

СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 12, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Интегральная характеристическая функция нелинейной задачи Штурма–Лиувилля
Д. В. Валовик, Г. В. Чалышов 1589
- Спектральный признак экспоненциальной устойчивости
А. И. Перов, И. Д. Коструб 1599
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Задача протекания для уравнений Навье–Стокса–Фойгта
Е. С. Барановский 1604
- Обратная задача для уравнения парабола-гиперболического типа по нахождению множителя правой части, зависящего от пространственных переменных
С. Н. Сидоров 1610
- О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами
К. Д. Федоров 1623
- Третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка
Ф. Г. Хуштова 1635
- О мультипликативных возмущениях абстрактных вырожденных уравнений с дробными производными
Б. Чаучи, В. Е. Федоров, М. Костич 1644
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Нелинейные уравнения Вольтерры с нагрузками и бифуркационными параметрами: теоремы существования и построение решений
Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров 1654
-

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

- Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений соболевского типа дробного порядка
М. Х. Бештоков 1665
- Численное моделирование задач экранирования импульсных электромагнитных полей экранами из пермаллоя
В. Т. Ерофеев, Г. Ф. Громыко, Г. М. Заяц 1682
- Обратная задача оптимизации для одного класса дискретных 2D систем
Г. А. Курина 1698
- Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата
А. Б. Утесов, А. А. Базарханова 1705
-

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя с квадратом спектрального параметра
в граничном условии

Е. И. Моисеев, Т. Е. Моисеев, Н. Ю. Капустин

1715

Авторский указатель тома 57, 2021

1719

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926.4+517.927.25

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ
НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

© 2021 г. Д. В. Валовик, Г. В. Чалышов

Предложен новый подход к изучению нелинейных по спектральному параметру задач Штурма–Лиувилля. Он основывается на введении связанной с изучаемой задачей трансцендентной функции, названной интегральной характеристической функцией и определяющей собственные значения рассматриваемой задачи Штурма–Лиувилля. Исследование этой функции позволяет доказать разрешимость задачи, найти асимптотику собственных значений, получить теоремы сравнения, ввести естественную нумерацию собственных значений и нулей собственных функций. С помощью предложенного подхода изучена нелинейная задача Штурма–Лиувилля на отрезке с краевыми условиями первого рода.

DOI: 10.31857/S0374064121120013

1. Постановка задачи и вводные замечания. Рассмотрим уравнение

$$(P(x, \lambda)y'(x))' + Q(x, \lambda)y(x) = 0, \quad (1.1)$$

где λ – спектральный параметр $\lambda \in \Lambda := [b, +\infty)$, b – вещественная постоянная, $\bar{x} = [0, a]$, $1 < a < \infty$. Функции P и Q предполагаются непрерывными по совокупности переменных $(x, \lambda) \in \bar{x} \times \Lambda$, а P ещё и однократно непрерывно дифференцируемой по x при $x \in \bar{x}$; кроме того $P(x, \lambda) > 0$ и $Q(x, \lambda) > 0$ при $(x, \lambda) \in \bar{x} \times \Lambda$.

Задачей $\mathcal{P}$ назовём задачу определения тех (собственных) значений параметра λ , при которых существует нетривиальное классическое решение $y \equiv y(x; \lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0; \lambda) = 0, \quad y(1; \lambda) = 0. \quad (1.2)$$

При изучении разрешимости задачи $\mathcal{P}$ будут введены дополнительные ограничения (по второму аргументу), которым должны удовлетворять функции P и Q (см. п. 2.2). Отметим, что в рамках излагаемого ниже подхода можно изучать задачу $\mathcal{P}$ и в том случае, когда аргумент λ коэффициентов P и Q принадлежит ограниченному множеству, а сами коэффициенты не обязательно всюду непрерывны по λ . Также можно рассмотреть случай, когда функции P и/или Q обращаются в нуль в некоторых точках своей области определения.

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения (1.1) изучалась многими авторами, укажем здесь работы [1–6]. Отметим, что в нашем рассмотрении условия на коэффициенты P и Q уравнения являются менее ограничительными, чем используемые в [1].

Задачи Штурма–Лиувилля, коэффициенты или краевые условия в которых зависят от спектрального параметра, в том числе нелинейно, возникают в различных вопросах как чистой, так и прикладной математики и поэтому активно исследуются (см., например, работы [2, 7–17] и приведённую в них библиографию). Интерес для исследователей представляют свойства собственных значений и собственных функций, в частности, вопросы, связанные с базисностью собственных функций [6, 18–20] таких задач.

Один из способов исследования задачи Штурма–Лиувилля основывается на изучении отвечающей ей характеристической функции, которая определяется следующим образом. Рассмотрим семейство тех решений уравнения (1.1), для которых выполняется только условие задачи Штурма–Лиувилля при $x = 0$. Обозначим это семейство снова через $y(x; \lambda)$, не отмечая его зависимости ещё от одного вещественного параметра – значения производной решения при $x = 0$. Тогда, требуя, чтобы для решений этого семейства выполнялось ещё и

условие задачи Штурма–Лиувилля при $x = 1$, получаем уравнение $y(1; \lambda) = 0$ относительно спектрального параметра λ ; очевидно, что множество нулей этого уравнения совпадает с множеством собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Такое уравнение в теории задач Штурма–Лиувилля называется *характеристическим уравнением*, а его левая часть – *характеристической функцией* (параметра λ) [21, с. 31].

В настоящей работе мы также используем для уравнения (1.1) решение $y(x; \lambda)$ вспомогательной задачи Коши (см. задачу (2.2) ниже) для построения функции относительно спектрального параметра λ , нули которой и только они являются собственными значениями исследуемой задачи Штурма–Лиувилля. Другими словами, построенная таким образом функция имеет смысл характеристической функции. В связи с тем, что она задаётся в виде интеграла от некоторого выражения, её естественно называть *интегральной характеристической функцией* (ИХФ). Приравняв к нулю ИХФ, получаем уравнение относительно λ , которое будем называть *интегральным характеристическим уравнением* (ИХУ). Оказывается, что с помощью элементарных оценок можно получить результаты о разрешимости ИХУ, а следовательно, и результаты о разрешимости исследуемой задачи и свойствах собственных значений и собственных функций. Подчеркнём, что предлагаемый здесь подход, по-видимому, является новым, в частности, в нём не используется ни анализ функции Грина [16], ни теория целых функций, которая обычно применяется для исследования характеристической функции $y(1; \lambda)$ [21, 22].

2. Основные результаты. Собственные значения задачи $\mathcal{P}$ будем обозначать как $\tilde{\lambda}_n$, так и $\tilde{\lambda}$, где $n \in \mathbb{Z}_+$ – индекс, равный числу нулей соответствующей собственной функции $y \equiv y(x; \tilde{\lambda}_n)$ при $x \in (0, 1)$. Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$ предполагаются упорядоченными по возрастанию.

Из свойств функций $P(x, \lambda)$ и $Q(x, \lambda)$ следует, что

$$0 < p_-(\lambda) \leq P(x, \lambda) \leq p_+(\lambda), \quad 0 < q_-(\lambda) \leq Q(x, \lambda) \leq q_+(\lambda), \quad (2.1)$$

где

$$p_-(\lambda) = \min_{x \in \bar{x}} P(x, \lambda), \quad q_-(\lambda) = \min_{x \in \bar{x}} Q(x, \lambda) \quad \text{и} \quad p_+(\lambda) = \max_{x \in \bar{x}} P(x, \lambda), \quad q_+(\lambda) = \max_{x \in \bar{x}} Q(x, \lambda).$$

Обозначим через $y \equiv y(x; \lambda)$, где $x \in \bar{x}$, решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными данными

$$y(0; \lambda) = 0, \quad y'(0; \lambda) = 1. \quad (2.2)$$

Известно, что задача Коши (1.1), (2.2) глобально однозначно разрешима [22, с. 12; 23, с. 62].

2.1. Интегральное характеристическое уравнение задачи $\mathcal{P}$. Пусть при некотором $\lambda \in \Lambda$ решение $y \equiv y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) имеет ровно $n + 1$ нуль $x_1, \dots, x_{n+1} \in x$, где $x = (0, a]$, и $0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq a$. Число n и точки x_i , вообще говоря, зависят от λ . Так как $y(x; \lambda) \not\equiv 0$, то $y'(x_i; \lambda) \neq 0$ при $i = \overline{0, n+1}$, где $x_0 = 0$.

Пусть $x_i := (x_i, x_{i+1})$, где $i = \overline{0, n}$, а $x_0 = 0$. При $x \in \bigcup_{i=0}^n x_i$ существует и непрерывна функция

$$\eta(x; \lambda) = \frac{P(x, \lambda)y'(x; \lambda)}{y(x; \lambda)}.$$

Принимая во внимание уравнение (1.1), несложно убедиться, что для функции η имеет место равенство

$$\eta' = -w(\eta, x; \lambda), \quad (2.3)$$

в котором $w(\eta, x; \lambda) = Q(x, \lambda) + \eta^2/P(x, \lambda)$ при $x \in \bigcup_{i=0}^n x_i$.

Замечание. Равенство (2.3) представляет собой относительно η уравнение Риккати, которое часто используется в теории задач Штурма–Лиувилля [23, с. 392; 24, с. 243] (см. также [1, с. 193]).

Из условий $P(x, \lambda) > 0$, $Q(x, \lambda) > 0$ при $(x, \lambda) \in \bar{x} \times \Lambda$ вытекает неравенство

$$w(x, \eta; \lambda) > 0 \quad (2.4)$$

при $(x, \eta, \lambda) \in \bar{x} \times \mathbb{R} \times \Lambda$.

Из соотношений (2.3) и (2.4) следует, что $\eta' < 0$, а значит, функция $\eta \equiv \eta(x; \lambda)$, определённая при $x \in \bigcup_{i=0}^n x_i$, монотонно убывает на каждом интервале x_i . Тогда очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \eta(x; \lambda) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_i \pm 0} \eta(x; \lambda) = \pm\infty, \quad i = \overline{1, n}; \quad \lim_{x \rightarrow x_{n+1}-0} \eta(x; \lambda) = -\infty. \quad (2.5)$$

Отсюда вытекает, что существуют непрерывные биекции $g_i : \mathbb{R} \rightarrow x_i$ ($\eta \mapsto x$) при $i = \overline{0, n}$ (рисунок). Другими словами, определены положительные монотонно убывающие непрерывные функции $x = g_i(\eta; \lambda)$, где $\eta \in \mathbb{R}$, а $x \in x_i$. Отметим, что последнее соотношение в (2.5) имеет место только при условии, что рассматриваемое решение $y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) обращается в нуль при $x = x_{n+1}$. Если это не так, то, во-первых, указанный предел является некоторой функцией от λ (которая обращается в $-\infty$, когда $y(x; \lambda)|_{x=x_{n+1}} = 0$), а во-вторых, область определения отображения g_n , вообще говоря, отлична от $\mathbb{R}$ (и совпадает с $\mathbb{R}$, когда $y(x; \lambda)|_{x=x_{n+1}} = 0$).

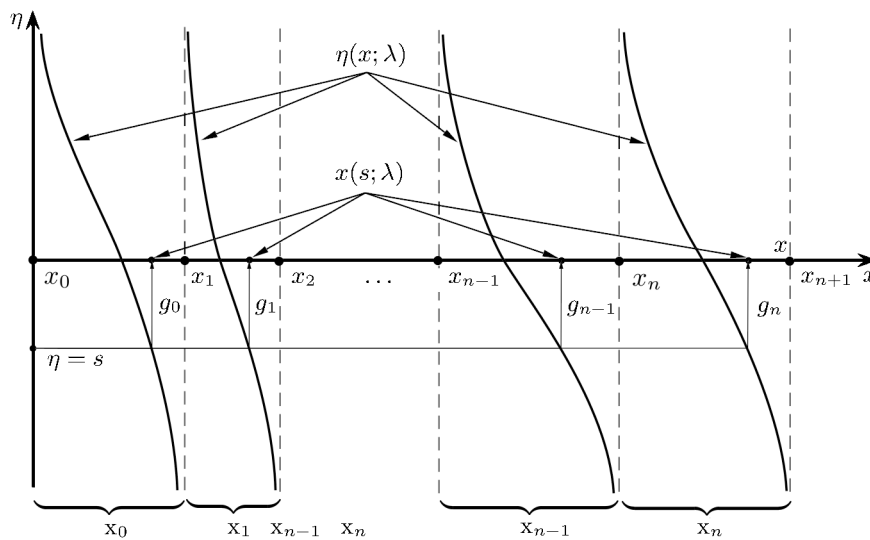


Рисунок. Функция $\eta(x; \lambda)$ и отображения g_i .

Проведённые рассуждения позволяют для каждого $i = \overline{0, n}$ корректно определить выражение

$$T_i(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)}, \quad (2.6)$$

где $\varsigma_i(v; \lambda) = Q(g_i(v; \lambda); \lambda) + v^2/P(g_i(v; \lambda); \lambda)$ при $v \in \mathbb{R}$. Сразу отметим, что функция $T_i(\lambda)$ определена только для тех λ , при которых решение $y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) имеет не менее $i+2$ нулей в $\bar{x}$ (множество таких λ обозначим через Λ_i). Если указанное выше решение $y(x; \lambda)$ обращается в нуль в $\bar{x}$ меньше, чем $i+2$ раз, то функция $T_i(\lambda)$ не определена.

Зададим функцию

$$\Phi(\lambda; n) := \sum_{i=0}^n T_i(\lambda). \quad (2.7)$$

Как отмечено выше, областью определения функции Φ является множество $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}_+} (\Lambda_j \times \{j\})$.

Важнейшим результатом является

Теорема 1 (об эквивалентности). Число $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ является собственным значением задачи P , если и только если найдётся $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $\lambda = \tilde{\lambda}$ при $n = \tilde{n}$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\lambda; n) - 1 = 0. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) представляет собой семейство уравнений относительно λ при различных $n = 0, 1, \dots$; также (2.8) можно трактовать как одно уравнение (относительно λ), зависящее от параметра n . Уравнение (2.8) назовём ИХУ задачи $\mathcal{P}$, а функцию $\Phi(\lambda; n) - 1$ – ИХФ этой задачи.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть $\lambda = \tilde{\lambda}$ – решение уравнения (2.8) при $n = \tilde{n}$. Тогда при $\lambda = \tilde{\lambda}$ решение $y \equiv y(x; \tilde{\lambda})$ задачи Коши (1.1), (2.2) удовлетворяет краевым условиям (1.2) и имеет $\tilde{n}+2$ простых (кратности 1) нуля $x_j \in [0, 1]$, $j = \overline{0, \tilde{n}+1}$.

Если $\tilde{n} \geq 1$, то $x_j = \Phi(\tilde{\lambda}; j-1)$, где $1 \leq j \leq \tilde{n}$.

Отсюда получаем, что расстояние между двумя последовательными нулями x_i и x_{i+1} собственной функции $y(x; \tilde{\lambda})$ определяется формулой

$$x_{i+1} - x_i = \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \tilde{\lambda})}.$$

Вопрос о нахождении верхней и нижней оценок расстояния между последовательными нулями решения уравнения второго порядка является классическим [25, с. 122, 138]. Верхняя и нижняя оценки для приведённого выше интеграла $\int_{\mathbb{R}}$ являются соответственно верхней и нижней оценками для указанного расстояния, которые согласуются с известным результатом из монографии [25, с. 138].

Введённое выше обозначение $\tilde{\lambda}_n$ для собственных значений задачи $\mathcal{P}$ связывает номер n собственного значения $\tilde{\lambda}_n$ с числом нулей соответствующей собственной функции $y_n \equiv y(x; \tilde{\lambda}_n)$, лежащих внутри интервала $x = (0, 1)$. Другими словами, индекс n в обозначении собственного значения $\tilde{\lambda}_n$ означает, что пара $(\tilde{\lambda}_n, n)$ является решением уравнения (2.8). Заметим, что поскольку уравнение (2.8) содержит $n+1$ слагаемое, то очевидно, что оценки для $\tilde{\lambda}_n$ будут выражаться через функции от $(n+1)$ -го аргумента; приведение таких оценок к стандартному виду, когда оценка для $\tilde{\lambda}_n$ выражается через функцию от аргумента n , достижимо при изменении нумерации.

Если уравнение (2.8) при одном и том же значении $n = \tilde{n}$ имеет $k > 1$ различных решений $\lambda = \tilde{\lambda}$, то во избежание путаницы достаточно эти решения снабдить ещё одним индексом, например, $\tilde{\lambda}_{\tilde{n},1}, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{n},k}$, где для определённости перечисленные решения упорядочены по возрастанию. В дальнейшем мы не будем акцентировать на этом внимание.

Так как линейное уравнение (1.1) при данном λ имеет не более двух линейно независимых решений, то отсюда следует, что совокупность всех собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, является конечномерным векторным пространством размерности, не большей двух. Размерность этого пространства совпадает с наибольшим числом линейно независимых решений краевой задачи (1.1), (1.2) при данном собственном значении $\lambda = \tilde{\lambda}$; это число называется *кратностью* собственного значения [22], а собственное значение кратности 1 – *простым собственным значением*.

Справедливо

Утверждение 1. Всякое собственное значение $\tilde{\lambda}$ задачи $\mathcal{P}$ является простым.

Полезным будет

Утверждение 2. Если функция $T_i(\lambda)$ определена, то она является положительной и непрерывно зависит от $\lambda \in \Lambda_i$.

Разрешимость уравнения (2.8) позволяет сформулировать

Утверждение 3. Для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ при $\lambda \in \Lambda_i \neq \emptyset$ справедливы оценки

$$\pi \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leq T_i(\lambda) \leq \pi \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}}. \quad (2.9)$$

Из утверждения 3 и определения (2.7) элементарно вытекает

Следствие 2. Для $\lambda \in \Lambda_n \neq \emptyset$ имеет место двусторонняя оценка

$$\pi(n+1) \frac{\sqrt{p_-(\lambda)}}{\sqrt{q_+(\lambda)}} \leq \Phi(\lambda; n) \leq \pi(n+1) \frac{\sqrt{p_+(\lambda)}}{\sqrt{q_-(\lambda)}}. \quad (2.10)$$

Оценки (2.9) и (2.10) являются основным инструментом при исследовании разрешимости уравнения (2.8) и доказательстве существования собственных значений задачи $\mathcal{P}$.

2.2. Существование собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Чтобы получить содержательные результаты о разрешимости уравнения (2.8), а следовательно, и задачи $\mathcal{P}$, необходимо наложить дополнительные ограничения на функции P и Q . Естественно получить условия, из которых будет следовать существование бесконечного числа собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Некоторые из возможных условий такого рода указаны в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. Если

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = 0, \quad (2.11)$$

то найдётся такое $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, что уравнение (2.8) имеет не меньше одного решения $\lambda = \tilde{\lambda}_n \in \Lambda$ для каждого $n = n_0, n_0 + 1, \dots$; при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n = +\infty$ и Λ_i являются неограниченными множествами для всех $i \in \mathbb{Z}_+$.

Из теоремы 2 очевидно вытекает

Следствие 3 (теорема I о разрешимости). Если выполняется условие (2.11), то задача $\mathcal{P}$ имеет бесконечное число собственных значений $\tilde{\lambda}_n$ с точкой накопления на бесконечности.

Теорема 3. Пусть для достаточно больших λ справедливы оценки

$$\frac{p_-(\lambda)}{q_+(\lambda)} = O(\lambda^{-2c_1}) \quad \text{и} \quad \frac{p_+(\lambda)}{q_-(\lambda)} = O(\lambda^{-2c_2}), \quad (2.12)$$

где c_1, c_2 – положительные вещественные постоянные, $c_1 \geq c_2$, и без потери общности предполагается, что коэффициенты первых членов асимптотик в (2.12) равны единице. Тогда найдётся такое $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, что уравнение (2.8) имеет не меньше одного решения $\lambda = \tilde{\lambda} \in \Lambda$ для каждого $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ и для достаточно больших λ справедливы неравенства

$$(\pi n)^{1/c_1} - \Delta \leq \tilde{\lambda}_{n-1} \leq (\pi n)^{1/c_2} + \Delta, \quad (2.13)$$

где $\Delta > 0$ – постоянная. Если же $c_1 = c_2 = c > 0$, то

$$\tilde{\lambda}_{n-1} = O(n^{1/c}), \quad (2.14)$$

где коэффициент при главном члене асимптотики (2.14) равен $\pi^{1/c}$.

В силу теорем 2 и 3 получаем

Следствие 4 (теорема II о разрешимости). Если выполняются условия (2.11) и (2.12), то задача $\mathcal{P}$ имеет бесконечное число собственных значений $\tilde{\lambda}_n$ с точкой накопления на бесконечности; при этом для достаточно больших номеров n справедливы оценка (2.13) и, если $c_1 = c_2 = c > 0$, оценка (2.14).

Исследование асимптотического поведения собственных значений задачи Штурма–Лиувилля является классической задачей спектральной теории (см., например, [1, с. 204; 21, с. 35; 22, с. 52; 26 с. 12]). Следствие 4 содержит результат об асимптотическом поведении собственных значений задачи $\mathcal{P}$. Техника получения оценок (2.13) и (2.14) позволяет устанавливать аналогичные оценки и в случае других свойств функций P и Q .

2.3. Сравнение собственных значений задач типа $\mathcal{P}$. Рассмотрим две задачи типа $\mathcal{P}$, которые обозначим $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$. Все величины, входящие в постановку этих задач, имеют те же свойства, что и аналогичные величины в задаче $\mathcal{P}$ (см. п. 1); буквенные обозначения используемых величин те же, что и в задаче $\mathcal{P}$, но дополнены верхним индексом 1 или 2 соответственно.

Итак, пусть $\Phi^1(\lambda; n) - 1 = 0$ и $\Phi^2(\lambda; m) - 1 = 0$ – ИХУ задач $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ соответственно. Как и в п. 2, обозначим

$$p_+^i(\lambda) = \max_{x \in \bar{x}} P^i(x, \lambda), \quad q_-^i(\lambda) = \min_{x \in \bar{x}} Q^i(x, \lambda), \quad i = 1, 2,$$

$$p_-^i(\lambda) = \min_{x \in \bar{x}} P^i(x, \lambda), \quad q_+^i(\lambda) = \max_{x \in \bar{x}} Q^i(x, \lambda), \quad i = 1, 2,$$

где P^1 , Q^1 и P^2 , Q^2 – коэффициенты задач $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ соответственно.

Имеет место

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_+^1(\lambda)}{q_-^1(\lambda)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{p_+^2(\lambda)}{q_-^2(\lambda)} = 0 \quad (2.15)$$

и, кроме того, при больших λ справедливо неравенство

$$\frac{p_+^1(\lambda)}{q_-^1(\lambda)} \leq \frac{p_+^2(\lambda)}{q_+^2(\lambda)}. \quad (2.16)$$

Тогда каждое из уравнений $\Phi^1(\lambda; n) - 1 = 0$ и $\Phi^2(\lambda; m) - 1 = 0$ имеет бесконечное число решений $\tilde{\lambda}_{n_0}^1$, $\tilde{\lambda}_{n_0+1}^1$, $\dots$ и $\tilde{\lambda}_{n_0}^2$, $\tilde{\lambda}_{n_0+1}^2$, $\dots$ соответственно, где n_0^1 и n_0^2 – некоторые целые неотрицательные числа; при этом для достаточно больших номеров n справедливо неравенство

$$\tilde{\lambda}_n^1 \leq \tilde{\lambda}_n^2, \quad (2.17)$$

которое переходит в строгое неравенство, если неравенство (2.16) строгое.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 5 (теорема сравнения). Если выполнены условия теоремы 4, то каждая из задач $\mathcal{P}^1$ и $\mathcal{P}^2$ имеет бесконечное число собственных значений $\{\tilde{\lambda}_n^1\}_{n=n_0^1}^{+\infty}$ и $\{\tilde{\lambda}_n^2\}_{n=n_0^2}^{+\infty}$; при этом для всех достаточно больших номеров n собственные значения $\tilde{\lambda}_n^1$ задачи $\mathcal{P}^1$ и $\tilde{\lambda}_n^2$ задачи $\mathcal{P}^2$ удовлетворяют неравенству (2.17), которое переходит в строгое неравенство, если неравенство (2.16) является строгим.

3. Доказательства.

3.1. Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть число λ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$, т.е. решение $y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) является собственной функцией задачи $\mathcal{P}$. Пусть это решение имеет n нулей $x_1, \dots, x_n$ на интервале $(0, 1)$. По решению $y(x; \lambda)$ построим, как в п. 2.1, функцию $\eta = \eta(x; \lambda)$, определённую на $\bigcup_{i=0}^n x_i$.

Используя отображения g_i и заданные с их помощью непрерывные при $\eta \in \mathbb{R}$ функции $P(g_i(\eta; \lambda); \lambda)$ и $Q(g_i(\eta; \lambda); \lambda)$, заключаем, что функция $\eta = \eta(x; \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\eta' = -\varsigma_i(\eta; \lambda), \quad (3.1)$$

правая часть которого определена после равенства (2.6).

Очевидно, что справедливы соотношения

$$\eta(x_j \pm 0; \lambda) = \pm\infty, \quad j = \overline{0, n+1}. \quad (3.2)$$

Интегрируя автономное уравнение (3.1) на интервале x_i , где $i = \overline{0, n}$, и учитывая, что функция $\eta = \eta(x; \lambda)$ является решением этого уравнения, получаем равенство

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\eta(x; \lambda)}{\varsigma_i(\eta(x; \lambda); \lambda)} = \int_{\alpha}^{\beta} dx, \quad (3.3)$$

справедливое для любых $\alpha, \beta \in x_i$. Сделав в определённом интеграле в левой части равенства (3.3) замену переменной $v = \eta(x; \lambda)$, будем иметь

$$- \int_{\eta(\alpha; \lambda)}^{\eta(\beta; \lambda)} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)} = \beta - \alpha.$$

Устремляя в этом равенстве α к $x_i + 0$ и β к $x_{i+1} - 0$, получаем, учитывая соотношения (3.2), равенство

$$- \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)} = x_{i+1} - x_i, \quad (3.4)$$

где $i = \overline{0, n}$. Так как правые части равенств (3.4) конечны, то конечны и их левые части. Отсюда следует сходимость всех несобственных интегралов. Почленно суммируя равенства (3.4) по $i = \overline{0, n}$, приходим к соотношению

$$\Phi(\lambda; n) \equiv \sum_{i=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)} = x_{n+1}. \quad (3.5)$$

Так как $y(x; \lambda)$ – собственная функция задачи $\mathcal{P}$, то в рассматриваемом случае $x_{n+1} = 1$, а следовательно, $\Phi(\lambda; n) - 1 = 0$. Заметим, что в общем случае, т.е. когда решение $y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) не обязательно является собственной функцией задачи $\mathcal{P}$, $x_{n+1} \leq a$.

Из проведённых рассуждений следует, что всякое решение (собственное значение) задачи $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению (2.8) при некотором $n = \tilde{n}$.

Достаточность. Пусть $\tilde{\lambda}$ – решение уравнения (2.8) при $n = \tilde{n}$. Так как имеет место равенство $\Phi(\tilde{\lambda}; n) - 1 = 0$, то это означает, что в силу (3.5) решение $y(x; \tilde{\lambda})$ задачи Коши (1.1), (2.2) удовлетворяет равенству $y(1; \tilde{\lambda}) = 0$ и что число нулей функции $y(x; \tilde{\lambda})$ на интервале $(0, 1)$ равно в точности $\tilde{n}$. Равенство $y(1; \tilde{\lambda}) = 0$ для решения задачи Коши (1.1), (2.2) равносильно тому, что $\tilde{\lambda}$ – собственное значение задачи $\mathcal{P}$. Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство следствия 1. То, что функция $y(x; \tilde{\lambda})$ удовлетворяет краевым условиям (1.2), следует из доказательства теоремы 1.

Если $y(x_i; \lambda) = y'(x_i; \lambda) = 0$, то $y(x; \lambda) \equiv 0$, а это противоречит условию $y'(0; \lambda) = 1 \neq 0$. Отсюда следует результат об однократности нулей x_i .

Формулы (3.4) дают расстояния между соседними нулями решения $y(x; \tilde{\lambda})$. Складывая первые j членов в (3.4), приходим к формуле для j -го нуля. Следствие 1 доказано.

3.3. Доказательство утверждения 1. Предположим, что найдётся такое собственное значение $\tilde{\lambda} \in \Lambda$, что ему отвечают два линейно независимых решения $y \equiv y_1(x; \tilde{\lambda})$ и $y \equiv y_2(x; \tilde{\lambda})$ задачи (1.1), (1.2). Пусть $W(x)$ – определитель Вронского, составленный для этих двух решений. Так как y_1 и y_2 – линейно независимые решения уравнения (1.1), то $W(x) \neq 0$ для всех $x \in [0, 1]$. Но, как легко видеть,

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0; \tilde{\lambda}) & y_2(0; \tilde{\lambda}) \\ y_1'(0; \tilde{\lambda}) & y_2'(0; \tilde{\lambda}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(0; \tilde{\lambda}) & y_2'(0; \tilde{\lambda}) \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что решения y_1 и y_2 , вопреки первоначальному предположению, линейно зависимы. Отсюда следует, что всякое собственное значение $\tilde{\lambda} \in \Lambda$ задачи $\mathcal{P}$ является простым. Утверждение 1 доказано.

3.4. Доказательство утверждения 2. Так как $w(x, \eta; \lambda) > 0$, а значит, и $\varsigma_i(v; \lambda) > 0$, то $T_i(\lambda) > 0$ для всех $\lambda \in \Lambda_i$ и всякого $i \in \mathbb{Z}_+$.

Решение $y \equiv y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2) непрерывно зависит от λ при $\lambda \in \Lambda$ в силу классических результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений [23, с. 117]. Учитывая это и принимая во внимание способ построения отображений g_i , получаем, что функции $x \equiv g_i(\eta; \lambda)$ непрерывны по аргументам η и λ при $(\eta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda_i$. Но тогда подынтегральные выражения в $T_i(\lambda)$ непрерывны при $(\eta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda_i$ как суперпозиции непрерывных функций. Отсюда следует, что при каждом значении индекса i функция $T_i(\lambda)$ непрерывно зависит от λ при $\lambda \in \Lambda_i$. Утверждение 2 доказано.

3.5. Доказательство утверждения 3. Рассмотрим функцию $T_i(\lambda)$, заданную равенством (2.6). Введём обозначение

$$\xi_i(v, t; \lambda) := Q(g_i(t; \lambda); \lambda) + \frac{v^2}{P(g_i(t; \lambda); \lambda)}$$

и пусть $\xi_i^+(v; \lambda) := \max_{t \in \mathbb{R}} \xi_i(v, t; \lambda)$ и $\xi_i^-(v; \lambda) := \min_{t \in \mathbb{R}} \xi_i(v, t; \lambda)$.

Тогда, как легко видеть, выполняются неравенства

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^+(v; \lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^-(v; \lambda)}, \quad (3.6)$$

где величина $\varsigma_i(v; \lambda)$ определена равенством (2.6).

Величины $\xi_i^+(v; \lambda)$ и $\xi_i^-(v; \lambda)$ оцениваются следующим образом:

$$\xi_i^+(v; \lambda) \leq \max_{i=0, n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \xi_i(v, t; \lambda) \leq \xi^+(v; \lambda) \quad \text{и} \quad \xi_i^-(v; \lambda) \geq \min_{i=0, n} \inf_{t \in \mathbb{R}} \xi_i(v, t; \lambda) \geq \xi^-(v; \lambda),$$

где $\xi^+(v; \lambda) = q_+ + v^2/p_-$ и $\xi^-(v; \lambda) = q_- + v^2/p_+$, а $p_{\pm}$ и $q_{\pm}$ определены после неравенств (2.1) и зависят от λ . Согласно предыдущему, если t пробегает вещественную ось, то значения $x = g_i(t, \lambda)$ пробегает интервал x_i .

Тогда неравенство (3.6) принимает вид

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{ds}{\xi^+(v; \lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^+(v; \lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\varsigma_i(v; \lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi_i^-(v; \lambda)} \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{\xi^-(v; \lambda)}.$$

Вследствие предыдущего получаем оценки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\xi^+(v; \lambda)} \leq T_i(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\xi^-(v; \lambda)}. \quad (3.7)$$

Интегралы в левой и правой частях двойного неравенства (3.7) вычисляются точно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\xi^+(v; \lambda)} = \frac{\pi\sqrt{p_-}}{\sqrt{q_+}} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\xi^-(v; \lambda)} = \frac{\pi\sqrt{p_+}}{\sqrt{q_-}}. \quad (3.8)$$

С учётом (3.8) неравенство (3.7) принимает вид (2.9). Утверждение 3 доказано.

3.6. Доказательство теоремы 2. Из оценок (2.9) и условия (2.11) следует, что, во-первых, Λ_i являются неограниченными множествами для всех $i \in \mathbb{Z}_+$, а во-вторых, для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ найдётся неограниченное связное множество $\tilde{\Lambda}_i \subset \Lambda_i$.

Далее, из оценок (2.9), (2.10) и условия (2.11) вытекает, что $\min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_n} \Phi(\lambda; n) < 1$. В силу того, что Φ — это сумма расстояний между нулями x_i решения $y(x; \lambda)$ задачи Коши (1.1), (2.2), то, начиная с некоторого $n = n_0 \geq 0$, получаем

$$\max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_n} \Phi(\lambda; n) = a > 1.$$

Так как $\min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_n} \Phi(\lambda; n) < 1$, а $\max_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_n} \Phi(\lambda; n) > 1$, то в силу непрерывности $T_i(\lambda)$ по λ при $\lambda \in \tilde{\Lambda}_i$ найдётся такое значение $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}_n$, что $\Phi(\tilde{\lambda}; n) = 1$.

Проведённое рассуждение справедливо для каждого $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, и, значит, для каждого $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ существует по крайней мере одно решение $\lambda = \tilde{\lambda}_n \in \Lambda$ уравнения (2.8). Другими словами, при условии (2.11) существует бесконечное число решений $\lambda_n \in \Lambda$ уравнения (2.8).

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_n = +\infty$. Теорема 2 доказана.

3.7. Доказательство теоремы 3. Так как из условий (2.12) вытекает условие (2.11), то результат о существовании бесконечного числа решений $\tilde{\lambda}_n \in \Lambda$ уравнения (2.8), где $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, следует из теоремы 2.

Докажем оценку (2.13). В силу оценки (2.10) и соотношений (2.12) заключаем, что найдутся такие положительные числа δ_1, δ_2 , для которых при всех достаточно больших λ имеет место соотношение

$$C_1 - \delta_1 \leq \Phi(\lambda; n) \leq C_2 + \delta_2, \quad (3.9)$$

в котором $C_i = \pi(n+1)\lambda^{-c_i} + O(\lambda^{-c_i-\delta_i})$, $i = 1, 2$. Заменяя в (3.9) Φ единицей и обращая полученные неравенства, приходим к оценке (2.13).

Если положить $c_1 = c_2 = c > 0$, то оценка (2.13) переходит в оценку (2.14). При этом коэффициент при главном члене асимптотической формулы (2.14) равен $\pi^{1/c}$. Теорема 3 доказана.

3.8. Доказательство теоремы 4. Если выполняются соотношения (2.15), то, согласно теореме 2, найдутся такие целые неотрицательные числа n_0^1 и n_0^2 , что каждое из уравнений $\Phi^1(\lambda; n) - 1 = 0$ и $\Phi^2(\lambda; n) - 1 = 0$ имеет не меньше одного решения $\lambda = \tilde{\lambda}^1 \in \Lambda$ и $\lambda = \tilde{\lambda}^2 \in \Lambda$ при $n = n_0^1, n_0^1 + 1, \dots$ и $n = n_0^2, n_0^2 + 1, \dots$ соответственно. Таким образом, если выполняются условия (2.15), то каждое из уравнений $\Phi^1(\lambda; n) - 1 = 0$ и $\Phi^2(\lambda; n) - 1 = 0$ имеет бесконечное число решений $\tilde{\lambda}_{n_0^1}^1, \tilde{\lambda}_{n_0^1+1}^1, \dots$ и $\tilde{\lambda}_{n_0^2}^2, \tilde{\lambda}_{n_0^2+1}^2, \dots$ соответственно.

Используя следствие 3, получаем оценки

$$\pi(n+1) \frac{\sqrt{p_-^i(\lambda)}}{\sqrt{q_+^i(\lambda)}} \leq \Phi^i(\lambda; n) \leq \pi(n+1) \frac{\sqrt{p_+^i(\lambda)}}{\sqrt{q_-^i(\lambda)}}, \quad i = 1, 2, \quad (3.10)$$

где функции $p_+^i(\lambda)$, $p_-^i(\lambda)$ и $q_+^i(\lambda)$, $q_-^i(\lambda)$ определены в п. 2.3.

Если справедливо неравенство (2.16), то, как нетрудно видеть, из оценок (3.10) следует, что

$$\Phi^1(\lambda; n) \leq \pi(n+1) \frac{\sqrt{p_+^1(\lambda)}}{\sqrt{q_-^1(\lambda)}} \leq \pi(n+1) \frac{\sqrt{p_-^2(\lambda)}}{\sqrt{q_+^2(\lambda)}} \leq \Phi^2(\lambda; n),$$

т.е. $\Phi^1(\lambda; n) \leq \Phi^2(\lambda; n)$. Полученное неравенство влечёт за собой неравенство (2.17). Теорема 4 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-71-10015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. I. М., 1953.
2. Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. On the eigenvalue accumulation of Sturm–Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter // Math. Nachr. 1998. Bd. 189. Hf. 1. S. 157–170.
3. Bohner M., Kratz W., Hilscher R. Š. Oscillation and spectral theory for linear hamiltonian systems with nonlinear dependence on the spectral parameter // Math. Nachr. 2012. Bd. 285. Hf. 11–12. S. 1343–1356.

4. *Hilscher R.Š.* Eigenvalue theory for time scale symplectic systems depending nonlinearly on spectral parameter // *Appl. Math. and Comput.* 2012. V. 219. № 6. P. 2839–2860.
5. *Hartman P.* Boundary value problems for second order, ordinary differential equations involving a parameter // *J. of Differ. Equat.* 1972. V. 12. № 1. P. 194–212.
6. *Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R.* Sturm–Liouville problems with coefficients which depend analytically on the eigenvalue parameter // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 1993. V. 57. № 1–4. P. 25–44.
7. *Валовик Д.В.* Об интегральной характеристической функции задачи Штурма–Лиувилля // *Мат. сб.* 2020. Т. 211. № 11. С. 41–53.
8. *Hochstadt H.* Asymptotic estimates for the Sturm–Liouville spectrum // *Comm. on Pure and Appl. Math.* 1961. V. 14. № 4. P. 749–764.
9. *Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K.* Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // *Proc. of the Edinburgh Math. Soc.* 1994. V. 37. № 1. P. 57–72.
10. *Бен Амара Ж., Шкаликов А.А.* Задача Штурма–Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии // *Мат. заметки.* 1999. Т. 66. № 2. С. 163–172.
11. *Coskun H., Bayram N.* Asymptotics of eigenvalues for regular Sturm–Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary condition // *J. of Math. Anal. and Appl.* 2005. V. 306. № 2. P. 548–566.
12. *Капустин Н.Ю.* Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. № 8. P. 1024–1027.
13. *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40. № 2. С. 325–335.
14. *Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A.* Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, ii // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2002. V. 148. № 1. P. 147–168.
15. *Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A.* Transformations between Sturm–Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions // *Bull. of the London Math. Soc.* 2001. V. 33. № 6. P. 749–757.
16. *Смирнов Ю.Г.* Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2015. Т. 55. № 3. С. 460–468.
17. *Zhang Maozhu, Li Kun.* Dependence of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // *Appl. Math. and Comput.* 2020. V. 378. Art. 125214.
18. *Алиев З.С., Дуньямалиева А.А.* Базисные свойства корневых функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // *Докл. РАН.* 2013. Т. 451. № 5. С. 487–491.
19. *Керимов Н.Б., Поладов Р.Г.* Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // *Докл. РАН.* 2012. Т. 442. № 1. С. 14–19.
20. *Марченко Д.Б.* Базисность в пространстве $l_p(0, 1)$ системы собственных функций, отвечающей задаче со спектральным параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения.* 2006. Т. 42. № 6. С. 847–849.
21. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев, 1972.
22. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
23. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
24. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М., 1968.
25. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М., 1962.
26. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М., 1988.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 16.09.2020 г.

После доработки 07.07.2021 г.

Принята к публикации 08.09.2021 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2021 г. А. И. Перов, И. Д. Коструб

*Посвящается светлой памяти
Марка Александровича Красносельского*

С помощью теории коммутативных банаховых алгебр устанавливается оценка решений линейного однородного матричного дифференциального уравнения, коэффициенты которого попарно перестановочны между собой. Из полученной оценки выводится признак асимптотической устойчивости по Ляпунову.

DOI: 10.31857/S0374064121120025

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$A_0 X^{(n)} + A_1 X^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} \dot{X} + A_n X = 0, \quad (1)$$

где $A_0, A_1, \dots, A_n$ – постоянные $m \times m$ -матрицы, причём матрица A_0 является невырожденной ($\det A_0 \neq 0$), и $X^{(k)} = d^k X / dt^k$ при $0 \leq k \leq n$. Близкие уравнения встречаются, например, в теории колебаний [1, с. 358–378]. Нас интересуют условия, при выполнении которых рассматриваемое уравнение асимптотически устойчиво по Ляпунову [2, с. 198].

Через $S(A)$ обозначим спектр матрицы A , т.е. совокупность всех её собственных значений, при этом кратность собственных значений (если таковые имеются) никак не учитывается. Поэтому $S(A)$ – непустое конечное множество, лежащее в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассмотрим скалярное алгебраическое уравнение n -й степени

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (2)$$

где $a_k \in S(A_k)$ при $0 \leq k \leq n$. Так как по предположению A_0 является невырожденной, то всегда $a_0 \neq 0$. При каждом фиксированном выборе указанным способом коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ уравнение (2) имеет n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность [3, с. 145]. Эти корни образуют непустое конечное множество в $\mathbb{C}$, при этом кратность корней никак не учитывается.

Если составить характеристическое уравнение для уравнения (1), то оно имеет степень nm . Семейство уравнений (2) конечно; таких уравнений не более m^{n+1} . Совокупность всех корней, получающихся указанным выше способом, обозначим через $\mathcal{R}$, это непустое конечное множество в $\mathbb{C}$. Положим

$$\beta = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \mathcal{R}\}. \quad (3)$$

Гипотеза. При сделанных выше предположениях для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую постоянную $C(\varepsilon)$, что для любого решения $X(t)$ матричного дифференциального уравнения (1) справедлива оценка

$$\|X^{(j)}(t)\| \leq C(\varepsilon) e^{t(\beta+\varepsilon)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \|X^{(k)}(0)\| \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \infty \quad \text{для} \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad (4)$$

где постоянная β определена соотношением (3).

Поэтому, если выполнено условие

$$\beta < 0, \quad (5)$$

то матричное дифференциальное уравнение (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причём в силу оценки (4) получаем

$$\|X^{(j)}(t)\| \leq C(\varepsilon)e^{t(\beta+\varepsilon)} \max_{0 \leq k \leq n-1} \|X^{(k)}(0)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{для } 0 \leq j \leq n-1, \quad (6)$$

и правая часть стремится к нулю по экспоненциальному закону ($\varepsilon > 0$ выбираем так, чтобы $\beta + \varepsilon < 0$).

Вторая часть высказанной гипотезы, содержащая *спектральный признак экспоненциальной устойчивости*, и дала название статье. Остановимся на нём более подробно. Прежде всего отметим, что условие (5) выполнено тогда и только тогда, когда каждое алгебраическое уравнение семейства (2) гурвицево (т.е. все его корни лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$).

Если все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ в уравнении (2) вещественные, то для проверки гурвицевости этого уравнения можно воспользоваться критерием Рауса–Гурвица [4]. Если среди коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ имеются комплексные, то для проверки гурвицевости нужно использовать критерий [5, с. 533–534, теорема 23].

Но в рассматриваемом признаке асимптотической устойчивости проверке на гурвицевость подвергается не одно уравнение, а целое семейство. Если коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ вещественные и $\alpha_k \leq a_k \leq \beta_k$ для $0 \leq k \leq n$, то для выяснения гурвицевости семейства многочленов достаточно выяснить гурвицевость лишь четырёх специально построенных многочленов этой совокупности [6]. Если среди коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ имеются комплексные, вещественные и мнимые части которых удовлетворяют указанным выше оценкам, то для проверки гурвицевости семейства многочленов достаточно выяснить гурвицевость только восьми специально построенных комплексных многочленов. Это следует из результатов В.Л. Харитонova [7]. Ранее на эту тему была опубликована статья С. Фаэдо [8].

В качестве первого примера рассмотрим матричное дифференциальное уравнение вида

$$a_0 X^{(n)} + a_1 X^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{X} + a_n X = 0, \quad (7)$$

т.е. уравнение (1), в котором $A_k = a_k E$, где E – единичная $m \times m$ -матрица, $a_0, a_1, \dots, a_n$ – комплексные числа, причём $a_0 \neq 0$. Соответствующее семейство алгебраических уравнений (2) состоит из одного-единственного уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что поведение решений уравнения (7) полностью определяется корнями уравнения (8). Этот пример тесно связан с теоремой Гамильтона–Кэли.

В качестве примера применения указанного выше признака экспоненциальной устойчивости приведём матричное дифференциальное уравнение второго порядка, возникающее в теории колебаний,

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = 0, \quad (9)$$

в котором матричные коэффициенты являются самосопряжёнными и положительно определёнными: $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$, $C^* = C > 0$. Самосопряжённость гарантирует вещественность спектра, а положительная определённость – его положительность. Поэтому соответствующие квадратные уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad a \in S(A), \quad b \in S(B), \quad c \in S(C),$$

с вещественными коэффициентами являются гурвицевыми, так как $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Поэтому уравнение (9) экспоненциально устойчиво. Приведём явное выражение для величины

$$\beta = \max\{\beta(a, b, c) : a \in S(A), \quad b \in S(B), \quad c \in S(C)\},$$

где

$$\beta(a, b, c) = \begin{cases} (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a), & \text{если } b^2 - 4ac > 0, \\ -b/(2a), & \text{если } b^2 - 4ac \leq 0. \end{cases}$$

Сформулированная гипотеза предполагает знание спектров матричных коэффициентов $A_0, A_1, \dots, A_n$, что само по себе предполагает серьезную вычислительную задачу. В этом направлении может оказаться полезным пособие [9].

Полученный результат. Проведём доказательство предложенной гипотезы при дополнительном предположении о попарной перестановочности между собой матричных коэффициентов, т.е. $A_j A_k = A_k A_j$ при $j \neq k$ и $0 \leq j, k \leq n$. Пусть $\mathbb{B}$ – коммутативная банахова алгебра [10, с. 255], состоящая из комплексных квадратных матриц m -го порядка, содержащая матричные коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$. Для них определены алгебраические операции сложения и умножения, а также умножения на комплексные числа с обычными свойствами. Кроме того, эта совокупность рассматривается как (конечномерное) банахово пространство [11, с. 68], норма в котором обладает свойствами $\|A\| \geq 0$; $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$; $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ и $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Кроме того, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ и $\|E\| = 1$. Здесь A и B из $\mathbb{B}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Обозначим через $\mathbb{B}^n$ банахову алгебру, элементами которой являются столбцы $\mathbf{X}$ с компонентами $X_1, X_2, \dots, X_n$ из $\mathbb{B}$, т.е. $\mathbb{B}^n = \mathbb{B} \times \dots \times \mathbb{B}$ – прямая сумма (прямое произведение). В $\mathbb{B}^n$ алгебраические операции сложения, умножения на комплексные числа (а также на элементы алгебры $\mathbb{B}$) и умножения вводятся покомпонентно. Норма в $\mathbb{B}^n$ определяется следующим образом: $\|\mathbf{X}\| = \max \|X_j\|$ ($1 \leq j \leq n$).

Введём банахову алгебру $\mathbb{B}^{n \times n}$, элементами которой являются всевозможные блочные матрицы $\mathbf{A} = (A_{jk})$, $1 \leq j, k \leq n$, где A_{jk} из $\mathbb{B}$. В этой совокупности и определены алгебраические операции сложения, умножения на комплексные числа (а также на элементы алгебры $\mathbb{B}$) и умножения (по правилу строка на столбец). Между блочными матрицами в $\mathbb{B}^{n \times n}$ и линейными ограниченными операторами, действующими в банаховом пространстве $\mathbb{B}^n$, существует естественное взаимно однозначное соответствие, именно, блочной матрице $\mathbf{A} = (A_{jk})$ поставим в соответствие оператор $\mathbf{A} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, действующий по правилу $Y_j = A_{j1}X_1 + \dots + A_{jn}X_n$ для $1 \leq j \leq n$. При этом норма матрицы $\mathbf{A}$ определяется как операторная: $\|\mathbf{A}\| = \max \|\mathbf{A}\mathbf{X}\|$, где максимум берётся по $\|\mathbf{X}\| = 1$, $\mathbf{X} \in \mathbb{B}^n$.

Рассмотрим в коммутативной банаховой алгебре $\mathbb{B}$ дифференциальное уравнение (1) с постоянными коэффициентами A_i из $\mathbb{B}$, $i = \overline{0, n}$, причём коэффициент A_0 обратим ($\det A_0 \neq 0$). Если по методу Эйлера искать решение уравнения (1) в виде $X = \exp(t\Lambda)$, где $\Lambda \in \mathbb{B}$, то придём к алгебраическому матричному уравнению n -й степени

$$A_0 \Lambda^n + A_1 \Lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \Lambda + A_n = 0, \quad (10)$$

которое естественно назвать *характеристическим*. Однако в развиваемой нами теории играет важную роль не многочлен из (10), а многочлен

$$L_n(\lambda) \equiv A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B},$$

который мы, за неимением лучшего, назовём *скалярным характеристическим многочленом* (пучком), имея в виду, что областью определения этого многочлена является поле скаляров $\mathbb{C}$. Те λ из $\mathbb{C}$, для которых элемент $L_n(\lambda)$ не имеет обратного ($\det L_n(\lambda) = 0$), образуют *спектр* S (замкнутое множество) скалярного характеристического многочлена, являющееся непустым конечным множеством в $\mathbb{C}$. Те λ из $\mathbb{C}$, для которых элемент $L_n(\lambda)$ обратим ($\det L_n(\lambda) \neq 0$), образуют *резольвентное множество* R (открытое) скалярного характеристического многочлена.

Пусть элемент C из $\mathbb{B}$ обратим ($\det C \neq 0$). Вместо уравнения (1) рассмотрим эквивалентное (т.е. имеющее те же самые решения) дифференциальное уравнение n -го порядка

$$B_0 X^{(n)} + B_1 X^{(n-1)} + \dots + B_{n-1} \dot{X} + B_n X = 0,$$

где $B_k = CA_k$ при $0 \leq k \leq n$. Вместе с этим уравнением появляется характеристическое уравнение

$$B_0 \Lambda^n + B_1 \Lambda^{n-1} + \dots + B_{n-1} \Lambda + B_n = 0$$

и скалярный характеристический многочлен

$$M_n(\lambda) \equiv B_0\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \dots + B_{n-1}\lambda + B_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}.$$

Отметим, что несмотря на то, что внешне и дифференциальное уравнение, и скалярный характеристический многочлен подверглись изменению, спектр скалярного характеристического многочлена остался неизменным, поскольку $\det M_n(\lambda) = \det C \det L_n(\lambda)$ и $\det C \neq 0$.

Запишем уравнение (1) в приведённом виде

$$X^{(n)} + B_1X^{(n-1)} + \dots + B_{n-1}\dot{X} + B_nX = 0, \quad (11)$$

где $B_j = A_0^{-1}A_j$ при $1 \leq j \leq n$. Представим дифференциальное уравнение (9) в виде системы n дифференциальных матричных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \text{где} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & E & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -B_n & \dots & \dots & \dots & -B_1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрица $\mathbf{A}$ из $\mathbb{B}^{n \times n}$ называется *сопровождающей* (скалярный характеристический многочлен $M_n(\lambda)$) *матрицей Фробениуса*. Здесь

$$M_n(\lambda) = E\lambda^n + B_1\lambda^{n-1} + \dots + B_{n-1}\lambda + B_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}. \quad (13)$$

Обозначим через $S(\mathbf{A})$ спектр линейного ограниченного оператора $\mathbf{A} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$. В рассматриваемом случае спектр – непустое конечное множество в $\mathbb{C}$. Обозначим через α *спектральную абсциссу* оператора $\mathbf{A}$, т.е.

$$\alpha = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in S(\mathbf{A})\}. \quad (14)$$

Отметим, что решение уравнения (11) имеет вид $\mathbf{X}(t) = \exp(t\mathbf{A})\mathbf{X}(0)$. В рассматриваемом случае для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую постоянную $C(\varepsilon) > 0$, что справедлива оценка

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq C(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon)} \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (15)$$

где постоянная α определена соотношением (14) [12, с. 86].

Из (15) вытекает следующая оценка для решений дифференциального уравнения (12): $\|\mathbf{X}(t)\| \leq \|e^{t\mathbf{A}}\| \|\mathbf{X}(0)\|$, т.е.

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq C(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon)} \|\mathbf{X}(0)\| \quad \text{при} \quad 0 \leq t < \infty. \quad (16)$$

Центральная часть доказательства. Покажем, что

$$\alpha \leq \beta, \quad (17)$$

где α определяется формулой (14), а β – формулой (3). Это неравенство немедленно вытекает из включения

$$S(\mathbf{A}) \subseteq \Lambda, \quad (18)$$

к доказательству которого мы и переходим.

Согласно [13, теорема 5] справедливо равенство

$$S(\mathbf{A}) = S' \quad (R(\mathbf{A}) = R'),$$

где $S(\mathbf{A})$ и $R(\mathbf{A})$ – это спектр и резольвентное множество оператора $\mathbf{A}$, а S' и R' – это спектр и резольвентное множество скалярного характеристического многочлена $M_n(\lambda)$, определяемого формулой (13). Так как по доказанному $S' = S$ и $R' = R$, где S и R – это спектр и резольвентное множество скалярного характеристического многочлена $L_n(\lambda)$, то

$$S(\mathbf{A}) = S \quad (R(\mathbf{A}) = R). \quad (19)$$

Перейдём к доказательству включения (18). Пусть $\lambda \in S(\mathbf{A})$. Тогда, согласно (19), $\lambda \in S$. Последнее означает, что

$$0 \in S(A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1}\lambda + A_n). \quad (20)$$

Так как для коммутативных банаховых алгебр многозначное отображение $A \mapsto S(A)$ обладает свойствами: $S(A+B) \subseteq S(A) + S(B)$ и $S(A\mu) = S(A)\mu$ для любых A и B из $\mathbb{B}$ и μ из $\mathbb{C}$, то

$$S(A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1}\lambda + A_n) \subseteq S(A_0)\lambda^n + S(A_1)\lambda^{n-1} + \dots + S(A_{n-1})\lambda + S(A_n).$$

Поэтому из включения (20) вытекает, что

$$0 \in S(A_0)\lambda^n + S(A_1)\lambda^{n-1} + \dots + S(A_{n-1})\lambda + S(A_n). \quad (21)$$

Любой элемент из написанной в правой части включения (21) суммы имеет вид

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

где $a_k \in S(A_k)$ при $0 \leq k \leq n$. Поэтому включение (21) означает, что коэффициенты a_k можно выбрать такими, чтобы $0 = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Видим, что число λ является корнем уравнения (2), и поэтому $\lambda \in \mathcal{R}$. Включение (18) установлено.

Из оценки (16) и неравенства (17) следует основная оценка (4).

Работа Перова А.И. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00732).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М., 1964.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1968.
4. Понтрягин А.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1965.
5. Гантамхер Ф.Р. Теория матриц. М., 1983.
6. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
7. Харитонов В.Л. Проблема Рауса–Гурвица для семейства полиномов и квазиполиномов // Мат. физика. 1979. № 26. С. 69–79.
8. Faedo S. Un nuova problema di stabilita per le equazione algebriche a coefficienti reali // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1953. V. 7. № 1–2. С. 53–63.
9. Курбатов В.Г., Курбатова И.В. Вычислительные методы спектральной теории. Воронеж, 2019.
10. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., 1982.
12. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
13. Перов А.И., Коструб И.Д. Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах // Докл. РАН. 2020. Т. 491. № 4. С. 83–87.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.06.2021 г.

После доработки 06.11.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:531.32

ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА–ФОЙГТА

© 2021 г. Е. С. Барановский

Изучается задача протекания для трёхмерных уравнений Навье–Стокса–Фойгта с неоднородным краевым условием Дирихле. Доказана теорема о существовании и единственности сильного решения в предположении, что нормы функций, описывающих внешние силы, начальное поле скоростей и потоки на границе, достаточно малы.

