, Anthony Man-Cho So, Weijie Wu* Quadratic optimization with orthogonality constraint: explicit Lojasiewicz exponent and linear convergence of retraction-based line-search and stochastic variance-reduced gradient methods // Math. Program. 2018. V. 178. P. 215–262.
15. *Nesterov Yu.* Introductory lectures on convex optimization. Abasic course basic course. Berlin: Springer, 2004.
16. *Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A.* Gradient Projection and Conditional Gradient Methods for Constrained Nonconvex Minimization // Numerical Function. Anal. and Optimizat. 2020. V. 41. № 7. P. 822–849.
17. *Horn R., Johnson C.* Matrix Analysis. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2009. 643 p.
18. *Vial J.-Ph.* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. of Operat. Res. 1983. V. 8. № 2. P. 231–259.
19. *Clarke F.H., Stern R.J., Wolenski P.R.* Proximal smoothness and lower–C^2 property // J. Convex Anal. 1995. V. 2. № 1–2. P. 117–144.
20. *Conway J.H., Hardin R.H., Sloane N.J.A.* Packing Lines, Planes, etc.: Packings in Grassmannian Spaces // Experiment. Math. 1996. V. 5. P. 139–159.
21. *Балашов М.В.* Метод проекции градиента на матричных многообразиях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 9. С. 1453–1461.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1825–1838

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.62

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРОАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБОЙ ГРАНИЧНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ *k*-ШАГОВЫМИ МЕТОДАМИ[1)]

М. Н. Ботороева[1,*], О. С. Будникова[1,], М. В. Булатов[2,***], С. С. Орлов[1,****]**

[1] *664003 Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, Иркутский государственный университет, Россия*

[2] *664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Россия*

**e-mail: masha888888@mail.ru*

***e-mail: osbud@mail.ru*

****e-mail: mvbul@icc.ru*

*****e-mail: orlov_sergey@inbox.ru*

Поступила в редакцию 21.11.2020 г.
Переработанный вариант 06.04.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

В статье излагается построение k-шаговых методов решения систем интегральных уравнений типа Вольтерра I и II рода со слабой степенной особенностью ядер в нижнем пределе интегрирования. Матрично-векторная форма таких систем имеет вид абстрактного уравнения с вырожденной матрицей коэффициентов при внеинтегральных слагаемых, которое называют интегроалгебраическим уравнением. Предлагаемые методы основаны на экстраполяционных формулах для главной части, многошаговых методах типа Адамса и формуле интегрирования произведений для интегрального члена. Веса построенных квадратурных формул получены в явном виде. Доказана теорема о сходимости разработанных методов. Приведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие теоретические результаты. Библ. 30. Фиг. 2. Табл. 8.

Ключевые слова: интегроалгебраические уравнения, многошаговые методы, слабая граничная особенность.

DOI: 10.31857/S0044466921110041

1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка эффективных численных методов решения интегральных уравнений является одним из центральных направлений вычислительной математики. К настоящему времени созданы и обоснованы методы решения интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) II рода, некоторых ИУВ I рода, в том числе и с различными особенностями. Достаточно полный обзор результатов приведен в монографиях [1] и [2]. Среди статей выделим недавно опубликованные [3] и [4]. В работе [5] методы кусочно-полиномиальной коллокации применяются для численного решения ИУВ II рода с двумя слабыми степенными особенностями ядра в нижнем и верхнем пределах интегрирования, которые авторы M. Kolk и A. Pedas называют *граничной* и *диагональной* особенностями соответственно.

В представляемой статье рассматривается система взаимосвязанных линейных ИУВ I и II рода со слабой граничной особенностью ядра. Такие системы можно представить в виде абстрактного интегрального уравнения с тождественно вырожденной матрицей в главной части, которое будем называть *интегроалгебраическим уравнением* (ИАУ) со слабой граничной особенностью. Данные классы ИАУ ранее, по-видимому, не рассматривались. Близкими им объектами являются дифференциальноалгебраические уравнения (ДАУ) с вырожденной матрицей перед производной, имеющей нуль в начальной точке [6], [7].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00643) и ВАНТ (код проекта 20-51-54003).

Несколько большее внимание в современной математической литературе уделено ИАУ со слабой диагональной особенностью, которые также называют ИАУ типа Абеля. Прежде всего следует отметить статью [8], где получены условия разрешимости не только ИАУ типа Абеля, но и систем вырожденных слабосингулярных интегродифференциальных уравнений (ИДУ). Продолжением этих исследований стала работа [9], в которой для ИАУ типа Абеля предложены методы численного анализа, а именно, разработанные ранее многошаговые методы для ИАУ с регулярным (достаточно гладким) ядром [10] перенесены на ИАУ со слабой диагональной особенностью в интегральном слагаемом. Примерно в это же время были получены результаты для численного решения слабосингулярных ИАУ методами коллокационного типа [11]. В целом теория ИАУ в начале своего развития. По всей видимости, первым изучать ИАУ начал В.Ф. Чистяков в своей работе [12], в которой сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения ИАУ с регулярным ядром и предложен численный метод первого порядка точности. С подробным обзором результатов в области ИАУ можно ознакомиться по монографии [13] В.Ф. Чистякова и недавно опубликованным статьям [14] О.С. Будниковой, [15] V. Balakumar и K. Murugesan, [16] M.S. Farahani и M. Hadizadeh, [17] М.В. Булатова и Е.В. Чистяковой.

Родственными объектами ИАУ с особенностями ядра являются системы интегральных уравнений Вольтерра с кусочно-гладкими ядрами, которые имеют разрывы I рода. Исследованию однозначной разрешимости таких систем в классе непрерывных функций и распределений Соболева—Шварца с компактным носителем, свойств решений, а также разработке численных методов посвящена монография [18] Д.Н. Сидорова. Рассмотрен случай, когда ядра интегральных уравнений имеют конечное количество линий разрыва, заданных явно и пересекающихся в начальной точке отрезка интегрирования. Развернутая форма такой системы содержит интегральные слагаемые с функциональными пределами интегрирования, принимающими одинаковые значения в левой концевой точке отрезка, на котором задана исходная система. Более сложная ситуация имеет место, когда указанное равенство не выполняется. В этом случае в соответствующих интегральных слагаемых возникает дополнительный эффект эредитарности (запаздывания) и, как следствие, необходимость задать решение на предыстории. Качественная теория и численные методы уравнений Вольтерра I рода с функциональными пределами интегрирования детально и полно изложены в монографии [1] А.С. Апарцина. Эти классы уравнений представляют большой интерес с точки зрения математического моделирования развивающихся динамических систем. В частности, на их основе проводились численные расчеты в задачах функционирования двухсекторной экономики [19], ввода разнотипных генерирующих мощностей электроэнергетической системы [20], управление накопителями электроэнергии для возобновляемых источников [21]. ИАУ с функциональными пределами интегрирования и запаздыванием, помимо вырождения главной части, наследуют также и все трудности исследования, присущие функциональным и функционально-дифференциальным уравнениям. В статье [22] М.Н. Ботороевой разработаны аналитические и эффективные численные методы решения специальных классов таких ИАУ.

В настоящей статье предлагаются многошаговые методы решения интегроалгебраических уравнений с особенностью ядра в нижнем пределе интегрирования. Предлагаемые методы основаны на экстраполяционных формулах для главной части, на явных многошаговых методах типа Адамса и формуле интегрирования произведений для интегрального слагаемого. Выбор численных методов обусловлен тем, что они хорошо себя зарекомендовали при решении ИУВ I рода с ядром, отличным от нуля на диагонали.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int_0^t s^{-a} K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad 0 < a < 1, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы, $f = f(t)$ и $x = x(t)$ суть n-мерные известная и искомая вектор-функции такие, что $A(t) \in C^p([0, 1]; \mathbb{R}^{n\times n})$, $K(t,s) \in C^p(\Delta; \mathbb{R}^{n\times n})$ и $f(t) \in C^p([0, 1]; \mathbb{R}^n)$

(элементы соответствующих матриц обладают необходимой степенью гладкости $p \in \mathbb{N}$), и при всех $t \in [0, 1]$ выполняется условие

$$A(t) \neq \mathbb{O}_n, \quad \det A(t) = 0. \tag{2}$$

Здесь и всюду далее Δ – компакт вида $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le t \le 1,\ 0 \le s \le t\}$, символ $\mathbb{R}^{n\times n}$ обозначает вещественное векторное пространство квадратных матриц порядка n с операторной нормой $\|A\| = \sup\left\{|Ax|_{\mathbb{R}^n} : |x|_{\mathbb{R}^n} = 1\right\}$, а $\mathbb{O}_n$ – нулевую матрицу порядка n. Систему интегральных уравнений (1) с условием (2) назовем ИАУ со слабой граничной особенностью. Под решением ИАУ (1) будем понимать любую непрерывную на отрезке [0, 1] вектор-функцию $x = x(t)$, которая обращает данное ИАУ в тождество.

Приведем определения и утверждения, которые понадобятся в дальнейшем изложении.

Определение 2.1 (см. [12]). Пучок матриц $\lambda B(t) + C(t)$ удовлетворяет *критерию ранг-степень* на отрезке [0, 1] (имеет индекс один или простую структуру), если при всех $t \in [0, 1]$ выполняется условие

$$\operatorname{rank} B(t) = \deg(\det(\lambda B(t) + C(t))) = m = \text{const},$$

где λ – скаляр, символ deg(.) означает показатель степени многочлена (.), а операция deg(0) не определена.

Отметим некоторые важные свойства пучков матриц.

Лемма 2.1 (см. [12]). *Пусть* $B(t), C(t) \in C^p([0, 1]; \mathbb{R}^{n\times n})$, *и пучок матриц* $\lambda B(t) + C(t)$ *удовлетворяет критерию ранг-степень на отрезке* [0, 1]. *Тогда существуют неособые матрицы* $P(t), Q(t) \in C^p([0, 1]; \mathbb{R}^{n\times n})$ *такие, что*

$$P(t)B(t)Q(t) = \operatorname{diag}\left\{\mathbb{E}_m, \mathbb{O}_{n-m}\right\}, \quad P(t)C(t)Q(t) = \operatorname{diag}\left\{J_m(t), \mathbb{O}_{n-m}\right\},$$

где $J_m(t)$ *есть* $(m \times m)$*-матрица, а* $\mathbb{E}_m$ *– единичная матрица порядка* m.

Из этой леммы вытекает блочное представление матрицы $B(t)$

$$P(t)B(t) = \begin{pmatrix} B^1(t) \\ \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где $B^1(t)$ есть $(m \times n)$-матрица такая, что $\operatorname{rank} B^1(t) = m$, а $\mathbb{O}$ – нулевая $((n-m) \times n)$-матрица.

Лемма 2.2 (см. [23]). *Если пучок матриц* $\lambda B(t) + C(t)$ *удовлетворяет критерию ранг-степень на всем отрезке* [0, 1], *и матрицы* $B(t)$ *и* $C(t)$ *имеют блочный вид*

$$B(t) = \begin{pmatrix} B^1(t) \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} C^1(t) \\ C^2(t) \end{pmatrix},$$

где $B^1(t)$ *и* $C^1(t)$ *суть* $(m \times n)$*-матрицы такие, что* $\operatorname{rank} B^1(t) = m = \text{const}$, $\mathbb{O}$ *– нулевая* $((n-m)\times n)$*-матрица,* $C^2(t)$ *есть* $((n-m)\times n)$*-матрица, то при любом* $t \in [0, 1]$ *выполняется*

$$\det\begin{pmatrix} B^1(t) \\ C^2(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Лемма 2.3. *Пусть* $K(t, s) \in C(\Delta; \mathbb{R}^{n\times n})$, $f(t) \in C([0, 1]; \mathbb{R}^n)$, *тогда система*

$$x(t) + \int_0^t s^{-a} K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad 0 < a < 1,$$

линейных интегральных уравнений Вольтерра II рода со слабой граничной особенностью имеет единственное непрерывное на отрезке [0, 1] *решение*.

Доказательство. Повторная суперпозиция $\mathscr{L}^{n+1} : C([0,1];\mathbb{R}^n) \to C([0,1];\mathbb{R}^n)$

$$\mathscr{L}^{n+1}x = (-1)^{n+1}\int_0^t s^{-a}K_{n+1}(t,s)x(s)ds + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^t s^{-a}K_k(t,s)f(s)ds + f(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

линейного оператора $\mathscr{L} : C([0,1];\mathbb{R}^n) \to C([0,1];\mathbb{R}^n)$

$$\mathscr{L}x = -\int_0^t s^{-a}K(t,s)x(s)ds + f(t),$$

при любых заданных $K(t,s) \in C(\Delta;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $f(t) \in C([0,1];\mathbb{R}^n)$ осуществляет сжимающее отображение $C([0,1];\mathbb{R}^n)$ в себя, начиная с некоторого номера n. Это следует из верной для всех $(t,s) \in \Delta$ оценки

$$\|K_n(t,s)\| \le K^n\,\frac{(t^{1-a} - s^{1-a})^{n-1}}{(1-a)^{n-1}(n-1)!}, \quad K = \max_{(t,s)\in\Delta}\|K(t,s)\|,$$

определяемых рекуррентно

$$K_{n+1}(t,s) = \int_s^t \tau^{-a}K(t,\tau)K_n(\tau,s)d\tau, \quad K_1(t,s) = K(t,s),$$

элементов матрично-функциональной последовательности $\{K_n(t,s)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда линейный оператор $\mathscr{L}$ имеет в $C([0;1];\mathbb{R}^n)$ единственную неподвижную точку, которая и является непрерывным решением рассматриваемой системы линейных интегральных уравнений.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (2)*, и*

1) $\operatorname{rank}\big(A(0)|f(0)\big) = \operatorname{rank} A(0) = m < n$;

2) $A(t) \in C^1([0,1];\mathbb{R}^{n\times n})$; $K(t,s), \partial_t K(t,s) \in C(\Delta;\mathbb{R}^{n\times n})$;

3) $f(t) \in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$;

4) *пучок матриц* $\lambda A(t) + K(t,t)$ *удовлетворяет критерию ранг-степень на* $[0,1]$.

Тогда ИАУ (1) *имеет единственное непрерывное на отрезке* $[0,1]$ *решение*.

Доказательство. При $t = 0$ ИАУ (1) имеет вид системы линейных алгебраических уравнений $A(0)x(0) = f(0)$, которая совместна в силу первого условия теоремы. Далее в условиях 2, 3 и 4 теоремы с учетом лемм 2.1 и 2.2 исходное ИАУ допускает редукцию к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int_0^t s^{-a}\begin{pmatrix} A^1(t) \\ K^2(t,t) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} K^1(t,s) \\ t^a\partial_t K^2(t,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}ds = \begin{pmatrix} A^1(t) \\ K^2(t,t) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f_1(t) \\ t^a f_2'(t) \end{pmatrix},$$

которая имеет единственное непрерывное на отрезке $[0,1]$ решение, согласно лемме 3.

Отметим, что условие 4 теоремы 2.1 является достаточным. Если оно не выполняется, то, как показывают следующие ниже примеры, исследование однозначной разрешимости ИАУ (1) сталкивается с большими трудностями.

Пример 2.1. Рассмотрим систему интегральных уравнений (1) с компонентами

$$A(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} -|\psi(0)|^{\frac{1}{1-a}} \\ 1 \\ t \end{pmatrix},$$

где $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ — заданная функция. Здесь $A(t) \ne \mathbb{O}_3$ и $\det A(t) = 0$ при всех $t \in [0,1]$. Заметим, что $\operatorname{rank} A(t) = 1$ в точках $t \in [0,1]$, где $\psi(t) = 0$, и $\operatorname{rank} A(t) = 2$ в точках $t \in [0,1]$ таких, что $\psi(t) \ne 0$.

Таким образом, в данном примере критерий ранг-степень не выполняется в точках $t \in [0, 1]$, где $\psi(t) = 0$. Это, в частности, может приводить к неединственности решения. Например, если $\psi(t) = t$, то рассматриваемое ИАУ имеет семейство непрерывных решений

$$x(t) = \left(C\frac{e^{-\frac{t^{-a}}{a}}}{t}, e^{-\frac{t^{1-a}}{1-a}}, t^a \right)^{\mathrm{T}}.$$

При $\psi(t) = t^{1-a} - \alpha^{1-a}$, где $0 < \alpha < 1$, критерий ранг-степень нарушается в точке $t = \alpha$. В этом случае ИАУ имеет множество непрерывных решений вида

$$x(t) = \left(\begin{cases} (\alpha^{1-a} - t^{1-a})^{\frac{a}{1-a}}, & 0 \le t \le \alpha; \\ C(t^{1-a} - \alpha^{1-a})^{\frac{a}{1-a}}, & \alpha < t \le 1; \end{cases}, \quad e^{-\frac{t^{1-a}}{1-a}}, t^a \right)^{\mathrm{T}}.$$

На отрезке $[0,\alpha]$ решение оказывается единственным, а в точке $t = \alpha$ имеет место ветвление решения. В приведенных выше формулах $C \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная.

Пример 2.2. Рассмотрим систему интегральных уравнений (1) с компонентами

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Здесь $A(t) \ne \mathbb{O}_3$ и $\det A(t) \equiv 0$, причем $\operatorname{rank} A(t) = 1$ в точке $t = 0$, и $\operatorname{rank} A(t) = 2$ при $t \in (0, 1]$. Матричный многочлен $\det(\lambda A(t) + K(t,t)) = \lambda - 1$ имеет первую степень на отрезке $[0, 1]$, значит, критерий ранг-степень нарушается при всех $t \in (0, 1]$. Тем не менее рассматриваемое ИАУ имеет единственное непрерывное решение вида

$$x(t) = \left(t^a, e^{-\frac{t^{1-a}}{1-a}}, (a+1)t^{2a} \right)^{\mathrm{T}}.$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Зададим на отрезке [0, 1] равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad h = \frac{1}{N},$$

и введем обозначения $A_i = A(t_i)$, $K_{i,j} = K(t_i, t_j)$, $f_i = f(t_i)$, $x_i \approx x(t_i)$.

Эффективными способами борьбы со слабыми особенностями являются выделение весовой функции и применение квадратурных формул, соответствующих данной весовой функции [24], [25]. Тогда возникает вопрос о выборе подходящих квадратурных формул. В данной статье предлагаются алгоритмы, основанные на явных методах типа Адамса, так как они зарекомендовали себя при численном решении интегральных уравнений Вольтерра I рода с ядром на диагонали, не равным нулю [26]. Явные методы Адамса, описание которых можно найти, например в [10], [26], [27], с весовой функцией $p_a(t,s) = s^{-a}$, $a \in (0, 1)$, примут следующий вид. Для заданной функции $g = g(t)$ справедлива цепочка равенств

$$\int_0^{t_{i+1}} s^{-a} g(s)ds = \int_0^{t_{k+1}} s^{-a} g(s)ds + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} s^{-a} g(s)ds \approx$$

$$\approx \int_0^{t_{k+1}} s^{-a} L_{k+1}^k(g_0, g_1, \ldots, g_k, s)ds + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} s^{-a} L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \ldots, g_j, s)ds = \tag{3}$$

$$= h^{1-a} \sum_{l=0}^{k} d_l g_l + \sum_{j=k+1}^{i} h^{1-a} \sum_{l=0}^{k} b_l(j) g_{j-l} = h^{1-a} \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} g_l.$$

Таблица 1. Значения коэффициентов α_j

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	−1	–	–	–	–
2	3	−3	1	–	–	–
3	4	−6	4	−1	–	–
4	5	−10	10	−5	1	–
5	6	−15	20	−15	6	−1

Здесь $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \ldots, g_j, s)$ – интерполяционный полином степени k, проходящий через точки (g_{j-k}, s_{j-k}), (g_{j-k+1}, s_{j-k+1}), $\ldots$, (g_j, s_j), где $j = k+1, k+2, \ldots, i$, и $g(s_j) = g_j$.

Прямое применение явной квадратурной формулы (3) приведет к решению вырожденной СЛАУ в силу условия (2). Поэтому будем находить значение выражения $A_{i+1}x_{i+1}$ по аналогии с [10] следующим образом:

$$A_{i+1}x_{i+1} \approx A_{i+1}L_{k+1}^i\left(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i, t\right)\Big|_{t=t_{i+1}} = A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j},$$

где $L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i, t)$ – интерполяционный полином степени k, проходящий через точки (x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), $\ldots$, (x_i, t_i). Коэффициенты α_j для различных $k = 1, 2, \ldots, 5$ приведены в табл. 1. С учетом отмеченного выше, предлагаемые многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + h^{1-a}\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}, \quad i = k, k+1, \ldots, N-1. \tag{4}$$

Предполагается, что начальные значения $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ заранее вычислены с достаточной точностью. Отметим, что точность решения, получаемого по формуле (4), зависит от погрешности аппроксимации и нулей характеристического полинома

$$\sum_{l=0}^{k} b_l(i)\lambda^{k-l} = 0,$$

связанного с коэффициентами $b_l(i)$ в формуле (3). Корни данного многочлена по модулю меньше единицы при $k < 6$. В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

Приведем многошаговые алгоритмы при различных значениях k. При $k = 0$ формула (4) принимает вид

$$A_{i+1}x_i + h^{1-a}\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},$$

где

$$\omega_{i+1,l} = \frac{(l+1)^{1-a} - l^{1-a}}{1-a}.$$

При $k = 1$ получим метод

$$A_{i+1}(2x_i - x_{i-1}) + h^{1-a}\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},$$

где веса имеют вид

$$\omega_{i+1,l} = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & & & \\ d_0 & d_1+b_1(2) & b_0(2) & & \\ d_0 & d_1+b_1(2) & b_0(2)+b_1(3) & b_0(3) & \\ d_0 & d_1+b_1(2) & b_0(2)+b_1(3) & b_0(3)+b_1(4) & b_0(4) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

здесь

$$d_0 = \frac{2^{1-a}}{1-a} - \frac{2^{2-a}}{2-a},$$

$$d_1 = \frac{2^{2-a}}{(2-a)},$$

$$b_1(l) = -\frac{(l+1)^{1-a}}{1-a} + \frac{(l+1)^{2-a} - l^{2-a}}{(1-a)(2-a)},$$

$$b_0(l) = \frac{2(l+1)^{1-a} - l^{1-a}}{1-a} - \frac{(l+1)^{2-a} - l^{2-a}}{(1-a)(2-a)}.$$

Приведем еще один алгоритм при $k = 2$

$$A_{i+1}(3x_i - 3x_{i-1} + x_{i-2}) + h^{1-a}\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},$$

где

$$\omega_{i+1,l} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & & & & \\ d_0 & d_1+b_2(3) & d_2+b_1(3) & b_0(3) & & & \\ d_0 & d_1+b_2(3) & d_2+b_1(3)+b_2(4) & b_0(3)+b_1(4) & b_0(4) & & \\ d_0 & d_1+b_2(3) & d_2+b_1(3)+b_2(4) & b_0(3)+b_1(4)+b_2(5) & b_0(4)+b_1(5) & b_0(5) & \\ d_0 & d_1+b_2(3) & d_2+b_1(3)+b_2(4) & b_0(3)+b_1(4)+b_2(5) & b_0(4)+b_1(5)+b_2(6) & b_0(5)+b_1(6) & b_0(6) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты d_j, b_j, $j = 0, 1, 2$, вычислены по формулам

$$d_0 = \frac{3^{1-a}}{1-a} - \frac{3^{3-a}}{2(2-a)(3-a)},$$

$$d_1 = -\frac{3^{2-a}}{2-a} + \frac{3^{3-a}}{(2-a)(3-a)},$$

$$d_2 = \frac{3^{2-a}}{2-a} - \frac{3^{3-a}}{2(2-a)(3-a)},$$

$$b_2(l) = \frac{(l+1)^{1-a}}{1-a} - \frac{3(l+1)^{2-a} - l^{2-a}}{2(1-a)(2-a)} + \frac{(l+1)^{3-a} - l^{3-a}}{(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$b_1(l) = -\frac{3(l+1)^{1-a}}{1-a} + \frac{4(l+1)^{2-a} - 2l^{2-a}}{(1-a)(2-a)} - 2\frac{(l+1)^{3-a} - l^{3-a}}{(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$b_0(l) = \frac{3(l+1)^{1-a} - l^{1-a}}{1-a} - \frac{5(l+1)^{2-a} - 3l^{2-a}}{2(1-a)(2-a)} + \frac{(l+1)^{3-a} - l^{3-a}}{(1-a)(2-a)(3-a)}.$$

Таблица 2. Результаты численных расчетов примера 4.1 одношаговым методом

h	$a = 0.1$		$a = 0.5$		$a = 0.999$	
	err	p	err	p	err	p
0.1	0.0094	2	0.0061	2	0.0031	2
0.05	0.0023	2	0.0013	2	0.00080	2
0.025	0.00055	2	0.00027	2	0.00021	2
0.0125	0.00014	2	0.61×10^{-4}	2	0.53×10^{-4}	2
0.00625	0.34×10^{-4}	2	0.14×10^{-4}	2	0.14×10^{-4}	2

Таблица 3. Результаты численных расчетов примера 4.1 двухшаговым методом

h	$a = 0.1$		$a = 0.5$		$a = 0.999$	
	err	p	err	p	err	p
0.1	0.00080	3	0.00060	3	0.00048	3
0.05	0.95×10^{-4}	3	0.67×10^{-4}	3	0.32×10^{-4}	3
0.025	0.11×10^{-4}	3	0.70×10^{-5}	3	0.39×10^{-5}	3
0.0125	0.14×10^{-5}	3	0.74×10^{-6}	3	0.52×10^{-6}	3
0.00625	0.17×10^{-6}	3	0.81×10^{-7}	3	0.67×10^{-7}	3

Алгоритмы для $k = 3, 4, 5$ не приведены из-за громозкости формул весовых коэффициентов. Отметим, что из формул приближенного вычисления следует рекуррентное соотношение

$$\omega_{i+1,l} = \omega_{i,l}, \quad l = 0, 1, \dots, i-k-1,$$
$$\omega_{i+1,i-k} = \omega_{i,i-k} + b_k(i), \dots, \omega_{i+1,i-1} = \omega_{i,i-1} + b_1(i), \quad \omega_{i+1,i} = b_0(i).$$

Приведем результат о сходимости предложенных методов (4).

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* (2), *и*

1) $A(t) \in C^{k+1}([0,1];\mathbb{R}^{n\times n})$; $K(t,s) \in C^{k+2}([0,1];\mathbb{R}^{n\times n})$; $x(t), f(t) \in C^{k+1}([0,1];\mathbb{R}^n)$;

2) *пучок матриц* $\lambda A(t) + K(t,t)$ *удовлетворяет критерию ранг-степень на* $[0, 1]$;

3) $\operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank}(A(0)\,|\,f(0))$;

4) *для начальных значений справедливо*

$$\left|x_j - x(t_j)\right|_{\mathbb{R}^n} \le Rh^{k+1}, \quad 0 < R < +\infty, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad k \le 5.$$

Тогда справедлива оценка

$$\left|x_i - x(t_i)\right|_{\mathbb{R}^n} = O(h^{k+1}), \quad i = k, k+1, \dots, N-1.$$

Доказательство данного утверждения не приводится, ввиду его чрезвычайной технической громоздкости. Оно основано на лемме 2.1 с использованием приема перехода от многошаговых методов к одношаговым и оценке остаточного члена погрешности интерполяционного полинома по методике работы [10].

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Численные расчеты проводились на нескольких тестовых ИАУ со слабой граничной особенностью. Введем обозначение err для погрешности вычислений по евклидовой норме $\left|\cdot\right|_{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{R}^n$, и p для порядка метода, определяемого по формуле

$$p = \log_2 \frac{\mathrm{err}_h}{\mathrm{err}_{\frac{h}{2}}}.$$

Таблица 4. Результаты численных расчетов примера 4.1 трехшаговым методом

h	$a = 0.1$		$a = 0.5$		$a = 0.999$	
	err	p	err	p	err	p
0.1	0.00011	4	0.92×10^{-4}	4	0.68×10^{-4}	4
0.05	0.63×10^{-5}	4	0.46×10^{-5}	4	0.21×10^{-5}	4
0.025	0.36×10^{-6}	4	0.22×10^{-6}	4	0.12×10^{-6}	4
0.0125	0.22×10^{-7}	4	0.12×10^{-7}	4	0.80×10^{-8}	4
0.00625	0.13×10^{-8}	4	0.64×10^{-9}	4	0.51×10^{-9}	4

Таблица 5. Результаты численных расчетов примера 4.2 одношаговым методом

h	$a = 0.3$		$a = 0.6$		$a = 0.9$	
	err	p	err	p	err	p
0.1	0.204223	2	0.203065	2	0.201907	2
0.05	0.053732	2	0.053575	2	0.053419	2
0.025	0.013819	2	0.013799	2	0.013778	2
0.0125	0.003507	2	0.003504	2	0.003502	2
0.00625	0.000883	2	0.000883	2	0.000883	2

Таблица 6. Результаты численных расчетов примера 4.2 двухшаговым методом

h	$a = 0.3$		$a = 0.6$		$a = 0.9$	
	err	p	err	p	err	p
0.1	0.033079	3	0.032876	3	0.032675	3
0.05	0.004598	3	0.004583	3	0.004569	3
0.025	0.000607	3	0.000606	3	0.000605	3
0.0125	0.78×10^{-4}	3	0.78×10^{-4}	3	0.78×10^{-4}	3
0.00625	0.99×10^{-5}	3	0.99×10^{-5}	3	0.99×10^{-5}	3

Пример 4.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t s^{-a} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ -2se^{-s} & e^{t+s} \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} e^t + te^{-t} + \dfrac{t^{1-a}}{1-a}e^t \\ te^t + t^2e^{-t} - \dfrac{2t^{2-a}}{2-a} + \dfrac{t^{1-a}}{1-a}e^t \end{pmatrix}, \quad a \in (0, 1).$$

Точное решение: $x(t) = (e^t, e^{-t})^{\mathrm{T}}$. Результаты расчетов для $k = 1, 2, 3$ приведены в табл. 2–4.

Наиболее близкими объектами к рассматриваемым ИАУ (1) со слабой граничной особенностью являются сингулярные дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ). Для них в работах [6] и [7] предложены коллокационные методы приближенного решения и указаны различные приложения. В отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных, начальные условия для ДАУ должны быть согласованы с правой частью. Одним из подходов к такому согласованию является переход к ИАУ – интегральной форме исходного ДАУ. Приведем численные расчеты для интегрального аналога тестового примера, рассмотренного в статье [7].

Таблица 7. Результаты численных расчетов примера 4.2 трехшаговым методом

h	$a = 0.3$		$a = 0.6$		$a = 0.9$	
	err	p	err	p	err	p
0.1	0.005652	4	0.005522	4	0.005476	4
0.05	0.407×10^{-3}	4	0.406×10^{-3}	4	0.405×10^{-3}	4
0.025	0.28×10^{-4}	4	0.27×10^{-4}	4	0.27×10^{-4}	4
0.0125	0.18×10^{-5}	4	0.18×10^{-5}	4	0.18×10^{-5}	4
0.00625	0.11×10^{-6}	4	0.11×10^{-6}	4	0.11×10^{-6}	4

Таблица 8. Результаты численных расчетов одношаговым методом примера 4.1 с пилообразным возмущением правой части

$a = 0.1$			$a = 0.5$			$a = 0.9$		
δ	$h_{k.o.}$	$err_{k.o.}$	δ	$h_{k.o.}$	$err_{k.o.}$	δ	$h_{k.o.}$	$err_{k.o.}$
10^{-2}	0.2154	0.040507	10^{-2}	0.2154	0.029492	10^{-2}	0.2154	0.020908
10^{-3}	0.1	0.009690	10^{-3}	0.1	0.007398	10^{-3}	0.1	0.003327
10^{-4}	0.0464	0.002272	10^{-4}	0.0464	0.001485	10^{-4}	0.0464	0.000920
10^{-5}	0.0215	0.000476	10^{-5}	0.0215	0.000374	10^{-5}	0.0215	0.000197
10^{-6}	0.01	0.000105	10^{-6}	0.01	0.000083	10^{-6}	0.01	0.000043
10^{-7}	0.0046	0.000022	10^{-7}	0.0046	0.000015	10^{-7}	0.0046	0.000009

Пример 4.2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t s^{-a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos s \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} t\sin t + \int_0^t s^{1-a}\sin s ds \\ -\int_0^t s^{-a} e^{2s} ds \end{pmatrix}, \quad a \in (0, 1).$$

Точное решение: $x(t) = \left(t\sin t, -\dfrac{e^{2t}}{\cos t} \right)^{\mathrm{T}}$. Результаты расчетов для $k = 1, 2, 3$ приведены в табл. 5–7.

Результаты численных экспериментов подтверждают полученные выше теоретические результаты: при уменьшении шага в 2 раза погрешность уменьшается в 2^{k+1} раза.

Для исследования устойчивости разработанных алгоритмов к возмущению входных данных были проведены численные расчеты тестового примера 4.1 с пилообразным возмущением правой части, т.е. вместо точного значения $f(t_i)$ вектор-функции f задано ее возмущенное значение

$$\tilde{f}(t_i) = f(t_i) + (-1)^i \delta.$$

Результаты численных экспериментов иллюстрируют устойчивость разработанных алгоритмов к возмущениям правой части, измеряемым в норме $|\cdot|_C$ векторного пространства $C([0, 1]; \mathbb{R}^n)$:

$$A(t)\tilde{x}(t) + \int_0^t s^{-a} K(t, s)\tilde{x}(s)ds = \tilde{f}(t),$$

где $\left|\tilde{f}(t) - f(t)\right|_C = |\delta(t)|_C \le \delta$, и коррелируют с результатами, полученными в [14], [28]: для $k = 1$ при уменьшении возмущения в 1000 раз, шаг уменьшается в 10 раз, а погрешность решения в 100 раз, т.е. $|\tilde{x}_i - x(t_i)|_{\mathbb{R}^n} = O(\delta^{\frac{2}{3}})$. В табл. 8, следуя работе [1], значение шага h, при котором погрешность $|\tilde{x}_i - x(t_i)|_{\mathbb{R}^n}$ принимает минимальные значения, называется *квазиоптимальным* шагом и обозначено $h_{k.o.}$.

Далее проиллюстрируем область применения полученных результатов на примере решения содержательной задачи определения долгосрочной стратегии ввода генерирующих электромощностей на основе интегральных уравнений Вольтерра с учетом естественного износа оборудования. Следует отметить, что впервые интегральные модели для описания долгосрочной стратегии ввода мощностей электроэнергитической системы (ЭЭС) России были успешно применены А.С. Апарциным и А.М. Тришечкиным [29] в 1986 г. Позднее последовала серия работ по детальному исследованию таких моделей (см., например, статьи [19], [30] и приведенную там библиографию).

Построение долгострочного прогноза ввода мощностей ЭЭС России осуществляется на основе различных типов математических моделей, различающихся предположениями о показателях эффективности и механизмах старения элементов системы вплоть до исключения нерентабельного оборудования. В статье [30] приводится неклассическое уравнение Вольтерра I рода, описывающее упомянутую задачу электроэнергетики. В данной модели выделяются четыре возрастные группы оборудования: оборудование, функционирующее в системе менее 30 лет, считается новым и работает с полной мощностью; оборудование возраста от 31 до 50 лет работает с коэффициентом эффективности 0.97; оборудование возраста от 51 до 60 лет эксплуатируется на 90 процентов; оборудование, проработавшее более 60 лет, считается устаревшим и выводится из системы. Коэффициенты эффективности каждой возрастной группы были определены методом экспертных оценок. За нуль (год зарождения системы) принят 1950 г.

Пример 4.3. Сформулируем задачу определения долгосрочной стратегии ввода генерирующих электромощностей $x(t)$ в ЭЭС России для достижения роста располагаемой мощности $p(t)$ на 2% на основе интегральных уравнений Вольтерра I рода

$$\int_0^t \mu(t,s)\beta(t,s)x(s)ds = p(t), \quad t \in [0, 100],$$

где $\mu(t,s)$ – коэффициент интенсивности использования в момент времени t единицы мощности, введенной ранее в момент времени s, а $\beta(t,s)$ – относительная скорость создания новых мощностей в момент времени t в расчете на единицу мощности, введенной в момент времени s. Предполагается, что электростанции используются на 100%, т.е. $\mu(t,s) = 1$ при всех $(t,s) \in [0, 100]\times[0, t]$, а безразмерная величина $\beta(t,s)$ изменяется по релаксационному закону

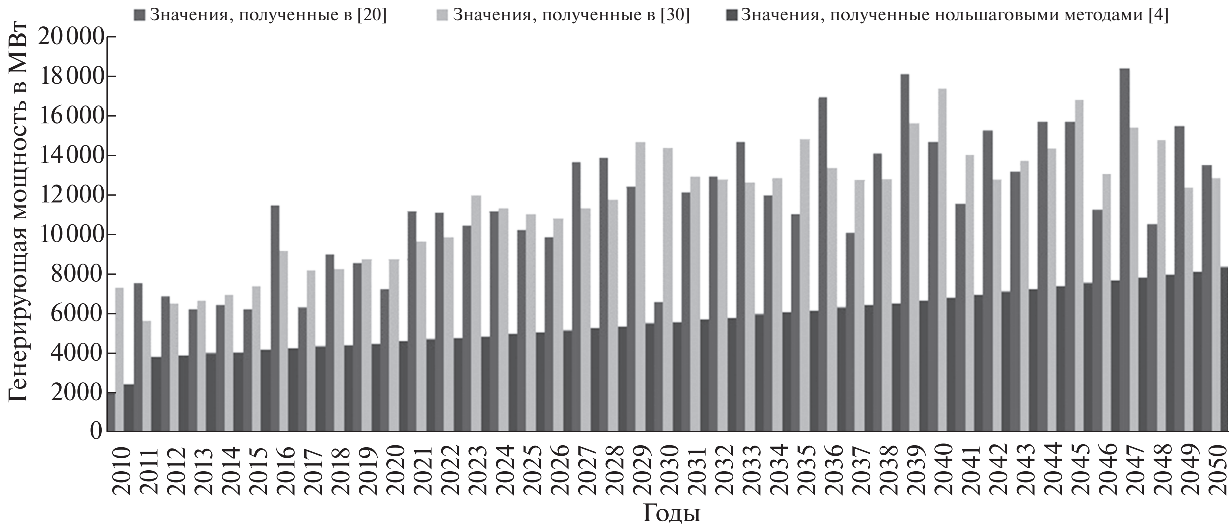
$$\beta(t,s) = \left(\frac{t}{s}\right)^a, \quad a \in (0, 1),$$

а именно, она бесконечна только в пределе $\beta(t,s) \to +\infty$ при $s \to +0$ и любом $t \in (0, 100]$, конечна и убывает с ростом s при каждом фиксированном t, выходя на стационарный режим при $s = t$, т.е. $\beta(t,t) = 1$ при всех $t \in [0, 100]$. Предлагаемый постулат модели соответствует свойствам реального объекта, в частности, правильно описывает как мгновенное поведение ЭЭС (скорость введения генерирующих мощностей конечна), так и долговременный процесс увеличения ее мощности (учитываются затраты энергии на введение новых мощностей). Таким образом, рассматриваемая математическая модель имеет вид уравнения

$$\int_0^t s^{-a}t^a x(s)ds = p(t), \quad t \in [0, 100], \tag{5}$$

которое является частным случаем интегроалгебраического уравнения (1) со слабой граничной особенностью при $n = 1$, $A(t) = 0$, $K(t,s) = t^a$, значит, для проведения расчетов можно применить разработанные выше многошаговые алгоритмы. В условиях $p(t) \in C^1_{[0,100]}$ и

$$\lim_{t\to+0}\frac{p(t)}{t^a} = 0,$$



Фиг. 1. Стратегия вводов генерирующих мощностей для достижения ежегодного роста располагаемой мощности на 2%, МВт.

Фиг. 2. Сравнение численных вводов генерирующих мощностей ЭЭС России с реальными данными, МВт.

точным непрерывным на [0, 100] решением этого уравнения является функция

$$x(t) = p'(t) - a\frac{p(t)}{t}.$$

Для максимального согласования численных результатов с результатами, представленными в [30], при расчетах было выбрано значение 0.0257 параметра a, определяющего коэффициент потери энергии в качестве затрат на введение в ЭЭС новых мощностей. На фиг. 1 отражено сравнение результатов, полученных вводов генерирующих мощностей в ЭЭС России для достижения ежегодного роста располагаемой мощности на 2% с прогнозами, полученными с помощью моделей на основе интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования простейшими квадратурными формулами [30] и многошаговыми методами [20]. Видно, что, согласно расчетам на основе модели (5), потребность в ежегодном вводе генерирующих мощностей значительно меньше. Это вполне ожидаемый результат, поскольку (5) подразумевает использование всего ранее введенного оборудования, работающего с меньшей эффективностью, но, тем не менее, вырабатывающего значительные мощности, которые необходимо восполнять в условиях отказа от старого оборудования. Данная ситуация, как раз, описывается интегральными моделями с переменными верхним и нижним пределами интегрирования и соответственно предполагает ежегодно большего ввода генерирующих мощностей. С другой стороны, при кажущейся наиболее выгодной ситуации с необходимостью ввода меньшего количества генерирующих мощностей возникает необходимость учета финансовых затрат на введение нового и обслуживание старого малоэффективного оборудования. На фиг. 2 представлено сравнение расчетных данных с реальными данными вводов генерирующих мощностей до 2014 г., которое наглядно отображает адекватность модельного уравнения (5) и предложенных алгоритмов численного решения для поставленной содержательной задачи.

Авторы статьи выражают огромную благодарность Е.В. Марковой и И.В. Сидлер, сотрудникам Института систем энергетики имени Л.А. Мелентьева СО РАН, за предоставленные значения вводов генерирующих мощностей до 2010 г., что позволило реализовать численные эксперименты для содержательной задачи (5), провести сравнение результатов численных расчетов с прогнозами ввода генерирующих мощностей с 2010 г. по 2050 г. (см. фиг. 1) и с реальными данными вводов генерирующих мощностей до 2014 г. (см. фиг. 2), а также осуществить анализ эффективности использования рассмотренных в статье уравнений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены линейные интегроалгебраические уравнения со слабой граничной особенностью ядра, для которых сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения, разработаны многошаговые методы численого решения, доказана теорема о сходимости предложенных алгоритмов. Показано применение полученных результатов для решения содержательной задачи в области электроэнергетики. Дальнейшее направление работы связано с обоснованием устойчивости предложенных алгоритмов к возмущению входных данных и распространения полученных результатов на случай слабосингулярных интегроалгебраических уравнений с функциональными пределами интегрирования и запаздыванием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. 193 с.
2. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. Cambridge: Cambridge Unversity Press, 2004. 597 p.
3. *Biazar J., Ali Asadi M.* RBFs for integral equations with a weakly singular kernel // American Journal of Applied Mathematics. 2015. V. 3. 6. P. 250–255.
4. *Mokhtary P.* Discrete collocation method for Volterra type weakly singular integral equations with logarithmic kernels // Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization. 2018. V. 8. 2. P. 95–117.
5. *Kolk M., Pedas A.* Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernels which may have a boundary singularity // Math. Model. and Analysis. 2009. V. 14. P. 79–89.
6. *Korh O., März R., Praetorius D., Weinmüller E.* Collocation methods for index 1 DAEs with a singularity of the first kind // Math. of Comput. 2010. V. 79. 269. P. 281–304.
7. *Auzinger W., Lehner H., Praetorius D., Weinmüller E.* An efficient asymptotically correct error estimator for collocation solutions to singular index-1 DAEs // Bit Numerical Math. 2011. V. 51. P. 43–65.
8. *Bulatov M.V., Lima P.M., Weinmüller E.B.* Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations // Central European Journal of Math. 2014. V. 12. 2. P. 308–321.
9. *Булатов М.В., Будникова О.С.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия Математика. 2015. Т. 13. С. 3–15.
10. *Будникова О.С., Булатов М.В.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 5. С. 829–839.
11. *Pishbin S., Ghoreishi F., Hadizadeh M.* The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: the numerical treatments // J. of Comput. and Appl. Math. 2013. V. 245. № 1. P. 121–132.
12. *Чистяков В.Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах. Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.
13. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. 279 с.
14. *Будникова О.С.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Иркутск, 2015. 125 с.
15. *Balakumar V., Murugesan K.* Numerical solution of Volterra integral-algebraic equations using block pulse functions // Appl. Math. and Comput. 2015. V. 263. P. 165–170.

16. *Farahani M.S., Hadizadeh M.* Direct regularization for system of integral-algebraic equations of index-1 // Inverse Problems in Science and Engng. 2018. V. 26. 5. P. 728–743.
17. *Farahani M.S., Hadizadeh M., Bulatov M.V., Chistyakova E.V.* Adaptive iterative regularization schemes for two-dimensional integral-algebraic systems // Math. Meth. in the Appl. Science. 2019. V. 42. 18. P. 6635–6647.
18. *Sidorov D.* Integral dynamical models. Singularities, signals and control. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, Vol. 87. Hackensack, New Jersey: World Scientific Publishing, 2015. 243 p.
19. *Маркова Е.В., Сидлер И.В., Труфанов В.В.* О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике // Автоматика и телемехан. 2011. № 7. С. 20–28.
20. *Ботороева М.Н.* Моделирование развивающихся систем на основе интегральных уравнений Вольтерра. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Иркутск, 2019. 128 с.
21. *Sidorov D., Muftahov I., Karamov D., Tomin N., Panasetsky D., Dreglea A., Liu F., Foley A.* A Dynamic analysis of energy storage with renewable and diesel generation using Volterra equations // IEEE Transactions on Industrial Informatics. 2020. V. 16. 5. P. 3451–3459.
22. *Ботороева М.Н., Булатов М.В.* Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия Математика. 2017. Т. 20. С. 3–16.
23. *Булатов М.В.* О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 3. С. 360–372.
24. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
25. *Weiss R., Anderssen R.S.* A product integration methods for a class of singular first kind Volterra equations // Numerische Mathematik. 1972. V. 18. 5. P. 442–456.
26. *Тен Мен Ян*. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Иркутск, 1985. 215 с.
27. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia: SIAM, 1985. 227 p.
28. *Булатов М.В., Будникова О.С.* Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений // Вестник Южно-Уральского гос. университета. Серия Матем. моделирование и программирование. 2013. Т. 6. № 4. С. 5–14.
29. *Апарцин А.С., Тришечкин А.М.* Применение моделей В.М. Глушкова для моделирования долгосрочных стратегий развития ЕЭЭС // Тезисы докл. Всесоюзной конференции “Курс-4”. Рига: ЛГУ, 1986. С. 17–19.
30. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемехан. 2013. № 6. С. 3–16.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1839–1849

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ НА СТЫКЕ ДВУХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. В. Глушко[1,*], Е. А. Логинова[1,]**

[1] *394018 Воронеж, Университетская пл., 1, ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет, Россия*

**e-mail: kuchp2@math.vsu.ru*

***e-mail: loginova@vsu.ru*

Поступила в редакцию 02.11.2020 г.
Переработанный вариант 02.11.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Статья посвящена изучению нестационарной задачи теплопроводности в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие трещины, т.е. неоднородных условий сопряжения. В верхней и нижней полуплоскостях задаются уравнения распространения тепла, которые дополняются условиями на разность температур и тепловых потоков между верхним и нижним берегами трещины. Также заданы однородные начальные условия. В работе приводятся интегральные представления компонент решения задачи, доказывается выполнение граничных и начальных условий. Для решения поставленной задачи после проведения замены переменных строятся четные продолжения изучаемых функций на верхнюю полуплоскость. Осуществляется переход к обобщенной задаче. Затем к ней применяются преобразование Фурье по пространственным переменным и преобразование Лапласа по времени, что позволяет использовать свойства указанных преобразований для получения решения. Применение обратных преобразований способствует получению интегральных представлений решения исходной задачи. Статья является первой из двух работ. Во второй работе будут выделены сингулярные компоненты асимптотических разложений решения по расстоянию до линии сопряжения. Библ. 7.

Ключевые слова: нестационарная задача теплопроводности, условия типа трансмиссии, разрез-трещина, задача теплопроводности, неоднородный коэффициент теплопроводности, влияние времени, различные уравнения в верхней и нижней полуплоскостях.

DOI: 10.31857/S0044466921110077

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже на протяжении десятилетий многие ученые – математики и физики – сосредоточены на построении и изучении свойств математических моделей, описывающих характеристики материалов с трещинами (см. [1]–[3]). Композитные материалы все чаще используются в различных технических системах, и возникновение трещин в подобных материалах, безусловно, меняет их свойства и поведение системы в целом, что обеспечивает актуальность и необходимость изучения подобных задач не только в настоящее время, но и в обозримом будущем. Одними из перспективных являются задачи теплопроводности, упругости, теплоупругости в материалах с трещинами. Было построено большое количество таких моделей (см. [4]–[6]), различающихся, в том числе, областями пространства, моделирующими материал, количеством, расположением, конфигурацией трещин и т.д.

Настоящая работа отличается от изученных ранее задач тем, что в ней рассматривается случай нестационарного распределения тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие конечной трещины.

Введем обозначения. Пусть

$$\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}, \quad \mathbb{R}^2_- = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 < 0\}.$$

Предполагается, что коэффициенты внутренней теплопроводности заданы равенствами $k_1(x) = c_1 \exp(k_1 x)$ при $x \in \mathbb{R}^2_+$; $k_2(x) = c_2 \exp(k_2 x)$ при $x \in \mathbb{R}^2_-$, где c_1, c_2 — произвольные, отличные от нуля константы, k_1, k_2 — произвольные положительные константы.

Тогда нестационарные уравнения теплопроводности в нижней и верхней полуплоскостях имеют вид

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x_2^2} + k_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x_2}\right) = 0, \tag{1}$$

$n = 1, 2$; при $n = 1$ $x \in \mathbb{R}^2_+$, $t \in (0; +\infty)$; при $n = 2$ $x \in \mathbb{R}^2_-$, $t \in (0; +\infty)$.

Уравнения (1) дополняются граничными условиями сопряжения

$$u_1(x_1, +0, t) - u_2(x_1, -0, t) = q_0(x_1, t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0, t)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0, t)}{\partial x_2} + \frac{k_1}{2} u_1(x_1, +0, t) - \frac{k_2}{2} u_2(x_1, -0, t) = q_1(x_1, t), \tag{3}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Здесь $q_0(x_1, t)$ и $q_1(x_1, t)$ — некоторые известные функции. Условие (2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берега трещины, а условие (3) — разность между тепловыми потоками через эти берега.

Также заданы начальные условия

$$u_n(x_1, x_2, +0) = 0, \tag{4}$$

где $n = 1, 2$, при $n = 1$ $x \in \mathbb{R}^2_+$, при $n = 2$ $x \in \mathbb{R}^2_-$.

Предполагаются выполненными условия согласования $q_0(x_1, 0) = q_1(x_1, 0) = 0$.

Введем обозначение $R_n = ((s_1^2 + 0.25k_n^2) + a^{-2}p)^{0.5}$, $n = 1, 2$.

Основной результат работы сформулируем в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть функции* $q_0(x_1, t)$ *и* $q_1(x_1, t)$ *равны нулю при* $x_1 \notin [-1, 1]$ *и* $t \notin [0, T]$, $T > 0$, *существуют ограниченные по* $x_1 \in [-1, 1]$, $t \ge 0$ *производные* $\dfrac{\partial q}{\partial x_1}, \dfrac{\partial q}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t}, \dfrac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2}$, *выполнены условия согласования* $q_0(x_1, 0) = q_1(x_1, 0) = 0$.

Тогда решение задачи (1)–(4) задается формулами

$$\begin{gathered} u_n(x_1, x_2, t) = 0.25\pi^{-2} i \exp(-0.5 k_n x_2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(\int_0^{\infty} \int_{-1}^{1} q_1(x_1, t) e^{-pt} e^{i x_1 s_1} dx_1 dt - \right. \\ \left. - R_{3-n} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{1} q_0(x_1, t) e^{-pt} e^{i x_1 s_1} dx_1 dt \right) (R_1 + R_2)^{-1} (\exp[-|x_2| R_n]) e^{-i x_1 s_1 - i x_2 s_2 + pt} dp ds_1; \end{gathered} \tag{5}$$

где $n = 1, 2$, $\sigma > -a^2\left(|s_1|^2 + 0.5k^2\right)$, $k = \min(k_1, k_2)$.

Выполняется граничное условие (2), граничное условие (3) выполнено в смысле главного значения. Также выполнены начальные условия (4).

Для доказательства теоремы 1 были сформулированы и доказаны вспомогательные утверждения.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(4), СВЕДЕНИЕ К ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ, ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Используя замены переменных $u_p(x) = \exp(-0.5k_p x_2)v_p(x),\ p = 1, 2,\ v_2(x_1, x_2, t) = z(x_1, -x_2, t)$, перепишем задачу (1)–(4) в виде

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_1^2 v_1\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_1^2 z\right) = 0, \tag{7}$$

$$v_1(x_1, +0, t) - z(x_1, +0, t) = q_0(x_1, t), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_1(x_1, +0, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial z(x_1, +0, t)}{\partial x_2} = q_1(x_1, t), \tag{9}$$

$$v_1(x_1, x_2, +0) = 0, \tag{10}$$

$$z(x_1, x_2, +0) = 0. \tag{11}$$

Обозначим через $\hat{V}_1(x, t)$ и $\hat{V}_2(x, t)$ четное продолжение функций $v_1(x, t)$ и $z(x, t)$ на нижнюю полуплоскость, т.е.

$$\hat{V}_1(x, t) = \begin{cases} v_1(x, t), & x_2 > 0, \\ v_1(x_1, -x_2, t), & x_2 < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \hat{V}_2(x, t) = \begin{cases} z(x, t), & x_2 > 0, \\ z(x_1, -x_2, t), & x_2 < 0. \end{cases}$$

Пусть вне трещины $l = [-1; 1] \times \{0\}$ на границе полуплоскостей $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ – прямой $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$ температурные поля и тепловые потоки совпадают.

Тогда

$$\frac{\partial \hat{V}_1(x, t)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x, t)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial v_1(x_1, -x_2, t)}{\partial x_2}, & x_2 < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \hat{V}_2(x, t)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial z(x, t)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial z(x_1, -x_2, t)}{\partial x_2}, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Пусть также функции $\hat{V}_1(x, t), \hat{V}_2(x, t)$ равны нулю при $t < 0$.

Тогда, вычислив обобщенные производные, в $S'(\mathbb{R}^3)$ перейдем к обобщенной задаче

$$\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_n^2 \hat{V}_1\right) = -a^2\left[\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} \delta(x_2) - a^2[\hat{V}_n]_{x_2=0}\delta'(x_2), \tag{12}$$

где $n = 1, 2$, $\delta(x_2)$ – дельта-функция Дирака.

Здесь $[f]_{x_2=0} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}(f(x_1, \varepsilon, t) - f(x_1, -\varepsilon, t))$.

Используя свойства четности функций $\hat{V}_1(x, t)$ и $\hat{V}_2(x, t)$, перепишем задачу (12) в виде

$$\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_n^2 \hat{V}_n\right) = -2a^2 \frac{\partial \hat{V}_n(x_1, +0, t)}{\partial x_2}\delta(x_2), \quad n = 1, 2. \tag{13}$$

Применяя к равенствам (13) преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по переменным x_1, x_2 и, используя свойства указанных преобразований, перейдем к задаче

$$\tilde{\hat{V}}_n(s, p)(p + a^2(|s|^2 + 0.25k_n^2)) = -2a^2 w_n^1(s_1, p), \tag{14}$$

где $n = 1, 2$, $L_{t\to p}F_{x\to s}\hat{V}_n = \tilde{\hat{V}}_n(s, p)$, $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\left[\dfrac{\partial \hat{V}_n(x_1, +0, t)}{\partial x_2}\right] = w_n^1(s_1, p)$.

Утверждение 1. *Справедливы соотношения*

$$w_n^1(s_1, p) = -R_1 w_n^0(s_1, p), \tag{15}$$

где $n = 1, 2$, $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[\hat{V}_n(x_1, +0, t)] = w_n^0(s_1, p)$.