DOI: 10.31857/S0374064121120037

Введение. Задачи о протекании вязкой жидкости через заданную пространственную область долгое время привлекают внимание математиков. Согласно подсчётам авторов статьи [1] задаче протекания для уравнений Навье–Стокса посвящено более ста работ, выполненных учёными из одиннадцати стран. При этом количество статей по данной тематике постоянно увеличивается. Несмотря на большое число работ, в основном исследован случай стационарных (т.е. не зависящих от времени) течений, а в качестве уравнений движения чаще всего используются классические уравнения Навье–Стокса. Однако поведение многих встречающихся на практике жидкостей не может быть адекватно описано в рамках модели Навье–Стокса. Такие жидкости называют *неньютоновскими* [2]. В их число входят, например, жидкости дифференциального типа, у которых тензор напряжений Коши зависит от градиента скорости и его производных по времени [3].

В настоящей работе изучается разрешимость (в классе сильных решений) нестационарной задачи протекания для уравнений Навье–Стокса–Фойгта [4], которые можно рассматривать как одну из базовых моделей движения неньютоновских жидкостей дифференциального типа:

$$\mathbb{P} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] - \nu \mathbb{P} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbb{P} \frac{\partial(\Delta \mathbf{u})}{\partial t} = \mathbb{P} \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

где Ω – ограниченная трёхмерная область с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$; $(0, T)$ – заданный промежуток времени; $\mathbf{u}$ – скорость течения жидкости; $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{u}_0$ – заданные вектор-функции, которые описывают соответственно поле внешних сил, скорость течения на границе $\partial\Omega$ и распределение скоростей в начальный момент времени $t = 0$; $\mathbb{P}$ – проектор Лерэ; α и ν – положительные материальные константы. Символы ∇ и Δ обозначают соответственно градиент и лапласиан по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 .

Исследование модели (1), (2) и некоторых её модификаций восходит к работам А.П. Осскокова [5, 6], в которых рассматривались задачи о движении жидкости внутри ограниченной трёхмерной (или двумерной) области с гладкой границей. Данная статья является продолжением работы [4], в которой установлены существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи (1)–(4) в предположении, что $\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{0}$, т.е. при стандартном граничном условии прилипания на непроницаемой твёрдой поверхности.

Другой подход к моделированию течения вязкой жидкости через заданную область основан на использовании краевых условий для давления [7] или напора [8, 9] на тех участках границы, где происходит протекание жидкости.

1. Понятие сильных решений. Введём необходимые функциональные пространства и операторы. Будем использовать пространство Лебега $L^2(\Omega)$, пространства Соболева $H^m(\Omega)$ и пространства следов $H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $m = 1, 2$ (см. [10, гл. III]). Для соответствующих классов вектор-функций $\mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ используем те же самые обозначения, выделяя при этом первую букву жирным шрифтом, т.е. $\mathbf{L}^2(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{H}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} H^1(\Omega)^3$ и т.п.

Через $\gamma_{\partial\Omega}$ обозначим линейный непрерывный оператор следа, действующий из $\mathbf{H}^m(\Omega)$ в $\mathbf{H}^{m-1/2}(\partial\Omega)$. Отметим, что $\gamma_{\partial\Omega}\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega}$ для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Введём также подпространства соленоидальных вектор-функций:

$$\mathbf{H}_\sigma^m(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}, \quad m = 1, 2,$$

и подпространства следов, удовлетворяющих условию нулевого суммарного потока на границе области течения:

$$\mathbf{H}_0^{m-1/2}(\partial\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}^{m-1/2}(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \right\}, \quad m = 1, 2,$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Пусть $\mathcal{V}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\eta} \in C^\infty(\Omega) \cap \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) : \text{supp } \boldsymbol{\eta} \subset \Omega\}$. Введём обозначения: $\mathbf{V}^0(\Omega)$ – замыкание множества $\mathcal{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{V}^1(\Omega)$ – замыкание множества $\mathcal{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{V}^2(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}^1(\Omega)$. Очевидно, что $\gamma_{\partial\Omega}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^k(\Omega)$, $k = 1, 2$.

Напомним, что имеет место ортогональное разложение $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{V}^0(\Omega) \oplus \nabla H^1(\Omega)$, а ортогональный проектор $\mathbb{P}$ из $\mathbf{L}^2(\Omega)$ в $\mathbf{V}^0(\Omega)$ называется *проектором Лерэ* (см. [10, гл. IV]).

Как обычно, $\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{X})$ – пространство непрерывных функций из отрезка $[0, T]$ в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{w}: [0, T] \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{w} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{X}), \mathbf{w}' \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{X})\}$, где $\mathbf{X}$ – банахово пространство, а $'$ обозначает производную по t .

Определение. Сильным решением начально-краевой задачи (1)–(4) будем называть вектор-функцию $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ такую, что $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\gamma_{\partial\Omega}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}$ и

$$\mathbb{P}\mathbf{u}' + \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] - \nu \mathbb{P} \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbb{P} \Delta \mathbf{u}' = \mathbb{P} \mathbf{f} \text{ в } \Omega \times (0, T).$$

2. Основной результат работы.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$\mathbf{f} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)), \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega), \quad \gamma_{\partial\Omega}\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\varphi}(0). \quad (5)$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))} + \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega))} + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)} \leq \varepsilon_0, \quad (6)$$

то начально-краевая задача (1)–(4) имеет единственное сильное решение $\mathbf{u}$ в некоторой открытой окрестности $\mathbf{U}$ нулевой вектор-функции в пространстве $\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$.

3. Вспомогательные результаты. В этом пункте приводятся утверждения, необходимые для доказательства теоремы 1. Далее для линейных пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ через $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ обозначаем пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ – изоморфные вещественные банаховы пространства, $\mathbf{A}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ – изоморфизм, т.е. линейное непрерывное биективное отображение, $\mathbf{B}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ – непрерывно дифференцируемое по Фреше отображение, для которого $\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и норма производной Фреше $D\mathbf{B}(\mathbf{0})$ удовлетворяет оценке

$$\|D\mathbf{B}(\mathbf{0})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})} < \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{E})}^{-1}. \quad (7)$$

Тогда существуют число $\epsilon > 0$ и открытая окрестность $\mathcal{U}$ нулевого элемента в $\mathbf{E}$ такие, что для любого элемента $\mathbf{g}$ из шара $\mathfrak{B}_\epsilon(\mathbf{0}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{q} \in \mathbf{F} : \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{F}} < \epsilon\}$ уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{B}(\mathbf{w}) = \mathbf{g} \quad (8)$$

имеет единственное решение $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\mathbf{g}$, принадлежащее множеству $\mathcal{U}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathbf{T}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, заданный формулой $\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{B}$. Применяя оператор $\mathbf{A}^{-1}$ к обеим частям уравнения (8), получим

$$(\mathbf{I} + \mathbf{T})(\mathbf{w}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}, \quad (9)$$

где $\mathbf{I}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ – тождественный оператор. Очевидно, что уравнения (8) и (9) эквивалентны.

Заметим, что $(\mathbf{I} + \mathbf{T})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Кроме того, используя неравенство (7), получаем оценку

$$\|\mathbf{DT}(\mathbf{0})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})} = \|\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{DB}(\mathbf{0})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{E})} \|\mathbf{DB}(\mathbf{0})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})} < 1,$$

из которой следует, что оператор $\mathbf{I} + \mathbf{DT}(\mathbf{0}): \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ непрерывно обратим. Поэтому, согласно теореме об обратной функции, существуют открытые окрестности $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ нулевого элемента в пространстве $\mathbf{E}$ такие, что отображение $\mathbf{I} + \mathbf{T}|_{\mathcal{U}_1}: \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ биективно.

Пусть ϵ – положительное число такое, что $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g} \in \mathcal{U}_2$ для любого элемента $\mathbf{g}$ из открытого шара $\mathfrak{B}_\epsilon(\mathbf{0})$. Тогда в качестве $\mathcal{U}$ можно взять множество $\mathcal{U}_1$. В самом деле, для любого $\mathbf{g} \in \mathfrak{B}_\epsilon(\mathbf{0})$ единственным (в множестве $\mathcal{U}$) решением уравнения (9) будет элемент $\mathbf{w}_\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} [(\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}]\mathbf{g}$. Теорема 2 доказана.

Лемма 1. *Существует линейный непрерывный оператор**

$$\ell_\Omega: C^1([0, T]; \mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)) \rightarrow C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$$

такой, что $\gamma_{\partial\Omega}[\ell_\Omega\psi(t)] = \psi(t)$ для любой вектор-функции $\psi \in C^1([0, T]; \mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega))$ и всех $t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}$ – произвольная вектор-функция из пространства $\mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)$. Согласно классическим результатам о разрешимости стационарных уравнений Стокса с неоднородными краевыми условиями (см., например, [11, гл. I]) существует единственная вектор-функция $\mathbf{y} \in \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)$, которая удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Delta\mathbf{y} &= \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{a} \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

и для которой выполнена оценка

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)} \quad (11)$$

с некоторой константой $C(\Omega)$.

Обозначим через $\mathbf{R}$ разрешающий оператор задачи (10), т.е. по определению $\mathbf{R}\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}$. Из оценки (11) вытекает включение $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega), \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$.

Оператор поднятия ℓ_Ω определим по формуле $[\ell_\Omega\psi](t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}[\psi(t)]$, где ψ – вектор-функция из пространства $C^1([0, T]; \mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega))$ и $t \in [0, T]$. Очевидно, что оператор ℓ_Ω удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Пусть

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{(z, \phi, \mathbf{b}) \in C([0, T]; \mathbf{V}^0(\Omega)) \times C^1([0, T]; \mathbf{H}_0^{3/2}(\partial\Omega)) \times \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega) : \phi(0) = \gamma_{\partial\Omega}\mathbf{b}\}.$$

*) Этот оператор называется *оператором поднятия*.

Лемма 2. *Линейный оператор $\mathbb{A}: C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)) \rightarrow \mathfrak{F}$, заданный формулой*

$$\mathbb{A}\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{P}\mathbf{u}' - \nu\mathbb{P}\Delta\mathbf{u} - \alpha\mathbb{P}\Delta\mathbf{u}', \gamma_{\partial\Omega}\mathbf{u}, \mathbf{u}(0)),$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Нетрудно проверить, что справедлива оценка

$$\|\mathbb{A}\mathbf{u}\|_{\mathfrak{F}} \leq C(\Omega, \alpha, \nu)\|\mathbf{u}\|_{C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))}, \quad C(\Omega, \nu, \alpha) = \text{const},$$

для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$. Следовательно,

$$\mathbb{A} \in \mathcal{L}(C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)), \mathfrak{F}).$$

Далее, покажем, что $\mathbb{A}$ – инъективный оператор. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ – вектор-функции из пространства $C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$ и $\mathbb{A}\mathbf{u}_1 = \mathbb{A}\mathbf{u}_2$. Обозначим $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Из равенства $\mathbb{A}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, в частности, следует, что

$$\mathbb{P}\tilde{\mathbf{u}}' - \nu\mathbb{P}\Delta\tilde{\mathbf{u}} - \alpha\mathbb{P}\Delta\tilde{\mathbf{u}}' = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega \times (0, T). \quad (12)$$

Умножим обе части (12) на $\tilde{\mathbf{u}}$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\int_{\Omega} \mathbb{P}\tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \mathbb{P}\Delta\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \mathbb{P}\Delta\tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = 0, \quad t \in (0, T). \quad (13)$$

Так как $\tilde{\mathbf{u}} \in C^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$ и $\gamma_{\partial\Omega}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, то $\tilde{\mathbf{u}} \in C^1([0, T]; \mathbf{V}^2(\Omega))$. Поэтому $\mathbb{P}\tilde{\mathbf{u}}' = \tilde{\mathbf{u}}'$ и для любой вектор-функции $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ выполняется равенство $(\mathbb{P}\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{u}})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. Таким образом, равенство (13) принимает вид

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \Delta\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \Delta\tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = 0, \quad t \in (0, T). \quad (14)$$

Интегрируя по частям второе и третье слагаемые из левой части (14), получаем

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} |\nabla\tilde{\mathbf{u}}|^2 \, d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla\tilde{\mathbf{u}}' : \nabla\tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (15)$$

где через $:$ обозначено скалярное произведение матриц. Замечая, что

$$\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \int_{\Omega} \nabla\tilde{\mathbf{u}}' : \nabla\tilde{\mathbf{u}} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla\tilde{\mathbf{u}}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad t \in (0, T),$$

из равенства (15) выводим следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|\tilde{\mathbf{u}}|^2 + \alpha|\nabla\tilde{\mathbf{u}}|^2) \, d\mathbf{x} + 2\nu \int_{\Omega} |\nabla\tilde{\mathbf{u}}|^2 \, d\mathbf{x} = 0, \quad t \in (0, T). \quad (16)$$

Проинтегрируем обе части равенства (16) по t от 0 до s . С учётом того, что $\tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$, получаем

$$\int_{\Omega} (|\tilde{\mathbf{u}}(s)|^2 + \alpha|\nabla\tilde{\mathbf{u}}(s)|^2) \, d\mathbf{x} + 2\nu \int_0^s \int_{\Omega} |\nabla\tilde{\mathbf{u}}(t)|^2 \, d\mathbf{x} dt = 0, \quad s \in (0, T),$$

откуда следует равенство $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Таким образом, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что $\mathbb{A}$ – сюръективный оператор. Возьмём произвольную тройку $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{F}$. Требуется установить разрешимость уравнения $\mathbb{A}\mathbf{u} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{b})$. Это уравнение эквивалентно следующей начально-краевой задаче:

$$\mathbb{P}\mathbf{u}' - \nu\mathbb{P}\Delta\mathbf{u} - \alpha\mathbb{P}\Delta\mathbf{u}' = \mathbf{z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (18)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{b} \quad \text{в } \Omega. \quad (19)$$

Неизвестную вектор-функцию $\mathbf{u}$ представим в виде суммы $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \ell_\Omega \boldsymbol{\phi}$, где $\mathbf{v}$ – новая неизвестная вектор-функция. Тогда задача (17)–(19) сводится к следующей задаче:

$$\mathbf{v}' - \nu\mathbb{P}\Delta\mathbf{v} - \alpha\mathbb{P}\Delta\mathbf{v}' = \widehat{\mathbf{z}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (20)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (21)$$

$$\mathbf{v}(0) = \widehat{\mathbf{b}} \quad \text{в } \Omega, \quad (22)$$

где $\widehat{\mathbf{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z} - \mathbb{P}\ell_\Omega \boldsymbol{\phi}' + \nu\mathbb{P}\Delta\ell_\Omega \boldsymbol{\phi} + \alpha\mathbb{P}\Delta\ell_\Omega \boldsymbol{\phi}' \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{V}^0(\Omega))$ и $\widehat{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b} - [\ell_\Omega \boldsymbol{\phi}](0) \in \mathbf{V}^2(\Omega)$.

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применяются для доказательства теоремы 1 из [4], можно показать, что начально-краевая задача (20)–(22) имеет единственное решение $\mathbf{v}$ в пространстве $\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{V}^2(\Omega))$. Следовательно, уравнение $\mathbb{A}\mathbf{u} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{b})$ однозначно разрешимо. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Начально-краевая задача (1)–(4) в “сильной” формулировке (см. определение в п. 1) эквивалентна операторному уравнению

$$\mathbb{A}\mathbf{u} + \mathbb{B}(\mathbf{u}) = (\mathbb{P}\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}_0)$$

с линейным оператором $\mathbb{A}: \mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)) \rightarrow \mathfrak{F}$, который определён в лемме 2, и нелинейным оператором $\mathbb{B}: \mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)) \rightarrow \mathfrak{F}$, заданным формулой

$$\mathbb{B}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right], \mathbf{0}, \mathbf{0} \right).$$

Заметим, что отображение $\mathbb{B}$ непрерывно дифференцируемо по Фреше и

$$[D\mathbb{B}(\mathbf{u})]\mathbf{h} = \left(\mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] + \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_i} \right], \mathbf{0}, \mathbf{0} \right)$$

для любых вектор-функций $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in \mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$. В частности, $D\mathbb{B}(\mathbf{0})$ – нулевой оператор и, следовательно, справедлива оценка

$$\|D\mathbb{B}(\mathbf{0})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)), \mathfrak{F})} < \|\mathbb{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega)), \mathfrak{F})}^{-1}.$$

Кроме того, согласно лемме 2, оператор $\mathbb{A}$ – изоморфизм. Поэтому, применяя соответствующим образом теорему 2, заключаем, что при выполнении условий (5) и (6) задача (1)–(4) имеет единственное сильное решение $\mathbf{u}$ в некоторой открытой окрестности $\mathbf{U}$ нулевой вектор-функции в пространстве $\mathbf{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_\sigma^2(\Omega))$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначев В.В., Руссо Р. Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. Вып. 6. С. 115–176.
2. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. 1991. Т. 4. С. 3–98.

3. *Cioranescu D., Girault V., Rajagopal K.R.* Mechanics and Mathematics of Fluids of the Differential Type. Cham, 2016.
4. *Baranovskii E.S.* Strong solutions of the incompressible Navier–Stokes–Voigt model // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. Art. ID 181.
5. *Осколков А.П.* О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 145–160.
6. *Осколков А.П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 127. С. 32–57.
7. *Baranovskii E.S., Domnich A.A., Artemov M.A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids. 2019. V. 4. № 3. Art. ID 133.
8. *Барановский Е.С.* Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43.
9. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 317–327.
10. *Boyer F., Fabrie P.* Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier–Stokes Equations and Related Models. New York, 2013.
11. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 19.09.2021 г.

После доработки 11.10.2021 г.

Принята к публикации 23.11.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПО НАХОЖДЕНИЮ СОМНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2021 г. С. Н. Сидоров

Для заданного в прямоугольном параллелепипеде неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа, неоднородность которого представляет собой произведение функций, зависящих только от пространственных и только от временной переменных, исследуется обратная задача по нахождению сомножителя неоднородности, зависящего от пространственных переменных. Установлен критерий единственности решения. Решение построено в виде суммы ряда по ортогональной системе функций. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей, зависящих от двух натуральных аргументов. Получены оценки, гарантирующие отдалённость от нуля знаменателей с указанием асимптотики, позволившие обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений. Установлена устойчивость найденного решения относительно возмущений граничных функций.

DOI: 10.31857/S0374064121120049

1. Постановка задачи. Рассмотрим неоднородное уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu \equiv F(x, y, t), \quad (1)$$

здесь

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases} \quad F(x, y, t) \equiv \begin{cases} f(x, y)g_1(t), & t > 0, \\ f(x, y)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в области $Q = \{(x, y, t) : (x, y) \in D, t \in (-\alpha, \beta)\}$, где $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$, а α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное действительное число, и, обозначив $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$, поставим следующую задачу.

Задача. Найти функции $u(x, y, t)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x, y, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-); \quad (2)$$

$$f(x, y) \in C(D) \cap L_2(D); \quad (3)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-; \quad (4)$$

$$u(x, y, t)|_{x=0} = u(x, y, t)|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, y, t)|_{y=0} = u(x, y, t)|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (6)$$

$$u(x, y, t)|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (7)$$

$$u(x, y, t)|_{t=\beta} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (8)$$

где $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1, 2] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве L_2 для двумерного уравнения парабола-гиперболического типа в смешанной области, параболическая часть которой представляет собой прямоугольник, а гиперболическая часть – характеристический треугольник с основанием на линии вырождения. В такой же области в [3] методами спектрального анализа изучены

задачи для парабола-гиперболических уравнений и соответствующие одномерные спектральные задачи.

В прямоугольной области начально-граничные задачи для однородного и неоднородного уравнений смешанного парабола-гиперболического типа впервые изучались в работах [4; 5, с. 56–94; 6], а в статьях [7–9] исследовались нелокальные задачи для однородного парабола-гиперболического уравнения.

Отметим также работы [10, 11], в которых для следующих трёх классов одномерных неоднородных парабола-гиперболических уравнений: уравнений с вырождающейся гиперболической частью, уравнений с вырождающейся параболической частью и уравнений со степенным вырождением, изучена начально-граничная задача в прямоугольной области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ с ненулевыми условиями на границе при $x = 0$, $x = l$ и $t = -\alpha$.

Обратные задачи возникают во многих областях науки: электродинамике, акустике, квантовой теории рассеяния, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмологии, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели могут быть получены из наблюдаемых данных, а свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных исследованы достаточно полно и приведены в монографиях [12–20].

В работах [20–23] для одномерных неоднородных парабола-гиперболических уравнений в прямоугольной области с неоднородностью, зависящей только от пространственной переменной, изучены обратные задачи по нахождению решения и неоднородности.

В работах [24, 25] в прямоугольной области для двух классов одномерных неоднородных парабола-гиперболических вырождающихся уравнений – уравнений с вырождающейся гиперболической частью и уравнений с вырождающейся параболической частью – с неоднородностью, представимой в виде произведения функций, зависящих только от пространственной и только от временной переменных, рассмотрены обратные задачи по нахождению решения и одной из функций неоднородности.

В настоящей работе, используя идеи работ [20, 26], для уравнения (1) смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде впервые исследована обратная задача по нахождению сомножителя правой части, зависящего от пространственных переменных. Получен критерий единственности решения задачи (2)–(8). Её решение построено в явном виде – как сумм двумерных рядов по ортогональной системе функций. Для этих рядов возникает проблема малых знаменателей, зависящих от двух натуральных аргументов, которая существенно затрудняет обоснование их сходимости. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости построенных рядов найдены оценки, гарантирующие отделимость от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения, т.е. решения, удовлетворяющего условиям (2), (3). Установлена устойчивость решения рассматриваемой задачи относительно возмущения граничных функций.

2. Единственность решения задачи. Пусть $u(x, y, t)$ – решение задачи (2)–(8). Введём функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

где

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \quad (10)$$

– полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике D с нулевыми граничными условиями Дирихле. Отметим также, что система функций (10) образует базис в пространстве $L_2(D)$.

Аналогично [4, 10] получим относительно функции (9) дифференциальные уравнения

$$u'_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = g_1(t) f_{mn}, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$u''_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = g_2(t) f_{mn}, \quad t < 0, \quad (12)$$

здесь

$$\lambda_{mn}^2 = b + \pi^2 \left[\left(\frac{m}{p} \right)^2 + \left(\frac{n}{q} \right)^2 \right], \quad (13)$$

$$f_{mn} = \iint_D f(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy. \quad (14)$$

Далее в равенстве (13) считаем, что $b = \mu^2 \geq 0$ ($\mu \geq 0$), так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров n и m , правая часть в (13) принимает только положительные значения, т.е., как будет следовать из дальнейшего, знак коэффициента b не влияет на справедливость полученных результатов.

Общие решения уравнений (11) и (12) соответственно следующие [4, с. 75]:

$$u_{mn}(t) = a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{mn} \int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)} ds, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$u_{mn}(t) = c_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) + d_{mn} \sin(\lambda_{mn} t) - \frac{f_{mn}}{\lambda_{mn}} \int_t^0 g_2(s) \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds, \quad t < 0, \quad (16)$$

здесь a_{mn} , c_{mn} и d_{mn} – произвольные постоянные.

Функции (15) и (16) в силу требования (2) удовлетворяют условиям склеивания

$$u_{mn}(0+0) = u_{mn}(0-0), \quad u'_{mn}(0+0) = u'_{mn}(0-0), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

только тогда, когда $c_{mn} = a_{mn}$, $d_{mn} = -\lambda_{mn} a_{mn} + f_{mn} g_1(0)/\lambda_{mn}$. Вследствие этих равенств функции (15) и (16) принимают вид

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{mn} I(t), & t \geq 0, \\ a_{mn} \delta_{mn}(t) + f_{mn} \omega_{mn}(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

здесь

$$I(t) = \int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2 (t-s)} ds, \quad \delta_{mn}(t) = \cos(\lambda_{mn} t) - \lambda_{mn} \sin(\lambda_{mn} t), \quad (18)$$

$$\omega_{mn}(t) = \frac{g_1(0)}{\lambda_{mn}} \sin(\lambda_{mn} t) - \frac{1}{\lambda_{mn}} \int_t^0 g_2(s) \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds. \quad (19)$$

Чтобы найти постоянные a_{mn} и f_{mn} , воспользуемся сначала граничными условиями (7), (8) и определением (9):

$$u_{mn}(-\alpha) = \iint_D u(x, y, -\alpha) v_{mn}(x, y) dx dy = \iint_D \psi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy =: \psi_{mn}, \quad (20)$$

$$u_{mn}(\beta) = \iint_D u(x, y, \beta) v_{mn}(x, y) dx dy = \iint_D \varphi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy =: \varphi_{mn}. \quad (21)$$

Удовлетворяя функции (17) условиям (20) и (21), получаем относительно неизвестных a_{mn} и f_{mn} линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} a_{mn} \delta_{mn}(-\alpha) + f_{mn} \omega_{mn}(-\alpha) = \psi_{mn}, \\ a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 \beta} + f_{mn} I(\beta) = \varphi_{mn}. \end{cases} \quad (22)$$

Обозначим через $\Delta_{mn}(\alpha)$ определитель системы (22), выделяя в обозначении только его зависимость от параметра α , хотя он зависит также и от β , b , p и q . Если этот определитель отличен от нуля, т.е.

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \delta_{mn}(-\alpha)I(\beta) - \omega_{mn}(-\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \neq 0, \quad (23)$$

то система (22) имеет единственное решение

$$a_{mn} = \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}(-\varphi_{mn}\omega_{mn}(-\alpha) + \psi_{mn}I(\beta)), \quad f_{mn} = \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}(\varphi_{mn}\delta_{mn}(-\alpha) - \psi_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2\beta}). \quad (24)$$

Если $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$, то коэффициенты a_{mn} и f_{mn} при любых $m, n \in \mathbb{N}$ определяются единственным образом, и поэтому, подставляя их выражения (24) в (17), находим, что функции $u_{mn}(t)$ однозначно задаются формулой

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}[\varphi_{mn}(\delta_{mn}(-\alpha)I(t) - \omega_{mn}(-\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2t}) + \\ + \psi_{mn}(I(\beta)e^{-\lambda_{mn}^2t} - I(t)e^{-\lambda_{mn}^2\beta})], & t \geq 0, \\ \frac{1}{\Delta_{mn}(\alpha)}[\varphi_{mn}(\delta_{mn}(-\alpha)\omega_{mn}(t) - \delta_{mn}(t)\omega_{mn}(-\alpha)) + \\ + \psi_{mn}(I(\beta)\delta_{mn}(t) - \omega_{mn}(t)e^{-\lambda_{mn}^2\beta})], & t \leq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Докажем, что решение задачи (2)–(8) единственно, если и только если $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$. Пусть $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$ и выполнены соотношения (23) при всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда все $\varphi_{mn} = \psi_{mn} \equiv 0$ и из равенств (24) следует, что $a_{mn} = f_{mn} \equiv 0$. Значит, в силу формул (17), (9), (14) при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [-\alpha, \beta]$ имеем

$$\iint_D u(x, y, t)v_{mn}(x, y) dx dy = 0, \quad \iint_D f(x, y)v_{mn}(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (10) в $L_2(D)$ следует, что $u(x, y, t) = 0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$ и $f(x, y) = 0$ почти всюду в D . Вследствие включений (2) и (3) заключаем, что $u(x, y, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$ и $f(x, y) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Пусть при некотором $m = m_0$ или $n = n_0$ выражение $\Delta_{m_0n}(\alpha) = 0$ или $\Delta_{mn_0}(\alpha) = 0$. Допустим, что $\Delta_{mn_0}(\alpha) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(8) (где $\varphi(x, y) = \psi(x, y) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_{mn_0}(x, y, t) = u_{mn_0}(t)v_{mn_0}(x, y),$$

$$u_{mn_0}(t) = \begin{cases} C_{n_0}e^{-\lambda_{mn_0}^2t} + f_{mn_0}I(t), & t \geq 0, \\ C_{n_0}\delta_{mn_0}(t) + f_{mn_0}\omega_{mn_0}(t), & t \leq 0, \end{cases}$$

$$f_{mn_0}(x, y) = f_{mn_0}v_{mn_0}(x, y), \quad f_{mn_0} = -C_{n_0}\frac{e^{-\lambda_{mn_0}^2\beta}}{I(\beta)},$$

здесь C_{n_0} – произвольная постоянная.

Поэтому возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta_{mn}(\alpha)$. Для этого представим его в виде

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \sqrt{1 + \lambda_{mn}^2} \sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn}) \int_0^\beta g_1(s)e^{-\lambda_{mn}^2(\beta-s)} ds - \omega_{mn}(-\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2\beta}, \quad (26)$$

где $\gamma_{mn} = \arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_{mn}^2})$. Применяя к интегралу в (26) первую теорему о среднем при условии, что функция $g_1(s)$ отделена от нуля на $[0, \beta]$, имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{mn}(\alpha) &= \frac{g_1(\xi_{mn})}{\lambda_{mn}^2} \sqrt{1+\lambda_{mn}^2} \sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn})(1 - e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) - e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \omega_{mn}(-\alpha) = \\ &= \frac{g_1(\xi_{mn})}{\lambda_{mn}^2} \sqrt{1+\lambda_{mn}^2} \left[\sin(\lambda_{mn}\alpha + \gamma_{mn})(1 - e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) - e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \frac{\lambda_{mn}^2 \omega_{mn}(-\alpha)}{g_1(\xi_{mn}) \sqrt{1+\lambda_{mn}^2}} \right],\end{aligned}$$

где $\xi_{mn} \in [0, \beta]$. Множитель вне квадратных скобок при всех m и n отделён от нуля. В выражении в квадратных скобках первое слагаемое относительно α имеет счётное множество нулей. Так как $\omega_{mn}(-\alpha)$ при больших m или n имеет порядок λ_{mn}^{-1} , то второе слагаемое в квадратных скобках является бесконечно малой более высокого порядка, чем первое. Следовательно, выражение $\Delta_{mn}(\alpha)$ имеет счётное множество нулей относительно α при больших m или n .

Таким образом, установлен следующий критерий единственности решения задачи (2)–(8).

Теорема 1. Если решение задачи (2)–(8) существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех m и n выполнены условия (23).

3. Существование решения задачи. Если выполнены условия (23) и решение задачи (2)–(8) существует, то его можно представить в виде сумм рядов по системе функций (10):

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \quad f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x, y), \quad (27)$$

здесь коэффициенты $u_{mn}(t)$ и f_{mn} определяются по формулам (17) и (24). Так как $\Delta_{mn}(\alpha)$ является знаменателем коэффициентов рядов (27) и, как показано выше, уравнение $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счётное множество нулей при больших m или n , то возникает проблема малых знаменателей более сложной природы, чем в одномерном случае [3; 4, с. 61–66]. В связи с этим для обоснования сходимости рядов (27) необходимо установить оценку, гарантирующую отделённость от нуля величины $\Delta_{mn}(\alpha)$.

Пусть $n \geq m$. Представим $\Delta_{mn}(\alpha)$ в виде

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \Delta_{mn}^{(1)}(\alpha) - \Delta_{mn}^{(2)}(\alpha), \quad (28)$$

где

$$\Delta_{mn}^{(1)}(\alpha) = \delta_{mn}(\tilde{\alpha}) \frac{g_1(\xi_{mn})}{\lambda_{mn}^2}, \quad \Delta_{mn}^{(2)}(\alpha) = e^{-\lambda_{mn}^2\beta} (\omega_{mn}(-\alpha) + \Delta_{mn}^{(1)}(\alpha)), \quad (29)$$

$$\delta_{mn}(\tilde{\alpha}) = \sqrt{1+\lambda_{mn}^2} \sin(\pi n \tilde{\alpha} \tilde{\lambda}_{mn} + \gamma_{mn}), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{q}, \quad \tilde{\lambda}_{mn} = \sqrt{1 + \left(\frac{qm}{pn}\right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n}\right)^2}. \quad (30)$$

Лемма 1. Пусть $n \geq m$, функция $g_1(t)$ непрерывна на $[0, \beta]$, $|g_1(t)| \geq \tilde{g}_1 = \text{const} > 0$, отношение q/p рационально и $q/p \leq 1$. Если $\tilde{\alpha}$ – положительное рациональное число, т.е. $\tilde{\alpha} = r/s$, $r, s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$, и выполнено неравенство

$$(2\mu r p q)^2 + (2p)^2 \pi q r s < 3\pi^2,$$

то существуют положительные постоянные C_0 и n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$) такие, что при всех $n > n_0$ и любом фиксированном m справедлива оценка

$$|\Delta_{mn}(\alpha)| \geq C_0 n^{-2}.$$

Доказательство. Согласно работе [26, лемма 1] при выполнении условий леммы существует натуральное число n_1 такое, что при всех $n > n_1$ выполняется неравенство

$$|\delta_{mn}(\tilde{\alpha})| > C_1 > 0,$$

где выражение $\delta_{mn}(\tilde{\alpha})$ определено в (30), а C_i здесь и далее – положительные постоянные. Выражение $\tilde{\lambda}_{mn}$ (см. (30)) представим в виде $\tilde{\lambda}_{mn} = 1 + \theta_{mn}$, при этом для θ_{mn} имеет место оценка

$$\frac{3}{8} \left[\left(\frac{qm}{pn} \right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n} \right)^2 \right] < \theta_{mn} < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{qm}{pn} \right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n} \right)^2 \right],$$

так как существует номер n_2 такой, что при $n > n_2$ верно неравенство

$$\left(\frac{qm}{pn} \right)^2 + \left(\frac{\mu q}{\pi n} \right)^2 < 1.$$

Из представления $\lambda_{mn} = \pi n \tilde{\lambda}_{mn} / q$ следует, что

$$|\Delta_{mn}^{(1)}(\alpha)| = |\delta_{mn}(\tilde{\alpha})| \lambda_{mn}^{-2} |g_1(\xi_{mn})| > C_2 n^{-2}.$$

Очевидно, что выражение $\Delta_{mn}^{(2)}(\alpha)$ (см. (29)) является бесконечно малым при $n \rightarrow \infty$, причём существует n_3 такое, что при всех $n > n_3$ справедливо неравенство

$$|\Delta_{mn}^{(2)}(\alpha)| < C_2 n^{-2} / 2.$$

Тогда из представления (28) на основании полученных оценок имеем

$$|\Delta_{mn}(\alpha)| \geq |\Delta_{mn}^{(1)}(\alpha)| - |\Delta_{mn}^{(2)}(\alpha)| > C_2 n^{-2} / 2 = C_0 n^{-2} > 0$$

при $n > n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Лемма доказана.

Замечание. Отметим, что если $m \geq n$ и выполнено неравенство

$$(2\mu r_1 p q)^2 + (2p)^2 \pi p r_1 s_1 < 3\pi^2,$$

где $\tilde{\alpha} = r_1 / s_1$, $r_1, s_1 \in \mathbb{N}$, $(r_1, s_1) = 1$, то для рационального p/q такого, что $p/q \leq 1$, аналогично получаем при всех $m > m_0$ и любом фиксированном n оценку

$$|\Delta_{mn}(\alpha)| \geq C_0 m^{-2}.$$

В этом случае в качестве числа $\tilde{\alpha}$ берётся отношение α/p .

Лемма 2. Пусть $n \geq m$ и функция $g_1(t)$ непрерывна. Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, \beta]$ справедливы оценки

$$|I(t)| \leq C_4 n^{-2}, \quad |I'(t)| \leq C_5, \quad t \in [0, \beta]. \quad (31)$$

Доказательство. Применяя к интегралу $I(t)$ (см. (18)) теорему о среднем, получаем

$$|I(t)| = \left| \int_0^t g_1(s) e^{-\lambda_{mn}^2(t-s)} ds \right| \leq |g_1(\xi_{mn})| \frac{1 - e^{-\lambda_{mn}^2 t}}{\lambda_{mn}^2} \leq C_4 n^{-2}, \quad \xi_{mn} \in [0, t].$$

Так же получим оценку и для производной: $|I'(t)| \leq |g_1(t)| + \lambda_{mn}^2 |I(t)| \leq C_5$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $n \geq m$, функция $g_1(t)$ непрерывна, а функция $g_2(t)$ монотонно возрастает и неотрицательна на $[-\alpha, 0]$. Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $t \in [-\alpha, 0]$ справедливы оценки

$$|\omega_{mn}(t)| \leq C_6 n^{-1}, \quad |\omega'_{mn}(t)| \leq C_7, \quad |\omega''_{mn}(t)| \leq C_8 n. \quad (32)$$

Доказательство. Применяя вторую теорему о среднем, имеем представления

$$\int_t^0 g_2(s) \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \int_{\xi_1}^0 \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \frac{\cos(\lambda_{mn}(t-\xi_1)) - \cos(\lambda_{mn}t)}{\lambda_{mn}},$$

$$\int_t^0 g_2(s) \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \int_{\xi_2}^0 \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds = g_2(0) \frac{\sin(\lambda_{mn}(t-\xi_2)) + \sin(\lambda_{mn}t)}{\lambda_{mn}}$$

для некоторых $\xi_1 = \xi_1(t)$ и $\xi_2 = \xi_2(t)$ из отрезка $[t, 0]$. Тогда из равенства (19) вытекают оценки

$$|\omega_{mn}(t)| \leq \frac{|g_1(0)|}{\lambda_{mn}} |\sin(\lambda_{mn}t)| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |g_2(0)| \left| \int_{\xi_1}^0 \sin(\lambda_{mn}(t-s)) ds \right| \leq \frac{|g_1(0)|}{\lambda_{mn}} + \frac{2|g_2(0)|}{\lambda_{mn}^2} \leq C_6 n^{-1},$$

$$\begin{aligned} |\omega'_{mn}(t)| &\leq |g_1(0)| |\cos(\lambda_{mn}t)| + \left| \int_t^0 g_2(s) \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds \right| \leq \\ &\leq |g_1(0)| + |g_2(0)| \left| \int_{\xi_2}^0 \cos(\lambda_{mn}(t-s)) ds \right| \leq |g_1(0)| + \frac{2|g_2(0)|}{\lambda_{mn}} \leq C_7. \end{aligned}$$

Так как $\omega''_{mn}(t) = -\lambda_{mn}^2 \omega_{mn}(t) + g_2(t)$, то на основании оценки для $|\omega_{mn}(t)|$ при $t \in [-\alpha, 0]$ получим третью оценку из (32). Лемма доказана.

Лемма 4. Если выполнены условия леммы 1, то при всех $n > n_0$, $n \geq m$ справедливы оценки

$$|u_{mn}(t)| \leq M_1(n|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}|), \quad |u'_{mn}(t)| \leq M_2(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|), \quad 0 \leq t \leq \beta,$$

$$|u_{mn}^{(i)}(t)| \leq M_{i+3}(n^{i+2}|\varphi_{mn}| + n^{i+1}|\psi_{mn}|), \quad -\alpha \leq t \leq 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$|f_{mn}| \leq M_6(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|),$$

здесь и далее M_i – положительные постоянные.

Доказательство. Для упрощения записи обозначим $|\varphi_{mn}|/\Delta_{mn}(\alpha)$ через $k_{mn}(\alpha)$, а $|\psi_{mn}|/\Delta_{mn}(\alpha)$ через $l_{mn}(\alpha)$. Оценим значение f_{mn} из равенства (24). Используя лемму 1, получаем

$$|f_{mn}| \leq k_{mn}(\alpha)|\delta_{mn}(-\alpha)| + l_{mn}(\alpha)e^{-\lambda_{mn}^2\beta} \leq M_6(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|).$$

Оценим выражение $u_{mn}(t)$ при $t \in [0, \beta]$. Из (25) в силу оценок (31) и (32) с учётом лемм 1 и 2 получаем

$$\begin{aligned} |u_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||I(t)| + |\omega_{mn}(-\alpha)|e^{-\lambda_{mn}^2t}) + l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)|e^{-\lambda_{mn}^2t} + |I(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(Cn^{-1} + C_{14}n^{-1}) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(C_{15}n^{-3} + C_{16}n^{-2}) \leq M_1(n|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Аналогично получим оценку для $u'_{mn}(t)$, когда $t \in [0, \beta]$:

$$\begin{aligned} |u'_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||I'(t)| + |\omega_{mn}(-\alpha)|\lambda_{mn}^2e^{-\lambda_{mn}^2t}) + \\ &+ l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)|\lambda_{mn}^2e^{-\lambda_{mn}^2t} + |I'(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(C_{17}n + C_{18}n) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(C_{19} + C_{20}) \leq M_2(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Теперь на основании формулы (25) с учётом оценок (31), (32) и лемм 1 и 2 оценим выражение $u_{mn}(t)$ при $t \in [-\alpha, 0]$:

$$\begin{aligned} |u_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||\omega_{mn}(t)| + |\delta_{mn}(t)||\omega_{mn}(-\alpha)|) + \\ &\quad + l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)||\delta_{mn}(t)| + |\omega_{mn}(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(C_{21} + C_{22}) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(n^{-1}C_{23} + n^{-1}C_{24}) \leq M_3(n^2|\varphi_{mn}| + n|\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Аналогично оценим выражение $u'_{mn}(t)$ при $t \in [-\alpha, 0]$:

$$\begin{aligned} |u'_{mn}(t)| &\leq k_{mn}(\alpha)(|\delta_{mn}(-\alpha)||\omega'_{mn}(t)| + |\delta'_{mn}(t)||\omega_{mn}(-\alpha)|) + \\ &\quad + l_{mn}(\alpha)(|I(\beta)||\delta'_{mn}(t)| + |\omega'_{mn}(t)|e^{-\lambda_{mn}^2\beta}) \leq \\ &\leq C_0^{-1}|\varphi_{mn}|n^2(C_{25}n + C_{26}n) + C_0^{-1}|\psi_{mn}|n^2(C_{27} + C_{28}) \leq M_4(n^3|\varphi_{mn}| + n^2|\psi_{mn}|). \end{aligned}$$

Так как $u''_{mn}(t) = -\lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) + f_{mn}g_2(t)$, то на основании оценок для $|u_{mn}(t)|$ при $t \in [-\alpha, 0]$ и f_{mn} получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

В силу леммы 4 первый ряд (27) и его производные первого порядка в замкнутой области $\overline{Q}$ и производные второго порядка соответственно в областях $\overline{Q}_+$ и $\overline{Q}_-$ и второй ряд в (27) мажорируются рядом

$$M_7 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n > n_0 \\ n \geq m}} (n^4|\varphi_{mn}| + n^3|\psi_{mn}|) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m > m_0 \\ m > n}} (m^4|\varphi_{mn}| + m^3|\psi_{mn}|) \right]. \quad (33)$$

Поэтому нам достаточно исследовать на сходимость каждый из двух двойных рядов, входящий в выражение (33).

Для упрощения в дальнейшем записи примем следующие обозначения: через $v_{mn}^0(x, y)$ обозначим функцию, которая получится при замене в функции $v_{mn}(x, y)$ (см. определение (10)) обоих синусов косинусами, через $v_{mn}^1(x, y)$ – функцию, которая получится, если заменить в функции $v_{mn}(x, y)$ первый синус на косинус, а через $v_{mn}^2(x, y)$ – функцию, которая получится, если заменить в функции $v_{mn}(x, y)$ второй синус на косинус.

Лемма 5. Пусть $\varphi(x, y) \in C^6(\overline{D})$ и

$$\varphi(0, y) = \varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xxxx}(0, y) = \varphi(p, y) = \varphi_{xx}(p, y) = \varphi_{xxxx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q,$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yyyy}(x, 0) = \varphi(x, q) = \varphi_{yy}(x, q) = \varphi_{yyyy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$\psi(x, y) \in C^5(\overline{D})$ и

$$\psi(0, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi(p, y) = \psi''_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q,$$

$$\psi(x, 0) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi(x, q) = \psi_{yy}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p.$$

Тогда справедливы представления

$$\varphi_{mn} = \frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi} \right)^5 \varphi_{mn}^{(1,5)} = \frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi} \right)^5 \varphi_{mn}^{(5,1)} \quad \text{и} \quad \psi_{mn} = \frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi} \right)^4 \psi_{mn}^{(1,4)} = \frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi} \right)^4 \psi_{mn}^{(4,1)},$$

где

$$\varphi_{mn}^{(1,5)} = \iint_D \varphi_{yyyyy} v_{mn}^0(x, y) dx dy, \quad \varphi_{mn}^{(5,1)} = \frac{2}{\sqrt{pq}} \iint_D \varphi_{xxxxx} v_{mn}^0(x, y) dx dy,$$

$$\psi_{mn}^{(1,4)} = \iint_D \psi_{yyyy} v_{mn}^1(x, y) dx dy, \quad \psi_{mn}^{(4,1)} = \iint_D \psi_{xxxx} v_{mn}^2(x, y) dx dy,$$

при этом следующие ряды сходятся:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^6 \varphi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=6, \quad (34)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(i,j)}|^2 \leq \iint_D \left(\frac{\partial^5 \psi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right)^2 dx dy, \quad i+j=5. \quad (35)$$

Доказательство. Чтобы получить приведённые в формулировке леммы представления для величин φ_{mn} и ψ_{mn} , достаточно проинтегрировать по частям шесть и пять раз соответственно в формулах (20) и (21) с учётом условий данной леммы. Сходимость указанных рядов следует из неравенства Бесселя, которое имеет место для кратных рядов Фурье [27, с. 333], т.е. неравенства (34) и (35) являются неравенствами Бесселя для производных шестого и пятого порядков соответственно функций $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$. Лемма доказана.

На основании этой леммы ряды в (33) мажорируются сходящимися рядами

$$M_{10} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{n > n_0 \\ n \geq m}} \frac{1}{nm} (|\varphi_{mn}^{(1,5)}| + |\psi_{mn}^{(1,4)}|) \quad \text{и} \quad M_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m > m_0 \\ m > n}} \frac{1}{nm} (|\varphi_{mn}^{(5,1)}| + |\psi_{mn}^{(4,1)}|).$$

Пусть $p = q$ и выполнены условия леммы 1. Тогда, согласно этой лемме, получаем: $\Delta_{mn}(\alpha) \geq C_0 n^{-2}$, если $n \geq m$ и $n \geq n_0$, и $\Delta_{mn}(\alpha) \geq C_0 m^{-2}$, если $m \geq n$ и $m \geq n_0$. Следовательно, равенство $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ возможно только при $1 \leq m, n \leq n_0$. Обозначим через $\mathcal{M}$ (конечное) множество тех пар (m,n) , для которых $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$. Тогда, если $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ для чисел $\tilde{\alpha}$, определённых в лемме 1, и $(m,n) \in \mathcal{M}$, то для разрешимости задачи (2)–(8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\varphi_{mn} \delta_{mn}(-\alpha) - \psi_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 \beta} = 0, \quad (m,n) \in \mathcal{M}. \quad (36)$$

Поэтому решение задачи (2)–(8) определяется в виде сумм рядов

$$u(x,y,t) = \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n) \notin \mathcal{M}}}^{\infty} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y) + \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}} u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \quad (37)$$

$$f(x,y) = \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m,n) \notin \mathcal{M}}}^{\infty} f_{mn} v_{mn}(x,y) + \sum_{(m,n) \in \mathcal{M}} f_{mn} v_{mn}(x,y), \quad (38)$$

где функция $u_{mn}(t)$ и число f_{mn} при $(m,n) \notin \mathcal{M}$ задаются соответственно равенствами (25) и (24), а при $(m,n) \in \mathcal{M}$ – равенствами

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} C_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t} + f_{mn} I(t), & t \geq 0, \\ C_{mn} \delta_{mn}(t) + f_{mn} \omega_{mn}(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad f_{mn} = -C_{mn} \frac{e^{-\lambda_{mn}^2 \beta}}{I(\beta)},$$

здесь C_{mn} – произвольные постоянные.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть постоянные α , p , q , b и функция $g_1(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1, функция $g_2(t)$ – условиям леммы 4, функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – условиям леммы 5. Пусть, кроме того, $p = q$. Тогда, если $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при $n = \overline{1, n_0}$ и $m = \overline{1, m_0}$, существует единственное решение задачи (2)–(8) и оно определяется рядами (27); если $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ при некоторых $n = n_1, n_2, \dots, n_k \leq n_0$, то задача (2)–(8) разрешима только тогда, когда выполнены условия (36) и решение в этом случае определяется рядами (37) и (38).

4. Устойчивость решения задачи. Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} = \left(\iint_D u^2(x, y, t) dx dy \right)^{1/2}, \quad \|u(x, y, t)\|_{C(\overline{Q})} = \max_{\overline{Q}} |u(x, y, t)|,$$

$$\|f(x, y)\|_{W_2^l(D)} = \left(\iint_D \sum_{i,j=0}^l \left| \frac{\partial^{(i+j)} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \right)^{1/2}, \quad \|f(x, y)\|_{C^l(\overline{D})} = \sum_{i,j=0}^l \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^{(i+j)} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right|,$$

где $l \geq 1$. Устойчивость в терминах введённых выше норм полученного решения задачи (2)–(8) при возмущениях граничных функций вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения (27) задачи (2)–(8) справедливы оценки

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} \leq M_{12}(\|\varphi(x, y)\|_{W_2^2(D)} + \|\psi(x, y)\|_{W_2^1(D)}), \quad (39)$$

$$\|f(x, y)\|_{L_2(D)} \leq M_{13}(\|\varphi(x, y)\|_{W_2^3(D)} + \|\psi(x, y)\|_{W_2^2(D)}), \quad (40)$$

$$\|u(x, y, t)\|_{C(\overline{Q})} \leq M_{14}(\|\varphi(x, y)\|_{C^4(\overline{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C^3(\overline{D})}), \quad (41)$$

$$\|f(x, y)\|_{C(\overline{Q})} \leq M_{15}(\|\varphi(x, y)\|_{C^5(\overline{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C^4(\overline{D})}). \quad (42)$$

Доказательство. Так как система функций (10) ортонормирована в $L_2(D)$, то в силу первого равенства в (27) на основании леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t) = \sum_{n \geq m} u_{mn}^2(t) + \sum_{m > n} u_{mn}^2(t) \leq \\ &\leq 2M_3^2 \sum_{n \geq m} (n^4 \varphi_{mn}^2 + n^2 \psi_{mn}^2) + 2M_3^2 \sum_{m > n} (m^4 \varphi_{mn}^2 + m^2 \psi_{mn}^2). \end{aligned} \quad (43)$$

На основании представлений

$$\varphi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi} \right)^2 \varphi_{mn}^{(0,2)} = \left(\frac{p}{m\pi} \right)^2 \varphi_{mn}^{(2,0)}, \quad \psi_{mn} = \frac{q}{n\pi} \psi_{mn}^{(0,1)} = \frac{p}{m\pi} \psi_{mn}^{(1,0)},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^{(0,2)} &= \iint_D \varphi_{yy}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, & \varphi_{mn}^{(2,0)} &= \iint_D \varphi_{xx}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, \\ \psi_{mn}^{(0,1)} &= \iint_D \varphi_y(x, y) v_{mn}^2(x, y) dx dy, & \psi_{mn}^{(1,0)} &= \iint_D \varphi_x(x, y) v_{mn}^1(x, y) dx dy \end{aligned}$$

из неравенства (43) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &\leq 2M_3^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{q}{\pi} \right)^4 |\varphi_{mn}^{(0,2)}|^2 + \left(\frac{q}{\pi} \right)^2 |\psi_{mn}^{(0,1)}|^2 \right] + \\ &+ 2M_3^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{p}{\pi} \right)^4 |\varphi_{mn}^{(2,0)}|^2 + \left(\frac{p}{\pi} \right)^2 |\psi_{mn}^{(1,0)}|^2 \right] \leq \\ &\leq M_{12}^2 \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}^{(0,2)}|^2 + |\varphi_{mn}^{(2,0)}|^2) + \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\psi_{mn}^{(0,1)}|^2 + |\psi_{mn}^{(1,0)}|^2) \right] \leq \\ &\leq M_{12}^2 (\|\varphi(x, y)\|_{W_2^2(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{W_2^1(D)}^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость оценки (39).

Из второго равенства в (27) на основании леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}^2 = \sum_{n \geq m} f_{mn}^2 + \sum_{m > n} f_{mn}^2 \leq \\ &\leq 2M_6^2 \sum_{n \geq m} (n^6 \varphi_{mn}^2 + n^4 \psi_{mn}^2) + 2M_3^2 \sum_{m > n} (m^6 \varphi_{mn}^2 + m^4 \psi_{mn}^2). \end{aligned} \quad (44)$$

На основании представлений

$$\varphi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(0,3)} = \left(\frac{p}{m\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(3,0)}, \quad \psi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(0,2)} = \left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(2,0)},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^{(0,3)} &= \iint_D \varphi_{yyy}(x, y) v_{mn}^2(x, y) dx dy, & \varphi_{mn}^{(3,0)} &= \iint_D \varphi_{xxx}(x, y) v_{mn}^1(x, y) dx dy, \\ \psi_{mn}^{(0,2)} &= \iint_D \psi_{yy}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, & \psi_{mn}^{(2,0)} &= \iint_D \psi_{xx}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

из неравенства (44) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_{L_2(D)}^2 &\leq 2M_6^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{q}{\pi}\right)^6 |\varphi_{mn}^{(0,3)}|^2 + \left(\frac{q}{\pi}\right)^4 |\psi_{mn}^{(0,2)}|^2 \right] + \\ &+ 2M_6^2 \sum_{n \geq m} \left[\left(\frac{p}{\pi}\right)^6 |\varphi_{mn}^{(3,0)}|^2 + \left(\frac{p}{\pi}\right)^4 |\psi_{mn}^{(2,0)}|^2 \right] \leq \\ &\leq M_{13}^2 \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}^{(0,3)}|^2 + |\varphi_{mn}^{(3,0)}|^2) + \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\psi_{mn}^{(0,2)}|^2 + |\psi_{mn}^{(2,0)}|^2) \right] \leq \\ &\leq M_{13}^2 (\|\varphi(x, y)\|_{W_2^3(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{W_2^2(D)}^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость оценки (40).

Пусть (x, y, t) – произвольная точка параллелепипеда $\overline{Q}$. Тогда в силу первого равенства в (27) на основании леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| &\leq \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{n \geq m} |u_{mn}(t)| + \frac{2}{\sqrt{pq}} \sum_{m > n} |u_{mn}(t)| \leq \\ &\leq \widetilde{M}_1 \sum_{n \geq m} (n^2 |\varphi_{mn}| + n |\psi_{mn}^2|) + \widetilde{M}_1 \sum_{m > n} (m^2 \varphi_{mn} + m \psi_{mn}), \end{aligned} \quad (45)$$

здесь и далее $\widetilde{M}_i$ – положительные постоянные, зависящие от p , q и α . Воспользуемся равенствами

$$\varphi_{mn} = -\frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(3,1)} = -\frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi}\right)^3 \varphi_{mn}^{(1,3)}, \quad \psi_{mn} = -\frac{q}{n\pi} \left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(2,1)} = -\frac{p}{m\pi} \left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(1,2)},$$

где

$$\varphi_{mn}^{(3,1)} = \iint_D \varphi_{xxxy}(x, y) v_{mn}^0(x, y) dx dy, \quad \varphi_{mn}^{(1,3)} = \iint_D \varphi_{xyyy}(x, y) v_{mn}^0(x, y) dx dy,$$

$$\psi_{mn}^{(2,1)} = \iint_D \varphi_{xy}(x, y) v_{mn}^2(x, y) dx dy, \quad \psi_{mn}^{(1,2)} = \iint_D \varphi_{xy}(x, y) v_{mn}^1(x, y) dx dy.$$

Тогда, продолжая оценку (45), будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| \leq & \widetilde{M}_1 \sum_{n \geq m} \left(\frac{q^3 p}{\pi^4} \frac{1}{mn} |\varphi_{mn}^{(1,3)}| + \frac{q^2 p}{\pi^3} \frac{1}{mn} |\psi_{mn}^{(1,2)}| \right) + \\ & + \widetilde{M}_1 \sum_{m > n} \left(\frac{p^3 q}{\pi^4} \frac{1}{mn} |\varphi_{mn}^{(3,1)}| + \frac{p^2 q}{\pi^3} \frac{1}{mn} |\psi_{mn}^{(2,1)}| \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского получаем

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| \leq & \widetilde{M}_2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} (|\varphi_{mn}^{(1,3)}| + |\varphi_{mn}^{(3,1)}|) + \widetilde{M}_3 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} (|\psi_{mn}^{(1,2)}| + |\psi_{mn}^{(2,1)}|) \leq \\ \leq & \widetilde{M}_2 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mn} \right)^2 \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(1,3)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\varphi_{mn}^{(3,1)}|^2 \right)^{1/2} \right] + \\ & + \widetilde{M}_3 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mn} \right)^2 \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(1,2)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(2,1)}|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \\ \leq & \widetilde{M}_4 \|\varphi(x, y)\|_{W_2^4(D)} + \widetilde{M}_5 \|\psi(x, y)\|_{W_2^3(D)} \leq M_{14} (\|\varphi(x, y)\|_{C^4(\overline{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C^3(\overline{D})}). \end{aligned}$$

Оценка (41) доказана. Аналогично устанавливается оценка (42). Теорема доказана.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-60016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 1. С. 72–78.
2. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. II // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1379–1386.
3. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральной задаче из теории парабола-гиперболического уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 4. С. 451.
4. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.
5. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. М., 2016.
6. Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415–435.
7. Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Докл. РАН. 2012. Т. 14. № 3. С. 34–44.
8. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356–365.
9. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа со степенным вырождением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 12. С. 55–64.
10. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее приложения. 2017. Т. 137. С. 26–60.
11. Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type // J. of Math. Sci. 2019. V. 236. № 6. P. 603–640.

12. *Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск, 1982.
13. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
14. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
15. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel, 1999.
16. *Bukhgeim A.L.* Introduction to the Theory of Inverse Problems. Utrecht, 2000.
17. *Ivanchov M.* Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. Lviv, 2003.
18. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
19. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
20. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. Т. 56. № 4. С. 55–62.
21. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Мат. заметки. 2010. Т. 87. Вып. 6. С. 907–918.
22. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.
23. *Сидоров С.Н.* Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика. 2014. № 19 (190). Вып. 36. С. 45–57.
24. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.
25. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного парабола-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский мат. журн. 2019. Т. 11. № 1. С. 72–86.
26. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Начально-граничная задача для трёхмерного уравнения парабола-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1071–1080.
27. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Т. 2. М., 1987.

Стерлитамакский филиал
Башкирского государственного университета

Поступила в редакцию 15.06.2020 г.
После доработки 21.09.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ
БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2021 г. К. Д. Федоров

Рассмотрена первая начально-краевая задача для параболической по Петровскому однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области Ω на плоскости с криволинейными боковыми границами, негладкими при $t = 0$. Доказано существование решения этой задачи в классе $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ с помощью метода граничных интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064121120050

Введение. Предметом исследования настоящей работы является первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной модельной параболической системы с одной пространственной переменной в ограниченной области Ω на плоскости с криволинейными боковыми границами (см. ниже условие (1)), допускающими в начальный момент времени $t = 0$ наличие “кловов”. Решение этой задачи из класса $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ строится методом граничных интегральных уравнений и может быть представлено в виде суммы специальных параболических потенциалов.

Если боковые границы области достаточно гладкие, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0, T]$, где $0 < \alpha < 1$, то для любых правых частей ψ_k , $k = 1, 2$, граничного условия первого рода из класса $H_0^{1+\alpha/2}[0, T]$, согласно [1], существует единственное решение такой задачи в классе $H_{x,t}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$.

Если боковые границы области – негладкие кривые, принадлежащие классу $H^{(1+\alpha)/2}[0, T]$, то для любых ψ_k , $k = 1, 2$, имеющих непрерывную дробную производную порядка $1/2$, равную нулю при $t = 0$, согласно [2–5], существует единственное регулярное решение первой начально-краевой задачи в классе $C_{x,t}^{1,0}(\bar{\Omega})$. Если, кроме того, $\psi_k \in H_0^{(1+\alpha)/2}[0, T]$, где $0 < \alpha < 1$, $k = 1, 2$, то это решение принадлежит классу $H_{x,t}^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$.

В настоящей статье доказывается, что (несмотря на негладкость при $t = 0$ боковых границ области) существует решение поставленной задачи из класса $C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$, если граничные функции принадлежат пространству $C_0^1[0, T]$.

Структура работы следующая. В п. 1 вводятся основные функциональные пространства, ставится первая начально-краевая задача и формулируется основная теорема. В п. 2 исследуется гладкость специального параболического потенциала. В п. 3 изучается вопрос об однозначной разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, к которой редуцируется исходная задача. В п. 4 приводится доказательство теоремы о существовании решения поставленной задачи в классе $\hat{C}_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ (см. п. 1). В п. 5 показывается, что для любой функции из $\hat{C}_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})$ её следы на боковых границах области Ω принадлежат классу $C_0^1[0, T]$.

1. Предварительные сведения и формулировка основного результата. Фиксируем $T > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Введём нужные в дальнейшем нормированные пространства: $C[0, T]$ – пространство непрерывных (вектор-)функций $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ с нормой $\|\psi; [0, T]\|^0 := \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|$

и его подпространство $C_0[0, T] := \{\psi \in C[0, T] : \psi(0) = 0\}$, а также пространство $C^1[0, T] := \{\psi \in C[0, T] : \psi' \in C[0, T]\}$ с нормой $\|\psi; [0, T]\|^1 := \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\psi'; [0, T]\|^0$ и его подпространство $C_0^1[0, T] := \{\psi \in C^1[0, T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассматриваем полосу

$$D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T\}.$$

Пусть Ω – произвольная область в D . Через $C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$ обозначим нормированное пространство (вектор-)функций u , непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими первыми по x , t и второй по x производными, с нормой

$$\|u; \Omega\|^{2,1} := \sum_{k=0}^2 \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \right| + \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|.$$

Введём пространство $\widehat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) := \{u \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) : \|u; \Omega\|^{(2)} < \infty\}$, где

$$\|u; \Omega\|^{(2)} := \|u; \Omega\|^{2,1} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega \\ |\Delta t| \neq 0}} |\Delta_t u_x(x, t)| |\Delta t|^{-1/2},$$

и его подпространство

$$\widehat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) := \{u \in \widehat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega}) : u(x, 0) = u_x(x, 0) = u_{xx}(x, 0) = u_t(x, 0) = 0\}.$$

Под значениями (вектор-)функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения “изнутри” области.

Под принадлежностью вектор-функции некоторому функциональному пространству понимается принадлежность всех её компонент этому пространству.

Для любой числовой матрицы B (или числового вектора b) под $|B|$ (соответственно $|b|$) понимаем максимум из модулей её элементов (его компонент).

Рассмотрим область Ω следующего вида:

$$\Omega := \{(x, t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t), \quad 0 < t < T\}$$

– криволинейную трапецию с боковыми сторонами $\Sigma_k := \{(x, t) \in \overline{D} : x = g_k(t), \quad 0 \leq t \leq T\}$,

$$g_k \in C[0, T] \cap C^1(0, T], \quad |g'_k(t)| \leq \omega(t^{1/2})t^{-1/2}, \quad 0 < t \leq T, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где ω – некоторый модуль непрерывности, и

$$g_2(t) - g_1(t) \geq d > 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Модулем непрерывности, следуя [6, с. 150–151], называем неубывающую непрерывную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, являющуюся полуаддитивной (т.е. $\omega(z_1 + z_2) \leq \omega(z_1) + \omega(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in [0, +\infty)$) и равную нулю в нуле.

Отметим известные свойства модуля непрерывности (см., например, [6, с. 151–153]):

- 1) при любом $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\omega(nz) \leq n\omega(z)$, где $z > 0$;
- 2) функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает, т.е. $\omega(z_2)/z_2 \leq 2\omega(z_1)/z_1$, если $z_2 \geq z_1 > 0$;
- 3) для любого числа $c > 0$ существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\omega(|x|) \exp\{-cx^2/t\} \leq C\omega(t^{1/2}) \exp\{-cx^2/2t\} \quad \text{для } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим параболический по Петровскому (см. [7]) матричный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T,$$

где $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^m$ — $m \times m$ -матрица, элементы которой являются вещественными числами и для собственных чисел μ_k которой выполнено условие $\operatorname{Re} \mu_r > 0$, $r = \overline{1, m}$.

Фундаментальной матрицей решений системы $Lu = 0$ является функция $Z(x - \xi, t - \tau)$, $(x, t), (\xi, \tau) \in \overline{D}$, $t > \tau$ (см., например, [8, с. 296–297]), где

$$Z(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \exp\{-\sigma^2 A t\} d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{l+k}}{\partial t^l \partial x^k} Z(x, t) \right| \leq C_{k,l} t^{-(1+2l+k)/2} \exp\{-cx^2/t\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k, l \geq 0, \quad (3)$$

где $C_{k,l}$ и c — некоторые положительные постоянные.

Ставится задача: найти функцию $u \in C(\overline{\Omega})$, являющуюся регулярным решением первой начально-краевой задачи

$$Lu = 0, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad g_1(0) \leq x \leq g_2(0), \quad (5)$$

$$u|_{\Sigma_k} = \psi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2. \quad (6)$$

Обозначим

$$Y_k(x, t) := \int_0^\infty Z(x + (-1)^{k+1}r, t) dr, \quad (x, t) \in \overline{D}, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда для любых $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ решением задачи (4)–(6) является сумма потенциалов

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^2 \int_0^t Y_k(x - g_k(\tau), t - \tau) \varphi_k(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad (8)$$

где вектор-функция $(\varphi_1, \varphi_2)^T$, принадлежащая пространству $C_0^1[0, T]$, — единственное в $C[0, T]$ решение системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^t Y_k(g_l(t) - g_k(\tau), t - \tau) \varphi_k(\tau) d\tau = \psi_l(t), \quad t \in [0, T], \quad l = 1, 2. \quad (9)$$

При этом $u \in \widehat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и справедлива оценка

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1). \quad (10)$$

Здесь и далее через C , c обозначаем положительные постоянные, зависящие от T , A , Σ_k , m , и конкретный вид которых для нас не важен.

Замечания.

1. При $m = 1$ имеем случай одного уравнения и регулярное решение задачи (4)–(6) является единственным в классе $C(\overline{\Omega})$ (см., например, [9]).

2. Если $g_k \in H^{1/2+\omega_1}([0, T])$, $k = 1, 2$, т.е. если

$$|\Delta_t g_k(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t + \Delta t \in [0, T], \quad (11)$$

где функция ω_1 удовлетворяет условию Дини

$$\tilde{\omega}_1(x) = \int_0^x \frac{\omega_1(t)}{t} dt < \infty, \quad x > 0, \quad (12)$$

то из [10] вытекает, что регулярное решение первой начально-краевой задачи существует в классе $C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega})$. В частном случае $\omega_1(z) = z^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, единственность регулярного решения в классе $C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega})$ следует из [4, 5].

3. Если в условии (1) предположить, что модуль непрерывности $\omega = \omega_1$ удовлетворяет условию Дини (12), то g_k удовлетворяют условию Дини–Гёльдера (11).

4. Потенциалы вида (7) были ранее введены в [11, 12] для получения гладкого решения второй начально-краевой задачи в полуограниченной области с боковой границей из класса $H^{(1+\alpha)/2}([0, T])$, где $0 < \alpha < 1$.

Кроме того, в работе доказывается следующее

Утверждение. Если $u \in \widehat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$, то $\psi_k \in C^1[0, T]$, где $\psi_k(t) = u(g_k(t), t)$, $k = 1, 2$.

2. Специальный параболический потенциал. Пусть $\Sigma := \{(x, t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$,

$$g \in C[0, T] \cap C^1(0, T], \quad |g'(t)| \leq \omega(t^{1/2})t^{-1/2}, \quad 0 < t \leq T, \quad (13)$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Заметим, что из условия (13) следует неравенство

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leq 2|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2}), \quad 0 \leq t, \quad t + \Delta t \leq T.$$

Рассмотрим множества

$$D_+ := \{(x, t) \in D : x > g(t)\}, \quad D_- := \{(x, t) \in D : x < g(t)\}$$

и, следуя [11], определим для (вектор-)плотности $\varphi \in C[0, T]$ специальные параболические потенциалы $S_+\varphi$ и $S_-\varphi$ формулами

$$S_+\varphi(x, t) := \int_0^t Y_1(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{D}_+,$$

$$S_-\varphi(x, t) := \int_0^t Y_2(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{D}_-,$$

где функции $Y_k(x, t)$, $k = 1, 2$, определены формулой (7).

Заметим, что для любых $\varphi \in C[0, T]$ и функции g , удовлетворяющей условию (13), имеют место соотношения

$$S_\pm \varphi \in C_{x,t}^{2,1}(D_\pm), \quad L(S_\pm \varphi) = 0 \quad \text{в } D_\pm.$$

Здесь и далее выбор знаков “+” или “–” соответственный.

Лемма 1. Пусть $\varphi \in C[0, T]$ и функция g удовлетворяет условию (13). Тогда справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k S_\pm \varphi}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C \|\varphi\|^0 t^{1-k/2}, \quad k = 0, 1, \quad (x, t) \in \overline{D}_\pm, \quad (14)$$

$$\left| \frac{\partial^2 S_{\pm} \varphi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C \|\varphi\|^0, \quad (x, t) \in D_{\pm}, \quad (15)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial S_{\pm} \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq C \|\varphi\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t), (x, t + \Delta t) \in \overline{D}_{\pm}. \quad (16)$$

Если $\varphi \in C_0[0, T]$, то

$$\left| \frac{\partial^2 S_{\pm} \varphi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C \omega_{\varphi}(t), \quad (x, t) \in D_{\pm}, \quad (17)$$

где ω_{φ} – модуль непрерывности функции φ на $[0, T]$.

Доказательство. Неравенство (14) непосредственно следует из определения (7) и оценки (3).

Для доказательства оценок (15)–(17) предварительно заметим, что

$$\frac{\partial S_{\pm} \varphi}{\partial x}(x, t) = \mp \int_0^t Z(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \overline{D}_{\pm}.$$

Без ограничения общности рассматриваем $S_+ \varphi$ при $(x, t) \in D_+$.

Докажем оценку (15). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_+ \varphi}{\partial x^2}(x, t) &= - \int_0^t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^t \left(\frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t - \tau) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(t), t - \tau) \right) \varphi(\tau) d\tau \equiv I_1(x, t) + I_2(x, t). \end{aligned}$$

Из представления (см. [13])

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x, t) = -\frac{x}{2t} A^{-1} Z(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (18)$$

следует оценка

$$|I_1(x, t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t \frac{x - g(t)}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left\{ -c \frac{(x - g(t))^2}{t - \tau} \right\} d\tau \leq C \|\varphi\|^0, \quad (x, t) \in D_+.$$

В силу условия (13) получаем, что

$$|I_2(x, t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t \frac{|g(t) - g(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} d\tau \leq C \|\varphi\|^0 \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{(t - \tau)^{1/2} \tau^{1/2}} d\tau \leq C \|\varphi\|^0, \quad (x, t) \in D_+.$$

Если, кроме того, $\varphi(0) = 0$, то, используя неравенство

$$|\varphi(\tau)| = |\varphi(\tau) - \varphi(0)| \leq \omega_{\varphi}(\tau) \leq \omega_{\varphi}(t),$$

приходим к оценке (17).

Докажем оценку (16). При $\Delta t \geq t$ она следует из оценки (14) для $k = 1$. В случае $\Delta t < t$ положим

$$\begin{aligned} \Delta_t \frac{\partial S_+ \varphi}{\partial x}(x, t) &= - \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} Z(x - g(\tau), t + \Delta t - \tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t Z(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^{t-\Delta t} \Delta_t Z(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \equiv J_1(x, t, \Delta t) + J_2(x, t, \Delta t) + J_3(x, t, \Delta t). \end{aligned}$$

Интегралы J_1 и J_2 оцениваются аналогично. Оценим, например, J_2 :

$$|J_2(x, t, \Delta t)| \leq C \|\varphi\|^0 \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leq C \|\varphi\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t) \in \overline{D}_+.$$

Остаётся оценить интеграл J_3 , имеем

$$|J_3(x, t, \Delta t)| \leq C \|\varphi\|^0 |\Delta t| \int_0^{t-\Delta t} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \leq C \|\varphi\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t) \in \overline{D}_+.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in C[0, T]$ и функция g удовлетворяет условию (13). Тогда для любого $t^0 \in [0, T]$ имеют место соотношения

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (g(t^0), t^0) \\ (x,t) \in D_+}} \frac{\partial^2 S_+ \varphi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{2} A^{-1} \varphi(t^0) + \int_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0 - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (19)$$

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (g(t^0), t^0) \\ (x,t) \in D_-}} \frac{\partial^2 S_- \varphi}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{1}{2} A^{-1} \varphi(t^0) + \int_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0 - \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (19), поскольку формула (20) получается аналогично. Если $t^0 = 0$, то (19) следует из оценки (17). Фиксируем произвольно $t^0 \in (0, T]$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $t \in [t^0/2, T]$. Для любого $0 < \delta < t^0/2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau &= \left(\int_0^\delta + \int_\delta^t \right) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(x - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \equiv \\ &\equiv I_1(x, t; \delta) + I_2(x, t; \delta). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{\partial Z}{\partial x}(x, t), \quad (x, t) \in D_+.$$

Оценим интеграл I_1 , повторяя доказательство неравенств (15) и (17):

$$|I_1(x, t; \delta)| \leq \int_0^\delta \left| \frac{\partial Z}{\partial x}(x - g(\tau), t - \tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) \right| d\tau \leq C \omega_\varphi(\delta), \quad (x, t) \in D_+.$$

Положим

$$I_3(t; \delta) = \int_0^\delta \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t) - g(\tau), t - \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Из условия (13) и представления (18) следует, что

$$|I_3(t; \delta)| \leq C \int_0^\delta \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}} |\varphi(\tau)| d\tau \leq C \|\varphi\|^0 \omega(\delta^{1/2}), \quad t \in [t^0/2, T].$$

Фиксируем такое $\delta = \delta(\varepsilon, t^0) \in (0, t^0/2)$, чтобы выполнялось неравенство

$$|I_1(x, t; \delta)| + |I_3(t; \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, t) \in D_+, \quad t \in [t^0/2, T]. \quad (21)$$

Для выбранного δ рассмотрим интеграл

$$I_2(x, t; \delta) = - \int_0^{t-\delta} \frac{\partial Z}{\partial x}(x - \tilde{g}(\tau), t - \delta - \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{g}(\tau) = g(\tau + \delta)$, $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau + \delta)$. Так как $\tilde{g} \in C^1[0, T - \delta]$ и $\tilde{g}(t^0 - \delta) = g(t^0)$, то в силу формулы “скачка” для производной потенциала простого слоя (см. [13]) будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (g(t^0), t^0) \\ (x,t) \in D_+}} I_2(x, t; \delta) &= \frac{1}{2} A^{-1} \varphi(t^0) - \int_0^{t^0-\delta} \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0) - \tilde{g}(\tau), t^0 - \delta - \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} A^{-1} \varphi(t^0) - \int_\delta^{t^0} \frac{\partial Z}{\partial x}(g(t^0) - g(\tau), t^0 - \tau) \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

и поэтому существует $\delta_1 = \delta_1(\delta, \varepsilon, t^0) \in (0, \delta)$, при котором

$$\left| I_2 - \frac{1}{2} A^{-1} \varphi(t^0) - \int_\delta^{t^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0 - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $|x - g(t^0)| < \delta_1$, $|t - t^0| < \delta_1$. Тогда из неравенства (21) заключаем, что

$$\left| \frac{\partial^2 S_+ \varphi}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{2} A^{-1} \varphi(t^0) - \int_0^{t^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}(g(t^0) - g(\tau), t^0 - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right| < \varepsilon,$$

если $|x - g(t^0)| < \delta_1$, $|t - t^0| < \delta_1$. Отсюда вытекает соотношение (19). Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует

Теорема 2. Пусть для функции g выполнено условие (13). Тогда для любой $\varphi \in C_0^1[0, T]$ потенциал $S_\pm \varphi$ принадлежит пространству $\hat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{D}_\pm)$ и имеют место оценки

$$\|S_\pm \varphi; D_\pm\|^{(2)} \leq C \|\varphi; [0, T]\|^0. \quad (22)$$

3. Система граничных интегральных уравнений.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда для любых $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ система интегральных уравнений Вольтерры первого рода

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^t Y_k(g_l(t) - g_k(\tau), t - \tau) \varphi_k(\tau) d\tau = \psi_l(t), \quad l = 1, 2, \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

имеет единственное в $C[0, T]$ решение $(\varphi_1, \varphi_2)^T \in C[0, T]$ и справедливы оценки

$$\|\varphi_l\|^0 \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), \quad l = 1, 2. \quad (24)$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение в системе (23):

$$\begin{aligned} & \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_1(\tau) + r, t - \tau) dr + \\ & + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} Z(g_1(t) - g_2(\tau) - r, t - \tau) dr = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Дифференцируя обе его части, получаем вследствие условий (1), (2) и равенства

$$\int_0^{+\infty} Z(r, t - \tau) dr = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(r, t - \tau) dr = \frac{1}{2} E,$$

где E – единичная матрица, уравнение Вольтерры второго рода

$$\varphi_1(t) + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{1j}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 2\psi_1'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

в котором

$$\begin{aligned} K_{1j}(t, \tau) &= \int_0^{+\infty} (g_1'(t) Z_x(g_1(t) - g_j(\tau) + (-1)^{j+1}r, t - \tau) + Z_t(g_1(t) - g_j(\tau) + (-1)^{j+1}r, t - \tau)) dr \equiv \\ &\equiv I_j^{(1)}(t, \tau) + I_j^{(2)}(t, \tau), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Для ядер $K_{1j}(t, \tau)$, $j = 1, 2$, справедливы оценки

$$|K_{1j}(t, \tau)| \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Действительно, имеем

$$|I_j^{(1)}(t, \tau)| = |g_1'(t) Z(g_1(t) - g_j(\tau), t - \tau)| \leq C \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}(t - \tau)^{1/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}, \quad j = 1, 2,$$

$$|I_1^{(2)}(t, \tau)| = |AZ_x(g_1(t) - g_1(\tau), t - \tau)| \leq C \frac{|g_1(t) - g_1(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}} \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}},$$

$$\begin{aligned}
|I_2^{(2)}(t, \tau)| &= |AZ_x(g_1(t) - g_2(\tau), t - \tau)| \leq \\
&\leq C\{|Z_x(g_1(t) - g_2(t), t - \tau)| + |Z_x(g_1(t) - g_2(\tau), t - \tau) - Z_x(g_1(t) - g_2(t), t - \tau)|\} \leq \\
&\leq C\left\{\frac{1}{t - \tau} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t - \tau}\right\} + \frac{|g_2(t) - g_2(\tau)|}{(t - \tau)^{3/2}}\right\} \leq \\
&\leq C\left\{1 + \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}\right\} \leq C\frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Для второго уравнения системы (23) аналогично получаем равенство

$$\varphi_2(t) + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{2j}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 2\psi_2'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

в котором

$$\begin{aligned}
K_{2j}(t, \tau) &= \int_0^{+\infty} (g_2'(t) Z_x(g_2(t) - g_j(\tau) + (-1)^{j+1} r, t - \tau) + \\
&+ Z_t(g_2(t) - g_j(\tau) + (-1)^{j+1} r, t - \tau)) dr, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

причём справедливы оценки

$$|K_{2j}(t, \tau)| \leq C \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t - \tau)^{1/2}}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

В результате в силу включений $\psi_1, \psi_2 \in C^1[0, T]$ получаем эквивалентную (23) систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода

$$\varphi_l(t) + 2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{lj}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau = 2\psi_l'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad l = 1, 2. \quad (27)$$

Умножая обе части уравнений из системы (27) на $e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже, получаем эквивалентную систему

$$\varphi_l^*(t) + \sum_{j=1}^2 \int_0^t K_{lj}^*(t, \tau) \varphi_j^*(\tau) d\tau = \psi_l^*(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad l = 1, 2, \quad (28)$$

здесь

$$\varphi_i^*(t) := \varphi_i(t)e^{-\lambda t}, \quad \psi_i^*(t) := 2\psi_i'(t)e^{-\lambda t}, \quad K_{ij}^*(t, \tau) := 2K_{ij}(t, \tau)e^{-\lambda(t-\tau)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Введём обозначения

$$\mathcal{B}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11}^* & \mathcal{B}_{12}^* \\ \mathcal{B}_{21}^* & \mathcal{B}_{22}^* \end{pmatrix}, \quad \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix}, \quad \psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{B}_{ij}^* \varphi_j^*(t) = \int_0^t K_{ij}^*(t, \tau) \varphi_j^*(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i, j = 1, 2,$$

и запишем систему (28) в операторном виде

$$\varphi^* + \mathcal{B}_\lambda \varphi^* = \psi^*. \quad (29)$$

Покажем, что оператор $\mathcal{B}_\lambda : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ является сжимающим при достаточно большом $\lambda > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Если $0 < t \leq \varepsilon^2$, то в силу оценок (25), (26) имеем

$$|\mathcal{B}_\lambda \varphi^*(t)| \leq C \|\varphi^*\|^0 \int_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leq C\omega(\varepsilon) \|\varphi^*\|^0.$$

Если $t > \varepsilon^2$, то

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\lambda \varphi^*(t)| &\leq C \|\varphi^*\|^0 \left\{ \int_0^{\varepsilon^2} \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} d\tau + \int_{\varepsilon^2}^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right\} \leq \\ &\leq C \|\varphi^*\|^0 \left\{ \omega(\varepsilon) + \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \int_0^t \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \right\} \leq C \|\varphi^*\|^0 \left\{ \omega(\varepsilon) + \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon \lambda^{1/2}} \right\}. \end{aligned}$$

В итоге получаем оценку

$$|\mathcal{B}_\lambda \varphi^*(t)| \leq C \|\varphi^*\|^0 \left\{ \omega(\varepsilon) + \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon \lambda^{1/2}} \right\}.$$

Фиксируя сначала $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $C\omega(\varepsilon) < 1/4$, а затем выбирая $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ таким, чтобы

$$C \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon \lambda^{1/2}} < \frac{1}{4},$$

получаем, что $\|\mathcal{B}_\lambda\| < 1/2$. Следовательно, уравнение (29) имеет единственное решение

$$\varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi_1^* \\ \varphi_2^* \end{pmatrix} \in C[0, T]$$

и справедливы оценки

$$\|\varphi_i^*\|^0 \leq C(\|\psi_1^*\|^1 + \|\psi_2^*\|^1), \quad i = 1, 2.$$

Наконец, из вида системы (28) и условий $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$ следует, что $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in C_0^1[0, T]$.

Возвращаясь к первоначальным функциям φ_1, φ_2 , получаем утверждение теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 1. Ищем решение $u(x, t)$ задачи (4)–(6) в виде суммы потенциалов (8) с плотностями $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^1[0, T]$, подлежащими определению. Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in C[0, T]$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4) и начальному условию (5). Подставляя выражения (8) в граничные условия (6), для определения неизвестных плотностей φ_k , $k = 1, 2$, получаем систему интегральных уравнений Вольтерры первого рода (9). Из теоремы 3 следует, что эта система имеет единственное решение $(\varphi_1, \varphi_2)^T \in C_0^1[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi_l\|^0 \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1), \quad l = 1, 2. \quad (30)$$

Подставляя решение системы (9) в выражение (8), получаем, что определённая таким образом функция $u(x, t)$ является решением задачи (4)–(6). При этом в силу теоремы 2 и неравенств (30) справедливо включение $u \in \widehat{C}_{x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и верна оценка (10). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство утверждения. Пусть u – произвольная функция из класса $\widehat{C}_{0,x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$ и $\psi_k(t) = u(g_k(t), t)$, $k = 1, 2$. Докажем, что $\psi_1 \in C_0^1[0, T]$ (для ψ_2 доказательство аналогично). Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(t) = u(g_1(t) + 1/n, t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n < d$. Имеем: $\varphi_n \in C_0^1[0, T]$, последовательность функций $(\varphi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к функции $\psi_1(t)$ на отрезке $[0, T]$ и

$$\varphi'_n(t) = g'_1(t)u_x(g_1(t) + 1/n, t) + u_t(g_1(t) + 1/n, t), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу включения $u \in \widehat{C}_{0,x,t}^{2,1}(\overline{\Omega})$ последовательность производных $(\varphi'_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к функции $g'_1(t)u_x(g_1(t), t) + u_t(g_1(t), t)$ равномерно на любом отрезке $[\delta, T]$, где $\delta \in (0, T)$. Поэтому при $t \in (0, T]$ существует непрерывная производная

$$\psi'_1(t) = g'_1(t)u_x(g_1(t), t) + u_t(g_1(t), t).$$

Докажем, что $\lim_{t \rightarrow +0} \psi'_1(t) = 0$. В самом деле, пусть $t > 0$. Если $g_1(0) \leq g_1(t)$, то

$$|u_x(g_1(t), t)| = |u_x(g_1(t), t) - u_x(g_1(t), 0)| \leq \|u\|^{(2)} t^{1/2}.$$

Если $g_1(0) > g_1(t)$, то

$$\begin{aligned} |u_x(g_1(t), t)| &\leq |u_x(g_1(t), t) - u_x(g_1(0), t)| + |u_x(g_1(0), t) - u_x(g_1(0), 0)| \leq \\ &\leq |u_{xx}(g_1(t) + \Theta(g_1(0) - g_1(t)), t)| |g_1(0) - g_1(t)| + \|u\|^{(2)} t^{1/2} \leq C \|u\|^{(2)} t^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\Theta \in (0, 1)$. Таким образом,

$$|g'_1(t)u_x(g_1(t), t)| \leq C \|u\|^{(2)} \omega(t^{1/2}) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Учитывая, что $\lim_{t \rightarrow +0} u_t(g_1(t), t) = 0$, имеем включение $\psi_1 \in C_0^1[0, T]$. Утверждение доказано.

Отметим, что в формулировке утверждения можно опустить условие $u_{xx}(x, 0) = 0$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Е.А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
3. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
4. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2020. Т. 494. № 1. С. 5–8.
5. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
6. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
7. Петровский И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
8. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

9. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
10. Baderko E.A., Cherepova M.F. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2019. <https://doi.org/10.1080/00036811.2019.1698733>.
11. Семаан Х.М. О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей // Деп. в ВИНТИ РАН. 26.02.99. № 567-B99.
12. Семаан Х.М. О решении второй краевой задачи для параболических систем на плоскости: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 1999.
13. Тверитинов В.А. Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. в ВИНТИ АН СССР. 02.09.88. № 6850-B88.

Московский государственный университет
им М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 06.08.2021 г.
После доработки 06.08.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:532

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. Ф. Г. Хуштова

Рассматривается третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка. Доказаны теоремы существования и единственности. Представление решения найдено в терминах свёртки Лапласа функции Райта и функции типа Миттаг-Лёффлера со степенными множителями. Единственность решения доказана в классе функций быстрого роста.

DOI: 10.31857/S0374064121120062

Введение. Оператор D_{ay}^ν дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка $\nu \in \mathbb{R}$ с началом в точке a и с концом в точке y определяется следующим образом [1–3]:

$$D_{ay}^\nu g(y) = \frac{\text{sign}(y-a)}{\Gamma(-\nu)} \int_a^y \frac{g(t)}{|y-t|^{\nu+1}} dt, \quad \text{если } \nu < 0,$$

$$D_{ay}^\nu g(y) = g(y), \quad \text{если } \nu = 0,$$

$$D_{ay}^\nu g(y) = \text{sign}^n(y-a) \frac{d^n}{dy^n} D_{ay}^{\nu-n} g(y), \quad \text{если } n-1 < \nu \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

а регуляризованная дробная производная (производная Капуто) ∂_{0y}^ν задаётся равенством [2, с. 11; 3, с. 14]

$$\partial_{0y}^\nu g(y) = D_{0y}^{\nu-n} g^{(n)}(y), \quad n-1 < \nu \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Производная Капуто также известна под названием *производной Герасимова–Капуто* [4, с. 9; 5, с. 12].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - \partial_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

которое называется *уравнением диффузии дробного порядка*, если $0 < \alpha \leq 1$, и *волновым уравнением дробного порядка*, если $1 < \alpha < 2$, или в общем случае – *диффузионно-волновым уравнением* [3, с. 103].

Интерес к изучению уравнений вида (1) вызван их многочисленными приложениями при математическом моделировании процессов, протекающих во фрактальных средах [6–9].

Различные краевые задачи для уравнения (1) при $0 < \alpha < 2$, а также для многомерных его обобщений обстоятельно исследованы в работах многих авторов (см., например, [10–23] и библиографию в них).

Далее в работе будем полагать $0 < \alpha \leq 1$. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовём функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω , и такую, что $u, u_x \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, \partial_{0y}^\alpha u \in C(\Omega)$, где $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω .

Задача А. Найти регулярное в полуполосе

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, \quad 0 < y < T\}$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

$$u_x(0, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \quad (3)$$

где $\nu(y)$ и h – заданные функция и постоянная.

При $\alpha = 1$ данная задача переходит в третью краевую задачу на полуограниченной прямой для уравнения теплопроводности [24, с. 234]. По аналогии с этим назовём её *третьей краевой задачей* для уравнения диффузии дробного порядка.

Вспомогательные сведения. Далее будем обозначать как через $f(y) * g(y)$, так и через $(f * g)(y)$ свёртку Лапласа функций $f(y)$ и $g(y)$, т.е. функцию, определяемую равенством

$$f(y) * g(y) = \int_0^y f(t)g(y-t) dt.$$

Из определения оператора дробного интегро-дифференцирования следуют равенства

$$D_{0y}^\nu(f * g)(y) = D_{0y}^\nu f(y) * g(y) = f(y) * D_{0y}^\nu g(y), \quad \nu < 0, \quad (4)$$

$$\partial_{0y}^\nu(f * g)(y) = (f * \partial_{0y}^\nu g)(y) + D_{0y}^{\nu-1} f(y) \lim_{y \rightarrow 0} g(y), \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (5)$$

Для всех $g(y) \in AC[a, b]$ справедлива формула [2, с. 11; 3, с. 14]

$$D_{0y}^\nu g(y) = \frac{g(0)y^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} + \partial_{0y}^\nu g(y), \quad 0 < \nu < 1. \quad (6)$$

Здесь $AC[a, b]$ – класс абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. При $\nu = 1$ имеем

$$D_{0y}^1 g(y) = \partial_{0y}^1 g(y) = g'(y).$$

Функцией типа Миттаг-Лёффлера называется функция, определяемая рядом [25, с. 117]

$$E_{\rho, \mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho)}, \quad \rho > 0. \quad (7)$$

Для этой функции в работе [25] принято обозначение $E_\sigma(z; \mu)$. Её представление совпадает с рядом (7), если положить в последнем $\rho = 1/\sigma$. Ниже в этой работе будем придерживаться обозначения (7), которое в настоящее время получило широкое распространение.

Известно [26, с. 101], что если $\rho < 1$, $\rho \leq \mu$, то

$$E_{\rho, \mu}(-y) > 0, \quad y > 0. \quad (8)$$

Справедлива формула [25, с. 118]

$$E_{\rho, \mu}(z) = 1/\Gamma(\mu) + zE_{\rho, \mu+\rho}(z). \quad (9)$$

Для любого $\mu > 0$ и $\nu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство [3, с. 15]

$$D_{0y}^\nu y^{\mu-1} E_{\rho, \mu}(\lambda y^\rho) = y^{\mu-\nu-1} E_{\rho, \mu-\nu}(\lambda y^\rho). \quad (10)$$

В случае, когда $\nu \in \mathbb{N}$, значение μ может быть произвольным.

Имеет место представление [27]

$$E_{1/2, 1/2}(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - ze^{z^2} \operatorname{erfc}(z), \quad (11)$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ – дополнительный интеграл вероятности, т.е.

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Функцией Райта называется функция, определяемая рядом [28, 29]

$$\phi(\rho, \delta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\rho k + \delta)}, \quad \rho > -1. \quad (12)$$

Известно [30], что если $\delta \geq 0$, то

$$y^{\delta-1} \phi(\rho, \delta; -y^\rho) > 0, \quad y > 0. \quad (13)$$

Справедлива формула [28]

$$\frac{d}{dz} \phi(\rho, \delta; z) = \phi(\rho, \delta + \rho; z). \quad (14)$$

Для любого $\delta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство [3, с. 25]

$$D_{0y}^\nu y^{\delta-1} \phi(\rho, \delta; -\lambda y^\rho) = y^{\delta-\nu-1} \phi(\rho, \delta - \nu; -\lambda y^\rho), \quad \lambda > 0. \quad (15)$$

При $y \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое представление [31]

$$\phi(-\rho, \delta; -y) = Y^{1/2-\delta} e^{-Y} \left(\sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-m} + O(Y^{-M}) \right), \quad (16)$$

где $Y = (1 - \rho)(\rho^\rho y)^{1/(1-\rho)}$, A_m – константы, зависящие от ρ и δ .

Известно [3, с. 88], что

$$\sqrt{\pi} \phi(-1/2, 1/2; -z) = \exp(-z^2/4). \quad (17)$$

Основные результаты. Примем обозначения: $\beta = \alpha/2$,

$$K_\beta(x, y) = y^{\beta-1} \phi(-\beta, \beta; -xy^{-\beta}), \quad E(y) = y^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-hy^\beta), \quad (18)$$

$$\tilde{K}(x, y) = K_\beta(x, y) - h K_\beta(x, y) * E(y). \quad (19)$$

Теорема 1. Пусть $\nu(y) \in C[0, T]$, $\nu(0) = 0$. Тогда функция

$$u(x, y) = \int_0^y \tilde{K}(x, y - \eta) \nu(\eta) d\eta \quad (20)$$

является решением задачи A.

Доказательство проводится непосредственной проверкой, т.е. показывается, что функция (20) удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3).

Дифференцируемость под знаком интеграла следует из непрерывности подынтегральных функций и оценки (16). Запишем равенство (20) в виде

$$u(x, y) = \nu(y) * \tilde{K}(x, y) \quad (21)$$

и преобразуем функцию $\tilde{K}(x, y)$. В силу равенства (15) представим функцию $K_\beta(x, y)$ в виде

$$K_\beta(x, y) = D_{0y}^{-\beta} K(x, y) = K(x, y) * (y^{\beta-1}/\Gamma(\beta)),$$

где

$$K(x, y) = y^{-1} \phi(-\beta, 0; -xy^{-\beta}). \quad (22)$$

Тогда из (19) и (4) следует, что

$$\tilde{K}(x, y) = K_{\beta}(x, y) - hK(x, y) * D_{0y}^{-\beta} E(y).$$

Согласно формулам (10) и (9) имеем

$$hD_{0y}^{-\beta} E(y) = hy^{2\beta-1} E_{\beta, 2\beta}(-hy^{\beta}) = y^{\beta-1} / \Gamma(\beta) - E(y).$$

Таким образом,

$$\tilde{K}(x, y) = K(x, y) * E(y). \quad (23)$$

Продифференцируем обе части равенства (21) по x , учитывая представление (23) и используя формулу (14). Получим

$$u_x(x, y) = \nu(y) * \tilde{K}_x(x, y), \quad (24)$$

где

$$\tilde{K}_x(x, y) = K_x(x, y) * E(y), \quad (25)$$

$$K_x(x, y) = -y^{-\beta-1} \phi(-\beta, -\beta; -xy^{-\beta}). \quad (26)$$

Продифференцировав по x равенство (24), будем иметь

$$u_{xx}(x, y) = \nu(y) * \tilde{K}_{xx}(x, y), \quad (27)$$

где

$$\tilde{K}_{xx}(x, y) = K_{xx}(x, y) * E(y), \quad K_{xx}(x, y) = y^{-2\beta-1} \phi(-\beta, -2\beta; -xy^{-\beta}).$$

Применив оператор ∂_{0y}^{α} к равенству (21), в силу (5) найдём, что

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x, y) = \nu(y) * \partial_{0y}^{\alpha} \tilde{K}(x, y) + D_{0y}^{\alpha-1} \nu(y) \lim_{y \rightarrow 0} \tilde{K}(x, y), \quad (28)$$

где

$$\partial_{0y}^{\alpha} \tilde{K}(x, y) = E(y) * \partial_{0y}^{\alpha} K(x, y) + D_{0y}^{\alpha-1} E(y) \lim_{y \rightarrow 0} K(x, y).$$

Из (16) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} K(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \tilde{K}(x, y) = 0. \quad (29)$$

Тогда из (6), (15) и (29) вытекает равенство

$$\partial_{0y}^{\alpha} K(x, y) = y^{-2\beta-1} \phi(-\beta, -2\beta; -xy^{-\beta}).$$

Подставляя выражения (27) и (28) в уравнение (1) и учитывая соотношения (29), видим, что равенство (1) обращается в тождество.

Выполнимость условия (2) следует из непрерывности функций $\nu(y)$ и $\tilde{K}(x, y)$.

Проверим выполнимость условия (3). Рассмотрим разность

$$w(x, y) = u_x(x, y) - hu(x, y). \quad (30)$$

Учитывая представления (21) и (24), запишем эту функцию в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \int_0^{y-\varepsilon} (\tilde{K}_x(x, y-\eta) - h\tilde{K}(x, y-\eta))(\nu(\eta) - \nu(y)) d\eta + \\ &+ \int_{y-\varepsilon}^y (\tilde{K}_x(x, y-\eta) - h\tilde{K}(x, y-\eta))(\nu(\eta) - \nu(y)) d\eta + \nu(y) \int_0^y (\tilde{K}_x(x, t) - h\tilde{K}(x, t)) dt \equiv \\ &\equiv J_1(x, y) + J_2(x, y) + \nu(y)J_3(x, y), \end{aligned} \quad (31)$$

где ε – произвольное малое положительное число.

Найдём предельное значение разности $\tilde{K}_x(x, t) - h\tilde{K}(x, t)$ при $x \rightarrow 0$ и $t \neq 0$. Из (25) и (9) следует, что

$$\tilde{K}_x(x, t) = K_x(x, t) * (y^{\beta-1}/\Gamma(\beta)) - hK_x(x, t) * D_{0t}^{-\beta}E(t).$$

Тогда из формул (15) и (4) вытекает равенство

$$\tilde{K}_x(x, t) = -K(x, t) + hK(x, t) * E(t),$$

вследствие которого и равенства (23) получаем

$$\tilde{K}_x(x, t) - h\tilde{K}(x, t) = -K(x, t).$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $x \rightarrow 0$, в силу (22) и (12) будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{K}_x(x, t) - h\tilde{K}(x, t)) = 0.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} J_1(x, y) = 0$.

Обозначим $\omega(\varepsilon) := \sup |\nu(\eta) - \nu(y)|$, где $\eta \in [y-\varepsilon, y]$. Так как функция $\nu(y)$ непрерывна в окрестности точки y , то $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая определение величины $\omega(\varepsilon)$, оценим интеграл $J_2(x, y)$:

$$|J_2(x, y)| \leq \omega(\varepsilon) \int_0^\varepsilon |\tilde{K}_x(x, t) - h\tilde{K}(x, t)| dt.$$

В силу равенств (23) и (25), а также свойств (8) и (13) получаем

$$|J_2(x, y)| \leq \omega(\varepsilon) \left(\int_0^\varepsilon |K_x(x, t)| * E(t) dt + |h| \int_0^\varepsilon K(x, t) * E(t) dt \right) = \omega(\varepsilon)(J_{21}(x, \varepsilon) + J_{22}(x, \varepsilon)). \quad (32)$$

Согласно (4) первый интеграл J_{21} запишется в виде

$$J_{21}(x, \varepsilon) = D_{0\varepsilon}^{-1}|K_x(x, \varepsilon)| * E(\varepsilon).$$

Тогда из равенств (26) и (15) и свойства (13) следует, что

$$J_{21}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-\beta} \phi(-\beta, 1-\beta; -x\varepsilon^{-\beta}) * E(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow 0$, с помощью (12) и (10) получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_{21}(x, \varepsilon) = D_{0\varepsilon}^{\beta-1}E(\varepsilon) = E_{\beta,1}(-h\varepsilon^\beta). \quad (33)$$

Аналогично, для второго интеграла J_{22} имеем

$$J_{22}(x, \varepsilon) = |h| D_{0\varepsilon}^{-1} K(x, \varepsilon) * E(\varepsilon) = |h| \phi(-\beta, 1; -x\varepsilon^{-\beta}) * E(\varepsilon),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_{22}(x, \varepsilon) = |h| D_{0\varepsilon}^{-1} E(\varepsilon) = |h| \varepsilon^\beta E_{\beta, \beta+1}(-h\varepsilon^\beta). \quad (34)$$

Таким образом, вследствие соотношений (32)–(34), непрерывности функции $\nu(y)$ при $y > 0$ и произвольного выбора ε заключаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_2(x, y) = 0.$$

Вычислим интеграл $J_3(x, y)$. Из формулы (4) следует, что

$$J_3(x, y) = D_{0y}^{-1} [K_x(x, y) - hK(x, y)] * E(y). \quad (35)$$

Согласно формуле (15) в силу равенств (26) и (22) имеем

$$D_{0y}^{-1} K_x(x, y) = -y^{-\beta} \phi(-\beta, 1 - \beta; -xy^{-\beta}), \quad D_{0y}^{-1} K(x, y) = \phi(-\beta, 1; -xy^{-\beta}).$$

Подставляя последние выражения в равенство (35) и переходя затем к пределу при $x \rightarrow 0$, с помощью (10) приходим к равенствам

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_3(x, y) = D_{0y}^{\beta-1} E(y) - h D_{0y}^{-1} E(y) = E_{\beta, 1}(-hy^\beta) - hy^\beta E_{\beta, 1+\beta}(-hy^\beta). \quad (36)$$

Учитывая формулу (9), вследствие (36) заключаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} J_3(x, y) = -1$.

В силу найденных предельных значений для интегралов $J_k(x, y)$, $k = \overline{1, 3}$, из представления (31) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x, y) = -\nu(y).$$

Таким образом, из последнего равенства и обозначения (30) вытекает выполнимость условия (3). Теорема доказана.

Частные случаи. В случае, когда уравнение (1) совпадает с классическим уравнением диффузии, т.е. $\alpha = 1$ ($\beta = 1/2$), в силу представлений (11) и (17) функции $K_\beta(x, y)$ и $E(y)$ примут вид

$$K_{1/2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right), \quad E(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} - h \exp(h^2 y) \operatorname{erfc}(h\sqrt{y}).$$

Если в условии (3) $h = 0$, то для уравнения (1) получим решение второй краевой задачи в виде

$$u(x, y) = \int_0^y K_\beta(x, y - \eta) \nu(\eta) d\eta,$$

где функция $K_\beta(x, y)$ определена в (18).

Теорема 2. Существует не более одного регулярного решения задачи A , удовлетворяющего для некоторого $k > 0$ условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) \exp(-kx^{2/(2-\alpha)}) = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Пусть $h_r(\xi)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

$$h_r(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq r, \\ 0, & \xi \geq r + 1, \end{cases} \quad (38)$$

$0 \leq h_r(\xi) \leq 1$, $|h'_r(\xi)| + |h''_r(\xi)| \leq C$, где C – постоянная, не зависящая от ξ и r .

Рассмотрим функцию

$$v(x, \xi, y, \eta) = h_r(\xi) \tilde{G}(x, \xi, y - \eta),$$

здесь

$$\tilde{G}(x, \xi, y) = G(x, \xi, y) - hG_0(x, \xi, y) * E(y),$$

где

$$G(x, \xi, y) = y^{\beta-1}(\phi(-\beta, \beta; -(x + \xi)y^{-\beta}) + \phi(-\beta, \beta; -|x - \xi|y^{-\beta}))/2,$$

$$G_0(x, \xi, y) = y^{\beta-1}\phi(-\beta, \beta; -(x + \xi)y^{-\beta}).$$

Нетрудно показать, что имеют место равенства

$$L^*v(x, \xi, y, \eta) = v_{\xi\xi} - D_{y\eta}^\alpha v = 2h'_r(\xi)\tilde{G}_\xi(x, \xi, y - \eta) + h''_r(\xi)\tilde{G}(x, \xi, y - \eta), \quad (39)$$

$$v_\xi(x, 0, y, \eta) - hv(x, 0, y, \eta) = 0. \quad (40)$$

Из оценки (16) следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} G(x, \xi, y) \right| \leq \text{const} \cdot P_n(x, \xi, y) \exp[-\alpha_0 |x - \xi|^{2/(2-\alpha)} y^{-\alpha/(2-\alpha)}], \quad (41)$$

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} G_0(x, \xi, y) \right| \leq \text{const} \cdot Q_n(x, \xi, y) \exp[-\alpha_0 |x + \xi|^{2/(2-\alpha)} y^{-\alpha/(2-\alpha)}], \quad (42)$$

где

$$\alpha_0 = (2 - \alpha)2^{-2/(2-\alpha)}\alpha^{\alpha/(2-\alpha)}, \quad P_n(x, \xi, y) = |x - \xi|^{(1-\alpha(1-n))/(2-\alpha)} y^{-1+\alpha(1-2n)/(2(2-\alpha))},$$

$$Q_n(x, \xi, y) = |x + \xi|^{(1-\alpha(2-n))/(2-\alpha)} y^{-1+\alpha(3-2n)/(2(2-\alpha))}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пусть δ – некоторое положительное достаточно малое число. Если $u(x, y)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), то из (38) и теоремы об общем представлении решения уравнения (1) [20, с. 134] следует, что в области $\Omega_0 = \{(x, y) : 0 < x < r + 1, 0 < y < \delta\}$ оно представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^y (v(x, r + 1, y, \eta)u_\xi(r + 1, \eta) - v_\xi(x, r + 1, y, \eta)u(r + 1, \eta)) d\eta - \\ & - \int_0^y (v(x, 0, y, \eta)u_\xi(0, \eta) - v_\xi(x, 0, y, \eta)u(0, \eta)) d\eta + \int_0^{r+1} \int_0^y u(\xi, \eta)L^*v(x, \xi, y, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (38) и (39) следует, что $L^*v(x, \xi, y, \eta) = 0$ при $0 \leq \xi \leq r$. Полагая в условии (3) $\nu(y) \equiv 0$ и учитывая равенство (40) и свойства функции $h_r(\xi)$, из представления (43) получаем

$$u(x, y) = \int_r^{r+1} \int_0^y u(\xi, \eta)L^*v(x, \xi, y, \eta) d\xi d\eta. \quad (44)$$

В силу условия (37) и оценок (41), (42) из представления (44) следует неравенство

$$|u(x, y)| \leq \int_r^{r+1} \int_0^y H \exp\{-\alpha_0 |x - \xi|^{2/(2-\alpha)} (y - \eta)^{-\alpha/(2-\alpha)} + k\xi^{2/(2-\alpha)}\} d\xi d\eta, \quad (45)$$

в котором $H = \max\{P_i, Q_i\}$, $i = 0, 1$. Правая часть неравенства (45) при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю, если существует внутренний интеграл. Это можно обеспечить выбором $\delta < (\alpha_0/k)^{(2-\alpha)/\alpha}$. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в области $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < \delta\}$.

Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ для любого $0 < y < T$. Пусть $t = y - \delta$, $\delta \leq y < 2\delta$. Рассмотрим функцию $w(x, t) = u(x, \delta + t)$. Так как $u(x, y) \equiv 0$ при $0 < y < \delta$, то

$$\partial_{0y}^\alpha u(x, y) = \partial_{\delta y}^\alpha u(x, y) = \partial_{0t}^\alpha w(x, t).$$

Отсюда следует, что функция $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению $w_{xx}(x, t) - \partial_{0t}^\alpha w(x, t) = 0$, условию (37) и условиям

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < \infty, \\ w_x(0, t) &= hw(0, t), \quad 0 < t < \delta. \end{aligned}$$

Тогда, согласно доказанному выше, $w(x, t) \equiv 0$ в $\Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < t < \delta\}$, т.е. $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < \infty, \delta \leq y < 2\delta\}$. Точно так же доказывается, что $u(x, y) \equiv 0$ в полосах $(n-1)\delta \leq y < n\delta$, $n = 3, 4, \dots$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
3. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
4. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. Самара, 2009.
5. Новоженова О.Г. Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элементарных и дробных производных. М., 2018.
6. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore, 2000.
7. Weiss M., Hashimoto H., Nilsson T. Anomalous protein diffusion in living cells as seen by fluorescence correlation spectroscopy // Biophys. J. 2003. V. 84. № 6. P. 4043–4052.
8. Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. of Phys. A. 2004. V. 37. № 31. P. 161–208.
9. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. V. I. Background and Theory. V. II: Applications. Springer, 2013.
10. Mainardi F. The time fractional diffusion-wave equation // Radiophysics and Quantum Electronics. 1995. V. 38. № 1–2. P. 13–24.
11. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. 1996. V. 9. № 6. P. 23–28.
12. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego, 1999.
13. Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2001. V. 4. № 2. P. 153–192.
14. Гекжиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2002. № 1 (8). С. 6–8.
15. Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1430–1433.
16. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 599–609.
17. Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.
18. Pskhu A.V. Multi-time fractional diffusion equation // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. № 8. P. 1939–1950.
19. Pagnini G. The M-Wright function as a generalization of the Gaussian density for fractional diffusion processes // Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. V. 16. № 2. P. 436–453.
20. Мамчуев М.О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик, 2013.
21. Kochubei A.N. Asymptotic properties of solutions of the fractional diffusion-wave equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2014. V. 17. № 3. P. 881–896.

22. *Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients // *Appl. Anal.* 2014. V. 93. № 10. P. 2211–2242.
23. *Псху А.В.* Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2017. Т. 81. № 6. С. 158–179.
24. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
25. *Джрбашиян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
26. *Попов А.Ю., Седлецкий А.М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // *Совр. математика. Фунд. направления.* 2011. Т. 40. С. 3–171.
27. *Хуштова Ф.Г.* Третья краевая задача в полуполосе для В-параболического уравнения // *Мат. заметки.* 2021. Т. 109. Вып. 2. С. 290–301.
28. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // *J. of the London Math. Soc.* 1933. V. s1-8. № 1. P. 71–79.
29. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // *Quarterly J. of Math.* 1940. V. 11. № 1. P. 36–48.
30. *Stanković B.* On the function of E.M. Wright // *Publ. de l'Institut Math.* 1970. V. 10 (24). P. 113–124.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.
После доработки 11.06.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955+517.956+517.983

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ
АБСТРАКТНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ
С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2021 г. Б. Чаучи, В. Е. Федоров, М. Костич

Рассматриваются мультипликативные возмущения субгенераторов вырожденных аналитических разрешающих семейств операторов. Получены достаточные условия, при выполнении которых произведение многозначных линейных операторов является субгенератором аналитического (a, k) -регуляризованного C -разрешающего семейства операторов. Приводятся некоторые приложения этого результата к начально-краевым задачам для уравнений в частных производных с производной Капуто по времени.

DOI: 10.31857/S0374064121120074

1. Введение и предварительные сведения. Теория абстрактных некорректных задач Коши является областью активных исследований для многих авторов (см. монографии [1–6] в качестве основных источников информации в этом направлении), как и теория возмущений для абстрактных некорректных задач Коши. Насколько известно авторам, первый результат о мультипликативных возмущениях сильно непрерывных полугрупп был получен Дж.Р. Дорро в 1966 г. [7]; более подробная информация об исследованиях мультипликативных возмущений абстрактных задач Коши первого и второго порядков содержится в работах [1, 8–15]. Мультипликативные возмущения абстрактных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерры и абстрактных дробных интегро-дифференциальных уравнений исследовались в [16–20].

В качестве основного источника информации об абстрактных вырожденных дифференциальных уравнениях первого и второго порядков мы отсылаем читателя к монографиям [6, 21, 22]. Теория абстрактных вырожденных дифференциальных уравнений с дробными производными всё ещё далека от завершения (см., например, [6] и недавние работы [23–25]). (Далее для краткости дифференциальные уравнения с дробными производными будем называть дробными дифференциальными уравнениями.)

Теория абстрактных вырожденных дробных дифференциальных уравнений все ещё далека от завершения (см., например, [6] и недавние работы [23–25]).

Основная цель данной статьи – описать новый результат о мультипликативных возмущениях дробных разрешающих семейств операторов, порождённых многозначными линейными операторами. Мы также приводим некоторые интересные приложения этого результата к абстрактным дробным дифференциальным уравнениям с производными Капуто.

Данная работа существенно основывается на некоторых результатах, установленных в [9] Р. де Лаубенфельсом. Более конкретно, формула представления для резольвенты оператора BA , которая была установлена в доказательстве леммы 2.8 [9], будет по существу использована в доказательстве нашего основного результата (см. также замечание 1 и приложения, приведённые в п. 3 ниже).

Структура работы следующая. В пп. 1.1 напоминаются основные определения и результаты теории многозначных линейных операторов; основная цель пп. 1.2 – напомнить основные факты о разрешающих семействах операторов вырожденных эволюционных уравнений, используемые в статье. В п. 2 формулируется и доказывается теорема, представляющая собой новый результат о мультипликативных возмущениях вырожденных разрешающих семейств операторов, который, по-видимому, является новым даже в случае, когда линейный оператор $A = A$ является однозначным, а регуляризующий оператор C равен тождественному оператору I на банаховом пространстве X (см. также замечание 1, в котором обсуждаются дальнейшие обобщения в различных направлениях этой теоремы). Наши основные приложения приведены

в п. 3: в пп. 3.1 рассматриваются приложения доказанной теоремы к абстрактным невырожденным дробным дифференциальным уравнениям с некоэрцитивными дифференциальными операторами; пп. 3.2 содержит некоторые её приложения к абстрактным вырожденным дробным дифференциальным уравнениям с некоэрцитивными дифференциальными операторами. Для краткости и лучшего изложения в данной работе не рассматривается корректность соответствующих дробных задач Коши [6].