Доказательство. Отметим, что

$$L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[\hat{V}_n] = L_{t\to p}F^{-1}_{s_2\to x_2}[F_{x\to s}\hat{V}_n] = 0.5\pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_2s_2}L_{t\to p}[F_{x\to s}[\hat{V}_n]]ds_2, \tag{16}$$

откуда следует равенство

$$L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[\hat{V}_n(x_1,+0,t)] = 0.5\pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{t\to p}[F_{x\to s}[\hat{V}_n]]ds_2. \tag{17}$$

Выражая из соотношений (14) $\tilde{\hat{V}}_n(s,p)$ и подставляя в (17) с использованием введенных выше обозначений, получаем

$$\tilde{\hat{V}}_n(s,p) = -2a^2w_n^1(s,p)\left(p + a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right)\right). \tag{18}$$

Таким образом,

$$L_{t\to p}F_{x\to s}\hat{V}_n(x_1,x_2,t) = -2a^2L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial\hat{V}_n(x_1,+0,t)}{\partial x_2}\right]\left(p + a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right)\right). \tag{19}$$

Проинтегрировав левую и правую части (19) по переменной s_2 в интервале $(-\infty;\infty)$, придем к соотношениям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{t\to p}F_{x\to s}\left[\frac{\partial\hat{V}_n(x_1,+0,t)}{\partial x_2}\right]ds_2 = -2a^2L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds_2}{p + a^2(s_1^2 + s_2^2 + 0.25k_n^2)} =$$
$$= -2\pi R_n^{-1}L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial\hat{V}_n(x_1+0,t)}{\partial x_2}\right], \quad n = 1, 2.$$

Из последних равенств и равенств (16) вытекают представления (15).

Утверждение 2. *Решения уравнений* (14) *можно записать в виде*

$$\tilde{\hat{V}}_n(s,p) = \frac{-2R_n}{a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right) + p}\left(\frac{p_1(s_1,p) - R_{3-n}p_0(s_1,p)}{R_1 + R_2}\right), \tag{20}$$

где $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[q_0(x,t)] = p_0(s_1,p)$, $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[q_1(x,t)] = p_1(s_1,p)$.

Доказательство. Применим к равенствам (8), (9) преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по переменным x_1, x_2, получим соотношения

$$w_1^0(s_1,p) - w_2^0(s_1,p) = p_0(s_1,p), \tag{21}$$

$$w_1^1(s_1,p) + w_2^1(s_1,p) = p_1(s_1,p). \tag{22}$$

Выражая из равенств (15), (21), (22) функции $w_1^0(s_1,p)$, $w_2^0(s_1,p)$, $w_1^1(s_1,p)$, $w_2^1(s_1,p)$ через $p_0(s_1,p)$ и $p_1(s_1,p)$ и подставляя в (14), приходим к выражениям (20).

Отметим, что функции $\hat{V}_1 = L^{-1}_{p\to t}F^{-1}_{s\to x}\tilde{\hat{V}}_1$, $\hat{V}_2 = L^{-1}_{p\to t}F^{-1}_{s\to x}\tilde{\hat{V}}_2$. Используя представления (20), перейдем к равенствам

$$\hat{V}_n = 0.25\pi^{-3}i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R_n\left(a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right) + p\right)(R_1 + R_2)^{-1}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-1}^{1} q_1(x_1,t)e^{-pt}e^{ix_1s_1}dx_1dt - R_{3-n}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-1}^{1} q_0(x_1,t)e^{-pt}e^{ix_1s_1}dx_1dt\right)e^{-ix_1s_1-ix_2s_2+pt}dpds_2ds_1, \tag{23}$$

из которых, вычислив интеграл по переменной s_2 и проведя обратную замену, получим выражения (5).

3. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Лемма 1. *Пусть функция* $q(x_1,t)$ *равна нулю при* $x_1 \notin [-1, 1]$ *и финитна по* t: $\operatorname{supp} q(x_1,t) \subseteq [0,T]$. *Пусть также существуют ограниченные по* $x_1 \in [-1, 1]$, $t \ge 0$ *производные* $\dfrac{\partial q}{\partial x_1}, \dfrac{\partial q}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t}, \dfrac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2}$ *и выполнено условие согласования* $q(x_1,0) = 0$.

Тогда функция $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}q(x_1,t)$ является аналитической по p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge -\varepsilon_0$ и при $\operatorname{Re} p = -0.5\varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\left|L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}q(x_1,t)\right| \le c\left((1+|s_1|)((0.25k^2+s_1^2)^2+\operatorname{Im}^2 p)\right)^{-1} \times \\ \times\left(\left\|\left|q(x_1,0)\right\|\right| + \left\|\left|\frac{\partial q(x_1,0)}{\partial t}\right\|\right| + \left\|\left|\frac{\partial q}{\partial t}\right\|\right| + \left\|\left|\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\partial t}\right\|\right| + \left\|\left|\frac{\partial^3 q}{\partial x_1\partial t^2}\right\|\right|\right), \tag{24}$$

где c, ε_0 – положительные константы,

$$\left\|\left|f(x_1,t)\right\|\right| = \max_{x_1\in[-1,1]}\int_0^\infty |f(x_1,t)|dt, \quad \|g(x_1)\| = \max_{x_1\in[-1,1]}|g(x_1)|, \quad k = \min\{k_1,k_2\}.$$

Доказательство. Сначала докажем выполнение неравенства

$$|\hat{q}(s_1,p)| \le \frac{c}{1+|s_1|}\left(\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)| + \max_{x_1\in[-1,1]}\left|\frac{\partial r(x_1,p)}{\partial x_1}\right|\right), \tag{25}$$

где

$$\hat{q}(s_1,p) = F_{x_1\to s_1}L_{t\to p}q(x_1,t), \quad r(x_1,p) = L_{t\to p}q(x_1,t).$$

В силу представления

$$\hat{q}(s_1,p) = \int_{-1}^{1} e^{ix_1s_1}r(x_1,p)dx_1,$$

получаем:

1) при $|s_1| < 1$ оценку

$$|\hat{q}(s_1,p)| \le 2\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)| \le 4(1+|s_1|)^{-1}\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)|, \tag{26}$$

2) при $|s_1| \ge 1$ оценку

$$|\hat{q}(s_1,p)| \le \frac{1}{|s_1|}\left|e^{ix_1}r(1,p) + e^{-ix_1}r(-1,p) - \int_{-1}^{1}\frac{\partial r(x_1,p)}{\partial x_1}e^{ix_1s_1}dx_1\right| \le \\ \le \frac{4}{1+|s_1|}\left(\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)| + \max_{x_1\in[-1,1]}\left|\frac{\partial r(x_1,p)}{\partial x_1}\right|\right). \tag{27}$$

Из неравенств (26) и (27) следует, что при всех $x_1 \in \mathbb{R}$ выполняется оценка (25).

Перейдем теперь к изучению функций $\dfrac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}$, $m = 0, 1$.

В силу представлений

$$\frac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m} = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}dt$$

и оценки (25) функции $\dfrac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}$ – аналитические в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge -\varepsilon_0$ при любом $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\varepsilon_0 = 0.25k^2 + s_1^2$, где $k = \min\{k_1, k_2\}$. Тогда оценки функций $\dfrac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}$ достаточно провести при $\operatorname{Re} p = -\varepsilon_0$. Получим

$$\left|\frac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}\right| = \left|-\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{\partial^m q(x_1,p)}{\partial x_1^m} de^{-pt}\right| = \frac{1}{|p|}\left|\frac{\partial^m q(x_1,0)}{\partial x_1^m} - \int_0^\infty \frac{\partial^m \partial q(x_1,p)}{\partial x_1^m \partial t} e^{-pt} dt\right| \le$$
$$\le \frac{1}{|p|^2}\left(\left|\frac{\partial^{m+1}\partial q(x_1,0)}{\partial x_1^m \partial t}\right| + \int_0^\infty \left|\frac{\partial^{m+2}\partial q(x_1,p)}{\partial x_1^m \partial t^2}\right| dt\right). \tag{28}$$

Из оценок (25) и (28) следует утверждение леммы.

Введем обозначения

$$\hat V_n^1(x,t) = -(2\pi)^2 i \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat q_1(s_1,p)\exp\left(-|x_2| R_n\right) e^{-ix_1s_1 + pt}(R_1 + R_2)^{-1} dp ds_1.$$

$$\hat V_n^0(x,t) = (-1)^n (2\pi)^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat q_0(s_1,p)\exp\left(-|x_2| R_n\right)(R_1 + R_2)^{-1} R_{3-n} e^{-ix_1s_1 + pt} dp ds_1,$$

с учетом которых, а также используя обозначения, введенные в лемме 1, и вычисляя интеграл по переменной s_2, получим, что представления (23) можно записать в виде $\hat V_n(x_1,t) = \hat V_n^1(x_1,t) + \hat V_n^0(x_1,t)$, где $n = 1, 2$.

Лемма 2. *Пусть* $p = -0.5\varepsilon_0 + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $c > 0$ *справедлива оценка*

$$|R_1 + R_2| \ge c(\xi^2 + s_1^4 + 1)^{0.25}. \tag{29}$$

Доказательство. Отметим, что в силу оценки $0.25k_n^2 - 0.5\varepsilon_0 > 0$, выполнено вложение

$$\varphi_n = \arg(R_n^2) = \arg\left(\left(s_1^2 + \frac{k_n^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right) + \frac{i\xi}{a^2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом справедливо представление

$$\sqrt{\left(s_1^2 + \frac{k_n^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right) + \frac{i\xi}{a^2}} = \left(\left(s_1^2 + \frac{k_n^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4}\right)^{0.25}\left(\cos\frac{\varphi_n}{2} + i\sin\frac{\varphi_n}{2}\right),$$

используя которое, получаем цепочку преобразований

$$\left|(s_1^2 + 0.25k_1^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5} + (s_1^2 + 0.25k_2^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5}\right| =$$
$$= \left|\left\{\left[\left(s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4}\right]^{0.25}\cos 0.5\varphi_1 + \left[\left(s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 \cos 0.5\varphi_2\right]^{0.25}\right\} + \right.$$
$$\left. + i\left\{\left[\left(s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4}\right]^{0.25}\sin\frac{\varphi_1}{2} + \left[\left(s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 \sin\frac{\varphi_2}{2}\right]^{0.25}\right\}\right| \ge$$
$$\ge \left|\operatorname{Re}\left((s_1^2 + 0.25k_1^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5} + (s_1^2 + 0.25k_2^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5}\right)\right| =$$

$$= \left| \left(\left(s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right)^{0.25} \cos\frac{\varphi_1}{2} + \left(\left(s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right)^{0.25} \cos\frac{\varphi_1}{2} \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \left[\left(s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right]^{0.25} + \left[\left(s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right]^{0.25} \right| \geq c(1 + s_1^4 + \xi^2)^{0.25}.$$

Таким образом, лемма доказана.

На основе неравенств (24)–(29) можно сделать вывод об оценке функции $\hat{V}_n^1(x,t)$, справедливой при всех $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$:

$$\left|\hat{V}_n^1(x_1,t)\right| \leq cK \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|s_1|)^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-1}(1+s_1^4+\xi^2)^{-0.25} e^{-0.5\varepsilon_0 t} d\xi ds_1 \leq$$
$$\leq cKe^{-0.5\varepsilon_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|s_1|)^{-1}(1+s_1^4)^{-0.25}ds_1\int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^{-1}d\xi \leq \tilde{c}e^{-0.5\varepsilon_0 t} \leq \tilde{c}, \tag{30}$$

где

$$K = \frac{16}{\varepsilon_1^2}\left(\left\| \frac{\partial q(\bullet,0)}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 q(\bullet,t)}{\partial x_1 \partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2} \right\| \right), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad n = 1, 2.$$

Из оценки (30) на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла заключаем, что функции $\hat{V}_n^1(x_1,t)$ непрерывны по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$ (см. [7]).

Тогда

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to +0} [\hat{V}_1^1(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_1^2(x_1,\varepsilon_2,t)] = \hat{V}_1^1(x_1,0,t) - \hat{V}_1^2(x_1,0,t) = 0,$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to +0} [\hat{V}_1(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_2(x_1,\varepsilon_2,t)] = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to +0} [\hat{V}_1^0(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_2^0(x_1,\varepsilon_2,t)]. \tag{31}$$

Перейдем к изучению поведения функций $\hat{V}_n^0(x_1,x_2,t)$ при $x_2 \to +0$.

Отметим справедливость равенства

$$R_1(R_1+R_2)^{-1} - 0.5 = 0.125(k_1^2 - k_2^2)(R_1+R_2)^2.$$

Будем рассматривать функции

$$\hat{V}_n^{01} = 0.25\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} 0.125\hat{q}_0(s_1,p)(k_2^2 - k_1^2)\exp\left(-|x_2| R_n\right)(R_1+R_2)^{-2} e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1,$$

для которых выполнено равенство $\hat{V}_1^{01}(x_1,0,t) = \hat{V}_2^{01}(x_1,0,t)$.

Тогда

$$\lim_{x_2 \to +0} \hat{V}_1 = -\lim_{x_2 \to +0} 0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1,p)\exp\left(-|x_2| R_1\right) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1.$$

Пусть

$$-0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1,p)\exp(-|x_2| R_1) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1 = \hat{u}_1^{01}.$$

Функцию $\hat{u}_1^{01}$ можно представить в виде суммы $\hat{u}_1^{01} = \hat{u}_1^{010} + \hat{u}_1^{011}$, где

$$\hat{u}_1^{010} = -0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1,p) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1 = 0.5F_{s_1 \to x_1}^{-1} L_{p \to t}^{-1}\left[L_{t \to p} F_{x_1 \to s_1}[q_0(x_1,t)]\right] = 0.5q_0(x_1,t),$$

$$\hat{u}_1^{011} = -0.125\pi^{-2}i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-0.25k^2-s_1^2-i\infty}^{-0.25k^2-s_1^2+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)(\exp(-|x_2|R_1)-1)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1,$$

$$p = -0.25k^2 - s_1^2 + i\xi.$$

Из (24) следует оценка $|\hat{q}_0(s_1,p)| \le c(1+|s_1|)^{-1}((0.25k^2+s_1^2)^2+\xi^2)^{-1}$.

Отметим также, что при любом $\varepsilon \in (0;1)$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}|\exp(-|x_2|R_1)-1| \le |\exp(-|x_2|R_1)-1|^{\varepsilon} \le c|x_2|^{\varepsilon}((1+s_1^2)^2+\xi^2)^{0.5\varepsilon}\times \\ \times\int\limits_0^1\exp(-|x_2|\operatorname{Re}R_1z)dz \le c|x_2|^{\varepsilon}((1+s_1^2)^2+\xi^2)^{0.5\varepsilon},\end{gathered} \tag{32}$$

которые выполнены в силу неравенства $\operatorname{Re}R_1 \ge 2^{-0.5}|R_1| > 0$ и, как следствие, $|\exp(-|x_2|R_1)| \le 1$.

Из оценки (32) и утверждения леммы 1 при $p = -s_1^2 - 0.25k_1^2 + i\xi$ вытекает оценка

$$|\hat{q}_0(s_1,p)|\cdot|\exp(-|x_2|R_1)-1| \le c_3|x_2|^{-\varepsilon}(1+|s_1|)^{-1-\varepsilon}(1+\xi^2)^{\varepsilon-1}. \tag{33}$$

Пусть $\varepsilon = 0.25$, тогда, используя (33), получаем

$$|\hat{q}_0(s_1,p)|\cdot|\exp(-|x_2|R_1)-1| \le c|x_2|^{\varepsilon}(1+|s_1|)^{-1.125}(1+\xi^2)^{-0.75}.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$|\hat{u}_1^{011}(x_1,x_2,t)| \le c|x_2|^{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|s_1|)^{-1.125}(1+\xi^2)^{-0.75}d\xi ds_1 \le \tilde{c}|x_2|^{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2\to+0}\hat{u}_1^{011}(x_1,x_2,t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x_2\to+0}\hat{u}_1^{01} = \lim_{x_2\to+0}\hat{u}_1^{010} = 0.5q_0(x_1,t).$$

Тогда $\lim\limits_{x_2\to+0}\hat{V}_1(x_1,x_2,t) = 0.5q_0(x_1,t)$. Очевидно, что $\lim\limits_{x_2\to+0}\hat{V}_2(x_1,x_2,t) = -0.5q_0(x_1,t)$.

Итак, выполнено условие

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}(\hat{V}_1(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_2(x_1,\varepsilon_2,t)) = q_0(x_1,t). \tag{34}$$

Перейдем к изучению $\dfrac{\partial\hat{V}_n(x,t)}{\partial x_2}$, $n = 1, 2$. Отметим, что $\dfrac{\partial\hat{V}_n(x,t)}{\partial x_2}$ при $x_2 > 0$ можно представить в виде суммы:

$$\frac{\partial\hat{V}_n(x,t)}{\partial x_2} = \hat{W}_n^1(x,t) + \hat{W}_n^0(x,t), \tag{35}$$

где

$$\hat{W}_n^1(x,t) = -0.25\pi^{-2}i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_1(s_1,p)R_n\exp(-|x_2|R_n)R_1^{-1}R_2^{-1}e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1, \tag{36}$$

$$\hat{W}_n^0(x,t) = (-1)^{n+1}0.25\pi^{-2}i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\frac{\hat{q}_0(s_1,p)R_1R_2}{R_1+R_2}\exp(-|x_2|R_n)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1. \tag{37}$$

Заметим, что представление $\hat{W}_1^1(x,t)$ совпадает с представлением $\hat{V}_1^0(x,t)$, а представление $\hat{W}_2^1(x,t)$ совпадает с представлением $-\hat{V}_2^0(x,t)$ с заменой функции $\hat{q}_0$ на $\hat{q}_1$. Откуда следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\hat{W}_1^1(x_1,\varepsilon,t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\hat{W}_0^1(x_1,\varepsilon,t) = 0.5q_1(x_1,t),$$

если q_1 удовлетворяет тем же условиям, что и q_0 при изучении $\hat{V}_n^0(x,t)$.

Из вышесказанного можно сделать вывод о том, что

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}[\hat{W}_1^1(x_1,\varepsilon_1,t)+\hat{W}_2^1(x_1,\varepsilon_2,t)]=q_1(x_1,t). \tag{38}$$

Рассмотрим теперь $\hat{W}_n^0(x,t)$, $n=1,2$. Отметим выполнение равенства

$$R_1R_2(R_1+R_2)^{-1}-0.25(R_2+R_1)=(64)^{-1}(k_2^2-k_1^2)(R_1+R_2)^{-3}.$$

При выполнении условий леммы 2 из последнего тождества вытекает оценка

$$|G(s_1,p)|\le c(\xi^2+s_1^4+1)^{-0.75},\quad p=-0.5\varepsilon_2+i\xi,\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{39}$$

где $G(s_1,p)=R_1R_2(R_1+R_2)^{-1}-0.25(R_2+R_1)$.

Функцию $\hat{W}_n^0(x,t)$ представим в виде суммы $\hat{W}_n^0(x,t)=Y_n^1(x,t)+Y_n^2(x,t)$, где

$$Y_n^1(x,t)=(-1)^{n+1}0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)(R_1+R_2)\exp(-|x_2|R_n)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1, \tag{40}$$

$$Y_n^2(x,t)=(-1)^{n+1}\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)G(s_1,p)\exp(-|x_2|R_n)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1. \tag{41}$$

Изучим сначала выражение (41).

Лемма 3. *Пусть для функции $q_0(x_1,t)$ выполнены условия леммы 1. Тогда $Y_n^2(x,t)$ являются непрерывными по переменным $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\ge 0$, $t\ge 0$ и*

$$\lim_{x_2\to+0}(Y_1^2(x,t)+Y_2^2(x,t))=0. \tag{42}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0=(s_1^2+0.25k_n^2)a^2$, значит, $R_n^2=s_1^2+0.25k_n^2-0.5s_1^2-0.125k_n^2+a^{-2}i\xi\ge$ $\ge 0.5s_1^2+0.125k_n^2+a^{-2}i\xi$, $\mathrm{Re}(R_n^2)>0$ и, как в лемме 2, $|\exp(-|x_2|R_n)|\le 1$.

Заметим также, что

$$(1+|s_1|)^{-1}(1+s_1^4+\xi^2)^{-1.75}\le(1+|s_1|)^{-1}(1+s_1^4)^{-0.25}(1+\xi^2)^{-1.5}.$$

Таким образом, выполнена оценка

$$|Y_n^2(x,t)|\le c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+|s_1|)(1+s_1^4+\xi^2)^{1.75}}d\xi ds_1\le c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1.5}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^{1.25}}<\infty. \tag{43}$$

Оценка (43) на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла доказывает утверждение леммы 3 в части непрерывности функций $Y_n^2(x,t)$, $n=1,2$.

Заметим, что тогда выполнено равенство

$$\lim_{x_2\to+0}Y_2^2(x,t)=-0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)G(s_1,p)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1=-\lim_{x_2\to+0}Y_1^2(x,t),$$

из которого следует (42). Лемма доказана.

Из леммы 3 можно сделать вывод о том, что

$$\lim_{x_2\to+0}(\hat{W}_2^0(x,t)+\hat{W}_1^0(x,t))=\lim_{x_2\to+0}(Y_2^1(x,t)+Y_1^1(x,t)). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь функции, заданные равенством (40). Отметим, что для суммы интегралов $Y_n^1(x,t)$, $n=1,2$, справедливо представление

$$\begin{aligned}|Y_1^1(x,t)+Y_2^1(x,t)|=-0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)(R_1+R_2)(\exp(-|x_2|R_2)-\\-\exp(-|x_2|R_1))e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1.\end{aligned} \tag{45}$$

Запишем разность экспонент в представлении (45) в виде интеграла по отрезку l, соединяющему точки x_2R_2 и x_2R_1 комплексной плоскости. Также как и при выводе оценки (43), отметим, что $\operatorname{Re}(x_2R_n) > 0$, поэтому для любой точки $z \in l$ имеем $\operatorname{Re} z > 0$, откуда $|\exp(-z)| \le 1$. Отметим, что $\operatorname{Re} R_n > 0$. Прибавляя и отнимая необходимые слагаемые, получаем цепочку преобразований

$$\begin{gathered}
\exp(-x_2R_2) - \exp(-x_2R_1) = \\
= \left|(e^{-x_2 \operatorname{Re} R_2} - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1})\cos \operatorname{Im} R_2x_2 + e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1}(\cos \operatorname{Im} R_2x_2 - \cos \operatorname{Im} R_1x_2) -\right. \\
\left. - i(e^{-x_2 \operatorname{Re} R_2} - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1})\sin \operatorname{Im} R_2x_2 - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1}(\sin \operatorname{Im} R_2x_2 - \sin \operatorname{Im} R_1x_2)\right| = \\
= \left|x_2 \operatorname{Re}(R_2 - R_1)e^{-x_2\Theta_1} \cos \operatorname{Im} R_2 - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1} x_2 \operatorname{Im}(R_2 - R_1)\sin \operatorname{Im} \Theta_2 x_2 -\right. \\
\left. - ix_2 \operatorname{Re}(R_2 - R_1)e^{-x_2\Theta_3} \sin \operatorname{Im} R_2 - ie^{-x_2 \operatorname{Re} R_1} \operatorname{Im}(R_2 - R_1)\cos \Theta_4 x_2\right| \le \\
\le 2x_2(|\operatorname{Re}(R_2 - R_1)| + |\operatorname{Im}(R_2 - R_1)|) \le 4x_2|R_2 - R_1| = \\
= x_2\left|k_2^2 - k_1^2\right|(R_1 + R_2)^{-1} \le cx_2(s_1^4 + \xi^2 + 1)^{-0.25},
\end{gathered} \tag{46}$$

где $p = (s_1^2 + 0.25k_n^2)a^2 + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Получившаяся оценка основана на применении к каждой из четырех возникших разностей теоремы Лагранжа со средними точками Θ_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Последний переход возможен благодаря оценке (29).

Используя неравенства (46) и (24), оценим выражение (45):

$$\begin{gathered}
\left|Y_1^1(x,t) + Y_2^1(x,t)\right| \le c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} |\hat{q}_0(s_1,p)| \cdot |R_2 + R_1| \cdot x_2(R_2 + R_1)^{-1} dp ds_1 \le \\
\le cx_2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |s_1|)^{-1}(1 + |s_1|)^{-0.5} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^{-0.75} d\xi \le \tilde{c}x_2.
\end{gathered}$$

Из последней оценки следует равенство $\lim\limits_{x_2 \to +0}\left|Y_1^1(x,t) + Y_2^1(x,t)\right| = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{x_2 \to +0}(\hat{W}_2^0(x,t) + \hat{W}_1^0(x,t)) = 0$ и, окончательно, получим $\lim\limits_{x_2 \to +0}\left(\dfrac{\partial \hat{V}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \hat{V}_2}{\partial x_2}\right) = q_1(x_1,t)$, т.е. второе граничное условие выполнено в смысле главного значения.

Следствие 1. Пусть $\operatorname{Re} p = |s|^2 + R > 0$. Тогда в условиях и обозначениях леммы 1 справедлива оценка

$$\begin{gathered}
\left|L_{t \to p}F_{x_1 \to s_1}q(x_1,t)\right| \le c\,(1 + |s_1|)^{-1}(1 + R^2 + s_1^2 + \operatorname{Im}^2 p)^{-1} \times \\
\times \left(|||q(x_1,0)||| + \left|\left|\left|\frac{\partial q(x_1,0)}{\partial t}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{\partial q}{\partial t}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2}\right|\right|\right|\right).
\end{gathered} \tag{47}$$

Доказательство. Заметим, что при измененных условиях на p в оценке (28) справедливо неравенство $|p|^{-2} > (R^2 + \operatorname{Im}^2 p)^{-1}$, из чего следует утверждение следствия.

Запишем представления функций $\hat{V}_n(x_1,t)$, $n = 1, 2$, в виде суммы

$$\hat{V}_n(x_1,t) = h_n^1(x_1,t) + h_n^2(x_1,t), \tag{48}$$

где

$$\begin{gathered}
h_n^m = -0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} (\hat{q}_1(s_1,p) + (-1)^n R_{3-n}\hat{q}_0(s_1,p)(R_2 + R_1)^{-1} \times \\
\times (-\exp(-|x_2| R_n))e^{-ix_1s_1}(e^{pt} - 1)^{2-m} dp ds_1, \quad m = 1, 2.
\end{gathered} \tag{49}$$

Сначала изучим функции $h_n^1(x,t)$ при $\varepsilon_0 = (0.25k^2 + s_1^2)a^2$, $k = \min\{k_1,k_2\}$.

Используя результаты лемм 1 и 2, получаем неравенство

$$\left|(\hat{q}_1(s_1,p)+(-1)^n R_{3-n}\times\hat{q}_0(s_1,p))^{-1}(R_2+R_1)^{-1}\left(\exp\left(-|x_2|R_n\right)\right)e^{-ix_1s_1}\right|\le \\ \le c\left(1+|s_1|\right)^{-1}(1+s_1^2+\operatorname{Im}^2 p)^{-1}. \tag{50}$$

Исследуем выражение $|\exp(pt)-1|$. В силу выполнения равенства

$$\exp(pt)-1=pt\int_0^1\exp(ptz)dz$$

и того, что $\operatorname{Re} p<0$, справедлива оценка

$$\left|e^{pt}-1\right|=\left|e^{pt}-1\right|^{\varepsilon}\times\left|e^{pt}-1\right|^{1-\varepsilon}\le 2\left|e^{pt}-1\right|^{\varepsilon}\le 2\left(|p||t|\int_0^1 e^{\operatorname{Re} ptz}dz\right)^{\varepsilon}\le |p|^{\varepsilon}t^{\varepsilon}\le \\ \le c(1+s_1^2+\operatorname{Im}^2 p)^{0.5\varepsilon}t^{\varepsilon},\quad 0\le\varepsilon\le 1. \tag{51}$$

Из представления (49), оценок (50) и (51) при $\xi=\operatorname{Im} p$ и $0<\varepsilon<0.5$ следует неравенство

$$h_n^1=\frac{1}{(2\pi)^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+s_1^2+\xi^2)^{0.5\varepsilon}t^{\varepsilon}}{(1+|s_1|)(1+s_1^2+\xi^2)}d\xi ds_1\le ct^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^{1+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1-\varepsilon}}<\tilde{c}t^{\varepsilon},$$

откуда

$$\lim_{t\to+0}h_n^1(x,t)=0. \tag{52}$$

Покажем теперь, что $h_n^2(x,t)\equiv 0$. Учитывая, что подынтегральное выражение в (49) – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p>(-s_1^2-0.25k^2)a^2$, где $k=\min\{k_1,k_2\}$, сдвинем контур интегрирования с прямой $\operatorname{Re} p=-0.5a^2(s_1^2+0.25k^2)$ на прямую $\operatorname{Re} p=R+s_1^2$, где $R>0$ – произвольное число.

Опираясь на неравенство (47) при $\xi=\operatorname{Im} p$, получаем оценку

$$\left|h_n^2\right|\le c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi ds_1}{(1+|s_1|)(1+R^2+s_1^2+\xi^2)}\le\frac{c}{(1+R^2)^{0.5\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^{1+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1-\varepsilon}}\le\frac{1}{(1+R^2)^{0.5\varepsilon}},$$

где $\varepsilon>0$ – произвольное число. Следовательно, $\left|h_n^2\right|\le(1+R^2)^{-0.5\varepsilon}\tilde{c}$. Устремляя $R\to+\infty$, имеем

$$h_n^2=0. \tag{53}$$

Из (48), (52), (53) следует выполнение условий

$$\lim_{t\to+0}V_n(x,t)=0,\quad n=1,2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen Y.F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. P. 771–787.
2. *Lei W.-S.* Non oscillatory and non-singular asymptotic solutions to stress fields at interface cracks // Willey Publishing Ltd. Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 2017. P. 1–18.
3. *Vitucci G., Mishuris G.* Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders // J. of the European Ceramic Society. 2016. V. 36. P. 2411–2417.
4. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 6. С. 1007–1023.
5. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 2 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1230–1242.
6. *Астахова Е.В., Глушко А.В., Логинова Е.А.* Влияние тепла на деформации материала с дефектом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1532–1536.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1850–1872

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ В СРЕДЕ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1)]

© 2021 г. Н. Т. Левашова[1,*], Б. В. Тищенко[1,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

*e-mail: natasha@wanaku.net

**e-mail: bogdanmsu@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.12.2020 г.
Переработанный вариант 24.03.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Используется асимптотический анализ для исследования существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову решения одномерной нелинейной параболический системы типа активатор–ингибитор. Особенностью задачи являются разрывы I рода функций в правых частях уравнений. Скачок функций происходит в единственной точке отрезка, на котором рассматривается задача. Исследуется решение, обладающее большим градиентом в окрестности разрыва. Доказательство теорем существования и устойчивости проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств. Библ. 31.

Ключевые слова: система нелинейных уравнений, малый параметр, внутренние слои, верхнее и нижнее решения, асимптотика решения, асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.31857/S0044466921110132

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается система двух дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными нелинейными функциями в правой части. Целью работы является получение достаточных условий существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения параболической системы, обладающего большим градиентом в окрестности точек разрыва правой части.

Такая постановка задачи возникла в ходе разработки автоволновой модели развития мегаполисов (см. [1], [2]). Эта модель основана на системе двух уравнений типа активатор–ингибитор, где в роли активатора выступает площадь городской застройки, а ингибитор определяется экологическими или экономическими факторами, обусловленными политикой градообразования той или иной страны. Наличие барьеров, препятствующих распространению фронта активатора, например больших водоемов, в модели учитывается как разрыв функций в правых частях. В малой (по сравнению с рассматриваемой территорией) окрестности границы разрыва происходит резкое изменение значений активатора и ингибитора. Эта малая окрестность называется внутренним переходным слоем. Тем самым, в задаче присутствует естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области.

Очевидно, численному решению такой задачи должно предшествовать аналитическое исследование существования и устойчивости упомянутого решения, что можно сделать, применяя метод малого параметра. В настоящей работе с использованием этого метода получены достаточные условия существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости, а также выделена локальная область притяжения устойчивого решения.

Доказательство существования и асимптотической устойчивости стационарного решения начально-краевой задачи здесь проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [3], [4]), основанного на методе верхних и нижних решений. Распростране-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 18-11-00042П.

ние последнего на задачи с единственной точкой разрыва первого рода в правых частях уравнений здесь проведено провели на основании модифицированного доказательства соответствующей теоремы из [5], где оно проведено для случая C^2-гладких правых частей.

Проблемы существования и устойчивости гладких решений скалярных уравнений реакция–диффузия в случае разрывного реактивного слагаемого были рассмотрены в ряде работ (см., например, [6], [7]).

Вопрос о существовании и свойствах слабых решений для систем уравнений с разрывными коэффициентами освещается, например, в [8], [9].

Особенность настоящего исследования заключается в распространении асимптотических методов, использованных в [6], [7], для обоснования существования гладкого решения системы уравнений с разрывной правой частью и локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему параболических уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 y_{xx} - y_t &= f(y,z,x,\varepsilon), \quad x \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \varepsilon^2 z_{xx} - z_t &= g(y,z,x,\varepsilon), \quad x \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ – малый параметр.

Отметим, что именно такое распределение степеней малого параметра возникает в результате проведения масштабирования и перехода к безразмерным переменным в системе автоволновых уравнений (см. [1]). Вхождение различных степеней ε в уравнениях для активатора (u-компонента) и ингибитора (v-компонента) обусловлено тем, что характерный масштаб изменения активатора значительно превышает соответствующий масштаб для ингибитора.

Здесь и далее будем использовать обозначения $\mathbb{R}^+ := (0,+\infty)$, $\mathbb{R}^- := (-\infty,0)$, $\mathbb{R}_0^+ := [0,+\infty)$, $\mathbb{R}_0^- := (-\infty,0]$.

Поставим следующие начальные и краевые условия:

$$y_x(0,t) = y_x(1,t) = 0, \quad y(x,0) = u^0(x), \quad z_x(0,t) = z_x(1,t) = 0, \quad z(x,0) = v^0(x), \tag{2}$$

считая, что функции $u^0(x)$, $v^0(x)$ гладкие на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяют условиям согласования $u_x^0(0) = u_x^0(1) = v_x^0(0) = v_x^0(1) = 0$.

Будем считать, что правые части системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} f(u,v,x,\varepsilon) &= \begin{cases} f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad 0 < x \le x_0, \\ f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad x_0 < x \le 1, \end{cases} \\ g(u,v,x,\varepsilon) &= \begin{cases} g^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad 0 < x \le x_0, \\ g^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad x_0 < x \le 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

причем функции $f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon)$ и $g^{(-)}(u,v,x,\varepsilon)$ принадлежат классу $C^3(I_u \times I_v \times [0,x_0] \times [0,\varepsilon_0])$, а $f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon)$, $g^{(+)}(u,v,x,\varepsilon)$ – классу $C^3(I_u \times I_v \times [x_0,1] \times [0,\varepsilon_0])$, где I_u и I_v – некоторые допустимые интервалы изменения переменных u и v, а на поверхности $\{u \in I_u,\ v \in I_v,\ x = x_0 \in (0,1)\}$ функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ претерпевают разрывы I рода.

Определение 1. Пара функций $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ из класса $C^{1,1}([0,1] \times \mathbb{R}_0^+) \cap C^{2,1}(((0,1) \backslash x_0) \times \mathbb{R}^+)$ называется *решением задачи* (1), (2), если она удовлетворяет уравнениям (1) при $(x,t) \in ((0,1) \backslash x_0) \times \mathbb{R}^+$, а также граничным и начальным условиям (2).

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u,v,x,0)=0$ имеет изолированное решение $u=\varphi^{(\mp)}(v,x)$ соответственно в области $I_v\times[0,x_0]$ и $I_v\times[x_0,1]$, и выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v,x_0)<\varphi^{(+)}(v,x_0),\quad f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)>0.$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v,x)=g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)$.

Условие 2. Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v,x)=0$ имеет изолированное решение $v=\psi^{(\mp)}(x)$ соответственно на отрезках $[0,x_0]$ и $[x_0,1]$ и выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(x_0)<\psi^{(+)}(x_0),\quad h_v^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x),x)>0.$$

Условие 3. (Условие квазимонотонности). Пусть при всех $(u,v)\in I_u\times I_v$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполняются неравенства

$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)>0,\quad g_u^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)<0$$

соответственно на отрезках $[0,x_0]$ и $[x_0,1]$.

Замечание 1. Условие квазимонотонности в таком виде характерно для задач типа активатор–ингибитор.

Основная цель работы – определить достаточные условия существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (1), (2), близкого к $(\varphi^{(-)},\psi^{(-)})$ слева от точки x_0 и к $(\varphi^{(+)},\psi^{(+)})$ справа от этой точки и резко изменяющегося от значений $(\varphi^{(-)},\psi^{(-)})$ до значений $(\varphi^{(+)},\psi^{(+)})$ в малой окрестности точки x_0. Далее эту окрестность мы будем называть *внутренним переходным слоем*.

Очевидно, стационарное решение задачи (1), (2) является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}\varepsilon^4u''=f(u,v,x,\varepsilon),\quad \varepsilon^2v''=g(u,v,x,\varepsilon),\quad x\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)=0,\quad v'(0)=u'(1)=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Определение 2. Пара функций $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ из класса $C^1([0,1])\cap C^2((0,1)\backslash x_0)$ называется *решением задачи* (4), если она удовлетворяет уравнениям (4) при $x\in(0,1)\backslash x_0$ и граничным условиям.

Прежде чем сформулировать остальные условия, рассмотрим так называемые присоединенные уравнения для задачи (4):

$$\frac{d^2\tilde v}{d\tau^2}=h^{(-)}(\tilde v,x_0),\quad \tau<0,\quad \frac{d^2\tilde v}{d\tau^2}=h^{(+)}(\tilde v,x_0),\quad \tau>0,\quad \tau:=\frac{x-x_0}{\varepsilon},\tag{5}$$

$$\frac{d^2\hat u}{d\sigma^2}=f^{(-)}(\hat u,v,x_0,0),\quad \sigma<0,\quad \frac{d^2\hat u}{d\sigma^2}=f^{(+)}(\hat u,v,x_0,0),\quad \sigma>0,\quad \sigma:=\frac{x-x_0}{\varepsilon^2}.\tag{6}$$

Каждое из присоединенных уравнений эквивалентно присоединенной системе

$$\frac{d\tilde v}{d\tau}=\Phi^{(\mp)},\quad \frac{d\Phi^{(\mp)}}{d\tau}=h^{(\mp)}(\tilde v,x_0);\quad \frac{d\hat u}{d\sigma}=\Psi^{(\mp)},\quad \frac{d\Psi^{(\mp)}}{d\sigma}=f^{(\mp)}(\hat u,v,x_0,0).\tag{7}$$

Условие 4. Пусть выполняются неравенства

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v}h^{(-)}(s,x_0)ds>0,\quad v\in(\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)],$$

$$\int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{v}h^{(+)}(s,x_0)ds>0,\quad v\in[\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)),$$

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x_0)}^{u}f^{(-)}(s,v,x_0,0)ds>0,\quad u\in(\varphi^{(-)}(v,x_0),\varphi^{(+)}(v,x_0)],\quad v\in[\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)],$$

$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(v,x_0)}^{u} f^{(+)}(s,v,x_0,0)ds > 0, \quad u \in [\varphi^{(-)}(v,x_0),\varphi^{(+)}(v,x_0)), \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)].$$

При выполнении условия 4 функции

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}) = \sqrt{2\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}} h^{(\mp)}(s,x_0)ds} \tag{8}$$

задают выражения для сепаратрис седловых точек $(\psi^{(\mp)}(x_0),0)$ первой пары систем (7) на фазовой плоскости $(\tilde{v},\Phi)$, а функции

$$\Psi^{(\mp)}(\hat{u},v) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(v,x_0)}^{\hat{u}} f^{(\mp)}(s,v,x_0,0)ds} \tag{9}$$

при каждом $v \in [\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)]$ – выражения для сепаратрис седловых точек $(\varphi^{(\mp)}(v,x_0),0)$ второй пары систем (7) на фазовой плоскости $(\hat{u},\Psi)$.

Обозначим

$$H^v(\tilde{v}) := \Phi^{(-)}(\tilde{v}) - \Phi^{(+)}(\tilde{v}), \quad H^u(\hat{u},v) := \Psi^{(-)}(\hat{u},v) - \Psi^{(+)}(\hat{u},v). \tag{10}$$

Условие 5. Пусть существует величина $q_0 \in (\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0))$ – единственное решение уравнения $H^v(\tilde{v}) = 0$, и величина $p_0 \in (\varphi^{(-)}(q_0,x_0),\varphi^{(+)}(q_0,x_0))$ – единственное решение уравнения $H^u(\hat{u},q_0) = 0$, и выполняются неравенства

$$\frac{dH^v}{dv}(q_0) \neq 0, \quad \frac{\partial H^u}{\partial u}(p_0,q_0) > 0.$$

Замечание 2. Выполнение неравенств из условия 5 эквивалентно выполнению неравенств

$$h^{(-)}(q_0,x_0) - h^{(+)}(q_0,x_0) \neq 0, \quad f^{(-)}(p_0,q_0,x_0,0) - f^{(+)}(p_0,q_0,x_0,0) > 0.$$

Введем функции

$$\nu^{(\mp)}(v,x) := g_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0) + \frac{f_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)}{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)} g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0) \tag{11}$$

соответственно на множествах $(v,x) = I_v \times [0,x_0]$ для функций с верхним индексом “(–)” и $(v,x) = I_v \times [x_0,1]$ для функций с индексом “(+)”, а также введем обозначения

$$\bar{\nu}^{(\mp)}(x) := \nu^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x),x). \tag{12}$$

Условие 6. Пусть $\bar{\nu}^{(\mp)}(x) > 0$ соответственно на отрезках $[0,x_0]$ и $[x_0,1]$, а для функций $\nu^{(\mp)}(v,x)$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} \nu^{(-)}(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0),q_0), \quad \int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{q_0} \nu^{(-)}(s,x_0)ds > 0,$$

$$\int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in (q_0,\psi^{(+)}(x_0)], \quad \int\limits_{q_0}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s,x_0)ds > 0.$$

В основе доказательства существования и устойчивости стационарных решений параболических уравнений с внутренними переходными или пограничными слоями лежит асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [6], [7], [10]–[12]). Этот метод основан на построении для рассматриваемой начально-краевой задачи верхних и нижних решений, которые, согласно принципу сравнения из [5], [8], по сути являются асимптотическими приближениями точного решения исходной задачи. Построение верхнего и нижнего решений включает два этапа: 1) получение асимптотического приближения решения с помощью алгоритма Васильевой (см. [13]), 2) задание добавок к этому асимптотическому приближению, обеспечивающих выполнение системы неравенств, фигурирующей в определении верхнего и нижнего решений (см. [5] и ниже в этой работе). Достаточными условиями применения алгоритма Васильевой в настоящей работе являются условия 1–4 и отличные от нуля производные $dH^v/dv(q_0)$ и $\partial H^u/\partial u(p_0, q_0)$ в условии 5. Как правило, для выполнения неравенств, определяющих верхнее и нижнее решение, одной только возможности применения алгоритма Васильевой оказывается недостаточно, поэтому на втором этапе появляются дополнительные условия. В нашем случае это положительный знак производной $\partial H^u/\partial u(p_0, q_0)$ в условии 5, а также условие 6, которые в случае выбранной квазимонотонности (см. условие 3) позволяют построить подходящие добавки к асимптотическому приближению, обеспечивающие выполнение требуемых неравенств.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В данном разделе мы остановимся на построении асимптотического приближения решения стационарной задачи. Отметим, что вид этого приближения и алгоритм его построения лишь незначительно отличаются от приведенного в [4].

Асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (4) строится отдельно слева и справа от точки x_0:

$$U_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ U^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \quad V_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} V^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ V^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1. \end{cases} \tag{13}$$

Каждая из функций $U^{(\mp)}$, $V^{(\mp)}$ представляется в виде суммы

$$U^{(\mp)} = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) + M^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) + P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon) + R^{(\mp)}u(\eta_{\mp},\varepsilon), \tag{14}$$

$$V^{(\mp)} = \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) + M^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) + P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon). \tag{15}$$

Функции, зависящие от переменной x, описывают поведение решения вдали от точки x_0 и границ отрезка (регулярная часть); функции, зависящие от растянутых переменных τ и σ (см. (5), (6)), описывают резкое изменение решения в окрестности точки x_0 (функции переходного слоя); функции, зависящие от растянутых переменных $\zeta_- = x/\varepsilon$ и $\eta_- = x/\varepsilon^2$, описывают поведение решения в окрестности точки $x = 0$, а зависящие от растянутых переменных $\zeta_+ = (1-x)/\varepsilon$ и $\eta_+ = (1-x)/\varepsilon^2$ – в окрестности точки $x = 1$ (пограничные функции).

Каждая из функций, входящих в суммы (14), (15), представляется в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x); \tag{16}$$

$$Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}u(\tau) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}u(\tau), \quad Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}v(\tau) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}v(\tau); \tag{17}$$

$$M^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) = M_0^{(\mp)}u(\sigma) + \varepsilon M_1^{(\mp)}u(\sigma), \quad M^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i M_i^{(\mp)}v(\sigma); \tag{18}$$

$$P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon) = \varepsilon P_1^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}) + \varepsilon^2 P_2^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}); \quad P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}) = \varepsilon P_1^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}) + \varepsilon^2 P_2^{(\mp)}v(\zeta_{\mp});$$
$$R^{(\mp)}u(\eta_{\mp},\varepsilon) = \varepsilon^2 R_2^{(\mp)}u(\eta_{\mp}) + \varepsilon^3 R_3^{(\mp)}u(\eta^{\mp}).$$

Алгоритм построения пограничных P- и R-функций для аналогичной системы уравнений представлен в [4], [14], [15], поэтому здесь мы не будем на нем подробно останавливаться.

Функции $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$, а также $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V^{(+)}(x,\varepsilon)$ сшиваются непрерывно в точке x_0, согласно равенствам

$$U^{(-)}(x_0,\varepsilon) = U^{(+)}(x_0,\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2), \tag{19}$$

$$V^{(-)}(x_0,\varepsilon) = V^{(+)}(x_0,\varepsilon) = q_0 + \varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2), \tag{20}$$

где величины p_0 и q_0 — те же, что в условии 5, а коэффициенты p_1 и q_1 определяются после построения функций переходного слоя первого порядка $Q_1^{(\mp)}u$, $Q_1^{(\mp)}v$, $M_1^{(\mp)}u$, $M_1^{(\mp)}v$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия на производные функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $V^{(\mp)}(x,\varepsilon)$:

$$\frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon) + O(1), \quad \frac{dV^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{dV^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon) + O(\varepsilon). \tag{21}$$

2.1. Регулярная часть

Системы уравнений для функций регулярной части получаются из равенств

$$\begin{gathered} f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x), x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \\ g^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x), x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) \end{gathered} \tag{22}$$

путем приравнивания коэффициентов при равных степенях ε в разложении Тейлора по малому параметру функций, входящих в эти равенства.

В частности, в нулевом порядке, принимая во внимание условия 1 и 2, следует положить $\bar{v}_0^{(\mp)}(x) = \psi^{(\mp)}(x)$, $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x)$.

Функции первого порядка $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_1^{(\mp)}(x)$ находятся из систем

$$\begin{gathered} \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x), \\ \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{g}_\varepsilon^{(\mp)}(x), \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{f}^{(\mp)}(x) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), \psi^{(\mp)}(x), x, 0), \\ \bar{g}^{(\mp)}(x) := g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), \psi^{(\mp)}(x), x, 0), \end{gathered} \tag{24}$$

и аналогичный смысл имеют сходные обозначения производных этих функций. Системы (23) также разрешимы в силу условий 1 и 2.

2.2. Функции переходного слоя

Системы уравнений для функций переходного слоя получаются из равенств

$$\varepsilon^2\frac{d^2Q^{(\mp)}u}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}f(\tau,\varepsilon), \quad \frac{d^2Q^{(\mp)}v}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}g(\tau,\varepsilon), \tag{25}$$

$$\frac{d^2M^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = M^{(\mp)}f(\sigma,\varepsilon), \quad \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2M^{(\mp)}v}{d\sigma^2} = M^{(\mp)}g(\sigma,\varepsilon), \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered} Q^{(\mp)}f(\tau,\varepsilon) := f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon), x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) - \\ - f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), \end{gathered}$$

а функции $Q^{(\mp)}g(\tau,\varepsilon)$ определяются аналогичным образом;

$$\begin{gathered} M^{(\mp)}f(\sigma,\varepsilon) := f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\varepsilon\sigma,\varepsilon) + M^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon), \\ \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\varepsilon\sigma,\varepsilon) + M^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon), x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) - \\ - f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\varepsilon\sigma,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\varepsilon\sigma,\varepsilon), x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon), \end{gathered}$$

а функции $M^{(\mp)}g$ определяются по аналогии с $M^{(\mp)}f$.

Краевые условия при $\xi = 0$ и $\sigma = 0$ для функций переходного слоя получаются из условий непрерывного сшивания (19), (20); также учитывается требование убывания этих функций на бесконечности

$$
\begin{gathered}
Q_i^{(\mp)}u(\tau) \to 0, \quad Q_i^{(\mp)}v(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \mp\infty; \\
M_i^{(\mp)}u(\sigma) \to 0, \quad M_i^{(\mp)}v(\sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to \mp\infty, \quad i = 0,1,\ldots.
\end{gathered} \tag{27}
$$

Задачи для функций с верхним индексом “(–)” решаются на полупрямых $\xi \le 0$ и $\sigma \le 0$, а для функций с верхним индексом “(+)” – на полупрямых $\xi \ge 0$ и $\sigma \ge 0$.

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка. Описанным выше способом для функций $M_0^{(\mp)}v(\sigma)$ и $M_1^{(\mp)}v(\sigma)$ получаются однородные уравнения с однородными краевыми условиями и условиями стремления к нулю на бесконечности. Отсюда следует, что эти функции тривиальные:

$$
M_i^{(\mp)}v \equiv 0, \quad i = 0,1. \tag{28}
$$

Введем обозначения

$$
\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) := \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x_0), x_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau), \quad \tilde{v}^{(\mp)}(\tau) := \psi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v(\tau). \tag{29}
$$

Из первой пары равенств (25) в нулевом порядке с учетом введенных обозначений получаем уравнение $f^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}(\tau), \tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0, 0) = 0$, из которого с учетом условия 1 следует выражение

$$
\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) = \varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0). \tag{30}
$$

Выделяя слагаемые нулевого порядка во второй паре равенств (25), условии непрерывности (20) и условии убывания на бесконечности (27), с учетом обозначений (29) и выражений (30), получаем задачи для функций $\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)$:

$$
\frac{d^2\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}{d\tau^2} = h^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0), \quad \tilde{v}^{(\mp)}(0) = q_0, \quad \tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty) = \psi^{(\mp)}(x_0). \tag{31}
$$

Уравнения (31) совпадают с присоединенными уравнениями (5). При выполнении условия 4 решения задач (31) существуют (см. разд. 1) и для них при достаточно больших $|\tau|$ справедливы следующие экспоненциальные оценки (см. [16], [17]):

$$
\begin{gathered}
\tilde{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} + \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right) \le \left|\tilde{v}^{(\mp)}(\tau) - \psi^{(\mp)}(x_0)\right| \le \bar{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \\
\tilde{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} + \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right) \le \left|\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) - \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x_0), x_0)\right| \le \bar{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right),
\end{gathered} \tag{32}
$$

где $\tilde{C}, \bar{C}$, $\omega^{(\mp)}$ – положительные константы, последние соответственно из интервалов $0 < \omega^{(\mp)} < \sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)}$.

Введем обозначения

$$
\hat{u}^{(\mp)}(\sigma) := \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0) + M_0^{(\mp)}u(\sigma). \tag{33}
$$

С использованием этих обозначений из первой пары равенств (26) с учетом (28), а также условий (19) и (27) в нулевом порядке получаем задачи для функций $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma)$:

$$
\frac{d^2\hat{u}^{(\mp)}(\sigma)}{d\sigma^2} = f^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0, x_0, 0), \quad \hat{u}^{(\mp)}(0) = p_0, \quad \hat{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0).
$$

Эти задачи разрешимы, как и задачи (31), и их решения имеют экспоненциальные оценки (см. [16]):

$$
\left|\hat{u}^{(\mp)}(\sigma) - \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0)\right| \le C_0 e^{-K_0|\sigma|},
$$

где C_0, K_0 – положительные константы.

Далее для краткости будем использовать обозначения

$$
\bar{h}^{(\mp)}(x) := h^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), x, 0), \quad \tilde{h}^{(\mp)}(\tau) := h^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0),
$$

$$\begin{gathered}\tilde{f}^{(\mp)}(\tau) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau),\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),x_0,0),\\ \tilde{g}^{(\mp)}(\tau) := g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau),\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),x_0,0),\end{gathered} \tag{34}$$

$$\hat{f}^{(\mp)}(\sigma) := f^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0,x_0,0), \quad \hat{g}^{(\mp)}(\sigma) := g^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0,x_0,0).$$

В аналогичном смысле дальше будем понимать и обозначения для производных этих функций.

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка. Обозначим

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)) := \frac{d\tilde{v}^{(\mp)}}{d\tau}, \quad \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0) := \frac{d\hat{u}^{(\mp)}}{d\sigma} \tag{35}$$

(см. (7)).

Из разложения первого порядка первой пары равенства (25) получаем следующие выражения, связывающее функции $Q_1^{(\mp)}u(\tau)$ и $Q_1^{(\mp)}v(\tau)$:

$$0 = \tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)Q_1^{(\mp)}u(\tau) + \tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)Q_1^{(\mp)}v(\tau) + Q_1^{(\mp)}\tilde{f}(\tau), \tag{36}$$

где $Q_1^{(\mp)}\tilde{f}(\tau)$ – известная функция.

С учетом этого выражения из второй пары равенств (25), а также условий (20) и (27) получаем задачи для функций $Q_1^{(\mp)}v(\tau)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2Q_1^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \tilde{h}_v^{(\mp)}(\tau)Q_1^{(\mp)}v(\tau) + Q_1^{(\mp)}\tilde{g}(\tau),\\ Q_1^{(\mp)}v(0) = q_1 - \overline{v}_1^{(\mp)}(x_0), \quad Q_1^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Здесь были использованы обозначения (34). Функции $Q_1^{(\mp)}\tilde{g}(\tau)$ известны.

Решения этих задач выписываются явно:

$$Q_1^{(\mp)}v(\tau) = (q_1 - \overline{v}_1^{(\mp)}(x_0))\frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi^{(\mp)}(q_0)} + \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))\int_0^{\tau}\frac{d\tau_1}{[\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))]^2}\int_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))Q^{(\mp)}\tilde{g}(\tau_2)d\tau_2. \tag{38}$$

Из первой пары равенств (26) и условий (19) и (27) получаем задачи для функций $M_1^{(\mp)}u(\sigma)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2M_1^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma)M_1^{(\mp)}u(\sigma) + M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma),\\ M_1^{(\mp)}u(0) = p_1 - \overline{u}_1^{(\mp)}(x_0) - Q_1^{(\mp)}u(0), \quad M_1^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0,\end{gathered} \tag{39}$$

где функции $M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma)$ известны. Здесь также были использованы обозначения (34).

Решения этих задач выписываются явно:

$$\begin{gathered}M_1^{(\mp)}u(\sigma) = (p_1 - \overline{u}_1^{(\mp)}(x_0) - Q_1^{(\mp)}u(0))\frac{\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0)}{\Psi^{(\mp)}(p_0,q_0)} +\\ + \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0)\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma_1}{[\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1),q_0)]^2}\int_{\mp\infty}^{\sigma_1}\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2),q_0)M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma_2)d\sigma_2.\end{gathered} \tag{40}$$

Функции $Q_1^{(\mp)}\tilde{f}(\tau)$, $Q_1^{(\mp)}\tilde{g}(\tau)$ и $M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma)$ в (36), (37) и (39) экспоненциально убывают соответственно при $\tau \to \mp\infty$, и $\sigma \to \mp\infty$. Согласно [17], справедливы следующие экспоненциальные оценки:

$$\left|Q_1^{(\mp)}u(\tau)\right| \le \tilde{C}_1 e^{-\kappa_1|\tau|}, \quad \left|Q_1^{(\mp)}v(\tau)\right| \le \tilde{C}_1 e^{-\kappa_1|\tau|}, \quad \left|M_1^{(\mp)}u(\sigma)\right| \le \hat{C}_1 e^{-K_1|\sigma|}, \tag{41}$$

где $\tilde{C}_1$, κ_1, $\hat{C}_1$, K_1 – положительные константы.