В работе используются стандартные обозначения. Через $(X, \|\cdot\|)$ обозначается комплексное банахово пространство. Обозначим $\Sigma_\alpha := X\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$ ($\alpha \in (0, \pi]$) и $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Пусть $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ и $I = (0, T)$ при некотором $T \in (0, \infty]$. Положим $g_\alpha(t) := t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, где через $\Gamma(\cdot)$ обозначена гамма-функция Эйлера. Напомним, что дробная производная Капуто $D_t^\alpha u(t)$ определена для функций $u \in C^{m-1}([0, \infty); X)$, для которых $g_{m-\alpha} * (u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)g_{k+1}) \in C^m([0, \infty); X)$, и имеет вид

$$D_t^\alpha u(t) := \frac{d^m}{dt^m} \left[g_{m-\alpha} * \left(u - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)g_{k+1} \right) \right],$$

где через $*$ обозначена свёртка функций.

Пусть $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Функция Миттаг-Лёффлера $E_{\alpha, \beta}(z)$ определяется равенством

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

С теорией векторного преобразования Лапласа можно ознакомиться по монографиям [2, 3, 5, 6].

1.1. Многозначные линейные операторы. Доказательства приведённых ниже утверждений можно найти в [21].

Напомним, что многозначное отображение $\mathcal{A}: X \rightarrow P(X)$ называется *многозначным линейным оператором* (МЛО) в X , если выполняются следующие два условия:

- (i) $D(\mathcal{A}) := \{x \in X : \mathcal{A}x \neq \emptyset\}$ – линейное подпространство в X ;
- (ii) $\mathcal{A}x + \mathcal{A}y \subseteq \mathcal{A}(x + y)$, $x, y \in D(\mathcal{A})$, и $\lambda \mathcal{A}x \subseteq \mathcal{A}(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in D(\mathcal{A})$.

Известно, что при любых $x, y \in D(\mathcal{A})$ и $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$, $|\lambda| + |\eta| \neq 0$, справедливо равенство $\lambda \mathcal{A}x + \eta \mathcal{A}y = \mathcal{A}(\lambda x + \eta y)$. Более того, $\mathcal{A}0$ – линейное подпространство в X и $\mathcal{A}x = f + \mathcal{A}0$ при любых $x \in D(\mathcal{A})$ и $f \in \mathcal{A}x$. Определим множество значений $R(\mathcal{A}) := \{\mathcal{A}x : x \in D(\mathcal{A})\}$. Множество $\mathcal{A}^{-1}0 := N(\mathcal{A}) := \{x \in D(\mathcal{A}) : 0 \in \mathcal{A}x\}$ называется *ядром* оператора $\mathcal{A}$. Обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ задаётся равенствами $D(\mathcal{A}^{-1}) := R(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}^{-1}y := \{x \in D(\mathcal{A}) : y \in \mathcal{A}x\}$. Нетрудно показать, что $\mathcal{A}^{-1}$ – МЛО в X , а также, что $N(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}0$ и $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$. Если $N(\mathcal{A}) = \{0\}$, т.е. если $\mathcal{A}^{-1}$ однозначен, то $\mathcal{A}$ инъективен.

Предположим, что $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ являются МЛО в X . Тогда их *сумма* $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ определяется равенствами $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) := D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x := \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$, $x \in D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$. Этот оператор также является МЛО в X . *Произведение* $\mathcal{B}\mathcal{A}$ определяется следующим образом:

$$D(\mathcal{B}\mathcal{A}) := \{x \in D(\mathcal{A}) : D(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}x \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad \mathcal{B}\mathcal{A}x := \mathcal{B}(D(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}x).$$

Тогда $\mathcal{B}\mathcal{A}$ также является МЛО в X и $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$. Будем писать $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, если $D(\mathcal{A}) \subseteq D(\mathcal{B})$ и $\mathcal{A}x \subseteq \mathcal{B}x$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$. *Произведение* $z\mathcal{A}$ МЛО $\mathcal{A}$ и числа $z \in \mathbb{C}$ определяется равенствами

$$D(z\mathcal{A}) := D(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad (z\mathcal{A})(x) := z\mathcal{A}x, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

МЛО $\mathcal{A}$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей (x_n) в $D(\mathcal{A})$ и (y_n) в X таких, что $y_n \in \mathcal{A}x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ влекут за собой включения $x \in D(\mathcal{A})$ и $y \in \mathcal{A}x$.

Пусть $C \in L(X)$. Для МЛО $\mathcal{A}$ его *C-резольвентным множеством* $\rho_C(\mathcal{A})$ называется объединение всех комплексных чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $R(C) \subseteq R(\lambda - \mathcal{A})$, и $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C$ – однозначный ограниченный оператор на X .

Нетрудно показать, что *резольвентное множество* $\rho(\mathcal{A}) := \rho_I(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ является открытым в $\mathbb{C}$. Оператор $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}C$ называется *C-резольвентой* оператора $\mathcal{A}$ ($\lambda \in \rho_C(\mathcal{A})$). *C-спектр* $\sigma_C(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ определяется как дополнение множества $\rho_C(\mathcal{A})$ в $\mathbb{C}$; *спектр* оператора $\mathcal{A}$ – множество $\sigma(\mathcal{A}) := \sigma_I(\mathcal{A})$.

1.2. Вырожденные разрешающие семейства операторов. Напомним следующие определения [6].

Определение 1. Пусть $0 < \tau \leq \infty$, $k \in C([0, \tau))$, $k \neq 0$, $a \in L^1_{\text{loc}}([0, \tau))$, $a \neq 0$, $\mathcal{A}: X \rightarrow P(X)$ является МЛО, $C_1 \in L(Y, X)$ и $C_2 \in L(X)$ инъективен.

(i) Тогда $\mathcal{A}$ называется *субгенератором (локального, если $\tau < \infty$) слабого (a, k) -регуляризованного семейства (C_1, C_2) -существования и единственности*

$$(R_1(t), R_2(t))_{t \in [0, \tau)} \subseteq L(Y, X) \times L(X),$$

если отображения $t \mapsto R_1(t)y$, $t \geq 0$, и $t \mapsto R_2(t)x$, $t \in [0, \tau)$, непрерывны при всех фиксированных $x \in X$, $y \in Y$ и выполняются следующие условия:

$$\left(\int_0^t a(t-s)R_1(s)y ds, R_1(t)y - k(t)C_1y \right) \in \mathcal{A}, \quad t \in [0, \tau), \quad y \in Y, \quad (1)$$

$$\int_0^t a(t-s)R_2(s)y ds = R_2(t)x - k(t)C_2x \quad \text{при всех } t \in [0, \tau) \text{ и } (x, y) \in \mathcal{A}, \quad (2)$$

где запись $(x, y) \in \mathcal{A}$ означает, что $y \in \mathcal{A}x$.

(ii) Пусть $(R_1(t))_{t \in [0, \tau)} \subseteq L(Y, X)$ – сильно непрерывное семейство. Тогда $\mathcal{A}$ называется *субгенератором (локального, если $\tau < \infty$) слабого (a, k) -регуляризованного семейства C_1 -существования $(R_1(t))_{t \in [0, \tau)}$* , если выполняется условие (1).

(iii) Пусть семейство $(R_2(t))_{t \in [0, \tau)} \subseteq L(X)$ сильно непрерывно. Тогда $\mathcal{A}$ называется *субгенератором (локального, если $\tau < \infty$) слабого (a, k) -регуляризованного семейства C_2 -единственности $(R_2(t))_{t \in [0, \tau)}$* , если выполняется условие (2).

Определение 2. Пусть $0 < \tau \leq \infty$, $k \in C([0, \tau))$, $k \neq 0$, $a \in L^1_{\text{loc}}([0, \tau))$, $a \neq 0$, $\mathcal{A}: X \rightarrow P(X)$ – МЛО, $C \in L(X)$ инъективен и $C\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}C$. Тогда сильно непрерывное семейство операторов $(R(t))_{t \in [0, \tau)} \subseteq L(X)$ называется *(a, k) -регуляризованным C-разрешающим семейством с субгенератором $\mathcal{A}$* , если $(R(t))_{t \in [0, \tau)}$ является слабым (a, k) -регуляризованным семейством C-единственности, имеющим $\mathcal{A}$ в качестве субгенератора, $R(t)C = CR(t)$ и $R(t)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}R(t)$ ($t \geq 0$).

Если $\tau = \infty$, то семейство $(R(t))_{t \geq 0}$ называется *экспоненциально ограниченным (ограниченным)*, если существуют действительные числа $M \geq 1$ и $\omega \in \mathbb{R}$ ($\omega = 0$) такие, что $\|R(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

Приведённые выше понятия используются для классов слабых (a, k) -регуляризованных семейств C_1 -существования и слабых (a, k) -регуляризованных семейств C_2 -единственности.

Определение 3.

(i) Пусть $\mathcal{A}$ – МЛО в пространстве X , $\alpha \in (0, \pi]$ и $(R(t))_{t \geq 0}$ – (a, k) -регуляризованное C-разрешающее семейство, которое имеет субгенератор $\mathcal{A}$. Тогда $(R(t))_{t \geq 0}$ называется *аналитическим (a, k) -регуляризованным C-разрешающим семейством с углом α* , если существует функция $\mathbf{R}: \Sigma_\alpha \rightarrow L(X)$, для которой при каждом $x \in X$ отображение $z \mapsto \mathbf{R}(z)x$, $z \in \Sigma_\alpha$ аналитично и выполняются условия:

(a) $\mathbf{R}(t) = R(t)$, $t > 0$,

(b) $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma_\gamma} \mathbf{R}(z)x = k(0)Cx$ для всех $\gamma \in (0, \alpha)$ и $x \in X$.

(ii) Аналитическое (a, k) -регуляризованное C-разрешающее семейство $(R(t))_{t \geq 0}$ с углом $\alpha \in (0, \pi]$ называется *экспоненциально ограниченным*, если для всех $\gamma \in (0, \alpha)$ существует $\omega_\gamma \geq 0$ такое, что семейство $\{e^{-\omega_\gamma \operatorname{Re} z} \mathbf{R}(z) : z \in \Sigma_\gamma\} \subseteq L(X)$ ограничено. Если в этом

определении для всех $\gamma \in (0, \alpha)$ можно взять $\omega_\gamma = 0$, то семейство $(R(t))_{t \geq 0}$ называется *ограниченным*.

В дальнейшем будем отождествлять функции $R(\cdot)$ и $\mathbf{R}(\cdot)$.

2. Мультипликативные возмущения для вырожденных дробных разрешающих семейств операторов. Сформулируем основной результат работы. Отметим, что в формулировке используются определённые во введении функции g_α .

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – замкнутые МЛО, $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$, $C \in L(X)$ инъективен, $C\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}C$, $C\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}C$, $[(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C][(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}] = [(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}][(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C]$ для всех $\lambda \in \rho_C(\mathcal{A})$, $\lambda' \in \rho(\mathcal{B})$, и существуют положительные числа α и β такие, что $\alpha < \beta$ и $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq [\alpha, \beta]$. Пусть, кроме того, $a \in (0, 2]$, $\Sigma_{a\pi/2} \subseteq \rho_C(\mathcal{A})$, отображение $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}Cx$, $\lambda \in \Sigma_{a\pi/2}$, непрерывно при любом фиксированном $x \in X$ и при каждом $a' \in (0, a)$ существует $c_{a'} > 0$, при котором

$$\|\lambda(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C\| \leq c_{a'}, \quad \lambda \in \Sigma_{a'\pi/2}. \quad (3)$$

Тогда при каждом $a' \in (0, a)$ справедливы следующие утверждения:

(i) если оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ плотно определён, то $\mathcal{B}\mathcal{A}$ – субгенератор ограниченного аналитического $(g_{a'}, g_1)$ -регуляризованного C -разрешающего семейства $(R_{\mathcal{B}}(t))_{t \geq 0}$ с углом

$$\alpha \equiv \min(\pi/2, \pi(a - a')/(2a')). \quad (4)$$

(ii) если оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ не является плотно определённым, то $\mathcal{B}\mathcal{A}$ при каждом $b' > 0$ – субгенератор экспоненциально ограниченного аналитического $(g_{a'}, g_{b'+1})$ -регуляризованного C -разрешающего семейства $(R_{\mathcal{B}, b'}(t))_{t \geq 0}$ с углом (4) и при каждом $\gamma \in (0, \alpha)$ существует $d_\gamma > 0$ такое, что $\|R_{\mathcal{B}}(z)\| \leq d_\gamma |z|^{b'}$, $z \in \overline{\Sigma}_\gamma$.

Доказательство следует идее, предложенной в работе [9] при доказательстве леммы 2.8. Прежде всего, существование оператора $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$ позволяет заключить, что многозначный линейный оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ замкнут, поэтому оператор $s - \mathcal{B}\mathcal{A}$ также замкнут при любом $s \in \mathbb{C}$. Действительно, пусть (x_n) и (y_n) – последовательности в X такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ и $y_n \in \mathcal{B}\mathcal{A}x_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует существование последовательности (z_n) в X , для которой $z_n \in \mathcal{A}x_n$ и $y_n \in \mathcal{B}z_n$. Очевидна сходимость $z_n = \mathcal{B}^{-1}y_n \rightarrow \mathcal{B}^{-1}y$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$. Так как оператор $\mathcal{A}$ замкнут, то это означает, что $x \in D(\mathcal{A})$ и $\mathcal{B}^{-1}y \in \mathcal{A}x$, поэтому $x \in D(\mathcal{B}\mathcal{A})$ и $y \in \mathcal{B}\mathcal{A}x$, что и утверждалось.

Далее предложение 1.2.6 (iii) [6] показывает, что отображение $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}Cx$, $\lambda \in \Sigma_{a\pi/2}$, аналитично при каждом фиксированном $x \in X$. Предположим теперь, что $s \in \Sigma_{a\pi/2}$ и $|\arg(s)| + \varepsilon < a\pi/2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Пусть Γ – некоторый замкнутый контур в комплексной плоскости, окружающий спектр $\sigma(\mathcal{B})$, такой, что $\Gamma \subseteq \Sigma_\varepsilon$. Определим отображение

$$F(s)x := \int_{\Gamma} ((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}x \frac{d\omega}{2\pi i \omega}, \quad x \in X.$$

Так как подынтегральная функция $\omega \mapsto ((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}x/(2\pi i \omega)$ аналитична при любом $x \in X$, то по теореме Коши значение $F(s)x$ не зависит от выбора контура Γ , удовлетворяющего указанным выше требованиям; более того, несложно показывается, что отображение $s \mapsto F(s)x$, $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, аналитично при каждом $x \in X$.

Согласно нашим предположениям о коммутировании операторов C и $\mathcal{A}$, C и $\mathcal{B}$, $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C$ и $(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}$, можно использовать теорему 1.2.4 (i) [6] для того, чтобы показать, что при любых $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, $\omega \in \Gamma$ и $x \in X$ выполняются следующие включения:

$$\begin{aligned} (s - \mathcal{B}\mathcal{A})((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1} \frac{x}{2\pi i \omega} &\ni \\ &\ni s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1} \frac{x}{2\pi i \omega} - \mathcal{B}[(s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C](\omega - \mathcal{B})^{-1} \frac{x}{2\pi i \omega} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} - \mathcal{B}(\omega - \mathcal{B})^{-1}[(s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C]\frac{x}{2\pi i\omega} \ni \\
&\ni s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} - [\omega(\omega - \mathcal{B})^{-1} - I][(s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C]\frac{x}{2\pi i\omega} = \\
&= C(\omega - \mathcal{B})^{-1}\frac{x}{2\pi i\omega} + [(s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C - C]\frac{x}{2\pi i\omega}.
\end{aligned}$$

Тогда по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} [((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}Cx - Cx] \frac{d\omega}{2\pi i\omega} = 0, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}. \quad (5)$$

С другой стороны, используя предложение 3.10.1 [6], получаем, что $\sigma(\mathcal{B}^{-1}) \subseteq [1/\beta, 1/\alpha]$ и при этом

$$(\lambda - \mathcal{B}^{-1})^{-1} = \lambda^{-1}[I - \lambda^{-1}(\lambda^{-1} - \mathcal{B})^{-1}], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [1/\beta, 1/\alpha].$$

Из этого равенства, формулы Коши и элементарных свойств функционального исчисления Данфорда следует, что

$$2\pi i x = \int_{\Gamma_1} (\lambda - \mathcal{B}^{-1})^{-1} x d\lambda = \int_{\Gamma_1} \left[(\lambda - \mathcal{B}^{-1})^{-1} x - \frac{x}{\lambda} \right] d\lambda = - \int_{\Gamma_1} (\lambda^{-1} - \mathcal{B})^{-1} \frac{x}{\lambda^2} d\lambda = \int_{\Gamma} (\lambda - \mathcal{B})^{-1} x d\lambda,$$

где $\Gamma_1 := \{\lambda^{-1} : \lambda \in \Gamma\}$. В силу теоремы 1.2.3 [6] из равенства (5) вытекает включение

$$Cx \in (s - \mathcal{B}\mathcal{A})F(s)x, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}, \quad x \in X. \quad (6)$$

Далее предположение $(x, y) \in \mathcal{A}$ влечёт за собой в силу теоремы 1.2.4 (i) [6] равенство

$$((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}Cy = (s/\omega)((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}Cx - Cx, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}, \quad \omega \in \Gamma, \quad x \in X.$$

Используя те же аргументы для МЛО $\mathcal{B}$ и почти дословно повторяя приведённые выше вычисления, убеждаемся, что из включений $(x, y) \in \mathcal{A}$ и $(y, z) \in \mathcal{B}$ следует равенство

$$sF(s)x - F(s)z = Cx, \quad s \in \Sigma_{a\pi/2}. \quad (7)$$

Теперь докажем, что оператор $(s - \mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}C$ однозначен при всех $s \in \Sigma_{a\pi/2}$. Предположим, что $x \in (s - \mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}C0$ при некотором $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, т.е. $0 \in (s - \mathcal{B}\mathcal{A})x$. Отсюда вытекает существование элементов $y \in \mathcal{A}x$ и $z \in \mathcal{B}y$ таких, что $sx = z$, поэтому $sF(s)x - F(s)z = 0$. В силу равенства (7) получаем, что $Cx = 0$, а значит, $x = 0$, так как C инъективен. Следовательно, $(s - \mathcal{B}\mathcal{A})^{-1}C = F(s)$ при всех $s \in \Sigma_{a\pi/2}$.

Зафиксируем $\gamma \in (0, a\pi/2)$, для которого $\gamma + \varepsilon < a\pi/2$. Тогда в силу оценки (3) существует число $c'_{\gamma+\varepsilon} > 0$ такое, что

$$\|sF(s)\| = \left\| \int_{\Gamma} s((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1} \frac{d\omega}{2\pi i\omega} \right\| \leq \int_{\Gamma} |\omega| c_{\gamma+\varepsilon} \|(\omega - \mathcal{B})^{-1}\| \frac{|d\omega|}{|\omega|} \leq c'_{\gamma+\varepsilon}, \quad s \in \Sigma_{\gamma}.$$

Для завершения доказательства остаётся применить теорему 3.2.19 [6] и интегральные вычисления, проведённые при доказательстве теоремы 2.6.1 [6]. Теорема доказана.

Замечание 1.

(i) Хорошо известно, что отображение $\lambda \mapsto (\lambda - \mathcal{A})^{-1}C \in L(X)$, $\lambda \in \Sigma_{a\pi/2}$, аналитично, если $C = I$ (см. [6, 21]).

(ii) Даже в случае, когда $a = 1$, оператор $\mathcal{A} = A$ однозначный и $C = I$, сделанные выше предположения не означают, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу

(см., например, хорошо известный контрпример Комацу из [26, § 1.3.6]). Наш основной результат и вывод из следующего пункта этого замечания можно переформулировать в терминах (почти) C -секториальных операторов [5, 6, 26].

(iii) Заметим, что оценка (3) использована только в финальной части доказательства теоремы. Предположим, вместо этого условия, что существует такое действительное число $\eta \geq -1$, что при каждом $a' \in (0, a)$ найдётся такое $c_{a'} > 0$, для которого

$$\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C\| \leq c_{a'}(1 + |\lambda|)^\eta, \quad \lambda \in \Sigma_{a'\pi/2}.$$

Тогда можно утверждать, как и выше, что при всех $b' \geq a'(1 + \eta)$ [$b' > a'(1 + \eta)$] МЛО $\mathcal{BA}$ является субгенератором экспоненциально ограниченного, аналитического $(g_{a'}, g_{b'+1})$ -регуляризованного C -разрешающего семейства $(R_{\mathcal{B}}(t))_{t \geq 0}$ с углом (4), если $\mathcal{BA}$ плотно определён [$\mathcal{BA}$ не является плотно определённым].

(iv) Утверждения теоремы и пункт (iii) этого замечания могут быть обобщены следующим образом. Всё ещё предполагая, что $\mathcal{B}^{-1} \in L(X)$, теперь вместо остальных условий предположим, что существует инъективный оператор $D \in L(X)$, коммутирующий с $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и C , такой, что $\sigma_D(\mathcal{B}) \subseteq [\alpha, \beta]$, отображение $\lambda \rightarrow (\lambda - \mathcal{B})^{-1}Dx$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$, аналитично при каждом фиксированном $x \in X$ и

$$[(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C][(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}D] = [(\lambda' - \mathcal{B})^{-1}D][(\lambda - \mathcal{A})^{-1}C]$$

для всех $\lambda \in \rho_C(\mathcal{A})$, $\lambda' \in \rho_D(\mathcal{B})$. Вычисления для выражения

$$F_D(s)x := \int_{\Gamma} ((s/\omega) - \mathcal{A})^{-1}C(\omega - \mathcal{B})^{-1}Dx \frac{d\omega}{2\pi i \omega}, \quad x \in X,$$

почти такие же, как в случае $D = I$, и разрешающие семейства операторов будут CD -регуляризованными. Отметим только, что уравнение (7) в рассматриваемой ситуации имеет вид $sF(s)x - F(s)z = CDx$, $s \in \Sigma_{a\pi/2}$, и что будет иметь место равенство

$$\int_{\Gamma} (\omega - \mathcal{B})^{-1}Dx d\omega = 2\pi i Dx,$$

справедливость которого может быть показана с помощью замены контура Γ окружностью $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, где $R \rightarrow +\infty$, последующей подстановки $z = 1/\omega$ и применения теоремы о вычетах.

(v) Утверждения теоремы работы и разделы (iii), (iv) этого замечания могут быть обобщены на случай, когда спектр оператора $\mathcal{B}$ (D -спектр оператора $\mathcal{B}$) не является подмножеством $\mathbb{R}$. Предположим, например, что существует такой угол $\theta \in (0, a\pi/2)$, при котором спектр $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \Sigma_\theta$ является компактным множеством. Тогда утверждения остаются верными для всех значений $a' \in (0, a - (2\theta/\pi))$ с углом аналитичности

$$\alpha = \min(\pi/2, \pi(a - a')/(2a') - (\theta/a')).$$

3. Приложения к абстрактным дробным дифференциальным уравнениям. В этом пункте доказанная теорема будет использована для исследования абстрактных дробных дифференциальных уравнений. Отдельно рассмотрим приложения к невырожденным и к вырожденным дробным дифференциальным уравнениям.

3.1. Невырожденные дробные дифференциальные уравнения. Здесь будет использовано хорошо известное функциональное исчисление для коммутирующих генераторов ограниченных C_0 -групп. Мы используем идею примера 3.4 [9].

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и iA_j , $1 \leq j \leq n$, – коммутирующие генераторы ограниченных C_0 -групп в банаховом пространстве X . Пусть $k = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$, $A = (A_1, \dots, A_n)$ и $A^\eta = A_1^{\eta_1} \cdots A_n^{\eta_n}$ для любого $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Символами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ обозначим преобразование Фурье на $\mathbb{R}^n$

и обратное преобразование Фурье соответственно. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^n) = \{\mathcal{F}f : f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$, положим $|\xi| := (\sum_{j=1}^n \xi_j^2)^{1/2}$, $(\xi, A) := \sum_{j=1}^n \xi_j A_j$ и

$$u(A)x := \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}u(\xi) e^{-i(\xi, A)} x d\xi, \quad x \in X.$$

Тогда $u(A) \in L(X)$, $u \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^n)$ и существует такое $M > 0$, что $\|u(A)\| \leq M \|\mathcal{F}^{-1}u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, $u \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^n)$. Пусть $N \in \mathbb{N}$. По комплексному многочлену $Q(x) = \sum_{|\eta| \leq N} a_\eta x^\eta$, $x \in \mathbb{R}^n$, степени N ($|\eta| := \sum_{j=1}^n \eta_j$) определим оператор $Q(A) := \sum_{|\eta| \leq N} a_\eta A^\eta$ с максимальной областью определения. Напомним, что если X – функциональное пространство, на котором переносы равномерно ограничены и сильно непрерывны, то очевидным выбором для A_j является оператор $-i\partial/\partial x_j$. Пусть $Q(x) = \sum_{|\eta| \leq N} a_\eta x^\eta$, $x \in \mathbb{R}^n$, и X такое пространство, тогда

$$\overline{Q(A)} \equiv Q(D; x) \equiv \sum_{|\eta| \leq N} a_\eta (-i)^{|\eta|} \partial^{|\eta|} / \partial x_1^{\eta_1} \dots \partial x_n^{\eta_n} \equiv \sum_{|\eta| \leq N} a_\eta D^\eta \quad (8)$$

– оператор, действующий на максимальной области определения.

Вопросы порождения дробного разрешающего семейства некоэрцитивными дифференциальными операторами проанализированы в теореме 2.5.3 и замечании 2.5.4 [5].

Лемма 1. Пусть $0 < a < 2$, $\omega \geq 0$, $Q(x)$ – комплексный многочлен степени $N \in \mathbb{N}$, $\beta > \frac{nN}{2 \min(1, a)}$ (соответственно $\beta = n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| \frac{N}{\min(1, a)}$, если $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $1 < p < \infty$) и справедлива импликация:

$$\text{если } Q(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{C} \setminus (\omega + \Sigma_{a\pi/2}), \quad \text{то } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(Q(x)^{1/a}) \leq \omega^{1/a}.$$

Положим $R_a(t) := (E_a(t^a Q(x))(1 + |x|^2)^{-\beta/2})(A)$, $t \geq 0$. Тогда $(R_a(t))_{t \geq 0}$ – глобально экспоненциально ограниченное $(g_a, R_a(0))$ -регуляризованное разрешающее семейство с интегральным генератором $\overline{Q(A)}$ непрерывно по норме при $\beta > \frac{nN}{2 \min(1, a)}$, при этом

$$\begin{aligned} \|R_a(t)\| &\leq M(1 + t^{\max(1, a)n/2})e^{\omega t}, \quad t \geq 0 \\ (\|R_a(t)\| &\leq M(1 + t^{\max(1, a)n|1/p-1/2|})e^{\omega t}, \quad t \geq 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим теперь случай $n \geq 2$, $a \in \mathbb{N}_{n-1}$, $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, \infty)$, $X := C_0(\mathbb{R}^n)$ или $X = BUC(\mathbb{R}^n)$ с оператором $\overline{P(A)}$ вида (8). Определим $Bf(x_1, \dots, x_n) := h(x_1, \dots, x_n)f(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где $h(\cdot)$ – ограниченная измеримая функция, и предположим, что многочлен $P(x)$ не зависит от переменных $x_1, \dots, x_a$. Тогда $\overline{P(A)}$ – интегральный генератор глобально экспоненциально ограниченного $(g_a, R_a(0))$ -регуляризованного разрешающего семейства $(R_a(t))_{t \geq 0}$ и выполняется соотношение (9), из которого следует, что

$$\lambda^{a-1}(\lambda^a - A)^{-1}C = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R_a(t)x dt, \quad x \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

при этом для всех $a'' \in (0, \pi/2)$ существует такая константа $c_{a''} > 0$, что

$$\|\lambda^{a-1}(\lambda^a - A)^{-1}C\| \leq c_{a''} [|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-1-\max(1, a)n/2}], \quad \lambda \in \Sigma_{a''},$$

соответственно

$$\|\lambda^{a-1}(\lambda^a - A)^{-1}C\| \leq c_{a''} [|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-1-\max(1, a)n|1/p-1/2|}], \quad \lambda \in \Sigma_{a''}.$$

При $a = 1$ или $a = 2$ в предположении, что существенный образ функции $h(\cdot)$ является компактным $\mathbb{C}$ подмножеством, содержащимся в секторе Σ_θ при некотором $\theta \in (0, a\pi/2)$, из теоремы 1 и замечания 1 (iv) несложно получаем, что при всех $a' \in (0, a - (2\theta/\pi))$ оператор $B\overline{P}(A)$ является интегральным генератором экспоненциально ограниченного $(g_{a'}, g_{b'+1})$ -регуляризованного C -разрешающего семейства при каждом $b' \geq \max(0, a' - 1)$ с углом аналитичности $\alpha = \min(\pi/2, \pi(a - a')/(2a') - (\theta/a'))$ (см. также теорему 2.9.48 [5] о полугруппах, порождённых дробными степенями почти C -неотрицательных операторов).

Отметим, что вопросы порождения дробного разрешающего семейства операторов степенями почти C -неотрицательных операторов до сих пор не исследовались.

Замечание 2. Напомним, что многочлен $P(x)$ называется r -коэрцитивным ($0 < r \leq N$), если существуют такие положительные постоянные M и L , что $|P(x)| \geq M|x|^r$ при $|x| \geq L$. К сожалению, мы не можем распространить наши рассуждения на дифференциальные операторы, символы которых являются r -коэрцитивными многочленами.

Очевидно, что доказанная теорема (см. также замечание 1 (iii)) может быть использована при исследовании класса почти секториальных операторов в банаховых пространствах. К сожалению, подход, использованный в примере 3.4 [9] и в приведённом выше приложении, не может быть использован при рассмотрении дифференциальных операторов высокого порядка с переменными показателями в гёльдеровых пространствах, исследованных впервые в работе [27] (см. также [5, 6, 28]). В самом деле, предположим, что $\alpha \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{N}$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^{4m} и $X := C^\alpha(\overline{\Omega})$. Рассмотрим оператор $A : D(A) \subseteq C^\alpha(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$ вида

$$Au(x) := \sum_{|\beta| \leq 2m} a_\beta(x) D^\beta u(x) \quad \text{при всех } x \in \overline{\Omega}$$

с областью определения $D(A) := \{u \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}) : D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ при всех } |\beta| \leq m-1\}$. Здесь $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j$ и функции $a_\beta : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяют следующим условиям:

- (a) $a_\beta(x) \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \overline{\Omega}$ и $|\beta| = 2m$,
- (b) $a_\beta \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ для всех $|\beta| \leq 2m$,
- (c) существует такое $M > 0$, что

$$M^{-1}|\xi|^{2m} \leq \sum_{|\beta|=2m} a_\beta(x) \xi^\beta \leq M|\xi|^{2m} \quad \text{при всех } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ и } x \in \overline{\Omega}.$$

В таком случае хорошо известно, что оператор A не плотно определён и существует достаточно большое число $\sigma > 0$ такое, что для оператора $-A_\sigma \equiv -(A + \sigma)$ выполняется включение $\Sigma_\omega \cup \{0\} \subseteq \rho(-A_\sigma)$ с некоторым $\omega \in (\pi/2, \pi)$ и $\|R(\lambda : -A_\sigma)\| = O(|\lambda|^{-1+\alpha/(2m)})$, $\lambda \in \Sigma_\omega$. Если мы хотим применить подход из примера 3.4 [9] (с оператором B , определённым выше), то необходимо потребовать, чтобы выполнялось тождество $a_\beta(x) \equiv 0$ для всех наборов $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, для которых существует такое $j \in \mathbb{N}_a$, что $\beta_j > 0$. Но это противоречит условию (c).

3.2. Вырожденные дробные дифференциальные уравнения. Этот пункт начнём с наблюдения, что доказанная в работе теорема может быть применена к ситуации с чисто многозначными линейными операторами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Рассмотрим самый простой пример, в котором $X := L^p(1, \infty)$ с некоторым $p \in [1, \infty]$ и $\mathcal{A}$ представляет собой оператор умножения на функцию $m_b^{-1}(x)m_a(x)$, где $m_a(x) := x + ie^x$, $m_b(x) := \chi_{[a,b]}(x)$ и $1 < a < b < \infty$.

Тогда для каждого $a \in (0, 1)$ существует такое $\omega_a > 0$, что требования теоремы работы выполнены при замене в ней МЛО $\mathcal{A}$ на МЛО $\mathcal{A} - \omega_a$. Предположим теперь, что $n_a(\cdot)$ и $n_b(\cdot)$ – некоторые измеримые комплекснозначные функции, для которых $n_b(\cdot)/n_a(\cdot) \in L^\infty(1, \infty)$, а также что при каждом $a \in (0, 1)$ существует число $d > 0$, угол $\theta \in (0, a)$ и компактное множество $K \subseteq \Sigma_\theta$ такие, что расстояние до существенного образа функции $n_b(\cdot)/n_a(\cdot)$ от каждой точки λ^{-1} , где λ не лежит в K , не менее d . Пусть $\mathcal{B}$ – умножение на $n_b^{-1}(x)n_a(x)$; тогда $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq K$ и теорема работы может быть использована (см. также замечание 1 (iii)).

Теперь применим доказанную теорему к абстрактным вырожденным дифференциальным уравнениям в L^p -пространствах. Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – ненулевые многочлены и $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Re}((P_1(x)/P_2(x))^{1/\alpha}) \leq 0$. В § 3.10.1 [6] был получен следующий результат (формулировка теоремы 3.10.17 (i) [6] содержит некоторые типографские опечатки, исправленные здесь).

Лемма 2. *Предположим, что $0 < a < 2$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – ненулевые комплексные многочлены, $N_1 = dg(P_1(x))$, $N_2 = dg(P_2(x))$, $N \in \mathbb{N}$ и $r \in (0, N]$. Пусть $Q(x)$ – r -коэрцитивный комплексный многочлен степени N , $a \in \mathbb{C} \setminus Q(\mathbb{R}^n)$, $\gamma > \frac{n}{2r} \max\left(N, \frac{N_1 + N_2}{\min(1, a)}\right)$*

(соответственно $\gamma = \frac{n}{r} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| \max\left(N, \frac{N_1 + N_2}{\min(1, a)}\right)$, если $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $1 < p < \infty$), $P_2(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \in P_1(\mathbb{R}^n)$ и $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Re}((P_1(x)/P_2(x))^{1/\alpha}) \leq 0$. Положим

$\mathcal{A} \equiv \overline{P_2(A) \cdot P_1(A)^{-1}}$, $C := ((a - Q(x))^{-\gamma})(A)$, $\delta := \max(1, a)n/2$, если $X \neq L^p(\mathbb{R}^n)$ при каком-либо $p \in (1, \infty)$, и $\delta := \max(1, a)n|(1/p) - (1/2)|$, если $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $p \in (1, \infty)$. Тогда $C \in L(X)$ инъективен и при каждом $\gamma > 2\delta + (1/2)$ многозначный линейный оператор $\mathcal{A}$ является субгенератором глобального экспоненциально ограниченного $(g_a, g_{\gamma+1})$ -регуляризованного C -разрешающего семейства $(R_a(t))_{t \geq 0}$, для которого семейство операторов $\{[t^\gamma(1+t^{-\delta})]^{-1}R_a(t) : t > 0\} \subseteq L(X)$ ограничено.

Рассмотрим теперь обычные дифференциальные операторы $P_1(D; x)$ и $P_2(D; x)$. Предположим, что $n \geq 2$, $a \in \mathbb{N}_{n-1}$, многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не зависят от переменных $x_1, \dots, x_a$, $X := L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in (1, \infty)$ и $(Bf)(x) := b(x_1, \dots, x_a)f(x_1, \dots, x_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f \in X$, где $b(\cdot)$ – существенно ограниченная функция. Из доказательств теорем 3.10.17 (i) и 3.10.9 [6] следует, что

$$\lambda^{a-\gamma-1}(\lambda^a - \mathcal{A})^{-1}Cx = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R_a(t)x dt, \quad x \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Учитывая это равенство и показатель роста для $(R_a(t))_{t \geq 0}$, нетрудно видеть, что при каждом $a' \in (0, a)$ существует такое $c_{a'} > 0$, при котором $\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| \leq c_{a'}(|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{(\delta-a)/\alpha})$, $\lambda \in \Sigma_{a'\pi/2}$. Положим $\eta := \max(-1, -1 + (\delta/\alpha))$. Если $a = 1$ или $a = 2$, то, применяя теорему работы (см. также замечание 1 (iii)), получаем, что при каждом $b' > a'(1 + \eta)$ МЛЮ BA является субгенератором экспоненциально ограниченного, аналитического $(g_{a'}, g_{b'+1})$ -регуляризованного C -разрешающего семейства $(R_B(t))_{t \geq 0}$ с углом аналитичности (4); более того, интегральные вычисления, выполненные при доказательстве теоремы 2.6.1 [3], показывают, что имеет место равенство

$$\|R_B(t)\| = O(t^{b'+1-a'}[t^{a'} + t^{(a'/\alpha)(\alpha-\delta)}]), \quad t > 0.$$

Это может быть использовано при анализе корректности следующей абстрактной вырожденной дробной задачи:

$$(\text{DFP})_{r,b} : \begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha [P_1(D; x)u(t)] = b(x)P_2(D; x)u(t) + f(t, x), & t \geq 0, \quad vx \in \mathbb{R}^n; \\ u(0, x) = Cu_0(x); \quad ((\partial^j / \partial t^j)u(t, x))|_{t=0} = 0, & 1 \leq j \leq [\alpha] - 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Замечание 3. Так как многочлен $P_1(x)$ не зависит от переменных $x_1, \dots, x_a$, то из предположения $0 \in P_1(\mathbb{R}^n)$ следует, что нуль принадлежит остаточному спектру оператора $P_1(D; x)$. В самом деле, остаточный спектр этого оператора совпадает с точечным спектром его сопряжённого оператора, который всегда содержит нуль.

Работа Федорова В.Е. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской Академии наук и технологий (проект 21-51-54003). Работа Костица М. выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и технологического развития Республики Сербия (грант 451-03-68/2020/14/200156).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *deLaubenfels R.* Existence Families. Functional Calculi and Evolution Equations. Berlin; Heidelberg, 1994.
2. *Xiao T.-J., Liang J.* The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations. Berlin, 1998.
3. *Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Basel, 2001.
4. *Kostić M.* Generalized Semigroups and Cosine Functions. Belgrade, 2011.
5. *Kostić M.* Abstract Volterra Integro-Differential Equations. Boca Raton, 2015.
6. *Kostić M.* Abstract Degenerate Volterra Integro-Differential Equations. Belgrade, 2020.
7. *Dorroh J.R.* Contraction semigroups in a function space // Pacific J. Math. 1966. V. 19. P. 35–38.
8. *Gustafson K., Lumer G.* Multiplicative perturbations of semigroup generators // Pacific J. Math. 1972. V. 41. P. 731–742.
9. *deLaubenfels R.* Bounded, commuting multiplicative perturbations of strongly continuous group generators // Houston J. Math. 1991. V. 17. P. 299–310.
10. *deLaubenfels R., Jazar M.* Commuting multiplicative perturbations // Houston J. Math. 1994. V. 20. P. 425–434.
11. *Holderrieth A.* Multiplicative Perturbations. PhD. Thesis. Tübingen, 1992.
12. *Dorroh J.R., Holderrieth A.* Multiplicative perturbation of semigroups generators // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A. 1993. V. 7. P. 47–57.
13. *Holderrieth A.* Commuting Multiplicative Perturbations. Book Chapter in: Evolution Equations, Control Theory and Biomathematics / Eds. P. Clement, G. Lumer. New York, 1994, P. 285–290.
14. *Jung M.* Some perturbation results for semigroups // Arch. Math. 1995. V. 64. P. 475–483.
15. *Xiao T.-J., Liang J.* Multiplicative perturbations of C -regularized semigroups // Comput. Math. Appl. 2001. V. 41. P. 1215–1221.
16. *Rhandi A.* Multiplicative perturbations of linear Volterra equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119. P. 493–501.
17. *Chang J.-C., Shaw S.-Y.* Multiplicative and additive perturbations of resolvent families // Int. Math. J. 2002. V. 2. P. 841–853.
18. *Xin Y., Liang C.* Multiplicative perturbations of C -regularized resolvent families // J. Zhejiang University Science. 2004. V. 5. P. 528–532.
19. *Lizama C., Poblete V.* On multiplicative perturbation of integral resolvent families // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 327. P. 1335–1359.
20. *Kostić M.* (a, k) -Regularized C -resolvent families: regularity and local properties // Abstract Appl. Anal. 2009. V. 2009. Art. ID 858242.
21. *Favini A., Yagi A.* Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. New York, 1998.
22. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston, 2003.
23. *Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Плеханова М.В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1367–1375.
24. *Федоров В.Е., Авчилович А.С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана–Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60. № 2. С. 461–477.
25. *Fedorov V.E., Filin N.V.* On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations // Fractal and Fractional. 2021. V. 5. № 20. P. 1–14.
26. *Martínez C., Sanz M.* The Theory of Fractional Powers of Operators. Amsterdam, 2001.
27. *von Wahl W.* Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1972. Bd. 11. S. 231–258.
28. *Periago F., Straub B.* A functional calculus for almost sectorial operators and applications to abstract evolution equations // J. Evolution Equat. 2002. V. 2. P. 41–68.

Университет Кхеми Мильяны,
г. Кхеми Мильяна, Алжир,
Челябинский государственный университет,
Университет Нови-Сада,
г. Нови-Сад, Сербия

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.
После доработки 20.10.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ
С НАГРУЗКАМИ И БИФУРКАЦИОННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ: ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ
И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение Вольтерры с локальными и/или интегральными нагрузками на искомое решение, заданными с помощью интеграла Стилтеса. Уравнение содержит бифуркационный параметр и при любом его значении имеет тривиальное решение. Получены необходимые и достаточные условия на те значения параметра (точки бифуркации), в окрестности которых уравнение имеет нетривиальные непрерывные вещественные решения. Построены главные члены асимптотики ветвей решений и указан способ их уточнения. Приведены иллюстрирующие примеры. Установлен принцип линеаризации, позволяющий находить точки бифуркации, используя только информацию о линейной части нелинейного уравнения с векторной нагрузкой и векторным бифуркационным параметром.

DOI: 10.31857/S0374064121120086

Введение. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda), \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – бифуркационный параметр, $x(t) \in C[0, T]$ – искомая функция, функционал x_α , называемый в приложениях *нагрузкой*, задаётся с помощью интеграла Стилтеса: $x_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} x(t) d\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ – заданная функция ограниченной вариации, $[t_1, t_2] \in (0, T)$. Поэтому нагрузка x_α может быть как локальной вида $x_\alpha = x(\alpha)$, $\alpha \in (0, T)$, так и нелокальной. Нелинейное интегральное отображение $\mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda)$ определяется формулой (2) (см. ниже).

Уравнения с нагрузками по свойствам и по области приложений близки нестандартным дифференциально-интегральным уравнениям [1] и уравнениям нейтрального типа [2]. Отметим, что метод выпуклых мажорант позволяет исследовать области существования нелинейных интегральных уравнений (см., например, [3]). Функционал x_α и функция $x(t)$ зависят от параметра λ . В дальнейшем для упрощения записи эта зависимость не всегда указывается явно.

В последние годы части этих разделов теорий дифференциальных и интегральных уравнений оформились в самостоятельные направления. Однако несмотря на наличие большого числа работ (см. работы [4–10] и библиографию в них) даже простейшие классы уравнений Вольтерры с нагрузками и бифуркационными параметрами оставались неизученными. Цель настоящей работы – указать подход к исследованию таких уравнений достаточно общего вида.

1. Постановка задачи. Пусть выполняется условие**I.** Нелинейное отображение $\mathcal{L} : C[0, T] \rightarrow C([0, T] \times \mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda) = & a(t, \lambda)x_\alpha + \sum_{i+k=l}^N f_{ik}(t, \lambda)x^i(t)x_\alpha^k + \\ & + \int_0^t \sum_{i+k=l}^N K_{ik}(t, s, \lambda)x^i(s)x_\alpha^k ds + R(x(t), x_\alpha, t, \lambda), \end{aligned} \quad (2)$$

здесь l и N – заданные натуральные числа, $l \geq 2$, $t \in [0, T]$, функции $x(t)$, $f_{ik}(t, \lambda)$, $K_{ik}(t, s, \lambda)$, $R(x(t), x_\alpha, t, \lambda)$ являются непрерывными по совокупности переменных и достаточно гладкими по переменной $\lambda \in \mathbb{R}$, которая в приложениях играет роль параметра. Кроме того, в окрестности точки λ_0 предполагается выполненной следующая оценка, указывающая порядок малости при $\|x\| \rightarrow 0$, $|x_\alpha| \rightarrow 0$ нелинейного члена R :

$$\|R(x(t), x_\alpha, t, \lambda)\| = \mathcal{O}((\|x\| + |x_\alpha|)^{N+1}),$$

где $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$.

Очевидно, что при любом λ уравнению (1), (2) удовлетворяет пара $x(t) = 0$, $x_\alpha = 0$. Областью значений отображения $\mathcal{L}$ является пространство функций непрерывных по аргументу t и достаточно гладких по параметру λ .

Определение 1. Точка λ_0 называется *точкой бифуркации* уравнения (1), если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдутся непрерывная функция $x(t)$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам $0 < \|x(t)\| < \varepsilon$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ и уравнению (1).

В данной работе находятся условия, при выполнении которых точка $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ является точкой бифуркации уравнения (1), (2) и можно построить асимптотику нетривиальных ветвей малых решений уравнения (1), (2). Под ветвью понимается непрерывное вещественное решение $x(t)$ такое, что $x(t) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ (или $\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$). Очевидно, что каждому решению $x(t)$ ставится в соответствие единственная нагрузка с помощью заданного линейного функционала.

Известно (см., например, [4–7]), что нагруженные уравнения моделируют процессы, состояние которых в какие-либо моменты (или локальные промежутки времени) оказывает влияние на их протекание в целом. Нагруженным дифференциальным уравнениям (обыкновенным и в частных производных) посвящено достаточно много работ (см. библиографию в [5]). Но классы интегральных уравнений Вольтерры с нагрузками и бифуркационный анализ в моделях с нагрузками в известной нам литературе ранее не изучались.

Мы получим решение поставленной задачи, построив уравнение относительно нагрузки с бифуркационным параметром λ и исследовав его с помощью метода последовательных приближений, методов степенной геометрии и при помощи вращения конечномерных векторных полей. Сочетание таких методов восходит к классическим подходам, изложенным в [11–17], и нашло приложение при решении ряда сложных задач механики, математической физики и энергетики [1, 17–20].

2. Построение уравнения относительно нагрузки и необходимые условия бифуркации. Для большей наглядности предлагаемого подхода сначала проведём его изложение при наличии только одной нагрузки (т.е. в приведённой выше постановке; случай же, когда λ и x_2 – векторы, рассматривается в п. 5 работы). Используя метод последовательных приближений и теорему о неявном отображении в аналитическом случае, решение $x(t)$ интегрального уравнения Вольтерры (1) построим при $t \in [0, T]$ и $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1$, $|x_\alpha| \leq \rho_2$ в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t, \lambda) x_\alpha^n. \quad (3)$$

Функции $a_n(t, \lambda)$ вычислим последовательно, используя рекуррентные формулы

$$a_1(t, \lambda) = a(t, \lambda),$$

$$a_n(t, \lambda) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\alpha^n} \mathcal{L} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k(t, \lambda) x_\alpha^k, x_\alpha, t, \lambda \right) \Big|_{x_\alpha=0}, \quad n = 2, 3, \dots$$

При этом в силу структуры оператора (2) очевидно, что для первых $2l - 2$ коэффициентов ряда (3) получим простые формулы

$$a_2(t, \lambda) = \dots = a_{l-1}(t, \lambda) \equiv 0,$$

$$a_n(t, \lambda) = \frac{1}{n!} \sum_{i+k=n} \left[f_{ik}(t, \lambda) a^i(t, \lambda) + \int_0^t K_{ik}(t, s, \lambda) a^i(s, \lambda) ds \right], \quad n = \overline{l, 2l-2}.$$

На основании теоремы о неявном отображении ряд (3) сходится в достаточно малой окрестности $|x_\alpha| \leq \rho_2$. Величину ρ_2 можно оценить снизу, используя метод выпуклых мажорант [3, 18]. Эту возможность продемонстрируем ниже в п. 4 при рассмотрении примера 2. Из изложенного вытекает

Лемма 1. Пусть выполнены условия I. Тогда нагрузка x_α удовлетворяет уравнению

$$A_1(\lambda)x_\alpha + \sum_{i=l}^{\infty} A_i(\lambda)x_\alpha^i = 0, \quad (4)$$

где

$$A_1(\lambda) = \int_{t_1}^{t_2} a_1(t, \lambda) d\alpha(t) - 1, \quad A_i(\lambda) = \int_{t_1}^{t_2} a_i(t, \lambda) d\alpha(t), \quad i = l, l+1, \dots$$

Доказательство вытекает из возможности представления решения $x(t)$ в виде ряда (3) и задания нагрузки с помощью линейного функционала (интеграла Стилттьеса).

Следствие 1 (необходимое условие бифуркации). Для того чтобы число λ_0 могло быть точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (2), необходимо выполнение равенства

$$A_1(\lambda_0) = 0.$$

Доказательство. Уравнение (4) при каждом λ имеет тривиальное решение $x_\alpha \equiv 0$. Если $A_1(\lambda_0) \neq 0$, то при $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1$ в окрестности $|x_\alpha| < \rho_2$ на основании теоремы о неявной функции малое решение уравнения (4) единственно. Следовательно, в этом случае $x_\alpha \equiv 0$ и λ_0 , согласно определению 1, не является точкой бифуркации уравнения (1). Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть в уравнении (4) все коэффициенты $A_i(\lambda)$ в точке λ_0 равны нулю. Тогда λ_0 будет точкой бифуркации. Более того, уравнение (1), (2) при $\lambda = \lambda_0$ имеет с-параметрическое нетривиальное решение $x(t, s)$, зависящее от достаточно малого параметра s . При $0 < |\lambda - \lambda_0| < \rho_1$ других малых решений уравнения (1), (2) не имеет.

Доказательство очевидно, так как в силу условий следствия 2 нагрузка x_α при $\lambda = \lambda_0$ в разложении (3) решения уравнения (1), (2) остаётся произвольным параметром s из интервала $|s| \leq \rho_2$, в котором сходится ряд (3). Следствие доказано.

3. Достаточные условия существования точки бифуркации и асимптотика решений. Конструктивные достаточные условия существования точек бифуркации получим, определив вещественные решения $x_\alpha \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$) уравнения (4) и подставив их в правую часть представления (3). Напомним, что в уравнении (4)

$$A_l(\lambda) = \frac{1}{l!} \sum_{i+k=l} \left(f_{ik}(\alpha, \lambda) a^i(\alpha, \lambda) + \int_0^\alpha K_{ik}(\alpha, s, \lambda) a^i(s, \lambda) ds \right)$$

в случае локальной нагрузки и

$$A_l(\lambda) = \frac{1}{l!} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i+k=l} \left(f_{ik}(t, \lambda) a^i(t, \lambda) + \int_0^t K_{ik}(t, s, \lambda) a^i(s, \lambda) ds \right) d\alpha(t)$$

в случае интегральной (нелокальной) нагрузки.

В силу леммы 1 для построения асимптотики величины x_α следует в уравнении (4) положить $\lambda = \lambda_0 + \mu$, где μ – малый вещественный параметр.

Потребуем выполнения условий.

II. Число λ_0 – корень уравнения $A_1(\lambda) = 0$ кратности p .

III. Имеет место соотношение $A_l(\lambda_0) \neq 0$.

Тогда уравнение (4) при $\lambda = \lambda_0 + \mu$ преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{p!}A_1^{(p)}(\lambda_0)\mu^p + \mathcal{O}(|\mu|^{p+1})\right)x_\alpha + (A_l(\lambda_0) + \mathcal{O}(|\mu|))x_\alpha^l + \mathcal{O}(|x_\alpha|^{l+1}) = 0 \quad (5)$$

в окрестности точек $x_\alpha = 0$, $\mu = 0$. Решение уравнения (5) будем искать, используя разложение Ньютона–Пьюизэ (диаграмма Ньютона определяет показатель $p/(l-1)$):

$$x_\alpha = (c_0 + \mathcal{O}(|\mu|))\mu^{p/(l-1)}, \quad c_0 \neq 0.$$

Очевидно, что значение c_0 удовлетворяет уравнению

$$\text{sign } \mu^p \frac{1}{p!} \frac{d^p A_1(\lambda)}{d\lambda^p} \Big|_{\lambda=\lambda_0} c + A_l(\lambda_0)c^l = 0. \quad (6)$$

Поэтому при нечётном p получаем два уравнения, а именно

$$\frac{1}{p!}A_1^{(p)}(\lambda_0)c + A_l(\lambda_0)c^l = 0 \quad \text{при } \mu > 0, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{p!}A_1^{(p)}(\lambda_0)c + A_l(\lambda_0)c^l = 0 \quad \text{при } \mu < 0. \quad (8)$$

При нечётном p и любом l уравнение (6) хотя бы в одной из полукрестностей точки $\mu = 0$ имеет простой вещественный корень $c_0 \neq 0$.

Случай 1. При чётном l вещественным корнем уравнения (7) является

$$c_0 = \sqrt[l-1]{-\frac{1}{p!} \frac{A_1^{(p)}(\lambda_0)}{A_l(\lambda_0)}},$$

а уравнение (5) имеет вещественное решение $x_\alpha \sim c_0|\mu|^{p/(l-1)}$ при $\mu \rightarrow +0$ и соответственно $x_\alpha \sim -c_0|\mu|^{p/(l-1)}$ при $\mu \rightarrow -0$.

Случай 2. При нечётном l и $A_1^{(p)}(\lambda_0)A_l(\lambda_0) < 0$ у уравнения (7) будет два вещественных корня

$$c_{0\pm} = \pm \sqrt[l-1]{\frac{1}{p!} \left| \frac{A_1^{(p)}(\lambda_0)}{A_l(\lambda_0)} \right|},$$

а у уравнения (5) при $0 \leq \mu \leq \rho_1$ – два вещественных решения $x_{\alpha\pm} \sim c_{0\pm}\mu^{p/(l-1)}$ при $\mu \rightarrow +0$. Если l нечётно и $A_1^{(p)}(\lambda_0)A_l(\lambda_0) > 0$, верен аналогичный результат при $-\rho_1 \leq \mu \leq 0$.

Из изложенного вытекает

Теорема 1. Пусть выполнены условия I, II, III. Тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (1), (2). Более того, при чётном l уравнение (1), (2) имеет в окрестности точки λ_0 единственное малое вещественное решение $x(t, \lambda)$, при этом

$$x(t, \lambda) \sim a_1(t, \lambda_0) \sqrt[l-1]{-\frac{1}{p!} \frac{A_1^{(p)}(\lambda_0)}{A_l(\lambda_0)}} (\lambda - \lambda_0)^{p/(l-1)} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_0.$$

При нечётном l уравнение (1), (2) имеет в одной из полукрестностей точки λ_0 два вещественных решения с аналогичной асимптотикой.

Из доказательства теоремы 1 с учётом следствия 2 вытекает

Теорема 2. Пусть выполнены условия I, II и λ_0 – корень уравнения $A_1(\lambda) = 0$ нечётной кратности. Тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (1), (2).

Теорема 1 с учётом возможности представления других многообразий решений уравнения (4) в виде разложений Ньютона–Пуизё допускает обобщения.

Действительно, рассмотрим коэффициенты $A_1(\lambda)$, $A_l(\lambda)$, $A_{l+1}(\lambda)$, ..., $A_{n-1}(\lambda)$ уравнения (4) и введём условие

IV. Число λ_0 является нулём функции $A_i(\lambda)$ кратности p_i , $i=1, l, \dots, n-1$, а $A_n(\lambda_0) \neq 0$.

Нанесём на координатную плоскость точки $(1, p_1)$, (l, p_l) , ..., $(n-1, p_{n-1})$, $(n, 0)$ и построим диаграмму Ньютона для этих точек (рисунок).

Возьмём на рисунке грань (a, b) . На этой грани лежат точки (i, p_i) , удовлетворяющие равенству $ir/s + k = \theta$, где $r/s = \tan \varphi$, а θ – ордината точки пересечения продолжения грани (a, b) с осью ординат. Очевидно, что θ также будет рациональным числом.

Будем искать решение уравнения (4) в виде $x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}$, $c(0) \neq 0$. Тогда $c(0)$ должно удовлетворять по крайней мере одному из двух уравнений

$$P_\pm(c) := \sum_{ir/s+k=\theta} \text{sign} \mu^k \frac{1}{p_i!} a_i^{(p_i)}(\lambda_0) c^i = 0.$$

Построив простые вещественные корни $c^* \neq 0$ этих уравнений, запишем, как и в доказательстве теоремы 1, асимптотики малых решений $x(t, \lambda)$ уравнения (1), (2) в двух полукрестностях точки бифуркации λ_0 .

4. Построение решений уравнения (1), (2) методом неопределённых коэффициентов. Изложенный выше подход позволяет строить решения уравнения (1), (2) непосредственно в виде ряда по целым или дробным степеням параметра $\lambda - \lambda_0$, где λ_0 – точка бифуркации. Коэффициенты ряда, как и в известном методе Некрасова–Назарова [13, 15] продолжения решения, определяются из рекуррентной последовательности линейных уравнений. Особенность этого аналитического метода состоит в том, что произвольные постоянные на каждом шаге находятся из условий разрешимости последующих уравнений этой последовательности.

Пример 1 демонстрирует такой способ решения уравнений с нагрузками в условиях теоремы 1, а пример 2 – построение параметрического семейства решений при выполнении условий следствия 2.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x(t) = t(\lambda - 2)x(1) - \int_0^t tsx^3(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Для него находим, что уравнение (4) для нагрузки имеет следующие коэффициенты: $A_1(\lambda) = \lambda - 3$, $A_3(\lambda) = -(\lambda - 2)^3/5$. Поэтому, согласно следствию 1, точкой бифуркации уравнения (9) может быть только точка $\lambda_0 = 3$. Для этой точки выполнены условия I, II при $p = 1$, $l = 3$. Следовательно, согласно теореме 1, решение будем искать в виде ряда

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \mu^{n/2}, \quad \text{где } \mu = \lambda - 3.$$

Используя метод неопределённых коэффициентов, для вычисления коэффициентов $a_n(t)$ получаем последовательность линейных уравнений

$$a_1(t) = ta_1(1), \quad a_2(t) = ta_2(1), \quad a_3(t) = ta_3(1) + ta_1(1) - \int_0^t ts a_1^3(s) ds,$$

$$a_4(t) = ta_4(1) + ta_2(1) - 3 \int_0^t tsa_1^2(s)a_2(s) ds, \quad a_5(t) = ta_5(1) + ta_3(1) - 3 \int_0^t tsa_1^2(s)a_3(s) ds, \quad \dots$$

Следовательно, $a_1(t) = tc_1$, $a_2(t) = tc_2$, ... Постоянные c_1 , c_2 определяются из условий разрешимости последующих уравнений цепочки. Именно, c_1 – из алгебраического уравнения $c_1 - c_1^3/5 = 0$. Поэтому $c_1 = \pm\sqrt{5}$, а интегральное уравнение (9) имеет в положительной окрестности точки бифуркации $\lambda_0 = 3$ два малых нетривиальных вещественных решения

$$x_{1,2} \sim \pm t(\lambda - 3)^{1/2}\sqrt{5} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 3.$$

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = tb(\lambda)x(1) - \int_0^t (t-1)x^3(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad T > 1. \quad (10)$$

Пусть $b(1) = 1$. Тогда, согласно следствию 2, точка $\lambda_0 = 1$ будет точкой бифуркации уравнения (10). Более того, при $\lambda_0 = 1$ малое решение этого уравнения можно построить в виде ряда

$$x(t) = tc + \sum_{n=3}^{\infty} a_n(t)c^n,$$

равномерно сходящегося при $t \in [0, T]$ и $|c| \leq \rho$, где $\rho > 0$ достаточно мало. Коэффициенты $a_n(t)$ также легко вычислить методом неопределённых коэффициентов.

Для оценки радиуса ρ сходимости этого ряда построим, следуя [3], мажорирующую систему

$$r = T\rho + T^2r^3, \quad 1 = 3T^2r^2.$$

Пара $r^* = 1/(\sqrt{3}T)$, $\rho^* = 2r^*/(3T)$ удовлетворяет этой системе. Поэтому при $|c| \leq \rho < 2/(3\sqrt{3}T^2)$ ряд равномерно сходится, а интегральное уравнение (10) в пространстве $C[0, T]$ имеет c -параметрическое решение.

5. Интегральные уравнения Вольтерры с векторной нагрузкой и векторным бифуркационным параметром. Пусть в уравнении (1) $x_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Значения нагрузки и бифуркационный параметр лежат в окрестностях нулей векторных пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение (1) с правой частью $\mathcal{L}$, которая теперь задаётся равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda) = & \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda_1, \dots, \lambda_m) x_{\alpha_k} + \\ & + \sum_{s=l}^{\infty} \sum_{j+k_1+\dots+k_n=s} \left[f_{jk_1\dots k_n}(t, \lambda_1, \dots, \lambda_m) x^j(t) x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} + \right. \\ & \left. + \int_0^t K_{jk_1\dots k_n}(t, s, \lambda_1, \dots, \lambda_m) x^j(s) x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} ds \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где b_k , $f_{jk_1\dots k_n}$, $K_{jk_1\dots k_n}$ – непрерывные функции, достаточно гладкие по всем λ_i в окрестности $\|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta$. Далее, для краткости, (1), (11) обозначает интегральную систему (1) с правой частью вида (11).

Найдём достаточные условия, когда вектор $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ будет точкой бифуркации и можно построить асимптотику вещественных решений при $\lambda_i = \lambda_{0i} + \mu$, $i = 1, \dots, m$, где $\mu \in [0, \delta]$ (или $\mu \in [-\delta, 0]$).

Начнём с построения системы для определения векторной нагрузки. Для этого построим решение $x(t)$ с помощью ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(t, \lambda, x_\alpha) \quad (12)$$

по однородным формам компонент векторной нагрузки x_α . Здесь $a_j(t, \lambda, \mu x_{\alpha_1}, \dots, \mu x_{\alpha_n}) = \mu^j a_j(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})$. Отметим, что j -однородные формы вычисляются однозначно рекуррентным образом:

$$a_1(t, \lambda, x_\alpha) = \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda) x_{\alpha_k}; \quad a_1 = \dots = a_{l-1} = 0;$$

$$a_m(t, \lambda, x_\alpha) = \frac{1}{m!} \sum_{j+k_1+\dots+k_n=m} \left[f_{jk_1, \dots, k_n}(t, \lambda) a_1(t, \lambda, x_\alpha)^j x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} + \right. \\ \left. + \int_0^t K_{jk_1, \dots, k_n}(t, s, \lambda) a_1(s, \lambda, x_\alpha)^j x_{\alpha_1}^{k_1} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} ds \right], \quad m = \overline{l, 2l-1};$$

$$a_j(t, \lambda, x_\alpha) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \mu^j} \mathcal{L} \left(\sum_{n=1}^{j-1} a_n(t, \mu x_{\alpha_1}, \dots, \mu x_{\alpha_n}), \mu x_\alpha, t, \lambda \right) \Big|_{\mu=0}, \quad j = 2l, 2l+1, \dots$$

Замечание. Последовательность $\{x_m\}$, где $x_m(t) = \mathcal{L}(x_{m-1}(t), x_\alpha, t, \lambda)$ при начальном приближении $x_0(t) = \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda) x_{\alpha_k}$ и при $\|x_\alpha\| \leq \rho$, равномерно сходится к сумме ряда (12). Поэтому в неаналитическом случае для построения решения и коэффициентов a_j можно использовать метод последовательных приближений.

Лемма 2. Искомая нагрузка x_α в решении (12) должна удовлетворять n нелинейным с параметрами λ_i уравнениям

$$A_1(\lambda) x_\alpha + \sum_{j=l}^{\infty} F_j(\lambda, x_\alpha) = 0. \quad (13)$$

Здесь $F_j = (F_{j1}, \dots, F_{jn})^T$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, F_{ji} , $i = \overline{1, n}$, — j -однородные формы компонент вектора $x_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})$, $A_1(\lambda) = [(b_k(t, \lambda), \alpha_i)]_{i,k=\overline{1, n}}$ — $n \times n$ -матрица, α_i — линейные функционалы в пространстве $C[0, T]$ (интегралы Стильтьеса).

Доказательство леммы проводится применением функционалов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ к обоим частям равенства (12) с учётом обозначения $x_{\alpha_i} = (x(t), \alpha_i)$, $i = \overline{1, n}$, для функционалов.

Рассмотрение системы (13) приводит к следующему результату.

Теорема 3 (необходимое условие бифуркации). Для того чтобы вектор $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ мог быть точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (11), необходимо выполнение равенства $\det A_1(\lambda_0) = 0$.

Доказательство. Вектор λ_0 может быть точкой бифуркации уравнения (1), (11) тогда и только тогда, когда он является точкой бифуркации и системы (13). Но если $\det A_1(\lambda_0) \neq 0$, то у системы (13) кроме тривиального нет других малых решений, как это следует из теоремы о неявных функциях. Следовательно, так как ряд (12) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между малым решением интегрального уравнения и малым решением системы (13), то интегральное уравнение также имеет только тривиальное малое решение $x(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

6. Достаточное условие бифуркации в векторном случае: принцип линеаризации. Пусть выполнено необходимое условие бифуркации (т.е. теорема 3) и $\text{rank } A_1(\lambda_0) = r$. Пусть $\{\phi_1, \dots, \phi_{n-r}\}$ и $\{\psi_1, \dots, \psi_{n-r}\}$ — ортонормированные базисы в подпространствах нулей $\mathcal{N}(A_1(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A_1^*(\lambda_0))$ соответственно.

Введём квадратную матрицу $\hat{A}_1(\lambda) = A_1(\lambda) + \sum_{i=1}^{n-r} (\cdot, \phi_i) \psi_i$ порядка n . Отметим, что эта матрица обратима, поскольку несложно показать, что однородная система $\hat{A}_1(\lambda_0)l = 0$ имеет только тривиальное решение $l = 0$. Поэтому в силу непрерывности $A_1(\lambda)$ относительно λ матрица $\hat{A}_1(\lambda)$ также обратима по крайней мере в малой окрестности $\|\lambda - \lambda_0\| \leq \rho$ на основании теоремы об обратном операторе.

Введём обозначение $\lambda_0 + \mu := (\lambda_{01} + \mu, \lambda_{02} + \mu, \dots, \lambda_{0m} + \mu)$, вспомогательные параметры $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ и запишем систему (13) в виде

$$\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)x_\alpha = \sum_{k=1}^{n-r} \xi_k \psi_k - \sum_{j=l}^{\infty} F_j(\lambda_0 + \mu, x_\alpha), \quad (14)$$

где $\xi_i = (x_\alpha, \phi_i)$, $i = \overline{1, n-r}$.

Так как $x_\alpha \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, то параметры ξ_i являются бесконечно малыми величинами. Матрица $\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)$ имеет обратную при $|\mu| < \rho$. Поэтому можно построить сходящуюся последовательность $\{x_\alpha^n\}$, используя рекурсию

$$x_\alpha^n = [\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)]^{-1} \sum_{k=1}^{n-r} \xi_k \psi_k - [\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)]^{-1} \sum_{k=l}^{\infty} F_k(\lambda_0 + \mu, x_\alpha^{n-1})$$

при начальном приближении $x_\alpha^0 = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_\alpha^n = x_\alpha$. Следовательно,

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{n-r} [\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)]^{-1} \psi_k \xi_k + R(\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, \mu), \quad (15)$$

где $\|R(\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, \mu)\| = \mathcal{O}(\|\xi\|^l)$. Подставляя построенный вектор x_α в равенство (14), получаем $n-r$ уравнений для определения компонент вектора $\xi(\mu)$:

$$\sum_{k=1}^{n-r} [(\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)^{-1} \psi_k, \phi_i) - \delta_{ki}] \xi_k + r_i(\xi, \mu) = 0, \quad (16)$$

$i = \overline{1, n-r}$, $|r_i(\xi, \mu)| = \mathcal{O}(\|\xi\|^l)$. Найдём достаточные условия, не зависящие от вида нелинейных функций $r_i(\xi, \mu)$, при выполнении которых $\mu = 0$ будет точкой бифуркации системы (16).

Введём непрерывную функцию

$$\Delta(\mu) = \det [(\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)^{-1} \psi_k, \phi_i) - \delta_{ki}]_{i,k=1}^{n-r}. \quad (17)$$

Ввиду равенства $\hat{A}_1(\lambda_0) \phi_k = \psi_k$ верно тождество $\hat{A}_1^{-1}(\lambda_0) \psi_k = \phi_k$, $k = \overline{1, n-r}$. Поэтому $\lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta(\mu) = 0$ и точка $\mu = 0$ является нулём функции $\Delta(\mu)$.

Пусть выполняется условие

V. Значение $\mu = 0$ является k -кратным нулём функции $\Delta(\mu)$.

Тогда $\Delta(\mu) \sim c\mu^k$ при $\mu \rightarrow 0$ и $d^i \Delta(\mu)/d\mu|_{\mu=0} = 0$, $i = \overline{0, k-1}$, $d^k \Delta(\mu)/d\mu^k|_{\mu=0} \neq 0$. Если матрица $A_1(\lambda + \mu)$ в изолированной особой точке λ_0 имеет полный обобщённый жорданов набор (см. [17, § 30]) из $n-r$ цепочек длины p_i , $i = \overline{1, n-r}$, то $k = p_1 + \dots + p_{n-r}$.

Определение 2. Назовём число k *корневым числом* матрицы $A_1(\lambda)$ в точке λ_0 .

В монографии [17, гл. 9] показано, что корневое число не зависит в фредгольмовой особой точке λ_0 от выбора базисов в подпространствах $\mathcal{N}(A(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A^*(\lambda_0))$.

Теорема 4 (принцип линеаризации). Пусть корневое число k матрицы $A_1(\lambda)$ в точке λ_0 нечётное. Тогда λ_0 будет точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (11).

Доказательство. Вследствие (12), (15) λ_0 будет точкой бифуркации уравнения (1), (11) тогда и только тогда, когда $\mu = 0$ является точкой бифуркации системы (16). Запишем систему (16) в векторном виде

$$S(\mu)\xi + r(\xi, \mu) = 0,$$

где $S(\mu) = [(\hat{A}_1(\lambda_0 + \mu)^{-1}\psi_k, \phi_i) - \delta_{ki}]_{k,i=\overline{1, n-r}}$ – квадратная матрица, $\xi \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\|r(\xi, \mu)\| = \mathcal{O}(\|\xi\|^l)$. Зададим сколь угодно малые $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ и введём векторное поле

$$H(\xi, t) := S((2t-1)\delta)\xi + r(\xi, (2t-1)\delta) : \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-r},$$

определённое при $\xi, t \in M$, где $M = \{\xi, t : \|\xi\| < \varepsilon, 0 \leq t \leq 1\}$.

Случай 1. Если существует пара $(\xi^*, t^*) \in M$, для которой $H(\xi^*, t^*) = 0$, то, согласно определению 1, точка $\mu = 0$ будет точкой бифуркации системы (16), и теорема 4 справедлива.

Случай 2. Предположим, что $H(\xi, t) \neq 0$ при любых $(\xi, t) \in M$ и, следовательно, теорема 4 неверна. Ввиду непрерывности поля $H(\xi, t)$ при $\xi, t \in M$ поля $H(\xi, 0)$ и $H(\xi, 1)$ гомотопны на сфере $\|\xi\| = \varepsilon$, поэтому их вращения на этой сфере равны между собой, т.е.

$$J(H(\xi, 0), \|\xi\| = \varepsilon) = J(H(\xi, 1), \|\xi\| = \varepsilon). \quad (18)$$

В силу малости ε поля $H(\xi, 0)$ и $H(\xi, 1)$ гомотопны своим невырожденным линейным частям $S(-\delta)\xi$ и $S(+\delta)\xi$ соответственно, т.е.

$$J(H(\xi, 0), \|\xi\| = \varepsilon) = J(S(-\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) \quad \text{и} \quad J(H(\xi, 1), \|\xi\| = \varepsilon) = J(S(+\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon).$$

В силу условия V имеем $\det S(-\delta) \sim c(-\delta)^k$ и $\det S(+\delta) \sim c(+\delta)^k$. Поэтому по теореме Кронекера об индексе получаем

$$J(S(-\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = \text{sign}(-\delta)^k, \quad J(S(+\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = \text{sign}(+\delta)^k.$$

В силу нечётности k приходим к равенствам

$$J(S(-\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = -1, \quad J(S(+\delta)\xi, \|\xi\| = \varepsilon) = +1,$$

а значит, равенство (18) невозможно. Следовательно, при нечётном k найдётся пара $(\xi^*, t^*) \in M$, для которой $H(\xi^*, t^*) = 0$ и, согласно определению 1, точка $\mu = 0$ является точкой бифуркации системы (16), а точка λ_0 – точкой бифуркации интегрального уравнения (1), (11). Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 4 в случае одной нагрузки как следствие вытекает справедливость теоремы 2.

Следствие 3. Пусть для уравнения (1), (11) $\det A_1(\lambda_0) = 0$, $\text{rank } A_1(\lambda_0) = r$, а $\{\phi_i\}_1^{n-r}$ и $\{\psi_i\}_1^{n-r}$ – базисы в подпространствах $\mathcal{N}(A_1(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A_1^*(\lambda_0))$ соответственно. Если при этом $n - r$ – нечётное число и $\det[(A_1^{(1)}(\lambda_0)\phi_1, \psi_k)]_{i,k=1}^{n-r} \neq 0$, то λ_0 – точка бифуркации этого уравнения.

Доказательство. В условиях следствия 3 в изолированной фредгольмовой точке λ_0 матрица $A_1(\lambda_0 + \mu)$ при $|\mu| < r$ не имеет присоединённых элементов. Поэтому векторы $\phi_1, \dots, \phi_{n-r}$ составляют её полный обобщённый жорданов набор и корневое число k равно $n - r$. Таким образом, условия теоремы 4 выполнены. Следствие доказано.

Следствие 4. Пусть для уравнения (1), (11) $\det A_1(\lambda_0) = 0$, $\text{rank } A_1(\lambda_0) = r$, а $\{\phi_i\}_1^{n-r}$ и $\{\psi_i\}_1^{n-r}$ – базисы в подпространствах $\mathcal{N}(A_1(\lambda_0))$ и $\mathcal{N}(A_1^*(\lambda_0))$ соответственно.

Пусть, кроме того,

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} A_1(\lambda) \phi_i|_{\lambda=\lambda_0} = 0, \quad j = \overline{0, p-1}, \quad i = \overline{1, n-r}, \quad \text{и} \quad \det \left[\frac{d^p}{d\lambda^p} \langle A_1(\lambda) \phi_i, \psi_j \rangle \right]_{i,j=1}^{n-r} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0,$$

а число $p(n - r)$ – нечётное. Тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения (1), (11).

Доказательство. В условиях следствия 4 у функции $\Delta(\mu)$, определённой выше формулой (17), точка $\mu = 0$ является $p(n - r)$ -кратным нулём. Так как число $p(n - r)$ нечётно, то справедливость следствия 4 вытекает из доказательства принципа линеаризации. Следствие доказано.

Принцип линеаризации является достаточным условием существования точки бифуркации, при проверке которого используется только информация о линейной части уравнения (1), (11). При выполнении условий теоремы 4 уравнение (1), (11) с n нагрузками может иметь многообразие малых вещественных решений $x(t, \lambda_0)$, зависящих от $n - r$ малых параметров, где r – ранг матрицы $A_1(\lambda_0)$, а λ_0 – точка бифуркации.

Далее, как и в п. 3, получим в векторном случае достаточные условия, когда нетривиальные вещественные решения $x(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ можно построить по крайней мере в одной из полукрестностей точки бифуркации, используя дополнительную информацию о нелинейной части уравнения (1), (11).

Так как ряд (12) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между решениями уравнения (1), (11) и системы (13), то для построения указанных решений уравнения (1), (11) достаточно уметь строить вещественное решение $x_\alpha \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$) системы (13).

Пусть для системы (13) выполняется условие

VI. При $\mu \rightarrow 0$ справедливы асимптотические оценки

$$A_1(\lambda_0 + \mu)x_\alpha \sim F_{1p_1}(\lambda_0)^{-1}x_\alpha\mu^{p_1}, \quad F_i(\lambda_0 + \mu, x_\alpha) \sim F_{ip_i}(\lambda_0, x_\alpha)\mu^{p_i}, \quad i = l, l+1, \dots$$

При этом $p_i > 0$, $i = 1, l, l+1, \dots, n-1$, $p_n = 0$, $F_{1p_1} - n \times n$ -матрица, $F_{ip_i}(\lambda_0, x_\alpha) - i$ -однородные формы относительно компонент вектора нагрузки x_α .

Как и в случае одной нагрузки, нанеся на координатную плоскость точки $(1, p_1)$, (l, p_l) , $(l+1, p_{l+1})$, $\dots$, $(n-1, p_{n-1})$, $(n, 0)$ (см. рисунок), построим диаграмму Ньютона и будем искать вектор нагрузки в виде $x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}$, $c(0) \neq 0$.

Для определения вектора $c(0)$ получим две разные системы – одну для $\mu > 0$, а другую для $\mu < 0$:

$$P_\pm(c) := \sum_{k+ir/s=\theta} \text{sign } \mu^k F_{ik}(\lambda_0, c) = 0.$$

Компоненты векторов $F_{ik}(\lambda_0, c) - i$ -однородные формы относительно вектора c . Построив простое ненулевое вещественное решение c одной из этих систем, запишем в соответствующей полукрестности точки бифуркации λ_0 асимптотику

$$x(t, \lambda) \sim \sum_{k=1}^n b_k(t, \lambda_0) c_k^* |\lambda - \lambda_0|_s^r$$

при $\lambda \rightarrow \lambda_0 + 0$ ($\lambda \rightarrow \lambda_0 - 0$) решения интегрального уравнения (1), (11).

Заключение. Предложенный метод позволяет при $\lambda \in \mathbb{R}^m$ получить достаточные условия существования более общих многообразий, а именно кривых и поверхностей бифуркации для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} + a(t, \lambda)x(t) = \mathcal{L}(x(t), x_\alpha, t, \lambda), \quad x(0) = 0,$$

с нагрузками. С его помощью можно провести бифуркационный анализ и более общих классов дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах с нагрузками в окрестностях точек ветвления решений, а также решения задачи Коши для дифференциального уравнения с нагрузками. Результаты работы могут быть применены при анализе нестандартных нелинейных интегральных моделей с нагрузками, возникающих при исследовании эргодических процессов в приложениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, программы фундаментальных исследований Российской Федерации на 2021–2030 гг.; проект государственного задания (№ FWEU-2021-0006) с использованием ресурсов ЦКП "Высокотемпературный контур" (Министерство образования и науки Российской Федерации, проект 13.ЦКП.21.0038).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A.* Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models. V. 97. Book Series: World Scientific Series on Nonlinear Science. Ser. A / Ed. Prof. L. Chua. Singapore; London, 2020.
2. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1982. Т. 19. С. 55–126.
3. *Sidorov D.N., Sidorov N.A.* Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations // Banach J. Math. Anal. 2021. V. 6. № 1. P. 1–10.
4. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сиб. журн. вычислит. математики. 2014. Т. 17. № 1. С. 1–16.
5. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. М., 2012.
6. *Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 12. № 1. С. 177–179.
7. *Agarwal P., Baltaeva U., Alikulov Y.* Solvability of the boundary-value problem for a linear loaded integro-differential equation in an infinite three-dimensional domain // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 140. P. 110108.
8. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.* О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 5. С. 773–789.
9. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.* Существование и построение обобщенных решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 124–129.
10. *Sidorov N.A.* Special Issue "Solvability of Nonlinear Equations with Parameters: Branching, Regularization, Group Symmetry and Solutions Blow-Up". Symmetry, MDPI, 2021.
11. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных уравнений. М., 1956.
12. *Dancer E.N.* Bifurcation theory // Indiana Univ. Math. 1974. V. 23. № 11. P. 1069–1076.
13. *Ахмедов К.Т.* Аналитический метод Некрасова–Назарова в нелинейном анализе // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. Вып. 4 (76). С. 135–153.
13. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М., 1998.
15. *Люстерник Л.А.* Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. Вып. 6. С. 145–168.
16. *Сидоров Н.А., Треногин В.А.* Точки бифуркации нелинейных уравнений // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. М., 2003.
17. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969.
18. *Сидоров Д.Н.* Методы анализа интегральных динамических систем / Под ред. А. Лоренци. Иркутск, 2013.
19. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev V.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht, 2013.
20. *Sidorov D., Muftahov I. et al.* A dynamic analysis of energy storage with renewable and diesel generation using Volterra equations // IEEE Trans. on Industr. Inf. 2020. V. 16. № 5. P. 3451–3459.

Иркутский государственный университет,
Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 07.05.2021 г.
После доработки 07.05.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 519.642.2

УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. М. Х. Бештоков

Изучаются краевые задачи для одномерного по пространственной переменной нагруженного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа с переменными коэффициентами и дробной по времени производной, а также разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Граничные условия являются локальными первого и третьего рода. Рассматриваемое уравнение представляет собой математическую модель движения влаги и солей в почвах с фрактальной структурой. Для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из которых следуют единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$, где h и τ – шаги по пространственной и временной переменным.

DOI: 10.31857/S0374064121120098

Введение. Нагруженными дифференциальными уравнениями принято называть уравнения, содержащие функции от решения на многообразиях размерности меньшей, чем размерность области определения искомой функции [1]. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают, например, при изучении движения подземных вод, в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоём из нескольких источников поступает загрязняющее вещество определённой интенсивности, при построении математической модели переноса дисперсных загрязнений в пограничном слое атмосферы.

В разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений большой вклад внесён авторами работ [1–4]. В обзорных статьях А.М. Нахушева на многочисленных примерах показана практическая и теоретическая важность исследований нагруженных дифференциальных уравнений. Одним из методов приближённого решения краевых задач для дифференциальных уравнений является предложенный А.М. Нахушевым метод редукции интегро-дифференциальных уравнений к нагруженным дифференциальным уравнениям. В работе [1] впервые указана связь нелокальных задач с нагруженными уравнениями. Нелокальные задачи типа Бицадзе–Самарского для уравнений Лапласа и теплопроводности эквивалентным образом редуцированы к локальным задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

Хорошо известно, что вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [5, 6], передачи тепла в гетерогенной среде [7, 8], влагопереноса в почво-грунтах [9] (см. [10, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных соболевского типа:

$$u_{xxt} + du_t + \eta u_{xx} + au_x + bu = q(x, t), \quad (0.1)$$

где $\eta = \eta(x, t)$, $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$, $d = d(x, t)$. Уравнение (0.1) часто называют также *псевдопараболическим уравнением* или *уравнением псевдопараболического типа*.

Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений рассматривались в работах [11–13]. Задачи расчёта тепломассообмена с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции [14] и, подобно [15, 16], задачи регулирования уровня грунтовых

вод при орошении приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений.

В работе [17] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежит уравнение Аллера дробного порядка.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [18–24]. В частности, в [20] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной трактовке. В работе [21] построен новый разностный аналог (называемый формулой $L2 - 1_\sigma$), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для нагруженного уравнения соболевского типа с переменными коэффициентами и дробной производной Герасимова–Капуто. Основным результатом работы заключается в доказательстве априорных оценок для решения задачи как в дифференциальном, так и в разностном виде. Полученные оценки означают устойчивость решения относительно возмущения входных данных задачи и в предположении существования точного её решения в классе достаточно гладких функций, а также в силу линейности задачи позволяют утверждать сходимость приближённых решений к точному при увеличении точности аппроксимации.

1. Постановка первой краевой задачи. В замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ для нагруженного псевдопараболического уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u(x_0, t) + f(x, t),$$

здесь $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, рассмотрим первую краевую задачу

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$ – дробная производная в смысле Герасимова–Капуто порядка

ка α , $0 < \alpha < 1$, x_0 – фиксированная точка интервала $(0, l)$, функции k , η , r , q , f и u_0 заданы и первые четыре из них удовлетворяют условиям

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \eta(x) \leq c_1, \quad |q(x, t)|, |r(x, t)|, |r_x(x, t)|, |k_x(x, t)| \leq c_2 \quad (1.4)$$

(c_i , $i = 0, 1, 2$, – положительные постоянные); считаем, что коэффициенты и свободный член уравнения (1.1), а также начальное условие (1.3) задачи имеют такую гладкость, которая обеспечивает нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

Отметим, что приведённая выше конструкция дробной производной введена [25] итальянским механиком М. Капуто в 1967 г. Поэтому за рубежом её называют дробной производной Капуто. Однако правильнее называть её дробной производной Герасимова–Капуто, так как ещё в 1948 г. советский механик А.Н. Герасимов рассматривал [26] подобные выражения:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Как отмечено в работе [10, с. 159], второе слагаемое в правой части уравнения (1.1) очень мало при впитывании влаги и велико при испарении.

В дальнейшем предполагаем, что задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными для справедливости проводимых рассуждений производными. Через M_i , $i = 1, 2, \dots$, обозначаем положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи. При этом нумерация постоянных в каждом пункте статьи самостоятельная.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме. Чтобы получить априорную оценку решения задачи (1.1)–(1.3) в дифференциальной форме, введём скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(a, b) = \int_0^l ab \, dx, \quad (a, a) = \|a\|_0^2, \quad (2.1)$$

где a и b – заданные на $[0, l]$ функции. Умножив уравнение (1.1) скалярно на u , получим

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) = ((ku_x)_x, u) + (\partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, u) + (ru_x, u) - (qu(x_0, t), u) + (f, u). \quad (2.2)$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (2.2), пользуясь неравенством Коши с ε [27, с. 100]. Тогда

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l u \, dx \int_0^t u_\tau(x, \tau) (t-\tau)^{-\alpha} \, d\tau. \quad (2.3)$$

Справедлива следующая

Лемма 1 [20]. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$v(t) \partial_{0t}^\alpha v(t) \geq \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пользуясь формулой (2.1) для скалярного умножения и леммой 1, получаем

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) \geq \frac{1}{2} (1, \partial_{0t}^\alpha u^2) = \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2, \quad (2.4)$$

$$((ku_x)_x, u) = \int_0^l u (ku_x)_x \, dx = uku_x \Big|_0^l - \int_0^l ku_x^2 \, dx, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x, u) &= \int_0^l u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x)_x \, dx = u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x) \Big|_0^l - \int_0^l \eta(x) u_x \partial_{0t}^\alpha u_x \, dx \leq \\ &\leq u \partial_{0t}^\alpha (\eta u_x) \Big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (u_x)^2 \, dx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(ru_x, u) = \int_0^l ruu_x \, dx \leq \frac{c_2}{2} \int_0^l u^2 \, dx + \frac{c_2}{2} \int_0^l u_x^2 \, dx \leq M_1 (\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} -(qu(x_0, t), u) &= - \int_0^l qu(x_0, t) u \, dx = -u(x_0, t) \int_0^l qu \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} u^2(x_0, t) + \frac{1}{2} \left(\int_0^l qu \, dx \right)^2 \leq M_2 (\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(f, u) = \int_0^l f u \, dx \leq \varepsilon \|u\|_0^2 + M_3(\varepsilon) \|f\|_0^2. \quad (2.9)$$

В силу соотношений (2.3)–(2.9) из тождества (2.2) и условий (1.2) следует неравенство

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\alpha \int_0^l \eta(u_x)^2 \, dx + \|u_x\|_0^2 \leq M_4 \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_5 \|f\|_0^2,$$

где $\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$, применяя к обеим частям которого оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_4 D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2), \quad (2.10)$$

где $D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) \, d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (2.10) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2 [20]. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет при почти всех t из $[0, T]$ неравенству $\partial_{0t}^\alpha y(t) \leq c_1 y(t) + \bar{c}_2(t)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, где $c_1 = \text{const} > 0$, а $\bar{c}_2(t)$ – суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leq y(0) E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha) E_{\alpha, \alpha}(c_1 t^\alpha) D_{0t}^{-\alpha} \bar{c}_2(t),$$

где

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad E_{\alpha, \mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)}$$

– функции Миттаг-Лёффлера.

На основании леммы 2 оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.10). Пусть $y(t) = D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2$, $\partial_{0t}^\alpha y(t) = \|u(x, t)\|_{W_2^1(0,l)}^2$, тогда

$$D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_7 (D_{0t}^{-2\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2). \quad (2.11)$$

Так как для любой неотрицательной интегрируемой на $[0, T]$ функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$D_{0t}^{-2\alpha} g(t) \leq \frac{t^\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} D_{0t}^{-\alpha} g(t), \quad (2.12)$$

то из (2.10) с учётом неравенств (2.11) и (2.12) находим искомую априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_8 (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2). \quad (2.13)$$

Теорема 1. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(Q_T)$, $\eta(x) \in C^1[0, l]$, $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(Q_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(Q_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(Q_T)$ и выполнены условия (1.4), то для решения задачи (1.1)–(1.3) справедлива априорная оценка (2.13).

Из оценки (2.13) следуют единственность решения задачи (1.1)–(1.3) и его непрерывная зависимость от входных данных в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2$.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для приближённого решения задачи (1.1)–(1.3) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащую односторонние производные и учитывающую знак функции

$r(x, t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1.1) следующее уравнение с возмущёнными коэффициентами [27]:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \kappa(x, t)(k(x, t)u_x)_x + \partial_{0t}^\alpha (\eta(x)u_x)_x + r(x, t)u_x - q(x, t)u(x_0, t) + f(x, t),$$

где $\kappa(x, t) = 1/(1 + R(x, t))$, $R(x, t) = 0.5h|r(x, t)|/k(x, t)$ – разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.3) поставим в соответствие разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ :

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \kappa_i^j (a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (3.1)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad (3.2)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (3.3)$$

где

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_i^s \quad (3.4)$$

– дискретный аналог дробной производной Герасимова–Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [21]. Величины в правой части равенства (3.1) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_i^j &= k(x_{i-0.5}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+\sigma}), \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2}, \\ r(x, t_{j+\sigma}) &= r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad |r(x, t_{j+\sigma})| = r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \\ r^+(x, t_{j+\sigma}) &= 0.5(r(x, t_{j+\sigma}) + |r(x, t_{j+\sigma})|) \geq 0, \quad r^-(x, t_{j+\sigma}) = 0.5(r(x, t_{j+\sigma}) - |r(x, t_{j+\sigma})|) \leq 0, \\ y^{(\sigma)} &= \sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a^{(+1)} = a_{i+1}, \\ x_{i_0}^- &= \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{i_0}^+ = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h}, \quad x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}. \end{aligned}$$

Чтобы определить коэффициенты в дискретном аналоге (3.4), зададим сначала величины

$$\begin{aligned} a_0^{(\alpha,\sigma)} &= \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l + \sigma)^{1-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1, \\ b_l^{(\alpha,\sigma)} &= \frac{1}{2 - \alpha} [(l + \sigma)^{2-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{2-\alpha}] - \frac{1}{2} [(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}], \quad l \geq 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_0^{(\alpha,\sigma)} &= a_0^{(\alpha,\sigma)} \quad \text{при } j = 0; \\ c_s^{(\alpha,\sigma)} &= \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & \text{если } s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & \text{если } 1 \leq s \leq j - 1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & \text{если } s = j, \end{cases} \quad \text{при } j > 0. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что $c_s^{(\alpha,\sigma)} > (1 - \alpha)(s + \sigma)^{-\alpha}/2 > 0$.

Априорную оценку найдём методом энергетических неравенств, для этого введём скалярные произведения и норму следующим образом:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u\|_0^2.$$

Умножив равенство (3.2) скалярно на $y^{(\sigma)}$, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) &= (\kappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) + (b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (d(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Справедлива следующая

Лемма 3 [21]. Для любой функции $y(t)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2).$$

Преобразуем суммы, входящие в равенство (3.5), с учётом условий (3.2) и леммы 3:

$$(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) \geq \frac{1}{2} (1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2)); \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} (\kappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) &= \kappa ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}|_0^N - (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\kappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] = -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - (a\kappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] \leq \\ &\leq -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - \frac{1}{(1+hM_1)} (a\kappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) &= y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}})|_0^N - (\gamma, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})] \leq \\ &\leq -(\gamma_i/2, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})^2] \leq -\frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -(d(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) &= -(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)(d, y^{(\sigma)}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)^2 + \frac{1}{2} (d, y^{(\sigma)})^2 \leq M_1 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2); \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(\varphi, y^{(\sigma)}) \leq \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \quad (3.10)$$

В силу соотношений (3.6)–(3.10) из равенства (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2) \right) + \frac{1}{(1+hM_1)} (a\kappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + M_1 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2) + \varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выбирая $\varepsilon = 1/2$, из (3.11) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + c_0 \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_2 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 &\leq -(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + M_2 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2) + M_3 \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Преобразуем первое, второе и третье слагаемые в правой части неравенства (3.12):

$$-(a\kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) \leq M_4 (\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2). \quad (3.13)$$

Учитывая (3.13), из (3.12) получаем оценку

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_5 \|y^{(\sigma)}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 \|\varphi\|_0^2, \quad (3.14)$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$, которую запишем в виде

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M_7 \|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_8 \|y^j\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_9 \|\varphi\|_0^2. \quad (3.15)$$

Справедлива

Лемма 4. Пусть $\{p_j\}$ – последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$p_0 = 1, \quad \bar{\sigma}^{1-\alpha} p_j = \sum_{s=1}^j (c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} - c_s^{(\alpha,\sigma)}) p_{j-s}, \quad j \geq 1,$$

где $\bar{\sigma}^{1-\alpha} = \sigma^{1-\alpha}$, если $j = 0$, и

$$\bar{\sigma}^{1-\alpha} = \frac{1}{2-\alpha} ((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}) - \frac{1}{2} ((1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha}), \quad \text{если } j \geq 1.$$

Тогда

$$0 < p_j < 1, \quad \sum_{s=k}^j p_{j-s} c_{s-k}^{(\alpha,\sigma)} = \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leq k \leq j, \quad (3.16)$$

$$\sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} < \sum_{s=0}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} = p_0 c_0 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}. \quad (3.17)$$

Доказательство. Следуя [28], докажем равенство (3.16). Тогда, учитывая, что $c_s^{(\alpha,\sigma)} < c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)}$ для $s \geq 1$, получаем

$$\sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} < \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)},$$

где

$$I_j = \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} = \sum_{s=0}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} = \sum_{s=1}^{j+1} p_{j+1-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} = I_{j+1}, \quad j \geq 1. \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что

$$I_1 = \sum_{s=1}^1 p_{1-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} = p_0 c_0 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad p_0 = 1. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.17) и (3.19), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} &= \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} < \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad \sum_{s=1}^j p_{j-s} (c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} - c_s^{(\alpha,\sigma)}) < \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \\ \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} &< \sum_{s=1}^j p_{j-s} c_s^{(\alpha,\sigma)} + p_j c_0, \quad p_j c_0 > 0, \quad c_0 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из равенства в (3.18) вытекает, что

$$c_0 p_j = \sum_{s=1}^j (c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} - c_s^{(\alpha,\sigma)}) p_{j-s}.$$

Поэтому в силу (3.19), (3.20) верны неравенства $0 < p_j c_0 < \bar{\sigma}^{1-\alpha}$, $0 < p_j < 1$. Пусть $s = l + k - 1$, тогда с учётом равенства (3.19) получаем

$$\sum_{s=k}^j p_{j-s} c_{s-k}^{(\alpha,\sigma)} = \sum_{l=1}^{j-k+1} p_{j-k+1-l} c_{l-1}^{(\alpha,\sigma)} = I_{j-k+1} = I_1 = \bar{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leq k \leq j.$$

Лемма доказана.

Справедливы следующие три леммы.

Лемма 5. Пусть выполнено неравенство (3.16), тогда для $k = 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} \sum_{s=1}^j p_{j-s} s^{(k-1)\alpha} \leq \frac{\bar{\sigma}^{1-\alpha} j^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}. \quad (3.21)$$

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 3.2 из [28].

Лемма 6. Пусть $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^j$, $j \times j$ -матрица J задана равенством

$$J = 2\bar{\sigma}^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha) \lambda \tau^\alpha \begin{bmatrix} 0 & p_1 & \dots & p_{j-2} & p_{j-1} \\ 0 & 0 & \dots & p_{j-3} & p_{j-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и выполнена оценка (3.21). Тогда $J^i = 0$, $i \geq j$, и

$$J^k \vec{e} \leq \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha)} ((2\lambda t_j^\alpha)^k, (2\lambda t_{j-1}^\alpha)^k, \dots, (2\lambda t_1^\alpha)^k)^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{s=0}^i J^s \vec{e} = \sum_{s=0}^{j-1} J^s \vec{e} \leq (E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), E_\alpha(2\lambda t_{j-1}^\alpha), \dots, E_\alpha(2\lambda t_1^\alpha))^T, \quad i \geq j.$$

Лемма 6 доказывается аналогично лемме 3.3 в [28] с помощью метода математической индукции и неравенства (3.21). Знак неравенства между векторами понимается поэлементно, т.е. между всеми элементами соответствующих векторов с одноимёнными координатами.

Лемма 7. Пусть последовательности $\{y^j\}$, $\{\varphi^j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел удовлетворяют неравенству $\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y^j \leq \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j$, $j \geq 1$, где $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ – константы. Тогда существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедливы оценки

$$y^{j+1} \leq 2 \left(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \varphi^{j'} \right) E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k / \Gamma(1+k\alpha)$ – функция Миттаг-Лёффлера, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 / (2 + 2^{1-\alpha})$.

Лемма 7 доказывается на основании лемм 4–6 аналогично лемме 3.1 из [28].

Вследствие леммы 7 и оценки (3.15) получаем

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2 \right), \quad (3.22)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ , а $\tau \leq \tau_0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.4). Тогда существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ для решения разностной задачи (3.1)–(3.3) справедлива априорная оценка (3.22), а значит, имеют место единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3), а $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (3.1)–(3.3). Обозначим $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Для оценки точности разностной схемы (3.1)–(3.3) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (3.1)–(3.3), получаем для функции z следующую задачу:

$$\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha z = \kappa_i^j (a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\gamma_i z_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)},$$

$$-d_i^j (z_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) + \Psi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (3.23)$$

$$z_0^{(\sigma)} = z_N^{(\sigma)} = 0, \quad (3.24)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad (3.25)$$

где $\Psi = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) разностной схемой (3.1)–(3.3) решения задачи (1.1)–(1.3).

Применяя априорную оценку (3.22) к решению задачи (3.23)–(3.25), получаем, что

$$\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \|\Psi^{j'}\|_0^2, \quad (3.26)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (3.26) вытекает сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.3) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2$ на каждом слое: существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)} \leq M(h^2 + \tau^2).$$

4. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме. Рассмотрим для уравнения (1.1) третью краевую задачу:

$$\Pi(0, t) = \beta_1(t)u(0, t) - \mu_1(t), \quad -\Pi(l, t) = \beta_2(t)u(l, t) - \mu_2(t), \quad (4.1)$$

где $\Pi(x, t) \equiv k(x, t)u_x + \partial_{0t}^\alpha(\eta u_x)$, а функции β_1 , β_2 и μ_1 , μ_2 удовлетворяют условиям

$$|\beta_1|, |\beta_2| \leq c_2, \quad \mu_1(t), \mu_2(t) - \text{непрерывные функции.} \quad (4.2)$$

Умножив уравнение (1.1) скалярно на u , получим равенство (2.2), из которого в силу соотношений (2.4)–(2.9) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \int_0^l \eta(u_x)^2 dx + c_0 \|u_x\|_0^2 \leq u \Pi(x, t)|_0^l + M_1(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + M_2 \|f\|_0^2. \quad (4.3)$$

Оценим первое слагаемое в правой части этого неравенства:

$$\begin{aligned} u \Pi(x, t)|_0^l &= \Pi(l, t)u(l, t) - \Pi(0, t)u(0, t) = u(l, t)(\mu_2(t) - \beta_2(t)u(l, t)) + \\ &+ u(0, t)(\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0, t)) = -\beta_2(t)u^2(l, t) + \mu_2(t)u(l, t) - \beta_1(t)u^2(0, t) + \mu_1(t)u(0, t) \leq \\ &\leq M_3(u^2(0, t) + u^2(l, t)) + \frac{1}{2}(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) \leq M_4(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + \frac{1}{2}(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тогда из (4.3) и (4.4) следует оценка

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\alpha \int_0^l \eta(u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leq M_5 \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)), \quad (4.6)$$

применяя к обеим частям которой оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$ и повторяя те же рассуждения, что и для неравенств (2.11)–(2.13), находим априорную оценку

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2 \leq M_6(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)) + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2). \quad (4.5)$$

Теорема 3. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0, l]$, $r(x, t), q(x, t), f(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (1.4), (4.2), то для решения задачи (1.1), (4.1), (1.3) справедлива априорная оценка (4.5).

Из оценки (4.5) следуют единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным в смысле нормы $\|u\|_1^2 = \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|u_x\|_0^2$.

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы. На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (4.1), (1.3) поставим в соответствие разностную схему второго порядка аппроксимации по h и τ :

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \varkappa_i^j (a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (5.1)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_1 y_{\bar{x},0}) = \beta_1 y_0^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + d_0^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) - \tilde{\mu}_1, \quad x = 0, \quad (5.2)$$

$$-(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_N y_{\bar{x},N})) = \beta_2 y_N^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + d_N^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) - \tilde{\mu}_2, \quad x = l, \quad (5.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (5.4)$$

где $\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0$, $\tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N$.

Запишем схему (5.1)–(5.4) в операторном виде

$$\begin{cases} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}(t)y + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$$\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)} = \varkappa(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x + b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)} - d(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), & i = \overline{1, N-1}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = (\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_1 y_0^{(\sigma)} - 0.5h d_0^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) / (0.5h), & i = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = (-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \beta_2 y_N^{(\sigma)} - 0.5h d_N^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+)) / (0.5h), & i = N, \end{cases}$$

$$\bar{\delta}y = \begin{cases} \delta y_i = (\gamma_i y_{\bar{x}})_x, & i = \overline{1, N-1}, \\ \delta^- y_0 = 2(\gamma_1 y_{x,0})_t / h, & i = 0, \\ \delta^+ y_N = -2(\gamma_N y_{\bar{x},N}) / h, & i = N, \end{cases} \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ \varphi^- = 2\tilde{\mu}_1 / h, & i = 0, \\ \varphi^+ = 2\tilde{\mu}_2 / h, & i = N, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varkappa = (1 + 0.5h|r|/k)^{-1}, \\ \varkappa_0 = (1 + 0.5h|r_0|/k_{0.5})^{-1}, & r_0 \leq 0, \\ \varkappa_N = (1 + 0.5h|r_N|/k_{N-0.5})^{-1}, & r_N \geq 0, \end{cases}$$

$$r_0 = r(0, t_{j+\sigma}) = r_0^{j+\sigma} \leq 0, \quad r_N = r(x_N, t_{j+\sigma}) = r_N^{j+\sigma} \geq 0.$$

Введём скалярное произведение и норму следующим образом:

$$[u, v] = \sum_{i=0}^N u_i v_i \bar{h}, \quad \text{где } \bar{h} = 0.5h, \text{ если } i = 0, N, \text{ и } \bar{h} = h, \text{ если } i \neq 0, N;$$

$$[u, u] = [1, u^2] = \|u\|_0^2.$$

Умножив первое равенство в (5.5) скалярно на $y^{(\sigma)}$, получим

$$[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}] = [\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] + [\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}y, y^{(\sigma)}] + [\bar{\Phi}, y^{(\sigma)}]. \quad (5.6)$$

Оценим и преобразуем суммы, входящие в это равенство:

$$[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}] \geq \frac{1}{2} [1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2)], \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] &= (\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^-y_0^{(\sigma)} + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^+y_N^{(\sigma)} = (\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + \\
&+ (b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (d(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + \varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \\
&- 0.5hd_0(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)y_0^{(\sigma)} - \varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)} - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 - 0.5hd_N(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)y_N^{(\sigma)} = \\
&= -(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] + (b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) - [d(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}] - \\
&- \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Оценивая сумму первых трёх слагаемых в правой части равенства (5.8), будем иметь

$$\begin{aligned}
&-(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] + (b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) = -(a\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] - (a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + \\
&+ (b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) + (b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}) \leq -\left(\frac{\varkappa a}{1+hM_1}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\right] + M_1(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2), \tag{5.9} \\
&- [d(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}] - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 \leq \frac{1}{2}(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)^2 + \frac{1}{2}[d, y^{(\sigma)}]^2 - \\
&- \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2(y_N^{(\sigma)})^2 \leq M_2(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

В силу оценок (5.9) и (5.10) из (5.8) следует, что

$$[\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] \leq -M_3\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_4(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2). \tag{5.11}$$

Для двух последних слагаемых в (5.6) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \bar{\delta}y, y^{(\sigma)}] &= (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta y, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta^-y_0 + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \delta^+y_N = \\
&= -(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})) \leq -(\gamma/2, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\bar{x}})^2) \leq -c_0\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y_{\bar{x}}\|_0^2/2, \tag{5.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{\Phi}, y^{(\sigma)}] &= (\varphi, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\varphi^- + 0.5hy_N^{(\sigma)}\varphi^+ = [\varphi, y^{(\sigma)}] + \mu_1y_0^{(\sigma)} + \mu_2y_N^{(\sigma)} \leq \\
&\leq M_5(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2) + M_6(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Поэтому, учитывая в равенстве (5.6) неравенства (5.7), (5.11)–(5.13), получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_7\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_8\|y^{(\sigma)}\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_9(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2), \tag{5.14}$$

где $\|y\|_{W_2^1(0,l)}^2 = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$.

Повторяя те же рассуждения, что и для неравенств (3.14)–(3.22), из (5.14) на основании леммы 7 находим априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M\left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} (\|[\varphi^{j'}]\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2)\right), \tag{5.15}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.4) и (4.2). Тогда существует такое τ , что при $\tau \leq \tau_0$ для решения разностной задачи (5.1)–(5.4) справедлива априорная оценка (5.15), а значит, имеют место единственность решения и его устойчивость по правой части и начальным данным.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.1), (4.1), (1.3), а $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5.1)–(5.4). Обозначим $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Для оценки точности разностной схемы (5.1)–(5.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (5.1)–(5.4), получаем для функции z следующую задачу:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z = \varkappa_i^j(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i z_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} -$$

$$-d_i^j(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+) + \Psi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (5.16)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_1 z_{\bar{x},0}) = \beta_1 z_0^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + d_0^j(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)) - \tilde{\nu}_1, \quad x = 0, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & -(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_N z_{\bar{x},N})) = \\ & = \beta_2 z_N^{(\sigma)} + 0.5h(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_N + d_N^j(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+)) - \tilde{\nu}_2, \quad x = l, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad (5.19)$$

где $\Psi = O(h^2 + \tau^2)$, $\tilde{\nu}_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\tilde{\nu}_2 = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (4.1), (1.3) разностной схемой (5.1)–(5.4) решения задачи (1.1), (4.1), (1.3).

Применяя априорную оценку (5.15) к решению задачи (5.16)–(5.19), получаем, что

$$\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^{j'^2} + \nu_2^{j'^2}), \quad (5.20)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (5.20) вытекает сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (4.1), (1.3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2$ на каждом слое: существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)} \leq M(h^2 + \tau^2).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{s=1}^p q_s(x, t) u(x_s, t) + f(x, t),$$

где x_s , $s = \overline{1, p}$, – некоторые фиксированные точки интервала $(0, l)$, если потребовать выполнения условия $|q_s| \leq c_2$, $s = \overline{1, p}$.

6. Алгоритм численного решения. Для численного решения рассматриваемых в данной работе краевых задач для дифференциального уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова–Капуто порядка α приведём разностную схему (5.1)–(5.4) к расчётному виду. Для этого воспользуемся методом параметрической прогонки [29]. Тогда уравнение (5.1) приводится к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2 \tau \sigma d_i^j (y_{i_0}^{j+1} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1} x_{i_0}^+) = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (6.1)$$

Прежде чем привести формулы для коэффициентов A_i , B_i , C_i и свободного члена F_i в уравнении (5.1), введём для упрощения записи обозначения $\delta = \tau^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$ и $\Delta = c_0^{(\alpha, \sigma)} \delta$. Тогда

$$A_i = \tau \sigma \varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i \Delta - \tau h \sigma b_i^{-j} a_i, \quad B_i = \tau \sigma \varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \Delta + \tau h \sigma b_i^{+j} a_{i+1}, \quad C_i = A_i + B_i + h^2 \Delta,$$

$$\begin{aligned} F_i = & AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + h^2 \tau \varphi_i^j - \tau (1 - \sigma) h^2 d_i^j (y_{i_0}^j x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^j x_{i_0}^+) + \\ & + \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} [(\gamma_{i+1} y_{i+1})^{s+1} - (\gamma_{i+1} y_{i+1})^s - h^2 (y_i^{s+1} - y_i^s)] + \\ & + \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} [(\gamma_i y_{i-1})^{s+1} - (\gamma_i y_{i-1})^s - ((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^{s+1} + ((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i)^s], \end{aligned}$$

где $AA_i = -A_i + \tau (\varkappa_i^j a_i^j - h b_i^{-j} a_i)$, $BB_i = -B_i + \tau (\varkappa_i^j a_{i+1}^j + h b_i^{+j} a_{i+1})$, $CC_i = AA_i + BB_i - h^2 \Delta$.

Запишем, какой вид примут краевые условия (5.2) и (5.3). Для упрощения записи введём обозначения

$$\Upsilon_0 = (\tau\sigma\kappa_0 a_1^j + (\gamma_1^{j+1} + 0.5h^2)\Delta + \sigma h\tau\beta_1^j)^{-1} \quad \text{и} \quad \Upsilon_N = (\tau\sigma\kappa_N a_N^j + (\gamma_N^{j+1} + 0.5h^2)\Delta + \sigma h\tau\beta_2^j)^{-1}.$$

Краевое условие (5.2) принимает вид

$$y_0 = \kappa_{11}y_1 + \kappa_{12}y_{i_0} + \kappa_{13}y_{i_0+1} + \mu_1, \quad (6.2)$$

где

$$\kappa_{11} = (\tau\sigma\kappa_0 a_1 + \gamma_1\Delta)\Upsilon_0, \quad \kappa_{12} = -0.5d_0\sigma h\tau(x_{i_0+1} - x_0)\Upsilon_0, \quad \kappa_{13} = -0.5d_0\sigma h\tau(x_0 - x_{i_0})\Upsilon_0,$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \Upsilon_0 \bigg\{ & \tilde{\mu}_1 h\tau - (1 - \sigma)h\tau\beta_1 y_0^j + \tau(1 - \sigma)\kappa_0 a_1(y_1^j - y_0^j) - \gamma_1\Delta(y_1^j - y_0^j) + 0.5h^2\Delta y_0 - \\ & - 0.5h^2\delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_0^{s+1} - y_0^s) + \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}[(\gamma_1 y_1)^{s+1} - (\gamma_1 y_1)^s - (\gamma_1 y_0)^{s+1} + (\gamma_1 y_0)^s] - \\ & - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_0 x_{i_0}^- y_{i_0} - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_0 x_{i_0}^+ y_{i_0+1} \bigg\}. \end{aligned}$$

Краевое условие (5.3) принимает вид

$$y_N = \kappa_{21}y_{N-1} + \kappa_{22}y_{i_0} + \kappa_{23}y_{i_0+1} + \mu_2, \quad (6.3)$$

где

$$\kappa_{21} = (\tau\sigma\kappa_N a_N + \gamma_N\Delta)\Upsilon_N, \quad \kappa_{22} = -0.5d_N\sigma h\tau(x_{i_0+1} - x_0)\Upsilon_N, \quad \kappa_{23} = -0.5d_N\sigma h\tau(x_0 - x_{i_0+1})\Upsilon_N,$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = \Upsilon_N \bigg\{ & \tilde{\mu}_2 h\tau - (1 - \sigma)h\tau\beta_2 y_N^j - \tau(1 - \sigma)\kappa_N a_N(y_N^j - y_{N-1}^j) + \gamma_N\Delta(y_N^j - y_{N-1}^j) + 0.5h^2\Delta y_N - \\ & - 0.5h^2\delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1} - y_N^s) - \delta \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}[(\gamma_N y_N)^{s+1} - (\gamma_N y_N)^s - (\gamma_N y_{N-1})^{s+1} + (\gamma_N y_{N-1})^s] - \\ & - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_N x_{i_0}^- y_{i_0} - 0.5h^2\tau(1 - \sigma)d_0 x_{i_0}^+ y_{i_0+1} \bigg\}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учётом (6.1)–(6.3) разностная схема (5.1)–(5.4) приводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2 \tau \sigma d_i (y_{i_0}^{j+1} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1} x_{i_0}^+) = -F_i,$$

$$y_0 = \kappa_{11}y_1 + \kappa_{12}y_{i_0} + \kappa_{13}y_{i_0+1} + \mu_1,$$

$$y_N = \kappa_{21}y_{N-1} + \kappa_{22}y_{i_0} + \kappa_{23}y_{i_0+1} + \mu_2,$$

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (6.4)$$

Решение системы (6.4) ищем в виде

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}y_{i_0} + \gamma_{i+1}y_{i_0+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (6.5)$$

Найдём величины α_i , β_i , γ_i , δ_i , $i = \overline{1, N}$. Из условия (6.2) следует, что

$$\alpha_1 = \kappa_{11}, \quad \beta_1 = \kappa_{12}, \quad \gamma_1 = \kappa_{13}, \quad \delta_1 = \mu_1.$$

Подставляя выражения

$$\begin{aligned}y_i &= \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}y_{i_0} + \gamma_{i+1}y_{i_0+1} + \delta_{i+1}, \\y_{i-1} &= \alpha_i y_i + \beta_i y_{i_0} + \gamma_i y_{i_0+1} + \delta_i\end{aligned}$$

в уравнение (6.1), находим, что

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i B_i - h^2 \tau \sigma d_i x_{i_0}^-}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{A_i \gamma_i - h^2 \tau \sigma d_i x_{i_0}^+}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \delta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \delta_i}{C_i - A_i \alpha_i}.$$

Выразим неизвестные y_i , $i = \overline{0, N}$, через y_{i_0} , y_{i_0+1} следующим образом:

$$y_i = H_i y_{i_0} + T_i y_{i_0+1} + \Phi_i. \quad (6.6)$$

В представлении (6.6) найдём H_N , T_N и Φ_N . Учитывая условие (6.3), а также равенства $y_N = H_N y_{i_0} + T_N y_{i_0+1} + \Phi_N$ и $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N y_{i_0} + \gamma_N y_{i_0+1} + \delta_N$, получаем

$$H_N = \frac{\varkappa_{21} \beta_N + \varkappa_{22}}{1 - \varkappa_{21} \alpha_N}, \quad T_N = \frac{\varkappa_{21} \gamma_N + \varkappa_{23}}{1 - \varkappa_{21} \alpha_N}, \quad \Phi_N = \frac{\varkappa_{21} \delta_N + \mu_2}{1 - \varkappa_{21} \alpha_N}.$$

Найдём теперь H_i , T_i и Φ_i . Подставляя выражение (6.6) в (6.5), будем иметь

$$H_i = \alpha_{i+1} H_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad \Phi_i = \alpha_{i+1} \Phi_{i+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1, 0}.$$

Выразим y_{i_0} , y_{i_0+1} через H_i , T_i , Φ_i . Для этого рассмотрим выражения

$$y_{i_0} = H_{i_0} y_{i_0} + T_{i_0} y_{i_0+1} + \Phi_{i_0} \quad \text{и} \quad y_{i_0+1} = H_{i_0+1} y_{i_0} + T_{i_0+1} y_{i_0+1} + \Phi_{i_0+1},$$

учитывая которые, получаем

$$y_{i_0+1} = \frac{H_{i_0+1} \Phi_{i_0} + \Phi_{i_0+1} (1 - H_{i_0})}{(1 - H_{i_0})(1 - T_{i_0+1}) - T_{i_0} H_{i_0+1}}, \quad y_{i_0} = \frac{T_{i_0}}{1 - H_{i_0}} y_{i_0+1} + \frac{\Phi_{i_0}}{1 - H_{i_0}}.$$

Подставляя эти выражения для y_{i_0+1} и y_{i_0} в представление (6.6), находим решение y_i системы (6.4).