2.2.3. Функции переходного слоя высших порядков. В настоящей работе в ходе использования асимптотического метода дифференциальных неравенств нам понадобятся еще функции $M_2^{(\mp)}v(\sigma)$ и $M_3^{(\mp)}v(\sigma)$. Функции с верхним индексом “(–)” определены на полупрямой $\sigma \le 0$, а с верхним индексом “(+)” – на полупрямой $\sigma \geq 0$. Эти функции суть убывающие к нулю соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ вместе с первыми производными решения уравнений

$$\frac{d^2 M_2^{(\mp)} v}{d\sigma^2} = M_0^{(\mp)} \hat{g}(\sigma), \quad \frac{d^2 M_3^{(\mp)} v}{d\sigma^2} = M_1^{(\mp)} \hat{g}(\sigma),$$

где $M_{0,1}^{(\mp)} \hat{g}(\sigma)$ – известные экспоненциально убывающие функции.

Для функций $M_{2,3}^{(\mp)} v(\sigma)$ справедливы экспоненциальные оценки такого же вида, как (41) для $M_1^{(\mp)} u(\sigma)$.

2.3. Сшивание производных асимптотического представления

Подставляя в условия сшивания (21) представления (14)–(18), придем к равенствам

$$\begin{gathered}
\left.\left(\frac{dM_0^{(-)}u}{d\sigma} - \frac{dM_0^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0} + \varepsilon\left[\left.\left(\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau} - \frac{dQ_0^{(+)}u}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + \left.\left(\frac{dM_1^{(-)}u}{d\sigma} - \frac{dM_1^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0}\right] + O(\varepsilon^2) = 0, \\
\left.\left(\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau} - \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + \varepsilon\left[\left.\left(\frac{dQ_1^{(-)}v}{d\tau} - \frac{dQ_1^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + \right. \\
\left. + \left.\left(\frac{dM_2^{(-)}v}{d\sigma} - \frac{dM_2^{(+)}v}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0} + \left.\left(\frac{d\psi^{(-)}}{dx} - \frac{d\psi^{(+)}}{dx}\right)\right|_{x=x_0}\right] + O(\varepsilon^2) = 0.
\end{gathered} \tag{42}$$

Приравнивая в этих равенствах слагаемые порядка ε^0 с учетом обозначений (29), (33) и (35), получаем систему уравнений $H^v(q_0) = 0$, $H^u(p_0, q_0) = 0$, где функции H^v и H^u задаются выражениями (10).

Согласно условию 5, эта система разрешима.

Обозначим

$$\Phi(q_0) := \Phi^{(-)}(q_0) = \Phi^{(+)}(q_0), \quad \Psi(p_0, q_0) := \Psi^{(-)}(p_0, q_0) = \Psi^{(+)}(p_0, q_0). \tag{43}$$

В первом порядке с учетом явных выражений (38) для $Q_1^{(\mp)} v$ и (40) для $M_1^{(\mp)} u$, вида (10) функций H^v и H^u, а также вида (8), (9) функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v})$, $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}, v)$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов p_1 и q_1,входящих в правые части равенств (19) и (20):

$$\frac{dH^v}{dv}(q_0) \cdot q_1 = H_1^v(p_0, q_0), \quad \frac{\partial H^u}{\partial u}(p_0, q_0) \cdot p_1 = H_1^u(p_0, q_0),$$

где $H_1^v(p_0, q_0)$, $H_1^u(p_0, q_0)$ известны. Эта система разрешима в силу условия 5.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–6. *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *в смысле определения* 2*, для которого пара функций* $(U_1(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $x \in [0,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^2)$*, т.е.*

$$|U_1(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)| + |V_1(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^2, \quad x \in [0,1], \tag{44}$$

где C *– не зависящая от* ε *положительная константа.*

Доказательство этой теоремы проведем по аналогии с [5] с небольшими изменениями, касающимися наличия разрыва I рода правых частей задачи (4) при $x = x_0$.

3.1. Существование решения в общем случае

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4 \frac{d^2u}{dx^2} - f(u,v,x,\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2 \frac{d^2v}{dx^2} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определим верхнее и нижнее решения задачи (4) следующим образом.

Определение 3. Пары функций $(\overline{U}(x),\overline{V}(x))$ и $(\underline{U}(x),\underline{V}(x))$ из класса $C([0,1]) \cap C^1([0,1]\backslash x_0) \cap C^2((0,1)\backslash x_0)$ называются соответственно *верхним и нижним решениями задачи* (4), если для них выполняются следующие неравенства:

(A_1). $\underline{U}(x) \le \overline{U}(x)$, $\underline{V}(x) \le \overline{V}(x)$, $x \in [0,1]$;

(A_2). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \le 0 \le L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v)$, $\underline{V} \le v \le \overline{V}$, $x \in (0,1)\backslash x_0$, $L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \le 0 \le L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V})$, $\underline{U} \le u \le \overline{U}$, $x \in (0,1)\backslash x_0$;

(A_3). $\overline{U}_x(0) \le 0 \le \underline{U}_x(0)$, $\overline{U}_x(1) \ge 0 \ge \underline{U}_x(1)$, $\overline{V}_x(0) \le 0 \le \underline{V}_x(0)$, $\overline{V}_x(1) \ge 0 \ge \underline{V}_x(1)$;

(A_4). $\overline{U}_x(x_0-0) - \overline{U}_x(x_0+0) \ge 0$, $\underline{U}_x(x_0-0) - \underline{U}_x(x_0+0) \le 0$, $\overline{V}_x(x_0-0) - \overline{V}_x(x_0+0) \ge 0$, $\underline{V}_x(x_0-0) - \underline{V}_x(x_0+0) \le 0$.

Отличие приведенного здесь определения верхнего и нижнего решений отличается от аналогичного определения из [5] наличием точки x_0, в которой у этих функций происходит скачок производной.

Доказательство теоремы сравнения в [5] основано на классическом принципе максимума. Приведем здесь аналогичное утверждение на случай функций, не гладких в одной точке.

Лемма 1. *Пусть* $w(x) \in C[0,1] \cap C^1([0,1]\backslash x_0) \cap C^2((0,1)\backslash x_0)$ *и для некоторой непрерывной функции* $c(x) > 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$-w''(x) + c(x)w(x) \ge 0, \quad x \in (0,1)\backslash x_0, \quad w'(0) \le 0 \le w'(1), \tag{45}$$

$$w'(x_0-0) \ge w'(x_0+0). \tag{46}$$

Тогда $w(x) \ge 0$, $x \in [0,1]$.

Доказательство. Для функций из класса C^1 данное утверждение доказано в [18].

Справедливость утверждения леммы в случае строгого знака неравенства в условии (46) вытекает из следующих соображений. В силу неравенства (45) функция $w(x)$ не может быть отрицательной константой. Предположим, что она достигает отрицательного минимума на отрезке $[0,1]$. Согласно [5], [18], минимум функции $w(x)$ не может достигаться на краях отрезка или в точках, где эта функция гладкая.

Если минимум функции $w(x)$ достигается в точке x_0, то выполняются неравенства $w'(x_0-0) \le 0 \le w'(x_0+0)$, причем мы рассматриваем случай, когда хотя бы одно из этих неравенств строгое. Но в таком случае это противоречит неравенству $w'(x_0-0) > w'(x_0+0)$.

Итак, функция $w(x)$ не может достигать отрицательного минимума на отрезке $[0,1]$, откуда следует утверждение леммы.

Докажем теперь существование хотя бы одного решения задачи (4), заключенного между верхним и нижним решениями.

Лемма 2. *Пусть существуют пары функций* $(\overline{U},\overline{V})$ *и* $(\underline{U},\underline{V})$, *являющиеся соответственно верхним и нижним решениями в смысле определения* 3. *Тогда существует хотя бы одно решение* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *задачи* (4) *в смысле определения* 2, *причем*

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x), \quad \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{47}$$

Доказательство. Следуя [5], зададим итерационные процессы как

$$\varepsilon^4 \frac{d^2\overline{u}^{(k)}}{dx^2} - c\overline{u}^{(k)} = \mathcal{F}_1(\overline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\overline{u}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\overline{u}^{(k)}}{dx}(1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{d^2\overline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\overline{v}^{(k)} = \mathcal{F}_2(\overline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\overline{v}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\overline{v}^{(k)}}{dx}(1) = 0;\\
&\varepsilon^4 \frac{d^2\underline{u}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{u}^{(k)} = \mathcal{F}_1(\underline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\underline{u}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\underline{u}^{(k)}}{dx}(1) = 0,\\
&\varepsilon^2 \frac{d^2\underline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{v}^{(k)} = \mathcal{F}_2(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\underline{v}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\underline{v}^{(k)}}{dx}(1) = 0,
\end{aligned} \tag{48}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, c – достаточно большая положительная константа,

$$\mathcal{F}_1(u, v, x) := f(u, v, x, \varepsilon) - cu, \quad \mathcal{F}_2(u, v, x) := g(u, v, x, \varepsilon) - cv,$$

и полагаем $(\overline{u}^{(0)}, \overline{v}^{(0)}) = (\overline{U}, \overline{V})$, а $(\underline{u}^{(0)}, \underline{v}^{(0)}) = (\underline{U}, \underline{V})$.

Согласно [19], каждая из задач (48) имеет единственное решение из класса $C^1([0,1]) \cap C^2((0,1)\backslash x_0)$.

Поскольку функции $\overline{u}^{(0)}$, $\overline{v}^{(0)}$, $\underline{u}^{(0)}$, $\underline{v}^{(0)}$ являются кусочно-гладкими и удовлетворяют неравенствам (A_4), то повторяя соответствующее доказательство из [5] с использованием леммы 1, получим, что функции $\overline{u}^{(k)}$, $\overline{v}^{(k)}$, $\underline{u}^{(k)}$, $\underline{v}^{(k)}$, где $k = 0, 1, \ldots$, образуют монотонные ограниченные последовательности верхних и нижних решений, для которых справедливы цепочки неравенств

$$\begin{aligned}
&\underline{U} = \underline{u}^{(0)} \le \underline{u}^{(1)} \le \ldots \le \underline{u}^{(k)} \le \ldots \le \overline{u}^{(k)} \le \overline{u}^{(k-1)} \le \ldots \le \overline{u}^{(0)} = \overline{U},\\
&\underline{V} = \underline{v}^{(0)} \le \underline{v}^{(1)} \le \ldots \le \underline{v}^{(k)} \le \ldots \le \overline{v}^{(k)} \le \overline{v}^{(k-1)} \le \ldots \le \overline{v}^{(0)} = \overline{V}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Пусть $G_1(x,s)$, $G_2(x,s)$ – функции Грина задач (48) соответственно для u- и v-компонент, тогда их решения можно записать в виде (см. [19])

$$\begin{aligned}
&\overline{u}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_1(x,s)\mathcal{F}_1(\overline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, s)ds, \quad \underline{u}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_1(x,s)\mathcal{F}_1(\underline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, s)ds,\\
&\overline{v}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_2(x,s)\mathcal{F}_2(\overline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, s)ds, \quad \underline{v}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_2(x,s)\mathcal{F}_2(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, s)ds.
\end{aligned} \tag{50}$$

Из неравенств (49) следует существование пределов $\overline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$, $\underline{u}(x)$, $\underline{v}(x)$ каждой из последовательностей, а следовательно, пределов правых частей равенств (50). Из последнего вытекает ограниченность интегралов в правых частях (50).

Из условия 3 и непрерывности функций $\mathcal{F}_{1,2}$ по первым двум аргументам можно установить, как и в [5], что последовательности $\mathcal{F}_1(\overline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x)$, $\mathcal{F}_2(\overline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x)$ не убывают, а $\mathcal{F}_1(\underline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x)$, $\mathcal{F}_2(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x)$ не возрастают.

Тем самым, для равенств (50) выполнены все условия теоремы Леви, что влечет за собой непрерывность функций $\overline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$, $\underline{u}(x)$, $\underline{v}(x)$ и справедливость при $k \to +\infty$ предельных равенств

$$\begin{aligned}
&\overline{u}(x) = \int_0^1 G_1(x,s)\mathcal{F}_1(\overline{u}, \underline{v}, s)ds, \quad \overline{v}(x) = \int_0^1 G_2(x,s)\mathcal{F}_2(\overline{u}, \overline{v}, s)ds,\\
&\underline{u}(x) = \int_0^1 G_1(x,s)\mathcal{F}_1(\underline{u}, \overline{v}, s)ds, \quad \underline{v}(x) = \int_0^1 G_2(x,s)\mathcal{F}_2(\underline{u}, \underline{v}, s)ds.
\end{aligned} \tag{51}$$

Правые части равенств (51) обращают уравнения (4) в тождества при $x \in (0,1)\backslash x_0$, поскольку гладкость функций $\mathcal{F}_1(\overline{u}(x), \underline{v}(x), x)$, $\mathcal{F}_1(\underline{u}(x), \overline{v}(x), x)$, $\mathcal{F}_2(\overline{u}(x), \overline{v}(x), x)$ и $\mathcal{F}_2(\underline{u}(x), \underline{v}(x), x)$ нарушается в единственной точке x_0. Равенство $\overline{u}_x(x_0 - 0) = \overline{u}_x(x_0 + 0)$ и аналогичные равенства для функций $\underline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$, $\underline{v}(x)$ следуют из равенств (51) непосредственно.

Исходя из этого, а также свойств функций Грина $G_{1,2}(x,s)$, можно заключить, что $(\overline{u}(x),\overline{v}(x))$ и $(\underline{u}(x),\underline{v}(x))$ являются решениями задачи (4) в смысле определения 2, тем самым у задачи (4) существует, по крайней мере, одно решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ в интервале

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x), \quad \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x).$$

Лемма 2 доказана.

3.2. Обоснование асимптотики

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств из [3], [4], будем строить верхнее и нижнее решения задачи (4) отдельно слева и справа от точки x_0 в таком же виде, как и асимптотическое приближение (13):

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \quad \overline{V}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \tag{52}$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \underline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \quad \underline{V}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \underline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1. \end{cases} \tag{53}$$

Функции $\overline{U}^{(\mp)}$, $\underline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ являются модификациями функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $V^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ (см. (14), (15)):

$$\begin{aligned} \overline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)) + \varepsilon^2\Pi_u^{(\mp)}(x,\varepsilon), \\ \underline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)) - \varepsilon^2\Pi_u^{(\mp)}(x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)) + \varepsilon^2\Pi_v^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 m_3^{(\mp)}v(\sigma) - \\ &\quad - \varepsilon^2 M_2^{(\mp)}v(0) - \varepsilon^3(M_3^{(\mp)}v(0) + m_3^{(\mp)}v(0)), \\ \underline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)) - \varepsilon^2\Pi_v^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^3 m_3^{(\mp)}v(\sigma) - \\ &\quad - \varepsilon^2 M_2^{(\mp)}v(0) - \varepsilon^3(M_3^{(\mp)}v(0) - m_3^{(\mp)}v(0)). \end{aligned} \tag{55}$$

Введенные здесь функции, $\Pi_u^{(\mp)}$ и $\Pi_v^{(\mp)}$, обеспечивают выполнение неравенства (A_3) и строятся аналогично [4], [14], [15]; слагаемые $-\varepsilon^i M_i^{(\mp)}v(0)$, $i = 2,3$, а также слагаемые, содержащие $m_3^{(\mp)}v(0)$, обеспечивают непрерывность верхнего и нижнего решений.

Функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ определим как решения систем уравнений

$$\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}(x) - \overline{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}(x) = A, \quad \overline{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}(x) + \overline{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}(x) = B, \tag{56}$$

при $x \in [0,x_0]$ для функций с верхним индексом “(–)” и при $x \in [x_0,1]$ для функций с верхним индексом “(+)” с положительными константами A и B. Здесь использованы обозначения (24). В силу условий 1–3, 6 эти системы однозначно разрешимы:

$$\alpha^{(\mp)}(x) = \frac{\overline{g}_v^{(\mp)}(x)A + \overline{f}_v^{(\mp)}(x)B}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\overline{\nu}^{(\mp)}(x)}, \quad \beta^{(\mp)}(x) = \frac{-\overline{g}_u^{(\mp)}(x)A + \overline{f}_u^{(\mp)}(x)B}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\overline{\nu}^{(\mp)}(x)}. \tag{57}$$

Покажем, что функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$ принимают строго положительные значения, для этого учтем, что

$$\overline{\nu}^{(\mp)}(x) = \overline{g}_v^{(\mp)}(x) + \frac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{g}_u^{(\mp)}(x) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{g}_u^{(\mp)}(x) < 0.$$

Из этих неравенств следует, что $\overline{g}_v^{(\mp)}(x) > 0$, и в свою очередь из (57), что функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ принимают положительные значения при положительных A и B.

Функции $q^{(-)}u(\tau)$, $q^{(-)}v(\tau)$, определенные при $\tau \le 0$ и $q^{(+)}u(\tau)$, $q^{(+)}v(\tau)$, определенные при $\tau \ge 0$ зададим как решения следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)q^{(\mp)}u(\tau) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)q^{(\mp)}v(\tau) + \\ + \left[\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\alpha^{(\mp)}(x_0) - \left(\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_0)\right)\beta^{(\mp)}(x_0) - d^u e^{-k^u|\tau|}\right] = 0,\end{gathered} \tag{58}$$

$$\frac{d^2 q^{(\mp)}v(\tau)}{d\tau^2} = \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)q^{(\mp)}v(\tau) + \tilde{G}^{(\mp)}(\tau), \quad q^{(\mp)}v(0) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0), \quad q^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \tag{59}$$

Здесь использовано обозначение $\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) := \nu^{(\mp)}(\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau), x_0)$, где функции $\nu^{(\mp)}(v, x)$ определены выражениями (11);

$$\begin{gathered}\tilde{G}^{(\mp)}(\tau) := \left[\left(\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau) - \bar{g}_u^{(\mp)}(x_0)\right) - \frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)}\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\right]\alpha^{(\mp)}(x_0) + \\ + \left[\left(\tilde{g}_v^{(\mp)}(\tau) - \bar{g}_v^{(\mp)}(x_0)\right) + \frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)}\left(\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_0)\right)\right]\beta^{(\mp)}(x_0) + \frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)} d^u e^{-k^u|\tau|};\end{gathered} \tag{60}$$

положительные константы d^u, k^u, δ^v будут выбраны ниже.

Прежде, чем выписать явные выражения для решений задач (59), необходимо исследовать решения однородных уравнений

$$W_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)W^{(\mp)}(\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}. \tag{61}$$

Функции $\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)$ непрерывны и ограничены соответственно на полупрямых $\tau \le 0$ и $\tau \ge 0$, также имеют место предельные соотношения $\lim_{\tau\to\mp\infty} \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) = \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0) > 0$ (см. обозначение (12) и условие 6). Согласно [20]–[22], при $\tau \le 0$ существует функция $W^{(-)}(\tau)$, являющаяся решением уравнения (61), в которое входят функции с верхним индексом “(–)”, а при $\tau \ge 0$ существует функция $W^{(+)}(\tau)$, являющаяся решением уравнения (61), в которое входят функции с верхним индексом “(+)”, и при достаточно больших $|\tau|$ справедливы оценки

$$\left|W^{(-)}(\tau)\right| \le C_1 e^{(\sqrt{\bar{\nu}^{(-)}(x_0)} - \sigma^{(-)})\tau}, \quad \tau < 0, \quad \left|W^{(+)}(\tau)\right| \le C_2 e^{-(\sqrt{\bar{\nu}^{(+)}(x_0)} - \sigma^{(+)})\tau}, \quad \tau > 0, \tag{62}$$

где $\sigma^{(\mp)}$ – константы соответственно из интервалов $0 < \sigma^{(\mp)} < \sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}$.

Каждую из этих функций можно однозначно определить как решение соответствующей краевой задачи:

$$W_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)W^{(\mp)}(\tau) = 0, \quad \tau \in R^{\mp}, \quad W^{(\mp)}(0) = 1, \quad W^{(\mp)}(\mp\infty) = +0. \tag{63}$$

Докажем две леммы относительно функций $W^{(\mp)}(\tau)$.

Лемма 3. *Если $\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0) > 0$ (см. условие 6), то для решений $W^{(\mp)}(\tau)$ задач (63) справедливы оценки*

$$\tilde{C}_1 \exp\left(-\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}|\tau|\right) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \bar{C}_1 \exp\left(-\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}|\tau|\right) + \bar{C}_2 \exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \tag{64}$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\omega^{(\mp)}$ – положительные константы, последние соответственно из интервалов $0 < \omega^{(\mp)} < \sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)}$.

Доказательство. Сведем уравнения (63) к эквивалентным интегральным уравнениям

$$W^{(\mp)} = e^{\pm\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau} + e^{\pm\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau}\int_0^{\tau} e^{\mp 2\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau_1}\int_{\mp\infty}^{\tau_1} e^{\pm\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau_2}(\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2) - \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0))W^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2.$$

Утверждение леммы следует из этих уравнений, оценок (62) и

$$\left|\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) - \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)\right| \le \bar{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right),$$

где $C > 0$, а $\omega^{(\mp)}$ – те же, что в (64), справедливы при достаточно больших $|\tau|$ в силу формулы Лагранжа, обозначений (11), (12) и оценок (32).

Лемма 4. *Пусть функции* $\nu^{(\mp)}(v,x)$ *удовлетворяют условию* 6. *Тогда решения* $W^{(\mp)}(\tau)$ *задач* (63) *строго положительны и выполняются неравенства*

$$\frac{dW^{(-)}}{d\tau}(0) > 0, \quad \frac{dW^{(+)}}{d\tau}(0) < 0. \tag{65}$$

Доказательство. Используем метод верхних и нижних решений из [5].

Введем функции

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) := \frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi(q_0)}, \quad \overline{W}^{(\mp)}(\tau) := \exp(Z^{(\mp)}(\tau)), \tag{66}$$

где

$$Z^{(\mp)}(\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2.$$

В первом равенстве (66) использовано обозначение (43).

Докажем, что функции $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ являются соответственно парами верхних и нижних решений задач (63).

В ходе доказательства будем использовать соотношения

$$\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) = \tilde{h}_v^{(\mp)}(\tau) - 2\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}, \tag{67}$$

где учтено равенство $\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau) = -\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau))^{-1}$, вытекающее из условия 1 и использованы обозначения (34).

Из условий 1, 3 и соотношения (67) следуют неравенства

$$\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau) > 0, \quad \overline{\nu}^{(\mp)}(x_0) < \overline{h}_v^{(\mp)}(x_0). \tag{68}$$

Перепишем функции $Z^{(\mp)}(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned} Z^{(-)}(\tau) &= \int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(-)}(\tau)} \frac{ds_1}{(\Phi^{(-)}(s_1))^2} \int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{s_1} \nu^{(-)}(s_2,x_0)ds_2, \quad \tau \le 0, \\ Z^{(+)}(\tau) &= \int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(+)}(\tau)} \frac{ds_1}{(\Phi^{(+)}(s_1))^2} \int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{s_1} \nu^{(+)}(s_2,x_0)ds_2, \quad \tau \ge 0. \end{aligned} \tag{69}$$

Из условия 6 следует, что функции $Z^{(\mp)}(\tau)$ принимают неположительные значения соответственно при $\tau \le 0$ и $\tau \ge 0$.

Оценим поведение функций $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ при больших значениях $|\tau|$. Будем считать, что τ_0 достаточно большое, чтобы для всех $|\tau| > \tau_0$ выполнялись оценки (см. [20]–[22]):

$$\begin{gathered} \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)) \le C\exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \\ \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2)))^{-1} \le \exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau_1 - \tau_2|\right), \end{gathered} \tag{70}$$

при $C > 0$, и

$$0 < \omega^{(\mp)} < \sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \sqrt{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}. \tag{71}$$

Выбор таких величин $\omega^{(\mp)}$ возможен в силу неравенств (32) (подробнее см. [10], [17]) и второй пары неравенств (68).

Используя эти оценки, получаем неравенства

$$\left|\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau_1}{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))}\int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2\right| \le C_0 + \frac{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}}|\tau|.$$

Обозначим

$$\nu_0 := \frac{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}}.$$

Если величины $\omega^{(\mp)}$ принадлежат интервалу (71), то выполняются неравенства $0 < \nu_0 < \sqrt{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}$, поэтому при $|\tau| > \tau_0$

$$\overline{W}^{(\mp)}(\tau) \ge Ce^{-\nu_0|\tau|} > Ce^{-\sqrt{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}|\tau|} > Ce^{-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|}, \quad C > 0. \tag{72}$$

Из полученных оценок (64), (72), а также первой пары оценок (70) следует, что при достаточно больших $|\tau|$ выполняются неравенства

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau).$$

Очевидно, что

$$\underline{W}^{(\mp)}(0) = W^{(\mp)}(0) = \overline{W}^{(\mp)}(0) = 1. \tag{73}$$

Согласно определению верхних и нижних решений задач (63), требуется еще доказать, что выполняются неравенства (см. [5])

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}, \tag{74}$$

$$\overline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\overline{W}^{(\mp)}(\tau) \le 0 \le \underline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\underline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}. \tag{75}$$

Подставив соотношения (67) в соответствующие выражения (69) и учитывая второе равенство (7), придем к представлению

$$\overline{W}^{(\mp)}(\tau) = \frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi(q_0)}\exp\left(-2\int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}\frac{ds_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(s_1)\right)^2}\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{s_1}\tilde{g}_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(s_2,x_0),s_2,x_0,0)\varphi_v^{(\mp)}(s_2,x_0)ds_2\right).$$

В силу положительности $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$ и первого неравенства (68) в показателе экспоненты стоит положительная величина, откуда следует справедливость неравенства (74) при $\tau < 0$ для функций с верхним индексом “(–)” и при $\tau > 0$ для функций с верхним индексом “(+)”.

Подставляя функции $\overline{W}^{(\mp)}$ и $\underline{W}^{(\mp)}$ в левые части уравнений (63), получаем

$$\begin{gathered}\overline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\overline{W}^{(\mp)}(\tau) = -2\frac{\exp(Z^{(\mp)}(\tau))}{(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)))^2}\times \\ \times\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}\tilde{\nu}^{(\mp)}(s)ds\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}(\tau)}g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(s_2,x_0),s_2,x_0,0)\varphi_v^{(\mp)}(s_2,x_0)ds_2,\end{gathered} \tag{76}$$

$$\underline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\underline{W}^{(\mp)}(\tau) = 2\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))g_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau). \tag{77}$$

В силу условия 6, первого неравенства (68) и положительности функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$ правые части равенств (76) неположительны, а равенств (77) – неотрицательны, следовательно, неравенства (75) выполняются.

Итак, функции $\overline{W}^{(\mp)}$ и $\underline{W}^{(\mp)}$ являются соответственно верхними и нижними решениям задач (63), поэтому для решений этих задач справедливы неравенства (см. [5])

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}. \tag{78}$$

Заметим, что функции $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ принимают строго положительные значения соответственно при $\tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}$, поэтому функции $W^{(\mp)}(\tau)$ строго положительны.

Выпишем выражения для производных $\overline{W}_\tau^{(\mp)}(0)$:

$$\overline{W}_\tau^{(\mp)}(0) = \frac{1}{\Phi(q_0)} \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{q_0} \tilde{v}^{(\mp)}(s)ds.$$

Здесь использовано обозначение (43). В силу условия 6 справедливы неравенства $\overline{W}_\tau^{(-)}(0) > 0$, $\overline{W}_\tau^{(+)}(0) < 0$. Отсюда с учетом (78) и (73) следует выполнение неравенств (65).

Лемма 4 доказана.

Выпишем явные выражения для решений задач (59):

$$q^{(\mp)}v(\tau) = \left(\delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0)\right)W^{(\mp)}(\tau) + W^{(\mp)}(\tau)\int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{[W^{(\mp)}(\tau_1)]^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} W^{(\mp)}(\tau_2)\tilde{G}^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2. \tag{79}$$

В силу экспоненциального убывания функций $W^{(-)}(\tau)$ и $\tilde{G}^{(-)}(\tau)$ при $\tau \to -\infty$, а также функций $\tilde{G}^{(+)}(\tau)$ и $W^{(+)}(\tau)$ при $\tau \to +\infty$ (см. оценки (64), (32) и обозначение (60)), для функций $q^{(\mp)}v(\tau)$ справедливы экспоненциальные оценки типа (41).

Согласно лемме 4, функции $W^{(\mp)}(\tau)$ принимают строго положительные значения. Положив в (58), (60) константу $d^u > 0$ достаточно большой, а константу $k^u > 0$ достаточно малой, можно добиться того, что функции $\tilde{G}^{(\mp)}(\tau)$, а также выражения в квадратных скобках в (58) будут принимать отрицательные значения соответственно на полупрямых $\tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}$. Вместе с этим выбор достаточно большой величины δ^v обеспечивает положительность функций $q^{(\mp)}v(\tau)$, что, в свою очередь, с учетом условий 1 и 3 влечет положительность $q^{(\mp)}u(\tau)$, причем для $q^{(\mp)}u(\tau)$ также будут справедливы экспоненциальные оценки вида (41).

Функцию $m^{(-)}u(\sigma)$, определенную при $\sigma \le 0$, и функцию $m^{(+)}u(\sigma)$, определенную при $\sigma \ge 0$, зададим как решения задач

$$\frac{d^2 m^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = \hat{f}_v^{(\mp)}(\sigma) \cdot m^{(\mp)}u(\sigma) + \hat{F}^{(\mp)}(\sigma), \quad m^{(\mp)}u(0) = \delta^u - \alpha^{(\mp)}(x_0) - q^{(\mp)}u(0), \quad m^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0, \tag{80}$$

где δ^u – положительная величина,

$$\hat{F}^{(\mp)}(\sigma) := \left[\hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{f}_u^{(\mp)}(0)\right]\left(\alpha^{(\mp)}(x_0) + q^{(\mp)}u(0)\right) + \left[\hat{f}_v^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(0)\right]\delta^v - D^u e^{-K^u|\sigma|},$$

положительная константа D^u выбирается достаточно большой, а положительная константа K^u достаточно малой таким образом, чтобы функции $\hat{F}^{(\mp)}(\sigma)$ принимали строго отрицательные значения соответственно на полупрямых $\sigma \le 0$ и $\sigma \ge 0$.

Решения задач (80) могут быть выписаны явно:

$$\begin{aligned} m^{(\mp)}u(\sigma) = (\delta^u - \alpha^{(\mp)}(x_0) - q^{(\mp)}u(0))\frac{\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0)}{\Psi(p_0, q_0)} + \\ + \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0)\int\limits_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{[\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1), q_0)]^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\sigma_1} \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2), q_0)\hat{F}^{(\mp)}(\sigma_2)d\sigma_2. \end{aligned} \tag{81}$$

Здесь использовано обозначение (43). Выбрав теперь положительную величину δ^u достаточно большой, добьемся положительности функций $m^{(\mp)}u(\sigma)$. Для них также справедливы оценки типа (41).

Функции $m_3^{(\mp)}v(\sigma)$ определяются как убывающие соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ вместе с первыми производными решения уравнений

$$\frac{d^2 m_3^{(\mp)}v}{d\sigma^2} = \hat{g}_u^{(\mp)}(\sigma)m^{(\mp)}u(\sigma) + [\hat{g}_u^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{g}_u^{(\mp)}(0)](\alpha^{(\mp)}(x_0) + q^{(\mp)}u(0)) + [\hat{g}_v^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{g}_v^{(\mp)}(0)]\delta^v$$

на полупрямой $\sigma \le 0$ для функции с верхним индексом “(–)” и на полупрямой $\sigma \ge 0$ для функции с верхним индексом “(+)”. Эти функции экспоненциально убывают соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ и имеют оценки типа (41) для $M_1^{(\mp)}u(\sigma)$.

Докажем теперь, что функции, определенные выражениями (52)–(55), удовлетворяют неравенствам (A_1)–(A_4), и тем самым действительно являются верхним и нижним решениями задачи (4).

Лемма 5. *При достаточно малых значениях* ε *пары функций* $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ *и* $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, *определенные выражениями* (52)–(55), *являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (4).

Доказательство. Для доказательства леммы 5 нужно проверить выполнение неравенств (A_1)–(A_4).

Условие (A_1) выполняется, поскольку функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$, $q^{(\mp)}u(\tau)$, $q^{(\mp)}v(\tau)$ и $m^{(\mp)}u(\sigma)$ принимают строго положительные значения в своих областях определения.

Для доказательства условия (A_2) заметим, что оно тем более будет выполнено, если справедливы неравенства

$$L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}), \quad L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}), \quad x \in (0,1)\backslash x_0. \tag{82}$$

Подставляя в эти неравенства функции $(\overline{U},\overline{V})$ и $(\underline{U},\underline{V})$, с учетом уравнений (22), (25), (26), (56), (59) и (80) получаем

$$L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) = -\varepsilon(A + d^u e^{-k^u|\tau|} + D^u e^{-K^u|\sigma|}) + O(\varepsilon^2),$$
$$L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) = \varepsilon(A + d^u e^{-k^u|\tau|} + D^u e^{-K^u|\sigma|}) + O(\varepsilon^2),$$
$$L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) = -\varepsilon B + O(\varepsilon^2), \quad L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}) = \varepsilon B + O(\varepsilon^2).$$

Неравенства (82) выполняются при достаточно малых ε и указанном выше выборе констант A, B, d^u, k^u и D^u, K^u.

Выполнение условий (A_3) доказывается так же, как в [4], [14], [15].

Проверим выполнение условия (A_4) для верхнего решения (для нижнего решения это можно сделать аналогично). Принимая во внимание условия сшивания (42), скачки производных каждой из компонент верхнего решения в точке x_0 можно выразить как

$$\left.\left(\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx} - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}\right)\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\varepsilon}\left.\left(\frac{dm^{(-)}u}{d\sigma} - \frac{dm^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0} + O(1), \tag{83}$$

$$\left.\left(\frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx} - \frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}\right)\right|_{x=x_0} = \left.\left(\frac{dq^{(-)}v}{d\tau} - \frac{dq^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + O(\varepsilon). \tag{84}$$

Используя явные выражения (79) и (81), получаем равенства

$$\left.\left(\frac{dq^{(-)}v}{d\sigma} - \frac{dq^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} = (W_\tau^{(-)}(0) - W_\tau^{(+)}(0))\delta^v - W_\tau^{(-)}(0)\beta^{(-)}(x_0) + W_\tau^{(+)}(0)\beta^{(+)}(x_0) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{0} W^{(-)}(\tau)\tilde{G}^{(-)}(\tau)d\tau + \int_{0}^{+\infty} W^{(+)}(\tau)\tilde{G}^{(+)}(\tau)d\tau$$

(здесь мы учли равенство (73)) и

$$\left.\left(\frac{dm^{(-)}u}{d\sigma}-\frac{dm^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0}=\frac{\partial H^u}{\partial u}(q_0,p_0)\delta^u-\frac{1}{\Psi(p_0,q_0)}\Big([\alpha^{(-)}(x_0)+q^{(-)}u(0)]f^{(-)}(q_0,p_0,x_0,0)-$$
$$-[\alpha^{(+)}(x_0)+q^{(+)}u(0)]f^{(+)}(q_0,p_0,x_0,0)\Big)+$$
$$+\frac{1}{\Psi(p_0,q_0)}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\Psi^{(-)}(\hat{u}^{(-)}(\sigma),q_0)\hat{F}^{(-)}(\sigma)d\sigma+\int\limits_{0}^{+\infty}\Psi^{(+)}(\hat{u}^{(+)}(\sigma),q_0)\hat{F}^{(+)}(\sigma)d\sigma\right).$$

При достаточно малых ε правые части этих равенств, а значит, и правые части равенств (83), (84) могут быть сделаны положительными за счет достаточно больших δ^v, δ^u в силу леммы 4 и второго неравенства из условия 5.

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Применяя к задаче (4) лемму 5, в которой в качестве верхних и нижних решений выступают функции $(\underline{U},\underline{V})$ и $(\overline{U},\overline{V})$, где $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$ определены выражениями (52)–(55), получаем, что у задачи (4) существует решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$, для которого справедливы неравенства (47).

Равномерную оценку (44) с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно получить так же, как и в [4], если построить асимптотическое приближение второго порядка решения задачи (4), а затем по аналогии с (52)–(55) верхнее и нижнее решения этой задачи, являющиеся модификациями асимптотического приближения второго порядка. Тогда оценка (44) будет следовать из неравенств (47).

Теорема 1 доказана.

4. ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1–6. *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon>0$ *решение* $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ *задачи* (1) *локально единственно как решение задачи* (4) *и асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова с областью притяжения не меньше* $[\underline{U}(x,\varepsilon),\overline{U}(x,\varepsilon)]\times[\underline{V}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon)]$, *где* $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ *определяются выражениями* (52)–(55).

Прежде чем переходить к доказательству, введем некоторые обозначения и определения.

Для любого $T>0$ положим $D_T:=\{(x,t)\in(0,1)\times(0,T]\}$, $D_T^{(-)}:=\{(x,t)\in(0,x_0)\times(0,T]\}$, $D_T^{(+)}:=$ $:=\{(x,t)\in(x_0,1)\times(0,T]\}$.

Обозначим

$$L^t_{u,\varepsilon}(u,v):=\varepsilon^4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-f(u,v,x,\varepsilon),\qquad L^t_{v,\varepsilon}(u,v):=\varepsilon^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определение 4. Будем называть задачу

$$\varepsilon^4y_{xx}-y_t=f(y,z,x,\varepsilon),\quad x\in(0,1),\quad \varepsilon^2z_{xx}-z_t=g(y,z,x,\varepsilon),\quad x\in(0,1),\quad t\in\mathbb{R}^+,$$
$$y_x(0,t)=y_x(1,t)=z_x(0,t)=y_x(1,t)=0,\quad t\in(0,T],\tag{85}$$
$$\underline{U}(x,\varepsilon)\le y(x,0)=u^0(x)\le\overline{U}(x,\varepsilon),\quad \underline{V}(x,\varepsilon)\le z(x,0)=v^0(x)\le\overline{V}(x,\varepsilon),\quad x\in[0,1],$$

где T – любое положительное число, *вспомогательной к задаче* (1).

Для доказательства теоремы 2 сначала докажем существование и единственность решения вспомогательной задачи в смысле определения 1, в котором временной промежуток $\mathbb{R}_0^+$ сужен до $[0,T]$, а затем расширим временной интервал до $\mathbb{R}_0^+$, пользуясь произвольностью T.

Доказательство для вспомогательной задачи проведем с помощью метода верхних и нижних решений.

Определение 5. Пары функций $(\overline{U}^T(x,t),\overline{V}^T(x,t))$ и $(\underline{U}^T(x,t),\underline{V}^T(x,t))$ из $C([0,1]\times[0,T])\cap$ $\cap\, C^{1,1}(([0,1]\backslash x_0)\times[0,T])\cap\, C^{2,1}(((0,1)\backslash x_0)\times(0,T])$ называются соответственно *верхним и нижним решениями задачи* (85), если для них выполняются следующие неравенства:

(B_1). $\underline{U}^T(x,t)\le\overline{U}^T(x,t)$, $\underline{V}^T(x,t)\le\overline{V}^T(x,t)$, $(x,t)\in\overline{D}_T$;

(B_2). $L^t_{u,\varepsilon}(\overline{U}^T,v)\le 0\le L^t_{u,\varepsilon}(\underline{U}^T,v)$, $\underline{V}^T\le v\le\overline{V}^T$, $(x,t)\in D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)}$, $L^t_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}^T)\le 0\le L^t_{u,\varepsilon}(u,\underline{V}^T)$, $\underline{U}^T\le u\le\overline{U}^T$, $(x,t)\in D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)}$;

(B_3). $\overline{U}^T_x(0,t)\le 0\le\underline{U}^T_x(0,t)$, $\overline{U}^T_x(1,t)\ge 0\ge\underline{U}^T_x(1,t)$, $t\in[0,T]$, $\overline{V}^T_x(0,t)\le 0\le\underline{V}^T_x(0,t)$, $\overline{V}^T_x(1,t)\ge 0\ge$ $\ge\underline{V}^T_x(1,t)$, $t\in[0,T]$;

(B_4). $\overline{U}^T_x(x_0-0,t)-\overline{U}^T_x(x_0+0,t)\ge 0$, $\underline{U}^T_x(x_0-0,t)-\underline{U}^T_x(x_0+0,t)\le 0$, $t\in[0,T]$, $\overline{V}^T_x(x_0-0,t)-$ $-\overline{V}^T_x(x_0+0,t)\ge 0$, $\underline{V}^T_x(x_0-0,t)-\underline{V}^T_x(x_0+0,t)\le 0$, $t\in[0,T]$.

Лемма 6. *Пусть некоторые* $(\overline{U}^T,\overline{V}^T)$ *и* $(\underline{U}^T,\underline{V}^T)$ *являются соответственно верхним и нижним решениями в смысле определения* 5. *Тогда для любого* $T>0$ *существует единственное решение* $(y_\varepsilon(x,t),z_\varepsilon(x,t))$ *вспомогательной задачи* (85), *причем в* $\overline{D}^T$ *выполняются неравенства*

$$\underline{U}^T(x,t)\le y_\varepsilon(x,t)\le\overline{U}^T(x,t),\quad \underline{V}^T(x,t)\le z_\varepsilon(x,t)\le\overline{V}^T(x,t).\tag{86}$$

Доказательство. Как и в предыдущем разделе определим итерационные процессы для построения последовательностей верхних и нижних решений начально-краевой задачи (85):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\overline{y}^{(k)}}{\partial t}-\varepsilon^4\frac{\partial^2\overline{y}^{(k)}}{\partial x^2}+c\overline{y}^{(k)}=\mathcal{F}_1(\overline{y}^{(k-1)},\underline{z}^{(k-1)},x,t),\quad (x,t)\in D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)},\\
\overline{y}^k_x(0,t)=\overline{y}^k_x(1,t)=0,\quad 0\le t\le T,\quad \overline{y}^{(k)}(x,0)=u^0(x),\quad 0\le x\le 1;\\
\frac{\partial\overline{z}^{(k)}}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\overline{z}^{(k)}}{\partial x^2}+c\overline{z}^{(k)}=\mathcal{F}_2(\overline{y}^{(k-1)},\overline{z}^{(k-1)},x,t),\quad (x,t)\in D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)},\\
\overline{z}^{(k)}_x(0,t)=\overline{z}^{(k)}_x(1,t)=0,\quad 0\le t\le T,\quad \overline{z}^{(k)}(x,0)=v^0(x),\quad 0\le x\le 1;\\
\frac{\partial\underline{y}^{(k)}}{\partial t}-\varepsilon^4\frac{\partial^2\underline{y}^{(k)}}{\partial x^2}+c\underline{y}^{(k)}=\mathcal{F}_1(\underline{y}^{(k-1)},\overline{z}^{(k-1)},x,t),\quad (x,t)\in D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)},\\
\underline{y}^{(k)}_x(0,t)=\underline{y}^{(k)}_x(1,t)=0,\quad 0\le t\le T,\quad \underline{y}^{(k)}(x,0)=u^0(x),\quad 0\le x\le 1;\\
\frac{\partial\underline{z}^{(k)}}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2\underline{z}^{(k)}}{\partial x^2}+c\underline{z}^{(k)}=\mathcal{F}_2(\underline{y}^{(k-1)},\underline{z}^{(k-1)},x,t),\quad (x,t)\in D_T^{(-)}\cup D_T^{(+)},\\
\underline{z}^{(k)}_x(0,t)=\underline{z}^{(k)}_x(1,t)=0,\quad 0\le t\le T,\quad \underline{z}^{(k)}(x,0)=v^0(x),\quad 0\le x\le 1,
\end{gathered}\tag{87}$$

где $k=1,2,\ldots$, c — достаточно большая положительная константа,

$$\mathcal{F}_1(y,z,x,t):=-f(y,z,x,\varepsilon)+cy,\quad \mathcal{F}_2(y,z,x,t):=-g(y,z,x,\varepsilon)+cz.$$

Также полагаем $(\overline{y}^{(0)},\overline{z}^{(0)})=(\overline{U}^T,\overline{V}^T)$ и $(\underline{y}^{(0)},\underline{z}^{(0)})=(\underline{U}^T,\underline{V}^T)$.

Согласно [23], каждая из задач (87) имеет единственное решение из класса $C^{1,1}([0,1]\times[0,T])$. Действуя так же, как в [12], можно показать, что эти решения принадлежат классу $C^{2,1}(((0,1)\backslash x_0)\times(0,T])$.

Поскольку функции $\overline{y}^{(0)}$, $\overline{z}^{(0)}$, $\underline{y}^{(0)}$, $\underline{z}^{(0)}$ являются кусочно-гладкими и для каждого значения $t\in[0,T]$ удовлетворяют неравенствам (B_4), то, повторяя рассуждения из [5] и используя утверждение, аналогичное лемме 1 для параболических уравнений из [12], можно доказать, что последовательности верхних и нижних решений в $\overline{D}^T$ обладают свойством монотонности и ограниченности типа (49), и, следовательно, существуют их предельные функции $\overline{y}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$, $\overline{z}(x,t)$ $\underline{z}(x,t)$.

Обозначим через $G_1(x,s,t-\tau)$ функцию Грина первой из задач (87).

Рассмотрим для каждого натурального номера k функцию

$$\overline{y}^{(k)}(x,t) = \int_0^1 G_1(x,s,t)u^0(s)ds + \int_0^t d\tau \int_0^1 G_1(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_1^{(k-1)}(\overline{y}^{(k-1)},\underline{z}^{(k-1)},s,\tau)ds. \tag{88}$$

Эта функция удовлетворяет первому уравнению (87) всюду, кроме точки x_0. Докажем, что она является гладкой в D_T. Тогда возможность представления решения задач (87) в виде (88) будет следовать из единственности решения.

Обозначим

$$\varkappa_1^{(k)}(t) := f^{(-)}(\overline{y}^{(k)}(x_0,t),\underline{z}^{(k)}(x_0,t),x_0,\varepsilon) - f^{(+)}(\overline{y}^{(k)}(x_0,t),\underline{z}^{(k)}(x_0,t),x_0,\varepsilon),$$
$$f_0^{(k)}(x,t) := f(\overline{y}^{(k)}(x,t),\underline{z}^{(k)}(x,t),x,\varepsilon) + \Theta(x-x_0)\varkappa_1^{(k)}(t),$$

где $\Theta(x-x_0)$ – функция Хевисайда, определенная как $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Заметим, что функции $f_0^{(k)}(x,t)$ непрерывны.

Пусть

$$\mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(x,t) := \mathcal{F}_1(\overline{y}^{(k-1)},\underline{z}^{(k-1)},x,t) - \Theta(x-x_0)\varkappa_1^{(k-1)}(t) \equiv -f_0^{(k-1)}(x,t) + c\overline{y}^{(k-1)}(x,t).$$

Функции $\mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(x,t)$ также являются непрерывными.

Решения первой задачи (87) для каждого натурального k можно представить в виде

$$\overline{y}^{(k)}(x,t) = Y^{(k)}(x,t) + \Omega^{(k)}(x,t), \tag{89}$$

где

$$Y^{(k)}(x,t) := \int_0^1 G_1(x,s,t)u^0(s)ds + \int_0^t d\tau \int_0^1 G_1(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(s,\tau)ds, \tag{90}$$

$$\Omega^{(k)}(x,t) := \int_0^t d\tau \int_{x_0}^1 G_1(x,s,t-\tau)\varkappa_1^{(k-1)}(\tau)ds. \tag{91}$$

Очевидно, что $Y^{(k)}(x,t)$ является классическим решением задачи

$$\frac{\partial Y^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 Y^{(k)}}{\partial x^2} + cY^{(k)} = \mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(x,t), \quad (x,t) \in D_T,$$
$$Y_x^{(k)}(0,t) = Y_x^{(k)}(1,t) = 0, \quad Y^{(k)}(x,0) = u^0(x).$$

Функция $\Omega^{(k)}(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega_t^{(k)} - \varepsilon^4\Omega_{xx}^{(k)} + c\Omega^{(k)} = \Theta(x-x_0)\varkappa_1^{(k-1)}(t), \quad (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)},$$

однородным условиям Неймана на краях отрезка $[0,1]$ и однородным начальным условиям.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Omega}_x^{(k)}(x,t) := \int_0^t d\tau \int_{x_0}^1 \frac{\partial}{\partial x} G_1(x,s,t-\tau)\varkappa_1^{(k-1)}(\tau)ds.$$

Эта функция непрерывна всюду в D_T (см. [24], а также оценки функции Грина в [25]) и совпадает всюду в $D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$ с производной функции (91):

$$\Omega_x^{(k)}(x,t) := \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t d\tau \int_{x_0}^1 G_1(x,s,t-\tau)\varkappa_1^{(k)}(\tau)ds.$$

Справедлива цепочка равенств

$$\frac{\Omega^{(k)}(x_0+\Delta x,t)-\Omega^{(k)}(x_0,t)}{\Delta x} = \Omega_x^{(k)}(x_0+\theta\Delta x,t) = \tilde{\Omega}_x^{(k)}(x_0+\theta\Delta x,t), \qquad \theta\in(0,1). \tag{92}$$

В силу непрерывности $\tilde{\Omega}_x^{(k)}(x,t)$ существует предел правой части цепочки при $\Delta x\to 0$, следовательно, существует и предел левой части: $\Omega_x^{(k)}(x_0,t) = \tilde{\Omega}_x^{(k)}(x_0,t)$. Гладкость функции $\Omega^{(k)}(x,t)$ во всех остальных точках области D_T следует из выражения (91) и непрерывности функции $\varkappa_1^{(k)}$.

Из непрерывности в точке x_0 производных функций $Y_x^{(k)}(x,t)$ и $\Omega_x^{(k)}(x,t)$ следует непрерывность производной их суммы $\overline{y}_x^{(k)}(x,t)$.

Непрерывность производных $\overline{z}_x^{(k)}(x,t)$, $\underline{y}_x^{(k)}(x,t)$, $\underline{z}_x^{(k)}(x,t)$ доказывается аналогично.

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, с использованием теоремы Леви можно доказать непрерывность предельных функций $\overline{y}(x,t)$, $\overline{z}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$, $\underline{z}(x,t)$ в $\overline{D}^T$, а затем и справедливость предельных равенств при $k\to+\infty$, в частности,

$$\overline{y}(x,t)\int_0^1 G_1(x,s,t)u^0(s)ds + \int_0^t d\tau\int_0^1 G_1(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_1(\overline{y},\underline{z},s,\tau)ds. \tag{93}$$

Аналогичные равенства справедливы для функций $\overline{z}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$ и $\underline{z}(x,t)$.

Непрерывность производных $\overline{y}_x(x,t)$, $\overline{z}_x(x,t)$, $\underline{y}_x(x,t)$ и $\underline{z}_x(x,t)$ доказывается точно так же, как это было сделано для функций $\overline{y}^{(k)}(x,t)$.

Из равенств (93) и единственности решения параболической задачи, согласно [5], следует, что пара функций $y_\varepsilon(x,t)=\overline{y}(x,t)=\underline{y}(x,t)$, $z_\varepsilon(x,t)=\overline{z}(x,t)=\underline{z}(x,t)$ является единственным решением задачи (85), удовлетворяющим неравенствам (86).

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим теперь функции

$$\begin{aligned}
&\overline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + (\overline{U}(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \overline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + (\overline{V}(x,\varepsilon)-v_\varepsilon(x))e^{-\lambda t},\\
&\underline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + (\underline{U}(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + (\underline{V}(x,\varepsilon)-v_\varepsilon(x))e^{-\lambda t},
\end{aligned} \tag{94}$$

в которые входят верхние и нижние решения $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ задачи (4) и точное решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ задачи (4), которое существует, согласно теореме 1. Здесь λ — положительная константа.

В полной аналогии с [11] можно доказать, что при достаточно малом λ функции (94) являются нижним и верхним решениями задачи (85) для любого $T>0$.

Далее, применяя лемму 6 к решению задачи (85) и учитывая произвольность $T>0$, заключаем существование единственного решения $(y_\varepsilon(x,t),z_\varepsilon(x,t))$ в смысле определения 1 задачи (1) для начальных функций $u^0(x)$, $v^0(x)$, заданных на промежутках

$$\begin{aligned}
&\underline{U}^T(x,0,\varepsilon) = \underline{U}(x,\varepsilon) \le u^0(x) \le \overline{U}(x,\varepsilon) = \overline{U}^T(x,0,\varepsilon), \qquad x\in[0,1],\\
&\underline{V}^T(x,0,\varepsilon) = \underline{V}(x,\varepsilon) \le v^0(x) \le \overline{V}(x,\varepsilon) = \overline{V}^T(x,0,\varepsilon), \qquad x\in[0,1].
\end{aligned} \tag{95}$$

Кроме того, верны равенства

$$\underline{U}^T(x,t,\varepsilon) \le y_\varepsilon(x,t) \le \overline{U}^T(x,t,\varepsilon), \quad \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) \le z_\varepsilon(x,t) \le \overline{V}^T(x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+. \tag{96}$$

Из этих неравенств с учетом выражений (94) следуют предельные равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\left|y_\varepsilon(x,t)-u_\varepsilon(x)\right|=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\left|z_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x)\right|=0.$$

Эти равенства означают асимптотическую устойчивость по Ляпунову стационарного решения задачи (1), а в силу единственности функций $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ из этих предельных равенств и оценок (47), установленных в ходе доказательства теоремы 1, вытекает единственность решения $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ задачи (4) в интервале (47).

Наконец, положив $t=0$ в выражениях (94) с учетом соотношений (95), получаем, что область притяжения стационарного решения не меньше $[\underline{U}(x,\varepsilon),\overline{U}(x,\varepsilon)]\times[\underline{V}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon)]$, где функции $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$ определяются равенствами (52)–(55).

Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен наиболее простой для анализа случай задачи на отрезке. Несмотря на это, полученных результатов уже достаточно для разработки и обоснования различных физических моделей, особенно в тех случаях, когда предпочтительно или попросту неизбежно применение численных методов. Более того, естественным продолжением работы будет ее распространение на двумерные задачи. Кроме того, результаты работы могут быть полезными для разработки эффективных методов численного моделирования задач с большими градиентами (см. [26]–[31]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorova A.E., Levashova N.T., Semina A.E., Mel'nikova A.A.* The application of a distributed model of active media for the analysis of urban ecosystems development // Math. Biology and Bioinformat. 2018. V. 13. № 2. P. 454–465.
2. *Levashova N.T., Sidorova A.E., Semina A.E., Ni Mingkang.* A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // Sustainability. 2019. V. 11. № 13. P. 3658.
3. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 7. С. 1077–1085.
4. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
5. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992.
6. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 611–620.
7. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
8. *Carl S., Motreanu D.* Extremal solutions for nonvariational quasilinear elliptic systems via expanding trapping regions // Monatshefte für Mathematik. 2017. V. 182. № 4. P. 801–821.
9. *Bögelein V., Duzaar F., Korte R., Scheven C.* The higher integrability of weak solutions of porous medium systems // Adv. in Nonlinear Analys. 2018. V. 8. № 1. P. 1004–1034.
10. *Давыдова М.А., Захарова С.А., Левашова Н.Т.* Об одной модельной задаче для уравнения реакция–диффузия–адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 9. С. 1548–1559.
11. *Мельникова А.А.* Существование и устойчивость периодического решения типа фронта в двухкомпонентной системе параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1184–1200.
12. *Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A.* The solution with internal transition layer of the reactiondiffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. P. 1–15. https://doi.org/10.1002/mma.5134
13. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Наука,1990.

14. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений с разными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 877–899.
15. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1427–1447.
16. *Fife P.C., McLeod J.B.* The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 65. № 4. P. 335–361.
17. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
18. *Александров А.Д.* Исследования о принципе максимума IV // Изв. вузов. Матем. 1960. № 3. С. 3–15.
19. *Stakgold I., Holst M.* Green's Functions and Boundary Value Problems. Hoboken, New Jersey: John Wiley Sons, Inc., 2011.
20. *Coppel W.A.* Dichotomies in Stability Theory. Heidelberg: Springer-Verlag GmbH, 1978.
21. *Palmer K.J.* Exponential dichotomies for almostperiodicequations // Proceed. of the Am. Math. Soc. 1987. V. 101. № 2. P. 293–298.
22. *Oleh Omel'chenko, Lutz Recke.* Boundary layer solutions to singularly perturbed problems via the implicit function theorem // Asymptotic Analys. 2009. V. 62. P. 207–225.
23. *De Coster C., Obersnel F., Omari P.A.* A qualitative analysis via lower and upper solutions of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness // Handbook of differential equations: ordinary differential equations. 2006. V. 3. P. 203–339.
24. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
25. *Соболевский П.Е.* Оценки функции Грина уравнений в частных производных второго порядка параболического типа // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 2. Р. 313–316.
26. *O'Riordan E., Quinn J.* Parameter-uniform numerical method for some linear and nonlinear singularly perturbed convection-diffusion boundary turning point problems // BIT Numerical Math. 2011. V. 51. № 2. P. 317–337.
27. *Kopteva N., O'Riordan E.* Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations // Internat. J. of Numerical Analys. and Model. 2010. V. 7. № 3. P. 393–415.
28. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
29. *Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction-diffusion equation with the location of moving front data // Comput. and Math. with Appl. 2019. V. 77. № 5. P. 1245–1254.
30. *Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N., Yagola A.G.* Application of asymptotic analysis for solving the inverse problem of determining the coefficient of linear amplification in burgers' equation // Moscow University Phys. Bull. 2019. V. 74. № 2. P. 131–136.
31. *Лукьяненко Д.В., Мельникова А.А.* Использование методов асимптотического анализа для решения одной коэффициентной обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия с кубической нелинейностью // Вычислит. методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2019. Т. 20. С. 363–377.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1873–1893

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КАВИТАЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ КЛИНА. II[1]

© 2021 г. В. И. Власов[1,2,*], С. Л. Скороходов[1,**]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Россия

[2] 119991 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: vlasov@ccas.ru,

**e-mail: sskorokhodov@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2021 г.
Переработанный вариант 18.04.2021 г.
Принята к публикации 19.05.2021 г.

В работе, являющейся продолжением предыдущих исследований авторов, дано аналитическое решение плоской задачи о симметричном кавитационном обтекании клина идеальной жидкостью для двуспиральной схемы Тулина замыкания каверны. Решение выражено через гипергеометрическую функцию Лауричеллы. Выполнена развернутая численная реализация решения и проведен его асимптотический анализ. Изучена спиральная структура вихрей, замыкающих каверну, в том числе получена оценка размера вихря. Найдена асимптотика по $x \to \infty$ ширины следа. Установлены также асимптотики коэффициента сопротивления $\mathbf{C}_x$ и относительных размеров каверны при стремлении числа кавитации Q к нулю. Библ. 24. Фиг. 8. Табл. 2.

Ключевые слова: плоская теория струй идеальной жидкости, кавитационное обтекание клина, двуспиральная схема Тулина, явное аналитическое решение, гипергеометрическая функция Лауричеллы, численная реализация, асимптотический анализ течения.

DOI: 10.31857/S0044466921110156

1. ВВЕДЕНИЕ. ДВУСПИРАЛЬНАЯ[2] СХЕМА ТУЛИНА

1.1. Получено аналитическое решение плоской задачи теории струй идеальной жидкости (см. [1]–[4]) о симметричном кавитационном обтекании клина для ряда классических схем замыкания каверны[3]. В первой части работы (см. [5]) решение для схем Гельмгольца–Кирхгофа, Жуковского–Рошко и Рябушинского было выписано через гипергеометрические функции Гаусса и Аппéля. В настоящей, второй части работы решение для двуспиральной схемы Тулина (см. [6]) дано в терминах гипергеометрической функции Лауричеллы[4]. В дальнейшем планируется публикация аналитических решений для односпиральной (первой) схемы Тулина (см. [13]) и схемы Эфроса (см. [14]).

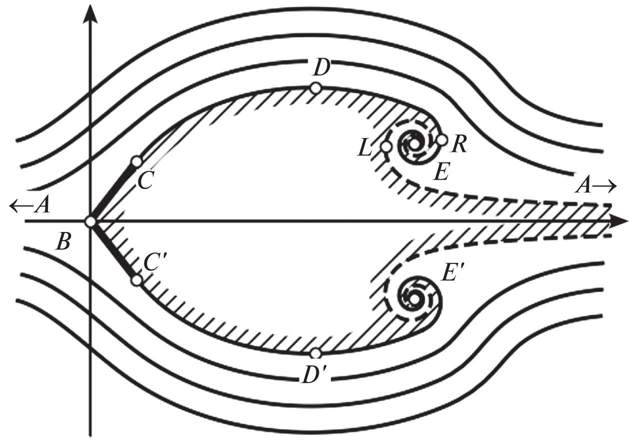
1.2. Как и принято в плоской теории струй идеальной жидкости (см. [1], [2], [15]), картина течения располагается на комплексной плоскости $z = x + iy$ и описывается в терминах комплексного потенциала $w = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, представляющего собой аналитическую функцию переменного z, где $\varphi(x, y)$ – потенциал скорости, а $\psi(x, y)$ – функция тока, так что уравнение линии тока есть $\psi(x, y) = \varepsilon$, где $\varepsilon = \text{const}$. Скорость жидкости $\mathbf{V}(z) = \operatorname{grad}\varphi(x, y)$ выражается через комплексный потенциал в виде его сопряженной производной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

[2] Ее часто называют также второй схемой Тулина.

[3] Эта задача для некоторых схем замыкания каверны рассматривалась в монографиях [1]–[4] и цитированных в них источниках. О проблеме замыкания каверны см. [1]–[3], [7]–[9].

[4] Об этой функции см. [10]–[12].



Фиг. 1. Картина линий тока течения для схемы Тулина.

$$\mathbf{V}(z) = V(z)e^{i\theta(z)} = \overline{f}'(z), \tag{1}$$

где $V(z) = |\mathbf{V}(z)|$ и $\theta(z) = \arg \mathbf{V}(z)$ – соответственно модуль и угол наклона скорости к оси x. Давление $p(z)$ в потоке связано со скоростью законом Бернулли

$$p(z) = \mathrm{const} - \frac{1}{2}\rho V^2(z), \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости. Через комплексный потенциал выражаются и все остальные характеристики течения, в том числе коэффициент сопротивления $\mathbf{C}_x$, а также относительные длина $\mathfrak{L}$ и ширина $\mathfrak{W}$ каверны (см. разд. 3–6).

1.3. Рассмотрим симметричное относительно продольной оси x кавитационное обтекание клина неограниченным по ширине потоком идеальной жидкости при замыкании каверны по двуспиральной схеме Тулина. Картина такого течения представлена на фиг. 1 в виде распределения линий тока. Через A обозначена бесконечно удаленная точка на плоскости z; скорость жидкости на бесконечности равна V_∞ и направлена вдоль оси x. Стенки клина, изображенные жирными линиями, имеют длину l и наклонены к оси x под углами $\pm\pi\alpha$.

Подходя к острию B клина, поток на фиг. 1 разделяется на два: верхний и нижний. Вместе с ним на этом острие разветвляется и линия тока, изначально идущая по отрицательной вещественной полуоси (AB) и считающаяся “нулевой”, т.е. отвечающая уравнению $\psi(x, y) = 0$. Каждая из ее ветвей вместе с соответствующим потоком идет по своей, верхней (BC) или нижней $(C'B)$ стенке клина[5], в конце которой она отрывается от его кромки (обозначенной соответственно через C или C'); таким образом, выполняются условия

$$\theta(z) = 0, \quad z \in (AB); \quad \theta(z) = \begin{cases} \pi\alpha, & z \in (BC), \\ -\pi\alpha, & z \in (C'B). \end{cases} \tag{3}$$

Предполагается, что эти потоки при их дальнейшем движении “возвращаются” в бесконечно удаленную точку A (двигаясь вправо на фиг. 1), а между ограничивающими эти потоки ветвями нулевой линии возникает пространство, которое моделирует каверну – область, заполненную парами или газом, а также след, т.е. присоединенную к каверне вниз по потоку область, представляющую собой вспененное (пронизанное мелкими пузырьками) турбулентное течение[6].

Оторвавшиеся от кромок C и C' участки (CDE) и $(E'D'C')$ нулевой линии тока изображены на фиг. 1 сплошными линиями (обычной толщины). Они представляют собой свободные линии тока, т.е. дуги, вид которых заранее не известен и находится из условия, что со стороны газов, за-

[5] Порядок букв в обозначениях граничных дуг соответствует правильному порядку обхода области (см. [15]), т.е. такому, при котором она остается слева.

[6] Описание физических процессов, происходящих в зоне замыкания каверны, а также обсуждение вопросов формирования и моделирования следа имеется в [1], [3], [6], [8], [9], [16].

полняющих каверну, на эти дуги действует заданное постоянное давление p_Q (меньшее, чем давление p_∞ на бесконечности). Тогда, согласно (2), на них должен быть постоянен и модуль скорости жидкости, обозначаемый через V_Q ($>V_\infty$), т.е. должно выполняться условие

$$V(z) = V_Q, \quad z \in (CDE) \cup (E'D'C'). \tag{4}$$

Это условие, как показано далее, приводит к тому, что дуги (CDE) и $(E'D'C')$ соответственно вблизи точек E и E' являются закручивающимися спиралевидными линиями и образуют вихри с центрами в этих точках (фиг. 1). Если следовать движению жидкости, например, по линии (DE), то она будет стремиться к точке E, закручиваясь по часовой стрелке.

Далее, в данной схеме Тулина принимается, что исходящие из точек E и E' продолжения (EA) и (AE') нулевой линии (изображенные на фиг. 1 штриховыми линиями) представляют собой, как и предшествующие участки, свободные линии тока, но с другим заданным на них давлением, совпадающим с давлением на бесконечности $p_\infty > p_Q$; тогда с учетом (2) получаем

$$V(z) = V_\infty, \quad z \in (EA) \cup (AE'). \tag{5}$$

Из этого условия (как показано ниже) следует, что дуги (EA) и φ_C соответственно вблизи точек E и E' являются раскручивающимися спиралевидными линиями (фиг. 1). В частности, если следовать движению жидкости по линии (EA), то она, выйдя из точки E, будет удаляться от него, раскручиваясь против часовой стрелки.

Таким образом, условия (4), (5) приводят к тому, что линии (DE) и (EA) вблизи точки E (а линии $(E'D')$, (AE') — вблизи точки E') образуют вихрь, который (как показано ниже) асимптотически представляет собой пару подобных[7] логарифмических спиралей. С этим обстоятельством и связано название рассматриваемой схемы Тулина.

Согласно Тулину (см. [6]), центры E и E' вихрей обозначают место замыкания каверны (фиг. 1), за которым ниже по потоку расположен след, так что исходящие из этих центров участки (EA) и (AE') нулевой линии тока принимаются в качестве граничных линий следа, который, распространяясь вниз по потоку, простирается до бесконечности — точки A.

Через D обозначена точка на верхней ветви, а через и D' — на нижней ветви нулевой линии (фиг. 1), в которых скорость направлена, как и в бесконечности, параллельно оси x. Поскольку линии тока, ограничивающие каверну, как известно из [1], [2], должны быть обращены выпуклостью в сторону жидкости, то D является наивысшей, а D' — наинизшей точками каверны. Расстояние между этими точками, отнесенное к размеру основания $2l\sin(\pi\alpha)$ клина, принимается в качестве относительной ширины $\mathfrak{W}$ каверны, т.е.

$$\mathfrak{W} := \frac{y_D}{l\sin(\pi\alpha)}, \tag{6}$$

где y_D — ордината[8] точки D на плоскости z. В качестве относительной длины $\mathfrak{L}$ каверны принимаем отношение абсциссы точки E к размеру основания клина:

$$\mathfrak{L} := \frac{x_E}{2l\sin(\pi\alpha)}. \tag{7}$$

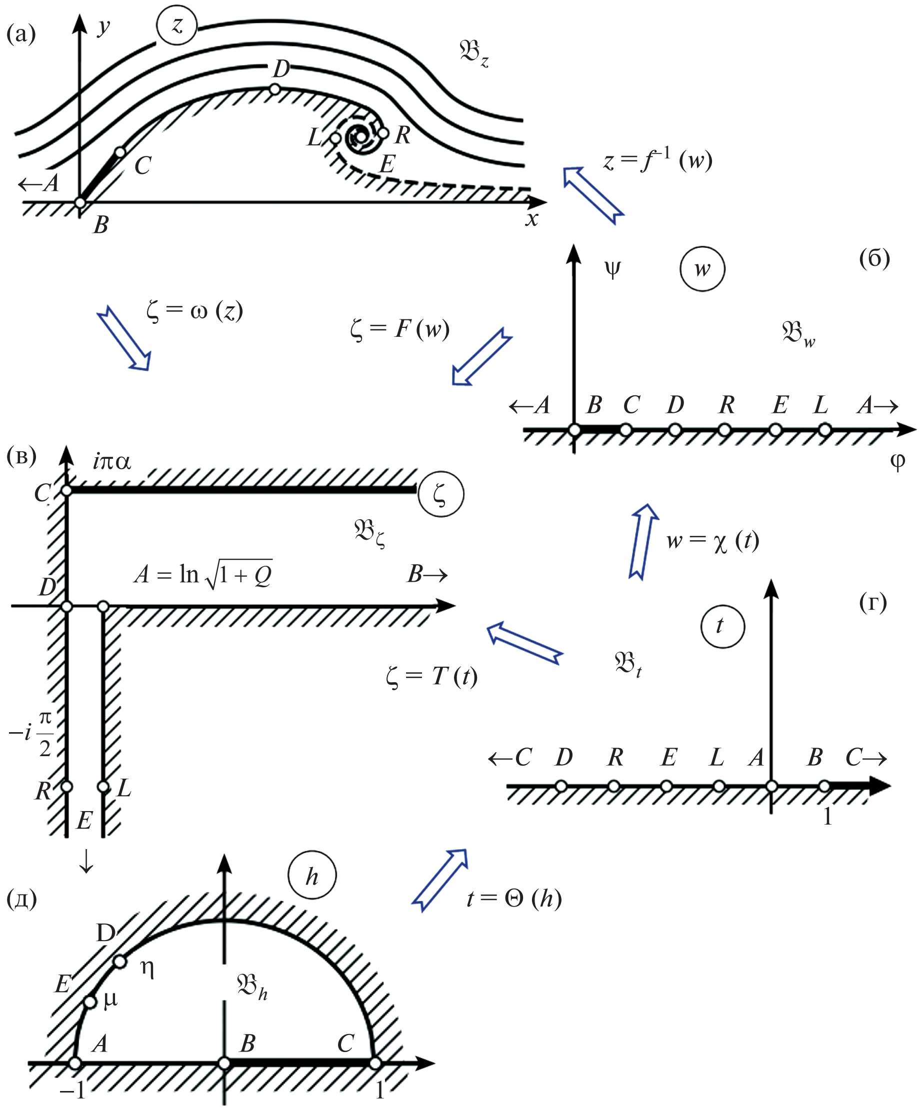
Определим еще крайнюю левую точку L линии (EA) и крайнюю правую точку R линии (DE) как точки, в которых угол наклона скорости равен $\theta = -\pi/2$ (фиг. 1 и 2а). Тогда можно говорить, что вихрь в верхней половине течения образован линией тока (REL); аналогично можно определить вихрь и ограничивающие его точки и в нижней половине течения. Разность абсцисс точек R и L принимаем в качестве размера $\mathfrak{D}$ вихря, т.е.

$$\mathfrak{D} = x_R - x_L. \tag{8}$$

Важной характеристикой описанной картины обтекания, как и других кавитационных течений, является число кавитации — известный параметр (см. [1], [2]), определяемый по формуле

[7] т.е. отличающихся на всесторонее растяжение; о спиралях см. [17].

[8] Для обозначения координаты точки к символу координаты добавляем индекс в виде символа точки, например, $z_D = x_D + iy_D$ — координаты точки D на плоскости z.



Фиг. 2. Области на плоскостях z, w, ζ, t и h.

$$Q = \frac{2(p_\infty - p_Q)}{\rho V_\infty^2},$$

или с учетом (2) с помощью эквивалентного равенства

$$Q := \frac{V_Q^2 - V_\infty^2}{V_\infty^2}.$$

Отметим, что скорость жидкости V_Q на поверхности каверны выражается через V_∞ и Q по формуле

$$V_Q = V_\infty\sqrt{1+Q}. \tag{9}$$

1.4. Аналитическое решение рассматриваемой задачи для двуспиральной схемы Тулина построено в разд. 3 и 4. Осуществлена его численная реализация (разд. 5), в том числе вычислены значения коэффициента сопротивления $\mathbf{C}_x$, найдены относительная длина $\mathfrak{L}$ и относительная ширина $\mathfrak{W}$ каверны.

На основе этой численной реализации в разд. 5 построены также картины обтекания для различных значений входящих параметров. Следует отметить, что при сравнении этих картин с фиг. 1 может возникнуть недоразумение, связанное с тем, что на картинах, полученных путем вычислений, не видны вихри, центрами которых, согласно сказанному в п. 1.3, должны быть точки E и E'. Чтобы устранить это недоразумение, заметим, что представленная на фиг. 1 картина течения является условной с увеличенным для большей наглядности изображением вихревых спиралей[9]. На самом же деле, согласно проведенному расчету, размер вихря $\mathfrak{D}$ имеет порядок 10^{-7}–10^{-8} при остальных параметрах, лежащих в обычном диапазоне.

Данное значение согласуется с асимптотикой для этой величины $\mathfrak{D} \sim Q^{-2}\exp(-\pi^2/Q)$, $Q \to 0$, полученной с помощью проведенного в разд. 6 асимптотического анализа решения. Ясно, что такой вихрь не различим на общей картине течения и может быть изображен лишь при локальном сильном увеличении (вид которого приведен ниже на фигуре в разд. 5). Выполненный анализ позволил также установить, что вблизи центра вихря E линии (RE) и (EL) асимптотически представляют собой подобные логарифмические спирали. Уравнение для закручивающейся линии (RE) в локальных полярных координатах (r, ϕ) с центром в полюсе E дается формулой $r(\phi) = \mathcal{A}\exp(2\pi\phi/Q)$, $\phi \to -\infty$; для раскручивающейся линии аналогичное уравнение отличается лишь на множитель $\sqrt{1+Q}$.

Получена также асимптотика для числа N оборотов вокруг точки E, совершаемых при движении жидкости вдоль линии тока $\{z : \psi(z) = \varepsilon\}$, соответствующей малому положительному ε (при остальных параметрах, как обычно, равных $l = 1$, $V_\infty = 1$); заметим, что если $\varepsilon = 0$, то число оборотов, очевидно, бесконечно. Эта асимптотика имеет вид $N \sim -Q\ln(Q^2\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Установлено еще, что относительная ширина следа $\mathfrak{S}(x)$, рассматриваемая как функция продольной координаты x, имеет при удалении от каверны и малых Q следующий характер убывания: $\mathfrak{S}(x) \sim Q^{-2}(x/l)^{-1/2}$, $x \to +\infty$.

Кроме того, найден (согласующийся с [1], [2], [4]) вид асимптотик для величин $\mathbf{C}_x(Q)$, $\mathfrak{L}(Q)$, $\mathfrak{W}(Q)$ при стремлении числа кавитации Q к нулю. Первые коэффициенты этих асимптотик выписаны в виде явных формул, а их численные значения приведены в таблицах, где эти значения даны не только для рассмотренной здесь двуспиральной схемы Тулина, но и для изучавшихся в первой части работы (см. [5]) схем Жуковского–Рошко и Рябушинского[10].

2. ОБЛАСТЬ ГОДОГРАФА И ОБЛАСТЬ ПОТЕНЦИАЛА

2.1. Поскольку для изучаемой задачи течение симметрично относительно оси x (фиг. 1), то теоретические рассмотрения достаточно проводить только для его верхней половины – области $\mathcal{B}_z$, изображенной на фиг. 2а. Вместе с тем численно получаемую картину обтекания будем давать для всей области течения, как на фиг. 1.

Аналитическую функцию $\zeta = \omega(z)$, определяемую по формуле

$$\omega(z) := -\ln\frac{V(z)}{V_Q} + i\theta(z) \tag{10}$$

или с учетом (1) по эквивалентной формуле

$$\omega(z) := -\ln\left[\frac{1}{V_Q}f'(z)\right], \tag{11}$$

называют функцией годографа скорости в форме Жуковского (см. [18]), а область $\mathcal{B}_\zeta := \omega(\mathcal{B}_z)$ – образ области $\mathcal{B}_z$ при отображении $\zeta = \omega(z)$ – называют областью годографа.

Символ, обозначающий образ области или дуги при конформном отображении, снабжаем нижним индексом, указывающим плоскость, где расположен соответствующий образ. Вместе с тем точки на разных плоскостях, соответствующие друг другу при конформном отображении, обозначаем одинаковыми буквами.

[9] Условную картину с гипертрофированным изображением вихрей приводит и Тулин в своей статье [6].

[10] Для этих схем в [5] были получены асимптотики величин $\mathbf{C}_x(Q)$, $\mathfrak{L}(Q)$, $\mathfrak{W}(Q)$ при $Q \to 0$, включая формулы для их коэффициентов, но не были приведены численные значения этих коэффициентов. В настоящей работе мы восполняем этот пробел.

2.2. Используя определение (10), построим область годографа для рассматриваемой задачи. Для этого пройдем границу $\partial\mathcal{B}_z$ в правильном направлении, т.е. так, что область $\mathcal{B}_z$ остается слева.

При движении по участку (AB) скорость монотонно убывает от V_∞ (в бесконечно удаленной точке A) до 0 (в точке остановки B). Кроме того, согласно (3), здесь выполняется $\theta = 0$. Отсюда с помощью (9) и (10) находим, что образом этого участка на плоскости годографа ζ является отрезок вещественной оси

$$(AB)_\zeta = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \in [\ln\sqrt{1+Q}, +\infty],\ \operatorname{Im}\zeta = 0\}.$$

При движении по стенке клина (BC) модуль скорости V монотонно возрастает от 0 до V_Q и, кроме того, согласно (3), здесь $\theta = \pi\alpha$. Отсюда находим, что образом этого участка на плоскости годографа является прямолинейный отрезок

$$(BC)_\zeta = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \in [0, +\infty],\ \operatorname{Im}\zeta = \pi\alpha\}.$$

Следующий участок (CDE) есть свободная линия тока с заданным на ней по условию (4) модулем скорости, равным V_Q. Тогда его образ $(CDE)_\zeta$, согласно (10), должен лежать на мнимой оси $\{\operatorname{Re}\zeta = 0\}$. В соответствии с фиг. 2а дуга (CDE) представляет собой вблизи точки E вихревую линию, закрученную по часовой стрелке, поэтому при движении по этой дуге угол наклона скорости монотонно падает от $\theta = \pi\alpha$ до $\theta = -\infty$. Отсюда получаем, что образом этого участка на плоскости годографа является прямолинейный отрезок

$$(CDE)_\zeta = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta = 0,\ \operatorname{Im}\zeta \in [-\infty, \pi\alpha]\}.$$

Участок (EA) также есть свободная линия тока с заданным, согласно (5), модулем скорости V_∞. В соответствии с фиг. 2а эта дуга вблизи точки E представляет собой вихревую линию, закрученную против часовой стрелки, а при приближении к бесконечности A угол наклона скорости θ на этой дуге приближается к нулю. Таким образом, при движении по этой дуге угол θ монотонно возрастает от $-\infty$ до нуля. Тогда из (9) и (10) следует, что образом этого участка служит отрезок

$$(EA)_\zeta = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta = \ln\sqrt{1+Q},\ \operatorname{Im}\zeta \in [-\infty, 0]\}.$$

Граница области годографа построена, а вид этой области $\partial\mathcal{B}_\zeta$ дан на фиг. 2в. Отметим, что область годографа для двуспиральной схемы Тулина была приведена в [19] и [16] (при другом определении функции годографа).

2.3. Установим вид области потенциала $\mathcal{B}_w := f(\mathcal{B}_z)$, используя стандартные рассуждения, приведенные, например, в [2, стр. 24].

Так как граница $\partial\mathcal{B}$ является нулевой линией тока, то ее образ на плоскости потенциала соответствует значению $\psi = 0$. Вдоль этой линии тока имеем $d\varphi = Vds_\varphi$, где ds_φ – дифференциал длины дуги. Поскольку при стремлении к бесконечно удаленной точке A величина V стремится к значению $V_\infty > 0$, то величина φ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль границы $\partial\mathcal{B}$. Если же двигаться вдоль эквипотенциальной линии от нулевой линии тока – грацицы $\partial\mathcal{B}$ до бесконечности (вверх на фиг. 2а), то величина ψ, представляющая собой расход жидкости, будет монотонно возрастать от нуля до $+\infty$. Следовательно, образом $\mathcal{B}_w$ области $\mathcal{B}_z$ на плоскости годографа является верхняя полуплоскость

$$\mathcal{B}_w = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\},$$

изображенная на фиг. 2б.

3. ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

3.1. Для решения задачи обтекания достаточно найти комплексный потенциал $w = f(z)$, через который выражаются все характеристики течения. Однако, поскольку обратную функцию $z = f^{-1}(w)$ находить и использовать проще, чем прямую, то именно ее мы и будем строить (как это обычно и делается).

Рассматриваемая задача о кавитационном обтекании клина заключается, таким образом, в построении функции $z = f^{-1}(w)$, исходя из заданных параметров: скорости V_∞ потока на бесконечности, скорости V_Q на поверхности каверны, геометрических параметров клина l и α, а также из заданного вида области годографа $\mathcal{B}_\zeta$ и области потенциала $\mathcal{B}_w$ с учетом соответствия между одноименными точками A, B, C на плоскостях z и w, указанными на фиг. 2. Координаты всех этих точек известны, кроме координаты φ_C конца стенки клина на плоскости потенциала w; для этой величины ниже формируется уравнение.

Потенцируя равенство (11), получаем

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{V_Q}\exp[\omega(z)];$$

используя здесь тождество

$$f^{-1}{}'(w) = [f'(z)|_{z=f^{-1}(w)}]^{-1}$$

и вводя функцию $F(w)$ по формуле

$$\zeta = F(w) := \omega \circ f^{-1}(w), \tag{12}$$

находим равенство

$$f^{-1}{}'(w) = \frac{1}{V_Q}\exp[F(w)], \tag{13}$$

интегрируя которое, устанавливаем представление для искомой функции:

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{V_Q}\int_0^w \exp[F(\lambda)]d\lambda. \tag{14}$$

С помощью формулы (14) легко выписываются представления для линий тока, а также для относительной длины $\mathfrak{L}$ и относительной ширины $\mathfrak{W}$ каверны (см. ниже. п. 4.7). Уравнение же для неизвестной координаты φ_C получаем, интегрируя в представлении (14) по образу $(BC)_w$ этой стенки:

$$le^{i\pi\alpha} = \frac{1}{V_Q}\int_0^{\varphi_C} \exp[F(w)]dw. \tag{15}$$

3.2. Коэффициент сопротивления $\mathbf{C}_x$ определяется, как известно, в виде отношения x-компоненты интеграла сил, действующих на клин, к произведению скоростного напора $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$ на длину основания клина $2l\sin(\pi\alpha)$. Используя закон Бернулли (2) и соотношение $\operatorname{Im} dz = |dz|\sin(\pi\alpha)$, выполняющееся на стенке (BC) клина, по которой производится интегрирование, приходим к следующему выражению для этой величины:

$$\mathbf{C}_x = \frac{1}{V_\infty^2 l\sin(\pi\alpha)}\operatorname{Im}\int_{(BC)}[V_Q^2 - V^2(z)]dz. \tag{16}$$

Получаются два вспомогательных выражения: одно – из равенства (10) путем его потенцирования, умножения на сопряженное и вычитания результата из единицы, а второе – непосредственно из (13):

$$1 - V^2(z)/V_Q^2 = 1 - \exp[-\omega(z) - \overline{\omega}(z)], \quad \exp[-F(w)]f^{-1}{}'(w) = \frac{1}{V_Q}. \tag{17}$$

Вынесем теперь V_Q^2 из-под знака интеграла (16), учтем вытекающую из (9) формулу $V_Q^2/V_\infty^2 = 1 + Q$ и подставим в него первое равенство (17). Переходя в получающемся интеграле к переменной w с помощью (12), учитывая соотношение $dz = f^{-1}{}'(w)dw$ и второе равенство (17), а также тождество $\operatorname{Im}(e^\xi - e^{-\bar{\xi}}) = 2\operatorname{Im}\operatorname{ch}\xi$, получаем

$$\mathbf{C}_x = \frac{2(1+Q)}{V_{\mathcal{Q}} l\sin(\pi\alpha)}\operatorname{Im}\int_{(BC)_w}\operatorname{ch}[F(w)]dw, \tag{18}$$

где $(BC)_w$ есть образ при отображении f дуги (BC) на плоскости потенциала.

3.3. Для того чтобы выразить решение задачи и характеристики течения в аналитическом виде, введем вспомогательную полуплоскость $\mathcal{B}_t := \{\operatorname{Im} t > 0\}$ и на ней две функции: $w = \chi(t)$ и $\zeta = T(t)$, осуществляющие отображения

$$\chi : \mathcal{B}_t \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}_w, \quad T : \mathcal{B}_t \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}_\zeta \tag{19}$$

с соответствием между одноименными точками A, B, C на плоскостях t, w, ζ, легко усматриваемым из фиг. 2б, 2в, 2г. Тогда очевидно, что

$$F(w) = T \circ \chi^{-1}(w).$$

Введем еще полукруг $\mathcal{B}_h := \{|h| < 1, \operatorname{Im} h > 0\}$, а на нем определим функцию $t = \Theta(h)$ по формуле

$$t = \Theta(h) := \frac{(1+h)^2}{(1-h)^2}, \tag{20}$$

осуществляющую отображение $\Theta : \mathcal{B}_h \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}_t$ с указанным на фиг. 2г, 2д соответствием между одноименными точками A, B, C на плоскостях t и h.

На плоскости h определим еще функцию $\zeta = \Omega(h)$ с помощью двойного тождества

$$\Omega(h) := F \circ \chi \circ \Theta(h) = T \circ \Theta(h); \tag{21}$$

она конформно преобразует полукруг $\mathcal{B}_h$ на область годографа $\mathcal{B}_\zeta$ с соответствием (вполне определенных на фиг. 2в, 2д) одноименных точек A, B, C на плоскостях h и ζ. Отмеченные на границе $\partial\mathcal{B}_h$ полукруга точки E и D (фиг. 2д) определяются как образы одноименных точек на плоскости годографа; их координатам даны специальные обозначения:

$$h_E := \mu, \quad h_D := \eta. \tag{22}$$

3.4. Выполнив в интеграле (14) замену переменной

$$w = \chi \circ \Theta(h), \quad dw = \chi'(t)\big|_{t=\Theta(h)} \Theta'(h)dh, \tag{23}$$

включая равенство (21), получим представление для искомой функции $f^{-1}(w)$:

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{V_Q} \int\limits_0^{h(w)} \exp[\Omega(\lambda)]\chi'(t)\Big|_{t=\Theta(\lambda)} \Theta'(\lambda)d\lambda, \tag{24}$$

где верхний предел

$$h(w) = \Theta^{-1} \circ \chi^{-1}(w).$$

Делая ту же замену в интеграле (15) с учетом соотношения

$$\Omega(h) = \operatorname{Re}\Omega(h) + i\pi\alpha, \quad h \in (BC)_h, \tag{25}$$

вытекающего из наблюдения, что образ $(BC)_\zeta$ стенки клина лежит (как видно на фиг. 2в) на прямой $\{\operatorname{Im}\zeta = \pi\alpha\}$, переписываем уравнение (15) для φ_C в виде

$$l = \frac{1}{V_Q} \int\limits_0^1 \exp[\operatorname{Re}\Omega(h)]\chi'(t)\Big|_{t=\Theta(h)} \Theta'(h)dh, \tag{26}$$

а проведя эту же замену в интеграле (18) с учетом соотношения (25) и формулы

$$\operatorname{Im}\operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \sin y,$$

получаем выражение для коэффициента сопротивления в виде

$$\mathbf{C}_x = \frac{2(1+Q)}{V_Q l} \int\limits_0^1 \operatorname{sh}[\operatorname{Re}\Omega(h)]\chi'(t)\Big|_{t=\Theta(h)} \Theta'(h)dh. \tag{27}$$

3.5. Найдем относительные длину $\mathfrak{L}$ и ширину $\mathfrak{W}$ каверны. Для этого, вычислив с помощью представления (24) абсциссу точки E и ординату точки D на плоскости z, подставим их соответственно в формулы (7) и (6); тогда получим

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2V_Q l \sin(\pi\alpha)} \operatorname{Re} \int_0^{\mu} \exp[\Omega(h)]\chi'(t)\Big|_{t=\Theta(h)} \Theta'(h)dh, \tag{28}$$

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{V_Q l \sin(\pi\alpha)} \operatorname{Im} \int_0^{\eta} \exp[\Omega(h)]\chi'(t)\Big|_{t=\Theta(h)} \Theta'(h)dh. \tag{29}$$

Координаты точек линии тока, соответствующей значению $\psi = \varepsilon$ функции тока, естественно параметризуются в виде $z_\varepsilon(\varphi) = f^{-1}(\varphi + i\varepsilon)$, где параметр $\varphi \in (-\infty, +\infty)$. Выражение для параметризованных таким образом координат легко следует из формулы (24):

$$z_\varepsilon(\varphi) = f^{-1}(\varphi + i\varepsilon) = \frac{1}{V_Q} \int_0^{h(\varphi+i\varepsilon)} \exp[\Omega(\lambda)]\chi'(t)\Big|_{t=\Theta(\lambda)} \Theta'(\lambda)d\lambda, \tag{30}$$

где верхний предел равен $h(\varphi + i\varepsilon) = \Theta^{-1} \circ \chi^{-1}(\varphi + i\varepsilon)$.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

4.1. Построим отображения (19), определенные на плоскости t. Первое из них, осуществляемое функцией $\zeta = T(t)$, конформно преобразует полуплоскость $\mathcal{B}_t := \{\operatorname{Im} t > 0\}$ на область годографа $\mathcal{B}_\zeta$, представляющую собой четырехугольник и изображенную на фиг. 2в. Оно выражается в виде интеграла Кристоффеля–Шварца (см. [15]) следующим образом:

$$\zeta = T(t) = \mathcal{K} \int_\infty^t \frac{t^{1/2}dt}{(t-1)(t-t_E)} + i\pi\alpha, \tag{31}$$

где параметры t_E (прообраз бесконечно удаленной точки E на плоскости ζ) и $\mathcal{K}$ подлежат нахождению. Нетрудно увидеть, что при обходе малой полуокружности, расположенной в $\{\operatorname{Im} t > 0\}$, с центром в точке $t = 1$ приращение интеграла (31) равно изменению ζ при переходе вблизи точки B от верхней к нижней стороне полосы[11] (по нормали к ним), т.е. равно $-i\pi\alpha$ (фиг. 2в). Отсюда получаем соотношение

$$\frac{\mathcal{K}}{1 - t_E} = -\alpha. \tag{32}$$

Аналогично, при обходе расположенной в $\{\operatorname{Im} t > 0\}$ малой полуокружности с центром в точке $t = t_E$ приращение этого интеграла равно изменению ζ при переходе от правой к левой стороне полосы вблизи точки E, т.е. равно $-\ln\sqrt{1+Q}$. Отсюда получаем равенство

$$\frac{i\pi\mathcal{K}\sqrt{t_E}}{1-t_E} = \ln\sqrt{1+Q}. \tag{33}$$

Из (32), (33) находим

$$\mathcal{K} = -\alpha\left(1 + \frac{\ln^2\sqrt{1+Q}}{\pi^2\alpha^2}\right), \quad t_E = -\frac{\ln^2\sqrt{1+Q}}{\pi^2\alpha^2}. \tag{34}$$

Используя эти формулы и вычисляя интеграл (31) с помощью разложения подынтегрального выражения на простые дроби и применения подстановки $\sqrt{t} = \xi$, получаем

[11] Это известный прием нахождения параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для многоугольников, содержащих нулевые углы (см. [15], [20]).

$$\zeta = T(t) = i\pi\alpha - \alpha\left(\ln\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} - i\beta\ln\frac{\sqrt{t}-i\beta}{\sqrt{t}+i\beta}\right), \tag{35}$$

где введено обозначение

$$\beta = \sqrt{-t_E} = \frac{\ln\sqrt{1+Q}}{\pi\alpha}. \tag{36}$$

Отметим еще следующие вытекающие из (34) асимптотики для $\mathcal{K}$ и t_E:

$$\mathcal{K} = -\alpha\left(1 + \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha^2}\right) + \mathbb{O}(Q^3), \quad t_E = -\frac{Q^2}{4\pi^2\alpha^2} + \mathbb{O}(Q^3), \quad Q \to 0. \tag{37}$$

Найдем координату t_D прообраза точки D, расположенной на плоскости годографа в начале координат, т.е. величину t_D, удовлетворяющую условию

$$T(t_D) = 0; \tag{38}$$

она понадобится при вычислении ширины каверны. Введем величину $\gamma = \sqrt{t_E/t_D}$, тогда

$$\sqrt{-t_D} = \beta\gamma^{-1}. \tag{39}$$

Подставляя в условие (38) выражения (35) и легко устанавливаемое соотношение

$$\frac{\sqrt{t_D}-1}{\sqrt{t_D}+1} = \exp[i(\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{-t_D})],$$

получаем после элементарных преобразований уравнение для γ:

$$\gamma\ln\frac{1-\gamma}{1+\gamma} = -2\frac{\operatorname{arctg}\beta\gamma^{-1}}{\beta\gamma^{-1}}. \tag{40}$$

Используя здесь связь (36) величин β и t_E, а также асимптотику t_E из (37), находим, что γ имеет следующую асимптотику при $Q \to 0$: $\gamma = \gamma_0 + \mathbb{O}(Q^2)$, где γ_0 – решение уравнения (40) с правой частью, равной (–2); решение такого уравнения (с точностью до 10^{-10}) есть $\gamma_0 = 0.8335565596$. Для решения уравнения (40) применяем, например, метод Ньютона (см. [21]). Вычислив таким образом γ, получаем искомую координату

$$t_D = -\frac{\ln^2\sqrt{1+Q}}{\pi^2\alpha^2\gamma^2}. \tag{41}$$

Отметим еще легко следующую из (41) асимптотику этой координаты

$$t_D = -\frac{Q^2}{4\pi^2\alpha^2\gamma_0^2} + \mathbb{O}(Q^3), \quad Q \to 0.$$

4.2. Обратимся теперь к отображениям $\chi : \mathcal{B}_t \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}_w$ и $\Theta : \mathcal{B}_h \xrightarrow{\text{conf}} \mathcal{B}_t$. Функция $w = \chi(t)$ есть дробно-линейное отображение (19) полуплоскостей с соответствием одноименных точек A, B, C (фиг. 2б и 2г). Оно выражается формулой

$$w = \chi(t) = \varphi_C\frac{t-1}{t}, \tag{42}$$

где φ_C находится, как было отмечено выше (см. п. 3.1 и 3.5), из уравнения (26). Из (42) получаем

$$t = \chi^{-1}(w) = \frac{\varphi_C}{\varphi_C - w}, \quad \chi'(t) = \frac{\varphi_C}{t^2}. \tag{43}$$

Тогда (вещественные) координаты φ_E, φ_D точек E, D на плоскости w записываются через найденные координаты одноименных точек на плоскости t по формулам

$$\varphi_D = \varphi_C\frac{t_D-1}{t_D}, \quad \varphi_E = \varphi_C\frac{t_E-1}{t_E}. \tag{44}$$

Что же касается отображения $t = \Theta(h)$ полукруга $\mathscr{B}_h$ на полуплоскость $\mathscr{B}_t$, то оно дается формулой (20), а его производная и обратное к нему определяются равенствами

$$h = \Theta^{-1}(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}, \quad \Theta'(h) = 4\frac{1+h}{(1-h)^3}. \tag{45}$$

Координаты точек E и D на полуокружности $\{h : |h| = 1, \operatorname{Im} h > 0\}$ (фиг. 2д), обозначенные, согласно (22), через μ и η, получаются подстановкой в первую формулу (45) найденных в (36) и (39) величин $\sqrt{-t_E}$ и $\sqrt{-t_D}$:

$$\mu = \frac{i\beta - 1}{i\beta + 1} = \exp[i(\pi - 2\operatorname{arctg}\beta)], \quad \eta = \exp\{i[\pi - 2\operatorname{arctg}(\beta\gamma^{-1})]\}, \tag{46}$$

где (напомним) β дается равенством (36), а γ есть решение уравнения (40).

4.3. Перейдем к получению явных аналитических выражений для искомых величин. Найдем прежде всего вид якобиана преобразования (23), подставив во второе равенство (43) выражение (20) и умножив результат на $\Theta'(h)$ из (45):

$$\chi'(t)\big|_{t=\Theta(h)}\Theta'(h) = 4\varphi_C\frac{1-h}{(1+h)^3}. \tag{47}$$

Заметим, что для получения явных представлений мы будем в дальнейшем широко использовать гипергеометрическую функцию Лауричеллы для случая трех (комплексных) переменных z_1, z_2, z_3, определяемую[12] с помощью интегрального представления типа Эйлера (см. [10]—[12])

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_1, z_3) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \frac{\xi^{b-1}(1-\xi)^{c-b-1}}{(1-\xi z_1)^{a_1}(1-\xi z_2)^{a_2}(1-\xi z_3)^{a_3}}d\xi, \tag{48}$$

где предполагается $\operatorname{Re}(b) > 0$, $\operatorname{Re}(c-b) > 0$; здесь $\Gamma(x)$ есть гамма-функция (см. [22]). Функция Лауричеллы записывается в виде следующего ряда:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_1, z_3) = \sum_{n_1, n_2, n_3 = 0}^{\infty} \frac{(b)_{n_1+n_2+n_3}(a_1)_{n_1}(a_2)_{n_2}(a_3)_{n_3}}{(c)_{n_1+n_2+n_3} n_1! n_2! n_3!} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{n_3}, \tag{49}$$

сходящегося в области $\{|z_j| < 1, j = \overline{1,3}\}$; для ее представления вне указанной области можно воспользоваться формулами ее аналитического продолжения, полученными в [12]. В представлении (49) через $(x)_n$ обозначен символ Похгаммера (см. [22]), определяемый с помошью гамма-функции по формуле $(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$, иначе говоря,

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x+1)\ldots(x+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

4.4. Вычислим теперь выражение $\Omega(h)$, фигурирующее в формулах (24), (27)—(30) для искомых величин f^{-1}, $\mathbf{C}_x$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{W}$, $z_{\psi_0}(\varphi)$ и в уравнении (26) для φ_C.

Для этого в соответствии с (21) подставим равенство (20) в выражение (35) для $T(t)$, обратив внимание, что в этом выражении первое слагаемое в скобках, согласно (45), равно $\ln h$; в итоге получим

$$\Omega(h) = i\pi\alpha + \ln\left[\left(\frac{1-i\beta}{1+i\beta}\right)^{i\alpha\beta} h^{-\alpha}(1-\mu^{-1}h)^{i\alpha\beta}(1-\mu h)^{-i\alpha\beta}\right], \tag{50}$$

где в соответствии с (36) имеем

$$\alpha\beta = \frac{\ln\sqrt{1+Q}}{\pi}. \tag{51}$$

Первый множитель в квадратных скобках (50) является вещественным числом; обозначим его через

[12]Вообще говоря, эта функция определена для произвольного числа переменных. Использованная в первой части работы (см. [5]) функция Аппеля является ее частным случаем, соответствующим двум переменным.

$$\tau = \left(\frac{1-i\beta}{1+i\beta}\right)^{i\alpha\beta} = \exp(2\alpha\beta\operatorname{arctg}\beta). \tag{52}$$

Нетрудно также убедиться, что если $h \in (0,1)$, то произведение двух последних сомножителей в квадратных скобках в (50) принимает вещественные значения, поэтому величина $\operatorname{Re}\Omega(h)$, фигурирующая в (26), (27), равна в этом случае второму члену правой части (50):

$$\operatorname{Re}\Omega(h) = \ln[\tau h^{-\alpha}(1-\mu^{-1}h)^{i\alpha\beta}(1-\mu h)^{-i\alpha\beta}], \quad h \in (0,1). \tag{53}$$

Найдем теперь величину φ_C. Для этого подставим последнее выражение в (26) и обозначим возникающий при этом интеграл через I_0. Записывая его с помощью представления (48) через функцию Лауричеллы:

$$I_0 := \int_0^1 \frac{\lambda^{-\alpha}(1-\lambda)}{(1+\lambda)^3(1-\mu\lambda)^{i\alpha\beta}(1-\mu^{-1}\lambda)^{-i\alpha\beta}}d\lambda = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}F_D^{(3)}(3, i\alpha\beta, -i\alpha\beta; 1-\alpha, 3-\alpha; -1, \mu, \mu^{-1}), \tag{54}$$

находим искомую формулу для φ_C – образа $f(C)$ концевой точки C стенки клина:

$$\varphi_C = \frac{lV_Q}{4\tau I_0}. \tag{55}$$

Напомним, что вещественная величина τ дается формулой (52), число μ – формулой (46), и заметим, что интеграл I_0 является вещественнозначной функцией параметров α и Q.

Вычислим коэффициент сопротивления $\mathbf{C}_x$. Для этого подставим выражение (53) в формулу (27). Один из возникающих при этом интегралов – это I_0 из (54), а другой, обозначаемый через I_1, может быть выражен с помощью (48) через функцию Лауричеллы следующим образом:

$$I_1 := \frac{1}{(1+\alpha)(2+\alpha)}F_D^{(3)}(3, -i\alpha\beta, i\alpha\beta; 1+\alpha, 3+\alpha; -1, \mu, \mu^{-1}). \tag{56}$$

Тогда для величины $\mathbf{C}_x$ получаем формулу

$$\mathbf{C}_x = (1+Q)\left(1-\tau^{-2}\frac{I_1}{I_0}\right). \tag{57}$$

Найдем явное выражение для функции $z = f^{-1}(w)$. Используя формулы (50), (52), подставим в выражение (24) функцию $\exp[\Omega(h)]$ и якобиан (47), а также учтем формулу (55); тогда получим

$$f^{-1}(w) = \frac{l}{I_0}e^{i\pi\alpha}\int_0^{h(w)} \frac{\lambda^{-\alpha}(1-\lambda)}{(1+\lambda)^3(1-\mu\lambda)^{i\alpha\beta}(1-\mu^{-1}\lambda)^{-i\alpha\beta}}d\lambda, \tag{58}$$

где

$$h(w) = \frac{\sqrt{\varphi_C} - \sqrt{\varphi_C - w}}{\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_C - w}}. \tag{59}$$

Для того чтобы выразить интеграл в (58) через функцию Лауричеллы, разобьем его на два и сделаем подстановку $\lambda = h\xi$, $\xi \in [0,1]$, $d\lambda = hd\xi$. Тогда этот интеграл запишется как $h^{1-\alpha}I_2(h) - h^{2-\alpha}I_3(h)$, где

$$I_2(h) = \int_0^1 \frac{\xi^{-\alpha}d\xi}{(1+h\xi)^3(1-\mu h\xi)^{i\alpha\beta}(1-\mu^{-1}h\xi)^{-i\alpha\beta}} = \frac{1}{1-\alpha}F_D^{(3)}(3, i\alpha\beta, -i\alpha\beta; 1-\alpha, 2-\alpha; -h, h\mu, h\mu^{-1}), \tag{60}$$

$$I_3(h) = \int_0^1 \frac{\xi^{1-\alpha}d\xi}{(1+h\xi)^3(1-\mu h\xi)^{i\alpha\beta}(1-\mu^{-1}h\xi)^{-i\alpha\beta}} = \frac{1}{2-\alpha}F_D^{(3)}(3, i\alpha\beta, -i\alpha\beta; 2-\alpha, 3-\alpha; -h, h\mu, h\mu^{-1}). \tag{61}$$

Таким образом,

$$z = f^{-1}(w) = \frac{l}{I_0}e^{i\pi\alpha}h^{1-\alpha}[I_2(h) - hI_3(h)], \tag{62}$$

Таблица 1. Значения $\mathbf{C}_x$ при различных α и Q

$\alpha 180°$	$Q = 0.1$	$Q = 0.2$	$Q = 0.3$	$Q = 0.4$	$Q = 0.5$
5	0.13607	0.19725	0.27436	0.35967	0.44953
10	0.22885	0.27549	0.33537	0.40480	0.48103
20	0.39937	0.44665	0.50068	0.56061	0.62561
30	0.53949	0.59446	0.65325	0.71556	0.78106
40	0.65319	0.71613	0.78142	0.84891	0.91846
45	0.70165	0.76828	0.83677	0.90703	0.97895
50	0.74527	0.81529	0.88683	0.95980	1.03413
60	0.81979	0.89582	0.97285	1.05085	1.12976
70	0.88005	0.96108	1.04278	1.12514	1.20812
80	0.92872	1.01385	1.09944	1.18549	1.27197
90	0.96795	1.05642	1.14522	1.23433	1.32375
100	0.99947	1.09066	1.18208	1.27371	1.36555
110	1.02470	1.11809	1.21162	1.30530	1.39913
120	1.04480	1.13994	1.23518	1.33052	1.42595

где $h = h(w)$ дается формулой (59).

Теперь, используя формулу (62), и в соответствии с равенствами (6), (7) находим относительную длину $\mathfrak{L}$ и относительную ширину $\mathfrak{W}$ каверны:

$$\mathfrak{L} = \frac{l}{2I_0 \sin(\pi\alpha)} \operatorname{Re}\{e^{i\pi\alpha}\mu^{1-\alpha}[I_2(\mu) - \mu I_3(\mu)]\}, \tag{63}$$

$$\mathfrak{W} = \frac{l}{I_0 \sin(\pi\alpha)} \operatorname{Im}\{e^{i\pi\alpha}\eta^{1-\alpha}[I_2(\eta) - \eta I_3(\eta)]\}. \tag{64}$$

Наконец, в соответствии с (30) получаем, что параметрическое по $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ представление для координат $z_\varepsilon(\varphi)$ линии тока, соответствующей значению ε функции ψ, дается формулой (62) с подстановкой $h = h(\varphi + i\varepsilon)$, где функция $h(w)$ определяется равенством (59). Описанный алгоритм вычисления координат $z_\varepsilon(\varphi)$ позволяет построить картину обтекания клина, соответствующую рассмотренной схеме.

5. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

5.1. Осуществлена численная реализация полученного в разд. 4 решения задачи обтекания клина по двуспиральной схеме Тулина. Для различных значений угла $\pi\alpha$ наклона клина и числа кавитации Q получены численные значения коэффициента сопротивления $\mathbf{C}_x$, помещенные в табл. 1.

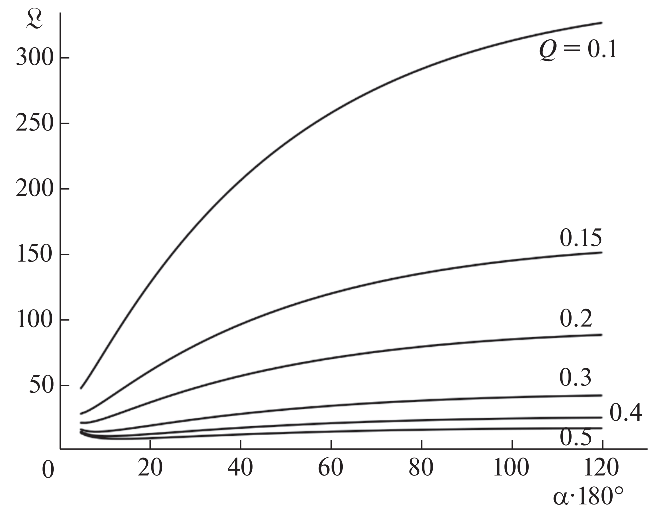
Вычислены также значения относительной длины $\mathfrak{L}$ и относительной ширины $\mathfrak{W}$ каверны, приведенные (соответственно на фиг. 3 и 4) в виде графиков зависимости этих величин от угла $\pi\alpha$ при различных Q.

5.2. На основе численной реализации полученного решения построена также картина обтекания, т.е. изображено распределение линий тока $\{\psi(x, y) = \varepsilon\}$ с шагом значений функции тока между соседними линиями тока, составляющим $\Delta\varepsilon = 0.2$. В работе даны три картины обтекания для $l = 1$, $V_\infty = 1$ и следующих значений остальных параметров:

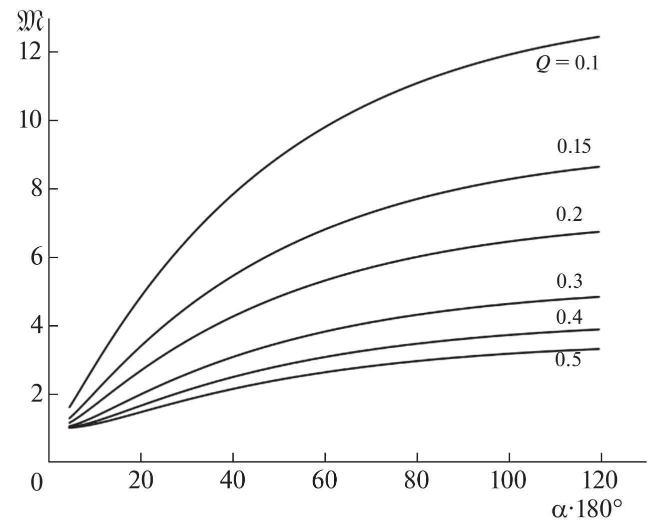
– фиг. 5: $\alpha = 1/4$, т.е. $\pi\alpha = 45°$, $Q = 0.8$;

– фиг. 6: $\alpha = 1/2$, т.е. $\pi\alpha = 90°$, $Q = 0.7$;

– фиг. 7: $\alpha = 3/4$, т.е. $\pi\alpha = 135°$, $Q = 0.6$.



Фиг. 3. Зависимость $\mathfrak{L}$ от α при различных Q.



Фиг. 4. Зависимость $\mathfrak{W}$ от α при различных Q.

При рассмотрении этих картин и их сравнении с картиной обтекания, изображенной на фиг. 1, следует иметь в виду, что последняя носит условно-иллюстративный характер, а вихревые спирали на ней сильно увеличены (о чем было сказано в п. 1.4). По контрасту с фиг. 1, размер $\mathfrak{D}$ вихрей, получаемый в результате расчета, составил очень малую величину; напомним, что он определяется по формуле (8). Так, для случаев, изображенных на фиг. 5–7, он принимал следующие значения:

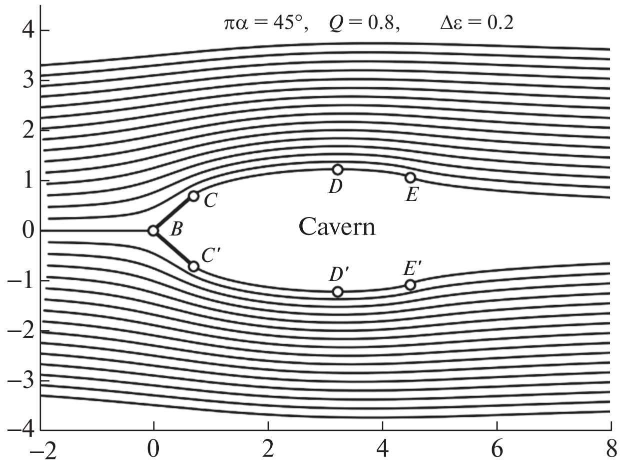
– фиг. 5: $\mathfrak{D} = 2.3\times 10^{-7}$;

– фиг. 6: $\mathfrak{D} = 1.1\times 10^{-7}$;

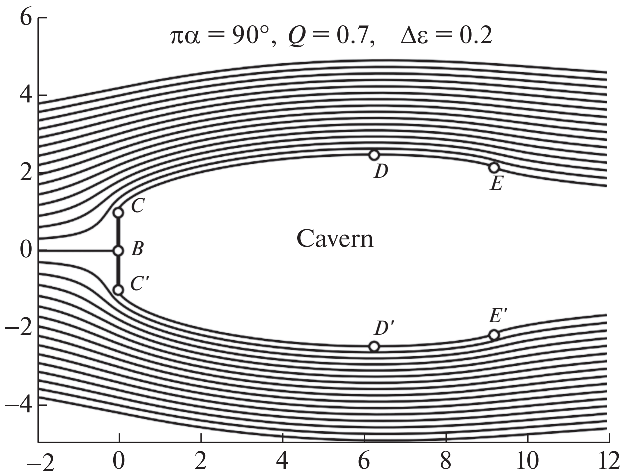
– фиг. 7: $\mathfrak{D} = 1.3\times 10^{-8}$.

Эти результаты согласуются с полученной в разд. 6 асимптотикой для $\mathfrak{D}$ при малых Q.