В случае, когда рассматривается первая краевая задача, необходимо в (6.2), (6.3) учесть, что

$$\varkappa_{k1} = 0, \quad \varkappa_{k2} = 0, \quad \varkappa_{k3} = 0, \quad \mu_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

7. Результаты численного эксперимента. Для задачи (1.1), (4.1), (1.3) рассмотрим тестовый пример, в котором

$$\begin{aligned}k(x, t) &= e^{x+t}, \quad \eta(x) = e^x, \quad r(x, t) = (x - 0.5) \cos(x + t), \quad q(x, t) = \cos(x - t), \\f(x, t) &= e^x \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 2t^3 e^{2x+t} - 2e^{2x} \left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \right) - t^3 e^x (x - 0.5) \cos(x + t) + t^3 e^{x_0} \cos(x - t), \\ \beta_1 &= 0.5e^t, \quad \beta_2 = e^{l+t}, \quad \mu_1 = -\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - 0.5t^3 e^t, \\ \mu_2 &= 2t^3 e^{2l+t} + e^{2l} \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + e^{2l} \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}, \quad u_0(x) = 0, \quad l = 1, \quad T = 1.\end{aligned}$$

Точное решение задачи, как несложно убедиться, $u(x, t) = t^3 e^x$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$; $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком $O(h^2 + \tau^2)$ аппроксимации.

Таблица. Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при значениях $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$; $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ на $t = 1$, когда $h = \tau$.

x_0	α	h	$\max_{0 \leq j < m} \ z^j\ _0$	ПС в $\ [\cdot]\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.1	0.01	1/10	2.8622E-3		3.8970E-3	
		1/20	7.1728E-4	1.9965	9.8010E-4	1.9914
		1/40	1.7943E-4	1.9991	2.4533E-4	1.9982
		1/80	4.4863E-5	1.9998	6.1359E-5	1.9994
		1/160	1.1216E-5	2.0000	1.5340E-5	1.9999
	0.50	1/10	2.8449E-3		3.8733E-3	
		1/20	7.1296E-4	1.9965	9.7431E-4	1.9911
		1/40	1.7834E-4	1.9991	2.4385E-4	1.9984
		1/80	4.4593E-5	1.9998	6.0993E-5	1.9993
		1/160	1.1148E-5	2.0000	1.5248E-5	2.0000
	0.99	1/10	2.8602E-3		3.8943E-3	
		1/20	7.1678E-4	1.9965	9.7943E-4	1.9913
		1/40	1.7930E-4	1.9991	2.4516E-4	1.9982
		1/80	4.4832E-5	1.9998	6.1316E-5	1.9994
		1/160	1.1208E-5	2.0000	1.5330E-5	2.0000
0.5	0.01	1/10	2.9887E-3		4.0537E-3	
		1/20	7.4905E-4	1.9964	1.0236E-3	1.9855
		1/40	1.8713E-4	2.0010	2.5573E-4	2.0010
		1/80	4.6724E-5	2.0018	6.3852E-5	2.0018
		1/160	1.1667E-5	2.0016	1.5945E-5	2.0016
	0.50	1/10	2.9761E-3		4.0376E-3	
		1/20	7.4592E-4	1.9963	1.0194E-3	1.9857
		1/40	1.8635E-4	2.0010	2.5468E-4	2.0010
		1/80	4.6531E-5	2.0018	6.3592E-5	2.0018
		1/160	1.1619E-5	2.0016	1.5881E-5	2.0016
	0.99	1/10	2.9885E-3		4.0534E-3	
		1/20	7.4901E-4	1.9963	1.0236E-3	1.9855
		1/40	1.8713E-4	2.0010	2.5572E-4	2.0010
		1/80	4.6724E-5	2.0018	6.3852E-5	2.0018
		1/160	1.1668E-5	2.0016	1.5945E-5	2.0016
0.9	0.01	1/10	3.0540E-3		4.1615E-3	
		1/20	7.6739E-4	1.9926	1.0485E-3	1.9888
		1/40	1.9205E-4	1.9985	2.6269E-4	1.9969
		1/80	4.8017E-5	1.9999	6.5681E-5	1.9998
		1/160	1.2002E-5	2.0003	1.6419E-5	2.0001
	0.50	1/10	3.0458E-3		4.1510E-3	
		1/20	7.6535E-4	1.9926	1.0457E-3	1.9889
		1/40	1.9154E-4	1.9984	2.6201E-4	1.9968
		1/80	4.7890E-5	1.9999	6.5511E-5	1.9998
		1/160	1.1970E-5	2.0003	1.6377E-5	2.0001
	0.99	1/10	3.0546E-3		4.1623E-3	
		1/20	7.6755E-4	1.9926	1.0487E-3	1.9888
		1/40	1.9209E-4	1.9984	2.6274E-4	1.9969
		1/80	4.8027E-5	1.9999	6.5694E-5	1.9998
		1/160	1.2004E-5	2.0003	1.6422E-5	2.0001

Порядок сходимости определяется по формуле

$$\text{ПС} = \log_{h_1/h_2} \left(\frac{\|z_1\|_0}{\|z_2\|_0} \right),$$

где z_i – это погрешность, соответствующая h_i .

Заключение. В настоящей работе изучены краевые задачи для одномерного по пространству нагруженного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа с переменными коэффициентами и дробной производной Герасимова–Капуто, а также разностные схемы, аппроксимирующие эти задачи на равномерной сетке. Рассмотрены граничные условия локальные (первого и третьего рода). Для решения краевых задач в дифференциальной и разностной трактовках получены априорные оценки, из которых следуют единственность решения и его устойчивость по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$, где h и τ – шаги по пространственной и временной переменным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.
2. *Будак В.М., Искендеров А.Д.* Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 1. 20–23.
3. *Казиев В.М.* Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 1. С. 173–175.
4. *Krall A.M.* The development of general differential and general differential boundary systems // Rock. Moun. J. Math. 1975. V. 5. № 4. С. 493–542.
5. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 25. Вып. 5. С. 852–864.
6. *Дзекиер Е.С.* Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.
7. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12. № 1. С. 27–45.
8. *Ting T.W.* A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. 1974. Т. 45. № 9.
9. *Hallaire M.* Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L'Eau et la Production Vegetale / Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. V. 9. P. 27–62.
10. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М., 1976.
11. *Канчукоев В.З.* Краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного гипербола-псевдопараболического типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1984.
12. *Бештоков М.Х.* The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. V. 158. № 1. P. 12–19.
13. *Бештоков М.Х.* Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041.
14. *Канчукоев В.З.* Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гипербола-псевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассообмена в почвогрунтах // САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик, 1983.
15. *Кочина И.И.* Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 51–54.
16. *Нахушев А.М., Борисов В.Н.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 105–110.
17. *Беданокоева С.Ю.* Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестн. Адыгейск. гос. ун-та. Сер. 4. Естеств.-мат. и техн. науки. 2007. № 4. С. 68–71.
18. *Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткий И.А., Юрков Ю.И.* Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. М., 2002.
19. *Тауженова Ф.И., Штануков-Лафшиев М.Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 10. С. 1871–1881.
20. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658–664.

21. *Alikhanov A.A.* A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Comput. Phys. 2015. V. 280. P. 424–438.
22. *Бештоков М.Х.* Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778.
23. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 919–928.
24. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной Капуто и оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 353–365.
25. *Caputo H.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, Geophys // J. Royal Astronom. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.
26. *Герасимов А.Н.* Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12. С. 251–260.
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1983.
28. *Li D., Liao H.L., Sun W., Wang J., Zhang J.* Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // Commun. Comput. Phys. 2018. V. 24. P. 86–103.
29. *Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.* Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск, 1981.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 29.04.2019 г.
После доработки 16.12.2020 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.958:537.8

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЭКРАНИРОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЭКРАНАМИ ИЗ ПЕРМАЛЛОЯ

© 2021 г. В. Т. Ерофеев, Г. Ф. Громыко, Г. М. Заяц

Предложена начально-краевая задача для моделирования проникновения импульсных электромагнитных полей через плоский экран, заполненный пермаллоем. Материал пермаллоя характеризуется нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка для поля намагниченности, распространяющегося в слое экрана. Рассмотрен случай, когда поток энергии импульсного поля направлен перпендикулярно экрану. Начально-краевая задача представлена в виде системы шести скалярных параболических нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями третьего и первого рода на лицевых плоскостях экрана. Разработан численный метод решения задачи. Численно исследованы характеристики электромагнитного поля в экране в зависимости от начального импульса. На основе вычислительных экспериментов получены зависимости коэффициента экранирования от проводимости и от толщины экрана.

DOI: 10.31857/S0374064121120104

Введение. Разработка математических методов моделирования проникновения импульсных электромагнитных полей через экраны является актуальным направлением прикладной электродинамики. Одним из веществ, используемых для создания экранов, является пермаллой*) [1–4]. Математическая модель задачи экранирования основывается на использовании системы уравнений Максвелла и дополнительного нелинейного уравнения для поля намагниченности, характеризующего пермаллой. Для моделирования поля $\mathbf{M}$ намагниченности материала экрана используется уравнение Ландау–Лифшица [3], которое нелинейным образом связывает магнитное поле $\mathbf{H}$ и поле $\mathbf{M}$. В работе [4] предложена математическая модель нелинейной краевой задачи экранирования импульсных полей плоским экраном из пермаллоя, в которой для упрощения решения задачи исключены величины второго порядка малости, входящие в нелинейное уравнение. Это позволило нелинейную задачу преобразовать в линейную и аналитически вычислить амплитуды отражённого и прошедшего через экран электромагнитных полей. Численные методы моделирования экранирующих свойств экранов из нелинейных материалов других типов без учёта намагниченности материала рассматривались в [5–7].

В данной работе использована модификация уравнения Ландау–Лифшица, содержащая вторые производные поля $\mathbf{M}$, что значительно усложняет модель. Рассмотрено воздействие импульсного первичного электромагнитного поля $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ и магнитного поля $\mathbf{H}_{sm}$, ортогонально падающих на экран. Магнитное поле $\mathbf{H}_{sm}$ используется для возбуждения поля намагниченности $\mathbf{M}$ в материале экрана. При этом зависимость поля $\mathbf{H}_{sm}$ от времени выбрана специальным образом, сглаживающим поля в угловых точках прямоугольной расчётной области. Построена начально-краевая задача для моделирования проникновения импульсных электромагнитных полей через плоский экран и разработан численный метод её решения. Численно исследованы компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$ и поля $\mathbf{M}$ намагниченности в экране в зависимости от начального импульса. Для численной оценки экранирующих свойств экрана получены зависимости коэффициента экранирования от проводимости и от толщины экрана.

1. Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих распространение электромагнитных полей в материале из пермаллоя. Рассмотрим плоский

*) Пермаллой – магнитно-мягкий сплав никеля и железа, иногда легированный другими металлами; обладает высокой магнитной проницаемостью и практически не изменяется в размерах при намагничивании.

слой $D(0 < z < \Delta)$ толщины Δ , заполненный пермаллоем. Для моделирования электромагнитного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и поля намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, распространяющихся в слое D , воспользуемся системой дифференциальных уравнений [1]

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \dot{\sigma} \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \times (\mathbf{H} + \dot{\Delta} \mathbf{M} - \dot{g} \mathbf{M} \times \mathbf{H}). \quad (4)$$

Преобразуем уравнения (1)–(3) в систему нелинейных уравнений параболического типа. Из уравнения (1) исключим вектор $\mathbf{E}$ с помощью уравнения (2) и временную производную от вектора намагниченности $\mathbf{M}$ с помощью уравнения (3). Получим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\dot{\sigma} \mu_0} (\Delta \mathbf{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H}) - \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad 0 < z < \Delta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad 0 < z < \Delta, \quad (6)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, $\dot{\sigma}$ – удельная проводимость пермаллоя, величины $\dot{\gamma}$, $\dot{\Delta}$, $\dot{g}$ определяют связь намагниченности $\mathbf{M}(z, t)$ и напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}(z, t)$ [1, с. 97]; постоянные имеют физические размерности $[\dot{\gamma}] = \text{м}/(\text{А} \cdot \text{с})$, $[\dot{\Delta}] = \text{м}^2$, $[\dot{g}] = \text{м}/\text{А}$, $[\dot{\sigma}] = \text{См}/\text{м}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн}/\text{м}$.

Решения системы уравнений (5), (6) будем искать в виде плоских электромагнитных полей, равномерно распределённых вдоль слоя D и не зависящих от координат x , y , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_x(z, t) \mathbf{e}_x + H_y(z, t) \mathbf{e}_y + H_z(z, t) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{M} &= M_x(z, t) \mathbf{e}_x + M_y(z, t) \mathbf{e}_y + M_z(z, t) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = E_x(z, t) \mathbf{e}_x + E_y(z, t) \mathbf{e}_y + E_z(z, t) \mathbf{e}_z. \quad (8)$$

Найдём выражение для поля (4), вычисляя векторные произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \times \mathbf{H} &= \mathbf{e}_x (M_y H_z - M_z H_y) + \mathbf{e}_y (M_z H_x - M_x H_z) + \mathbf{e}_z (M_x H_y - M_y H_x), \\ \mathbf{M} \times \Delta \mathbf{M} &= \mathbf{e}_x (M_y \Delta M_z - M_z \Delta M_y) + \mathbf{e}_y (M_z \Delta M_x - M_x \Delta M_z) + \mathbf{e}_z (M_x \Delta M_y - M_y \Delta M_x), \\ \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{e}_x (M_y (M_x H_y - M_y H_x) - M_z (M_z H_x - M_x H_z)) + \\ &+ \mathbf{e}_y (M_z (M_y H_z - M_z H_y) - M_x (M_x H_y - M_y H_x)) + \\ &+ \mathbf{e}_z (M_x (M_z H_x - M_x H_z) - M_y (M_y H_z - M_z H_y)). \end{aligned}$$

Для вектора $\mathbf{P}$ с учётом соотношений $\Delta M_\alpha = \partial^2 M_\alpha / \partial z^2$ ($\alpha = x, y, z$) получаем представление

$$\mathbf{P} = P_x(z, t) \mathbf{e}_x + P_y(z, t) \mathbf{e}_y + P_z(z, t) \mathbf{e}_z,$$

в котором

$$\begin{aligned} P_x &= \dot{\Delta} \left(M_y \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) + M_y H_z - M_z H_y - \dot{g} (M_y (M_x H_y - M_y H_x) - M_z (M_z H_x - M_x H_z)), \\ P_y &= \dot{\Delta} \left(M_z \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} - M_x \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right) + M_z H_x - M_x H_z - \dot{g} (M_z (M_y H_z - M_z H_y) - M_x (M_x H_y - M_y H_x)), \\ P_z &= \dot{\Delta} \left(M_x \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} - M_y \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right) + M_x H_y - M_y H_x - \dot{g} (M_x (M_z H_x - M_x H_z) - M_y (M_y H_z - M_z H_y)). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичным образом вычислим слагаемые, входящие в уравнение (5):

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \mathbf{e}_y + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \mathbf{e}_z, \quad \text{grad div } \mathbf{H} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

Выражая с помощью уравнения (2) компоненты поля $\mathbf{E}$, получаем

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t) \mathbf{e}_x + E_y(z, t) \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} \mathbf{e}_y \right), \quad E_z(z, t) = 0. \quad (11)$$

Сформулируем краевую задачу для системы уравнений (5), (6).

2. Постановка краевой задачи экранирования импульсных электромагнитных полей экраном из пермаллоя. В трёхмерном пространстве с электрической и магнитной постоянными ε_0 и μ_0 расположен плоский экран D ($0 < z < \Delta$) из пермаллоя, ограниченный плоскостями $\Gamma_1(z = 0)$, $\Gamma_2(z = \Delta)$ (рис. 1). Из полупространства $D_1(z < 0)$ на слой D воздействует первичное электромагнитное поле $\mathbf{E}_0(z, t)$, $\mathbf{H}_0(z, t)$. В результате в области D_1 образуется отражённое поле $\mathbf{E}'_1(z, t)$, $\mathbf{H}'_1(z, t)$ и суммарное электромагнитное поле $\mathbf{E}_1(z, t) = \mathbf{E}_0(z, t) + \mathbf{E}'_1(z, t)$, $\mathbf{H}_1(z, t) = \mathbf{H}_0(z, t) + \mathbf{H}'_1(z, t)$. В полупространство $D_2(z > \Delta)$ через экран D проникает поле $\mathbf{E}_2(z, t)$, $\mathbf{H}_2(z, t)$.

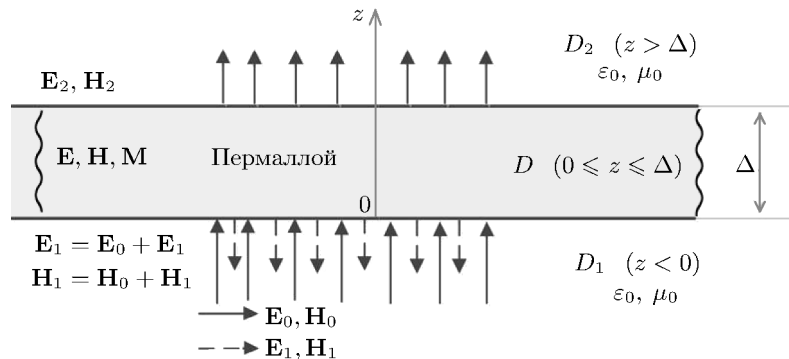


Рис. 1. Экранирование электромагнитного импульса $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ экраном D .

Краевая задача. Для заданного первичного поля $\mathbf{E}_0(z, t)$, $\mathbf{H}_0(z, t)$ требуется определить электромагнитные поля $\mathbf{E}'_1(z, t)$, $\mathbf{H}'_1(z, t)$ и $\mathbf{E}_2(z, t)$, $\mathbf{H}_2(z, t)$ в областях D_1 и D_2 соответственно и поля $\mathbf{E}(z, t)$, $\mathbf{H}(z, t)$, $\mathbf{M}(z, t)$ в области D , которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}'_1 &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}'_1, \quad \text{rot } \mathbf{H}'_1 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}'_1, \quad z < 0, \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_2, \quad \text{rot } \mathbf{H}_2 = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_2, \quad z > \Delta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \mu_0} (\Delta \mathbf{H} - \text{grad div } \mathbf{H}) - \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad 0 < z < \Delta, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \dot{\gamma} \mathbf{P}, \quad 0 < z < \Delta, \quad (14)$$

и следующим условиям:

1) граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля, магнитного поля и поля намагниченности на плоскости Γ_1 :

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{1\tau})|_{z=0} = 0, \quad ((\mathbf{H} + \mathbf{M})_\tau - \mathbf{H}_{1\tau})|_{z=0} = 0; \quad (15)$$

2) граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля, магнитного поля и поля намагниченности на плоскости Γ_2 :

$$(\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0, \quad ((\mathbf{H} + \mathbf{M})_\tau - \mathbf{H}_{2\tau})|_{z=\Delta} = 0; \quad (16)$$

3) граничным условиям для поля намагниченности на плоскостях Γ_1, Γ_2 :

$$\begin{aligned} M_x|_{z=0} = 0, \quad M_y|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n})|_{z=0} = H_{\text{sm}}c(t'), \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_z, \\ M_x|_{z=\Delta} = 0, \quad M_y|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n})|_{z=\Delta} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $H_{\text{sm}}c(t')$ – импульс внешнего магнитного поля, воздействующего на экран, $t' = t/\tau$, τ – время фронта импульса;

4) условиям излучения на бесконечность в областях D_1 и D_2 .

Краевая задача (12)–(17) является трёхобластной краевой задачей для полупространств: перед экраном D_1 , за экраном D_2 и для слоя D с граничными условиями сопряжения на поверхностях Γ_1 и Γ_2 раздела сред. В последующем трёхобластная краевая задача будет преобразована в однообластную краевую задачу с односторонними граничными условиями на лицевых плоскостях Γ_1 и Γ_2 экрана. При этом области D_1 и D_2 исключаются из рассмотрения. Такая процедура необходима для упрощения численной реализации решения нелинейной краевой задачи (12)–(17).

3. Импульсные электромагнитные поля, воздействующие на экран D . Полагаем, что в областях D_1 и D_2 находится вакуум; тогда электромагнитные поля в этих областях подчиняются уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (18)$$

Структура полей в областях D_1, D_2 предполагается аналогичной структуре полей (7), (8):

$$\mathbf{E} = E_x(z, t)\mathbf{e}_x + E_y(z, t)\mathbf{e}_y + E_z(z, t)\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{H} = H_x(z, t)\mathbf{e}_x + H_y(z, t)\mathbf{e}_y + H_z(z, t)\mathbf{e}_z. \quad (19)$$

Подставляя выражения (19) в уравнения (18), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_y(z, t)}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} \mathbf{e}_y = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H_x(z, t)\mathbf{e}_x + H_y(z, t)\mathbf{e}_y + H_z(z, t)\mathbf{e}_z), \\ -\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} \mathbf{e}_y = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_x(z, t)\mathbf{e}_x + E_y(z, t)\mathbf{e}_y + E_z(z, t)\mathbf{e}_z), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} E_z(z, t) = 0, \quad E_z(z, t) = C_1(z), \quad \frac{\partial}{\partial t} H_z(z, t) = 0, \quad H_z(z, t) = C_2(z). \quad (20)$$

Для постановки краевой задачи проникновения первичного электромагнитного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ через плоский экран из пермаллоя в качестве первичного поля рассмотрим импульсное электромагнитное поле (рис. 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(z, t) = -B_0(T^{(-)})\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{H}_0(z, t) = \frac{1}{Z_0} B_0(T^{(-)})\mathbf{e}_x, \end{aligned} \quad (21)$$

где $T^{(\mp)} = (ct \mp z)/(c\tau_{\text{fr}})$, τ_{fr} – время фронта импульса, c – скорость света, $Z_0 = 377$ Ом.

Дополнительно на экран из области D_1 воздействует магнитное поле

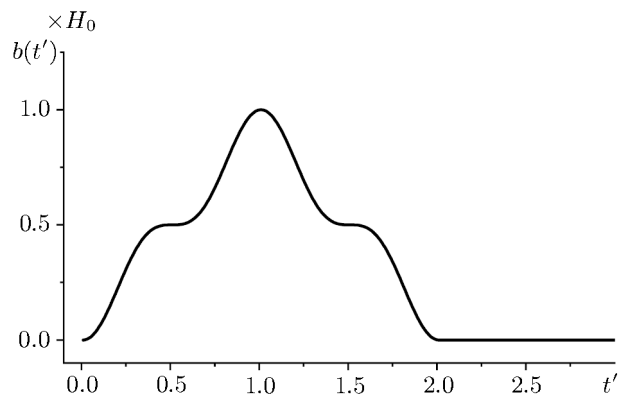


Рис. 2. Вид импульса $b(t')$.

$$\mathbf{H}_{\text{sm}} = H_{\text{sm}}c(t')\mathbf{e}_z, \quad c(t') = \begin{cases} \sin(\pi t'), & 0 \leq t' \leq 1/2, \\ 1, & t' \geq 1/2, \end{cases} \quad t' = \bar{t} = \frac{t}{\tau_{\text{fr}}}, \quad (22)$$

которое возбуждает поле намагниченности $\mathbf{M}$ и направлено ортогонально экрану.

В качестве импульсной функции первичного поля выберем функцию

$$B_0(t') = Z_0 H_0 b(t'), \quad \max_{0 \leq t' < 2} b(t') = 1, \quad b(t') = \begin{cases} 0.5 \sin^3(\pi(t' - 0.5)) + 0.5, & 0 \leq t' \leq 2, \\ 0, & t' \leq 0 \text{ и } t' \geq 2, \end{cases} \quad (23)$$

где H_0 – максимальное значение напряжённости магнитного поля $\mathbf{H}_0$.

Импульсная функция (23) при $t = 0$ равна нулю. В связи с этим в начальный момент времени $t = 0$ импульсные поля перед экраном и за экраном отсутствуют. Из равенств (20) следует, что $E_z(z, 0) = C_1(z) = 0$, $H_z(z, 0) = C_2(z) = 0$.

В результате воздействия первичного поля (21) на экран в области $D_1(z < 0)$ образуется отражённое импульсное поле

$$\mathbf{E}'_1(z, t) = -A_1(T^{(+)})\mathbf{e}_x + B_1(T^{(+)})\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}'_1(z, t) = \frac{1}{Z_0}(B_1(T^{(+)})\mathbf{e}_x + A_1(T^{(+)})\mathbf{e}_y). \quad (24)$$

Суммируя поля (21), (22), (24), получаем поле в области D_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(z, t) &= \mathbf{E}_0(z, t) + \mathbf{E}'_1(z, t) = -A_1(T^{(+)})\mathbf{e}_x + (-B_0(T^{(-)}) + B_1(T^{(+)})\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{H}_1(z, t) &= \mathbf{H}_0(z, t) + \mathbf{H}'_1(z, t) = \frac{1}{Z_0}[(B_0(T^{(-)}) + B_1(T^{(+)})\mathbf{e}_x + A_1(T^{(+)})\mathbf{e}_y] + \mathbf{H}_{\text{см}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Соответственно поле в области $D_2(z > \Delta)$ имеет вид

$$\mathbf{E}_2(z, t) = A_2(T^{(-)})\mathbf{e}_x - B_2(T^{(-)})\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H}_2(z, t) = \frac{1}{Z_0}(B_2(T^{(-)})\mathbf{e}_x + A_2(T^{(-)})\mathbf{e}_y). \quad (26)$$

Импульсные функции $A_j(t')$, $B_j(t')$ полей (24), (26) определяются в результате решения краевой задачи экранирования (12)–(17).

4. Граничные условия для нормальных составляющих полей на границах экрана. Рассмотрим плоскость $\Gamma(z = \text{const})$, разделяющую среды $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$, в которых распространяются поля $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{H}_j$ ($j = 1, 2$), описываемые уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E}_j = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_j, \quad \text{rot } \mathbf{H}_j = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_j + \mathbf{J}_j.$$

Граничные условия, связывающие нормальные составляющие полей на поверхности Γ , определяются формулами [8, с. 195]

$$\left((\mathbf{D}_2, \mathbf{n}) - (\mathbf{D}_1, \mathbf{n}) + \int_0^t (\mathbf{J}_2, \mathbf{n}) dt - \int_0^t (\mathbf{J}_1, \mathbf{n}) dt \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad ((\mathbf{B}_2, \mathbf{n}) - (\mathbf{B}_1, \mathbf{n}))|_{\Gamma} = 0, \quad (27)$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к плоскости Γ , направленная в область $\overline{D}_2$.

В соответствии с формулами (27) построим граничные условия на плоскости $\Gamma_1(z = 0)$ плоского экрана D , где $\overline{D}_1 = D_1$, $\overline{D}_2 = D$. Из уравнений (1), (2) вытекают следующие равенства: $\mathbf{B}_2 = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, $\mathbf{D}_2 = 0$, $\mathbf{J}_2 = \dot{\sigma}\mathbf{E}$.

В области D_1 – вакуум, поэтому $\mathbf{B}_1 = \mu_0\mathbf{H}_1$, $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0\mathbf{E}_1$, $\mathbf{J}_1 = 0$, где поля $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{E}_1$ определены равенствами (25).

В результате граничные условия (27) на плоскости Γ_1 принимают вид

$$\begin{aligned} \left(-\varepsilon_0(\mathbf{E}_1, \mathbf{n}) + \dot{\sigma} \int_0^t (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dt \right) \Big|_{z=0} &= 0, \\ ((\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n}) - (\mathbf{H}_1, \mathbf{n}))|_{z=0} &= (\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n})|_{z=0} - H_{\text{пост}}c(t') = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (28)$$

где $H_{\text{пост}}$ – максимальное значение магнитного поля, воздействующего на экран.

Выведем граничные условия на плоскости $\Gamma_2(z = \Delta)$ экрана D , где $\overline{D}_1 = D$, $\overline{D}_2 = D_2$. Из уравнений (1), (2) следует, что $\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, $\mathbf{D}_1 = 0$, $\mathbf{J}_1 = \dot{\sigma}\mathbf{E}$. В области D_2 – вакуум, следовательно, $\mathbf{B}_2 = \mu_0\mathbf{H}_2$, $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0\mathbf{E}_2$, $\mathbf{J}_2 = 0$, где поля $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{E}_2$ определены уравнениями (26).

В результате граничные условия (27) на плоскости Γ_2 принимают вид

$$\left(\varepsilon_0(\mathbf{E}_2, \mathbf{n}) - \dot{\sigma} \int_0^t (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dt \right) \Big|_{z=\Delta} = 0, \quad ((\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n}) - (\mathbf{H}_2, \mathbf{n}))|_{z=\Delta} = (\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n})|_{z=\Delta} = 0. \quad (29)$$

Из равенств (25), (26) следует, что $(\mathbf{E}_j, \mathbf{n}) = 0$, а из представления (11) электрического поля – что $(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = 0$. Таким образом, интегральные условия в уравнениях (28), (29) на плоскостях Γ_1 , Γ_2 выполнены.

Заметим, что на поверхностях экрана касательные составляющие поля намагниченности в областях D_1 и D_2 отсутствуют, т.е. $M_{1x}|_{z=0} = 0$, $M_{1y}|_{z=0} = 0$, $M_{2x}|_{z=\Delta} = 0$, $M_{2y}|_{z=\Delta} = 0$. В силу непрерывности касательных составляющих полей граничные условия для поля намагниченности на плоскостях Γ_1 , Γ_2 принимают вид, соответствующий условиям (17), т.е.

$$M_x|_{z=0} = 0, \quad M_y|_{z=0} = 0, \quad (\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n})|_{z=0} = H_{\text{см}}c(t'),$$

$$M_x|_{z=\Delta} = 0, \quad M_y|_{z=\Delta} = 0, \quad (\mathbf{H} + \mathbf{M}, \mathbf{n})|_{z=\Delta} = 0.$$

5. Односторонние граничные условия для касательных составляющих полей на плоскостях экрана. Преобразуем двухсторонние граничные условия сопряжения (15), (16) в односторонние граничные условия. Для магнитных полей и поля намагниченности в областях D и D_1 на плоскости $\Gamma_1(z = 0)$ выполнены граничные условия (15) непрерывности тангенциальных составляющих полей. С учётом того, что $M_x|_{z=0} = 0$, $M_y|_{z=0} = 0$, из условий (17) получаем равенство

$$[\mathbf{n}, [\mathbf{H}, \mathbf{n}]]|_{z=0} = [\mathbf{n}, [\mathbf{H}_1, \mathbf{n}]]|_{z=0}. \quad (30)$$

Учитывая представления (7), (25) при $z = 0$ для магнитных полей в областях D , D_1 , преобразуем условия (30) в граничные условия для декартовых составляющих

$$H_x(0, t) = \frac{1}{Z_0} \left(B_0 \left(\frac{t}{\tau} \right) + B_1 \left(\frac{t}{\tau} \right) \right), \quad H_y(0, t) = \frac{1}{Z_0} A_1 \left(\frac{t}{\tau} \right). \quad (31)$$

Для электрических полей в областях D и D_1 на плоскости $\Gamma_1(z = 0)$ выполнены граничные условия сопряжения (15):

$$[\mathbf{n}, [\mathbf{E}, \mathbf{n}]]|_{z=0} = [\mathbf{n}, [\mathbf{E}_1, \mathbf{n}]]|_{z=0}. \quad (32)$$

Аналогично, учитывая представления (8), (25) при $z = 0$ для электрических полей, преобразуем условия (32) в скалярные граничные условия для декартовых составляющих полей

$$E_x(0, t) = -A_1(t/\tau), \quad E_y(0, t) = -B_0(t/\tau) + B_1(t/\tau). \quad (33)$$

Из условий (31), используя равенства (33), исключим неизвестные функции A_1 , B_1 . В результате получаем

$$H_x(0, t) = \frac{1}{Z_0} (2B_0(t/\tau) + E_y(0, t)), \quad H_y(0, t) = -\frac{1}{Z_0} E_x(0, t). \quad (34)$$

С помощью соотношений (11) при $z = 0$ исключим компоненты

$$E_x(0, t) = -\frac{1}{\dot{\sigma}} \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad E_y(0, t) = \frac{1}{\dot{\sigma}} \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

из равенств (34). В результате граничные условия для касательных составляющих магнитного поля примут вид

$$\left(\frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} - Z_0 \dot{H}_x(z, t) \right) \Big|_{z=0} = -2\dot{B}_0 \left(\frac{t}{\tau} \right), \quad \left(\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} - Z_0 \dot{H}_y(z, t) \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (35)$$

Аналогично, для магнитных и электрических полей в областях D , D_2 на плоскости $\Gamma_2(z = \Delta)$ выполнены граничные условия (16). С учётом первых двух в условиях (17) равенств $M_x|_{z=\Delta} = 0$, $M_y|_{z=\Delta} = 0$ находим, что

$$[\mathbf{n}, [\mathbf{H}, \mathbf{n}]]|_{z=\Delta} = [\mathbf{n}, [\mathbf{H}_2, \mathbf{n}]]|_{z=\Delta}, \quad [\mathbf{n}, [\mathbf{E}, \mathbf{n}]]|_{z=\Delta} = [\mathbf{n}, [\mathbf{E}_2, \mathbf{n}]]|_{z=\Delta}. \quad (36)$$

Учитывая представления (7), (8), (26) при $z = \Delta$ для магнитных и электрических полей в областях D и D_2 , преобразуем условия (36) к виду

$$H_x(\Delta, t) = \frac{1}{Z_0} B_2 \left(\frac{ct - \Delta}{c\tau} \right), \quad H_y(\Delta, t) = \frac{1}{Z_0} A_2 \left(\frac{ct - \Delta}{c\tau} \right), \quad (37)$$

$$E_x(\Delta, t) = A_2 \left(\frac{ct - \Delta}{c\tau} \right), \quad E_y(\Delta, t) = -B_2 \left(\frac{ct - \Delta}{c\tau} \right). \quad (38)$$

Исключая из равенств (37) и (38) функции A_2 и B_2 , получаем

$$H_x(\Delta, t) = -\frac{1}{Z_0} E_y(\Delta, t), \quad H_y(\Delta, t) = \frac{1}{Z_0} E_x(\Delta, t). \quad (39)$$

В силу соотношения (11) имеем

$$E_x(\Delta, t) = -\frac{1}{\dot{\sigma}} \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\Delta}, \quad E_y(\Delta, t) = \frac{1}{\dot{\sigma}} \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=\Delta}$$

и, подставляя эти выражения для E_x и E_y в равенства (39), находим граничные условия на плоскости Γ_2 :

$$\left(\frac{\partial H_x(z, t)}{\partial z} + Z_0 \dot{H}_x(z, t) \right) \Big|_{z=\Delta} = 0, \quad \left(\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial z} + Z_0 \dot{H}_y(z, t) \right) \Big|_{z=\Delta} = 0. \quad (40)$$

Заметим, что односторонние граничные условия (35), (40) содержат компоненты магнитного поля и поля намагниченности слоя D .

6. Безразмерные параболические дифференциальные уравнения в слое из пермаллоя. Введём безразмерное время $\bar{t} = t/\tau$ и безразмерную координату $\bar{z} = z/\Delta$. Обезразмерим поля $\mathbf{H}(z, t)$, $\mathbf{M}(z, t)$, определённые равенствами (7), полагая

$$\begin{aligned} H_x(z, t) &= H_x(\Delta \bar{z}, \tau \bar{t}) = H_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}), & H_y(z, t) &= H_y(\Delta \bar{z}, \tau \bar{t}) = H_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}), \\ H_z(z, t) &= H_z(\Delta \bar{z}, \tau \bar{t}) = H_0 u_3(\bar{z}, \bar{t}); \\ M_x(z, t) &= M_x(\Delta \bar{z}, \tau \bar{t}) = H_0 v_1(\bar{z}, \bar{t}), & M_y(z, t) &= M_y(\Delta \bar{z}, \tau \bar{t}) = H_0 v_2(\bar{z}, \bar{t}), \\ M_z(z, t) &= M_z(\Delta \bar{z}, \tau \bar{t}) = H_0 v_3(\bar{z}, \bar{t}). \end{aligned} \quad (41)$$

Для безразмерных функций u_1 , u_2 , u_3 и v_1 , v_2 , v_3 построим систему безразмерных дифференциальных уравнений.

Векторное дифференциальное уравнение (14) запишем для компонент поля (7):

$$\frac{\partial M_x(z, t)}{\partial t} = \dot{\gamma} P_x(z, t), \quad \frac{\partial M_y(z, t)}{\partial t} = \dot{\gamma} P_y(z, t), \quad \frac{\partial M_z(z, t)}{\partial t} = \dot{\gamma} P_z(z, t). \quad (42)$$

Обезразмерим уравнения (42), учитывая представления (9), (41). Получим безразмерные уравнения в слое D :

$$\frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_1(\bar{z}, \bar{t}), \quad \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_2(\bar{z}, \bar{t}), \quad \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_3(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} < \infty, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} p_1(\bar{z}, \bar{t}) &= F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2 \frac{\partial v_3}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3 \frac{\partial v_2}{\partial \bar{z}} \right) \right) + F_2(v_2 u_3 - v_3 u_2) + \\ &\quad + F_3[v_2(v_2 u_1 - v_1 u_2) + v_3(v_3 u_1 - v_1 u_3)], \\ p_2(\bar{z}, \bar{t}) &= F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial \bar{z}} \right) \right) + F_2(v_3 u_1 - v_1 u_3) + \\ &\quad + F_3[v_3(v_3 u_2 - v_2 u_3) + v_1(v_1 u_2 - v_2 u_1)], \\ p_3(\bar{z}, \bar{t}) &= F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}} \right) \right) + F_2(v_1 u_2 - v_2 u_1) + \\ &\quad + F_3[v_1(v_1 u_3 - v_3 u_1) + v_2(v_2 u_3 - v_3 u_2)]; \end{aligned} \quad (44)$$

$F_1 = \dot{\gamma} \tau \dot{a} H_0 / \Delta^2$, $F_2 = \dot{\gamma} \tau H_0$, $F_3 = \dot{\gamma} \tau \dot{g} H_0^2$ – безразмерные постоянные.

Аналогичным образом векторное дифференциальное уравнение (13) запишем для компонент поля с учётом равенств (7) и (10). В результате получим скалярные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x(z, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\dot{\sigma} \mu_0} \frac{\partial^2 H_x(z, t)}{\partial z^2} - \dot{\gamma} P_x(z, t), \quad \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\dot{\sigma} \mu_0} \frac{\partial^2 H_y(z, t)}{\partial z^2} - \dot{\gamma} P_y(z, t), \\ \frac{\partial H_z(z, t)}{\partial t} &= -\dot{\gamma} P_z(z, t). \end{aligned} \quad (45)$$

Обезразмерим дифференциальные уравнения (45), учитывая равенства (41), (44). Получим безразмерные скалярные уравнения

$$\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = G \frac{\partial^2 u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - p_1(\bar{z}, \bar{t}), \quad \frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = G \frac{\partial^2 u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - p_2(\bar{z}, \bar{t}), \quad \frac{\partial u_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = -p_3(\bar{z}, \bar{t}), \quad (46)$$

где

$$G = \frac{\tau}{\dot{\sigma} \mu_0 \Delta^2}, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 < \bar{t} < \infty.$$

7. Безразмерные односторонние граничные условия на плоскостях экрана. Обезразмерим импульсную функцию $B_0(t')$ первичного поля (21):

$$B_0(t/\tau) = E_0 b(\bar{t}) = Z_0 H_0 b(\bar{t}),$$

где E_0 – максимальное значение напряжённости электрического поля $\mathbf{E}_0$, $b(\bar{t})$ – импульсная функция (23).

Приведём граничные условия (17), (35) на плоскости $\Gamma_1(\bar{z} = 0)$ к безразмерному виду, учитывая вид функций (22), (23), (41). Получим двухсторонние граничные условия

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - K_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=0} &= -2\dot{\sigma} \Delta Z_0 b(\bar{t}), \quad \left(\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - K_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=0} = 0; \\ v_1|_{\bar{z}=0} &= 0, \quad v_2|_{\bar{z}=0} = 0, \quad (v_3 + u_3)|_{\bar{z}=0} = H_s c(t'), \end{aligned} \quad (47)$$

где $K_0 = \dot{\sigma} Z_0 \Delta$, $H_s = H_{sm}/H_0$.

Аналогично, преобразовывая граничные условия (17), (40) на плоскости $\Gamma_2(\bar{z} = 1)$, приходим к безразмерным граничным условиям

$$\left(\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + K_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + K_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0;$$

$$v_1|_{\bar{z}=1} = 0, \quad v_2|_{\bar{z}=1} = 0, \quad (v_3 + u_3)|_{\bar{z}=1} = 0. \quad (48)$$

Для системы скалярных дифференциальных уравнений (43), (46) сформулируем начально-краевую задачу с односторонними граничными условиями (47), (48), добавив начальные условия при $\bar{t} = 0$.

8. Начально-краевая задача экранирования. Для нахождения безразмерных компонент магнитного поля $u_i(\bar{z}, \bar{t})$, $i = 1, 2, 3$, и компонент поля намагниченности $v_i(\bar{z}, \bar{t})$, $i = 1, 2, 3$, рассмотрим следующие взаимосвязанные начальные и краевые задачи:

а) для функций $u_1(\bar{z}, \bar{t})$, $u_2(\bar{z}, \bar{t})$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial u_i(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = G \frac{\partial^2 u_i(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} - p_i(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad i = 1, 2, \quad (49)$$

краевая задача с граничными

$$\left(\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - K_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=0} = -2K_0 b(\bar{t}), \quad \left(\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} - K_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (50)$$

$$\left(\frac{\partial u_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + K_0 u_1(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} + K_0 u_2(\bar{z}, \bar{t}) \right) \Big|_{\bar{z}=1} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (51)$$

и начальными

$$u_1(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad u_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1,$$

условиями;

б) для функции $u_3(\bar{z}, \bar{t})$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = -p_3(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (52)$$

задача Коши с начальным условием

$$u_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1,$$

и условиями на границах $u_3(0, \bar{t}) = 0$, $u_3(1, \bar{t}) = 0$, $0 \leq \bar{t} \leq 3$, которые следуют из условий $v_1(0, \bar{t}) = 0$, $v_2(0, \bar{t}) = 0$, $v_1(1, \bar{t}) = 0$, $v_2(1, \bar{t}) = 0$, $p_3(0, \bar{t}) = 0$, $p_3(1, \bar{t}) = 0$;

с) для функций $v_1(\bar{z}, \bar{t})$, $v_2(\bar{z}, \bar{t})$, $v_3(\bar{z}, \bar{t})$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial v_j(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = p_j(\bar{z}, \bar{t}), \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (53)$$

краевая задача с граничными

$$v_1(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} = 0, \quad v_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} = 0, \quad v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=0} = H_{sc}(t'), \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (54)$$

$$v_1(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} = 0, \quad v_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} = 0, \quad v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{z}=1} = 0, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (55)$$

и с начальными

$$v_1(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad v_2(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad v_3(\bar{z}, \bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1, \quad (56)$$

условиями.

Здесь $b(\bar{t})$ – безразмерная импульсная функция (23), функции $p_1(\bar{z}, \bar{t})$, $p_2(\bar{z}, \bar{t})$, $p_3(\bar{z}, \bar{t})$ определены равенствами (44), а функция $c(\bar{t}')$ задана в (22).

Исходными параметрами задачи являются физически размерные величины: $\dot{\gamma}$, $\dot{\sigma}$, $\dot{a}$, $\dot{g}$, Δ , τ , H_0 , H_{sm} , μ_0 .

Физически безразмерные постоянные, входящие в постановку задачи (49)–(56), определяются равенствами

$$G = \frac{\tau}{\dot{\sigma}\mu_0\Delta^2}, \quad K_0 = \dot{\sigma}Z_0\Delta, \quad F_1 = \frac{\dot{\gamma}\tau\dot{a}H_0}{\Delta^2}, \quad F_2 = \dot{\gamma}\tau H_0, \quad F_3 = \dot{\gamma}\tau\dot{g}H_0^2, \quad H_s = \frac{H_{sm}}{H_0}.$$

9. Численный метод. Для построения разностной схемы численного решения начально-краевой задачи (49)–(56) предварительно преобразуем функции $p_k(\bar{z}, \bar{t})$, $k = 1, 2, 3$, определённые равенствами (44), представив их в виде линейной комбинации

$$p_k(\bar{z}, \bar{t}) = a_k u_k(\bar{z}, \bar{t}) + b_k v_k(\bar{z}, \bar{t}) + d_k, \quad (57)$$

функций $u_k(\bar{z}, \bar{t})$, $v_k(\bar{z}, \bar{t})$, где

$$a_k = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_l^2(\bar{z}, \bar{t}), \quad b_k = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_l(\bar{z}, \bar{t}) u_l(\bar{z}, \bar{t}), \quad d_k = P_k + R_k,$$

$$P_1 = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right),$$

$$R_1 = F_2(v_2(\bar{z}, \bar{t})u_3(\bar{z}, \bar{t}) - v_3(\bar{z}, \bar{t})u_2(\bar{z}, \bar{t})),$$

$$P_2 = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_3(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_1(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_3(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right),$$

$$R_2 = F_2(v_3(\bar{z}, \bar{t})u_1(\bar{z}, \bar{t}) - v_1(\bar{z}, \bar{t})u_3(\bar{z}, \bar{t})),$$

$$P_3 = F_1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_1(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_2(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(v_2(\bar{z}, \bar{t}) \frac{\partial v_1(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}} \right) \right),$$

$$R_3 = F_2(v_1(\bar{z}, \bar{t})u_2(\bar{z}, \bar{t}) - v_2(\bar{z}, \bar{t})u_1(\bar{z}, \bar{t})).$$

С учётом представления (57) запишем уравнения (49), (52) в виде следующей системы нелинейных эволюционных уравнений:

$$\frac{\partial u_k(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = -a_k u_k(\bar{z}, \bar{t}) - b_k v_k(\bar{z}, \bar{t}) + \Phi_k, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad (58)$$

$$\frac{\partial v_k(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = a_k u_k(\bar{z}, \bar{t}) + b_k v_k(\bar{z}, \bar{t}) + d_k, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad (59)$$

где

$$\Phi_k = -d_k + G \frac{\partial^2 u_k(\bar{z}, \bar{t})}{\partial \bar{z}^2} (1 - \delta_{k,3}), \quad \delta_{k,3} - \text{символ Кронекера}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для решения системы уравнений (58), (59) используем сеточный метод [9, с. 73]. Область непрерывного изменения временного аргумента $[0, 3]$ заменим областью его дискретного изменения: введём временную сетку $\bar{\omega}_{\bar{t}} = \{\bar{t}_j = \bar{t}_{j-1} + \Delta t: j = \overline{1, M}, \Delta t = (\bar{t}_M - \bar{t}_0)/M, \bar{t}_0 = 0, \bar{t}_M = 3\}$. Обозначим $\bar{t} = \bar{t}_j$ – текущий временной слой, на котором находим решение, $\bar{t} = \bar{t}_{j-1}$ – предыдущий временной слой, на котором решение уже найдено. Тогда шаг по времени $\Delta t = \bar{t} - \bar{t}$. Функции на текущем временном слое обозначим через $u_k(\bar{z}) = u_k(\bar{z}, \bar{t})$, $v_k(\bar{z}) = v_k(\bar{z}, \bar{t})$, на предыдущем временном слое – через $\check{u}_k(\bar{z}) = u_k(\bar{z}, \bar{t})$, $\check{v}_k(\bar{z}) = v_k(\bar{z}, \bar{t})$, $k = 1, 2, 3$.

Построение решения будем проводить рекуррентно по временным слоям.

Для решения системы (58), (59) относительно пары функций $u_k(\bar{z}, \bar{t})$, $v_k(\bar{z}, \bar{t})$ для каждого $k = 1, 2, 3$ рассмотрим неявную схему

$$\frac{u_k(\bar{z}) - \check{u}_k(\bar{z})}{\Delta t} = -a_k u_k(\bar{z}) - b_k v_k(\bar{z}) + \Phi_k, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3, \quad (60)$$

$$\frac{v_k(\bar{z}) - \check{v}_k(\bar{z})}{\Delta t} = a_k u_k(\bar{z}) + b_k v_k(\bar{z}) + d_k, \quad 0 < \bar{z} < 1, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 3. \quad (61)$$

Разностная схема (60), (61) аппроксимирует систему уравнений (58), (59) с погрешностью $O(\Delta t)$.

Преобразуем систему (60), (61) к виду

$$\begin{aligned} (1 + \Delta t a_k) u_k(\bar{z}) + \Delta t b_k v_k(\bar{z}) &= \check{u}_k(\bar{z}) + \Delta t \Phi_k, \\ -\Delta t a_k u_k(\bar{z}) + (1 - \Delta t b_k) v_k(\bar{z}) &= \check{v}_k(\bar{z}) + \Delta t d_k. \end{aligned} \quad (62)$$

Система (62) – линейная алгебраическая система уравнений относительно неизвестных $u_k(\bar{z})$, $v_k(\bar{z})$. Её определитель имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1 + \Delta t a_k) & \Delta t b_k \\ -\Delta t a_k & (1 - \Delta t b_k) \end{vmatrix} = 1 + \Delta t(a_k - b_k).$$

При достаточно малом Δt значение Δ отлично от нуля. Решение системы (62) запишем по правилу Крамера

$$u_k(\bar{z}) = \frac{(\check{u}_k(\bar{z}) + \Delta t \Phi_k)(1 - \Delta t b_k) - (\check{v}_k(\bar{z}) + \Delta t d_k) \Delta t b_k}{\det A}, \quad (63)$$

$$v_k(\bar{z}) = \frac{(1 + \Delta t a_k)(\check{v}_k(\bar{z}) + \Delta t d_k) + \Delta t a_k(\check{u}_k(\bar{z}) + \Delta t \Phi_k)}{\det A}. \quad (64)$$

Преобразовывая выражения в (63), (64), получаем для $u_k(\bar{z})$ и $v_k(\bar{z})$ на временном слое $\bar{t}$ нелинейные уравнения

$$\begin{aligned} u_k(\bar{z}) &= \check{u}_k(\bar{z}) \frac{1}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} - \Delta t \frac{(\check{u}_k(\bar{z}) + \check{v}_k(\bar{z}))b_k}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} - \Delta t \frac{d_k}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} + \\ &+ \Delta t \frac{(1 - \Delta t b_k)}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} G \frac{\partial^2 u_k(\bar{z})}{\partial \bar{z}^2} (1 - \delta_{k,3}), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} v_k(\bar{z}) &= \check{v}_k(\bar{z}) \frac{1}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} + \Delta t \frac{(\check{v}_k(\bar{z}) + \check{u}_k(\bar{z}))a_k}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} + \Delta t \frac{d_k}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} + \\ &+ (\Delta t)^2 \frac{a_k}{1 + \Delta t(a_k - b_k)} G \frac{\partial^2 u_k(\bar{z})}{\partial \bar{z}^2} (1 - \delta_{k,3}). \end{aligned} \quad (66)$$

Нелинейные уравнения (65), (66) будем решать разностным методом. Для этого введём по переменной z неравномерную сетку $\bar{\omega}_z = \{z_i \in [0, 1]: i = \overline{0, N}, z_0 = 0, z_N = 1\}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ – сеточные шаги, $\bar{\Delta z}_i = 0.5(\Delta z_i + \Delta z_{i+1})$. Значения функций $u_k(\bar{z})$ и $v_k(\bar{z})$ в узлах сетки $\bar{z}_i$ обозначим через $u_k(\bar{z}_i) = u_{k;i}$ и $v_k(\bar{z}_i) = v_{k;i}$ соответственно.

Аппроксимируя дифференциальные операторы, входящие в уравнения (65), (66), получаем следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} u_{k;i} &= \check{u}_{k;i} D_{k;i} - \Delta t D_{k;i} (\check{u}_{k;i} + \check{v}_{k;i}) b_{k;i} - \Delta t D_{k;i} d_{k;i} + \\ &+ \Delta t D_{k;i} (1 - \Delta t b_{k;i}) \frac{G}{\bar{\Delta z}_i} \left(\frac{u_{k;i+1} - u_{k;i}}{\Delta z_{i+1}} - \frac{u_{k;i} - u_{k;i-1}}{\Delta z_i} \right) (1 - \delta_{k,3}), \end{aligned} \quad (67)$$

$$v_{k;i} = \check{v}_{k;i} D_{k;i} - \Delta t D_{k;i} (\check{u}_{k;i} + \check{v}_{k;i}) a_{k;i} + \Delta t D_{k;i} d_{k;i} + \\ + (\Delta t)^2 D_{k;i} a_{k;i} \frac{G}{\Delta z_i} \left(\frac{u_{k;i+1} - u_{k;i}}{\Delta z_{i+1}} - \frac{u_{k;i} - u_{k;i-1}}{\Delta z_i} \right) (1 - \delta_{k,3}), \quad (68)$$

где

$$D_{k;i} = \frac{1}{1 + \Delta t (a_{k;i} - b_{k;i})}, \quad a_{k;i} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l;i}^2, \quad b_{k;i} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 v_{l;i} u_{l;i}, \quad d_{k;i} = P_{k;i} + R_{k;i},$$

$$R_{1;i} = F_2(v_{2;i} u_{3;i} - v_{3;i} u_{2;i}), \quad R_{2;i} = F_2(v_{3;i} u_{1;i} - v_{1;i} u_{3;i}), \quad R_{3;i} = F_2(v_{1;i} u_{2;i} - v_{2;i} u_{1;i}), \\ P_{1;i} = F_1(\mathcal{K}_{2,3}^i - \mathcal{K}_{3,2}^i), \quad P_{2;i} = F_1(\mathcal{K}_{3,1}^i - \mathcal{K}_{1,3}^i), \quad P_{3;i} = F_1(\mathcal{K}_{1,2}^i - \mathcal{K}_{2,1}^i),$$

здесь

$$\mathcal{K}_{k,m}^i = \frac{1}{\Delta z_i} \left(v_{k;i+0.5} \frac{v_{m;i+1} - v_{m;i}}{\Delta z_{i+1}} - v_{k;i-0.5} \frac{v_{m;i} - v_{m;i-1}}{\Delta z_i} \right), \quad k, m = 1, 2, 3,$$

и $v_{k;i \pm 0.5} = 0.5(v_{k;i \pm 1} + v_{k;i})$, $k = 1, 2, 3$.

Неявная разностная схема (67), (68) аппроксимирует систему уравнений (65), (66) с порядком аппроксимации $O(\Delta z_{\max})$, где $\Delta z_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N} \Delta z_i$.

Граничные условия (50), (51) аппроксимируем, используя уравнения (49). В результате получим следующие разностные соотношения:

$$\frac{G}{(\Delta z_1)^2} u_{k;1} - \left(\frac{GK_0}{\Delta z_1} + \frac{1}{2\Delta t} + \frac{G}{(\Delta z_1)^2} \right) u_{k;0} = -\frac{1}{2\Delta t} \check{u}_{k;0} - \frac{2GK_0 b(\bar{t})}{\Delta z_1} (1 - \delta_{k,2}), \quad k = 1, 2, \quad (69)$$

на границе Γ_1 и

$$\frac{G}{(\Delta z_{N-1})^2} u_{k;N-1} - \left(\frac{GK_0}{\Delta z_{N-1}} + \frac{1}{2\Delta t} + \frac{G}{(\Delta z_{N-1})^2} \right) u_{k;N} = -\frac{1}{2\Delta t} \check{u}_{k;N}, \quad k = 1, 2, \quad (70)$$

на границе Γ_2 .

Разностные схемы (69) аппроксимируют граничные условия (50) с порядком аппроксимации $O(\Delta t + \Delta z_1)$. Разностные схемы (70) аппроксимируют граничные условия (51) с порядком аппроксимации $O(\Delta t + \Delta z_N)$.

Аппроксимация граничных условий (54), (55) имеет вид

$$v_{k;0} = 0, \quad k = 1, 2, \quad v_{3;0} = H_s c(\bar{t}); \quad v_{k;N} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (71)$$

Начальные условия на сетке $\bar{\omega}_z$ аппроксимируем следующими соотношениями:

$$u_k(\bar{z}_i, 0) = 0, \quad v_k(\bar{z}_i, 0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{0, N}. \quad (72)$$

Для реализации нелинейной разностной схемы (67)–(72) построим итерационный процесс:

$$u_{k;i}^{s+1} = \check{u}_{k;i}^s D_{k;i}^s - \Delta t \check{D}_{k;i}^s b_{k;i}^s (\check{u}_{k;i}^s + \check{v}_{k;i}^s) - \Delta t \check{D}_{k;i}^s d_{k;i}^s + \\ + \Delta t \check{D}_{k;i}^s (1 - \Delta t b_{k;i}^s) \frac{G}{\Delta z_i} \left(\frac{u_{k;i+1}^{s+1} - u_{k;i}^{s+1}}{\Delta z_{i+1}} - \frac{u_{k;i}^{s+1} - u_{k;i-1}^{s+1}}{\Delta z_i} \right) (1 - \delta_{k,3}), \quad k = 1, 2, \quad (73)$$

во внутренних точках z_i , $i = \overline{1, N-1}$,

$$\frac{G}{(\Delta z_1)^2} u_{k;1}^{s+1} - \left(\frac{GK_0}{\Delta z_1} + \frac{1}{2\Delta t} + \frac{G}{(\Delta z_1)^2} \right) u_{k;0}^{s+1} = -\frac{1}{2\Delta t} \check{u}_{k;0}^s - \frac{2GK_0 b(\bar{t})}{\Delta z_1} (1 - \delta_{k,2}), \quad k = 1, 2, \quad (74)$$

в граничной точке $\bar{z}_0 = 0$,

$$\frac{G}{(\Delta z_{N-1})^2} u_{k;N-1}^{s+1} - \left(\frac{GK_0}{\Delta z_{N-1}} + \frac{1}{2\Delta t} + \frac{G}{(\Delta z_{N-1})^2} \right) u_{k;N}^{s+1} = -\frac{1}{2\Delta t} \check{u}_{k;N} \quad k = 1, 2, \quad (75)$$

в граничной точке $\bar{z}_N = 1$,

$$u_{3;i}^{s+1} = \check{u}_{3;i} \overset{s}{D}_{3;i} - \Delta t \overset{s}{D}_{3;i} \overset{s}{b}_{3;i} (\check{u}_{3;i} + \check{v}_{3;i}) - \Delta t \overset{s}{D}_{3;i} \overset{s}{d}_{3;i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (76)$$

$$u_{3;0}^{s+1} = 0, \quad u_{3;N}^{s+1} = 0,$$

в граничных точках $\bar{z}_0 = 0$, $\bar{z}_N = 1$;

для значений $v_{k;i}$, $k = 1, 2, 3$, итерационный процесс имеет вид

$$\begin{aligned} v_{k;i}^{s+1} &= \check{v}_{k;i} \overset{s}{D}_{k;i} - \Delta t \overset{s}{D}_{k;i} \overset{s}{a}_{k;i} (\check{u}_{k;i} + \check{v}_{k;i}) + \Delta t \overset{s}{D}_{k;i} \overset{s}{d}_{k;i} + \\ &+ (\Delta t)^2 \overset{s}{D}_{k;i} \overset{s}{a}_{k;i} \frac{G}{\Delta z_i} \left(\frac{u_{k;i+1}^{s+1} - u_{k;i}^{s+1}}{\Delta z_{i+1}} - \frac{u_{k;i}^{s+1} - u_{k;i-1}^{s+1}}{\Delta z_i} \right) (1 - \delta_{k,3}), \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (77)$$

$$v_{k;0}^{s+1} = 0, \quad k = 1, 2, \quad v_{3;0}^{s+1} = H_{sc}(\bar{t}); \quad v_{k;N}^{s+1} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$\overset{s}{D}_{k;i} = \frac{1}{1 + \Delta t (\overset{s}{a}_{k;i} - \overset{s}{b}_{k;i})}, \quad \overset{s}{a}_{k;i} = F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 \overset{s}{v}_{l;i}, \quad \overset{s}{b}_{k;i} = -F_3 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 \overset{s}{v}_{l;i} \overset{s}{u}_{l;i}, \quad \overset{s}{d}_{k;i} = \overset{s}{P}_{k;i} + \overset{s}{R}_{k;i},$$

$$\overset{s}{R}_{1;i} = F_2(\overset{s}{v}_{2;i} \overset{s}{u}_{3;i} - \overset{s}{v}_{3;i} \overset{s}{u}_{2;i}), \quad \overset{s}{R}_{2;i} = F_2(\overset{s}{v}_{3;i} \overset{s}{u}_{1;i} - \overset{s}{v}_{1;i} \overset{s}{u}_{3;i}), \quad \overset{s}{R}_{3;i} = F_2(\overset{s}{v}_{1;i} \overset{s}{u}_{2;i} - \overset{s}{v}_{2;i} \overset{s}{u}_{1;i}),$$

$$\overset{s}{P}_{1;i} = F_1(\overset{s}{K}_{2,3}^i - \overset{s}{K}_{3,2}^i), \quad \overset{s}{P}_{2;i} = F_1(\overset{s}{K}_{3,1}^i - \overset{s}{K}_{1,3}^i), \quad \overset{s}{P}_{3;i} = F_1(\overset{s}{K}_{1,2}^i - \overset{s}{K}_{2,1}^i),$$

здесь

$$\overset{s}{K}_{k,m}^i = \frac{1}{\Delta z_i} \left(\overset{s}{v}_{k;i+0.5} \frac{\overset{s}{v}_{m;i+1} - \overset{s}{v}_{m;i}}{\Delta z_{i+1}} - \overset{s}{v}_{k;i-0.5} \frac{\overset{s}{v}_{m;i} - \overset{s}{v}_{m;i-1}}{\Delta z_i} \right), \quad k, m = 1, 2, 3, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

На каждом временном слое реализация итерационного процесса осуществляется следующим образом.

В качестве нулевой итерации берём значения с нижнего временного слоя: $u_{k;i}^0 = \check{u}_{k;i}$, $v_{k;i}^0 = \check{v}_{k;i}$. Затем

1) решаем систему уравнений (73)–(75) при $k = 1$ методом прогонки и находим $u_{1;i}^{s+1}$, $\bar{i} = \overline{0, N}$; вычисляем сеточные значения $v_{1;i}^{s+1}$ по формуле (77), учитывая найденные значения $u_{1;i}^{s+1}$, $\bar{i} = \overline{0, N}$;

2) решаем систему уравнений (73)–(75) при $k = 2$ методом прогонки и находим $u_{2;i}^{s+1}$, $\bar{i} = \overline{0, N}$; вычисляем сеточные значения $v_{2;i}^{s+1}$ по формуле (77), учитывая найденные значения $u_{2;i}^{s+1}$, $\bar{i} = \overline{0, N}$;

3) вычисляем сеточные значения $u_{3;i}^{s+1}$, $v_{3;i}^{s+1}$ по формулам (76), (77) соответственно.

Итерационный процесс продолжается рекуррентно для $s = 1, 2, \dots$ и прекращается при выполнении заданного критерия сходимости. Найденные значения $u_{k;i}^{s+1}$, $v_{k;i}^{s+1}$ принимаются за

решение $u_{k;i}$, $v_{k;i}$ на текущем временном слое $\bar{t}_j$, т.е. $u_{k;i} = u_k(\bar{z}_i, \bar{t}_j) = u_{k;i}^{s+1}$, $v_{k;i} = v_k(\bar{z}_i, \bar{t}_j) = v_{k;i}^{s+1}$. Далее переходим к следующему слою по времени.

В результате получим множество значений $\{u_{k;i}, v_{k;i}\}$ для каждого $\bar{t}_j$, $j = \overline{0, M}$, характеризующее компоненты магнитного поля и намагниченности в узлах сетки.

10. Коэффициент эффективности экранирования. На плоскости Γ_2 имеют место граничные соотношения (37). Приведём их, учитывая равенства (41), к безразмерному виду

$$H_0 u_1(1, \bar{t}) = \frac{1}{Z_0} B_2(\bar{t} - \bar{t}_0), \quad H_0 u_2(1, \bar{t}) = \frac{1}{Z_0} A_2(\bar{t} - \bar{t}_0), \quad \bar{t}_0 = \frac{\Delta}{c\tau},$$

где $\bar{t}_0$ – временной сдвиг.

Вычислим амплитуды поля (26), прошедшего через экран:

$$A_2(\bar{t}) = H_0 Z_0 u_2(1, \bar{t} + \bar{t}_0), \quad B_2(\bar{t}) = H_0 Z_0 u_1(1, \bar{t} + \bar{t}_0). \quad (78)$$

Коэффициент эффективности экранирования определим соотношением

$$\Theta = \frac{\max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_0(0, t)|}{\max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_2(\Delta, t)|}. \quad (79)$$

Вычислим модули электрических полей (21), (26). Учитывая (21), (23), получаем, что

$$|\mathbf{E}_0(0, t)| = |B_0(\bar{t})| = H_0 Z_0 |b(\bar{t})|,$$

а значит,

$$\max_{0 \leq t < \infty} |\mathbf{E}_0(0, t)| = H_0 Z_0.$$

Используя равенства (26), (78), находим

$$|\mathbf{E}_2(\Delta, t)| = \sqrt{A_2^2(\bar{t} - \bar{t}_0) + B_2^2(\bar{t} - \bar{t}_0)} = H_0 Z_0 \sqrt{u_1^2(1, \bar{t}) + u_2^2(1, \bar{t})}.$$

Подставляя найденные значения $\mathbf{E}_0(0, t)$ и $\mathbf{E}_2(\Delta, t)$ в (79), получаем расчётную формулу для коэффициента эффективности экранирования

$$\Theta = \left(\max_{0 \leq \bar{t} < \infty} \sqrt{u_1^2(1, \bar{t}) + u_2^2(1, \bar{t})} \right)^{-1}.$$

11. Вычислительный эксперимент. Для численного эксперимента выберем следующие материальные параметры экрана из пермаллоя и параметры импульсного поля $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, воздействующего на экран:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= 5.51 \cdot 10^2 \text{ м/(А} \cdot \text{с)}, \quad \dot{\sigma} = 1.71 \cdot 10^6 \text{ См/м}, \quad \dot{a} = 1.75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \quad \dot{g} = 3.27 \cdot 10^{-6} \text{ м/А}, \\ \Delta &= 10^{-4} \text{ м}, \quad \tau = \tau_{\text{fr}} = 10^{-3} \text{ с}, \quad H_0 = 10^3 \text{ А/м}, \quad H_{\text{sm}} = 10^2 \text{ А/м}, \\ \mu_0 &= 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}, \quad Z_0 = 377 \text{ Ом}. \end{aligned} \quad (80)$$

В этом случае безразмерные постоянные, входящие в постановку задачи, определяются величинами $G = \tau/(\dot{\sigma}\mu_0\Delta^2) = 4.65 \cdot 10^4$, $K_0 = \dot{\sigma}Z_0\Delta = 6.45 \cdot 10^4$, $F_1 = \dot{\gamma}\tau\dot{a}H_0/\Delta^2 = 9.64 \cdot 10^4$, $F_2 = \dot{\gamma}\tau H_0 = 5.51 \cdot 10^2$, $F_3 = \dot{\gamma}\tau\dot{g}H_0^2 = 1.8$, $H_s = H_{\text{sm}}/H_0 = 10^{-1}$.

На рис. 3–5 представлены результаты моделирования. Рис. 3 отражает результаты моделирования компонент магнитного поля в экране из пермаллоя. На рис. 4 и 5 представлены графики коэффициента эффективности экранирования Θ в зависимости от изменения параметров экрана Δ и $\dot{\sigma}$ при значениях $H_{\text{sm}} = 10^2 \text{ А/м}$ и $H_{\text{sm}} = 10^4 \text{ А/м}$ соответственно. Остальные параметры экрана определены в (80).

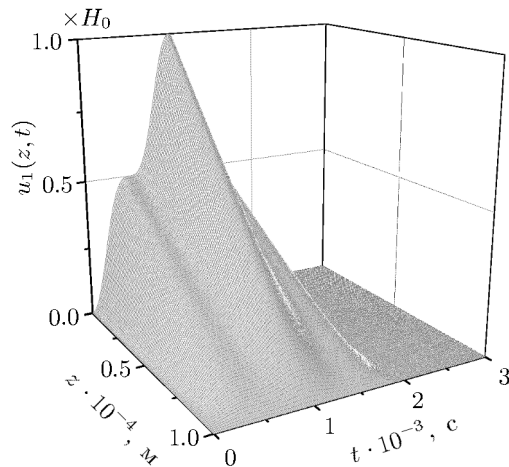


Рис. 3. Структура импульсного магнитного поля в материале экрана из пермаллоя: параметры экрана определены в (80).

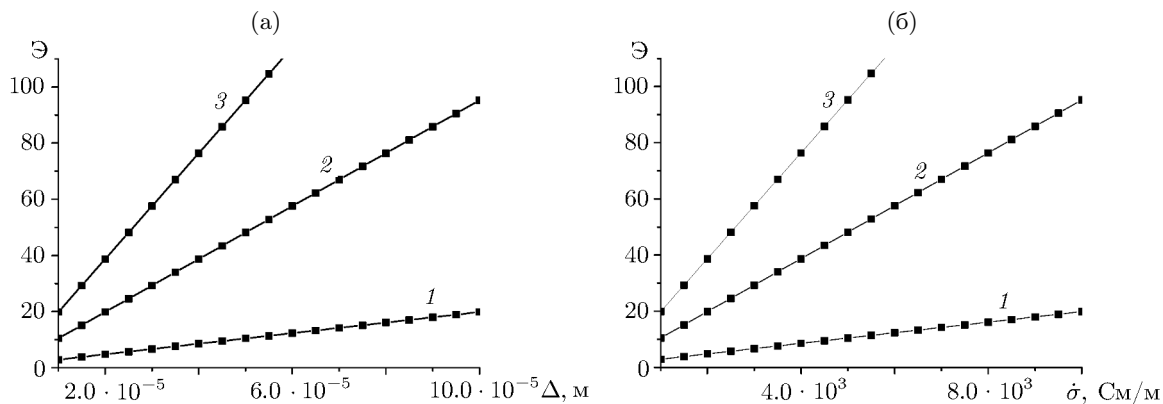


Рис. 4. Зависимость коэффициента эффективности экранирования от изменения параметра Δ при $H_{sm} = 10^2$ А/м – а (1 – $\dot{\sigma} = 10^3$, 2 – $\dot{\sigma} = 5 \cdot 10^3$, 3 – $\dot{\sigma} = 10^4$) и параметра $\dot{\sigma}$ – б (1 – $\Delta = 10^{-5}$, 2 – $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$, 3 – $\Delta = 10^{-4}$).

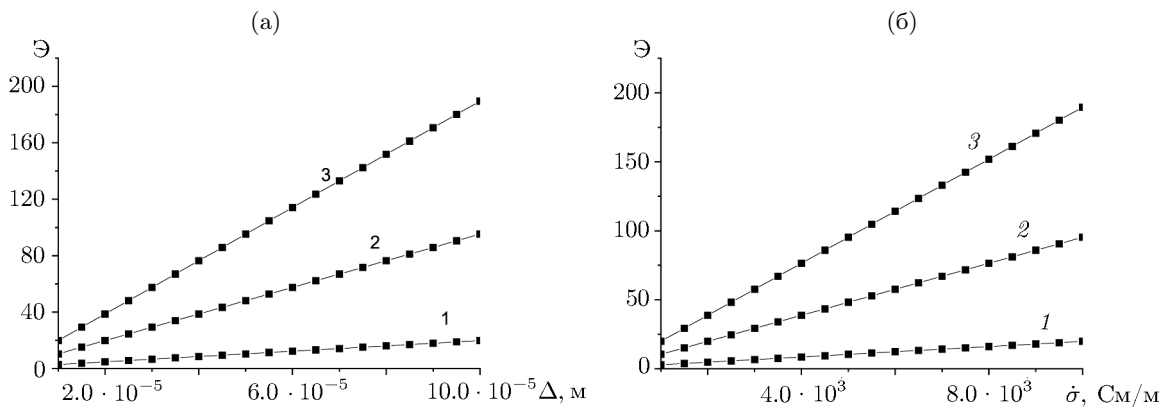


Рис. 5. Зависимость коэффициента эффективности экранирования от изменения параметра Δ при $H_{sm} = 10^4$ А/м – а (1 – $\dot{\sigma} = 10^3$, 2 – $\dot{\sigma} = 5 \cdot 10^3$, 3 – $\dot{\sigma} = 10^4$) и параметра $\dot{\sigma}$ – б (1 – $\Delta = 10^{-5}$, 2 – $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$, 3 – $\Delta = 10^{-4}$).

Заключение. В статье разработан численный метод решения начально-краевой задачи, описывающей проникновение импульсных электромагнитных полей через плоский экран из пермаллоя. Рассмотрен случай, когда на слой из пермаллоя воздействует заданное импульсное электромагнитное поле с потоком энергии, перпендикулярным слою. Дополнительно на экран воздействует постоянное магнитное поле, возбуждающее поле намагничённости. Исходная трёхобластная нелинейная краевая задача преобразована в однообластную краевую задачу для слоя. Построены односторонние граничные условия третьего и первого рода на лицевых поверхностях слоя, эквивалентные граничным условиям сопряжения для трёхобластной задачи. Однообластная краевая задача для нелинейных уравнений Максвелла сформулирована в виде нелинейной начально-краевой задачи с нулевыми начальными условиями для системы параболических дифференциальных уравнений (49)–(53) с шестью неизвестными функциями, зависящими от безразмерных пространственных переменных и безразмерного времени. Разработан численный метод для нахождения компонент магнитного поля и намагничённости внутри экрана из пермаллоя. Для численной оценки экранирующих свойств такого экрана найден коэффициент эффективности экранирования, показывающий во сколько раз ослабевает электромагнитный импульс при прохождении через экран при различных значениях исходных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ринкевич А.Б., Перов Д.В., Васьковский В.О., Лепаловский В.Н. Закономерности проникновения электромагнитных волн через металлические магнитные пленки // Журн. техн. физики. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 96–106.
2. Ерофеев В.Т. Математическая модель экранирования монохроматических электромагнитных полей плоскими экранами из пермаллоя // Информатика. 2019. Т. 16. № 2. С. 40–51.
3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1989.
4. Ерофеев В.Т., Урбанович А.И. Нелинейная модель краевой задачи экранирования импульсных полей плоским экраном из пермаллоя // Тр. XXX междунар. конф. “Радиационная физика твердого тела” / Под ред. Г.Г. Бондаренко. Севастополь, 24–29 августа 2020 г. М., 2020. С. 416–430.
5. Ерофеев В.Т., Громыко Г.Ф., Заяц Г.М. Краевые задачи экранирования магнитных полей многослойными пленочными цилиндрическими экранами с нелинейными свойствами слоёв // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 996–1008.
6. Громыко Г.Ф., Грабчиков С.С., Ерофеев В.Т., Заяц Г.М. Эффективность экранирования постоянных магнитных полей цилиндрическим экраном с учётом нелинейных эффектов // Физич. основы приборостроения. 2015. Т. 4. № 4. С. 30–39.
7. Громыко Г.Ф., Ерофеев В.Т., Заяц Г.М. Численное исследование структуры магнитного поля в цилиндрическом пленочном экране // Информатика. 2016. № 2 (50). С. 5–18.
8. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Аналитическое моделирование в электродинамике. М., 2014.
9. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Белорусский государственный университет, г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию 22.01.2021 г.
После доработки 29.07.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.972.7+517.972.5

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ 2D СИСТЕМ

© 2021 г. Г. А. Курина

Установлены условия разрешимости обратной задачи оптимизации для одного класса дискретных 2D-систем. Получено в явном виде выражение для функционала, для которого данная система из рассматриваемого класса доставляет необходимое условие экстремума. Приведены иллюстрирующие примеры.

DOI: 10.31857/S0374064121120116

Введение. Обратная задача вариационного исчисления состоит в нахождении функционала, для которого данное уравнение представляет собой необходимое условие экстремума этого функционала. Решение различных задач такого типа изложено, например, в [1–3]. Сформулированная задача для системы дискретных уравнений рассматривалась в [4]. Разрешимость обратной задачи для некоторого уравнения позволяет использовать для его решения вариационные методы.

В последние десятилетия активно изучаются дискретные 2D-системы. Так, например, для таких систем в [5] исследовалась линейно-квадратичная задача оптимального управления, а в [6] – стохастическая устойчивость.

В настоящей работе рассматривается дискретная 2D-система вида

$$\begin{aligned} & \varphi_{ij}(z_{(i-1)j}, z_{i(j-1)}, z_{ij}, z_{(i+1)j}, z_{i(j+1)}, z_{(i-1)(j+1)}, z_{(i+1)(j-1)}) \equiv \\ & \equiv A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + B_{ij}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) + \\ & + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}) = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где функции A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} заданы и непрерывно дифференцируемы, а значения

$$z_{i0}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad z_{0j}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad z_{in}, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad z_{mj}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (2)$$

известны.

Системы вида (1) возникают при дискретизации задачи на экстремум двойного интеграла по прямоугольнику такого, что его подынтегральная функция зависит только от переменных интегрирования, искомой функции и её частных производных первого порядка, при этом значения искомой функции на границе области интегрирования заданы.

1. Условия разрешимости обратной задачи оптимизации.

Теорема. *Необходимое условие экстремума для функционала*

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} V_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}), \quad (3)$$

где натуральные числа m и n фиксированы, дважды непрерывно дифференцируемые функции V_{ij} заданы, а значения (2) и z_{00} известны, записывается в виде системы (1) с функциями

$$A_{ij} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_{ij}}, \quad B_{ij} = \frac{\partial V_{(i-1)j}}{\partial z_{ij}}, \quad C_{ij} = \frac{\partial V_{i(j-1)}}{\partial z_{ij}}; \quad (4)$$

при этом выполняются условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{i(j-1)}}{\partial z_{ij}} &= \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{i(j-1)}}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{2, n-1}, \\ \frac{\partial A_{(i-1)j}}{\partial z_{ij}} &= \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)j}}, \quad i = \overline{2, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\partial B_{(i+1)(j-1)}}{\partial z_{ij}} &= \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{(i+1)(j-1)}}, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{2, n-1}.\end{aligned}\quad (5)$$

Обратно, если для системы (1) выполняются условия (5), то эта система доставляет необходимое условие экстремума для функционала вида (3), где в качестве $V_{00}(z_{10}, z_{00}, z_{01})$ может быть взята любая постоянная, а

$$\begin{aligned}V_{i0} &= \int_0^{z_{i1}} C_{i1}(z_{(i+1)0}, z_{i0}, z_{i1}) dz_{i1}, \quad i = \overline{1, m-1}, \\ V_{0j} &= \int_0^{z_{1j}} B_{1j}(z_{1j}, z_{0j}, z_{0(j+1)}) dz_{1j}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ V_{ij} &= \int_0^{z_{ij}} A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) dz_{ij} + \int_0^{z_{(i+1)j}} B_{(i+1)j}(z_{(i+1)j}, 0, 0) dz_{(i+1)j} + \\ &+ \int_0^{z_{i(j+1)}} C_{i(j+1)}(z_{(i+1)j}, 0, z_{i(j+1)}) dz_{i(j+1)}, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{1, n-2}, \\ V_{i(n-1)} &= \int_0^{z_{i(n-1)}} A_{i(n-1)}(z_{(i+1)(n-1)}, z_{i(n-1)}, z_{in}) dz_{i(n-1)} + \\ &+ \int_0^{z_{(i+1)(n-1)}} B_{(i+1)(n-1)}(z_{(i+1)(n-1)}, 0, z_{in}) dz_{(i+1)(n-1)}, \quad i = \overline{1, m-2}, \\ V_{(m-1)j} &= \int_0^{z_{(m-1)j}} A_{(m-1)j}(z_{mj}, z_{(m-1)j}, z_{(m-1)(j+1)}) dz_{(m-1)j} + \\ &+ \int_0^{z_{(m-1)(j+1)}} C_{(m-1)(j+1)}(z_{mj}, 0, z_{(m-1)(j+1)}) dz_{(m-1)(j+1)}, \quad j = \overline{1, n-2}, \\ V_{(m-1)(n-1)} &= \int_0^{z_{(m-1)(n-1)}} A_{(m-1)(n-1)}(z_{m(n-1)}, z_{(m-1)(n-1)}, z_{(m-1)n}) dz_{(m-1)(n-1)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Запишем необходимое условие экстремума для функционала (3), зависящего от переменных z_{ij} :

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Из вида функционала (3) следует равенство

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial(V_{ij} + V_{(i-1)j} + V_{i(j-1)})}{\partial z_{ij}}. \quad (7)$$

Вводя обозначения (4), получаем необходимое условие экстремума функционала (3) в виде системы (1).

Дифференцируя в (4) равенство для $A_{i(j-1)}$ по z_{ij} , а равенство для C_{ij} по $z_{i(j-1)}$, в силу равенства смешанных частных производных второго порядка получаем первое из условий (5). Аналогичным образом устанавливаются второе и третье условия в (5).

Достаточность. Пусть задана система (1), для которой выполняются условия (5). Покажем, что этих условий достаточно для построения функционала вида (3), для которого необходимое условие экстремума представляет собой систему вида (1). Тем самым будет установлена разрешимость обратной задачи оптимизации для такой дискретной 2D-системы (1).

Используя выражения (6), запишем функционал J вида (3) и найдём его частные производные.

Сначала рассмотрим случай $i = \overline{2, m-2}$, $j = 1$. Используя представления (7), (6) и независимость от z_{i1} второго и третьего слагаемых в выражении для V_{i1} , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial z_{i1}} &= \frac{\partial(V_{i1} + V_{(i-1)1} + V_{i0})}{\partial z_{i1}} = A_{i1}(z_{(i+1)1}, z_{i1}, z_{i2}) + \\ &+ \int_0^{z_{(i-1)1}} \frac{\partial}{\partial z_{i1}} A_{(i-1)1}(z_{i1}, z_{(i-1)1}, z_{(i-1)2}) dz_{(i-1)1} + B_{i1}(z_{i1}, 0, 0) + \\ &+ \int_0^{z_{(i-1)2}} \frac{\partial}{\partial z_{i1}} C_{(i-1)2}(z_{i1}, 0, z_{(i-1)2}) dz_{(i-1)2} + C_{i1}(z_{(i+1)0}, z_{i0}, z_{i1}). \end{aligned}$$

Для производных воспользуемся следующими равенствами из (5):

$$\frac{\partial A_{(i-1)1}}{\partial z_{i1}} = \frac{\partial B_{i1}}{\partial z_{(i-1)1}}, \quad \frac{\partial C_{(i-1)2}}{\partial z_{i1}} = \frac{\partial B_{i1}}{\partial z_{(i-1)2}}.$$

Применяя затем формулу Ньютона–Лейбница, находим, что

$$\frac{\partial J}{\partial z_{i1}} = A_{i1}(z_{(i+1)1}, z_{i1}, z_{i2}) + B_{i1}(z_{i1}, z_{(i-1)1}, z_{(i-1)2}) + C_{i1}(z_{(i+1)0}, z_{i0}, z_{i1}).$$

Пусть теперь $i = \overline{2, m-2}$, $j = \overline{2, n-2}$. Учитывая представления (7), (6) и независимость от z_{ij} второго и третьего слагаемых в выражении для V_{ij} , а также второго слагаемого в выражении для $V_{i(j-1)}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} &= A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + \int_0^{z_{(i-1)j}} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} A_{(i-1)j}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) dz_{(i-1)j} + B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) + \\ &+ \int_0^{z_{(i-1)(j+1)}} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} C_{(i-1)(j+1)}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)}) dz_{(i-1)(j+1)} + \\ &+ \int_0^{z_{i(j-1)}} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} A_{i(j-1)}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}) dz_{i(j-1)} + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}). \end{aligned}$$

Для производных по z_{ij} функций $A_{(i-1)j}$, $C_{(i-1)(j+1)}$, $A_{i(j-1)}$ используем равенства из (5):

$$\frac{\partial A_{(i-1)j}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)j}}, \quad \frac{\partial C_{(i-1)(j+1)}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)(j+1)}}, \quad \frac{\partial A_{i(j-1)}}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{i(j-1)}}.$$

Применяя затем формулу Ньютона–Лейбница, получаем последовательно равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} &= A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + \int_0^{z_{(i-1)j}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)j}}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) dz_{(i-1)j} + B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) + \\ &\quad + \int_0^{z_{(i-1)(j+1)}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial z_{(i-1)(j+1)}}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)}) dz_{(i-1)(j+1)} + \\ &\quad + \int_0^{z_{i(j-1)}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_{i(j-1)}}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}) dz_{i(j-1)} + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}) = \\ &= A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + B_{ij}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) - B_{ij}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)}) + \\ &\quad + B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) + B_{ij}(z_{ij}, 0, z_{(i-1)(j+1)}) - B_{ij}(z_{ij}, 0, 0) + \\ &\quad + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}) - C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}) + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, 0, z_{ij}) = \\ &= A_{ij}(z_{(i+1)j}, z_{ij}, z_{i(j+1)}) + B_{ij}(z_{ij}, z_{(i-1)j}, z_{(i-1)(j+1)}) + C_{ij}(z_{(i+1)(j-1)}, z_{i(j-1)}, z_{ij}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом устанавливаются равенства

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = \varphi_{ij}(z_{(i-1)j}, z_{i(j-1)}, z_{ij}, z_{(i+1)j}, z_{i(j+1)}, z_{(i-1)(j+1)}, z_{(i+1)(j-1)})$$

для остальных значений i и j .

Следовательно, функционал (3) с функциями V_{ij} , определяемыми формулами (6), является решением обратной задачи оптимизации для системы (1). Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} z_{10}^2 z_{20} \exp(z_{10}^2 z_{20} z_{11}) + 4z_{11} z_{21} z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) &= 0, \\ 2z_{11}^2 z_{21} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) + 6z_{12} z_{22} z_{13} \exp(z_{12}^2 z_{22} z_{13}) &= 0, \\ 2z_{11}^2 z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) + 4z_{20}^2 z_{30} \exp(4z_{20}^2 z_{30} z_{21}) + 16z_{21} z_{31} z_{22} \exp(4z_{21}^2 z_{31} z_{22}) &= 0, \\ 3z_{12}^2 z_{13} \exp(z_{12}^2 z_{22} z_{13}) + 8z_{21}^2 z_{31} \exp(4z_{21}^2 z_{31} z_{22}) + 24z_{22} z_{32} z_{23} \exp(4z_{22}^2 z_{32} z_{23}) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где z_{i0} , $i = 1, 2, 3$, z_{i3} , $i = 1, 2$, z_{3j} , $j = 1, 2$, известны.

Несложно проверить, что последняя система имеет вид (1) при $m = n = 3$ и выполняются условия (5). Действительно, из каждого уравнения этой системы имеем последовательно

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4z_{11} z_{21} z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}), \quad C_{12} = 2z_{11}^2 z_{21} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}), \\ A_{21} &= 16z_{21} z_{31} z_{22} \exp(4z_{21}^2 z_{31} z_{22}), \quad C_{22} = 8z_{21}^2 z_{31} \exp(4z_{21}^2 z_{31} z_{22}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что первое условие из (5) выполняется. Аналогичным образом из вида функций A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} следует выполнение второго и третьего условий в (5). Поэтому в силу доказанной теоремы система (8) доставляет необходимое условие экстремума для функционала вида (3).

Используя формулы (6), запишем явное выражение для этого функционала. В частности, поскольку

$$B_{21} = 2z_{11}^2 z_{12} \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}),$$

то, учитывая выражения для A_{11} и C_{12} , в силу третьей формулы в (6) получаем

$$V_{11} = 2 \exp(z_{11}^2 z_{21} z_{12}) - 2.$$

Таким же способом находим остальные слагаемые в выражении (3). Постоянные слагаемые в J не влияют на условия экстремума, поэтому их можно отбросить. В итоге имеем

$$J = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 (j+1) \exp(i^2 z_{ij}^2 z_{(i+1)j} z_{i(j+1)}).$$

Слагаемое при $i = j = 0$, вообще говоря, можно опустить, поскольку оно известно.

2. Интегрирующий множитель. Если в системе (8) разделим второе уравнение на 2, то получим другую запись этого уравнения. Изменённую таким образом в (8) функцию C_{12} обозначим через $\tilde{C}_{12}$. Так как

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial z_{12}} \neq \frac{\partial \tilde{C}_{12}}{\partial z_{11}},$$

то для полученной системы не выполняются условия (5), а значит, обратная задача оптимизации для неё не разрешима.

Обратно, если в качестве исходной 2D-системы взять преобразованную указанным образом систему (8), то для неё, как сказано, обратная задача оптимизации не разрешима, но умножив второе уравнение этой системы на 2, получим систему (8), для которой обратная задача оптимизации уже будет разрешимой.

Ненулевые функции такие, что после умножения на них уравнений системы, для которой обратная задача вариационного исчисления не разрешима, она становится системой, для которой обратная задача вариационного исчисления разрешима, назовём *интегрирующими множителями*. Такое название используется в [2, с. 57] применительно к функции, обеспечивающей существование вариационного интеграла при умножении исследуемого выражения на эту функцию. Как видим из приведённого примера, это понятие оказывается содержательным и для дискретных 2D-систем.

3. Дискретизация. Отметим, что функционал вида (3) возникает при дискретизации двойного интеграла по прямоугольнику с подынтегральной функцией, зависящей от частных производных первого порядка.

Вариационная задача на экстремум функционала

$$J(z(x, y)) = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy$$

с заданными значениями функции $z(x, y)$ на границе области D рассматривалась в [7, с. 312–317]. В качестве примера в [7] изучается вариационная задача на экстремум для интеграла

$$J(z(x, y)) = \iint_D \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (9)$$

Применяя необходимое условие экстремума из [7, с. 314], получаем уравнение

$$-2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (10)$$

т.е. решение рассматриваемой вариационной задачи должно являться решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Пример 2. Пусть областью D является прямоугольник, одна сторона которого лежит на оси OX , а другая – на оси OY . Разобьём горизонтальную сторону на m равных частей длины

h_x , а вертикальную сторону на n равных частей длины h_y . Проведя через точки деления прямые, параллельные сторонам прямоугольника, получим его разбиение на равные между собой прямоугольники с площадью $h_x h_y$. Для интеграла (9) запишем интегральную сумму, отвечающую взятому разбиению прямоугольника на части, взяв промежуточные значения подынтегральной функции в левом нижнем углу соответствующего меньшего прямоугольника. Все слагаемые в интегральной сумме будут содержать общий множитель $h_x h_y$, который не оказывает влияния на процедуру отыскания экстремума, поэтому опустим его.

Частные производные $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ в подынтегральной функции в точке (i, j) заменим соответственно разностными отношениями

$$\frac{z_{(i+1)j} - z_{ij}}{h_x}, \quad \frac{z_{i(j+1)} - z_{ij}}{h_y}.$$

В результате получим функционал вида (3):

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\frac{z_{(i+1)j} - z_{ij}}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{z_{i(j+1)} - z_{ij}}{h_y} \right)^2 \right), \quad (11)$$

где z_{i0} , $i = \overline{0, m-1}$, z_{0j} , $j = \overline{1, n-1}$, z_{in} , $i = \overline{0, m-1}$, z_{mj} , $j = \overline{0, n-1}$, известны, поскольку функция $z(x, y)$ задана на границе области интегрирования.

Учитывая равенство (7), запишем необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial J}{\partial z_{ij}} = -2 \left(\frac{z_{(i+1)j} - 2z_{ij} + z_{(i-1)j}}{h_x^2} + \frac{z_{i(j+1)} - 2z_{ij} + z_{i(j-1)}}{h_y^2} \right) = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (12)$$

Если использовать для дискретизации частных производных второго порядка $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial y^2$ соответственно выражения

$$\frac{z_{(i+1)j} - 2z_{ij} + z_{(i-1)j}}{h_x^2}, \quad \frac{z_{i(j+1)} - 2z_{ij} + z_{i(j-1)}}{h_y^2},$$

то нетрудно видеть, что система (12) является дискретизацией уравнения (10).

Теперь для системы (12) рассмотрим обратную задачу оптимизации. Так как эта система представляет собой необходимое условие экстремума функционала (11), то обратная задача оптимизации для системы (12) разрешима.

Как показано в [4], в общем случае нет связи между разрешимостью обратной задачи вариационного исчисления и разрешимостью обратной задачи оптимизации для соответствующего дискретного по времени аналога.

Решим обратную задачу с помощью доказанной теоремы. Чтобы воспользоваться этой теоремой, нужно записать систему (12) в виде (1). Это можно сделать разными способами. Будем выбирать функции A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} таким образом, чтобы выполнялись условия (5) разрешимости обратной задачи оптимизации. Нетрудно проверить, что для этого достаточно взять

$$A_{ij} = -2 \left(\frac{z_{(i+1)j} - z_{ij}}{h_x^2} + \frac{z_{i(j+1)} - z_{ij}}{h_y^2} \right), \quad B_{ij} = -2 \frac{z_{(i-1)j} - z_{ij}}{h_x^2}, \quad C_{ij} = -2 \frac{z_{i(j-1)} - z_{ij}}{h_y^2}.$$

Используя представления (6), найдём явный вид функционала (3) для этого примера.

При $i = \overline{1, m-2}$, $j = \overline{1, n-2}$ имеем

$$\begin{aligned} V_{ij} = & -2 \int_0^{z_{ij}} \left(\frac{z_{(i+1)j} - z_{ij}}{h_x^2} + \frac{z_{i(j+1)} - z_{ij}}{h_y^2} \right) dz_{ij} - \\ & - 2 \int_0^{z_{(i+1)j}} \left(-\frac{z_{(i+1)j}}{h_x^2} \right) dz_{(i+1)j} - 2 \int_0^{z_{i(j+1)}} \left(-\frac{z_{i(j+1)}}{h_y^2} \right) dz_{i(j+1)} = \left(\frac{z_{(i+1)j} - z_{ij}}{h_x} \right)^2 + \left(\frac{z_{i(j+1)} - z_{ij}}{h_y} \right)^2, \end{aligned}$$

что совпадает с соответствующим слагаемым в (11).

Подобным образом находятся остальные слагаемые (11), причём они восстанавливаются с учётом заданных условий с точностью до известных слагаемых, что не влияет на необходимое условие экстремума.

Например, при $j = \overline{1, n-1}$ получаем

$$V_{0j} = -2 \int_0^{z_{1j}} \frac{z_{0j} - z_{1j}}{h_x^2} dz_{1j} = \frac{z_{1j}^2 - 2z_{0j}z_{1j}}{h_x^2}.$$

Прибавив к этому выражению известную величину

$$\frac{z_{0j}^2}{h_x^2} + \left(\frac{z_{0(j+1)} - z_{0j}}{h_y} \right)^2,$$

найдем соответствующее слагаемое в (11).

Автор выражает глубокую благодарность В.Г. Задорожному за полезное обсуждение результатов статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. Новые достижения. 1992. Т. 40. С. 3–176.
2. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. М.; Ижевск, 2006.
3. Kurina G. On some inverse problems of the calculus of variations for second order differential equations with deviating arguments and partial derivatives // New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations. Springer INdAM Series. V. 10. Cham, 2014. P. 253–270.
4. Kurina G., Zadorozhniy V. Inverse problems of the calculus of variations for discrete-time systems // Pure and Appl. Func. Anal. 2016. V. 1. № 4. P. 573–582.
5. Гайшун И.В., Дымков М.П. Линейно-квадратичная задача оптимизации композитных дискретных 2-D систем управления // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 71–83.
6. Пакилин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А., Галковский К., Роджерс Э. Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D-систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 113–129.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1965.

Воронежский государственный университет,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 03.06.2021 г.
После доработки 03.06.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 519.63+519.651:517.956.4

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АГРЕГАТА

© 2021 г. А. Б. Утесов, А. А. Базарханова

В рамках общей постановки задачи восстановления оператора решена задача дискретизации решений уравнения теплопроводности с начальным условием f из периодического анизотропного класса Соболева вычислительными агрегатами, построенными по тригонометрическим коэффициентам Фурье $\hat{f}(m)$, в метрике пространства $L^{\infty,q}$, $q \geq 2$. Найдена также погрешность $\bar{\varepsilon}_N$ вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье начального условия f , соответствующих оптимальному вычислительному агрегату, и доказана неулучшаемость порядка погрешности $\bar{\varepsilon}_N$.

DOI: 10.31857/S0374064121120128

1. Постановка задачи. Впервые задача дискретизации рассматривалась Н.М. Коробовым для уравнения Пуассона [1, с. 185–190]. Затем в работах [2, 3] С.А. Смоляком был предложен оригинальный метод – метод тензорных произведений классов, позволяющий строить оптимальные вычислительные агрегаты в задачах восстановления интеграла, функций и решений уравнения в частных производных. Впоследствии метод Смоляка и его различные применения стали предметом изучения многих математиков (см., например, [4], а также [5] и имеющуюся в ней библиографию). Задачами дискретизации занимались и китайские математики: в монографии [6] Хуа Ло Кен и Вань Юань рассмотрели, в частности, уравнение теплопроводности с начальным условием из класса Коробова. Н. Темиргалиевым и его учениками, кроме уравнений из работ [1, 6], рассматривались и другие классические уравнения математической физики и в рамках общей постановки задачи восстановления оператора были установлены точные или близкие к точным порядки погрешности оптимальной дискретизации, а также найдены предельные погрешности оптимальных вычислительных агрегатов (см., например, [7] и имеющуюся в ней библиографию).

Приведём общую постановку задачи восстановления оператора в редакции работы [8]. Пусть F – какой-либо класс числовых функций, заданных на множестве Ω_F , а Y – некоторое нормированное пространство числовых функций, заданных на множестве Ω_Y , норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_Y$. Для каждого целого $N \geq 1$ через $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$, где $l^{(N)} = (l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)})$ – набор функционалов $l_N^{(1)} : F \rightarrow \mathbb{C}, \dots, l_N^{(N)} : F \rightarrow \mathbb{C}$, а φ_N – функция $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; y) : \mathbb{C}^N \times \Omega_Y \rightarrow \mathbb{C}$, которая при всяком фиксированном $(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ как функция от переменной y принадлежит пространству Y . Далее при каждой фиксированной $f \in F$ функцию $\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); y)$ от переменной y , определяемую парой $(l^{(N)}, \varphi_N)$, будем называть *вычислительным агрегатом*.

Всюду ниже для любого числа A и положительного числа B запись $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B$ будет озна-

чать существование постоянной $C(\alpha, \beta, \dots) > 0$, зависящей лишь от указанных под знаком $\ll$ параметров, такой, что $|A| \leq C(\alpha, \beta, \dots)B$. Отсутствие под знаком $\ll$ параметров означает, что постоянная может быть выбрана одной и той же для всех рассматриваемых параметров. Для положительных чисел A и B одновременное выполнение соотношений $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B$ и

$B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$ записывается в виде $A \asymp_{\alpha, \beta, \dots} B$.

Пусть заданы класс F , пространство Y и оператор $T : F \rightarrow Y$. Тогда для множества $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ положим

$$\delta_N(D_N; T; F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); T; F)_Y, \quad (1)$$

где

$$\delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); T; F)_Y = \sup_{f \in F} \|(Tf)(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); \cdot)\|_Y.$$

Задача восстановления оператора Tf вычислительными агрегатами

$$(l^{(N)}, \varphi_N) \equiv \varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); \cdot)$$

в метрике пространства Y заключается в установлении точного порядка величины (1) (т.е. в нахождении последовательности $\{\psi_N\}_{N \geq 1}$ положительных чисел, удовлетворяющей соотношению $\delta_N(D_N; T; F)_Y \succ \prec \psi_N$) и в указании такого вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) \equiv \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$, для которого $\delta_N((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); T; F)_Y \succ \prec \psi_N$ (в этом случае вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ называется *оптимальным*).

Пусть $u(t, x; f)$ – решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad x = (x_1, \dots, x_s)^T \in \mathbb{R}^s,$$

с 1-периодическим начальным условием $u(0, x; f) = f(x)$, разлагающимся в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд Фурье $\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \exp(2\pi i(m, x))$, где

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) \exp(-2\pi i(m, x)) dx.$$

Тогда имеет место следующее равенство (см., например, [9, лемма В]):

$$u(t, x; f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \exp(-4\pi^2(m, m)t) \exp(2\pi i(m, x)). \quad (2)$$

Поэтому возникает задача дискретизации решений $u(t, x; f)$ вычислительными агрегатами, построенными по тригонометрическим коэффициентам Фурье $\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)})$ объёма N , где $m^{(1)} \in \mathbb{Z}^s, \dots, m^{(N)} \in \mathbb{Z}^s$. Задача дискретизации бесконечного объекта (в нашем случае решения дифференциального уравнения или ряда) состоит в его приближении простым (в некотором смысле) конечным объектом и в указании точности предложенного приближения.

В данной работе эта задача изучается в рамках сформулированной выше задачи восстановления оператора при (необходимые определения даны ниже в п. 2)

$$(Tf)(\cdot) = u(\cdot; f), \quad F = W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s, \quad Y = L^{\infty, q} \equiv L^{\infty, q}([0, +\infty) \times [0, 1]^s),$$

$$D_N = \Phi_N \equiv \{(l^{(N)}, \varphi_N) : l_N^{(1)}(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N^{(N)}(f) = \hat{f}(m^{(N)})\}.$$

Задачи дискретизации решений $u(t, x; f)$ в других конкретизациях F , Y и D_N изучены в работах [9–11]. В них в качестве классов F , содержащих начальные условия, рассматривались периодические изотропные классы Никольского–Бесова, Коробова и Соболева. В [12] в задачах дискретизации решений уравнений в частных производных впервые был

рассмотрен анизотропный класс Соболева $W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s$ и найден точный порядок погрешности дискретизации при $Y = L^{\infty, 2}$ и $D_N = P_N \equiv \{(l^{(N)}, \varphi_N) : l_N^{(\tau)}(f) = f(\xi_N^{(\tau)}), \tau = \overline{1, N}\}$, где $\xi_N^{(1)} \in [0, 1]^s, \dots, \xi_N^{(N)} \in [0, 1]^s$. Рассмотрение анизотропного класса Соболева $W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s$ обусловлено тем, что в случае изотропного класса Соболева $W_2^r[0, 1]^s$ точный порядок $\delta_N(\Phi_N; (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f); W_2^r[0, 1]^s)_{L^{\infty, 2}} \asymp N^{-r/s}$ ухудшается с увеличением размерности s , а в случае анизотропного класса Соболева $W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s$ точный порядок $\delta_N(\Phi_N; (Tf)(\cdot) = u(\cdot; f); W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s)_{L^{\infty, 2}} \asymp N^{-(1/r_1 + \dots + 1/r_s)^{-1}}$ не зависит от s . Подчеркнём, что в работе [12] задача нахождения предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата не изучалась (эта задача пока остаётся нерешённой).

В настоящей работе при $Y = L^{\infty, q}, 2 \leq q \leq \infty$ и $D_N = \Phi_N$ установлен точный порядок погрешности дискретизации решений $u(t, x; f)$ и найдена предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\hat{f}(\overline{m}^{(1)}), \dots, \hat{f}(\overline{m}^{(N)}); t, x)$.

2. Необходимые определения и полученные результаты. Сначала условимся об используемых обозначениях и приведём определения класса $W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s$ и пространства $L^{\infty, q}([0; +\infty) \times [0, 1]^s)$. Для конечного множества E через $|E|$ обозначаем количество его элементов. Как обычно, $[a]$ – целая часть числа a . Всюду $m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$. Для упрощения записи вместо $\|f\|_{L^{\infty, q}}, \gg_{s, q, r_1, \dots, r_s}$ и $\ll_{s, q, r_1, \dots, r_s}$ будем писать $\|f\|_q, \gg_{s, q, r}$ и $\ll_{s, q, r}$ соответственно.

Пусть $s = 2, 3, \dots$ и $r = (r_1, \dots, r_s)$ – вектор с положительными компонентами. Анизотропный класс Соболева $W_2^{r_1, \dots, r_s} \equiv W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s$ по определению состоит из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}^s$, которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)|^2 (\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}) \leq 1,$$

где $\tilde{m}_i = \max\{1, |m_i|\}$ для каждого $i = \overline{1, s}$.

Нормированное пространство $L^{\infty, q} \equiv L^{\infty, q}([0; +\infty) \times [0, 1]^s)$, $1 \leq q \leq \infty$, определяется как линейное пространство всех функций $g : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ функция $g_t(x) = g(t, x)$ как функция аргумента $x \in \mathbb{R}^s$ является измеримой, 1-периодической по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{\infty, q}} \equiv \sup_{t \geq 0} \text{vrai} \|g(t, \cdot)\|_q < +\infty \quad (L^{\infty}[0, 1]^s \equiv C[0, 1]^s).$$

Приведём определение предельной погрешности (см., например, [7, с. 10]). Предельной погрешностью оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$, $N \in \mathbb{N}$, называется последовательность $\{\bar{\varepsilon}_N\}$ положительных чисел такая, что:

во-первых, для всех N имеет место соотношение

$$\Delta_N(\bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); T; F)_Y \asymp \delta_N(D_N; T; F)_Y; \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} & \Delta_N(\bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); T; F)_Y = \\ & = \sup_{f \in F} \sup_{z_1, \dots, z_N} \{ \|(Tf)(\cdot) - \overline{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_Y : |z_i - \bar{l}_N^{(i)}(f)| < \bar{\varepsilon}_N, i = \overline{1, N} \} = \\ & = \sup_{f \in F} \sup_{|\gamma_N^{(1)}| \leq 1, \dots, |\gamma_N^{(N)}| \leq 1} \| (Tf)(\cdot) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \bar{\varepsilon}_N, \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \bar{\varepsilon}_N; \cdot) \|_Y; \end{aligned}$$

во-вторых, справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); T; F)_Y}{\delta_N(D_N; T; F)_Y} = +\infty \quad (4)$$

для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N \geq 1}$ положительных чисел.

Соотношение (3) означает, что при вычислении значений оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\overline{l}_N^{(1)}(f), \dots, \overline{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$ функционал $\overline{l}_N^{(\tau)}(f)$, $\tau = \overline{1}, \overline{N}$, можно заменить неточными значениями z_τ такими, что $|z_\tau - \overline{l}_N^{(\tau)}(f)| < \overline{\varepsilon}_N$ ($\tau = \overline{1}, \overline{N}$), сохраняя при этом точный порядок погрешности оптимального восстановления. Выполнение же равенства (4) означает неуплощение порядка погрешности $\overline{\varepsilon}_N$, так как сколь угодно медленное возрастание к бесконечности величины $\overline{\varepsilon}_N$ нарушает точный порядок погрешности восстановления.

Далее для упрощения записи положим $(Tf)(\cdot) = u(\cdot; f)$ и

$$\begin{aligned} \delta_N(\Phi_N; (Tf)(\cdot); W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s)_{L^{\infty, q}} &\equiv \delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}}, \\ \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); (Tf)(\cdot); W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s)_{L^{\infty, q}} &\equiv \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N))_{L^{\infty, q}}, \\ \Delta_N(\overline{\varepsilon}_N; (\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N); (Tf)(\cdot); W_2^{r_1, \dots, r_s}[0, 1]^s)_{L^{\infty, q}} &\equiv \Delta_N(\overline{\varepsilon}_N; (\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}}. \end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть даны числа s ($s = 2, 3, \dots$), $r_1 > 0, \dots, r_s > 0$, $q \in [2, \infty]$, а числа λ и N_i для каждого $i = \overline{1}, s$ определены равенствами $\lambda \equiv \lambda(r_1, \dots, r_s) = (1/r_1 + \dots + 1/r_s)^{-1} > 1/2$ и $N_i \equiv N_i(K) = [K^{\lambda/r_i}]$, $K \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^s (2N_i + 1)$ имеют место соотношения

$$\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}} \succ_{s, r, q} \delta_N((\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}} \succ_{s, r, q} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}, \quad (5)$$

здесь пара $(\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ состоит из функционалов $\overline{l}_N^{(1)}(f) = f(\overline{m}^{(1)})$, $\dots$, $\overline{l}_N^{(N)}(f) = f(\overline{m}^{(N)})$ и функции $\overline{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; t; x) = \sum_{\tau=1}^N z_\tau \exp(2\pi i(\overline{m}^{(\tau)}, x))$, а s -мерные целочисленные векторы $\overline{m}^{(1)}, \dots, \overline{m}^{(N)}$ такие, что $\overline{m}^{(i)} \neq \overline{m}^{(j)}$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{\tau=1}^N \{\overline{m}^{(\tau)}\} = A_K$, где $A_K = \{m \in \mathbb{Z}^s : |m_1| \leq N_1, \dots, |m_s| \leq N_s\}$.

Теорема 2. Для оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\overline{l}_N^{(1)}(f), \dots, \overline{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$ величина $\overline{\varepsilon}_N = N^{-\lambda-1/2}$ является предельной погрешностью, т.е. имеет место соотношение

$$\Delta_N(\overline{\varepsilon}_N; (\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}} \succ_{s, r, q} \delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}} \quad (6)$$

и для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_K\}_{K \geq 1}$ положительных чисел справедливо равенство

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_N(\eta_N \overline{\varepsilon}_N; (\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}}}{\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}}} = +\infty. \quad (7)$$

Тем самым, нами получены следующие результаты:

(i) найден точный порядок погрешности оптимальной дискретизации решений $u(t, x; f)$ уравнения теплопроводности с начальным условием из анизотропного класса Соболева вычислительными агрегатами $\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); t, x)$ в метрике пространства $L^{\infty, q}$, $2 \leq q \leq \infty$;

(ii) доказано, что функция

$$\overline{\varphi}_N(\overline{l}_N^{(1)}(f), \dots, \overline{l}_N^{(N)}(f); t, x) = \sum_{\tau=1}^N \hat{f}(\overline{m}^{(\tau)}) \exp(-4\pi^2(\overline{m}^{(\tau)}, \overline{m}^{(\tau)})t) \exp(2\pi i(\overline{m}^{(\tau)}, x)) \quad (8)$$

является оптимальным вычислительным агрегатом;

(iii) выяснено, что при построении оптимального вычислительного агрегата (8) тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})$, $\tau = \overline{1}, \overline{N}$, можно заменить неточными значениями

z_τ такими, что $|z_\tau - \hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})| \leq \bar{\varepsilon}_N$, $\tau = \overline{1, N}$, сохраняя при этом точный порядок погрешности оптимальной дискретизации;

(iv) установлена неухудшаемость порядка погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ вычисления коэффициентов Фурье $\hat{f}(\overline{m}^{(\tau)})$, $\tau = \overline{1, N}$.

3. Доказательство теоремы 1. Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1 ([13]). Пусть дан вектор $(r_1, \dots, r_s)$ с положительными компонентами такой, что $\lambda = (1/r_1 + \dots + 1/r_s)^{-1} > 1/2$. Тогда тригонометрический ряд Фурье каждой функции $f \in W_2^{r_1, \dots, r_s}$ сходится абсолютно (и равномерно при любом методе суммирования).