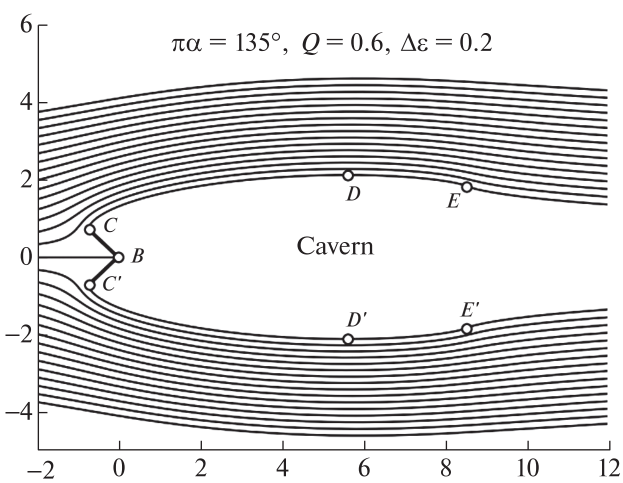
Ясно, что такой вихрь не может быть изображен на фоне общей картины течения, и для своего представления требует очень малого масштаба. Именно в таком масштабе ($\sim 10^{-11}$) на фиг. 8 дана часть вихря (REL) вблизи его центра E, где этот вихрь уже превратился в двойную спираль. Часть



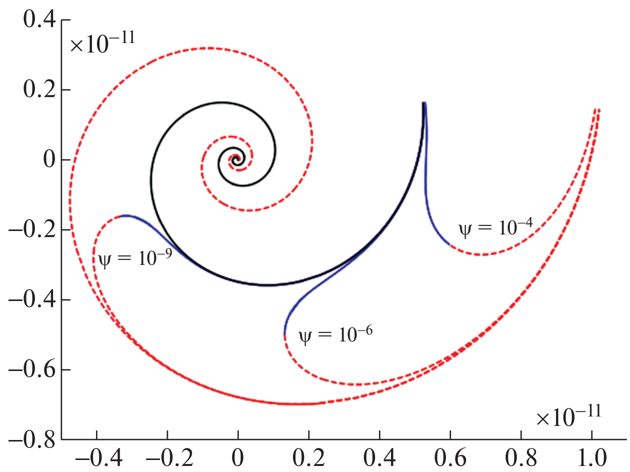
Фиг. 5. Картина линий тока при обтекании клина для случая $\alpha = 1/4$, $Q = 0.8$.



Фиг. 6. Картина линий тока при обтекании клина для случая $\alpha = 1/2$, $Q = 0.7$.



Фиг. 7. Картина линий тока при обтекании клина для случая $\alpha = 3/4$, $Q = 0.6$.



Фиг. 8. Спиралевидные линии тока вблизи центра E вихря для случая $\alpha = 1/4$, $Q = 0.3$.

линии (RE), т.е. часть закручивающейся спирали, изображена сплошной линией, а часть линии (EL), т.е. раскручивающейся спирали, – штриховой линией. Там же даны три фрагмента линий тока, соответствующих $\psi = 10^{-4}$, $\psi = 10^{-6}$ и $\psi = 10^{-9}$ вблизи того места внутри вихря (REL), где эти линии максимально "углубляются" внутрь двойной спирали до точек своего разворота. Представляется, что эта картина, изображенная на фиг. 8, является весьма полезной для уяснения спиральной структуры вихрей в данной схеме.

Обратим еще внимание, что на картинах обтекания, помещенных на фиг. 5–7, линии (EA) и (AE') являются, согласно трактовке автора схемы Тулина, границей следа. Как видно на этих картинах, ширина следа $\mathfrak{S}(x)$ убывает при удалении от каверны. Асимптотика этой величины так же, как и ряда других важных характеристик течения, изучена в следующем разд. 6.

6. АСИМПТОТИКИ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕНИЯ

6.1. Для того чтобы провести асимптотический анализ решения рассматриваемой задачи и его характеристик, получим вначале развернутое представление функции $z = f^{-1}(w)$, обратной к комплексному потенциалу, и выведем ее разложение вблизи точки E – образа центра вихря на плоскости потенциала w.

Для этого, заменив с помощью формулы (43) переменную t на $\chi^{-1}(w)$ в выражении (35) для отображения $\zeta = T(t)$, найдем, согласно (12), вид функции $\zeta = F(w)$, а подставив его в представление (14) для исследуемой функции $z = f^{-1}(w)$, получим

$$z = f^{-1}(w) = \frac{e^{i\pi\alpha}}{V_Q}\int_0^w \left(\frac{\sqrt{\varphi_C} - \sqrt{\varphi_C - w}}{\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_C - w}}\right)^{-\alpha} \left(\frac{\sqrt{\varphi_C - \varphi_E} - \sqrt{\varphi_C - w}}{\sqrt{\varphi_C - \varphi_E} + \sqrt{\varphi_C - w}}\right)^{i\alpha\beta} dw, \tag{65}$$

где φ_E и φ_C – координаты точек E и C на плоскости w, определяемых соответственно по формулам (44) и (55). Введя локальную переменную $u = w - \varphi_E$ с началом в точке E на плоскости w, разложим подынтегральное выражение (65) в ряд по степеням переменного u. Интегрируя получаемое равенство, устанавливаем следующее разложение исследуемой функции $f^{-1}(w)$:

$$z = f^{-1}(w) = z_E + u^{i\alpha\beta}(\mathcal{A}_1 u + \mathcal{A}_2 u^2 + \ldots), \tag{66}$$

где z_E – координата точки E на плоскости z, а коэффициенты $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ даются формулами

$$\mathcal{A}_1 = \frac{e^{i\pi\alpha}}{V_Q}\left(\frac{\sqrt{\varphi_C} - \sqrt{\varphi_C - \varphi_E}}{\sqrt{\varphi_C} + \sqrt{\varphi_C - \varphi_E}}\right)^{-\alpha} \frac{4^{-i\alpha\beta}}{(\varphi_C - \varphi_E)^{i\alpha\beta}(1 + i\alpha\beta)},$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{e^{i\pi\alpha}}{V_Q}\left(\frac{\sqrt{\varphi_C}-\sqrt{\varphi_C-\varphi_E}}{\sqrt{\varphi_C}+\sqrt{\varphi_C-\varphi_E}}\right)^{-\alpha}\frac{\alpha 4^{-i\alpha\beta}}{(\varphi_C-\varphi_E)^{1+i\alpha\beta}(2+i\alpha\beta)}\left(\frac{i\beta}{2}-\frac{\sqrt{\varphi_C}\sqrt{\varphi_C-\varphi_E}}{\varphi_E}\right),$$

а ряд (66) сходится и представляет функцию f^{-1} в полукруге $\{w : |w| < |\varphi_E - \varphi_C|, \operatorname{Im} w > 0\}$.

6.2. Получим уравнения линий закручивающейся (RE) и раскручивающейся (EL), образующих вихрь с центром в точке E. Используя определенную в п. 6.2 локальную переменную u с началом в точке E на плоскости w, видим, что, согласно принципу соответствия границ, дуге (RE) при отображении f^{-1} отвечают отрицательные значения, а дуге (EL) – положительные значения переменной u. Тогда, вводя на $f(RE)$ параметризацию по ξ,

$$u = -\xi, \quad u^{i\alpha\beta} = \exp(-\pi\alpha\beta)\exp(i\alpha\beta\ln\xi),$$

где параметр $\xi \in (0,\xi_0)$, $\xi_0 \in (0,1)$; подставим эти равенства в разложение (66). Учитывая еще, что, согласно (36), выполняется равенство $\exp(-\pi\alpha\beta) = 1/\sqrt{1+Q}$, получаем параметрическое по ξ представление для координат кривой (RE):

$$z(\xi) = z_E - \frac{\mathcal{A}_1}{\sqrt{1+Q}}\exp(i\alpha\beta\ln\xi)\left(\xi - \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\xi^2 + \ldots\right), \tag{67}$$

где величина $\alpha\beta$, напомним, определяется равенством (51). Вводя на плоскости z локальные полярные координаты (r,ϕ) с началом в центре E вихря и сравнивая полученное выражение (67) со стандартным представлением для спиралевидной кривой

$$z(\phi) = z_E + r(\phi)e^{i(\phi-\phi_0)},$$

находим связь $\xi = \exp(\phi/\alpha\beta)$ между параметрической переменной ξ и полярным углом. Тогда уравнение в полярных координатах $r(\phi)$ линии (RE) с относительной точностью до $\exp(\phi/\alpha\beta)$ принимает вид

$$r(\phi) = \frac{|\mathcal{A}_1|}{\sqrt{1+Q}}\exp\left(\frac{\phi}{\alpha\beta}\right) + O\left(\exp\left(\frac{2\phi}{\alpha\beta}\right)\right), \quad \phi \to -\infty. \tag{68}$$

Таким образом, кривая (RE) вблизи центра вихря представляет собой закручивающуюся логарифмическую спираль. Принимая теперь во внимание соотношение (51), получаем первый (по малости Q) член асимптотики (68):

$$r(\phi) = \mathcal{A}\exp(2\pi Q^{-1}\phi),$$

где $\mathcal{A}$ – главный член разложения множителя при экспоненте в упомянутой асимптотике.

Для раскручивающейся дуги (EL) переменная u положительна, поэтому $u^{i\alpha\beta} = \exp(i\alpha\beta\ln u)$. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, устанавливаем уравнение в полярных координатах $r(\phi)$ линии (EL):

$$r(\phi) = |\mathcal{A}_1|\exp\left(\frac{\phi}{\alpha\beta}\right) + O\left(\exp\left(\frac{2\phi}{\alpha\beta}\right)\right), \quad \phi \to -\infty.$$

Таким образом, кривые (RE) и (EL) вблизи центра вихря представляют собой две подобные логарифмические спирали с коэффициентом подобия $\sqrt{1+Q}$.

6.3. Найдем число N оборотов, совершаемых при движении жидкости вдоль линии тока $\{z : \psi(z) = \varepsilon\}$, соответствующей малому положительному ε (заметим, что число оборотов нулевой линии тока, очевидно, бесконечно).

Для этого найдем образ точки $w = \varphi_E + i\varepsilon$ на плоскости годографа при отображении $\zeta = F(w)$, значение которого находится, согласно (12), путем подстановки функции $t = \chi^{-1}(w)$ из (43) в выражение (35) для отображения $\zeta = T(t)$ с домножением в последней дроби числителя и знаменателя на ее знаменатель:

$$\zeta = F(w) = i\pi\alpha - \alpha\ln\frac{\sqrt{\varphi_C}-\sqrt{\varphi_C-w}}{\sqrt{\varphi_C}+\sqrt{\varphi_C-w}} + i\alpha\beta\ln\frac{w-\varphi_E}{(\sqrt{\varphi_C-\varphi_E}+\sqrt{\varphi_C-w})^2}. \tag{69}$$

Подставляя сюда $w = \varphi_E + i\varepsilon$ и разлагая результат по степеням ε, получаем

$$F(\varphi_E + i\varepsilon) = i\frac{\ln\sqrt{1+Q}}{\pi}\ln\varepsilon + \left[\frac{\ln\sqrt{1+Q}}{2} - i\frac{\ln\sqrt{1+Q}}{\pi}\ln(4\varphi_E - 4\varphi_C)\right] - \\ - \left[\frac{i\alpha\sqrt{\varphi_C}}{\sqrt{\varphi_C - \varphi_E}\varphi_E} + \frac{\ln\sqrt{1+Q}}{4\pi(\varphi_C - \varphi_E)}\right]\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \tag{70}$$

Отсюда, в частности, следует соотношение

$$\operatorname{Re}F(\varphi_E + i\varepsilon) = \frac{\ln\sqrt{1+Q}}{2} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

которое геометрически означает, что образ точки $w = \varphi_E + i\varepsilon$ асимптотически располагается посередине ширины вертикальной полосы на плоскости годографа.

Взяв теперь мнимую часть выражения (70) и разделив ее на -2π, мы и получим искомое количество оборотов:

$$N = \frac{\ln\sqrt{1+Q}}{2\pi^2}\ln\frac{4(\varphi_E - \varphi_C)}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0,$$

полагая, что оно может принимать и дробные значения.

Из последнего соотношения вытекает асимптотика для числа N при малых Q:

$$N = \frac{Q}{4\pi^2}\ln\frac{4\pi^2\alpha^2(1-\alpha)(2-\alpha)lV_\infty}{\varepsilon Q^2 F(3, 1-\alpha; 3-\alpha; -1)} + \mathbb{O}(Q^2) + \mathbb{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0, \quad Q \to 0,$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса (см. [22]).

6.4. Найдем асимптотику размера $\mathfrak{D}$ вихрей, образуемых нулевой линией тока в зоне замыкания каверны. Для этого прежде всего найдем, опираясь на теорию конформного отображения сингулярно деформируемых областей (см. [23]) и исходя из представления (69), асимптотику отображения $\zeta = F(w)$ вблизи точки E и обратим ее; в результате получим

$$w = F^{-1}(\zeta) = \varphi_E + \frac{4}{e^2}(\varphi_C - \varphi_E)\exp\frac{\zeta}{i\alpha\beta} + \mathbb{O}\left(\exp\frac{2\zeta}{i\alpha\beta}\right), \quad \zeta \to E.$$

Подставля сюда координату $\zeta = -i\pi/2$ точки R на плоскости ζ, находим ее образ на плоскости w:

$$\varphi_R = \varphi_E + \frac{4}{e^2}(\varphi_C - \varphi_E)\exp\left(\frac{-\pi^2}{\ln(1+Q)}\right) + \mathbb{O}\left[\exp\left(\frac{-2\pi^2}{\ln(1+Q)}\right)\right], \tag{71}$$

а подставив в то же представление координату $\zeta = -i\pi/2 + \ln\sqrt{1+Q}$ точки L на плоскости ζ, находим образ последней на w:

$$\varphi_L = \varphi_E - \frac{4}{e^2}(\varphi_C - \varphi_E)\exp\left(\frac{-\pi^2}{\ln(1+Q)}\right) + \mathbb{O}\left[\exp\left(\frac{-2\pi^2}{\ln(1+Q)}\right)\right]. \tag{72}$$

Теперь, чтобы вычислить искомый размер $\mathfrak{D}$, разложим подынтегральное выражение (65) в окрестности точки $w = \varphi_E$, проинтегрируем полученный результат от φ_L до φ_R и подставим полученные соотношения (71) и (72). В итоге получим

$$\mathfrak{D} = l\frac{8\pi^2\alpha^2(1-\alpha)(2-\alpha)}{e^2F(3, 1-\alpha; 3-\alpha; -1)}Q^{-2}\exp\left(\frac{-\pi^2}{Q}\right)[1 + \mathbb{O}(Q)].$$

6.5. Установим асимптотику убывания относительной (т.е. отнесенной к длине стенки клина l) ширины следа $\mathfrak{S}(x)$ при $x \to +\infty$. Для этого найдем разложение подынтегрального выражения (65) вблизи бесконечности по дробным степеням w, имеющее вид

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q}}\left[1 - \frac{2i\alpha(1+\beta^2)}{3\beta^2}\frac{\varphi_C^{3/2}}{w^{3/2}} + \mathbb{O}(w^{-5/2})\right].$$

Тогда, проинтегрировав его, получаем разложение функции $f^{-1}(w)$ вблизи точки $w = \infty$

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{V_Q\sqrt{1+Q}}\left[w + \frac{4i\alpha(1+\beta^2)}{3\beta^2}\frac{\varphi_C^{3/2}}{w^{1/2}} + \mathbb{O}(w^{-3/2})\right], \quad w \to \infty.$$

Чтобы получить поведение относительной ширины следа $\mathfrak{S}(x)$ при $x \to +\infty$, положим в найденном разложении $w \to +\infty$ и выделим в нем вещественную $x(w)$ и мнимую $y(w)$ части:

$$x(w) = \frac{w}{V_Q\sqrt{1+Q}} + \mathbb{O}(w^{-2}), \quad y(w) = \frac{1}{V_Q\sqrt{1+Q}}\frac{4\alpha(1+\beta^2)}{3\beta^2}\frac{\varphi_C^{3/2}}{w^{1/2}} + \mathbb{O}(w^{-3/2}).$$

Выражая из первого равенства зависимость $w(x)$ и подставляя ее во второе, получаем уравнение $y(x)$ для границы следа, умножив которое на два и разделив на l, находим асимптотику относительной ширины следа

$$\mathfrak{S}(x) = \frac{\alpha(1+\beta^2)}{3\beta^2(1+Q)^{3/4}(\tau I_0)^{3/2}}\left(\frac{x}{l}\right)^{-1/2} + \mathbb{O}((x/l)^{-2}), \quad x \to +\infty. \tag{73}$$

Отсюда, тем же путем, что и выше, находим первый (по малости Q) член разложения этой асимптотики в виде

$$\mathfrak{S}(x) \sim Q^{-2}(x/l)^{-1/2}.$$

6.6. Выведем асимптотику коэффициента сопротивления[13] $\mathbf{C}_x^T(Q)$ при малых числах кавитации Q. Будем исходить из выражения (57) для этой величины. Используя разложение параметра β из формулы (36) по степеням Q, последовательно получаем аналогичные разложения для величины τ из (52) и интегралов I_0, I_1 из (54), (56). Подставляя эти разложения в (57), устанавливаем искомую асимптотику в виде

$$\mathbf{C}_x^T(Q) = (1+Q)[\mathbf{C}_x^H + E_2^T Q^2 + \mathbb{O}(Q^3)], \quad Q \to 0, \tag{74}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_x^H &= 1 - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\frac{F(3,1+\alpha;3+\alpha;-1)}{F(3,1-\alpha;3-\alpha;-1)},\\
E_2^T &= \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\pi^2\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)F(3,1-\alpha;3-\alpha;-1)}\times\\
&\times\left[\frac{F(4,1+\alpha;4+\alpha;-1)}{3+\alpha} + \frac{F(3,1+\alpha;3+\alpha;-1)F(4,1-\alpha;4-\alpha;-1)}{(3-\alpha)F(3,1-\alpha;3-\alpha;-1)}\right].
\end{aligned} \tag{75}$$

Отметим, что в асимптотике (74) первый коэффициент $\mathbf{C}_x^H$, определяемый формулой (75), является общим для всех исследованных в [5] и настоящей работе схем, начиная со схемы Гельмгольца–Кирхгофа, поэтому он отмечен верхним индексом H. Вид асимптотики для этих схем отличается только коэффициентом при Q^2.

В табл. 2 для различных значений угла $\pi\alpha$, измеряемого в градусах, приведены величины коэффициентов $\mathbf{C}_x^H$, E_2^Z, E_2^R, E_2^T, где верхние индексы Z, R и T соответствуют схемам Жуковского–Рошко, Рябушинского и Тулина.

6.7. Построим теперь асимптотики для относительной длины $\mathfrak{L}$ и относительной ширины $\mathfrak{W}$ каверны. Будем исходить из выражений (63) и (64) для этих величин. Используя разложение параметра β из формулы (36) по степеням Q и аналогичное разложение для γ, найдем разложения для μ и η, определяемых из (46). Подставляя эти результаты в представления (60), (61) для интегралов I_2, I_3, выраженных через функцию Лауричеллы, и используя формулы (см. [12], [24]) аналитического продолжения в окрестность особой точки $z_k = 1$ для всех трех аргументов этой функции, а результат – в (63) и (64), устанавливаем искомые асимптотики:

[13]В связи с тем, что ниже рассматриваются коэффициенты сопротивления для разных схем, мы будем отмечать принадлежность к этим схемам следующими верхними индексами: H – для схемы Гельмгольца–Кирхгофа, Z – для схемы Жуковского–Рошко, R – для схемы Рябушинского, T – для рассматриваемой схемы Тулина.

Таблица 2. Коэффициенты $\mathbf{C}_x^H$ и E_2 для различных схем

$\alpha 180°$	$\mathbf{C}_x^H$	E_2^Z	E_2^R	E_2^T
5	0.105176	2.684677	2.013508	2.176117
10	0.199376	1.201306	0.900980	0.973742
20	0.359547	0.480931	0.360698	0.389828
30	0.488563	0.256427	0.192320	0.207852
40	0.592678	0.153498	0.115124	0.124421
45	0.636973	0.121763	0.091322	0.098698
50	0.676796	0.097708	0.073281	0.079199
60	0.744787	0.064510	0.048383	0.052290
70	0.799727	0.043563	0.032672	0.035311
80	0.844074	0.029812	0.022359	0.024165
90	0.879802	0.020532	0.015399	0.016643
100	0.908505	0.014146	0.010610	0.011467
110	0.931478	0.009692	0.007269	0.007856
120	0.949771	0.006557	0.004917	0.005315
130	0.964244	0.004340	0.003255	0.003518
135	0.970273	0.003488	0.002616	0.002827

$$\mathfrak{L} = \frac{31(1-\alpha)(2-\alpha)\alpha^2}{\pi\sin(\pi\alpha)F(3,1-\alpha;3-\alpha;-1)}\frac{1}{Q^2} + \mathbb{O}(1), \quad Q \to 0,$$

$$\mathfrak{W} = \frac{6\pi(1-\alpha)(2-\alpha)\alpha^2}{5\sin(\pi\alpha)F(3,1-\alpha;3-\alpha;-1)}\frac{1}{Q} + \mathbb{O}(1), \quad Q \to 0.$$

Таким образом, при убывании числа кавитации Q относительная длина $\mathfrak{L}$ каверны растет значительно быстрее, чем ее относительная ширина $\mathfrak{W}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биркгофф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы, каверны. М.: Мир, 1964.
2. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
3. *Franc J.-P., Michel J.-M.* Fundamentals of cavitation. Series: Fluid Mechanics and its Applications, V. 76. Dordrecht: Springer, 2004.
4. *Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S.* The hydrodynamics of cavitating flows. Hoboken, NJ: Backbone Publ. Co, 2011.
5. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2098–2121.
6. *Tulin M.P.* Supercavitating flows–small perturbation theory. В кн.: “Приложения теории функций в механике сплошной среды”. Тр. Международ. симп. в Тбилиси, 17–23 сентября 1963 г. Т. 2. М.: Наука, 1965. С. 403–439.
7. *Gilbarg D.* Jets and cavities. Handbuch der Physik. Bd. 9. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer, 1960. S. 311–443.
8. *Brennen Ch.E.* Cavitation and bubble dynamics. NY, Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
9. *Karn A., Roger E.A.A., Hong J.* An experimental investigation into supercavity closure mechanisms // J. Fluid Mech. 2016. V. 789. P. 259–284.
10. *Миллер У.* Симметрии и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
11. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. NY: J. Willey & Sons inc, 1976.
12. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. Вып. 6 (444). С. 3–94.
13. *Tulin M.P.* Supercavitating flows-small perturbation theory // J. Ship. Res. 1964. V. 7. № 3. P. 16–37.

14. *Эфрос Д.А.* Гидродинамическая теория плоско-параллельного кавитационного течения // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. № 4. С. 263–266.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
16. *Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Отрывные и кавитационные течения. Основные свойства и расчетные модели. М.: Наука, 1990.
17. *Савелов А.А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. М.: ГИФМЛ, 1960.
18. *Жуковский Н.Е.* Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока // Матем. сборник. 1890. Т. 15. № 1. С. 121–276.
19. *Барский И.Л.* Асимптотические оценки для течений со свободными границами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 3. С. 686–699.
20. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
21. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
22. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
23. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.
24. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's functions $F_A^{(N)}$, $F_B^{(N)}$ and $F_D^{(N)}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2020. V. 31. № 11. P. 921–940.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1894–1903

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

УГЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

И. В. Денисов

300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия

e-mail: den_tspu@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.
Переработанный вариант 21.07.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon)$$

в прямоугольнике рассматривается задача с краевыми условиями I рода. Предполагается, что в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической. Нуль производной функции F и граничное значение задачи в каждой угловой точке прямоугольника лежат по одну сторону от решения вырожденного уравнения. Строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon\to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике. Библ. 6.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466921110065

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается начально-краевая задача вида

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,0,\epsilon)=\phi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{0.2}$$

$$u(0,t,\epsilon)=\psi_1(t),\quad u(1,t,\epsilon)=\psi_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{0.3}$$

где через Ω обозначен прямоугольник $\{(x,t)|0<x<1,\ 0<t<T\}$.

В [1] рассмотрен случай, когда в угловых точках прямоугольника функция F кубична относительно переменной u, причем нуль производной функции F и граничное значение задачи в угловой точке лежат по разные стороны от решения вырожденного уравнения. В предлагаемой статье рассматривается случай, когда нуль производной функции F и граничное значение задачи в угловой точке прямоугольника лежат по одну сторону от решения вырожденного уравнения. Оказывается, что наличие такой точки существенно влияет на вид и способ построения барьерных функций при доказательстве существования подходящего решения задачи для определения главного члена угловой части асимптотики решения. В работе строится полное асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\epsilon\to 0$ и обосновывается равномерность этого приближения в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ с точностью любого порядка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Повторим общие условия, которые предполагаются выполненными (см. [1]).

Условие 1. Функции $F(u,x,t,\epsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений

$$\phi(0) = \psi_1(0), \quad \phi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \overline{u}_0(x,t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. Производная $F'_u(\overline{u}_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\overline{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \overline{u}_0(x,0) \tag{1.1}$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\overline{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0) \tag{1.2}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \overline{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \to \infty$ (здесь t — параметр, $k = 0$ или 1).

Условий 1—5 недостаточно, чтобы гарантировать существование решения задачи (0.1)—(0.3) для произвольной функции $F(u,x,t,\epsilon)$. Требуются дополнительные условия, заключающиеся в выборе определенного класса функций.

Условие 6. В угловых точках $(k,0)$, $k = 0, 1$, прямоугольника Ω функция $F(u,k,0,0)$ имеет вид

$$F(u,k,0,0) = u^3 - \overline{u}_0^3,$$

где числа $\overline{u}_0 = \overline{u}_0(k,0)$ отрицательны и меньше граничных значений:

$$\overline{u}_0(k,0) < \phi(k).$$

Решение задачи (0.1)—(0.3) строится согласно методу угловых пограничных функций (см. [2]) в виде суммы

$$u(x,t,\epsilon) = \overline{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*), \tag{1.3}$$

где $\overline{u}$ обозначает функцию, называемую регулярной частью асимптотики. Эта функция представляет решение задачи во внутренней части прямоугольника Ω без учета граничных условий. Пограничные функции Π, Q и Q^* осуществляют гладкий переход от регулярной части к граничным условиям на сторонах прямоугольника Ω: $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Угловые пограничные функции P и P^* сглаживают невязки, вносимые пограничными функциями вблизи вершин прямоугольника Ω: (0, 0) и (1, 0) соответственно.

Пропустим формальную процедуру построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций, которая приведена в [1]. Угловые пограничные функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k P_k(\xi,\tau), \quad P^*(\xi_*,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau),$$

где растянутые переменные определяются следующими соотношениями:

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\epsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\epsilon^2}.$$

Основные трудности доставляет задача для определения главного члена угловой части асимптотики решения, которая, также как и исходная, является нелинейной. Для угловой точки (0,0) задача для определения $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти

$$\mathbb{R}_+^2 := \{(\xi,\tau) | \xi > 0,\ \tau > 0\}$$

плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau) + Q_0(\xi,0) + P_0(\xi,\tau), 0,0,0\right) - \\ - F\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau), 0,0,0\right) - F\left(\bar{u}_0(0,0) + Q_0(\xi,0), 0,0,0\right), \quad \xi > 0, \quad \tau > 0, \tag{1.4}$$

$$P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau), \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), \quad P_0(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{1.5}$$

где

$$\bar{u}_0(0,0) = -b < 0. \tag{1.6}$$

Для функций $P_k(\xi,\tau)$, $k \ge 1$, в области $\mathbb{R}^2_+$ получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'_u\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau) + Q_0(\xi,0) + P_0(\xi,\tau), 0,0,0\right) P_k + h_k, \tag{1.7}$$

$$P_k(0,\tau) = -\Pi_k(0,\tau), \quad P_k(\xi,0) = -Q_k(\xi,0), \quad P_k(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{1.8}$$

где неоднородности h_k удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi,\tau)| \le C\exp[-\kappa(\xi+\tau)],$$

если такого же вида оценкам удовлетворяют функции $P_0, \ldots, P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

2. ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНЕГО РЕШЕНИЯ

Для удобства определим оператор L:

$$L(P) := a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0),$$

где

$$P = P(\xi,\tau), \quad F(u) = F(u,0,0,0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0,0), \quad \Pi_0 = \Pi_0(0,\tau), \quad Q_0 = Q_0(\xi,0).$$

Задачу (1.4), (1.5) для главного члена угловой части асимптотики можно переписать в операторной форме

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}^2_+, \tag{2.1}$$

$$P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau), \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), \quad P_0(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{2.2}$$

Нужно доказать, что данная задача имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$|P_0(\xi,\tau)| \le C\exp[-\kappa(\xi+\tau)], \tag{2.3}$$

где C и κ – некоторые положительные числа. Для этого воспользуемся методом верхних и нижних решений (см. [3]–[5]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}^2_+,$$
$$Z = h \quad \text{на границе области},$$

имеет решение Z в промежутке между барьерными функциями $Z_- \le Z \le Z_+$, если в области $\mathbb{R}^2_+$ выполняются неравенства

$$L(Z_+) \le 0, \quad L(Z_-) \ge 0, \quad Z_- \le Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \le h \le Z_+.$$

В [1] доказано, что на роль верхнего решения задачи независимо от величины граничного значения подходит функция $Z_+(\xi,\tau) = 0$. Естественно и в рассматриваемом случае на роль верхнего решения попробовать эту функцию. Заметим, что по условию 6 граничное значение ϕ в точке (0, 0) лежит правее корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. Поэтому значения Π_0 и Q_0 принадлежат промежутку $(0, \phi - \bar{u}_0]$, где $\phi - \bar{u}_0 > 0$, и на границе области $\mathbb{R}^2_+$ выполняются необходимые для верхнего решения неравенства:

$$Z_+(0,\tau) = 0 \geq -\Pi_0, \quad Z_+(\xi, 0) = 0 \geq -Q_0.$$

Внутри области $\mathbb{R}^2_+$ нужно доказать неравенство

$$L(Z_+) = -F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \leq 0.$$

Для краткости обозначим

$$\bar{u}_0(0,0) = -b, \quad \Pi_0 = y, \quad Q_0 = z, \quad L(Z_+) = L(y,z). \tag{2.4}$$

Тогда неравенство примет вид

$$L = -F(-b + y + z) + F(-b + y) + F(-b + z) \leq 0, \quad y, z \in (0, \phi + b], \tag{2.5}$$

где число $b > 0$.

Внутри области $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$, как показано в [1], необходимые условия экстремума функции $L = L(y,z)$ имеют вид

$$F'(-b + y + z) = F'(-b + y) = F'(-b + z).$$

При условии $\phi > -\frac{b}{3}$ внутри области имеется точка экстремума $\left(\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}\right)$, в которой величина

$$L\left(\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}\right) = \frac{8b^3}{9} > 0,$$

так что неравенство (2.5) не выполняется.

Если же $-b < \phi \leq -\frac{b}{3}$, то внутри области точек экстремума нет. Однако в граничной точке $(\phi + b, \phi + b)$ величина

$$L(\phi + b, \phi + b) = -6\phi(\phi + b)^2 > 0.$$

Таким образом, функция $Z_+(\xi,\tau) = 0$ не подходит на роль верхнего решения ни при каком выборе граничного значения $\phi > -b$.

В качестве возможного верхнего решения задачи будем пробовать функцию

$$Z_+(\xi,\tau) = -\frac{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}{\phi - \bar{u}_0}.$$

Требуется доказать неравенство

$$\begin{gathered} L(Z_+) = -a^2 \frac{\Pi_0}{\phi - \bar{u}_0} \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} + \frac{Q_0}{\phi - \bar{u}_0} \frac{d\Pi_0}{d\tau} - \\ - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_+) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \leq 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь

$$a^2 \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad -\frac{d\Pi_0}{d\tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0),$$

и с учетом замены (2.4)

$$L(Z_+) = \left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right) F(-b + z) + \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right) F(-b + y) - F\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right).$$

На диагонали $z = y$ прямоугольника $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$ выражение $L(Z_+)$ представляет собой функцию $g(y)$ одной переменной y:

$$g(y) = 2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)F(-b + y) - F\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right), \quad y \in (0, \phi + b].$$

Производные этой функции имеют вид

$$g'(y) = -\frac{2}{\phi + b}F(-b + y) - 2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)\left[F'\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right) - F'(-b + y)\right],$$

$$g''(y) = \frac{2}{\phi + b}\left[F'\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right) - 2F'(-b + y)\right] -$$
$$- 2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)\left[2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)F''\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right) - F''(-b + y)\right].$$

Значение

$$g''(0) = k\left(2 - \frac{b}{\phi + b}\right).$$

Если $g''(0) > 0$, то производная $g'(y)$ возрастает на некотором промежутке $(0, y_0]$ и ее значения на этом промежутке $g'(y) > g'(0) = 0$. Отсюда заключаем, что функция $g(y)$ возрастает на промежутке $(0, y_0]$ и ее значения на этом промежутке $g(y) > g(0) = 0$. Условие $g''(0) > 0$ эквивалентно соотношению $\phi > -\frac{b}{2}$. Поэтому если $\phi > -\frac{b}{2}$, то неравенство (2.6) не выполняется.

Теперь рассмотрим возможность выполнения неравенства (2.6) при условии выбора ϕ из промежутка

$$-b < \phi \le -\frac{b}{2} < 0. \tag{2.7}$$

Для этого исследуем функцию $L(y, z) = L(Z_+)$ на наличие точек экстремума в области $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$ при условии (2.7). Производная

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right)\left[F'(-b + y) - F'\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right)\right] - \frac{1}{\phi + b}F'(-b + z).$$

Будем рассматривать выражение в квадратных скобках как функцию $h(y)$ одной переменной y, считая z параметром:

$$h(y) := F'(-b + y) - F'\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right), \quad y \in (0, \phi + b].$$

Производная этой функции с учетом вида функции $F(u)$ имеет вид

$$h'(y) = F''(-b + y) - \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right)F''\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right) =$$
$$= -6z\left[-1 + \frac{y}{\phi + b} + \frac{1}{\phi + b}\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right)\right].$$

Для функции

$$g(y) = -1 + \frac{y}{\phi + b} + \frac{1}{\phi + b}\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right), \quad y \in (0, \phi + b],$$

стоящей в квадратных скобках, производная

$$g'(y) = \frac{1}{\phi + b}\left(2 - \frac{z}{\phi + b}\right) > 0.$$

Поэтому функция $g(y)$ возрастает на промежутке $(0, \phi + b]$ и ее значения на этом промежутке

$$g(y) > g(0) = \frac{1}{\phi + b}(z - \phi) > 0,$$

так как $\phi < 0$. Отсюда следует, что значения производной $h'(y) < 0$ на промежутке $(0, \phi + b]$. В связи с этим функция $h(y)$ убывает на промежутке $(0, \phi + b]$ и ее значения на этом промежутке $h(y) < h(0) = 0$. Возвращаясь к функции $L(y, z)$, заключаем, что производная

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right)h(y) - \frac{1}{\phi + b}F'(-b + z) < 0,$$

и, значит, при условии (2.7) функция $L(y, z)$ в области $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$ не имеет точек экстремума. Кроме этого, при любом значении $z \in (0, \phi + b]$ функция $L(y, z)$ убывает по переменной y и выполняется неравенство

$$L(y, z) < L(0, z) = 0.$$

Это завершает доказательство неравенства (2.6) при условии (2.7) и можно сформулировать полученный результат.

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (2.7), *то функция*

$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\phi - \bar{u}_0}$$

является верхним решением задачи (2.1), (2.2).

3. ПОСТРОЕНИЕ НИЖНЕГО РЕШЕНИЯ

В качестве возможного нижнего решения задачи (2.1), (2.2) будем пробовать функцию

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}.$$

Имеем

$$L(Z_-) = \sqrt{\Pi_0 Q_0}\left[\frac{1}{Q_0^2}\int_0^{Q_0} F(-b + u)du - \frac{1}{Q_0}F(-b + Q_0) - \frac{1}{\Pi_0}F(-b + \Pi_0)\right] -$$
$$- F\left(-b + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) + F(-b + \Pi_0) + F(-b + Q_0).$$

С учетом вида функции $F(u)$ имеем

$$\frac{1}{Q_0^2}\int_0^{Q_0} F(-b + u)du = \frac{1}{4}Q_0^2 - bQ_0 + \frac{3}{2}b^2,$$

$$\frac{1}{Q_0}F(-b + Q_0) = Q_0^2 - 3bQ_0 + 3b^2,$$

$$\frac{1}{\Pi_0}F(-b + \Pi_0) = \Pi_0^2 - 3b\Pi_0 + 3b^2.$$

С учетом замены

$$y = \sqrt{\Pi_0} \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right], \quad z = \sqrt{Q_0} \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right],$$

и вида функции $F(u)$ нужно доказать неравенство

$$L(y, z) = yz\left(h(z) - g(z) - g(y)\right) - \left[-b + (y - z)^2\right)^3 + \left(-b + y^2\right]^3 + \left(-b + z^2\right)^3 + b^3 \geq 0, \tag{3.1}$$

где обозначено

$$L(y, z) = L(Z_-), \quad h(z) = \frac{1}{4}z^4 - bz^2 + \frac{3}{2}b^2, \quad g(z) = z^4 - 3bz^2 + 3b^2, \quad g(y) = y^4 - 3by^2 + 3b^2.$$

Замечание 1. В отличие от [1] неравенство (3.1) не выполняется, если отбросить $h(z)$, чтобы перейти к выражению, симметричному по y, z. Тем не менее симметрию можно использовать. Если в (3.1) отбросить положительное слагаемое $h(z)$, то в левой части останется выражение $L_1(y,z)$, симметричное по y, z:

$$L_1(y,z) = L_1(z,y).$$

Так как функция $h(z)$ убывает на промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$, то условие $z_1 < z_2$ влечет $h(z_1) > h(z_2)$. Соответственно,

$$L(y,z) = yzh(z) + L_1(y,z) = yzh(z) + L_1(z,y),$$

и для $y < z$ выполняется неравенство

$$L(y,z) > yzh(y) + L_1(z,y) = L(z,y).$$

В связи с этим неравенство (3.1) будем доказывать на траекториях $z = \mathrm{const} \in \left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$, т.е. будем считать левую часть (3.1) функцией одной переменной y: $L(Z_-) = L(y)$, где $y \in \left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$, а z – параметр.

Так как $L(0) = 0$, то для выполнения (3.1) необходимо условие $L'(0) \geq 0$. Производная

$$L'(y) = z\left(h(z) - g(z)\right) - zg(z) - yzg'(y) - 6(y-z)[-b + (y-z)^2]^2 + 6y(-b + y^2)^2,$$

где $g'(y) = 4y^3 - 6by$. Таким образом,

$$L'(0) = z\left[-\frac{3}{4}z^4 + 2bz^2 - \frac{9}{2}b^2 + 6(-b + z^2)^2\right].$$

При достаточно малых значениях z знак $L'(0)$ совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратных скобках при $z = 0$. Это выражение

$$-\frac{9}{2}b^2 + 6(-b)^2 > 0.$$

При $z = \sqrt{\phi+b}$ производная

$$L'(0) = \frac{1}{4}\sqrt{\phi+b}(21\phi^2 + 2b\phi - 13b^2) \geq 0,$$

если

$$\phi \leq -\frac{\sqrt{274}+1}{21}b = -0.83\ldots b, \quad \text{или} \quad \phi \geq \frac{\sqrt{274}-1}{21}b = 0.74\ldots b.$$

С учетом условия (2.7) получаем ограничение на выбор граничного значения ϕ:

$$-b < \phi \leq -\frac{\sqrt{274}+1}{21}b = -0.83\ldots b < 0. \tag{3.2}$$

Продолжим исследование функции $L(y)$, вычислим ее производные:

$$L''(y) = -2zg'(z) - yzg''(y) - 6[-b + (y-z)^2]^2 - 24(y-z)^2[-b + (y-z)^2] + \\ + 6(-b + y^2)^2 + 24y^2(-b + y^2),$$

$$L'''(y) = -3zg''(y) - yzg'''(y) + 72b(y-z) - 120(y-z)^3 - 72by + 120y^3,$$

$$L^{IV}(y) = 120z(5y - 3z),$$

$$L^{V}(y) = 600z,$$

где $g'(y) = 4y^3 - 6by$, $g''(y) = 12y^2 - 6b$, $g''' = 24y$.

На промежутке $y \in \left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ производная $L^V(y) > 0$, поэтому функция $L'''(y)$ выпукла вниз на этом промежутке. Величина

$$L'''(0) = 6z(20z^2 - 9b) \leq 6z(20(\phi+b) - 9b) < 0,$$

а знак

$$L'''\left(\sqrt{\phi+b}\right)=6\left[20\left(z-\sqrt{\phi+b}\right)^3-10\phi z-19b\phi\right]$$

совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратных скобках

$$f(z)=20\left(z-\sqrt{\phi+b}\right)^3-10\phi z-19bz,\quad z\in\left(0,\sqrt{\phi+b}\right].$$

Производная

$$f'(z)=60\left(z-\sqrt{\phi+b}\right)^2-10\phi-19b<0$$

при

$$\sqrt{\phi+b}-\sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}}<z<\sqrt{\phi+b}+\sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}}.$$

Величина

$$\sqrt{\phi+b}-\sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}}<0,$$

а

$$\sqrt{\phi+b}+\sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}}>\sqrt{\phi+b}.$$

Поэтому на промежутке $z\in\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ производная $f'(z)<0$, функция $f(z)$ убывает и ее значения

$$f(z)<f(0)=-20(\phi+b)\sqrt{\phi+b}<0.$$

Итак, на промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ функция $L'''(y)$ выпукла вниз и ее значения $L'''(0)<0$, $L'''\left(\sqrt{\phi+b}\right)<0$. Отсюда следует, что $L'''(y)<0$ при любом $y\in\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$.

Для функции $L''(y)$ заключаем, что она убывает на промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$. Величина

$$L''(0)=2z^2(24b-19z^2)>0.$$

Для $L''\left(\sqrt{\phi+b}\right)$ возможны два варианта. Первый – когда $L''\left(\sqrt{\phi+b}\right)\ge 0$. В этом случае $L''(y)\ge 0$ на всем промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$. Соответственно, функция $L'(y)$ возрастает на промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ и ее значения

$$L'(y)>L'(0)\ge 0.$$

Соответственно, функция $L(y)$ возрастает на промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ и ее значения

$$L(y)>L(0)=0,$$

так что неравенство (3.1) выполняется.

Второй вариант – когда $L''\left(\sqrt{\phi+b}\right)<0$. В этом случае на промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ существует единственная точка y_0, в которой $L''(y)$ меняет знак с положительного при $y\in(0,y_0)$ на отрицательный при $y\in\left(y_0,\sqrt{\phi+b}\right]$. Функция $L'(y)$ будет иметь максимум в точке y_0, возрастать на промежутке $(0,y_0)$ и убывать на промежутке $\left(y_0,\sqrt{\phi+b}\right]$. Кроме того, $L'(y)$ выпукла вверх на всем промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ и $L'(0)\ge 0$ по условию (3.2).

На промежутке $\left(0,\sqrt{\phi+b}\right]$ может существовать лишь одна точка y_1, в которой $L'(y)$ поменяет свой знак с положительного при $y\in(0,y_1)$ на отрицательный при $y\in\left(y_1,\sqrt{\phi+b}\right]$. Если

$y_1 \geq \sqrt{\phi + b}$, то $L'(y) \geq 0$ на всем промежутке $\left(0, \sqrt{\phi + b}\right]$, функция $L(y)$ возрастает на этом промежутке и ее значения

$$L(y) > L(0) = 0,$$

так что неравенство (3.1) выполняется.

Если $y_1 < \sqrt{\phi + b}$, то функция $L(y)$ возрастает при $y \in (0, y_1)$ от значения $L(0) = 0$ и убывает при $y \in \left(y_1, \sqrt{\phi + b}\right]$ до значения $L\left(\sqrt{\phi + b}\right)$. Выполнение неравенства (3.1) зависит от знака $L\left(\sqrt{\phi + b}\right)$. В силу замечания 1, сделанного ранее,

$$L\left(\sqrt{\phi + b}, z\right) \geq L\left(z, \sqrt{\phi + b}\right),$$

а доказательство неравенства $L\left(z, \sqrt{\phi + b}\right) \geq 0$ по первой переменной уже проведено и приводит к проверке условия $L\left(\sqrt{\phi + b}, \sqrt{\phi + b}\right) \geq 0$. Значение

$$L\left(\sqrt{\phi + b}, \sqrt{\phi + b}\right) = \frac{1}{4}(\phi + b)\left[(\phi + b)^2 - 4b(\phi + b) + 6b^2\right] > 0,$$

что завершает доказательство неравенства (3.1), и можно сформулировать результат.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то функция*

$$Z_{-}(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)}$$

является нижним решением задачи (2.1), (2.2).

4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

Оба построенных барьера удовлетворяют экспоненциальной оценке убывания вида (2.3), поэтому на основании метода верхних и нижних решений заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то задача* (1.4), (1.5) *имеет решение* $P_0(\xi, \tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (2.3).

Барьерные функции для задачи (1.4), (1.5) строились с расчетом, чтобы коэффициент F_u' в задачах (1.7), (1.8) оставался положительным, что обеспечивает существование решений $P_k(\xi, \tau)$ с оценками вида (2.3), т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то задачи* (1.7), (1.8) *имеют решения* $P_k(\xi, \tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (2.3).

Отметим, что функции $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, определяются аналогично.

Формальный ряд (1.3) оказывается полностью построенным. Обоснование асимптотики решения завершает следующая теорема.

Теорема 5. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то для достаточно малых* ε *задача* (0.1)–(0.3) *имеет решение* $u(x, t, \varepsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau)\right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы, как и в [1], основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k \geq 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из [6].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.Ф. Бутузову за внимание к данной проблематике и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 256–267.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
3. *Amann H.* On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. № 2. P. 125–146.
4. *Sattinger D.H.* Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1000.
5. *Amann H.* Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. New York etc: Acad press, cop. 1978. XIII. P. 1–29.
6. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 255–274.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1904–1926

УДК 519.6

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БИМФОРМИНГА ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА[1)]

© 2021 г. Т. К. Козубская[1,*], Г. М. Плаксин[1,**], И. Л. Софронов[2,3,***]

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

[2] 141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

[3] 125171 Москва, Ленинградское ш., 16а, стр. 3, “Шлюмберже”, Россия

*e-mail: tatiana.kozubskaya@gmail.com

**e-mail: glebyp@gmail.com

***e-mail: ilsofronov@gmail.com

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.
Переработанный вариант 11.06.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Статья посвящена постановке задачи бимформинга, целью которой является определение непрерывной функции акустического источника на основе анализа пространственно-временных данных вычислительного эксперимента в задачах аэродинамики и аэроакустики, и разработке численного метода ее решения. Под вычислительным экспериментом понимается максимально точное воспроизведение исследуемого турбулентного течения путем его численного моделирования, что сегодня становится возможным благодаря использованию вихреразрешающих подходов, методов повышенной точности, сеток большой размерности и мощной суперкомпьютерной техники. В работе сформулированы условия на параметры сеток дискретизации области источника монопольного типа и сетки микрофонов для обеспечения корректности и точности работы алгоритма. Предложен способ задания входящих в указанные условия численных параметров, корректность которых контролируется величиной числа обусловленности оператора бимформинга. В случае нарушения условий корректности рассмотрена регуляризация оператора бимформинга с целью получения функции источника с приемлемой точностью. Показано, что предложенный численный метод бимформинга с высокой точностью восстанавливает функцию источника на тестовых примерах, а его применение к расчетным данным вычислительного эксперимента по турбулентному обтеканию сегмента крыла с механизацией дает хорошее согласие с полученными в ходе эксперимента результатами анализа акустического поля. Библ. 20. Фиг. 23. Табл. 5.

Ключевые слова: бимформинг, вычислительный эксперимент, вихреразрешающее моделирование, турбулентное течение, аэроакустика, акустический источник, триангуляция, кубатура Гаусса, крыло с механизацией.

DOI: 10.31857/S0044466921110120

1. ВВЕДЕНИЕ

В аэроакустике под бимформингом понимают технологию нахождения акустического источника для волнового уравнения, в предположении, что он приближенно воссоздает звуковое поле, формируемое летящим (или обдуваемым) объектом. Целью бимформинга является определение мощности и спектрального состава этого источника в анализируемой области пространства на основе данных, полученных на расположенных вдали микрофонах. В современных экспериментальных исследованиях бимформинг представляет собой хорошо разработанную технологию, предоставляющую информацию высокой практической значимости с точки зрения разработки малошумных конструкций летательных аппаратов.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-51-80001) и выполнена с использованием суперкомпьютеров ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова.

Потребность в выявлении источников чрезмерного шума в технических изделиях (летательные аппараты, автомобили, поезда, строительная техника и т.д.) по итогам акустических измерений постоянно растет. Для решения этой задачи наибольшее распространение получили подходы, основанные на использовании так называемой фазированной микрофонной решетки (phased microphone arrays) [1], [2], которые используются для локализации источника шума в натурных и лабораторных экспериментах. В основе таких подходов лежит когерентное суммирование значений на микрофонах, чтобы, с одной стороны, усилить акустический сигнал, излучаемый из точки фокуса микрофонной решетки, и, с другой стороны, ослабить сигнал, излучаемый из точек вне фокуса. Выполнять суммирование можно различными способами, например, с задержкой, вызванной разницей времени прихода сигнала от точки фокуса к точкам расположения микрофонов. Применение данных методов подразумевает наличие априорной информации о ширине спектра и характере излучения, а также о когерентности и компактности источников.

Для повышения точности решения задачи бимформинга, особенно на низких частотах, используются адаптивные алгоритмы бимформинга [3], [4], однако, эти методы на практике оказываются неустойчивыми к возмущениям акустических измерений, что затрудняет аккуратную оценку интенсивности источников. Та же проблема возникает и при использовании метода CLEAN [5]. Для устранения этого недостатка были предложены методы DAMAS [6] и DAMAS2 [7], основанные на уточнении карт шума, полученных методом conventional beamforming [1] за счет выделения нескоррелированного распределения источников путем итерационной деконволюции с так называемой point spread function, описывающей излучение монополя. Были также предложены модификации DAMAS-C [8] и CLEAN-SC [9] для решения задачи в случае наличия когерентных источников шума. Ограничением данных методов является использование монопольных излучателей, в то время как во многих случаях источниками шума являются мультиполи.

В [10] предлагается подход, альтернативный вышеописанным. Он предназначен как для нескоррелированных, так и скоррелированных источников шума. В основе метода лежит псевдообращение прямоугольной матрицы переноса излучения от источников к микрофонам. Задача бимформинга решается итерационно; на каждом шаге удаляются источники с малой интенсивностью, что приводит к переопределенности задачи, начиная с некоторого этапа. Однако данный подход не дает возможности восстанавливать гладкую функцию источника и может вызвать трудности при использовании данных, полученных в ходе численного эксперимента в аэроакустических задачах.

Мы упомянули лишь очень малую часть работ по методам бимформинга; более подробную информацию можно найти, например, в обзорной статье [11]. Практически все рассмотренные в ней методы ориентированы на экспериментальные исследования с присущими им преимуществами и ограничениями. С ростом производительности современных суперкомпьютеров и развитием численных алгоритмов резко выросла роль вычислительного эксперимента как еще одного эффективного средства инженерных исследований. При этом алгоритм бимформинга применительно к вычислительному эксперименту модифицируется, приобретает свои характерные особенности и, в том числе, свои преимущества. Преимущества, главным образом, связаны с возможностью использования всей объемной информации, предоставляемой вычислительным экспериментом.

В предпринятом исследовании мы формулируем математическую задачу нахождения функции акустического источника с носителем в предписанной области пространства, опираясь на возможность обработки большого объема пространственно-временных данных, получаемых в ходе численного моделирования. При этом мы рассматриваем задачи внешнего обтекания, численно решаемые с помощью вихреразрешающих подходов, к которым относятся: прямое численное моделирование (DNS, Direct Numerical Simulation), моделирование крупных вихрей (LES, Large Eddy Simulation) и гибридные методы, сочетающие подход LES с решением осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS, Reynolds Averaged Navier-Stokes) в пристеночных областях. Задача бимформинга использует данные об акустическом давлении на некоторой поверхности с виртуально заданными микрофонами, охватывающей область предполагаемого акустического источника. Анализ формулируемой в разд. 2 задачи проводится в частотной области, переход в которую осуществляется преобразованием Фурье исходных данных вычислительного эксперимента. В рассматриваемом нами подходе звуковое давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца в движущейся среде в трехмерном пространстве с непрерывной правой частью, соответствующей заранее неизвестной функции искомого источника в ограниченной области на некоторой выбранной поверхности. В разд. 3 мы проводим дискретизацию задачи на основе конечно-элементного подхода и интегрального представления решения, используя кусочно-линейный базис для функции источника. Раздел 4 статьи посвящен выводу физически обоснованных условий для выбора сетки для дискретизации области источника и точек расположения микрофонов (иначе говоря, сетки микрофонов) с целью построения корректной матрицы бимформинга, обеспечивающей устойчивое решение с максимально возможной точностью. Показано, что параметры сеток источника и микрофонов всецело определяются длиной волны. В разд. 5 мы описываем приемы получения конкретных значений для шагов сеток источника и микрофонов на основе специально подобранных тестовых задач. В результате определяются достаточно универсальные интервалы значений отношения шагов сетки к длине волны для процедуры выбора оптимальных параметров метода. Оценивается также точность решения на примере тестовых функций. Кроме того, рассматривается и обосновывается подход применения регуляризации по Тихонову задачи бимформинга для случаев, когда нарушаются условия построения корректной матрицы. Раздел 6 содержит результаты расчетов по восстановлению некоторых заранее заданных тестовых функций источника при использовании поверхности микрофонов, соответствующей геометрической конфигурации вычислительного эксперимента. В разд. 7 рассматриваются данные решения задачи обтекания крылового сегмента с выпущенной механизацией и приводятся результаты восстановления интенсивности и формы источников звука разработанным подходом для низко- и высокочастотных третьоктавных полос спектра. Получаемые решения задачи бимформинга хорошо согласуются с мгновенным распределением ближнего поля давления задачи обтекания. Отметим, что особенностью представленного в статье нового подхода является возможность получения корректной матрицы бимформинга без необходимости привлечения приемов регуляризации при формулировке и (или) решении задачи.

2. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА БИМФОРМИНГА

2.1. Постановка задачи

В линейном приближении аэроакустики [14], лежащем в основе бимформинга, звуковое давление p удовлетворяет задаче Коши для волнового уравнения в неподвижной среде:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = q(x,t), \quad x \in \mathrm{R}^3, \quad t > 0,$$

$$p(x,0) = \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \mathrm{R}^3,$$

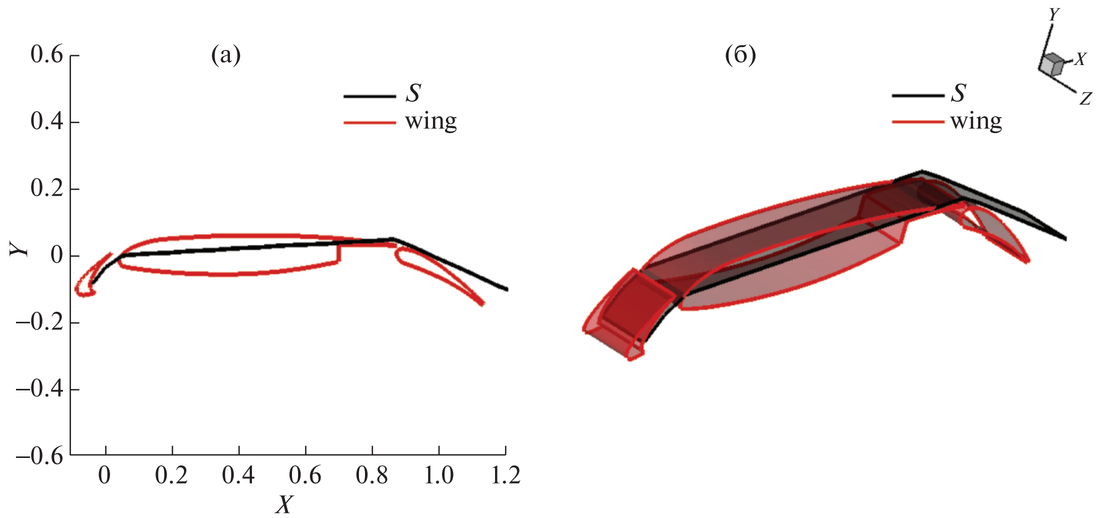
где $q(x,t)$ – функция, моделирующая источник звуковых волн от изучаемого объекта. Если объект, например самолет, движется с некоторой постоянной дозвуковой скоростью, то обобщением этой задачи будет моделирование аэроакустики в движущейся системе координат, связанной с самолетом. Соответственно, при наличии движения среды вдоль оси x_1 декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) с числом Маха $\mathrm{M}_\infty < 1$ звуковое давление удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$\begin{gathered}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2\,\frac{\mathrm{M}_\infty}{c}\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_1} - \Delta p + \mathrm{M}_\infty^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} = q(x,t), \quad x \in \mathrm{R}^3, \quad t > 0, \\ p(x,0) = \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \mathrm{R}^3.\end{gathered} \tag{1}$$

Будем полагать, что функция источника $q(x,t)$ определена и отлична от нуля на некоторой ограниченной поверхности S. Обычно S располагается внутри исследуемого объекта вдоль его контура, например, сегмента крыла с механизацией, учитывая особенности геометрии, как это показано на фиг. 1.