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда сходится кратный интеграл

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} \dots \int_1^{+\infty}}_s \frac{dx_1 \dots dx_s}{x_1^{2r_1} + \dots + x_s^{2r_s}}. \quad (9)$$

Доказательство. Сходимость интеграла (9) в случае $s \geq 4$ устанавливается аналогично случаям $s = 2$ и $s = 3$, рассмотренным в [14, с. 104–109]. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы 1. Сначала оценим величину $\delta_N((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}}$ сверху. Так как

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, x) &= \sum_{\tau=1}^N \hat{f}(\overline{m}^{(\tau)}) \exp(-4\pi^2(\overline{m}^{(\tau)}, \overline{m}^{(\tau)})t) \exp(2\pi i(\overline{m}^{(\tau)}, x)) = \\ &= \sum_{m \in A_K} \hat{f}(m) \exp(-4\pi^2(m, m)t) \exp(2\pi i(m, x)), \end{aligned}$$

то, согласно равенству (2) и лемме 1, получаем

$$u(t, x; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus A_K} \hat{f}(m) \exp(-4\pi^2(m, m)t) \exp(2\pi i(m, x)).$$

Следовательно, в случае $q = 2$ при каждом фиксированном $t \in [0, \infty)$ в силу равенства Парсеваля и определения пространства $L^{\infty, 2}$ приходим к оценке сверху

$$\|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_2 \leq \frac{1}{N^\lambda}. \quad (10)$$

Далее, рассмотрим случай $q = \infty$. Очевидно, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_\infty \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus A_K} |\hat{f}(m)|,$$

откуда, используя неравенства Гёльдера и учитывая определение пространства $L^{\infty, \infty}$, имеем

$$\|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_\infty \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus A_K} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Теперь каждому $l \in \mathbb{Z} \cap [1, s-1]$ поставим в соответствие множество T_l , образованное всеми векторами $(a_1, a_2, \dots, a_l)$ такими, что $a_i \in \mathbb{Z} \cap [1, s]$ для каждого $i = \overline{1, l}$. Далее в случае $l \neq 1$ по каждому элементу $(a_1, a_2, \dots, a_l) \in T_l$, удовлетворяющему неравенству $a_1 < a_2 < \dots < a_l$, определим множество $A^{(a_1, a_2, \dots, a_l)}$, состоящее из векторов $(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$

таких, что $|m_i| > N_i$, если $i \in \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, и $|m_i| \leq N_i$, если $i \in (\mathbb{Z} \cap [1, s]) \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$. Очевидно, что $\mathbb{Z}^s \setminus A_K = (\bigcup_{l=1}^{s-1} B_l) \cup A^*$, где

$$B_l = \bigcup_{(a_1, \dots, a_l) \in T_l} A^{(a_1, \dots, a_l)}, \quad A^* = \{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : |m_1| > N_1, \dots, |m_s| > N_s\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s / A_K} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} \leq \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{m \in B_l} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} + \sum_{m \in A^*} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}}. \quad (12)$$

Рассмотрим кратный интеграл

$$\int_{N_1}^{+\infty} \dots \int_{N_s}^{+\infty} \frac{dx_1 \dots dx_s}{x_1^{2r_1} + \dots + x_s^{2r_s}}.$$

Проведя в этом интеграле замену переменных $x_i = N_i u_i$, $i = \overline{1, s}$, получим

$$\int_{N_1}^{+\infty} \dots \int_{N_s}^{+\infty} \frac{dx_1 \dots dx_s}{x_1^{2r_1} + \dots + x_s^{2r_s}} \leq \frac{N_1 \dots N_s}{N^{2\lambda}} \int_1^{+\infty} \dots \int_1^{+\infty} \frac{du_1 \dots du_s}{u_1^{2r_1} + \dots + u_s^{2r_s}} \ll_{s,r} \frac{N}{N^{2\lambda}}, \quad (13)$$

поскольку $\prod_{i=1}^s N_i \asymp_s N$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \dots \int_1^{+\infty} (u_1^{2r_1} + \dots + u_s^{2r_s})^{-1} du_1 \dots du_s$, согласно лемме 2, сходится при $\lambda > 1/2$.

Так как

$$\sum_{m \in A^*} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} \ll_{s,r} \int_{N_1}^{+\infty} \dots \int_{N_s}^{+\infty} \frac{dx_1 \dots dx_s}{x_1^{2r_1} + \dots + x_s^{2r_s}},$$

то в силу оценки (13) имеем

$$\sum_{m \in A^*} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} \ll_{s,r} \frac{N}{N^{2\lambda}}. \quad (14)$$

Пусть U – декартово произведение множеств $[0, N_i]$, $i \in (\mathbb{Z} \cap [1, s]) \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, а V – множеств $[N_i, +\infty)$, $i \in \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ (здесь, как и выше, при $l \neq 1$ предполагается выполнение неравенств $a_1 < a_2 < \dots < a_l$). Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_m \left\{ \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} : m \in A^{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \right\} \ll_{s,r} \int_U \int_V \frac{dx_1 \dots dx_s}{x_1^{2r_1} + \dots + x_s^{2r_s}} \ll_{s,r} \\ & \ll_{s,r} \left(\prod_{i \in (\mathbb{Z} \cap [1, s]) \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_l\}} N_i \right) \int_{N_{a_1}}^{+\infty} \dots \int_{N_{a_l}}^{+\infty} \frac{dx_{a_1} \dots dx_{a_l}}{(x_{a_1})^{2r_{a_1}} + \dots + (x_{a_l})^{2r_{a_l}}} \ll_{s,r} \\ & \quad (\text{замена переменных } x_{a_1} = N_{a_1} u_1, \dots, x_{a_l} = N_{a_l} u_l) \\ & \ll_{s,r} \frac{1}{N^{2\lambda}} \left(\prod_{i \in (\mathbb{Z} \cap [1, s]) \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_l\}} N_i \right) \underbrace{\left(\prod_{\tau=1}^l N_{a_\tau} \right)}_1 \int_1^{+\infty} \dots \int_1^{+\infty} \frac{du_1 \dots du_l}{u_1^{2r_{a_1}} + \dots + u_l^{2r_{a_l}}}, \end{aligned}$$

отсюда в силу равенства

$$\left(\prod_{i \in (\mathbb{Z} \cap [1, s]) \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_l\}} N_i \right) \left(\prod_{\tau=1}^l N_{a_\tau} \right) = \prod_{i=1}^s N_i$$

и соотношения $\prod_{i=1}^s N_i \succ_{s,r} N$ с учётом сходимости последнего интеграла при $\lambda > 1/2$ получим

$$\sum_m \left\{ \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} : m \in A^{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \right\} \ll_{s,r} N/N^{2\lambda}.$$

Стало быть, справедливо соотношение

$$\sum_{l=1}^{s-1} \sum_{m \in B_l} \frac{1}{\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}} \ll_{s,r} \frac{N}{N^{2\lambda}}. \quad (15)$$

Из соотношений (11), (12), (14) и (15) вытекает, что

$$\|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_\infty \ll_{s,r} \frac{N^{1/2}}{N^\lambda}. \quad (16)$$

Хорошо известно, что для любой функции $g \in C[0, 1]^s$ при $q \in [2, \infty]$ имеет место неравенство (см., например, [15, с. 50])

$$\|g\|_q \leq \|g\|_2^{2/q} \|g\|_\infty^{1-2/q}. \quad (17)$$

Следовательно, в силу (10), (16) и (17) получаем

$$\|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_q \ll_{s,r,q} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}, \quad (18)$$

откуда, поскольку переменная t и функция f произвольны, заключаем, что

$$\delta_N((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_{L^{\infty,q}} \ll_{s,r,q} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}, \quad q \in [2, \infty]. \quad (19)$$

Оценим величину $\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}}$ снизу. Пусть заданы число N ($N = 2, 3, \dots$), функционалы $l_N^{(1)}(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N^{(N)}(f) = \hat{f}(m^{(N)})$ и функция $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)$ – алгоритм переработки числовой информации объёма N .

Введём в рассмотрение функцию

$$f_N(x) = \frac{1}{N^{\lambda\sqrt{N}}} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} \exp(2\pi i(m, x)),$$

где $C_N = \{m \in \mathbb{Z}^s : |m_1| \leq [N^{\lambda/r_1}], \dots, |m_s| \leq [N^{\lambda/r_s}]\}$, $B_N = \{m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(N)}\} \subset \mathbb{Z}^s$.

При некотором $C > 0$ имеет место включение $Cf_N \in W_2^{r_1, \dots, r_s}$, поскольку с учётом неравенств $\sum_{m \in C_N \setminus B_N} 1 \leq \sum_{m \in C_N} 1 < 3^s N$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} |\hat{f}_N(m)|^2 (\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}) &= \frac{C^2}{N^{2\lambda} N} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} (\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}) \leq \\ &\leq \frac{C^2}{N^{2\lambda} N} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} ((N^{\lambda/r_1})^{2r_1} + \dots + (N^{\lambda/r_s})^{2r_s}) < s 3^s C^2. \end{aligned}$$

Так как $\prod_{i=1}^s [N^{\lambda/r_i}] \succsim_s N$ и $\|f_N\|_\infty \gg_{s,r} \sqrt{N}/N^\lambda$, то вследствие неравенства Никольского [16, с. 256] получаем

$$\|f_N\|_q \gg_{s,r} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}. \quad (20)$$

В силу включения $Cf_N \in W_2^{r_1, \dots, r_s}$ и равенств $u(0, x; Cf_N) = Cf_N(x)$, $l_N^{(1)}(Cf_N) = 0$, $\dots$, $l_N^{(N)}(Cf_N) = 0$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in W_2^{r_1, \dots, r_s}} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); \cdot)\|_{L^{\infty, q}} \geq \\ & \geq \max\{\|(Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0, \dots, 0; 0, \cdot)\|_q, \|(-Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0, \dots, 0; 0, \cdot)\|_q\} \geq \\ & \geq \frac{1}{2}(\|(Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0, \dots, 0; 0, \cdot)\|_q + \|(-Cf_N)(\cdot) - \varphi_N(0, \dots, 0; 0, \cdot)\|_q) \geq \|Cf_N\|_q. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (20), получаем

$$\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}} \gg_{s,r} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}. \quad (21)$$

Так как очевидно неравенство $\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}} \leq \delta_N((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}}$, то из (19) и (21) вытекают соотношения (5). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Для произвольно заданных чисел $\gamma_N^{(\tau)}$ таких, что $|\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1$ ($\tau = \overline{1, N}$) и для каждого фиксированного $t \in [0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N, \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N; t, \cdot)\|_q \leq \\ & \leq \|u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); t, \cdot)\|_q + \\ & + \left\| \sum_{\tau=1}^N (-\gamma_N^{(\tau)})\bar{\varepsilon}_N \exp(-4\pi^2(\bar{m}^{(\tau)}, \bar{m}^{(\tau)})) \exp(2\pi i(\bar{m}^{(\tau)}, \cdot)) \right\|_q. \end{aligned} \quad (22)$$

В силу (17), (18) и (22) имеет место соотношение

$$\left\| u(t, \cdot; f) - \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N, \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N; t, \cdot) \right\|_q \ll_{s,r,q} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda},$$

откуда, поскольку переменная t , числа $\gamma_N^{(\tau)}$, $\tau = \overline{1, N}$, и функция f произвольны, следует, что

$$\Delta_N(\bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}} \ll_{s,r} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda}, \quad q \in [2, \infty]. \quad (23)$$

Так как

$$\delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty, q}} \leq \delta_N((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}} \leq \Delta_N(\bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_{L^{\infty, q}},$$

то вследствие (21) и (23) приходим к соотношению (6).

Теперь убедимся в справедливости равенства (7). Для каждого $K \in \mathbb{N}$ определим множество $H_K = \{m \in \mathbb{Z}^s : |m_1| \leq [N^{\lambda/r_1} \beta_K^{-\alpha/r_1}], \dots, |m_s| \leq [N^{\lambda/r_s} \beta_K^{-\alpha/r_s}]\}$, где $N = N(K)$, $\beta_K = \min\{\eta_N, \ln(N+1)\}$ и α – некоторое число из интервала $(2\lambda/(2\lambda+1), \lambda q/(q-1))$. Здесь же заметим, что условие $\lambda > 1/2$ обеспечивает выполнение неравенства

$$2\lambda/(2\lambda+1) < \lambda q/(q-1).$$

Так как $\lim_{K \rightarrow +\infty} \beta_K = +\infty$, то существует номер K_0 такой, что для всех $K \geq K_0$ имеет место неравенство $\beta_K \geq 1$.

Для каждого $K \geq K_0$ функция $h_K(x) = (3^s s)^{-1/2} \beta_K \bar{\varepsilon}_N \sum_{m \in H_K} \exp(2\pi i(m, x))$ принадлежит классу $W_2^{r_1, \dots, r_s}$. Действительно, используя неравенства $|H_K| < 3^s N \beta_K^{-\alpha/\lambda}$, $2\alpha - 2 + \alpha/\lambda > 0$ и $\beta_K \geq 1$ ($K \geq K_0$), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{h}_K(m)|^2 (\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}) &= \sum_{m \in H_K} |\hat{h}_K(m)|^2 (\tilde{m}_1^{2r_1} + \dots + \tilde{m}_s^{2r_s}) \leq \\ &\leq \frac{\beta_K^2 \bar{\varepsilon}_N^2}{3^s s} \sum_{m \in H_K} s N^{2\lambda} \beta_K^{-2\alpha} = \frac{1}{3^s N} \beta_K^{2-2\alpha} \sum_{m \in H_K} 1 \leq \frac{1}{\beta_K^{2\alpha-2+\alpha/\lambda}} \leq 1. \end{aligned}$$

Так как $\|h_K\|_\infty \gg_s \beta_K \bar{\varepsilon}_N |H_K|$ и $N \beta_K^{-\alpha/\lambda} < |H_K|$, то $\|h_K\|_\infty \gg_s N^{-\lambda+1/2} \beta_K^{1-\alpha/\lambda}$. Поэтому в силу неравенства Никольского и соотношения (5) получаем, что

$$\|h_K\|_q \gg_s \delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}} \beta_K^{1-\alpha(1-1/q)/\lambda}. \quad (24)$$

Для каждого $K \geq K_0$ определим наборы $(\tilde{\gamma}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_N^{(N)})$ и $(\tilde{\omega}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\omega}_N^{(N)})$, где $N = N(K)$, с компонентами $\tilde{\gamma}_N^{(\tau)} = -\hat{h}_K(m^{(\tau)}) (\bar{\varepsilon}_N \eta_N)^{-1}$, $\tau = \overline{1, N}$, и $\tilde{\omega}_N^{(\tau)} = -(-\hat{h}_K)(m^{(\tau)}) (\bar{\varepsilon}_N \eta_N)^{-1}$, $\tau = \overline{1, N}$. Так как для каждого $\tau = \overline{1, N}$ выполнены неравенства $|\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}| \leq 1$, $|\tilde{\omega}_N^{(\tau)}| \leq 1$ и равенства $\hat{h}_K(m^{(\tau)}) + \eta_N \tilde{\gamma}_N^{(\tau)} \bar{\varepsilon}_N = 0$, $(-\hat{h}_K)(m^{(\tau)}) + \eta_N \tilde{\omega}_N^{(\tau)} \bar{\varepsilon}_N = 0$, то для всякой пары $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Phi_N$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W_2^{r_1, \dots, r_s}} \sup_{\substack{|\gamma_N^{(1)}| \leq 1 \\ |\gamma_N^{(\ddot{N})}| \leq 1}} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \gamma_N^{(1)} \eta_N \bar{\varepsilon}_N, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \gamma_N^{(N)} \eta_N \bar{\varepsilon}_N; \cdot)\|_{L^{\infty,q}} &\geq \\ &\geq \max\{\|h_K(\cdot) - \varphi_N(\hat{h}_K(m^{(1)}) + \tilde{\gamma}_N^{(1)} \eta_N \bar{\varepsilon}_N, \dots, \hat{h}_K(m^{(N)}) + \tilde{\gamma}_N^{(N)} \eta_N \bar{\varepsilon}_N; 0, \cdot)\|, \\ \|(-h_K)(\cdot) - \varphi_N((-\hat{h}_K)(m^{(1)}) + \tilde{\omega}_N^{(1)} \eta_N \bar{\varepsilon}_N, \dots, (-h_K)(m^{(N)}) + \tilde{\omega}_N^{(N)} \eta_N \bar{\varepsilon}_N; 0, \cdot)\|_q\} &= \\ = \max\{\|h_K(\cdot) - \varphi_N(0, \dots, 0; 0, \cdot)\|_q, \\ \|(-h_K)(\cdot) - \varphi_N(0, \dots, 0; 0, \cdot)\|_q\} &\geq \|h_K\|_q. \end{aligned} \quad (25)$$

Сопоставляя соотношения (24) и (25), заключаем, что

$$\Delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_{L^{\infty,q}} \gg_s \delta_N(\Phi_N)_{L^{\infty,q}} \beta_K^{1-\alpha(1-1/q)/\lambda},$$

откуда, поскольку $1 - \alpha\lambda^{-1}(1 - 1/q) > 0$, следует равенство (7). Теорема 2 доказана.

Замечание. Так как равенство (7) доказано для каждой пары $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Phi_N$, то никакой оптимальный вычислительный агрегат $\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); \cdot)$, $N = N(K)$, не имеет большей (по порядку) предельной погрешности, чем $\bar{\varepsilon}_N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
3. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1965.

4. Sickel W., Ullrich T. The Smolyak's algorithm, sampling on sparse grids and function spaces of dominating mixed smoothness // East J. Approx. 2007. V. 13. № 4. P. 287–425.
5. Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // Изв. вузов. Математика. 2010. № 3. С. 52–71.
6. Loo Keng Hua, Yang Wang. Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg; New York, 1981.
7. Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикинова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) перечника // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2019. Т. 126. № 1. С. 8–51.
8. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 1997. № 3. С. 90–144.
9. Ажгалиев Ш. О дискретизации решений уравнения теплопроводности // Мат. заметки. 2007. Т. 82. № 2. С. 177–182.
10. Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E , SW и B : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1998.
11. Таугынбаева Г.Е. О предельной погрешности неточной информации при оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности по тригонометрическим коэффициентам Фурье // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2010. Т. 79. № 6. С. 35–48.
12. Утесов А.Б. Задача восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решений уравнения теплопроводности: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2001.
13. Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т. Полное $K(B)P$ -исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье // Вестн. Евразийского нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2018. № 1 (122). С. 90–98.
14. Ляшко И.И. и др. Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы. Т. 3. М., 2001.
15. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1986. Т. 178. С. 3–113.
16. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1951. Т. 38. С. 244–278.

Актюбинский региональный университет
им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан,
Назарбаев Университет,
г. Нур-Султан, Казахстан

Поступила в редакцию 06.05.2021 г.
После доработки 26.08.2021 г.
Принята к публикации 08.09.2021 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.25

О КРАТНОМ СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ С КВАДРАТОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

© 2021 г. Е. И. Моисеев, Т. Е. Моисеев, Н. Ю. Капустин

Рассматривается задача для уравнения Бесселя целого порядка с комплексным физическим и спектральным параметрами в граничном условии. Спектральный параметр в граничное условие входит квадратично. Изучается вопрос базисности системы собственных функций.

DOI: 10.31857/S037406412112013X

В работе [1] рассмотрена спектральная задача для уравнения Бесселя нулевого порядка

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \lambda U(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (1)$$

с граничным условием

$$U'(1) = d\lambda^2 U(1), \quad (2)$$

содержащим спектральный параметр λ и комплексный коэффициент d , $d \neq 0$. Предполагая ограниченность решения уравнения (1), получаем систему собственных функций

$$U_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}r), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

задачи (1), (2), отвечающих её собственным значениям λ_n – корням характеристического уравнения

$$J'_0(\sqrt{\lambda}) = d(\sqrt{\lambda})^3 J_0(\sqrt{\lambda}). \quad (3)$$

Для всех собственных значений задачи (1), (2) считаем выполненным условие

$$-\pi/2 < \arg \sqrt{\lambda_n} \leq \pi/2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Через $\mathcal{R}_0$ обозначим множество корней трансцендентного уравнения

$$-4J_0(z)J'_0(z) = z[J_0^2(z) + (J'_0(z))^2]. \quad (4)$$

Доказано, что кратные корни уравнения (3) удовлетворяют также уравнению (4), и установлена базисность системы собственных функций задачи (1), (2) как в случае появления кратного корня, так и в случае, когда все собственные значения простые, а именно, получены следующие результаты (теоремы 1–3).

Теорема 1. Пусть $d \notin \{J'_0(z)/(z^3 J_0(z)) : z \in \mathcal{R}_0\}$. Тогда система, полученная из системы $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N}\}$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, удалением любых двух функций, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Для системы $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$, где m, l – номера удалённых функций, биортogonalно сопряжённая к ней система $\{\sqrt{r}V_n(r) : n \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$ задаётся формулой

$$\overline{V_n(r)} = A_n^{-1} \left[J_0(\sqrt{\lambda_n}r) - \frac{(\lambda_n - \lambda_m)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_0(\sqrt{\lambda_l})} J_0(\sqrt{\lambda_l}r) - \frac{(\lambda_n - \lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_m})} J_0(\sqrt{\lambda_m}r) \right],$$

где

$$A_n = \int_0^1 r J_0^2(\sqrt{\lambda_n} r) dr + 2d\lambda_n J_0^2(\sqrt{\lambda_n}) = \left(\frac{1 + d^2 \lambda_n^3}{2} \right) J_0^2(\sqrt{\lambda_n}) + 2d\lambda_n J_0^2(\sqrt{\lambda_n}).$$

Теорема 2. Если $d = J'_0(z)/(z^3 J_0(z))$, где $z \in \mathcal{R}_0$, то система $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N} \setminus \{l\}\}$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, без одной функции, соответствующей кратному собственному значению $\lambda_l = z^2$ (кратность для этой задачи всегда равна двум), образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Биортогонально сопряжённая система $\{\sqrt{r}V_n(r)\}$ к этой системе определяется по формуле

$$\overline{V_n(r)} = A_n^{-1} \left[J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - \frac{(\lambda_l - \lambda_n) J_0(\sqrt{\lambda_n})}{J_0(\sqrt{\lambda_l})} Z_l(r) - \left(1 - \frac{(\lambda_l - \lambda_n) Z_l(1)}{J_0(\sqrt{\lambda_l})} \right) \frac{J_0(\sqrt{\lambda_n})}{J_0(\sqrt{\lambda_l})} J_0(\sqrt{\lambda_l} r) \right],$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{l\}$ и

$$Z_l(r) = \frac{r J_1(\sqrt{\lambda_l} r)}{2\sqrt{\lambda_l}}.$$

Теорема 3. Если $d = J'_0(z)/(z^3 J_0(z))$, где $z \in \mathcal{R}_0$, то система $\{\sqrt{r}U_n(r) : n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}\}$ собственных функций задачи (1), (2), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, без одной функции, соответствующей простому собственному значению λ_m , при наличии кратного корня $\lambda_l = z^2$, $m \neq l$, образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Биортогонально сопряжённая система $\{\sqrt{r}V_n(r)\}$ к этой системе задаётся формулами

$$\overline{V_l(r)} = A_l^{-1} \left[Z_l^\alpha(r) - \frac{Z_l^\alpha(1)}{J_0(\sqrt{\lambda_m})} J_0(\sqrt{\lambda_m} r) \right],$$

$$\overline{V_n(r)} = A_n^{-1} \left[J_0(\sqrt{\lambda_n} r) - \frac{(\lambda_n - \lambda_m) J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_l - \lambda_m) J_0(\sqrt{\lambda_l})} J_0(\sqrt{\lambda_l} r) - \frac{(\lambda_n - \lambda_l) J_0(\sqrt{\lambda_n})}{(\lambda_m - \lambda_l) J_0(\sqrt{\lambda_m})} J_0(\sqrt{\lambda_m} r) \right], \quad n \neq l,$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$ и

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{r J_1(\sqrt{\lambda_l} r)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha J_0(\sqrt{\lambda_l} r), \quad Z_l^\alpha(1) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_l})}{\lambda_l - \lambda_m},$$

$$A_l = \int_0^1 r Z_l^\alpha(r) J_0(\sqrt{\lambda_l} r) dr + d(\lambda_l + \lambda_m) Z_l^\alpha(1) J_0(\sqrt{\lambda_l}).$$

Доказательства этих теорем проводятся по схемам, разработанным в статьях [2, 3], с использованием результатов работ [4, 5]. Построение биортогонально сопряжённых систем основывается в свою очередь на равенствах

$$\int_0^1 r J_0(\sqrt{\lambda_n} r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) dr + d(\lambda_n + \lambda_k) J_0(\sqrt{\lambda_n}) J_0(\sqrt{\lambda_k}) = 0,$$

$$\int_0^1 r J_0(\sqrt{\lambda_n} r) Z_l(r) dr + d(\lambda_n + \lambda_l) J_0(\sqrt{\lambda_n}) Z_l(1) - d J_0(\sqrt{\lambda_n}) J_0(\sqrt{\lambda_l}) = 0,$$

в которых λ_n , λ_k и λ_l – различные собственные значения задачи (1), (2), причём λ_l – кратный корень.

Функция $Z_l(r)$ – это присоединённая функция для собственной функции $U_l(r)$ с кратным собственным значением. Действительно, пусть $z \in \mathcal{R}_0$, $d = J'_0(z)/(z^3 J_0(z))$, $\lambda_l = z^2$. Рассмотрим задачу для присоединённой функции

$$Z_l''(r) + \frac{1}{r}Z_l'(r) + \lambda Z_l(r) = U_l(r), \quad 0 < r < 1, \quad (5)$$

$$Z_l'(1) = d\lambda^2 Z_l(1) - 2d\lambda U_l(1). \quad (6)$$

Решением задачи (5), (6) в случае собственной функции $U_l(r) = J_0(\sqrt{\lambda_l}r)$ является корневая функция

$$Z_l^\alpha(r) = \frac{rJ_1(\sqrt{\lambda_l}r)}{2\sqrt{\lambda_l}} + \alpha J_0(\sqrt{\lambda_l}r),$$

где α – любое комплексное число.

Задача (1), (2) имеет кратный корень при действительном значении параметра d . Это следует из того, что уравнение (4) имеет действительный корень.

В настоящей работе рассматриваем спектральную задачу для уравнения Бесселя целого порядка

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (7)$$

с граничным условием

$$R'(1) = d\lambda^2 R(1), \quad (8)$$

соответствующим условию (2). Через

$$R_k(r) = J_n(\sqrt{\lambda_k}r), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

обозначим систему собственных функций задачи (7), (8), отвечающих её собственным значениям λ_k – корням характеристического уравнения

$$J'_n(\sqrt{\lambda}) = d(\sqrt{\lambda})^3 J_n(\sqrt{\lambda}). \quad (9)$$

Для кратных корней уравнения (9) аналогично случаю $n = 0$ выводится уравнение

$$-4J_n(z)J'_n(z) + n^2 J_n^2(z) = z[J_n^2(z) + (J'_n(z))^2]. \quad (10)$$

Доказывается, что корни уравнения (10) простые при $n \neq 0$ (при $n = 0$ значение $z = 0$ – кратный корень). Действительно, условие для кратного корня уравнения (10) определяется равенством

$$(n^2 - z^2)J_n^2(z) + 3z^2(J'_n(z))^2 = 0.$$

Множество корней уравнения (10) обозначим через $\mathcal{R}_n$.

Имеет место

Теорема 4. Пусть $d \notin \{J'_n(z)/(z^3 J_n(z)) : z \in \mathcal{R}_n\}$. Тогда система, полученная из системы $\{\sqrt{r}R_k(r) : k \in \mathbb{N}\}$ собственных функций задачи (7), (8), умноженных на весовой множитель $\sqrt{r}$, удалением любых двух функций, является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Для системы $\{\sqrt{r}R_k(r) : k \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$, где m, l – номера удалённых функций, биортogonalно сопряжённая к ней система $\{\sqrt{r}W_k(r) : k \in \mathbb{N} \setminus \{m, l\}\}$ задаётся формулой

$$\overline{W_k(r)} = A_k^{-1} \left[J_n(\sqrt{\lambda_k}r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_l - \lambda_m)J_n(\sqrt{\lambda_l})} J_n(\sqrt{\lambda_l}r) - \frac{(\lambda_k - \lambda_l)J_0(\sqrt{\lambda_k})}{(\lambda_m - \lambda_l)J_n(\sqrt{\lambda_m})} J_n(\sqrt{\lambda_m}r) \right],$$

где

$$A_k = \int_0^1 r J_n^2(\sqrt{\lambda_k}r) dr + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) = \left(\frac{1 + d^2 \lambda_k^3}{2} \right) J_n^2(\sqrt{\lambda_k}) + 2d\lambda_k J_n^2(\sqrt{\lambda_k}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621 и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-51-18006 Болг-а, 18-29-10085 мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moiseev E.I., Moiseev T.E., Kapustin N.Yu.* On the multiple spectrum of a problem for the Bessel equation // *Integral Transforms and Special Functions*. 2020. V. 31. № 12. P. 1020–1024.
2. *Капустин Н.Ю., Моисеев Т.Е.* О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя со спектральным параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения*. 2016. Т. 52. № 10. С. 1426–1430.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения*. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. *Капустин Н.Ю.* О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения*. 2012. Т. 48. № 5. С. 701–706.
5. *Капустин Н.Ю.* О двух спектральных задачах с одним характеристическим уравнением // *Дифференц. уравнения*. 2015. Т. 51. № 7. С. 962–964.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.11.2021 г.
После доработки 22.11.2021 г.
Принята к публикации 23.11.2021 г.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 57, 2021 г. *)

DOI: 10.31857/S0374064121120141

<i>Абылаева Э.Д.</i> см. Омуралиев А.С.	1	76–86
<i>Алдашев С.А.</i> Критерий единственности решения задачи Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе	11	1564–1567
<i>Алексеев М.В.</i> см. Тухватуллина Р.Р.	7	988–1002
<i>Алексеева Л.А.</i> Бикватернионные волновые уравнения и свойства их обобщённых решений	5	614–624
<i>Алексеева У.А.</i> см. Мельникова И.В.	3	399–410
<i>Алиев А.Б., Шафиева Г.Х.</i> Разрушение решений смешанной задачи для систем волновых уравнений с граничной диссипацией и внутренним нелинейным фокусирующим источником переменного порядка роста	3	313–325
<i>Алиев А.Р., Манафов М.Дж.</i> Формула следа для оператора Штурма–Лиувилля с точкой δ' -взаимодействия	5	583–589
<i>Алимов Ш.А., Юлдашева А.В.</i> О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром	3	375–386
<i>Амелькин В.В.</i> Положительное решение одной гипотезы в теории полиномиальных изохронных центров систем Лъенара	2	147–152
<i>Аристов А.И.</i> Точные решения трёх соболевских уравнений, содержащих псевдолапласианы четвёртого порядка	10	1421–1425
<i>Артемов М.А.</i> Об однозначной разрешимости задачи оптимального стартового управления для линеаризованных уравнений движения вязкоупругой среды	8	1098–1103
<i>Асанова А.Т.</i> Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка	1	125–129
<i>Асхабов С.Н.</i> Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и переменным коэффициентом	3	387–398
<i>Асхабов С.Н.</i> Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части	9	1210–1219
Ахтямов А.М. Отсутствие вырожденных краевых условий для одной спектральной задачи	1	130–134
<i>Бадерко Е.А., Сахаров С.И.</i> Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей	5	625–634
<i>Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.</i> О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости	8	1039–1048
<i>Бает А.В.</i> О единственности решения обратных начальных задач для уравнения Бюргерса с неизвестным источником	6	719–728
<i>Базарханова А.А.</i> см. Утесов А.Б.	12	1705–1714
<i>Барановский Е.С.</i> Задача протекания для уравнений Навье–Стокса–Фойгта	12	1604–1609
<i>Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б.</i> О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой	2	153–161

*) Составитель указателя С.Г. Красовский.

<i>Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б.</i> О спектральных свойствах классических операторов Дирака и операторов с инволюцией в однородных пространствах функций	10	1299–1304
<i>Бегишев Р.Р.</i> см. Фомичев В.В.	10	1367–1383
<i>Бештоков М.Х.</i> Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений соболевского типа дробного порядка	12	1665–1681
<i>Бободжанов А.А., Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.</i> Регуляризованные асимптотические решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части и с несколькими быстро изменяющимися ядрами	6	769–783
<i>Бободжанова М.А.</i> см. Бободжанов А.А.	6	769–783
<i>Бовкун В.А.</i> см. Мельникова И.В.	3	399–410
<i>Бризицкий Р.В., Быстрова В.С., Саричкая Ж.Ю.</i> Анализ некоторых краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции	5	635–648
<i>Брушлинский К.В., Степин Е.В.</i> Вопросы устойчивости в двумерных математических моделях равновесия плазмы в магнитных ловушках–галатеях	7	867–879
<i>Бутузов В.Ф., Симаков Р.Е.</i> Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем	4	435–465
<i>Быстрова В.С.</i> см. Бризицкий Р.В.	5	635–648
<i>Вабищевич П.Н.</i> Схемы расщепления решения для эволюционных уравнений второго порядка	7	880–888
<i>Валовик Д.В., Чалышов Г.В.</i> Интегральная характеристическая функция нелинейной задачи Штурма–Лиувилля	12	1589–1598
<i>Васьковский М.М., Карпович А.А.</i> О конечности моментов решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями	2	162–168
<i>Васьковский М.М.</i> Существование и единственность решений дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера	10	1305–1317
<i>Васьковский М.М.</i> Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений, слабо управляемых грубыми траекториями с произвольным положительным показателем Гёльдера	11	1443–1449
<i>Ветохин А.Н.</i> О некоторых свойствах топологической энтропии семейства динамических систем, определённых на произвольном метрическом пространстве	8	1005–1013
<i>Власов В.В., Раутиан Н.А.</i> О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтеса	4	536–551
<i>Власов В.В., Раутиан Н.А.</i> Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами	10	1426–1430
<i>Войделевич А.С.</i> Показатели Ляпунова радиусов вписанных и описанных сфер решений стационарных линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары	4	572–576
<i>Волков В.М.</i> см. Расолько Г.А.	6	830–839
<i>Волбуев А.Н.</i> О многоволновых решениях одного нелинейного уравнения Шрёдингера	6	729–734
<i>Габбасов Н.С.</i> Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае	7	889–899
<i>Гаврилов С.В., Денисов А.М.</i> Численные методы решения нелинейного операторного уравнения, возникающего в обратной коэффициентной задаче	7	900–906

<i>Георгиевский Д.В.</i> Устойчивость по энергетической мере нестационарного трёхосного растяжения–сжатия вязкого параллелепипеда	5	649–654
<i>Глушак А.В.</i> О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами	1	61–75
<i>Гришанина Г.Э., Мухамадиев Э.М.</i> Необходимое и достаточное условие существования классического решения неоднородного бигармонического уравнения	3	326–337
<i>Громыко Г.Ф.</i> см. Ерофеев В.Т.	12	1682–1697
<i>Гусев А.О., Щерица О.В., Мажорова О.С.</i> К вопросу об эквивалентности разностных методов решения задачи Стефана на подвижных и фиксированных сетках	7	907–921
<i>Деменчук А.К.</i> Управление асинхронным спектром линейных почти периодических систем с диагональным усреднением матрицы коэффициентов	4	466–472
<i>Денисов А.М.</i> см. Гаврилов С.В.	7	900–906
<i>Дурдыев У.Д.</i> Задача об определении коэффициента реакции в дробном уравнении диффузии	9	1220–1229
<i>Евстафьева В.В.</i> О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом	2	169–178
<i>Евстигнеев Н.М., Рябков О.И., Шильмин Д.А.</i> Об использовании стягивающего обрамления интервальных моделей Тейлора в алгоритмах вычислительного доказательства существования периодических траекторий в системах обыкновенных дифференциальных уравнений	3	411–427
<i>Елкин В.И.</i> Применение дифференциально-геометрических методов теории управления в теории дифференциальных уравнений с частными производными. I	11	1474–1482
<i>Емельянов Д.П., Ломов И.С.</i> Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов	5	655–672
<i>Еремин Ю.А., Захаров Е.В.</i> Свойства системы интегральных уравнений первого рода в задачах дифракции на проницаемом теле	9	1230–1237
<i>Ерофеев В.Т., Громыко Г.Ф., Заяц Г.М.</i> Численное моделирование задач экранирования импульсных электромагнитных полей экранами из пермаллоя	12	1682–1697
<i>Завгородний М.Г.</i> Многоточечная краевая задача на графе	6	840–843
<i>Зайцева Н.В.</i> Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом	2	224–234
<i>Зарубин А.Н.</i> Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева–Бицадзе	3	338–348
<i>Захаров Е.В.</i> см. Еремин Ю.А.	9	1230–1237
<i>Заяц Г.М.</i> см. Ерофеев В.Т.	12	1682–1697
<i>Звягин А.В.</i> см. Звягин В.Г.	1	135–139
<i>Звягин В.Г., Звягин А.В., Хонг Нгуен Минь.</i> Об оптимальном управлении с обратной связью для модели движения нелинейно-вязкой жидкости	1	135–139
<i>Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.</i> Спектральные условия устойчивости явной трёхслойной разностной схемы для многомерного уравнения переноса с возмущениями	7	922–931
<i>Иванов А.С.</i> Уточнение оценок собственных значений для струны с сингулярным весом	10	1318–1324
<i>Изобов Н.А., Ильин А.В.</i> О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями	11	1450–1457

<i>Ильин А.В.</i> см. Изобов Н.А.	11	1450–1457
<i>Ильин А.В.</i> см. Фомичев В.В.	10	1367–1383
<i>Иоффе В.Л.</i> см. Крицков Л.В.	1	4–13
<i>Исломов Н.Б.</i> см. Мирсабуров М.	10	1384–1396
<i>Ишанкулов Т., Ишанкулов Ф.Т.</i> О продолжении решения линеаризованной стационарной системы уравнений Навье–Стокса	9	1153–1163
<i>Каверина В.К.</i> см. Перов А.И.	5	607–613
<i>Каменщиков М.А.</i> см. Фомичев В.В.	11	1546–1554
<i>Канатников А.Н., Ткачева О.С.</i> Наблюдатель состояния для четырёхмерной системы с векторным выходом	11	1483–1490
<i>Капустин Н.Ю.</i> О базисности в L_p системы собственных функций задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии	8	1142–1145
<i>Капустин Н.Ю.</i> см. Моисеев Е.И.	12	1715–1718
<i>Карачик В.В.</i> Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре	5	673–686
<i>Карелин А.А., Тарасенко А.А.</i> О краевых задачах Римана с отражением на вещественной оси и связанных с ними сингулярных интегральных уравнениях	1	114–124
<i>Карпович А.А.</i> см. Васьковский М.М.	2	162–168
<i>Касым А.С.</i> см. Кусаинова Л.К.	10	1431–1435
<i>Качан И.В.</i> Устойчивость линейных стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробными броуновскими движениями	5	590–606
<i>Китаева О.Г.</i> см. Шафранов Д.Е.	4	526–535
<i>Клевин А.И.</i> Асимптотика собственных функций типа прыгающего мячика оператора $\nabla D(x)\nabla$ в области, ограниченной полужёсткими стенками	2	235–254
<i>Климов В.С.</i> Оценки решений дифференциальных неравенств с импульсными особенностями	3	295–305
<i>Княжиче Л.Б.</i> Условия устойчивости решений дифференциальных уравнений с немонотонными функциями Ляпунова	2	179–186
<i>Кобилзода М.М.</i> см. Мухамадиев Э.М.	2	203–209
<i>Козлов В.В.</i> К задаче о разделении переменных в системах обыкновенных дифференциальных уравнений	10	1325–1332
<i>Козлов В.В.</i> О линейных неавтономных системах дифференциальных уравнений с квадратичным интегралом	2	187–195
<i>Козлов Ю.Д.</i> О генеральных показателях условно-периодических систем	10	1333–1338
<i>Кокурин М.Ю.</i> О единственности решения коэффициентной обратной задачи для уравнения Гельмгольца в бесфазной пространственно непереопределённой постановке	9	1164–1169
<i>Кокурин М.Ю.</i> Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения	2	255–264
<i>Корчагова В.Н.</i> см. Лукин В.В.	7	951–962
<i>Костич М.</i> см. Федоров В.Е.	1	100–113
<i>Костич М.</i> см. Чаучи Б.	12	1644–1653
<i>Коструб И.Д.</i> см. Перов А.И.	5	607–613
<i>Коструб И.Д.</i> см. Перов А.И.	12	1599–1603
<i>Крицков Л.В., Иоффе В.Л.</i> Спектральные свойства задачи Коши для оператора второго порядка с инволюцией	1	4–13

<i>Криштал И.А.</i> см. Баскаков А.Г.	10	1299–1304
<i>Криштал И.А.</i> см. Баскаков А.Г.	2	153–161
<i>Крищенко А.П., Старков К.Е.</i> Неотрицательные решения систем с дробно-рациональными правыми частями и локализация аттракторов	11	1458–1463
<i>Кртинич Дж., Микич М.</i> Существование и единственность решения некоторых задач Коши для уравнения Эмдена–Фаулера	8	1014–1022
<i>Крутицкий П.А., Резниченко И.О.</i> Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя	7	932–950
<i>Крылов П.А.</i> см. Фурсов А.С.	8	1104–1115
<i>Курина Г.А.</i> Обратная задача оптимизации для одного класса дискретных 2D систем	12	1698–1704
<i>Кусаинова Л.К., Султанов Я.Т., Касым А.С.</i> Об одном обратимом расширении несамосопряжённого сингулярного дифференциального оператора на полуоси	10	1431–1435
<i>Лапин К.С.</i> Вектор-функции Ляпунова, вращения векторных полей, направляющие функции и существование ограниченных по Пуассону решений	3	306–312
<i>Ласунский А.В.</i> Об одном варианте теоремы об устойчивости по первому приближению в дискретном случае	3	428–432
<i>Липницкий А.В.</i> Описание строения множеств неправильности линейных дифференциальных систем с линейным параметром	4	473–487
<i>Ломов И.С.</i> см. Емельянов Д.П.	5	655–672
<i>Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.</i> Аппроксимации задач оптимального управления старшими коэффициентами эллиптических уравнений в недивергентной форме с неограниченной нелинейностью в коэффициентах	6	796–820
<i>Лукин В.В., Корчагова В.Н., Сауткина С.М.</i> Об устойчивых методах Рунге–Кутты для решения гиперболических уравнений разрывным методом Галёркина	7	951–962
<i>Мажорова О.С.</i> см. Гусев А.О.	7	907–921
<i>Макин А.С.</i> О спектре двухточечных краевых задач для оператора Дирака	8	1023–1031
<i>Максимов В.И.</i> О гарантированном управлении линейной системой дифференциальных уравнений при неполной информации о фазовых координатах	11	1491–1502
<i>Максимов В.И.</i> Об одной модификации метода динамической регуляризации	8	1146–1150
<i>Максимов В.И.</i> см. Осипов Ю.С.	4	552–571
<i>Манапова А.Р.</i> см. Лубышев Ф.В.	6	796–820
<i>Манафов М.Дж.</i> см. Алиев А.Р.	5	583–589
<i>Матевосян О.А.</i> Задача Дирихле–Неймана для бигармонического уравнения во внешних областях	8	1049–1062
<i>Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.</i> Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка	7	963–975
<i>Матус П.П.</i> Критерий устойчивости разностных схем для нелинейных дифференциальных задач	6	821–829
<i>Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.</i> О разрешимости задачи Коши для системы математической теории термоупругости в пространстве	5	687–699
<i>Маянцев К.С., Точилин П.А.</i> Задача управления кусочно-линейной системой с неопределённостями по результатам измерений	11	1503–1515
<i>Мельникова И.В., Бовкун В.А., Алексеева У.А.</i> Интегро-дифференциальные уравнения, порождённые стохастическими задачами	3	399–410
<i>Метельский А.В., Хартовский В.Е.</i> О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа	2	265–285

<i>Метельский А.В.</i> Одновременная стабилизация семейства дифференциальных систем с запаздыванием динамической обратной связью по состоянию	11	1516–1535
<i>Микич М.</i> см. Кртинич Дж.	8	1014–1022
<i>Миняев С.И.</i> см. Фурсов А.С.	11	1555–1563
<i>Мироненко В.В.</i> см. Мироненко В.И.	10	1339–1345
<i>Мироненко В.В.</i> см. Мироненко В.И.	2	196–202
<i>Мироненко В.И., Мироненко В.В.</i> Вычисление отображения Пуанкаре для двумерных периодических систем и уравнений Риккати	10	1339–1345
<i>Мироненко В.И., Мироненко В.В.</i> Явное вычисление отображения Пуанкаре линейной периодической системы	2	196–202
<i>Миронов А.Н., Миронова Л.Б.</i> Метод Римана–Адамара для одной системы в трёхмерном пространстве	8	1063–1070
<i>Миронов А.Н., Яковлева Ю.О.</i> О построении функции Римана–Адамара для уравнения Бианки четвёртого порядка	9	1170–1176
<i>Миронов А.Н.</i> Задача Дарбу для уравнения Бианки четвёртого порядка	3	349–363
<i>Миронова Л.Б.</i> см. Миронов А.Н.	8	1063–1070
<i>Мирсабуров М., Исломов Н.Б.</i> Об одной задаче с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода	10	1384–1396
<i>Мирсабурова У.М.</i> Задача с аналогом условия Франкля на внутренней характеристике для уравнения смешанного типа	6	735–751
<i>Митрев Р.П.</i> см. Фомичев В.В.	10	1367–1383
<i>Митрев Р.П.</i> см. Фурсов А.С.	8	1104–1115
<i>Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Капустин Н.Ю.</i> О кратном спектре задачи для уравнения Бесселя с квадратом спектрального параметра в граничном условии	12	1715–1718
<i>Моисеев Т.Е.</i> см. Моисеев Е.И.	12	1715–1718
<i>Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л.</i> Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределённостями	7	976–987
<i>Мосолова Ю.М.</i> см. Фурсов А.С.	11	1555–1563
<i>Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н., Кобилзода М.М.</i> О разрешимости одного класса периодических задач на плоскости	2	203–209
<i>Мухамадиев Э.М.</i> см. Гришанина Г.Э.	3	326–337
<i>Назаров С.А.</i> Модели упругого сочленения пластины со стержнями, основанные на точечных условиях Соболева и самосопряжённых расширениях дифференциальных операторов	5	700–716
<i>Назаров С.А.</i> О собственных числах и функциях задач Дирихле и Неймана в области с дырчатыми перегородками	6	752–768
<i>Наимов А.Н.</i> см. Мухамадиев Э.М.	2	203–209
Некролог. Николай Христович Розов	1	3
<i>Ниязов И.Э.</i> см. Махмудов О.И.	5	687–699
<i>Нипарко Н.С.</i> Об убывающих к нулю на бесконечности линейных возмущениях, изменяющих показатели Ляпунова правильных линейных дифференциальных систем	4	577–580
<i>Номировский Д.А.</i> см. Тымчишин И.Б.	8	1081–1090
<i>Омуралиев А.С., Абылаева Э.Д., Эсенгул кызы П.</i> Параболическая задача со степенным пограничным слоем	1	76–86

<i>Осипов Ю.С., Максимов В.И.</i> Обратная связь в задаче управления системой с разрывной правой частью	4	552–571
<i>Перов А.И., Коструб И.Д., Каверина В.К.</i> Метод замороженных коэффициентов в условиях Гёльдера	5	607–613
<i>Перов А.И., Коструб И.Д.</i> Спектральный признак экспоненциальной устойчивости	12	1599–1603
<i>Петросян А.С.</i> см. Хачатрян А.Х.	6	784–795
<i>Печенцов А.С.</i> Распределение спектра оператора Вебера, возмущённого δ -функцией Дирака	8	1032–1038
<i>Пивень В.Ф.</i> Исследование трёхмерных задач фильтрации жидкости с источниками на границах	9	1238–1254
<i>Плаксин А.Р.</i> О минимаксном решении уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа: случай неоднородного гамильтониана	11	1536–1545
<i>Полосин А.А.</i> Об одном вырождающемся особом интегральном операторе	10	1436–1440
<i>Поляков Д.М.</i> О нелокальном возмущении периодической задачи для дифференциального оператора второго порядка	1	14–21
<i>Пономарёв С.М.</i> К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром	6	844–848
<i>Пономарёв С.М.</i> Некоторые теоремы единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром	4	488–495
<i>Равчеев А.В.</i> Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами	11	1464–1473
<i>Расолько Г.А., Волков В.М.</i> Метод ортогональных многочленов для приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в приложении к двумерным задачам дифракции	6	830–839
<i>Расулов А.Б.</i> см. Фёдоров Ю.С.	1	140–144
<i>Раутиан Н.А.</i> О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стильтеса	9	1255–1272
<i>Раутиан Н.А.</i> см. Власов В.В.	10	1426–1430
<i>Раутиан Н.А.</i> см. Власов В.В.	4	536–551
<i>Ревизников Д.Л.</i> см. Морозов А.Ю.	7	976–987
<i>Резниченко И.О.</i> см. Крутицкий П.А.	7	932–950
<i>Роговский А.И.</i> см. Фомичев В.В.	10	1367–1383
<i>Рябков О.И.</i> см. Евстигнеев Н.М.	3	411–427
<i>Рязанцева И.П.</i> Об асимптотической устойчивости в целом стационарных решений нелинейных дифференциальных уравнений некоторого класса в гильбертовом пространстве	10	1346–1358
<i>Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.</i> Начально-граничная задача для трёхмерного уравнения парабола-гиперболического типа	8	1071–1080
<i>Сабитов К.Б.</i> Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе	3	364–374
<i>Савенков Е.Б.</i> см. Тухватулина Р.Р.	7	988–1002
<i>Самохин А.Б., Самохина А.С., Юрченко И.А.</i> Объёмные интегральные уравнения с запаздыванием по времени для решения нестационарных задач акустики	9	1273–1279
<i>Самохина А.С.</i> см. Самохин А.Б.	9	1273–1279
<i>Сарицкая Ж.Ю.</i> см. Бризицкий Р.В.	5	635–648

<i>Сатторов Э.Н., Эрмаматова Ф.Э.</i> Задача Коши для обобщённой системы Коши–Римана в многомерной пространственной ограниченной области	1	87–99
<i>Сауткина С.М.</i> см. Лукин В.В.	7	951–962
<i>Сафонов В.Ф.</i> см. Бободжанов А.А.	6	769–783
<i>Сахаров С.И.</i> Контактная задача для параболических систем второго порядка в полосе с негладкой кривой раздела сред	4	496–506
<i>Сахаров С.И.</i> см. Бадерко Е.А.	5	625–634
<i>Сачков Ю.Л.</i> Однородные субримановы геодезические на группе движений плоскости	11	1568–1572
<i>Свиридюк Г.А.</i> см. Шафранов Д.Е.	4	526–535
<i>Сетуха А.В.</i> О разрешимости одного гиперсингулярного интегрального уравнения на поверхности с изотермическими координатами	9	1280–1296
<i>Сидоров Д.Н.</i> см. Сидоров Н.А.	12	1654–1664
<i>Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.</i> Нелинейные уравнения Вольтерры с нагрузками и бифуркационными параметрами: теоремы существования и построение решений	12	1654–1664
<i>Сидоров С.Н.</i> Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа по нахождению сомножителя правой части, зависящего от пространственных переменных	12	1610–1622
<i>Сидоров С.Н.</i> см. Сабитов К.Б.	8	1071–1080
<i>Симаков Р.Е.</i> см. Бутузов В.Ф.	4	435–465
<i>Смирнов Ю.Г.</i> Метод интегральных дисперсионных уравнений в задаче о нелинейных волнах круглого волновода	10	1359–1366
<i>Смолькин Е.Ю.</i> Исследование спектра поверхностных волн открытого неоднородного прямоугольного диэлектрического волновода	9	1177–1190
<i>Старков К.Е.</i> см. Крищенко А.П.	11	1458–1463
<i>Степин Е.В.</i> см. Брушлинский К.В.	7	867–879
<i>Султанаев Я.Т.</i> см. Кусаинова Л.К.	10	1431–1435
<i>Тарасенко А.А.</i> см. Карелин А.А.	1	114–124
<i>Тимергалиев С.Н.</i> О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакреплёнными краями	4	507–525
<i>Ткачева О.С.</i> см. Канатников А.Н.	11	1483–1490
<i>Тодоров Т.С.</i> см. Фомичев В.В.	10	1367–1383
<i>Тодоров Т.С.</i> см. Фурсов А.С.	8	1104–1115
<i>Точилин П.А.</i> см. Маянцев К.С.	11	1503–1515
<i>Тухватуллина Р.Р., Алексеев М.В., Савенков Е.Б.</i> Численное решение уравнений релаксационной модели Баера–Нунциато с помощью разрывного метода Галёркина	7	988–1002
<i>Тымчишин И.Б., Номировский Д.А.</i> Обобщённая разрешимость параболической модели, описывающей процессы переноса в областях с тонкими включениями	8	1081–1090
<i>Ускова Н.Б.</i> см. Баскаков А.Г.	10	1299–1304
<i>Ускова Н.Б.</i> см. Баскаков А.Г.	2	153–161
<i>Устюжанинова А.С.</i> Равномерные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта	9	1191–1202
<i>Утесов А.Б., Базарханова А.А.</i> Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата	12	1705–1714

<i>Федоров В.Е., Костич М.</i> Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова–Капуто	1	100–113
<i>Федоров В.Е.</i> см. Чаучи Б.	12	1644–1653
<i>Федоров К.Д.</i> О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами	12	1623–1634
<i>Фёдоров Ю.С., Расулов А.Б.</i> Задачи типа Гильберта для уравнения Коши–Римана с сингулярными окружностью и точкой в младших коэффициентах	1	140–144
<i>Филипповская М.С.</i> Глобальная разрешимость нестационарных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, ограниченность и устойчивость их решений. I	1	22–42
<i>Филипповская М.С.</i> Глобальная разрешимость нестационарных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, ограниченность и устойчивость их решений. II	2	210–223
<i>Фомичев В.В., Ильин А.В., Роговский А.И., Бегишев Р.Р., Митрев Р.П., Тодоров Т.С.</i> О существовании периодических решений у нелинейной системы третьего порядка	10	1367–1383
<i>Фомичев В.В., Каменщиков М.А.</i> Сравнительный анализ оптимальных фильтров второго и третьего порядков для непрерывных систем	11	1546–1554
<i>Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.</i> О существовании периодического режима в одной нелинейной системе	8	1104–1115
<i>Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.</i> Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков	11	1555–1563
<i>Хайруллин Р.С.</i> Задача Неймана–Трикоми для уравнения смешанного типа с сильным вырождением	9	1203–1209
<i>Хайруллин Р.С.</i> Нелокальная задача Дезина для уравнения смешанного типа второго рода	8	1091–1097
<i>Хартовский В.Е.</i> см. Метельский А.В.	2	265–285
<i>Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А., Петросян А.С.</i> О положительных ограниченных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений с оператором Гаммерштейна–Немыцкого	6	784–795
<i>Хачатрян Х.А.</i> см. Хачатрян А.Х.	6	784–795
<i>Хоанг Тхи Киеу Ань</i> см. Матус П.П.	7	963–975
<i>Хонг Нгуен Минь</i> см. Звягин В.Г.	1	135–139
<i>Хроника.</i> О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете	6	849–864
<i>Хроника.</i> О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете	11	1573–1586
<i>Хроника.</i> О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова	2	286–292
<i>Хуштова Ф.Г.</i> Третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка	12	1635–1643
<i>Чалышов Г.В.</i> см. Валовик Д.В.	12	1589–1598
<i>Чаучи Б., Федоров В.Е., Костич М.</i> О мультипликативных возмущениях абстрактных вырожденных уравнений с дробными производными	12	1644–1653
<i>Ченцов А.Г.</i> Дифференциальная игра сближения–уклонения: альтернативная разрешимость и построение релаксаций	8	1116–1141
<i>Черепова М.Ф.</i> см. Бадерко Е.А.	8	1039–1048
<i>Четвериков В.Н.</i> Представление обратимых линейных дифференциальных операторов в виде композиции треугольных	10	1397–1406

<i>Четверушкин Б.Н.</i> см. Злотник А.А.	7	922–931
<i>Чечкина А.Г.</i> О поведении спектра возмущённой краевой задачи Стеклова со слабой сингулярностью	10	1407–1420
<i>Шафиева Г.Х.</i> см. Алиев А.Б.	3	313–325
<i>Шафранов Д.Е., Китаева О.Г., Свиридюк Г.А.</i> Стохастические уравнения соболевского типа с относительно p -радиальными операторами в пространствах дифференциальных форм	4	526–535
<i>Шульмин Д.А.</i> см. Евстигнеев Н.М.	3	411–427
<i>Щеглова А.А.</i> Об исключении импульсных слагаемых в решении дифференциально-алгебраических уравнений с помощью обратной связи	1	43–60
<i>Щерица О.В.</i> см. Гусев А.О.	7	907–921
<i>Эрмаматова Ф.Э.</i> см. Сатторов Э.Н.	1	87–99
<i>Эсенгул кызы П.</i> см. Омуралиев А.С.	1	76–86
<i>Юлдашева А.В.</i> см. Алимов Ш.А.	3	375–386
<i>Юрченков И.А.</i> см. Самохин А.Б.	9	1273–1279
<i>Яковлева Ю.О.</i> см. Миронов А.Н.	9	1170–1176