Пусть существует поверхность D, не имеющая пересечений с поверхностью S, $S \cap D = \varnothing$, и заданы значения $p(x,t)$, $x \in D$, на этой поверхности. Поверхность D соответствует предполагаемому расположению микрофонов в задаче бимформинга.

Тогда **задача бимформинга** ставится следующим образом: по значениям $p\big|_D$ акустического поля, удовлетворяющего уравнению (1), требуется восстановить функцию источника $q(x,t)$.



Фиг. 1. Поверхность сегмента крыла и поверхность распределенного акустического источника S в двумерном (а) и трехмерном (б) случаях.

Будем рассматривать поставленную задачу в случае гармонических колебаний по времени:

$$p(x,t) = P(x)e^{i2\pi ft}, \quad q(x,t) = Q(x)e^{i2\pi ft},$$

где f — частота звука. Подставив эти функции в (1), получим уравнение в частотной области для функции $P(x)$ в движущейся среде:

$$k^2P + \Delta P - 2ik\,\mathrm{M}_\infty \frac{\partial P}{\partial x_1} - \mathrm{M}_\infty^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = -Q(x), \quad k = \frac{2\pi f}{c}. \tag{2}$$

Таким образом, будем решать следующую **задачу бимформинга в частотной области**: по значениям $P|_D$ на поверхности D акустического поля, удовлетворяющего уравнению (2), необходимо восстановить значения функции $Q(x)$ на поверхности S.

Замечание. В вычислительной аэроакустике исследуется набор таких частотных задач для различных значений параметра f; переход в частотную область осуществляется путем применения (быстрого) преобразования Фурье к временным массивам давления, полученных в расчете в точках расположения виртуальных микрофонов.

2.2. Интегральное представление звукового поля

Известно, что уравнение (2) имеет следующее решение [15]:

$$P(x) = \int_S Q(y)G_{\mathrm{M}_\infty}(x-y)dy, \quad x \in D,$$
$$G_{\mathrm{M}_\infty}(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ik'(x'-\mathrm{M}_\infty x_1)}}{x'}, \tag{3}$$
$$x' = \sqrt{x_1^2 + (1-\mathrm{M}_\infty^2)(x_2^2+x_3^2)}, \quad k' = \frac{k}{1-\mathrm{M}_\infty^2}.$$

Для проведения дальнейших рассуждений будет более удобным операторное представление для (3):

$$P = \mathcal{T}Q, \tag{4}$$

где оператор $\mathcal{T}$, который мы назовем *оператором бимформинга*, осуществляет формирование поля давления на поверхности D от функции источника на поверхности S.

3. ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА БИМФОРМИНГА

3.1. Постановка задачи

Пусть выполнены следующие условия:

1) на поверхности S задано N точек $\{y^n\}_{n=1}^N$, которые формируют сетку источника;

2) на поверхности D задано M точек $\{x^m\}_{m=1}^M$, которые назовем *микрофонами*, причем количество точек сетки источника N не превышает количество микрофонов M.

Введем следующие обозначения:

- $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N)^{\mathrm{T}}$, $s_n = Q(y^n)$, – дискретный вектор интенсивности источника,
- $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_M)^{\mathrm{T}}$, $d_m = P(x^m)$, – вектор звуковых сигналов, полученных микрофонами,
- $\mathcal{T}_a$ – некоторая дискретная аппроксимация оператора $\mathcal{T}$ из (4) (см. п. 3.2).

Сформулируем задачу нахождения интенсивности распределенного звукового источника следующим образом: необходимо найти такой вектор $\mathbf{s}$, что выполняется соотношение

$$\mathbf{d} = \mathcal{T}_a\mathbf{s}, \quad \mathcal{T}_a \in \mathbb{R}^{M\times N}. \tag{5}$$

Так как на практике входные данные $\mathbf{d}$ имеют некоторое возмущение, а также $M \neq N$, то задача отыскания вектора интенсивности источника (5) приводит к задаче минимизации нормы невязки:

$$\left\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a\mathbf{s}\right\|_2^2 \to \min_{\mathbf{s}}, \tag{6}$$

где $\tilde{\mathbf{d}}$ – возмущенные входные данные.

3.2. Метод решения задачи бимформинга

Известно, что при $M > N$ задача (6) имеет решение (которое можно найти методом наименьших квадратов):

$$\mathbf{s} = (\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a)^{-1}\mathcal{T}_a^*\tilde{\mathbf{d}},$$

при условии, что используемая обратная матрица существует. Для нахождения приближенного решения задачи бимформинга в дискретном случае (6) нам нужно построить аппроксимацию оператора $\mathcal{T}$ из (4).

Введем на поверхности S сетку с узлами в $\{y_n\}_{n=1}^N$ для кусочно-линейного восполнения функций, непрерывных на S. Пусть $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^N$ – соответствующие базисные элементы пространства кусочно-линейных функций. Тогда вместо функции источника $Q(y)$ будем искать ее кусочно-линейную аппроксимацию

$$Q(y) \approx \sum_{n=1}^N s_n\psi_n(y).$$

Подставив эту аппроксимацию в (3), получим следующие выражения для звуковых сигналов на поверхности D:

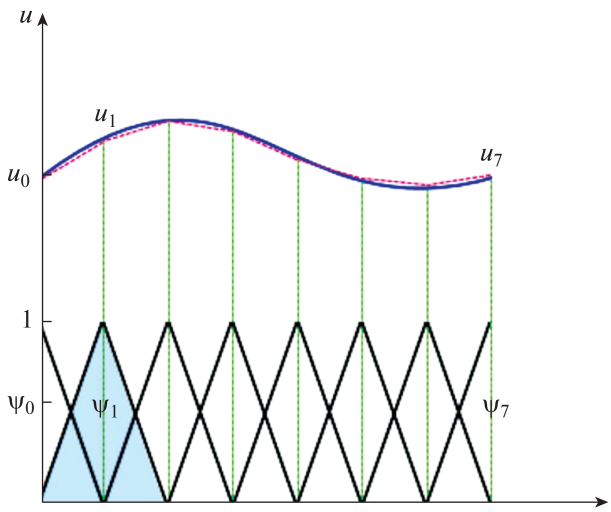
$$d_m = \sum_{n=1}^N s_n\int_S \psi_n(y)G_{\mathrm{M}_\infty}(x_m - y)dy.$$

Таким образом, элементы матрицы $\mathcal{T}_a$ вычисляются с помощью интеграла

$$\mathcal{T}_{mn} = \int_S \psi_n(y)G_{\mathrm{M}_\infty}(x_m - y)dy. \tag{7}$$

Рассмотрим подробнее конструкцию базисных функций и способ вычисления интеграла (7).

3.2.1. Расположение источника на линии. Иногда оказывается достаточным располагать источник на линии, а не на поверхности. Это бывает, например, когда проводится бимформинг для фрагментов конструкций на частотах с длиной волны порядка одного из размеров поверхно-



Фиг. 2. Одномерные базисные функции для линии источника на отрезке.

сти S. Пример такой задачи приведен в п. 7.1, где рассматривается случай обтекания крылового сегмента достаточно малого поперечного размера. Тогда становится возможным аппроксимировать поверхность источника $\boldsymbol{S}$ некоторой ломаной линией, на которой заданы узлы $\{X^n\}_{n=1}^{N}$ одномерной сетки источника. Базисные функции ψ_n для кусочно-линейного восполнения имеют простейшую треугольную форму (см. фиг. 2):

$$\psi_n(X) = (0, X \notin [X^{n-1}, X^{n+1}]) \cup \left(\frac{X - X^{n-1}}{X^n - X^{n-1}}, X \in [X^{n-1}, X^n]\right) \cup \left(\frac{X^{n+1} - X}{X^{n+1} - X^n}, X \in [X^n, X^{n+1}]\right).$$

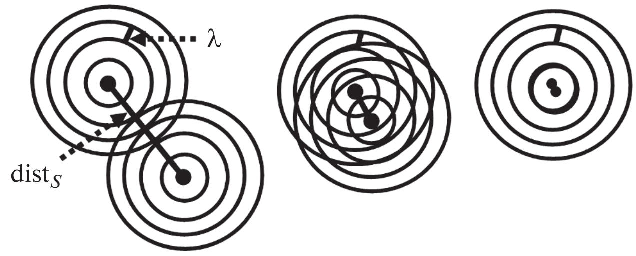
3.2.2. Расположение источника на поверхности. В общем случае для аппроксимации поверхности источника S будем использовать треугольную сетку и соответствующую кусочно-треугольную поверхность. Узлы сетки источника при этом размещаются в вершинах треугольников, а базисные функции ψ_n для двумерного кусочно-линейного восполнения имеют пирамидальную форму.

3.2.3. Вычисление элементов матрицы бимформинга $\mathcal{T}_a$. Аппроксимация интегралов (7) осуществляется по формулам Гаусса: квадратурами на отрезках $[X^{n-1}, X^n]$ для одномерных базисных функций и кубатурами на треугольниках для двумерных базисных функций (см., например, [13]). Количество узлов k в носителе базисной функции, определяющее точность вычисления $\mathcal{T}_{mn}$, существенно влияет на получаемое решение задачи бимформинга. Оптимальной по соотношению точности и вычислительных затрат является формула с $k = 4$ для отрезка, как показывают результаты теста, приведенного ниже в п. 6.1, и $k = 7$ для треугольника в аналогичном двумерном тесте (см. п. 6.2).

4. ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕКТНОЙ МАТРИЦЫ БИМФОРМИНГА

Формулировка дискретной задачи бимформинга содержит два множества точек – сетку для функции источника и сетку виртуальных микрофонов. Параметры этих сеток влияют на число обусловленности C_a матрицы $\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a$ и на погрешность ε вычисления функции источника. Численные эксперименты показывают, что даже незначительное изменение в величине шага сетки для источника может на порядки изменить величину C_a (см. разд. 5). Поэтому мы будем говорить, что матрица построена корректно, если C_a не является чрезмерно большим (например, не превышает 10^5), а ε удовлетворяет желаемой величине на характерных тестовых функциях источника. Для краткости будем называть такие матрицы *корректными*.

Здесь мы приводим некоторые физические соображения, позволяющие получить оценки параметров сеток источника и микрофонов, чтобы матрица была корректной (хотя данные рассуждения не являются строгими, они дают понимание о порядке значений нужных нам величин,



Фиг. 3. Иллюстрация дифракционного предела.

участвующих в формировании матрицы $\mathcal{T}_a$). Затем, в разд. 5, мы предлагаем алгоритм подбора конкретных значений сеточных параметров для окончательной формулировки дискретной задачи с заданной геометрией поверхностей S функции источника и D микрофонов.

4.1. Сетка для аппроксимации функции источника

Прежде всего, потребуем, чтобы соседние точки сетки были достаточно различимы с точки зрения вклада значений в них функции источника в акустическое поле. Это означает, что сеточные узлы не должны располагаться на расстоянии, существенно меньшем длины звуковой волны λ для рассматриваемой частоты. Данное ограничение связано с дифракционным пределом и может быть проиллюстрировано примером, изображенным на фиг. 3, где dist_S – шаг сетки функции источника. Очевидно, что должно выполняться условие $\mathrm{dist}_S \gtrsim \lambda$. С другой стороны, для обеспечения как можно меньших значений ε нельзя располагать узлы сетки с шагом, существенно превышающим длину волны, т.е. необходимо выполнение условия $\mathrm{dist}_S \lesssim \lambda$. Таким образом, мы приходим к первому условию: шаг сетки представления функции источника должен быть сопоставим с длиной волны:

$$\mathrm{dist}_S \sim \lambda. \tag{8}$$

4.2. Сетка микрофонов

Поверхность микрофонов D характеризуется двумя параметрами: расстоянием dist_{SD} от поверхности S и расстоянием между соседними микрофонами dist_D. На фиг. 4 показаны две соседние точки сетки s_1 и s_2 на S, $\mathrm{dist}_S = |s_1s_2|$, два ближайших к ним микрофона m_1 и m_2, шаг сетки микрофонов $\mathrm{dist}_D = |m_1m_2|$. Для упрощения проведения оценок считаем, что S и D параллельные плоскости, и $\mathrm{dist}_{SD} \gg \mathrm{dist}_S$.

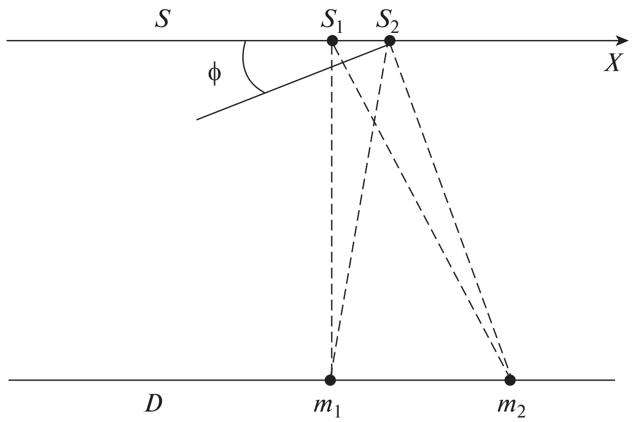
Каждый из микрофонов m_1 или m_2 принимает сигнал от функции источника на отрезке $[s_1, s_2]$. Для различения значений функции в этих точках сетки необходимо, чтобы расстояния от какого-либо из микрофонов до каждой из них заметно различались по отношению к длине волны, т.е. разность расстояний составляла величину $\mathrm{const}\,\lambda$ независимо от dist_{SD}. Для изображенной на фиг. 4 конфигурации видно, что для первого микрофона $|s_1m_1| \approx |s_2m_1|$, поэтому потребуем выполнение указанного условия для второго микрофона:

$$|s_1m_2| - |s_2m_2| = \mathrm{const}\,\lambda. \tag{9}$$

В предположении $\mathrm{dist}_{SD} \gg \mathrm{dist}_S$ эту разность можно оценить величиной $\mathrm{dist}_S \sin\phi$, где, в свою очередь, угол оценивается как $\sin\phi \approx (\angle m_2s_1m_1) = \dfrac{\mathrm{dist}_D}{\mathrm{dist}_{SD}}$. Поэтому с учетом (9) получаем

$$\mathrm{dist}_D \approx \mathrm{dist}_{SD} \sin\phi \approx \mathrm{dist}_{SD} \frac{\mathrm{const}\,\lambda}{\mathrm{dist}_S}, \tag{10}$$

т.е. расстояние между микрофонами должно быть пропорционально расстоянию между поверхностями источника и микрофонов. Если микрофонов на рассматриваемом отрезке $|m_1m_2|$ больше, чем два, то эта оценка применяется для расстояния между крайними микрофонами, т.е. для длины массива микрофонов.



Фиг. 4. Схема расположения соседних узлов сетки источника s_1 и s_2 на поверхности S и микрофонов m_1 и m_2 на поверхности D.

Для оценки расстояния dist_{SD} заметим, что необходимо, чтобы микрофоны хорошо разрешали функцию на $[s_1, s_2]$ даже в том неблагоприятном случае, когда в этих двух точках источник имеет одинаковую амплитуду, но противоположный знак. С учетом (8) моделью данной ситуации может служить диполь с базой ~λ. Несложные вычисления для фундаментального решения (3) при $\mathrm{dist}_{SD} \gg \mathrm{dist}_S$ показывают, что сигнал на микрофоне m_1 от такого диполя с единичной амплитудой будет $d_1 \sim \left(\dfrac{\lambda}{\mathrm{dist}_{SD}}\right)^2$. Это означает, что матрица $\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a$ будет иметь маленькие собственные числа порядка d_1^2. Соответственно, рост числа обусловленности C_a матрицы $\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a$ можно оценить как

$$C_a \sim \left(\frac{\mathrm{dist}_{SD}}{\lambda}\right)^4. \tag{11}$$

Таким образом, для умеренного числа обусловленности необходимо, чтобы расстояние между поверхностями D и S не превышало нескольких десятков, а то и единиц, длин волн, т.е.

$$\mathrm{dist}_{SD} \sim 10\lambda. \tag{12}$$

Наконец, для устойчивой разрешимости задачи (6) нужно потребовать, чтобы на один узел сетки источника приходилось несколько микрофонов, т.е.

$$M > N. \tag{13}$$

Полученные оценки (8), (10)–(13) важно учитывать при построении геометрии и оценке вычислительных ресурсов, необходимых при планировании задачи бимформинга в вычислительном эксперименте. Можно сделать следующие выводы качественного характера, полезные для выбора геометрических параметров бимформинга:

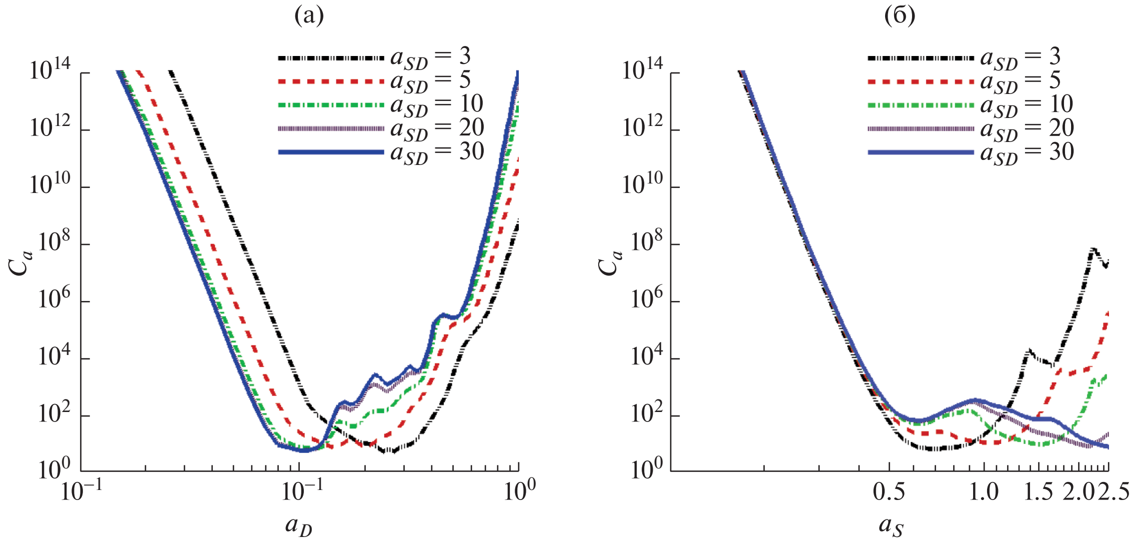
1) расстояние между поверхностями D и S, а также шаги сеток на них зависят от частоты исследуемого акустического сигнала, а именно пропорциональны длине волны λ,

2) поверхность D должна “охватывать” S, но необязательно быть замкнутой.

Алгоритм нахождения конкретных значений шага сетки источника dist_S, шага сетки микрофонов dist_D и расстояния между поверхностями источника и микрофонов dist_{SD} рассматриваются в следующем разделе.

5. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ БИМФОРМИНГА

Основным входным параметром метода является длина волны $\lambda = \dfrac{c}{f}(1 - \mathrm{M}_\infty^2)$ исследуемого акустического сигнала.



Фиг. 5. Источник на линии: зависимость числа обусловленности C_a от коэффициентов a_D (а) и a_S (б) при различных значениях a_{SD}.

Для проведения на модельных задачах количественных оценок параметров, нужных для корректного бимформинга, введем подборочные коэффициенты a_{SD}, a_S, a_D, которые определяют расстояние между поверхностями функции источника и микрофонов, а также шаги сеток источника и микрофонов соответственно:

$$\mathrm{dist}_{SD} = a_{SD}\lambda;$$
$$\mathrm{dist}_S = a_S\lambda;$$
$$\mathrm{dist}_D = \frac{a_D}{a_S}\mathrm{dist}_{SD}.$$

5.1. Одномерный случай: источник на линии

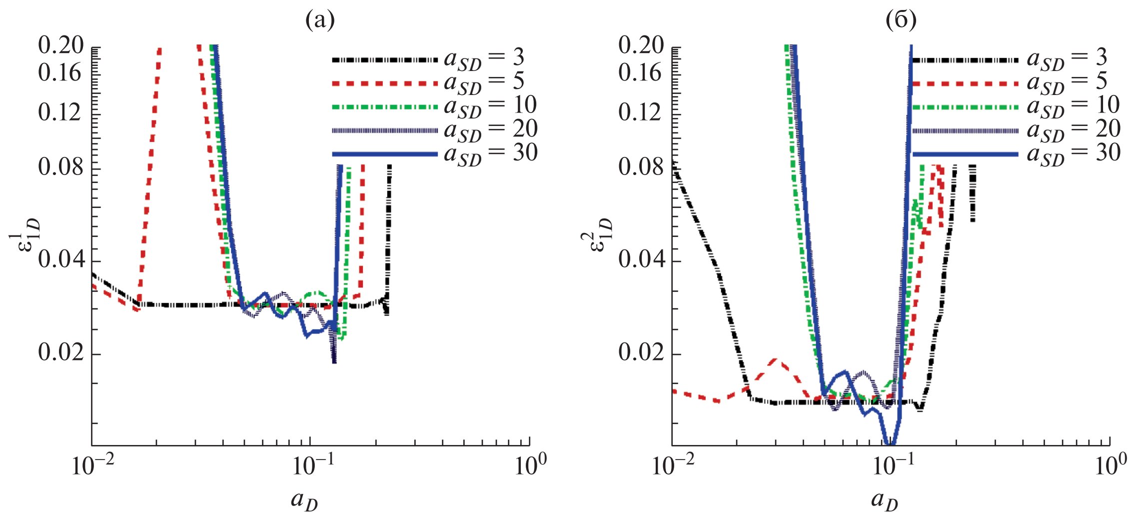
Сначала рассмотрим случай расположения источника и микрофонов на линиях. Для небольшого участка геометрии полагаем, что источник и микрофоны расположены на параллельных отрезках S и D, образуя симметричную конфигурацию (фиг. 4).

Задаем, например, $a_S = 1$, $N = 10$, $M = 15$ и подыскиваем значения параметра a_D в пределах $0 < a_D < 1$, обеспечивающие умеренную величину числа обусловленности C_a, например, $C_a < 10^5$. Для этого рассматриваем набор значений параметра $a_{SD} = 3, 5, 10, 20, 30$, строим сетки микрофонов и вычисляем соответствующие матрицы $\mathcal{T}_a$. Типичные графики зависимости C_a от a_D при различных значениях изображены на фиг. 5а. Из них видно, что подходящим является интервал значений $0.08 < a_D < 0.3$. Выберем значение $a_D = 0.16$ из этого интервала и теперь подберем a_S в пределах $0.3 < a_S < 2$, которые также обеспечивают умеренную величину числа C_a. Типичные графики изображены на фиг. 5б, откуда видно, что величину a_S можно взять из диапазона $0.4 < a_S < 1.5$.

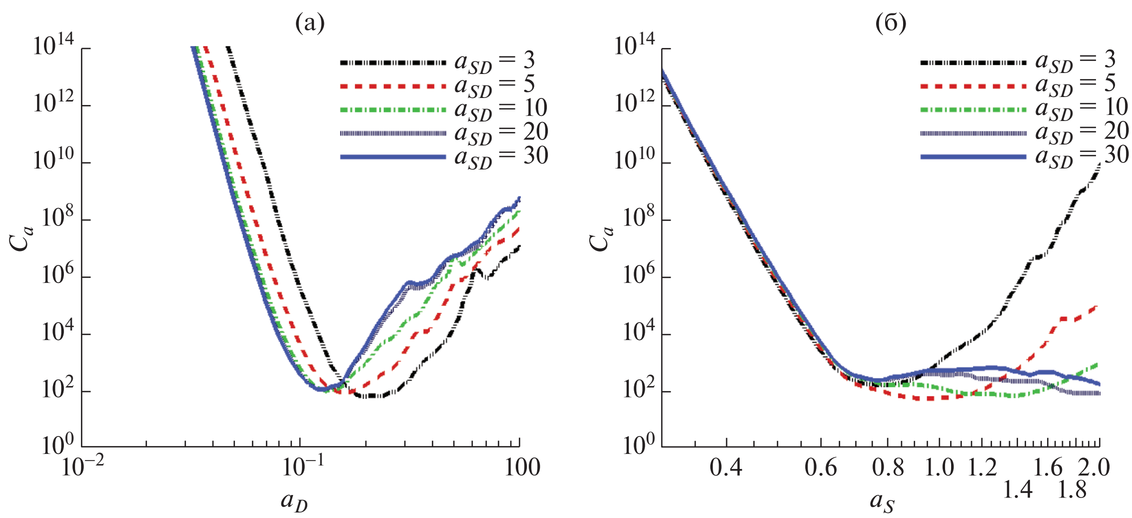
Для оценки точности восстановления источника на получаемых сетках можно рассмотреть, например, в качестве тестовой функции источника Гауссиан с полушириной 2λ:

$$f(X) = \exp(-0.5(X - X_0)^2/\sigma^2), \quad \sigma^2 = (2\lambda)^2/(8\ln 2),$$

где X – координата вдоль линии источника. Взяв значение $a_S = 0.6$, строим графики относительной ошибки восстановления тестовой функции в C-норме (см. фиг. 6а). Видно, что погрешность составляет несколько процентов в интервале $0.08 < a_D < 0.15$. Для более широкой тестовой функции, гауссиана с полушириной 3λ, ошибка уменьшается (см. фиг. 6б); отметим, что в этом расчете использовались значения $N = 20$, $M = 30$.



Фиг. 6. C-норма ошибки ε^1_{1D} и ε^2_{1D} в зависимости от коэффициента a_D, полуширина гауссиана 2λ (а) и 3λ (б).



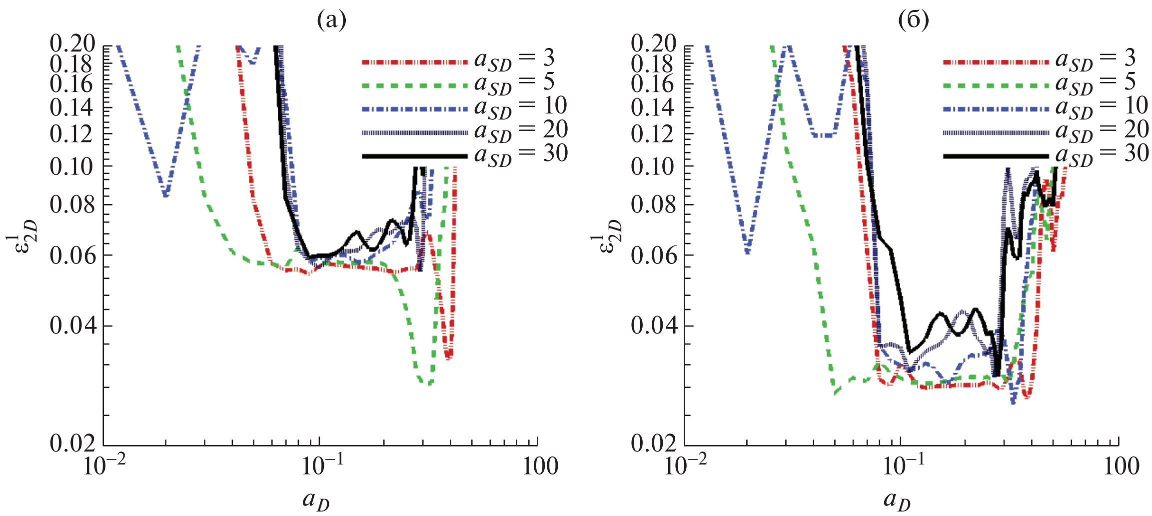
Фиг. 7. Зависимость числа обусловленности C_a от a_D (а) и от a_S (б) при различных значениях a_{SD}.

5.2. Двумерный случай: источник на поверхности

Такой же анализ проведем для случая поверхностей S и D, полагая их квадратными областями, расположенными на параллельных плоскостях. Соответственно, рассматриваем квадратные сетки источника и микрофонов с пробными значениями $N = 10^2$, $M = 15^2$. Ситуация с поверхностями оказывается полностью аналогичной ситуации с линиями. Сначала находим подходящие интервалы для коэффициентов a_D и a_S при допустимых значениях числа обусловленности (см. фиг. 7): $0.07 < a_D < 0.2$, $0.5 < a_S < 1.3$. Затем, зафиксировав для примера значение $a_S = 0.8$, уточняем интервал для a_D на графиках погрешности для тестовых функций (см. фиг. 8). Видим, что погрешность составляет несколько процентов в интервале $0.08 < a_D < 0.15$ (отметим, что из-за использования более грубой сетки, здесь рассматриваются гауссианы с полушириной 3λ и 4λ).

Резюмируя результаты исследований, представленных в п. 5.1, 5.2, получаем следующие подходящие нам значения коэффициентов:

• для одномерного случая (источника на линии): $0.4 < a_S < 1.5$, $0.08 < a_D < 0.15$ (можно, например, зафиксировать $a_S = 0.6$, $a_D = 0.12$);



Фиг. 8. C-норма ошибки ε^1_{2D} и ε^2_{2D} в зависимости от коэффициента a_D, полуширина гауссиана 3λ (а) и 4λ (б).

• для двумерного случая (источник на поверхности): $0.6 < a_S < 1.5$, $0.08 < a_D < 0.15$ (можно, например, зафиксировать $a_S = 0.8$, $a_D = 0.1$).

При этом численные оценки точности, проведенные на примере функции источника в виде гауссиана с полушириной 3λ, дают примерно $\varepsilon_{1D} = 0.02$–0.03, $\varepsilon_{2D} = 0.04$–0.07.

5.3. О построении поверхностей S и D и сеток

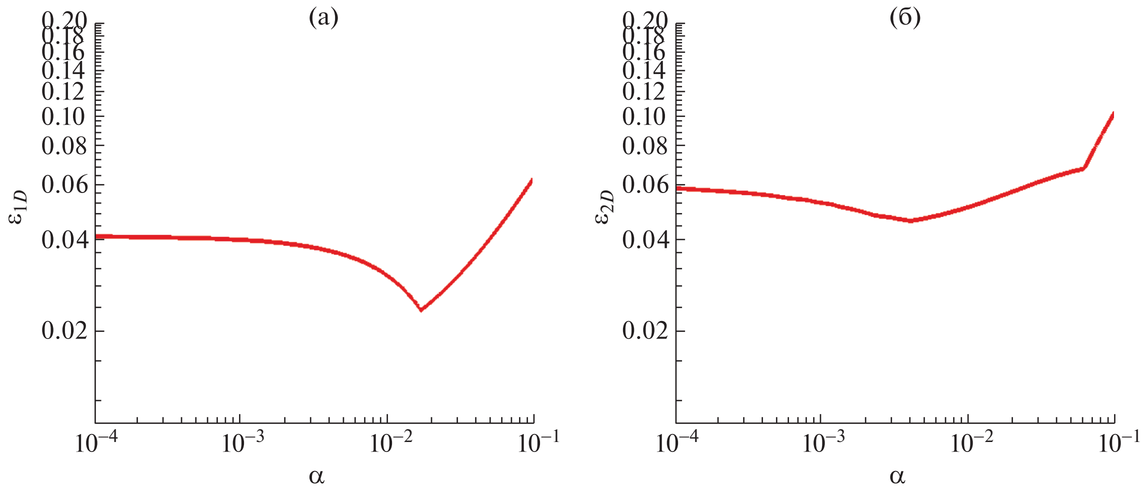
Для конкретной геометрии, например, сегмента крыла самолета, вначале задаем поверхность (или линию) источника S, состоящую из плоских (или прямых) фрагментов (см. фиг. 1). Затем, выбрав желаемое значение $a_{SD} \in [3,30]$, строим поверхность (или линию) микрофонов D, которая отстоит от S на расстояние примерно $a_{SD}\lambda$. Геометрия D может быть достаточно произвольной с точки зрения криволинейности, поскольку на ней нам нужны только точки сетки микрофонов (в отличие от поверхности S, на которой строятся базисные функции для аппроксимации функции источника).

На поверхностях (или линиях) S и D строим сетки источника и микрофонов с узлами, примерно равноотстоящими по координатным линиям на $\mathrm{dist}_S = a_S\lambda$ и $\mathrm{dist}_D = \dfrac{a_D}{a_S}\mathrm{dist}_{SD}$ друг от друга соответственно. При этом важно, чтобы dist_S было не меньше дифракционного предела, оцениваемого как 0.6λ и 0.4λ для поверхности и линии S соответственно.

В то же время аналогичной нижней границы для dist_D нет, поскольку рост ошибок ε_{2D} и ε_{1D} при значениях коэффициента a_D, выходящих за пределы левой границы отрезка из вышеприведенных оценок (0.03 и 0.07) связан, прежде всего, с фиксацией значений $M = 15^2$ и $M = 15$ в модельных задачах. Если при уменьшении a_D увеличивать число узлов M так, чтобы поверхность D всегда “охватывала” S, то матрица $\mathcal{T}_a$ остается корректной, и потери точности не происходит (как показывают дополнительные численные эксперименты).

5.4. Регуляризация задачи бимформинга для некорректной матрицы

В реальных расчетах могут возникать нарушения условий (8), (10)–(13) на шаги сеток функции источника и микрофонов и их удаленности друг от друга. Например, число микрофонов может оказаться меньше числа точек сетки источника (в таком случае система (5) недоопределена); или шаг сетки источника во много раз меньше длины волны, что приводит к большим значениям числа обусловленности матрицы $\mathcal{T}^*_a\mathcal{T}_a$. Во многих работах по бимформингу в аналогичных слу-



Фиг. 9. Недостаточное число микрофонов. C-норма ошибки ε_{1D} (а) и ε_{2D} (б) в зависимости от параметра регуляризации α.

чаях (см., например, [10]) предлагается использовать регуляризацию по Тихонову, то есть решать вместо исходной задачи задачу минимизации:

$$\left\|\tilde{\mathbf{d}} - \mathcal{T}_a\mathbf{s}\right\|_2^2 + \gamma\|\mathbf{s}\|_2^2 \to \min_{\mathbf{s}},$$

где $\gamma = \alpha\left\|\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a\right\|$, $\alpha \in [10^{-3}, 5\times 10^{-2}]$. Эта задача имеет решение:

$$\mathbf{s} = (\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a + \gamma I)^{-1}\mathcal{T}_a^*\mathbf{d}, \qquad I \text{ — единичный оператор.}$$

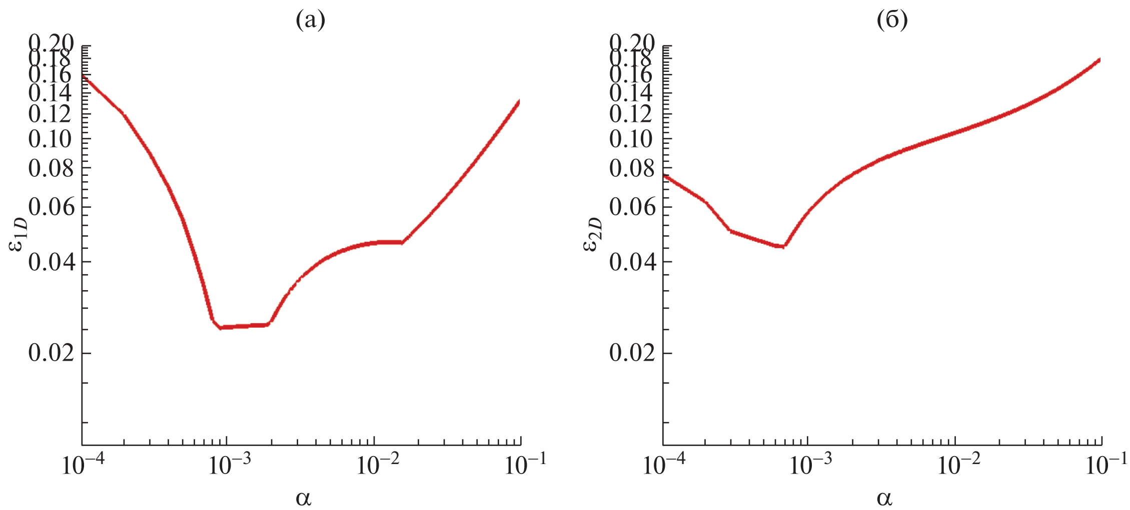
Подходящий выбор параметра регуляризации α можно осуществить, рассматривая точность восстановления тестовой функции источника, например, Гауссиана с полушириной 2λ.

5.4.1. Недостаточное количество микрофонов. Рассмотрим регуляризацию на тестовой задаче из п.5.1 с количеством микрофонов $M = 5$, которое меньше количества точек сетки источника $N = 10$. Значения коэффициентов $a_S = 0.6$, $a_D = 0.12$, $a_{SD} = 5$ выбираем теми же самыми. Типичная зависимость C — нормы погрешности решения от параметра регуляризации α представлена на фиг. 9а. Аналогичный график для теста на поверхностях с параметрами $M = 5^2$, $N = 10^2$, $a_S = 0.8$, $a_D = 0.1$, $a_{SD} = 5$ приведен на фиг. 9б.

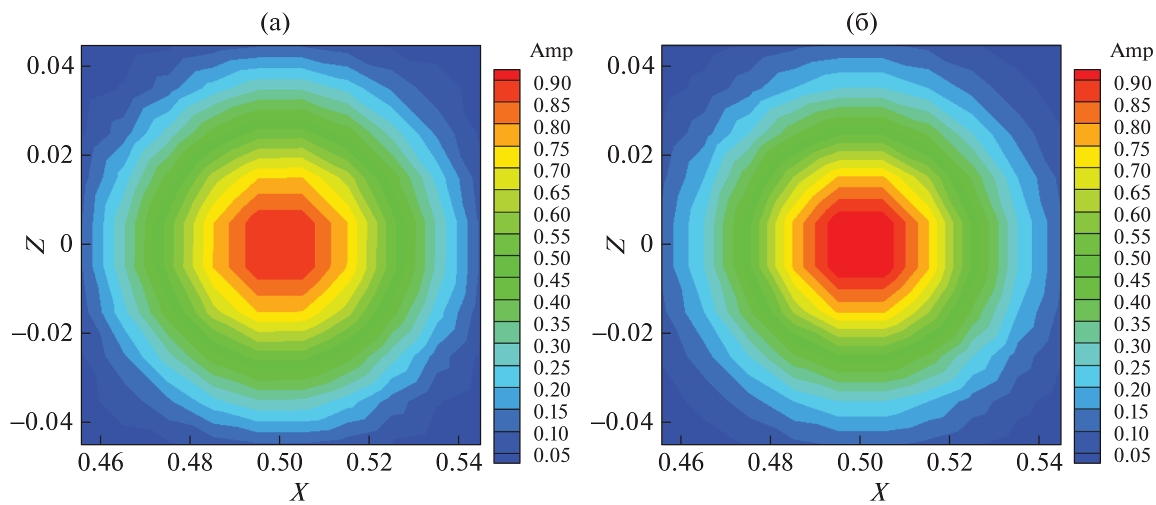
Видно, что в широком диапазоне значений параметра регуляризации $\alpha \in [10^{-4}, 10^{-2}]$ значение ошибки не превышает нескольких процентов: $\varepsilon_{1D} = 0.02$–0.04 и $\varepsilon_{2D} = 0.05$–0.06.

5.4.2. Мелкая сетка источника. Необходимость регуляризации возникает также при использовании чересчур мелкой сетки источника с шагом dist_S существенно меньшими дифракционного предела. В качестве примера рассмотрим тестовую задачу из п. 5.1 с параметрами $M = 15$, $N = 10$, $a_{SD} = 5$, $a_D = 0.12$, но с тестовой функцией в виде гауссиана с полушириной 0.5λ и $a_S = 0.1$. Зависимость нормы погрешности решения от параметра регуляризации α представлена на фиг. 10а. На фиг. 10б показана зависимость для аналогичного теста на поверхностях с $M = 15^2$, $N = 10^2$, $a_{SD} = 5$, $a_S = 0.1$, $a_D = 0.1$. Отметим, что расчеты с $\alpha = 0$, что означает отсутствие регуляризации, приводят к неприемлемо большой погрешности.

Из проведенных тестовых исследований можно сделать вывод, что значения ошибки не превышают $\varepsilon_{1D} = 0.025$–0.04 в диапазоне $\alpha \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ для одномерного случая (линия источника) и $\varepsilon_{2D} = 0.04$–0.08 в диапазоне $\alpha \in [10^{-4}, 2\times 10^{-3}]$ для двумерного случая (поверхность источника). На фиг. 11 представлены карты амплитуд численного решения с регуляризацией при $\alpha = 10^{-3}$ (а) и точного решения (б).



Фиг. 10. Зависимость C-нормы ошибки ε_{1D} (а) и ε_{2D} (б) от параметра регуляризации α при значении dist_S много меньше дифракционного предела.



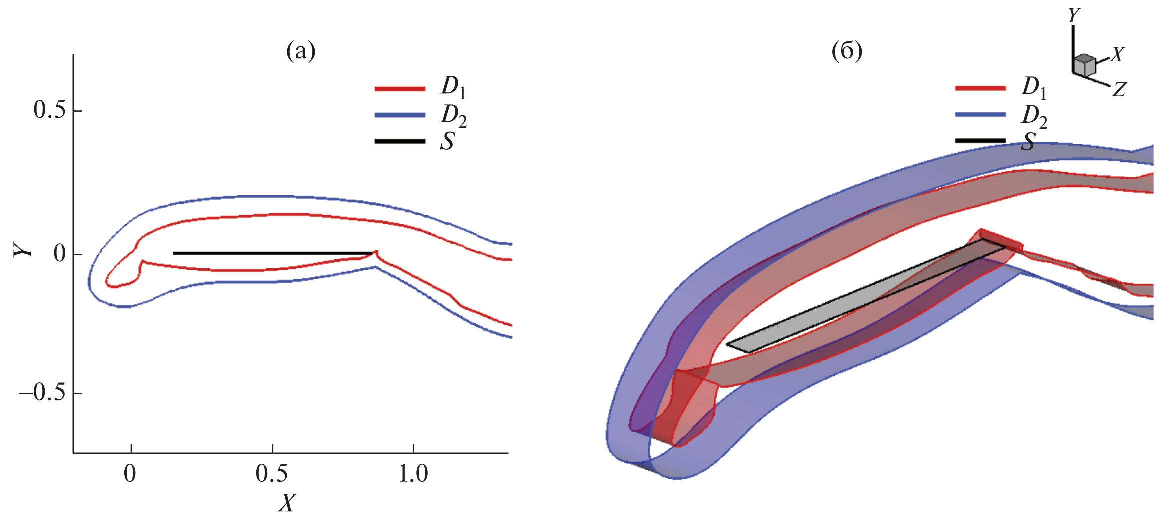
Фиг. 11. Численное решение с регуляризацией (а) и точное решение (б).

6. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА БИМФОРМИНГА НА СИНТЕТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Численные тесты на корректность разработанного метода проведены по аналогии с [12], где для некоторой полосы S носителя функции источника синтетические данные используются при тестировании решетки микрофонов в экспериментальном бимформинге. В отличие от этой работы, мы располагаем микрофоны на поверхности Фокса Виллььямса–Хокингса (ФВХ). Эти поверхности используются в вычислительном эксперименте по моделированию акустических полей, генерируемых сегментом крыла самолета с выпущенной механизацией на режиме посадки, описанном в разд. 7. Для наших тестов мы выбрали две такие поверхности D_1 и D_2 шириной 0.111 (см. фиг. 12). Полоса S для задания источника имеет длину 0.7 по оси X (вдоль хорды крыла) и ширину 0.06 по оси Z (по поперечному направлению).

6.1. Тесты с линией источника при низкой частоте

Зафиксируем длину звуковой волны $\lambda = 0.1$ и $M_\infty = 0$. Поскольку $\lambda > 0.06$ – ширины поверхности S, мы не можем располагать более одной точки вдоль оси Z в соответствии с ограничением



Фиг. 12. Геометрическая конфигурация тестовых задач с линией и поверхностью источника (рисунки (а) и (б) соответственно): линия и поверхность источника – S, ближняя и дальняя поверхности микрофонов – D_1 и D_2 соответственно.

на шаг сетки функции источника $\mathrm{dist}_S \sim \lambda$. По оси X длина S достаточна, чтобы разместить несколько точек сетки источника. Отсюда и возникает постановка задачи бимформинга не для поверхности, а для линии источника. Зададим источник на отрезке $S = [0.15, 0.85]$ кусочно-линейной функцией по точкам сетки $S_h = \{0.1, 0.2, \ldots, 0.8\}$ на S со значениями 1 в трех узлах $X = 0.4$, 0.5, 0.6 и 0 в остальных (см. фиг. 13а). Микрофоны располагаются на линии D_1, их число $M = 1663$, и расположены они на поверхности ФВХ в узлах сетки, используемой в вычислительном эксперименте по моделированию турбулентного течения вокруг сегмента крыла с механизацией. Заметим, что для тестовых расчетов микрофоны могли бы располагаться на более простых поверхностях, но выбор поверхностей ФВХ сделан с целью единообразия с геометрией задачи из разд. 7. В табл. 1 для трех экспериментов на равномерных сетках $S_{h,1}$, $S_{h,2}$, $S_{h,3}$ функции источника с узлами на концах S указаны количество точек сетки N, шаги dist_S, числа обусловленности C_a и L_2-нормы погрешности. Соответствующие графики решений приведены на фиг. 13а.

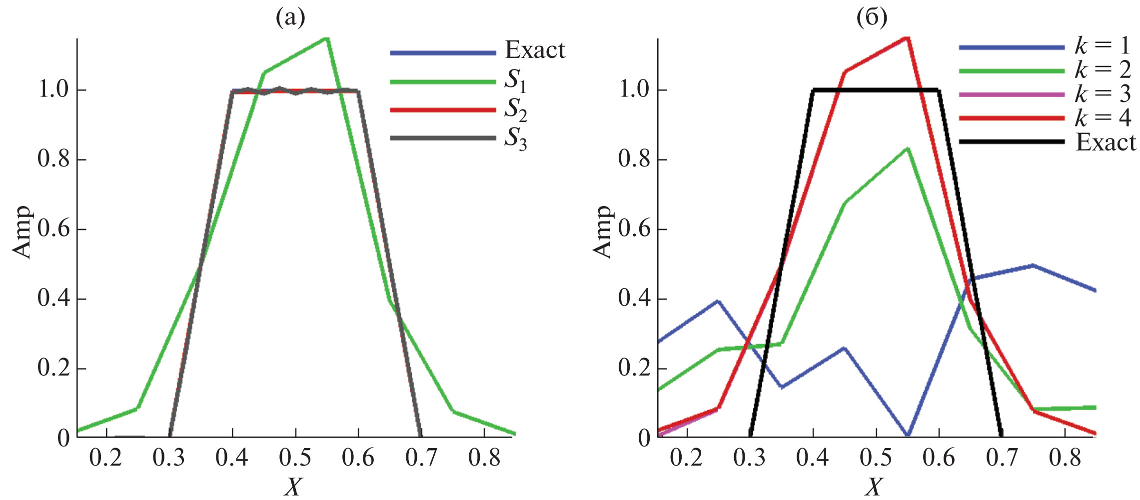
Из графиков видно, что решения на сетках источника $S_{h,2}$ и $S_{h,3}$ отлично аппроксимируют точное решение. Заметное различие для грубой сетки источника $S_{h,1}$ (зеленая линия), которая имеет такой же шаг, что и сетка S_h точной функции источника, связано только с тем, что их узлы сдвинуты на полшага друг от друга, в результате чего линейное восполнение решения на этих двух сетках дает разные функции. Заметим, что в дополнительном эксперименте с совпадением узлов обеих сеток графики точного и полученного решений совпадают.

Также можно отметить взрывной характер роста числа обусловленности C_a при уменьшении шага сетки источника от $\mathrm{dist}_S = 0.5\lambda$ до $\mathrm{dist}_S = 0.25\lambda$. При этом нарушается условие корректности матрицы бимформинга (см. п. 5.2). Тем не менее численное решение все еще достаточно хорошее, хотя можно наблюдать осцилляции вблизи $X = 0.5$.

На этой же задаче мы показываем, что точность интегрирования при вычислении элементов матрицы бимформинга в (7) существенно влияет на решение. На фиг. 13б приведены графики

Таблица 1. Погрешность и число обусловленности для трех сеток источника

Сетка источника	N	dist_S	C_a	$\|\varepsilon\|_{\mathscr{L}_2}$
$S_{h,1}$	8	0.1	17	0.072
$S_{h,2}$	15	0.05	22	0.00056
$S_{h,3}$	29	0.025	6.5e+07	0.0031



Фиг. 13. Точное решение и решения, полученные на разных сетках источника (а). Зависимость решения от числа узлов квадратуры на сетке $S_{h,1}$ (б).

решений, полученных на сетке $S_{h,1}$ при разном количестве узлов квадратур Гаусса k. Заметим, что в случае $k = 1$ подход сводится к методу из работы [10] (Generalized Inverse Beamforming). Хорошо видно, что при малых k на грубой сетке $S_{h,1}$ решение оказывается неудовлетворительным. В табл. 2 приведены погрешность решения и число обусловленности C_a матрицы бимформинга для различного числа узлов квадратур.

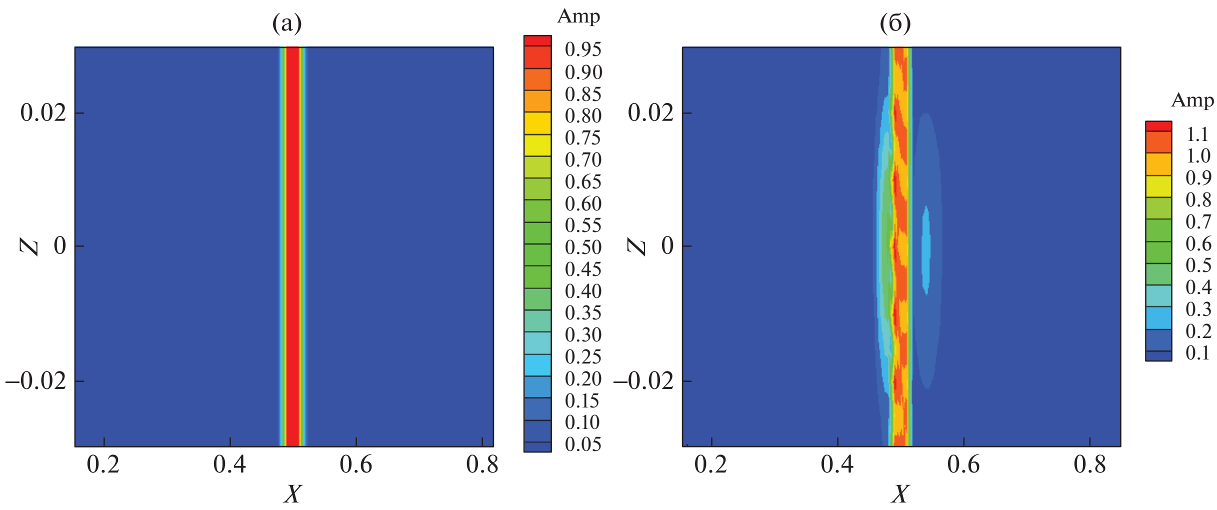
6.2. Тесты с плоскостью источника при высокой частоте

В этой серии тестов фиксируем длину волны $\lambda = 0.01$. Она уже меньше ширины полосы $S = [0.15, 0.85] \times [-0.03, 0.03]$ по направлению оси Z, поэтому имеет смысл рассматривать двумерную сетку источника. В качестве тестовой функции источника используем функцию той же трапециевидной формы по X, как и прежде, но сжатую в 10 раз. Она задана на равномерной сетке с постоянным шагом 0.01, принимает значение 1 в трех узлах $X = 0.49, 0.50, 0.51$ сетки и постоянна вдоль Z (см. фиг. 14а).

Для численного бимформинга берутся сетки $S_{h,1}$, $S_{h,2}$, $S_{h,3}$ источника, равномерные по обоим направлениям с шагом $\mathrm{dist}_S = 0.01,\ 0.0085,\ 0.005$ и количеством точек сетки источника $N = 852$, 1162, 3243 соответственно. Для сетки микрофонов используется поверхность D_1 с количеством микрофонов $M = 83\,150$. Полученные решения на сетках $S_{h,1}$, $S_{h,2}$ неотличимы на глаз от тестовой функции, которая изображена на фиг. 14а. Однако решение на сетке $S_{h,3}$, представленное на фиг. 14б, заметно отличается от точного тестового решения. Причиной этого является нарушение условия дифракционного предела ($\mathrm{dist}_S > 0.6\lambda$). В табл. 3 для этих трех численных экспериментов указаны значения количества точек сетки источника N, шага сетки dist_S, числа обусловленности C_a и L_2-нормы погрешности. Несмотря на то что сетка $S_{h,1}$ совпадает с сеткой заданной

Таблица 2. Погрешность решения и число обусловленности C_a для различного числа узлов квадратуры k

k	$\|\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}$	C_a
1	0.47	1.1e+16
2	0.18	16
3	0.070	17
4	0.071	17
8	0.071	17



Фиг. 14. Тестовая функция источника (а); решение на сетке S_3 (б).

тестовой функции источника по X, возникает небольшая погрешность решения. Это связано со спецификой обработки решения в текущей версии алгоритма на верхней и нижней границах полосы ($Z = -0.03$, 0.03).

Аналогично одномерному случаю исследуется влияние точности интегрирования при вычислении элементов матрицы в (7) на точность результата численного бимформинга. На фиг. 15 представлены решения на сетке $S_{h,1}$, полученные для двух значений $k = 1, 3$ числа узлов кубатур Гаусса в треугольнике (решение для $k = 7$ совпадает с тестовым, представленным на фиг. 14а). Более подробную информацию содержит табл. 4. Видно, что значения $k \le 3$ не обеспечивают необходимую точность восстановления источника. Оптимальным значением оказывается $k = 7$.

6.3. Тесты с регуляризацией матрицы бимформинга

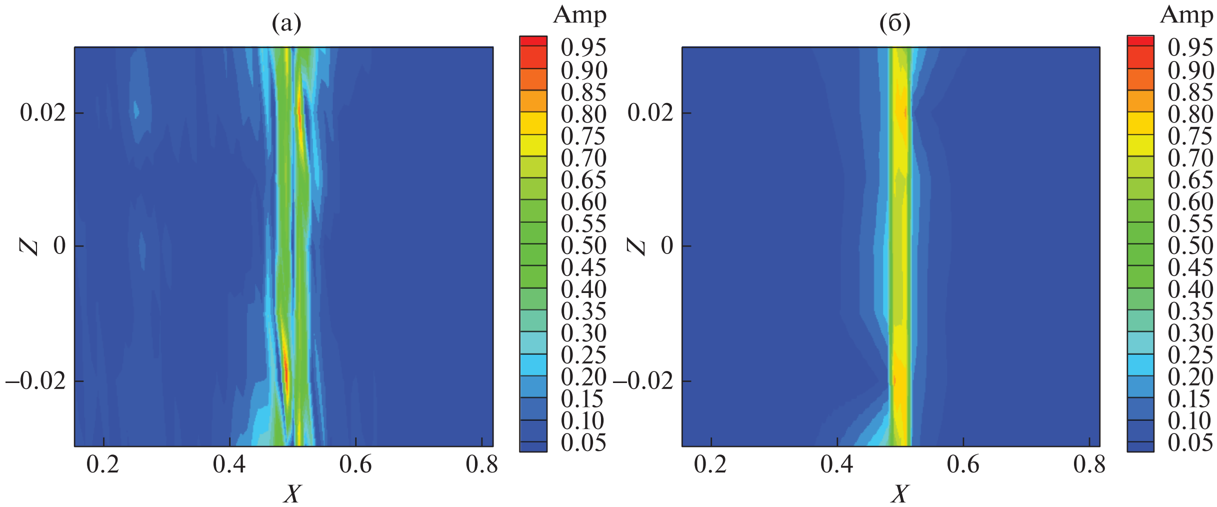
Для проверки работы алгоритма бимформинга с регуляризацией (см. п. 5.4) рассмотрим задачу восстановления тестовой функции источника – гауссиана с полушириной 4λ, $\lambda = 0.05$, $M_\infty = 0$, заданной на поверхности источника, представляющую собой полосу $[0.15, 0.85]\times[-0.03, 0.03]$. Поверхности микрофонов D_1 или D_2 имеют размер по ширине $[-0.055, 0.055]$ (см. фиг. 16).

Сетка источника равномерная и состоит из 51×45 узлов. Соответственно, коэффициенты $(a_S)_X = 0.28$, $(a_S)_Y = 0.027$ заметно меньше предела корректности $a_S = 0.6$. Сетки микрофонов также равномерные на D_1 и D_2 и варьируются по числу узлов.

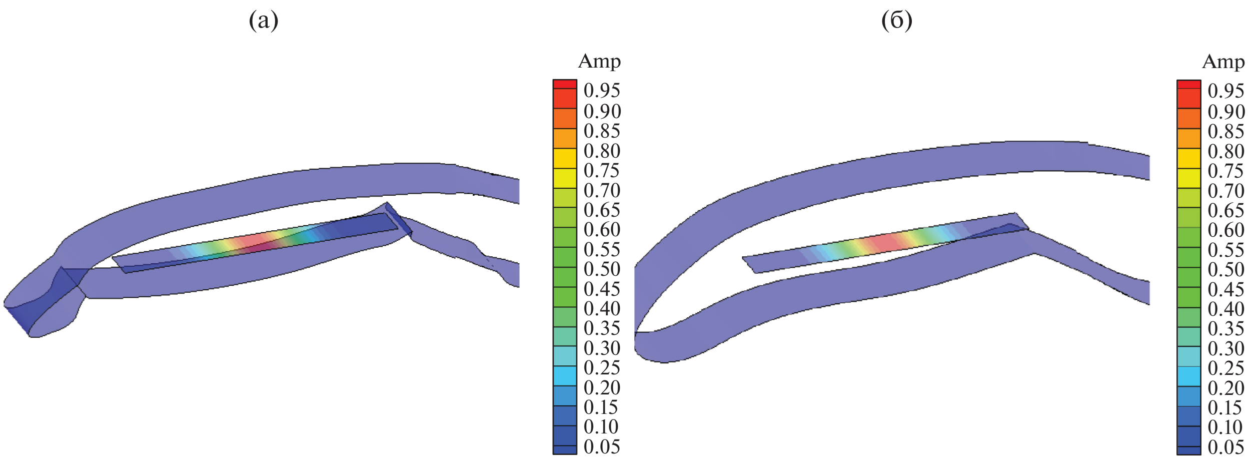
В табл. 5 представлены результаты численного исследования. Параметр регуляризации во всех расчетах берется равным $\alpha = 10^{-4}$. Отметим, что без регуляризации число обусловленности C_a превышает значение 10^{20}, а задача с 871 микрофонами просто не имела бы смысла, поскольку $M < N$.

Таблица 3. Погрешность и число обусловленности C_a для каждой из сеток

Сетка источника	N	dist_S	C_a	$\Vert\varepsilon\Vert_{\mathcal{L}_2}$
$S_{h,1}$	71×12	0.01	81	0.00054
$S_{h,2}$	83×14	0.0085	111	0.0036
$S_{h,3}$	141×23	0.005	2.1e+17	0.014



Фиг. 15. Численное решение на сетке $S_{h,1}$ для $k = 1$ (а) и $k = 3$ (б).



Фиг. 16. Полоса с тестовой функцией источника и поверхностями микрофонов D_1 (а) и D_2 (б).

Решения для первой и третьей тестовых задач представлены на фиг. 17. Отметим наличие пограничных эффектов для верхней и нижней границ полосы (как уже отмечалось, они возникают из-за специфики обработки решения на границах).

На фиг. 18 представлены графики точного и численных тестовых решений по линии $Z = 0$ полосы расположения источника. Можно сделать вывод, что регуляризация позволяет получать

Таблица 4. Погрешность решения на сетке $S_{h,1}$ и значение числа обусловленности C_a в зависимости от числа узлов кубатуры Гаусса в треугольнике

k	$\|\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}$	C_a
1	0.0326	4.8e+17
3	0.0169	150
6	0.00113	85
7	0.000535	81
15	0.000183	81

Таблица 5. Параметры и погрешность решения трех расчетов с регуляризацией

Сетка микрофонов	M	$\|\varepsilon\|_{\mathcal{L}_2}$
D_2	33950	0.0072
D_1	15612	0.0069
D_1	871	0.0070

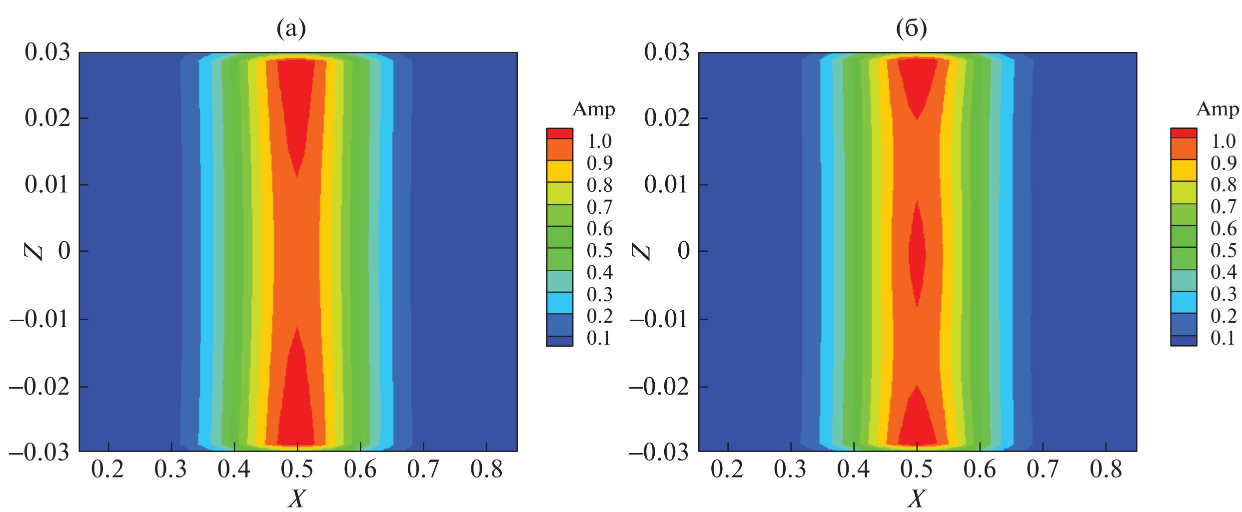
решение с высокой точностью даже при существенном нарушении условий построения корректной матрицы бимформинга (8), (10)–(13).

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ И МОЩНОСТИ АКУСТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА МЕТОДОМ БИМФОРМИНГА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДАННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

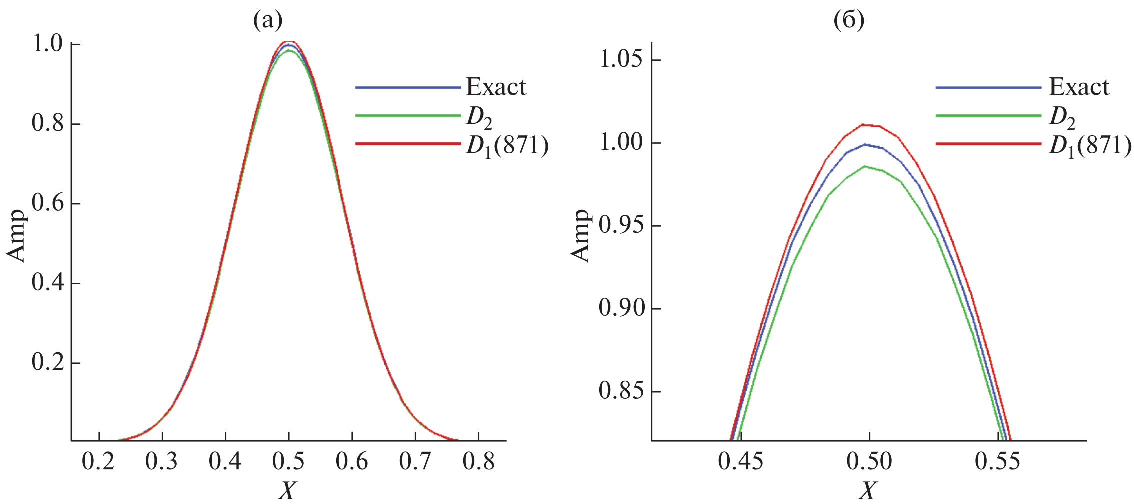
Разработанный метод численного бимформинга был применен к пространственно-временным данным, полученным в ходе вычислительного эксперимента [16], который состоял в численном моделировании нестационарного турбулентного течения, генерируемого при обтекании аэродинамической модели 30P30N (прямое крыло самолета с выпущенной механизацией), и создаваемого при этом дальнего акустического поля. Расчет выполнялся для сегмента модели с поперечным размером 1/9 хорды крыла при угле атаки 5.5°. Характерное число Маха составляло $M_\infty = 0.17$ при числе Рейнольдса $Re = 1.7 \times 10^6$, посчитанному по длине хорды крыла. Моделирование турбулентного течения в [16] проводилось с использованием гибридного вихреразрешающего подхода IDDES (Improved Delayed Detached Eddy Simulation / Улучшенное моделирование отсоединенных вихрей с запаздыванием [17]) на неструктурированной гибридной сетке размером 35 миллионов узлов с использованием программного комплекса NOISEtte [18]. Акустическое излучение в дальнем поле, генерируемое вследствие взаимодействия набегающего турбулентного течения и крылового сегмента с механизацией, рассчитывалось на стадии постпроцессинга данных согласно интегральному методу ФВХ.

Данные экспериментального исследования крыловой конфигурации 30P30N представлены в работе [19], а результаты численных исследований, выполненных различными научными коллективами с помощью известных программных продуктов и исследовательских кодов, — в статье [20].

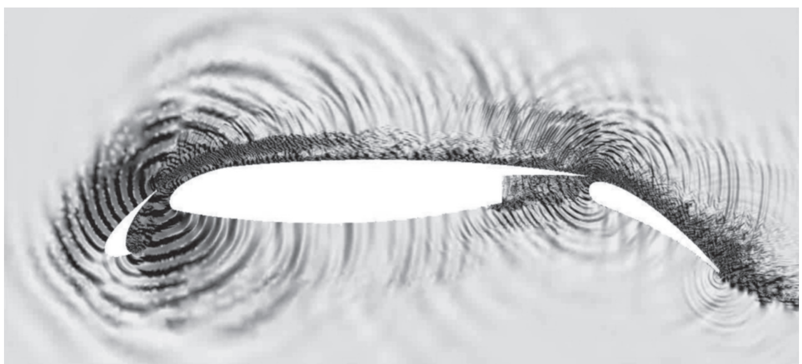
На фиг. 19 изображено мгновенное распределение поля давления, формирующегося при нестационарном дозвуковом обтекании сегмента трехкомпонентного крыла с механизацией.



Фиг. 17. Решение для сетки микрофонов на D_2 (а) и на D_1 с 871 узлами (б).



Фиг. 18. Сравнение численных решений на линии источника $Z = 0$. Справа показана окрестность около $X = 0.5$.



Фиг. 19. Полученное в вычислительном эксперименте мгновенное поле давления, формирующееся при турбулентном обтекании крыла с механизацией.

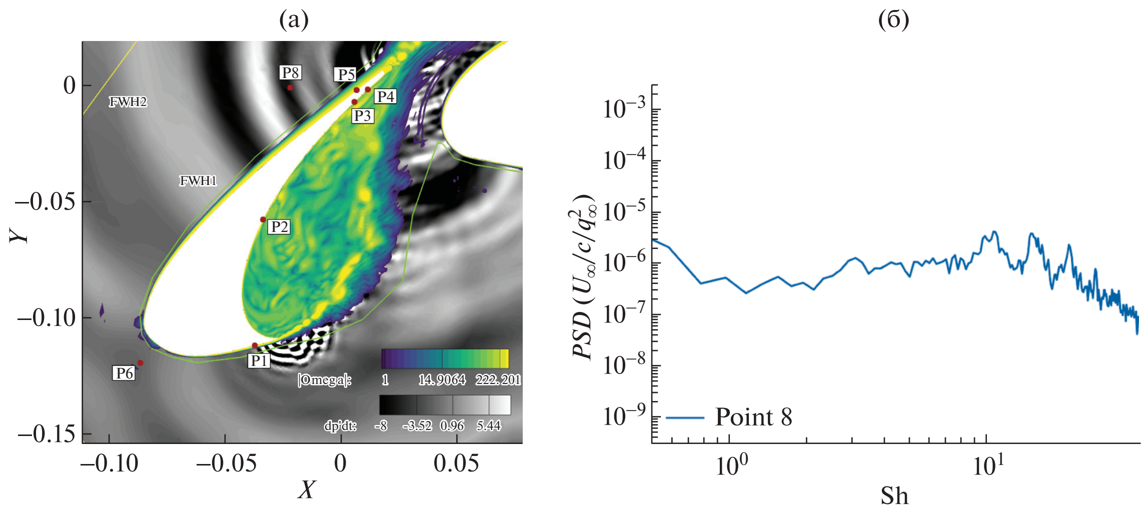
Можно заметить наличие источников звуковых волн разной длины в окрестности зазора между предкрылком и крылом, зазора между крылом и закрылком, а также на задней кромке закрылка.

В качестве примера будем исследовать распределенный акустический источник, формирующийся в зазоре между предкрылком и крылом. Спектральная плотность мощности пульсаций давления в выбранной точке P8 (фиг. 20а) в окрестности предкрылка приведена на фиг. 20б. В представленном спектре *c* выделим две третьоктавные полосы частот с центрами при числах Струхаля Sh = 21 и Sh = 180 (безразмерное число Струхаля определяется как $\mathrm{Sh} = \dfrac{fL}{V}$, где f – частота, V – скорость, L – характерный размер). Выберем среди различимых пиков в спектре (фиг. 20б) пик, соответствующий числу Струхаля Sh = 21. Второй пик, интересный для теста разработанного подхода, соответствует Sh = 180 и находится в высокочастотной части спектра за пределами графика.

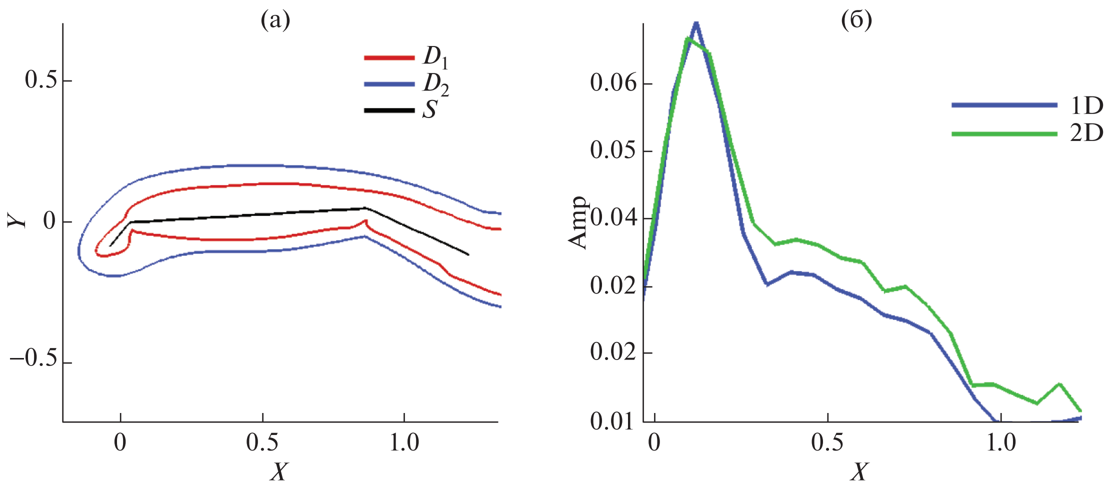
Полученные в ходе вычислительного эксперимента [16] данные накапливались на окружающих всю конфигурацию контрольных ФВХ поверхностях. Мы используем две из них в качестве поверхностей D_1 или D_2, где расположены виртуальные микрофоны (фиг. 21–23а).

Полученные временные ряды, представляющие собой пульсации давления в точках сетки виртуальных микрофонов, подвергались следующей обработке:

1) применялись высокочастотный и низкочастотный фильтры, вырезающие интересующие нас полосы частот;



Фиг. 20. Мгновенное поле давления вблизи предкрылка (а) и спектральная плотность мощности акустического излучения в точке P8 (б).



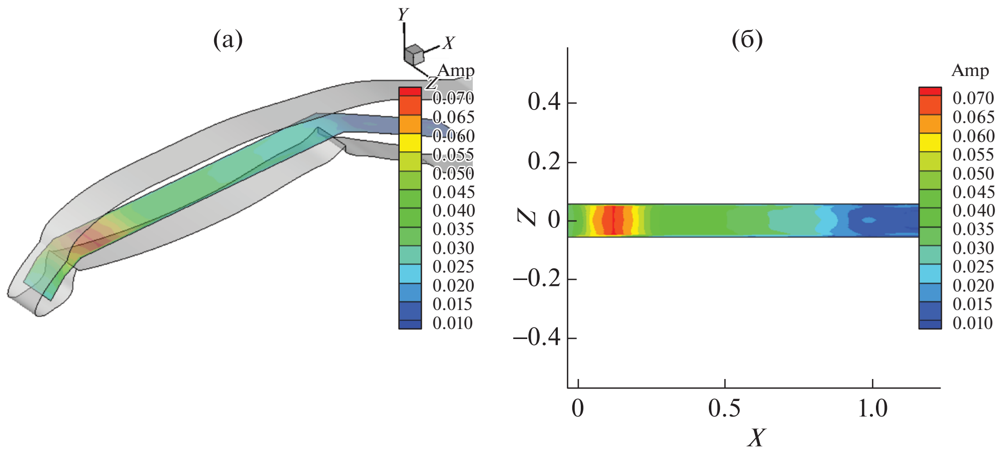
Фиг. 21. Трехзвенная линия источника S и две поверхности микрофонов (а). Распределение амплитуды низкочастотного источника (б): на линии (1D) и вдоль средней линии на кусочно-плоской поверхности (2D).

2) сигналы микрофонов получались путем усреднения по случайным временным окнам из всего отрезка времени счета.

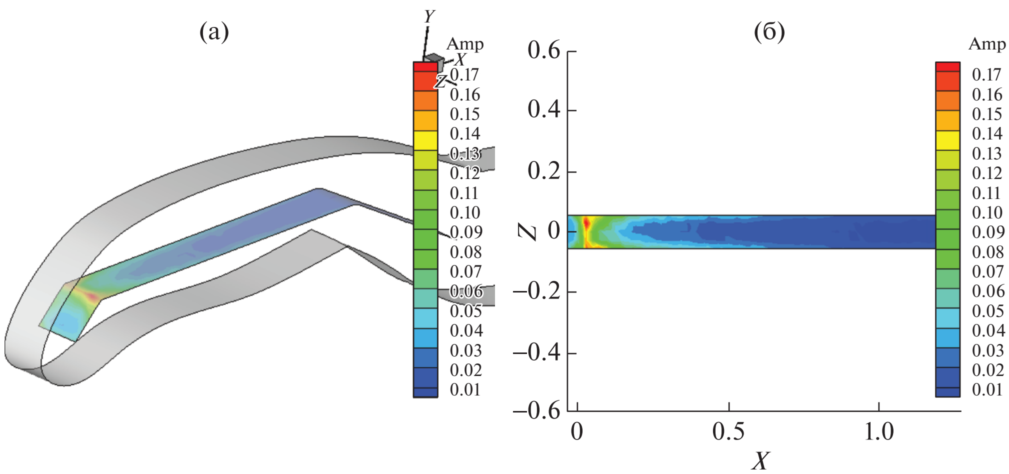
Для проведения усреднения выбиралось достаточно большое количество так называемых “сценариев”, каждый из которых характеризовался случайно заданным начальным моментом времени и несколькими последовательными временными окнами заданной длины. Для каждого из окон вычислялся спектр и проводилось усреднение всех спектров по окнам в сценарии. Затем полученные таким образом спектры усреднялись по всем сценариям. В результате были получены устойчивые к изменениям параметров сценариев спектральные характеристики.

7.1. Источник низких частот в окрестности числа Струхаля 21

Рассматривается интервал частот $18.7 < \mathrm{Sh} < 23.6$ с центральной частотой $\mathrm{Sh}_c = 21$ и длиной волны $\lambda = c\mathrm{Sh}_c^{-1} = \mathrm{M}_\infty^{-1}\mathrm{Sh}_c^{-1} \approx 0.28$. Из-за небольшой ширины сегмента крыла $H \approx 0.111$, соответствующей 1/9 длины хорды, характерная длина волн в рассматриваемом диапазоне частот $\lambda > H$, а потому функция источника может представлять собой только константу вдоль оси Z.



Фиг. 22. Кусочно-плоская поверхность низкочастотной функции источника и поверхность микрофонов (а). Распределение амплитуды низкочастотного источника на поверхности при использовании регуляризации (б).



Фиг. 23. Кусочно-плоская поверхность высокочастотного источника и поверхность микрофонов (а). Распределение амплитуды высокочастотного источника на поверхности (б).

Поэтому будем рассматривать задачу для линии расположения источника, заметив, что при этом данные для микрофонов предварительно усредняются по ширине крылового сегмента.

Линию источника задаем в виде ломаной (фиг. 21) и строим равномерную сетку на каждом из трех ее звеньев с шагом $\mathrm{dist}_S \approx 0.24\lambda$. Это значение находится ниже дифракционного предела (0.4λ), но все еще может использоваться, что, в частности, подтверждается сравнением с результатом расчета с регуляризацией, который производился для случая расположения источника на поверхности (см. фиг. 22) с двумерной сеткой источника размером 21×5 при параметре регуляризации $\alpha = 10^{-4}$.

Выполненные расчеты и, в частности, анализ распределения амплитуды (фиг. 21б, фиг. 22) говорят о существовании достаточно мощного акустического источника, излучающего в выбранном низкочастотном диапазоне волн в окрестности Sh = 21, при $X \approx 0.1$, что соответствует зазору между предкрылком и крылом.

7.2. Источник высоких частот в окрестности числа Струхаля 180

Рассматривается интервал чисел Струхаля $160 < \mathrm{Sh} < 202$ с центральной частотой $\mathrm{Sh}_c = 180$ и длиной волны $\lambda \approx 0.033$. Акустический источник расположен на поверхности, состоящей из трех плоских участков, на сетке размером 61×5. Согласно полученным в работе критериям корректности, матрица бимформинга при данных параметрах корректная. Результаты нахождения источника в заданной полосе высоких частот показаны на фиг. 23.

Выполненные расчеты и, в частности, анализ распределения амплитуды (фиг. 23а) выявляют акустический источник, излучающий в выбранном высокочастотном диапазоне волн в окрестности $\mathrm{Sh} = 180$, при $X \approx 0.1$, что также соответствует зазору между предкрылком и крылом. Вместе с тем можно видеть, что высокочастотный источник по мощности существенно слабее ранее выявленного источника низкой частоты. Более того, пульсации давления в столь высоком диапазоне частот вполне могут быть обусловлены нефизическим шумом численного происхождения. Однако эти слабые пульсации присутствовали в данных вычислительного эксперимента и разработанный метод бимформинга вполне четко их улавливает.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработан метод численного бимформинга для определения непрерывной (кусочно-линейной) функции акустического источника на основе анализа пространственно-временных данных вычислительного эксперимента по моделированию нестационарного турбулентного течения. Естественным условием успешности такого подхода является высокая точность входных данных, которыми являются воспроизводимые в расчете параметры течения и его пульсационные характеристики. Поэтому предполагается, что моделирование турбулентного течения проводится с использованием вихреразрешающих подходов, численных алгоритмов повышенной точности, а также пространственных сеток большой размерности. Потребность в значительных вычислительных ресурсах для таких расчетов обеспечивается, в свою очередь, современными суперкомпьютерными системами с растущей производительностью.

В статье выписана математическая постановка задачи бимформинга с переходом из временной в частотную область, рассмотрен подход к ее дискретизации и проведена верификация разработанного численного метода на тестовых экспериментах с синтетическими данными. Особенностью предложенной дискретизации является использование непрерывных базисных функций при аппроксимации распределенного источника в сочетании с кубатурными формулами высокого порядка для вычисления элементов матрицы бимформинга.

Исходя из физических соображений и требований аппроксимации, сформулированы условия на параметры сетки дискретизации источника монопольного типа и сетки микрофонов для обеспечения корректности и точности работы алгоритма. Предложен способ оценки входящих в указанные условия численных параметров, а именно, шагов сетки функции источника и микрофонов, расстояния между ними, а также число узлов в кубатурных формулах Гаусса. Корректность задания этих параметров обеспечивается путем контроля числа обусловленности оператора бимформинга. Так, резкий рост числа обусловленности наблюдается, если использовать: а) шаг сетки аппроксимации источника ниже некоторой величины, соизмеримой с длиной волны рассматриваемой частоты; б) недостаточное число узлов в кубатурных формулах Гаусса. Показано, что при локализации источника монопольного типа на линии необходимо, чтобы отношение шага сетки источника к длине волны было не менее 0.4, а число узлов в кубатурных формулах Гаусса – не менее 4. Аналогичные параметры для случая локализации источника на поверхности равны 0.6 и 7 соответственно. При нарушении условий корректности рассмотрен также подход регуляризации оператора бимформинга с целью сохранения возможности получения функции источника с приемлемой точностью.

Продемонстрировано, что предложенный метод численного бимформинга обеспечивает высокую точность восстановления функции источника на тестовых примерах, а его использование к данным вычислительного эксперимента по турбулентному обтеканию сегмента крыла с механизацией дает хорошее согласие с ранее полученными результатами анализа акустического поля.

Авторы благодарят своих коллег А.П. Дубеня, А.В. Горобца и П.В. Родионова за полезные дискуссии и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnson H., Dudgeon D.E.* Array Signal Processing: Concepts and Techniques. London: Prentice-Hall, 1993. 533 p.
2. *Dougherty R.P.* Phased-array Beamforming Applied to Aeroacoustics // 15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference), 2009.
3. *Capon J.* High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis // Proc. of the IEEE. 1969. V. 57. № 8. P. 1408–1418.
4. *Cox H., Zeskind R.M., Owen M.M.* Robust adaptive beamforming // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing. 1987. V. 35. P. 1365–1376.
5. *Högbom J.A.* Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines // Astronomy and Astrophysics Supplement Series. 1974. V. 15. P. 417–426.
6. *Brooks T.F., Humphreys W.M.* A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (DAMAS) determined from phased microphone arrays // J. Sound Vib. 2006. V. 294. P. 856–879.
7. *Dougherty R.P.* Extension of DAMAS and benefits and limitations of deconvolution in beamforming // AIAA Paper 2005–2961. 2005.
8. *Brooks T.F., Humphreys W.M.* Extension of DAMAS phased array processing for spatial coherence determination(DAMAS-C) // AIAA-2006-2654. 2006.
9. *Sijtsma P.* CLEAN based on spatial source coherence // AIAA-2007-3436. 2007.
10. *Suzuki T.* Generalized Inverse Beam-forming Algorithm Resolving Coherent/Incoherent, Distributed and Multipole Sources // J. Sound Vib. 2011. V. 330. P. 5835–5851.
11. *Merino-Martínez R., Sijtsma P., Snellen M., Ahlefeldt T., Antoni J., Bahr C.J., Blacodon D., Ernst D., Finez A., Funke S., Geyer T.F., Haxter S., Herold G., Huang X., Humphreys W.M., Leclère Q., Malgoezar A., Michel U., Padois T., Pereira A., Picard C., Sarradj E., Siller H., Simons D.G., Spehr C.* A review of acoustic imaging methods using phased microphone arrays // CEAS Aeronautical J. 2019. V. 10. № 1. P. 197–230.
12. *Sarradj E., Herold G., Sijtsma P., Merino-Martínez R., Geyer T.F., Bahr C.J., Porteous R., Moreau D., Doolan C.J.* A Microphone Array Method Benchmarking Exercise using Synthesized Input Data // AIAA paper 2017–3719. 2017.
13. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование. М.: Физматлит, 2002. 472 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI. 3-е изд., перераб. М.: Физматлит, 1986. 736 с.
15. *Wu T.W., Lee L.* A Direct Boundary Integral Formulation For Acoustic Radiation In A Subsonic Uniform Flow // J. Sound Vib. 1994. V. 175. P. 51–63.
16. *Bobkov V., Gorobets A., Duben A., Kozubskaya T., Tsvetkova V.* Towards affordable CAA simulations of airliner's wings with deployed high-lift devices // Book of Abstracts of the 5-th Internat. Workshop "Computational Experiment in AeroAcoustics". 2018. P. 36–37.
17. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh.,Travin A.K.* A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities // Internat. Journal of Heat and Fluid Flow. 2008. V. 29. № 6. P. 1638–1649.
18. *Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычисл. методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 110–125.
19. *Pascioni K., Cattafesta L.N., Choudhari M.M.* An Experimental Investigation of the 30P30N Multi-Element High-Lift Airfoil // AIAA paper 2014–3062. 2014.
20. *Choudhari M.M., Lockard D.P.* Assessment of Slat Noise Predictions for 30P30N High-Lift Configuration from BANC-III Workshop // AIAA paper 2015–2844. 2015.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1927–1936

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.538

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ[1)]

© 2021 г. **М. О. Корпусов**[1,2]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. факультет, Россия

[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.07.2020 г.
Переработанный вариант 05.07.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Мы вывели новые нелинейные уравнения высокого порядка соболевского типа, описывающие ионно-звуковые волны в плазме во внешнем электрическом или магнитном полях. Несмотря на громоздкий вид уравнений, для исследования соответствующих начальных и начально-краевых задач развиты методы исследования. Так, используя наши результаты, мы в дальнейшем предложим достаточные условия возникновения режимов с обострением. Библ. 18.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, “blow-up”, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466921110119

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы впервые получили нелинейные уравнения теории нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, находящейся либо во внешнем электрическом, либо во внешнем магнитном полях. Эти нелинейные уравнения являются соболевскими уравнениями (см. [1]) шестого порядка — второго по координатам и четвертого по времени следующих видов:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)=f_0(x,t),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Bi}^2\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi+\omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0.$$

Отметим, что соответствующее уравнение ионно-звуковых волн в однородной и изотропной плазме описывается уравнением четвертого порядка — второго по координатам и второго по времени следующего вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\Delta_3\phi=0.$$

Наконец, в заключительным разделе нами получено следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi+\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0,$$

которое учитывает слабую диссипативность ионно-звуковых волн во внешнем магнитном поле.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [2]–[6] и посвященные выводу нелинейных уравнений соболевского типа.

[1)]Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН и при финансовой поддержке Программы РУДН “5-100”.

Заметим, что некоторые начальные и начально-краевые задачи для различных вариантов нелинейных уравнений ионно-звуковых волн исследовались в [7]–[14].

2. ИЗОТРОПНАЯ И ОДНОРОДНАЯ ПЛАЗМА

Рассмотрим незамагниченную однородную плазму. Будем рассматривать такие колебания частиц плазмы, частота которых не превышает ионной ленгмюровской частоты

$$\omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M}\right)^{1/2}.$$

В этом случае в волновом движении участвуют не только электроны, но и ионы. Обычно при рассмотрении ионно-звуковых волн полагают температуру ионов $T_i = 0$, поскольку температура электронов $T_e \gg T_i$. Кроме того, при рассмотрении волн частоты $\omega \leq \omega_{pi}$ считается, что можно пренебречь инерцией электронов и положить в соответствующих уравнениях массу электрона $m = 0$.

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1x_2x_3\}$ с репером $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Гидродинамика ионов и электронов описывается следующей системой уравнений (см. [15]):

$$Mn_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + Mn_i(\mathbf{v}_i, \nabla)\mathbf{v}_i = -\nabla p_i - en_i\nabla\phi, \quad p_i = n_i kT_i, \tag{2.1}$$

$$mn_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + mn_e(\mathbf{v}_e, \nabla)\mathbf{v}_e = -\nabla p_e + en_e\nabla\phi, \quad p_e = n_e kT_e, \tag{2.2}$$

где M – масса иона, n_i – концентрация ионов, $\mathbf{v}_i$ – скорость иона, p_i – давление, создаваемое ионами, T_i – температура ионов, m – масса электрона, n_e – концентрация электронов, $\mathbf{v}_e$ – скорость электрона, p_e – давление, создаваемое электронами, T_e – температура электронов, ϕ – потенциал электрического поля.

Положим в уравнении (2.2) $m = 0$ и получим следующее равенство:

$$0 = -kT_e\nabla n_e + en_e\nabla\phi \Rightarrow n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right). \tag{2.3}$$

Положим в уравнении (2.1) температуру ионов $T_i = 0$ и получим в линейном приближении уравнение

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -en_0\nabla\phi. \tag{2.4}$$

Дополним полученные уравнения (2.3) и (2.4) уравнениями электрической части системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации.

Из уравнений (2.4) и (2.6) вытекает уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\nabla\phi. \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.3), (2.5) и (2.7) вытекает

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2\Delta_3\phi = 0, \quad \omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M}\right)^{1/2}, \tag{2.8}$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Уравнение (2.8) называется уравнением ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме и ее линейный вариант был впервые получен в [15].

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (2.8) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемые разложения ее в ряд и тогда уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0 \frac{e\phi}{kT_e} - 4\pi n_0 \frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \phi = 0.$$

3. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1x_2x_3\}$ с репером $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть плазма находится во внешнем постоянном и однородном поле

$$\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_3, \quad E_0 > 0.$$

Гидродинамика ионов во внешнем электрическом поле описывается системой уравнений

$$Mn_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + Mn_i(\mathbf{v}_i, \nabla)\mathbf{v}_i = -\nabla p_i + en_i\mathbf{E}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i\mathbf{v}_i) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_i = 0, \tag{3.2}$$

где M — масса иона, n_i — концентрация ионов, $\mathbf{v}_i$ — скорость иона, p_i — давление. Гидродинамика электронов во внешнем электрическом поле описывается, в частности, уравнением

$$mn_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + mn_e(\mathbf{v}_e, \nabla)\mathbf{v}_e = -\nabla p_e - en_e\mathbf{E}, \tag{3.3}$$

где m — масса электрона, n_e — концентрация электронов, $\mathbf{v}_e$ — скорость электрона, p_e — давление. В уравнении (3.3) положим

$$m = 0, \quad p_e = n_e kT_e, \quad \mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_3 - \nabla\phi \tag{3.4}$$

и предположим, что температура T_e постоянна. В результате из (3.3) и (3.4) получим дифференциальное уравнение

$$kT_e\nabla n_e = en_e(-E_0\mathbf{e}_3 + \nabla\phi),$$

решение которого выписывается явно следующим образом:

$$n_e = n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right), \quad n_0(x_3) = n_0 \exp\left(-\frac{eE_0}{kT_e}x_3\right), \quad n_0 = \text{const} > 0. \tag{3.5}$$

Добавим к уравнениям (3.1), (3.2) и (3.5) электрическую часть квазистационарной системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_i\mathbf{v}_i, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{D}$ — вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, ϕ — потенциал электрического поля.

Проведем линеаризацию в уравнениях (3.1), (3.2) и (3.7). Именно, положим

$$n_i = N_0 + n, \quad p_i = kT_iN_0 + p, \quad \mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_3 - \nabla\phi.$$

Из уравнения (3.1) получим следующие два:

$$kT_i\nabla N_0 = eN_0E_0\mathbf{e}_3, \tag{3.8}$$

$$MN_0 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\nabla p - eN_0 \nabla \phi + enE_0 \mathbf{e}_3. \tag{3.9}$$

Дифференциальное уравнение (3.8) легко интегрируется, и мы получаем явный вид функции $N_0 = N_0(x_3)$:

$$N_0(x_3) = n_0 \exp\left(\frac{eE_0}{kT_i} x_3\right). \tag{3.10}$$

Теперь проведем линеаризацию уравнений (3.2) и (3.7) и получим уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(N_0(x_3)\mathbf{v}_i) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = eN_0(x_3)\mathbf{v}_i. \tag{3.12}$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений (3.9), (3.11), (3.12) и (3.6).

Заметим, что первое уравнение из (3.11) с учетом второго уравнения из (3.11) и явного вида функции $N_0(x_3)$, определенной равенством (3.10), примет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{eE_0}{kT_i} N_0(x_3) v_{i3} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0.$$

Из уравнения (3.9) в координатах получаем

$$MN_0(x_3)\frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} - eN_0(x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \tag{3.13}$$

$$MN_0(x_3)\frac{\partial v_{i2}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - eN_0(x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{3.14}$$

$$MN_0(x_3)\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - eN_0(x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + enE_0. \tag{3.15}$$

Продифференцируем обе части равенства (3.15) по времени и с учетом равенства (3.11) получим равенство

$$MN_0(x_3)\frac{\partial^2 v_{i3}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_3} - eN_0(x_3)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_3} - \frac{(eE_0)^2}{kT_i} N_0(x_3) v_{i3}. \tag{3.16}$$

Из равенства (3.12) и из (3.13), (3.14), (3.16) получим равенства

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{3.18}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\frac{\partial P_3}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_3} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_3}, \tag{3.19}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega_0 := \frac{eE_0}{\sqrt{kT_i M}}.$$

Проинтегрируем равенство (3.19) по времени и получим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right) P_3 = -\frac{e}{M}\frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + f_0(x), \tag{3.20}$$

где функция $f_0(x)$ считается заданной. Из уравнений (3.5), (3.6), (3.17), (3.18) и (3.20) вытекает следующее уравнение шестого порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\frac{4\pi e}{M}\Delta_2 p+\omega_{pi}^2(x_3)\Delta_2\phi\right)+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{4\pi e}{M}\frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)\right)=0, \tag{3.21}$$

где

$$\omega_{pi}^2(x_3)=\frac{4\pi e^2 N_0(x_3)}{M},\quad \omega_0^2=\frac{(eE_0)^2}{kT_iM}, \tag{3.22}$$

$$N_0(x_3)=n_0\exp\left(\frac{eE_0}{kT_i}x_3\right),\quad n_0(x_3)=n_0\exp\left(-\frac{eE_0}{kT_e}x_3\right). \tag{3.23}$$

Кроме того, мы использовали следующие обозначения:

$$\Delta_3=\Delta_2+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{3.24}$$

Теперь получим второе уравнение искомой системы уравнений. С этой целью перепишем уравнения (3.13), (3.14) и (3.16) в виде

$$\frac{\partial v_{i1}}{\partial t}=-\frac{1}{MN_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_1}-\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial v_{i2}}{\partial t}=-\frac{1}{MN_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_2}-\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \tag{3.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)v_{i3}=-\frac{1}{MN_0(x_3)}\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x_3}-\frac{e}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_3}. \tag{3.27}$$

Из уравнений (3.25), (3.26) и (3.27), а также второго уравнения (3.11) вытекает следующее уравнение четвертого порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)(\Delta_2 p+eN_0(x_3)\Delta_2\phi)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(N_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{N_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)+eN_0(x_3)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right)=0. \tag{3.28}$$

Итак, мы пришли к нелинейной системе уравнений (3.21) и (3.28) относительно давления p и электрического потенциала ϕ, описывающей нелинейные ионно-звуковые волны в плазме во внешнем электрическом поле.

Рассмотрим некоторые возможные упрощения системы уравнений (3.21) и (3.28). Предположим, что область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, в которой физически расположена плазма, находится в полуплоскости $x_3\le-\delta$ при $\delta>0$. Тогда заметим, что

$$\frac{N_0(x_3)}{T_i^\lambda}=\frac{n_0\exp\left(\frac{eE_0}{kT_i}x_3\right)}{T_i^\lambda}\to+0\quad\text{при}\quad T_i\to+0$$

для любого $\lambda\ge0$. В приближении малого T_i уравнение (3.28) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2 p+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(N_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{N_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right)=0. \tag{3.29}$$

Формально это уравнение получено из (3.28) отбрасыванием следующих слагаемых с “бесконечно” малыми коэффициентами:

$$eN_0(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi\quad\text{и}\quad eN_0(x_3)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}.$$

Отметим, что линейное уравнение (3.29) хорошо изучено и совпадает с уравнением внутренних волн в стратифицированной жидкости, но с коэффициентами, имеющими другой физический смысл (см. [16]).

Следовательно, при учете начальных и граничных условий функцию $p = p(x,t)$ в уравнении (3.21) можно считать заданной и поэтому уравнение (3.21) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) = f_0(x,t), \quad (3.30)$$

где

$$f_0(x,t) := -\frac{4\pi e}{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2 p(x,t) - \frac{4\pi e}{M}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2},$$

и мы использовали обозначения (3.22), (3.23) и (3.24). Назовем уравнение (3.30) уравнением ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме во внешнем электрическом поле с заданной функцией $f_0(x,t)$.

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (3.30) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемые разложения ее в ряд и тогда уравнение (3.30) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0(x_3)\frac{e\phi}{kT_e} - 4\pi n_0(x_3)\frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right) +$$
$$+\ \omega_{pi}^2(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) = f_0(x,t).$$

4. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1x_2x_3\}$ с репером $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$. Пусть плазма находится во внешнем постоянном и однородном поле

$$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3, \quad B_0 > 0.$$

Линеаризованное уравнение, описывающее гидродинамику ионов в плазме во внешнем магнитном поле, имеет следующий вид (см. [17]):

$$\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{e}{M}\nabla\phi + \omega_{Bi}[\mathbf{e}_3,\mathbf{v}_i], \quad \omega_{Bi} = \frac{eB_0}{Mc}. \quad (4.1)$$

Линейная гидродинамика электронов описывается уравнением

$$mn_{e0}\frac{\partial\mathbf{v}_e}{\partial t} = -\nabla p_e + \frac{en_{e0}B_0}{c}[\mathbf{e}_3,\mathbf{v}_e] + en_{e0}\nabla\phi_e, \quad p_e = n_{e0}kT_e. \quad (4.2)$$

Как и в предыдущем разделе положим в уравнении (4.2) массу электрона $m = 0$. Кроме того, поскольку скорость электронов много меньше скорости света, то положим в (4.2) $c = +\infty$. В результате получим следующее уравнение:

$$0 = -kT_e\nabla n_{e0} + en_{e0}\nabla\phi_e \Rightarrow n_{e0} = n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right). \quad (4.3)$$

Дополним (4.1) и (4.3) уравнениями электродинамики

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_{e0}, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i. \quad (4.5)$$

Перепишем уравнение (4.1) в координатах

$$\frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \omega_{Bi}v_{i2}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial v_{i2}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \omega_{Bi} v_{i1}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \tag{4.8}$$

Из уравнений (4.6) и (4.7) вытекают следующие два:

$$\frac{\partial^2 v_{i1}}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2 v_{i1} = -\frac{e}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1} + \frac{e}{M}\omega_{Bi}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^2 v_{i2}}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2 v_{i2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_2} - \frac{e}{M}\omega_{Bi}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}. \tag{4.10}$$

Из уравнений (4.5), (4.9), (4.10) и (4.8) вытекают следующие:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1} + \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_2} - \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \tag{4.13}$$

В свою очередь, из уравнений (4.11) и (4.12) получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2 \partial x_1} + \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_2}, \tag{4.14}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2 \partial x_2} - \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1}. \tag{4.15}$$

Теперь из уравнений (4.13), (4.14) и (4.15) вытекает равенство

$$4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\operatorname{div}\mathbf{P} = -\omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\phi - \omega_{pi}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = -\omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi - \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}, \tag{4.16}$$

где

$$\omega_{pi} = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{M}\right)^{1/2}, \quad \omega_{Bi} = \frac{eB_0}{Mc}. \tag{4.17}$$

Из уравнений (4.3), (4.4) и (4.16) вытекает уравнение шестого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi + \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0, \tag{4.18}$$

которое мы назовем *уравнением ионно-звуковых волн* в замагниченной плазме.

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (4.18) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемых разложения ее в ряд и тогда уравнение (4.18) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0\frac{e\phi}{kT_e} - 4\pi n_0\frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right) + \omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi + \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0,$$

где использованы обозначения (4.17).

5. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: СЛАБАЯ ДИССИПАЦИЯ

В этом разделе мы несколько модифицируем базовую модель ионно-звуковых волн, изложенную в разд. 2, и получим еще одно нелинейное уравнение ионно-звуковых волн со слабой диссипацией во внешнем магнитном поле.

Пусть однородная плазма находится во внешнем постоянном магнитном поле

$$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3, \quad B_0 > 0.$$

Рассмотрим следующие соотношения из [18, с. 340]:

$$\begin{gathered}\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\phi + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i, \mathbf{B}_0]\right),\\ \mathbf{f} := \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{B}_0] = \frac{\sigma}{c}[\mathbf{B}_0, \nabla\phi] + \frac{\sigma}{c^2}[\mathbf{B}_0, [\mathbf{B}_0, \mathbf{v}_i]],\end{gathered} \tag{5.1}$$

где $\sigma > 0$ – коэффициент проводимости плазмы, c – скорость света, $\mathbf{v}_i$ – вектор скорости ионов, $\mathbf{j}$ – вектор плотности тока в плазме. Тогда в линейном приближении и при температуре ионов $T_i = 0$ получим следующую линейную систему уравнений гидродинамики ионов [18, с. 341]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{e}{M}\nabla\phi + \mathbf{f}, \tag{5.2}$$

где объемная плотность сторонних сил $\mathbf{f}$ определена равенством (5.1). Как и в разд. 2 предполагаем, что плотность электронов описывается распределением Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right). \tag{5.3}$$

Наконец, как и выше, систему уравнений (5.2), (5.1) и (5.3) замыкаем следующими уравнениями из электрической части квазистационарной системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации. Из системы уравнений (5.2) и (5.1) в координатах получаем следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)v_{i1} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \quad \sigma_1 := \frac{\sigma B_0^2}{c^2}, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)v_{i2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\\ \frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Теперь из уравнений (5.5) и (5.6), (5.7) получаем уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \tag{5.8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}. \tag{5.10}$$

Из (5.8) и (5.9) вытекают уравнения

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}&=-\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_1}-\frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_2},\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}&=-\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_2}+\frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_1}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Из уравнений (5.10), (5.11) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}4\pi\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{div}\mathbf{P}&=-\omega_{pi}^2\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x_1^2}-\omega_{pi}^2\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x_2^2}-\omega_{pi}^2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=\\ &=-\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi-\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2},\quad \omega_{pi}^2:=\frac{4\pi e^2 n_0}{M}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Из уравнений (5.3), (5.4) и (5.12) вытекает нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi+\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0,\tag{5.13}$$

где

$$\sigma_1=\frac{\sigma B_0^2}{c^2},\quad \omega_{pi}^2=\frac{4\pi e^2 n_0}{M}.$$

Полученное уравнение пятого порядка (5.13) назовем *уравнением ионно-звуковых волн* со слабой диссипацией во внешнем магнитном поле.

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (5.13) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемых разложения ее в ряд, и тогда уравнение (5.13) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\frac{e\phi}{kT_e}-4\pi n_0\frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi+\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter: Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2011.
2. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 6. С. 1006–1022.
3. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
4. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Об одной начально-краевой задаче магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 11. С. 1734–1741.
5. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.
6. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. 2 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 11. С. 2041–2048.
7. *Корпусов М.О.* О разрушении ионно-звуковых волн в плазме // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 1. С. 37–64.
8. *Корпусов М.О.* О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с сильной пространственно-временной дисперсией // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 6. С. 96–130.
9. *Корпусов М.О.* О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 2. С. 103–140.

10. *Корпусов М.О.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн // Теор. и матем. физ. 2016. Т. 187. № 3. С. 447–454.
11. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 2. С. 107–123.
12. *Корпусов М.О., Панин А.А.* О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 3. С. 383–395.
13. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А., Юшков Е.В.* О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 2. С. 43–78.
14. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 3. С. 15–70.
15. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
16. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
17. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1992.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1937–1952

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В НАГРЕВАЕМЫХ ТРУБАХ С РАСЧЕТОМ ПОГРАНСЛОЯ ПО БГК-МОДЕЛИ[1)]

© 2021 г. **Е. А. Забродина[1], О. В. Николаева[1], Н. Н. Фимин[1,*], В. М. Чечёткин[1]**

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

**e-mail: oberon@kiam.ru*

Поступила в редакцию 09.11.2020 г.
Переработанный вариант 09.11.2020 г.
Принята к публикации 07.04.2021 г.

Рассматривается модельная задача о переносе тепла от неравномерно нагреваемых стенок трубы к основной массе гидродинамического течения или, иными словами, первичные стадии релаксации температуры и давления жидкости в нагреваемой трубе. Проводятся расчеты с помощью программ, использующих уравнения Навье–Стокса, модифицированного Барнетта и кинетического уравнения БГК в различных сочетаниях. Библ. 13. Фиг. 17.

Ключевые слова: уравнения Больцмана, уравнения Навье–Стокса, уравнения Барнетта, макропараметры течения, метод Чэпмена–Энскога, уравнение БГК.

DOI: 10.31857/S0044466921110168

1. ВВЕДЕНИЕ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ БАРНЕТТА И КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БГК

Задачи, связанные с различными аспектами гидродинамического движения в условиях, существенно отличающихся от равновесных и требующих при этом особых условий замыкания (например, при наличии значительных температурных градиентов и внутренних интенсивных источников/стоков тепла – типа фазовых переходов – в течении, а также в условиях присутствия значительной локальной пространственной неоднородности тензора напряжений), требуют использования принципиально иных математических моделей, чем известные и широко используемые подходы, основанные на решении уравнений Эйлера или Навье–Стокса (УНС). В частности, проблемы описания эволюции двухфазных (парожидкостных) систем в охлаждающих контурах АЭС, котлоагрегатах тепловых станций и пр. приводят к мысли о целесообразности введения в рассмотрение (и построения соответствующей вычислительной модели) системы уравнений Барнетта (см. [1]–[5]).

Помимо использования в выделенной зоне гидродинамического расчета приближения Барнетта, весьма привлекательной является возможность применения кинетического подхода в существенно неравновесном слое жидкости, прилегающем к сильно и неравномерно нагретой стенке (либо ко внешней по отношению к нагреваемой аэродинамическим потоком поверхности – как, например, при гиперзвуковом режиме обтекания). Для этого представляется вполне правомерным обратиться к кинетическому уравнению Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК). Оно является максимально простым по структуре и в то же время достаточно адекватно передающим физическую картину, имеющую место при взаимодействии молекул среды в пристеночной области (обобщенном слое Кнудсена).

В настоящей работе рассматриваются несколько вариантов численного моделирования течения в трубе с нагреваемыми стенками:

1) введение в рассмотрение рассчитываемого по *модифицированному* (далее это уточнение подразумевается неявно) Барнетту погранслоя при наличии основного потока, описываемого уравнениями Навье–Стокса;

2) наличие погранслоя, полностью рассчитываемого с помощью уравнения БГК при условии основного потока, рассматриваемого в рамках УНС;

[1)]Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 20-11-20165 (В.М. Чечеткин).

3) расчет всей массы движущейся жидкости в трубе по Барнетту;

4) введение в рассмотрение переходного слоя жидкости, расположенного между кинетическим погранслоем (рассчитываемым по кинетической модели БГК) и основной массой потока (рассчитываемым по Навье–Стоксу или Барнетту).

Можно утверждать, что сочетание кинетического расчета с гидродинамическим может быть оправдано в ряде важных случаев, причем основными основаниями для такого комплексного кинетически-гидродинамического подхода являются эффекты существенной неравновесности течения в областях резких градиентов температур, плотностей и при возможном фазовом переходе в жидкости (в этом случае гидродинамика выходит за рамки свой применимости из-за непригодности метода усреднения по всему объему среды, используемому в методах Гильберта, Грэда, Чэпмена–Энскога перехода от кинетического уравнения к системе гидродинамических уравнений). Чрезвычайно важной и сложной задачей при таких сложных расчетах является учет взаимной передачи информации о среде через формальную границу расчетных областей (в каждой из областей моделирование ведется на основании своей методики: БГК–Барнетт, БГК–Навье–Стокс и т.д.).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БГК

Уравнение БГК для функции распределения молекул пара в пограничном слое может быть записано в следующей форме:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f(r,\mu,v,\mathbf{\Omega},t)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial\vec{\Omega}}=\frac{1}{v}I(f)(f_e(f)-f). \quad (1)$$

Оно рассматривается в осесимметричном цилиндрическом слое $r_0 < r < R_0$, $0 < z < H$. Предполагается, что решение f не зависит от азимутальной пространственной координаты.

Функция распределения f [молекул/(м^3(м/с)^3)] зависит от шести переменных: пространственных координат r, z [м]; модуля скорости молекулы v [м/с]; времени t [с]; углов, определяющих единичный вектор $\mathbf{\Omega}(\theta,\varphi)$ направления переноса частиц в сферической системе координат ($0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < \pi$). Предположение об изотропии функции распределения по угловой переменной φ эквивалентно условию $f(r,z,\mu,\varphi,v,t) = f(r,z,\mu,2\pi-\varphi,v,t)$ $(\mu\equiv\cos\theta)$. Обозначение $f_e(f)$ используется в том смысле, что локально-равновесное квазимаксвелловское распределение f_e зависит от функции распределения в той же точке посредством параметров $\rho(f)$, $T(f)$, $\mathbf{V}(f)$, являющихся моментами функции f (явный вид f_e см. ниже). Производная по направлению в уравнении (1) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{\Omega}}=\mu\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\xi}{r}\frac{\partial(rf)}{\partial r}-\frac{\partial(\eta f)}{\partial\varphi},\quad \xi\equiv\sin\theta\cos\varphi,\quad \eta\equiv\sin\theta\sin\varphi.$$

Интеграл по скоростям от функции распределения (пространственная удельная плотность частиц) записывается в форме

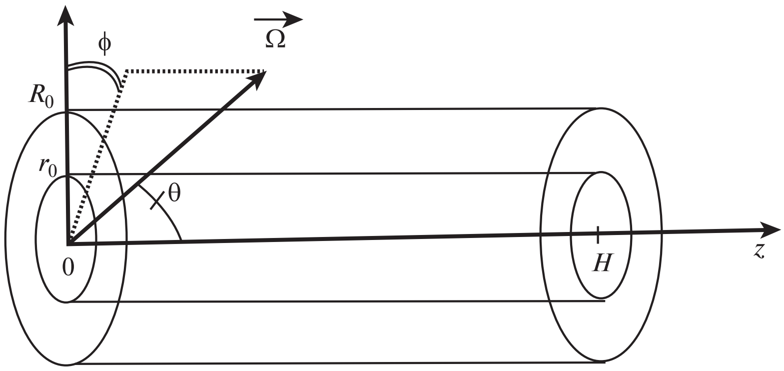
$$\varrho(r,z,t)=2\int_0^\infty v^2dv\int_{-1}^1 d\mu\int_0^\pi f(r,z,\mu,\varphi,v,t)d\varphi.$$

Частота взаимодействия молекул $I(f)$ [с$^{-1}$] принимается в расчетах равной модельной величине (существенно зависящей от скорости частиц и их функции распределения, что отличает используемую модель от классической модели БГК)

$$I_{v,f}^{(0)}=\sqrt{3T(f)k_B/m_0^3}\sigma\rho(f),$$

где $\sigma=\pi d_0^3$ [м^2] – эффективное сечение взаимодействия молекул, $d_0 = 0.3\times10^{-9}$ [м] – эффективный диаметр молекулы воды, $k_B = 1.380648\times10^{-23}$ [Дж/K] – постоянная Больцмана, $m_0 = 3.01510\times10^{-26}$ [кг] – масса молекулы воды, $\rho(f)$ [кг] – локальная массовая плотность частиц:

$$\rho(r,z,t)=2m_0\int_{-1}^1 d\mu\int_0^\pi d\varphi\int_0^\infty v^2 f(r,z,\mu,\varphi,v,t)dv,$$



Фиг. 1. Расчетная область начально-граничной задачи для уравнения БГК.

величина $T(f)$ [K] – локальная температура микроканонического ансамбля:

$$T(r,z,t) = \frac{4m_0}{3R\rho(r,z,t)}\int_{-1}^{1} d\mu\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{\infty}[(\xi v - v_r)^2 + (\mu v - v_z)^2]v^2 f(r,z,\mu,\varphi,v,t)dv,$$

$R = k_B/m_0$ – газовая постоянная. Компоненты скорости потока ([м/с]) определяются соотношениями

$$v_z = \frac{2m_0}{\rho(r,z,t)}\int_{-1}^{1}\mu d\mu\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{\infty} v^3 f(r,z,\mu,\varphi,v,t)dv,$$

$$v_r = \frac{2m_0}{\rho(r,z,t)}\int_{-1}^{1} d\mu\int_0^{\pi}\xi d\varphi\int_0^{\infty} v^3 f(r,z,\mu,\varphi,v,t)dv.$$

Локально-равновесное распределение [молекул/(м^3(м/с)^3)] в правой части уравнения БГК определяется выражением

$$f_e(f) = f(\mu,\varphi,v,v_r,v_z,\rho,T) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}m_0}\exp\left[-\frac{v^2 + v_r^2 + v_z^2 - 2v(\mu v_z + \xi v_r)}{2RT}\right]\times$$
$$\times(A_1 + A_2(v\xi - v_r) + A_3(v\mu - v_z) + A_4[(v\xi - v_r)^2 + (v\mu - v_z)^2 - 3RT]),$$

где коэффициенты $A_k|_{k=1,\ldots,4}$ находятся из вышеприведенных определений $\rho(r,z,t)$, $T(r,z,t)$, v_r, v_z при замене интегралов в правых частях выражений квадратурными формулами.

Приведем постановку *краевых условий* для уравнений БГК в кольцевой цилиндрической области погранслоя (см. фиг. 1). На границе $z = H$ задаются значения функции распределения для молекул, вытекающих из открытого торца цилиндра (при $\mu > 0$):

$$f(r,z = H,\mu < 0,\varphi,v,t) = f_e(\mu < 0,\varphi,v,v_r(r,z = H,t),v_z(r,z = H,t),\rho(r,z = H,t),T(r,z = H,t)). \quad (2)$$

На границе $r = r_0$ задается значение функции распределения для молекул, поступающих из газодинамической области (для которых $0 < \varphi < \pi/2$)

$$f(r = r_0,z,\mu,\varphi,v,t) = f_e(\mu,\varphi,v,v_r(r = r_0,z,t),v_z(r = r_0,z,t),\rho(r = r_0,z,t),T(r = r_0,z,t)) \quad (3)$$

при заданных макропараметрах $v_r(r,z = H,t)$, $v_z(r,z = H,t)$, $\rho(r,z = H,t)$, $T(r,z = H,t)$ и $v_r(r = r_0,z,t)$, $v_z(r = r_0,z,t)$, $\rho(r = r_0,z,t)$, $T(r = r_0,z,t)$. Подчеркнем, что условия (2), (3) задают значения функции распределения и тем самым макропараметров только для молекул, влетающих в трубу, но не для молекул, вылетающих из трубы.

На границе $r = R_0$ (жесткая стенка трубы) при $\pi/2 < \varphi < \pi$ (такой интервал угла отвечает молекулам, движущимся от стенки) задается следующее условие:

$$f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) = G \cdot f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = R_0, z, t), v_z(r = R_0, z, t), \rho(r = R_0, z, t), T(r = R_0, z, t)),$$

$$G = \left(-\int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{\pi/2} \xi d\varphi \int_{0}^{\infty} v^3 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) dv \right) \times \tag{4}$$

$$\times \left(\int_{-1}^{1} d\mu \int_{\pi/2}^{\pi} \xi d\varphi \int_{0}^{\infty} v^3 f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = R_0, z, t), v_z(r = R_0, z, t), \rho(r = R_0, z, t), T(r = R_0, z, t)) \right)^{-1} > 0.$$

Вышеприведенное условие на жесткой стенке трубы обеспечивает выполнение равенства аннуляции соответствующего (радиального) потока молекул:

$$\int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{\pi} \xi d\varphi \int_{0}^{\infty} v^3 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) dv = 0$$

(откуда следует соотношение “непротекания” $v_r(r = R_0, z, t) = 0$). Также условие (4) обеспечивает заданные плотность, температуру и продольную скорость для молекул, отраженных от стенки трубы.

На границе $z = 0$ задается краевое условие (для молекул, втекающих в цилиндр через его открытый торец, чему соответствует условие $\mu > 0$) задается условие

$$f(r, z = 0, \mu > 0, \varphi, v, t) = f_e(\mu > 0, \varphi, v, v_r(r, z = 0, t), v_z(r, z = 0, t), \rho(r, z = 0, t), T(r, z = 0, t)), \tag{5}$$

причем

$$2m_0 \int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\infty} v^2 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = \rho(r, z = 0, t),$$

$$\frac{4m_0}{3R\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\infty} v^2 ((\xi v - v_r)^2 - (\mu v - v_z)^2) f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = T(r, z = 0, t),$$

$$\frac{2m_0}{\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^{1} \mu d\mu \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{\infty} v^3 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = v_z(r, z = 0, t),$$

$$\frac{2m_0}{\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^{1} d\mu \int_{0}^{\pi} \xi d\varphi \int_{0}^{\infty} v^3 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = v_r(r, z = 0, t).$$

Эти условия фиксируют макропараметры (плотность, скорости и температуру) для всего ансамбля молекул (как влетающих в цилиндр, так и вылетающих из него).

Приведем постановку *начальных условий* для смешанной задачи для уравнения БГК в погранслое. В начальный момент времени задаются функции

$$\rho(r, z, t = 0), \quad v_r(r, z, t = 0), \quad v_z(r, z, t = 0), \quad T(r, z, t = 0)$$

во всей расчетной области (кольцевого цилиндра), т.е. $r_0 \le r \le R_0$, $0 \le z \le H$. Начальное условие для уравнения БГК имеет вид

$$f(r, z, \mu, \varphi, t = 0) = f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r, z, t = 0), v_z(r, z, t = 0), \rho(r, z, t = 0), T(r, z, t = 0)). \tag{6}$$

Рассмотрим метод решения поставленной выше начально-граничной задачи (1)–(6) для кинетического уравнения БГК. Для этого проведем аппроксимацию по времени. Интегрируя уравнение (1) по переменной t, находим

$$\frac{1}{v\Delta t}(f^+ - f^-) + \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{\Omega}} = \frac{1}{v} I(f^-)(f_e(f^-) - f^0), \quad I(f^-) = \sqrt{3T(f^-)k_B/m_0^3}\sigma\rho(f^-), \tag{7}$$

где $f^-(r,z,\mu,\varphi,v) = f(r,z,\mu,\varphi,v,t^-)$ – решение в начале временного шага при $t = t^-$, $f^+(r,z,\mu,\varphi,v) = f(r,z,\mu,\varphi,v,t^+)$ – решение в начале временного шага при $t = t^+$, $\Delta = t^+ - t^-$,

$$f^0(r,z,\mu,\varphi,v) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^-}^{t^+} f(r,z,\mu,\varphi,v,t)dt$$

есть среднее на временном шаге решение. Заметим,что здесь частота взаимодействий $I(f^-)$ и локально-равновесное распределение $f_e(f^-)$ в правой части уравнения берутся для начала временного шага.

Примем кусочно-линейную аппроксимацию функции распределения

$$f(t) = f^+ \quad \text{при} \quad \tau \le t \le t^+,$$

$$f(t) = f^- + \frac{t - t^-}{\tau - t^-}(f^+ - f^-) \quad \text{при} \quad t^- < t < \tau,$$

$$\tau = t^- + \frac{2p\Delta t}{1 + p}, \quad p \in [0,1],$$

$f^+ = (1 + p)f^0 - pf^-$, параметр $p \in [0,1]$ (при $p = 0$ функция $f(t)$ является кусочно-постоянной, при $p = 1$ – кусочно-линейной). Подставляя это выражение для f^+ в уравнение (7), получаем

$$\frac{1 + p}{v\Delta t}f^0 + \frac{\partial f^0}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{1}{v}I(f^-)(f_e(f^-) - f^0). \tag{8}$$

Значения макропараметров на границе погранслоя с областью гидродинамического расчета

$$v_r(r_0,z,t^-),\;\; v_z(r_0,z,t^-),\;\; \rho(r_0,z,t^-),\;\; T(r_0,z,t^-) \tag{9}$$

берутся из решения уравнений газодинамики в соседней области на предыдущем временном шаге.

Значения макропараметров на открытых торцах трубы и на жесткой стенке

$$v_r(r,z=0),\quad v_z(r,z=0),\quad \rho(r,z=0),\quad T(r,z=0), \tag{10}$$

$$v_r(r,z=H),\quad v_z(r,z=H),\quad \rho(r,z=H),\quad T(r,z=H), \tag{11}$$

$$v_r(R,z),\;\; v_z(R,z),\;\; \rho(R,z),\;\; T(R,z) \tag{12}$$

считаются фиксированными во все моменты времени.

В расчетах установлено, что функция распределения молекул в кинетическом погранслое далека от равновесной. Поэтому непосредственная передача данных о состоянии погранслоя к жидкостному течению, в котором проводятся расчеты по гидродинамической программе, невозможна (на границе этих двух расчетных областей должен производиться обмен информацией о сохранении баланса массы, импульса и энергии: 1) со стороны погранслоя в виде квазиравновесной псевдомаксвелловской функции распределения, моменты которой являются локальными макровеличинами ρ_{kin}, T_{kin}, $\mathbf{v}_{\text{kin}}$, передаваемыми в качестве граничных условий в область гидродинамического расчета; 2) со стороны основного потока жидкости – в виде макровеличин ρ_{Hydr}, T_{Hydr}, $\mathbf{V}_{\text{Hydr}}$, формирующих на границе областей со стороны кинетического погранслоя локальную псевдомаксвелловскую функцию). Поэтому введена в рассмотрение дополнительная релаксационная область “над” погранслоем, в которой происходит изотропизация распределения молекул и формируется необходимая при обмене информацией псевдомаксвелловская функция распределения (см. фиг. 2).

Отдельным весьма нетривиальным вопросом является соответствие термодинамических параметров неравновесного микроканонического ансамбля частиц в кинетическом погранслое макропараметрам (T, S, W и т.п.) канонического ансамбля области основного гидродинамического течения в процессе выравнивания их в переходной релаксационной зоне между расчетными зонами $r_0 < r < R_0$ и $0 < r < R_0 - \Delta_K$.

Фиг. 2. Модифицированная постановка задачи расчета кинетического погранслоя, учитывающая введение эффективного релаксационного подслоя, служащего для максвеллизации функции распределения (с последующим переходом к макровеличинам в гидродинамической области расчета).

В качестве выводов из проведенных расчетов можно с уверенностью привести следующие:

1. В релаксационном слое воды реализуется распределение, близкое к максвелловскому, в то время как в кнудсеновском (“паровом”) погранслое распределение существенно анизотропно и близким к максвелловскому не является. Толщина кнудсеновского погранслоя выбиралась $\Delta_K \sim 100\langle\ell\rangle$ (где $\langle\ell\rangle$ – длина среднего пробега в паре молекулы), толщина релаксационного слоя $\Delta_{\mathrm{Rel}} = 4\Delta_K$; по-видимому, установлению релаксации препятствует нагрев стенки, который и формирует анизотропию функции распределения.

2. С начального момента времени возникает тенденция к потоку вещества из воды в паровой погранслой (что, очевидно, связано с существенной исходной разницей в плотности среды в этих областях), происходит постепенное нагревание пара до температуры выше, чем температура стенки.

3. Максимум температуры пара находится у стенки трубы, а максимум его плотности – на центральной линии парового погранслоя.

3. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ (НАВЬЕ–СТОКСА И БАРНЕТТА)

Метод Чэпмена–Энскога получения из кинетического уравнения Больцмана цепочки гидродинамических уравнений состоит в представлении функции распределения посредством асимптотического рада по малому параметру:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \ldots .$$

В этом случае тензор напряжений и тепловой поток можно также представить в виде рядов (в качестве малого параметра ε используем число Кнудсена Kn):

$$q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}, \quad q_i^{(1)} = -(\lambda\nabla T)_i, \quad q_i^{(2)} = \theta_1\sum_{k=1}^{3}\frac{\mu^2}{\rho T}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \ldots,$$

$$\sigma_{ik} = p\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)}, \quad \sigma_{ik}^{(1)} = -2\mu\left\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right\rangle, \quad \sigma_{ik}^{(2)} = \sigma_{ik}^{(T)} + \sigma_{ik}^{(p,v)}; \quad \langle\mathcal{A}_{ik}\rangle \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{ik} + \mathcal{A}_{ki}) - \frac{1}{3}\delta_{ik}\mathcal{A}_{jj}, \tag{13}$$

$$(\sigma_{ik}^{(j)}, q_i^{(j)})_{j=1,2} \sim \mathrm{Kn}^j, \quad \mathrm{Kn} = \frac{\ell_0}{\Lambda_0} = \frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{Ma} = \frac{v_0}{c_0}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_0 v_0 \Lambda_0}{\mu_0},$$

где величины v_0, ℓ_0, Λ_0, μ_0, p_0, ρ_0, T_0, c_0 – соответственно, характерные значения: скорости движения среды, средней длины $\langle\ell\rangle$ свободного пробега молекул (массы m), размера течения, коэффициента сдвиговой вязкости μ, изотропного давления p, плотности среды ρ, температуры среды T и локальной скорости звука в среде c; полагаем, что справедливо уравнение состояния среды $p = p(\rho, T)$ в аналитической табличной форме.

В вышеприведенных формулах из барнеттовских напряжений выделены температурные:

$$\sigma_{ik}^{(T)} = \xi_3\mu^2\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}\right\rangle + \xi_5\frac{\mu^2}{T}\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right\rangle,$$

при этом остальные члены содержат производные от компонентов скорости и давления:

$$\sigma_{ik}^{(p,v)} = \xi_3\mu^2\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right\rangle - \xi_5\mu^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_k} + \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + 2\sum_j\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\rangle\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) + \ldots .$$

Барнеттовские коэффициенты θ_1, $\xi_j \sim O(1)$ предполагаются (ограниченными в изменении) функциями переменных μ, T, μ'_T (в свою очередь, зависящих от вида межмолекулярного взаимодействия).

Поскольку для введенного выше коэффициента первой вязкости имеем $\mu_0 \approx \rho_0 c_0 \lambda_0$, то справедливы следующие оценки:

$$\sigma_{ik}^{(1)} \sim \mathrm{Kn}\rho_0 c_0 v_0, \quad \sigma_{ik}^{(p,v)} \sim \mathrm{Kn}^2\rho_0 v_0^2, \quad q_i^{(1)} \sim \mathrm{Kn}\rho c_0^3,$$

$$\sigma_{ik}^{(T)} \sim \mathrm{Kn}^2\rho_0 c_0^2 \mathfrak{X}, \quad \sigma_{ik}^{(j\geq 3)} \sim \mathrm{Kn}^3\rho_0 c_0 v_0 \mathfrak{X}, \quad q_i^{(2)} \sim \mathrm{Kn}^2\rho c_0^2 v_0,$$

где $\mathfrak{X} \equiv (\delta T)_0/T_0$ – характерное значение относительного перепада температур в среде (например, в трубах или каналах: $(\delta T)_0 = T_{\text{bound}} - T_0$, где в данном случае T_{bound} – усредненная по некоторому отрезку канала температура стенок, T_0 – характерное значение температуры в среднем по сечению течения либо на некотором определенном расстоянии от стенки). Если изменения температуры в течении обусловлены исключительно переходом кинетической энергии движущейся среды в тепловую вследствие диссипативных процессов, то $\mathfrak{X} \ll 1$, и все барнеттовские члены уравнений сохранения малы по сравнению с навье-стоксовскими (соответствующими наличию только первых двух слагаемых в выражениях для σ_{ik} и q_i): их отношение порядка $\mathrm{Kn}^2 \sim \mathfrak{X} \ll 1$ (см. [6]). Однако для $\mathfrak{X} \gtrsim 1$ (данное условие выполняется, например, при контакте жидкости в течении с нагретой до достаточной высокой температуры стенкой канала в упомянутых ранее задачах о теплоотводе и вынужденном охлаждении, см., например, [7]–[9]) уже совершенно неправомерно игнорировать наличие как минимум трех слагаемых в вышеприведенных выражениях для σ_{ik} и q_i. В этом случае *температурные напряжения* $\sigma_{ik}^{(T)}$ могут быть того же порядка величины, что и обычные вязкие напряжения $\sigma_{ik}^{(1)}$, входящие в уравнения Навье–Стокса. Действительно, $\sigma_{ik}^{(T)}/\sigma_{ik}^{(1)} \sim \mathrm{Kn}\,\mathrm{Ma}^{-1}\mathfrak{X} = O(1)$, и малость числа Кнудсена (условие возможности описания течения как движения "сплошной среды" с физической точки зрения и условие формальной применимости метода Чэпмена–Энскога – с математической) может компенсироваться произведением двух последних сомножителей $\mathfrak{X}, \mathrm{Ma}^{-1} \gtrsim 1$ (при этом необходимо учитывать, что характерный размер Λ_0, входящий в определение параметра Кнудсена, должен соответствовать некоторому приграничному слою, а не полному масштабу системы). В то же время (в частности, при рассмотрении критических режимов течения в задачах, связанных с гидродинамикой теплоносителей) справедлива оценка $\sigma_{ik}^{(p,v)}/\sigma_{ik}^{(1)} \sim \mathrm{Kn}\mathrm{Ma} = o(1)$.

Отметим, что понятие "пограничного слоя", в котором сосредоточено основное влияние эффектов учета дополнительных барнеттовских членов в уравнениях гидродинамики, необходимо существенным образом модифицировать: это связано с тем, что уравнения движения в приграничной области не могут быть построены в соответствии с теорией Прандтля из-за наличия интенсивной "термострессовой псевдоконвекции", обусловленной наличием значительного температурного градиента в окрестности нагреваемой стенки. Исключение уравнения для поперечной компоненты скорости (существование которой обусловлено не гравитационными или какими-либо иными внешними силами, а изменением плотности среды при ее контакте с нагревателем, вследствие чего происходит "оттеснение" внешних "холодных" слоев жидкости/газа от источника тепла) в погранслое в барнеттовском приближении невозможно и основное предположение теории Прандтля о том, что давление в нем "...как бы создается внешним течением" (см. [10]) неправомерно. Более того, в рассматриваемом случае неправомерно использование также классической модели конвективного погранслоя (см. [11]): выделение для отдельного рассмотрения пристенного слоя определенной толщины ($\delta > \delta_{\text{Prandtl}} \sim \sqrt{\Lambda_0\mu_0/v_0}$, где Λ_0, μ_0, v_0 – характерные величины течения) в рассматриваемых условиях представляется рациональным только на условиях принятия некоторого априорного критерия ослабления поперечного конвективного движения среды (с характерной скоростью порядка $v_{\text{conv}} \sim \mathfrak{X}^3 v_\mu$, где $v_\mu = \mu_0/(\rho_0\Lambda_0)$ – так называемая вязкая скорость течения).

Приведем расчетные уравнения в приближениях Навье–Стокса и (модифицированного) Барнетта в цилиндрической системе координат:

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho r}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial z} = 0,$$

уравнения переноса импульса и энергии

$$\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho v_r^2 + p)r)}{\partial r} + \frac{\partial\rho v_z v_r r}{\partial z} = p + \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + r\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \sigma_{\varphi\varphi},$$

$$\frac{\partial(\rho v_\varphi r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_\varphi r)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_r v_\varphi r)}{\partial z} = -\rho v_r v_\varphi,$$

$$\frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v_z^2)r}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_z v_r r)}{\partial r}\frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r} + r\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(er)}{\partial t} + \frac{\partial((e + p)v_z r)}{\partial z} + \frac{\partial((e + p)v_r r)}{\partial r} =$$
$$= r\cdot\operatorname{div}(\kappa\cdot\operatorname{grad}T) + \frac{\partial(r(v_r\sigma_{rr} + v_z\sigma_{zr}))}{\partial r} + r\frac{\partial(v_r\sigma_{zr} + v_z\sigma_{zz})}{\partial z}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений равны $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^N + \sigma_{ij}^B$, где первое слагаемое соответствует вязкости уровня приближения Навье–Стокса:

$$\sigma_{rr}^N = 2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3}\nabla\mathbf{v}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi}^N = 2\mu\left(\frac{1}{r}v_r - \frac{1}{3}\nabla\mathbf{v}\right),$$

$$\sigma_{rr}^N = 2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3}\nabla\mathbf{v}\right), \quad \sigma_{zr}^N = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \quad \nabla\mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r},$$

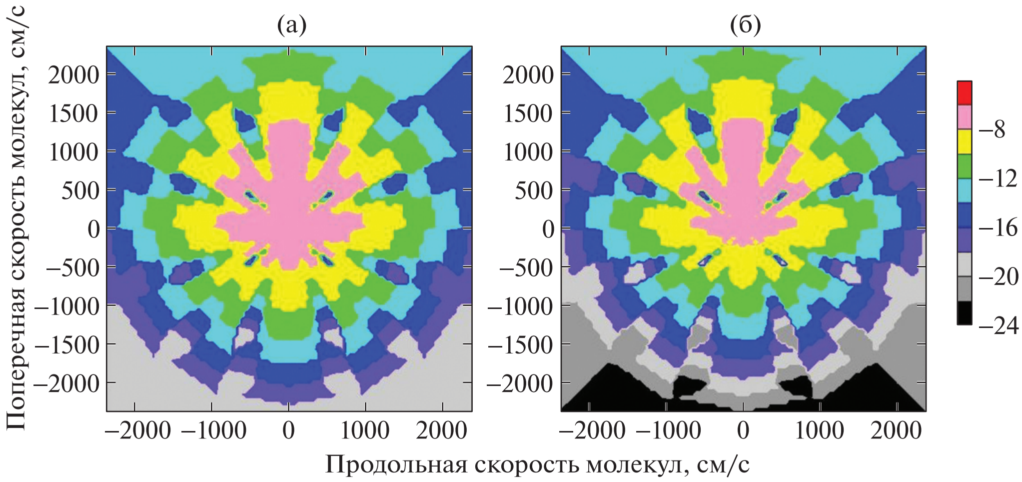
а второе слагаемое соответствует вязкости уровня приближения Барнетта: $\sigma_{ij}^B = (\mu/p)^2\cdot\Phi_{ij}$. Обозначения и размерности переменных в данных формулах следующие: t – время [с], $\mathbf{v} = (v_z, v_r, v_\varphi)$ – скорость течения [м/с], μ – коэффициент вязкости [Па с]. Явный вид тензорных коэффициентов Φ_{ij} приведен в Приложении к монографии [12].

Уравнение баланса импульса при наличии контакта среды с нагревателем, обеспечивающего наличие однородного ($T = T_{\text{bound}} = \text{const}$) или неоднородного ($T = T_{\text{bound}}(\mathbf{x}, t)$) температурного поля, и локальных пристенных значениях $\text{Ma} \lesssim 1$, $\text{Re} \gg 1$ замыкается учетом группы слагаемых $\sigma_{ik}^{(T)}$ во втором приближении для тензора напряжений. Будем полагать для простоты, что $f_i^{(\text{out})} \equiv 0$ (отсутствие внешних массовых сил), коэффициент второй вязкости $\eta \equiv 0$.

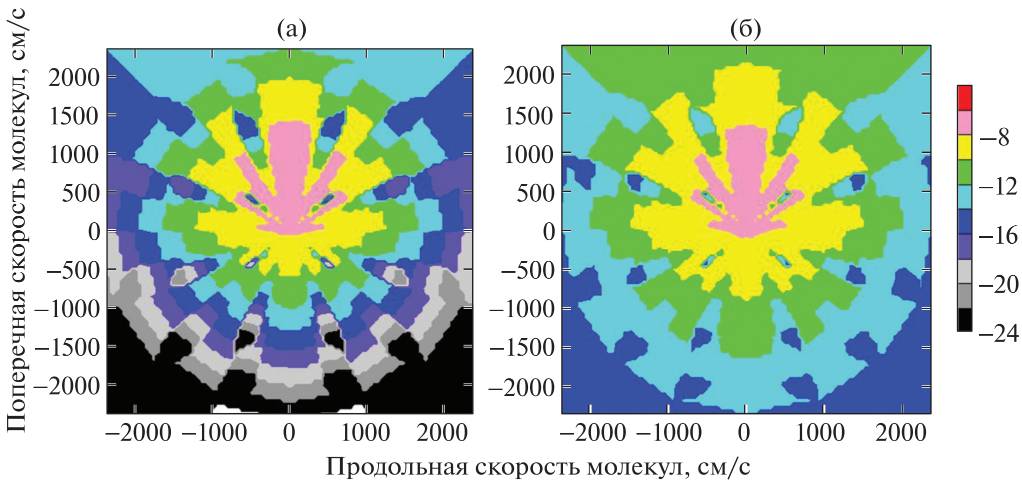
4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ПОЛНОЙ ОБЛАСТИ

Полная расчетная область – круговой цилиндр (труба) длины $x_{\max} = 1$ м и радиуса $R = y_{\max} = 0.005$ м. Внешний нагрев стенок трубы неравномерен и описывается нелинейной функцией с явно выраженным максимумом (см. далее). Расчет во внутренней области осуществляется по газодинамической модели, в погранслое ($0.004994 < r(\equiv y) < 0.005$) – по кинетической модели.

По длине цилиндра (вдоль оси симметрии) 100 ячеек, по радиусу в погранслое 5 ячеек, во внутренней области основного течения 25 ячеек (область 2).



Фиг. 3. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: (а) – для радиуса $r = 4.995$ мм, (б) – для радиуса $r = 4.996$ мм ($z = H/2$).

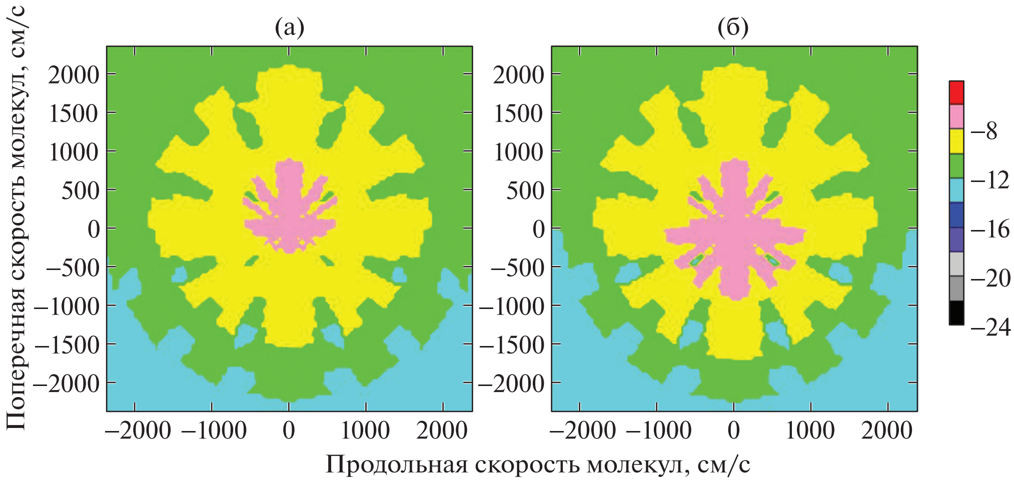


Фиг. 4. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: (а) – для радиуса $r = 4.996$ мм, (б) – для радиуса $r = 4.997$ мм ($z = H/2$).

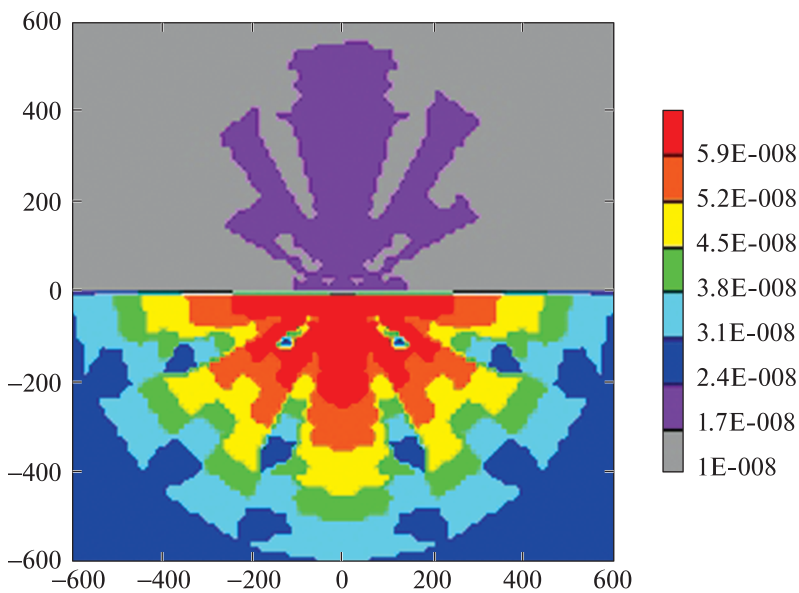
Начальные данные задаются по областям. Продольная скорость u воды в начальный момент времени зависит от радиальной координаты точки и изменяется от $u_0 = 50$ м/с на оси симметрии до нуля на внешней границе $y_{\max}$: $u = u_0[1 - (y/y_{\max})^2]$ (пуазейлевский профиль). Плотности пара придавалось для анализа получаемых расчетных данных два значения: $\rho_0^{(1)} = 10$ кг/м^3 и $\rho_0^{(2)} = 200$ кг/м^3 (последнее значение соответствует состоянию фазового перехода “пар–жидкость”); температура $T_0 = 373 + (673 - 373)\sin^2(\pi x)$ K. Давление оказывается в диапазоне $p_0 = 1.011\times10^5$–2.981×10^6 Па. Во внутренней области основного течения (области гидродинамического расчета, $0 < y < 0.004994$ м) давление линейно зависит от продольной координаты:

$$p = \frac{p_{x,\min}(x_{\max} - x) + p_{x,\max}x}{x_{\max}}, \quad p_{x,\max} = 1.013\times10^5 \text{ Па},$$

$$p_{x,\min} = p_{x,\max} - \Delta p, \quad \Delta p = \frac{4u_0\mu_0}{y_{\max}^2}x_{\max}, \quad \mu_0 = 2.7567\times10^{-4} \text{ Па с}.$$



Фиг. 5. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: (а) – для радиуса $r = 4.998$ мм, (б) – для радиуса $r = 4.999$ мм.



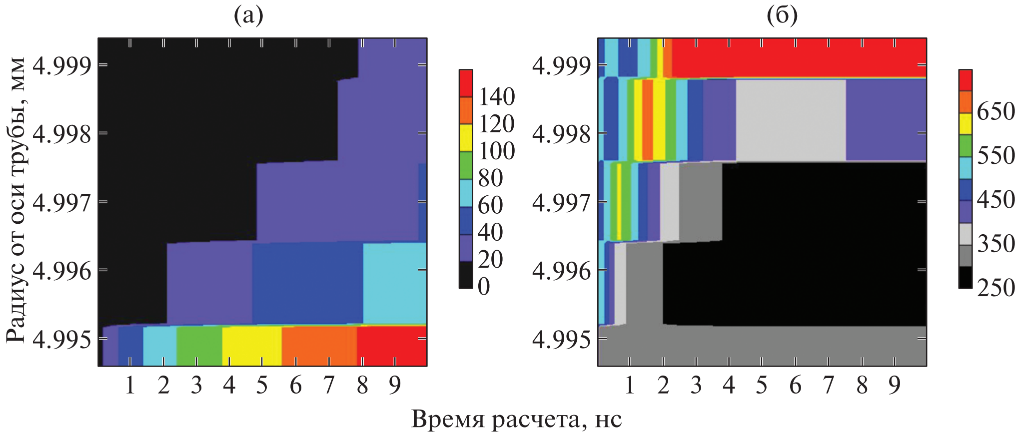
Фиг. 6. Функция распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс (у твердой стенки трубы). По оси абсцисс – продольная (тангенциальная) скорость v_z [см/с], по оси ординат – поперечная (радиальная) скорость v_r [см/с] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.

Начальная температура воды $T_0 = 373$ K, плотность воды $p_0 = 958.457–958.458$ кг/м^3.

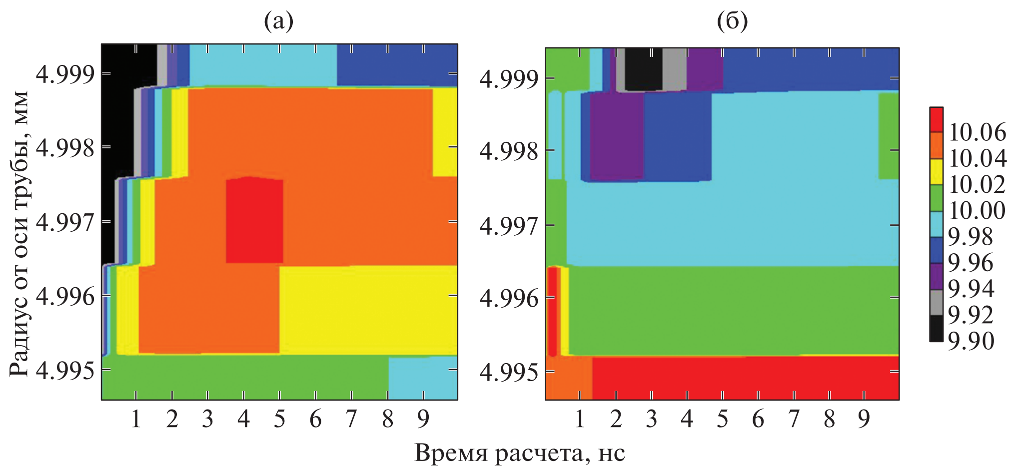
Граничные условия:

1) на внешней границе трубы $r_{\max} = R_0$ задана температура, равная начальной температуре в прилегающей области в соответствии с приведенной выше формулой: $p_{\text{wall}} = 1.011\times10^5$–$2.981\times10^6$ Па. Нормальная и тангенциальная скорости равны нулю;

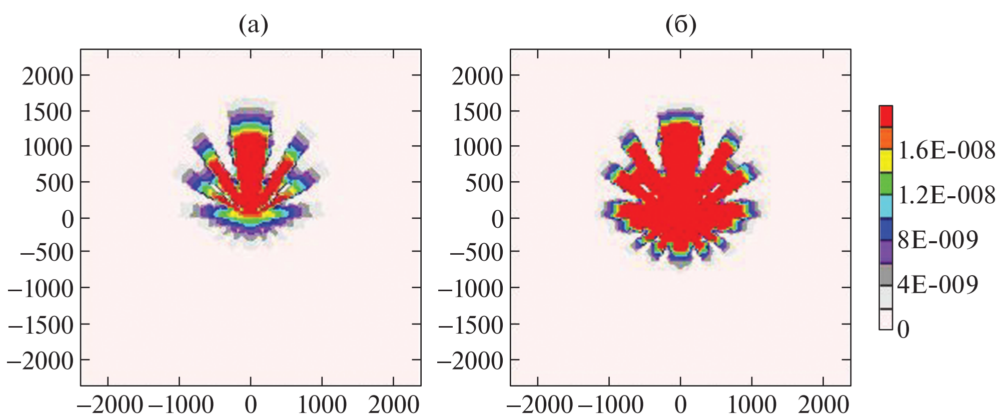
2) на торцевых границах $x = 0$ (для кольцевой области входа в погранслой и круговой области входа в основное течение) заданы параметры входящего потока, примерно равные начальным величинам из прилегающих внутренних ячеек. Продольная граничная скорость для погранслоя задается 0.1 м/с, для внутренней области 50 м/с;



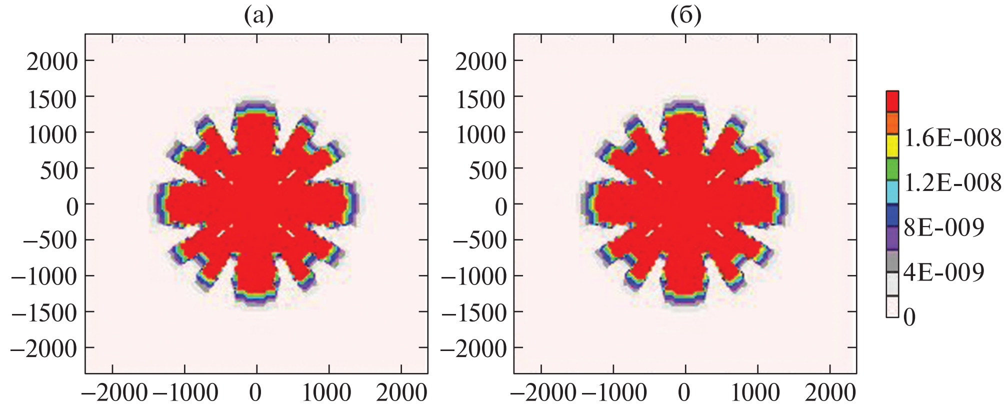
Фиг. 7. (а) – Поперечная (радиальная) скорость v_r [см/с] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, (б) – продольная (тангенциальная) скорость v_z [см/с] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.



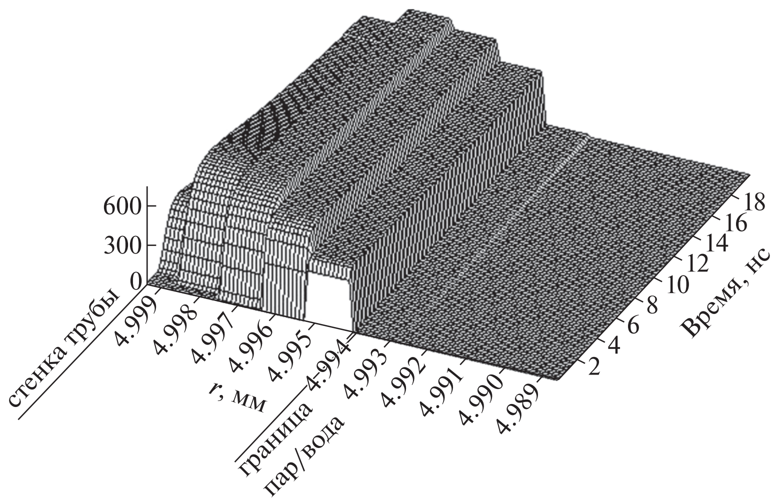
Фиг. 8. (а) – Плотность ρ [кг/м^3] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, (б) – температура [K] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.



Фиг. 9. Функции распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс в кинетическом погранслое: (а) – на расстоянии $0.1\Delta_K$, (б) – на расстоянии $0.9\Delta_K$ от твердой стенки, Δ_K – толщина кнудсеновского погранслоя. Обозначения осей те же, что на фиг. 6.



Фиг. 10. Функции распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс в релаксационном слое: (а) – на расстоянии $0.1\Delta_{\mathrm{Rel}}$, (б) – на расстоянии $0.9\Delta_{\mathrm{Rel}}$ от твердой стенки, $\Delta_{\mathrm{Rel}} = 4\Delta_K$ – толщина релаксационного слоя. Обозначения осей те же, что на фиг. 6.



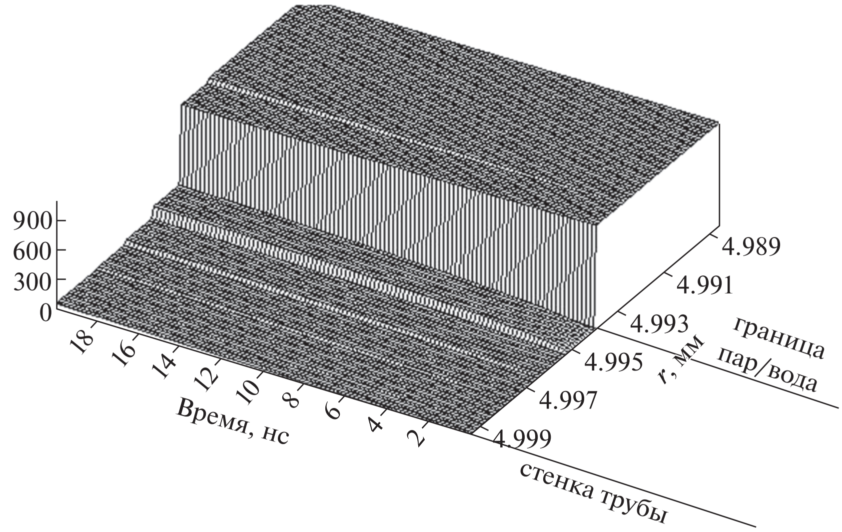
Фиг. 11. Поперечная скорость в кинетическом погранслое v_r [м/с] в среднем по высоте поперечном сечении трубы.

3) на торцевых границах $x = x_{\max}$ заданы "нулевые производные" по нормали от всех газодинамических величин.

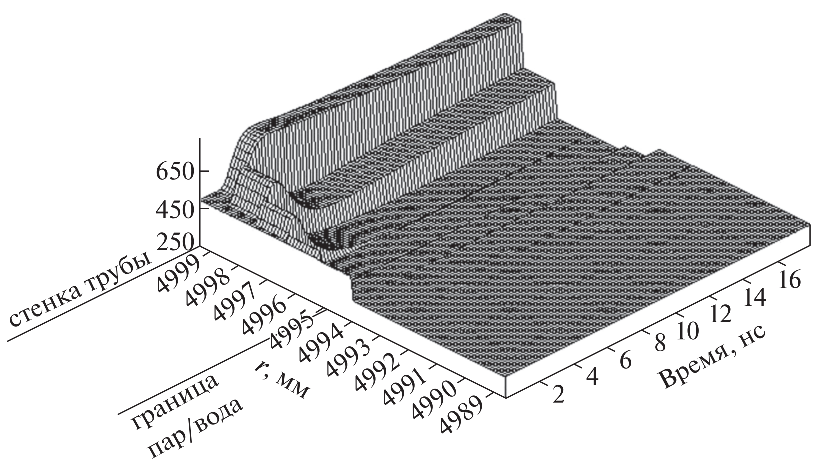
Область погранслоя рассчитывается по уравнению БГК. Внутренняя область – по газодинамической системе (модифицированного Барнетта или Навье–Стокса) с учетом вязкости и теплопроводности. Газодинамическая область разбита на две подобласти на радиусе 0.004988 м, так что толщина дополнительной релаксационной подобласти, прилегающей к погранслою, равна толщине погранслоя и имеет также 5 ячеек по радиусу. В нижней подобласти 25 ячеек по радиусу. Граница между подобластями внутренняя эйлерова, не требующая дополнительных граничных условий. В расчете использовалось уравнение состояния воды из [13].

Более подробно рассмотрим расчеты с начальной плотностью пара $\rho_0^{(2)}$ в погранслое.

На фиг. 3–5 показаны профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области по мере приближения вдоль радиуса к нагреваемой стенке при $t = 10$ нс. Видно существенное увеличение степени анизотропии профиля функции распределения, т.е. отклонения от равнораспределения по скоростям. На фиг. 6 показана функция распределения на стенке, она представляет собой квазимаксвелловское распределение, практически сразу преобразующееся в существенно неоднородное по скоростям (см. фиг. 5).



Фиг. 12. Плотность в кинетическом погранслое ρ [кг/м^3] в среднем по высоте поперечном сечении трубы.



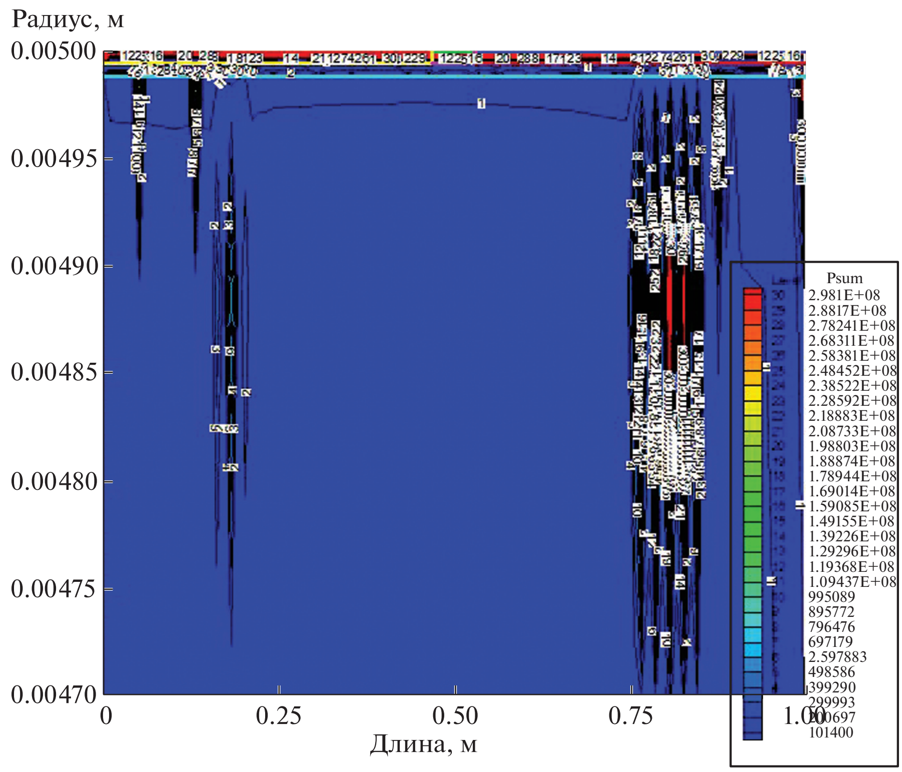
Фиг. 13. Температура в кинетическом погранслое T [K] в среднем по высоте поперечном сечении трубы.

На фиг. 7 показаны профили радиальной и тангенциальной скорости массового течения в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в зависимости от времени. Видно, что радиальная скорость существенно растет со временем у верхнего края кинетического погранслоя, в то время как тангенциальная скорость еще быстрее растет около стенки. На фиг. 8 показаны срезы плотности и температуры в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в зависимости от времени и радиуса. По ним приближенно можно судить о динамике пространственного изменения макропараметров. Зависимость $\rho(r,t)$ можно считать куполовидной, в то время как температура $T(r,t)$ фактически аппроксимируется почти равномерным по времени увеличением температуры слоя, максимально далекого от стенки (чрезвычайно быстрая перекачка энергии через кинетический погранслой).

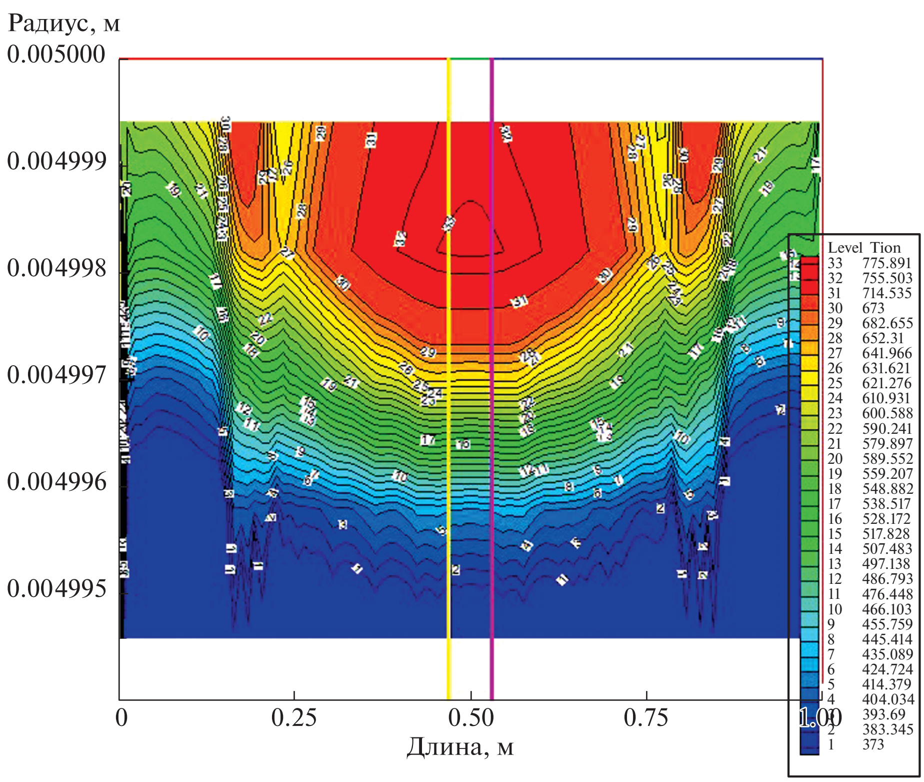
На фиг. 9 и 10 показана изотропизация функций распределения в релаксационном подслое (над кинетическим погранслоем) при переходе к гидродинамической области.

На фиг. 11–13 показана в динамике зависимость радиальной скорости, плотности и температуры (интегральных величин) в погранслое в зависимости от радиуса и времени.

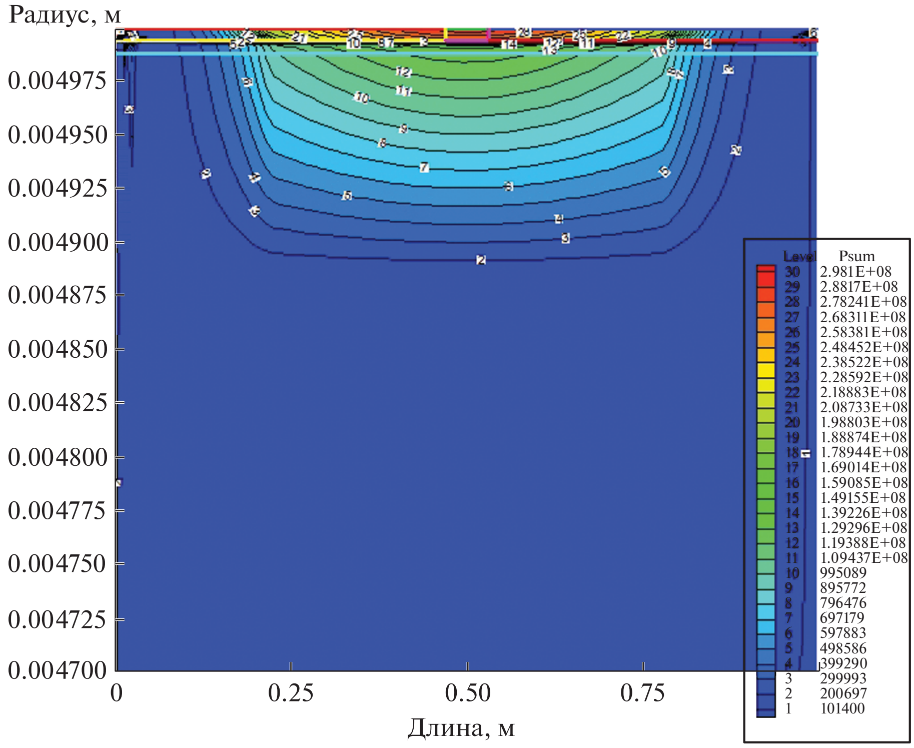
На фиг. 14, 15 и 16, 17 – сравнение давления и температуры в рассчитываемом по гидродинамическим формулам погранслое для случаев приближения Барнетта и для Навье–Стокса.



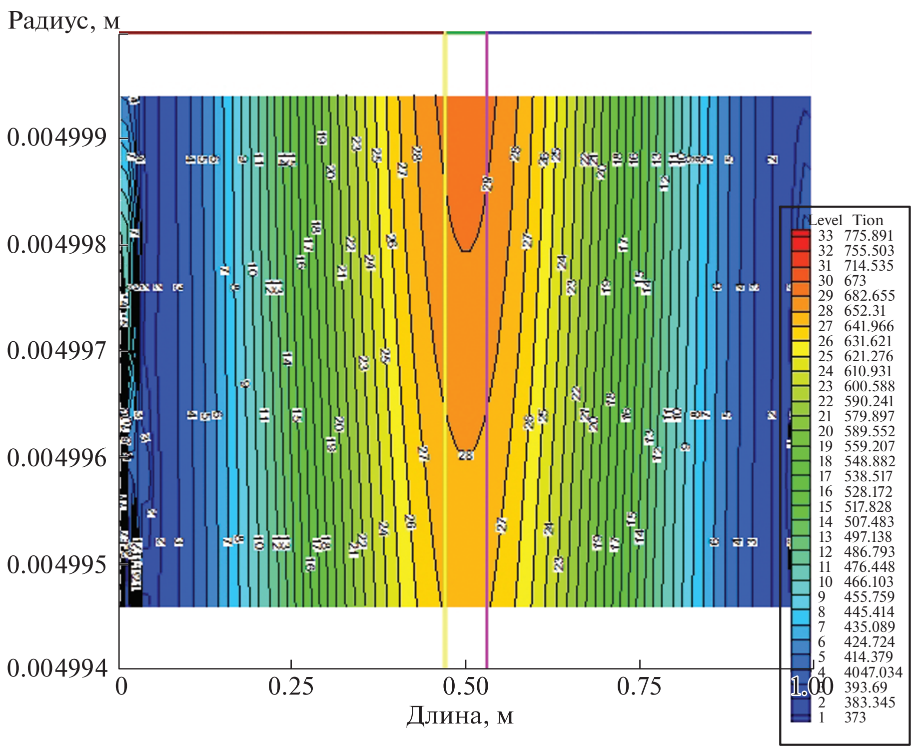
Фиг. 14. Давление в области гидродинамического (модифицированный Барнетт) расчета на время $t_{1000} = 0.806 \times 10^{-8}$ с (1000-й шаг по времени) при начальной плотности среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ кг/м^3.



Фиг. 15. Температура в погранслое на момент времени $t_{1000} = 10^{-8}$ с (при начальной плотности среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ кг/м^3). В основной гидродинамической области – расчет по модифицированному Барнетту.



Фиг. 16. Давление в погранслое на момент времени $t_{1000} = 10^{-8}$ с (начальная плотность среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ кг/м^3).



Фиг. 17. Температура в погранслое на момент времени $t_{1000} = 10^{-8}$ с (начальная плотность среды погранслоя $\rho_0^{(1)} = 10$ кг/м^3).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан и реализован универсальный алгоритм расчета течений в каналах и трубах при наличии значительного теплового потока от стенки, учитывающий возможность введения кинетического расчета в погранслое. Установлено, что течение в погранслое существенно зависит от формы уравнения среды в основной области расчета и метода учета вязкости там же. При этом успешно внедрен программный подход перехода от области кинетических расчетов по БГК-методике к области гидродинамических расчетов по модифицированному Барнетту или по Навье–Стоксу. Полученная реализация сочетания гидродинамических расчетов в основной области и погранслое основана на введении релаксационной подобласти, размер которой зависит от размеров погранслоя и степени различия квазимаксвелловских граничных условий и формы функции внешнего нагрева стенки. Изменение начальных условий для плотности и температуры погранслоя в достаточно широком диапазоне величин (до порядка) не выявили изменений кинетики в слое и возможности его сочетаемости с гидродинамической областью. Было высказано предположение о частичном несовпадении термодинамических величин канонического ансамбля жидкости и микроканонического ансамбля в погранслое (связанное с появлением вихревых структур и фазовым переходом в жидкости). В расчетах это предположение явного подтверждения не нашло, хотя тенденции были намечены – для точных заключений требуется продолжение расчетов на существенно большие времена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas // Proc. Lond. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 382–435.
2. *Chapman S., Cowling T.G.* The mathematical theory of non–uniform gases. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1970.
3. *Enskog D.* The numerical calculation of phenomena in fairly dense gases // Arkiv Mat. Astr. Fys. 1921. T. 16. P. 1–60.
4. *Chapman S.* On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory of viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monatomic gas // Phil. Trans. R. Soc. A. 1916. V. 216. P. 279–348.
5. *Chapman S.* On the kinetic theory of a gas. Part II: A composite monatomic gas: diffusion, viscosity, and thermal conduction // Phil. Trans. R. Soc. A. 1918. V. 217. P. 115–197.
6. *Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлендер О.Г.* О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1970. № 2. С. 13–21.
7. *Кузнецов Ю.Н.* Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1989.
8. *Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А.* Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Атомиздат, 1974.
9. *Стырикович М.А., Полонский В.С., Циклаури Г.В.* Тепломассообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций. М.: Наука, 1982.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
11. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Николаева О.В., Забродина Е.А., Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.* Гидродинамические течения в нагреваемых трубах. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2020.
13. Revised Release on the IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use. The International Association for the Properties of Water and Steam (President: Professor Tamara Petrova. Moscow, Russia, 2014).