# СОДЕРЖАНИЕ

**Том 66, номер 7, 2021**

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН



## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ



## СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА



## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ



## ЭЛЕКТРОНИКА СВЧ



## НАНОЭЛЕКТРОНИКА

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА



## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 627–643

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВОРОТОВ EBG-ВОЛНОВОДОВ

© 2021 г. С. Е. Банков[a], *, Е. В. Фролова[a], В. И. Калиничев[a]

[a] Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: sbankov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.01.2021 г.
После доработки 15.01.2021 г.
Принята к публикации 28.02.2021 г.

Рассмотрены повороты на 90° и 45° трехрядных EBG-волноводов на основе электромагнитного кристалла (ЭМК) в виде двумерно-периодической решетки металлических цилиндров, размещенных внутри плоского волновода (ПВ). Рассмотрены повороты волноводов, ориентированных вдоль главных и диагональных оптических осей ЭМК. При помощи электродинамического моделирования в среде HFSS проведена оптимизация поворотов для EBG реконфигурируемых схем с двух- и трехпозиционным управлением. Показано, что в диапазоне частот 1.5 : 1 элементы с двухпозиционным управлением обеспечивают согласование на уровне не хуже –15 дБ, а элементы с трехпозиционным управлением согласованы на уровне –20 дБ. Проведено экспериментальное исследование поворотов для реконфигурируемых схем с двухпозиционным управлением, результаты которого подтвердили основные выводы электродинамического моделирования. Предложена рефлектометрическая схема измерения малых коэффициентов отражения, позволяющая исключить влияние на результаты измерений неидеальных элементов измерительного СВЧ-тракта.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070019

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Создание реконфигурируемых устройств СВЧ-диапазона, способных изменять под воздействием управляющих факторов не только свои параметры, но и структуру, а следовательно, и функциональное назначение, активно обсуждается в литературе в настоящее время [1–3]. В ряде работ [4, 5] в качестве основы для построения реконфигурируемых устройств были предложены электромагнитные кристаллы (ЭМК) в виде решетки металлических цилиндров, расположенных внутри плоского волновода (ПВ). Подобными структурами можно управлять разными способами. Простейший из них – механическое погружение металлического цилиндра. Возможно также более сложное электронное управление, которое реализуется путем включения в цилиндр сосредоточенного элемента – полупроводникового диода, емкость которого зависит от напряжения на диоде. Реконфигурируемые устройства с электронным управлением изучены в существенно меньшей степени по сравнению со структурами из сплошных цилиндров. Отметим работы [6, 7], в которых рассматриваются собственные волны в волноводах такого типа.

Достаточно большое число работ [8–10] посвящено исследованию однородных и неоднородных ЭМК из так называемых емкостных цилиндров, т.е. цилиндров, не полностью погруженных в ПВ. Предполагалось, что глубина погружения может использоваться в качестве управляющего фактора, который позволит плавно изменять свойства EBG-волноводов и за счет этого создавать на их основе эффективные СВЧ-элементы и сложные схемы. К сожалению, данное предположение оправдалось не полностью. В упомянутых работах было показано, что во многих случаях плавная трансформация собственных волн EBG-волновода при изменении глубины погружения не наблюдается. Появление емкостной составляющей в импедансе цилиндра, связанной с зазором между цилиндром и экраном ПВ, служит источником появления дополнительных типов волн. Они препятствуют непрерывному преобразованию поля в EBG-волноводе путем изменения глубины погружения цилиндра. Данное обстоятельство существенно уменьшает возможности применения ЭМК из емкостных цилиндров для построения реконфигурируемых СВЧ-устройств.

Альтернативой емкостным цилиндрам могут служить сплошные металлические цилиндры без зазоров. Они имеют индуктивный импеданс, который определяется радиусом цилиндра. Недостатком этих структур является сложность управления их параметрами, что обусловлено измене-

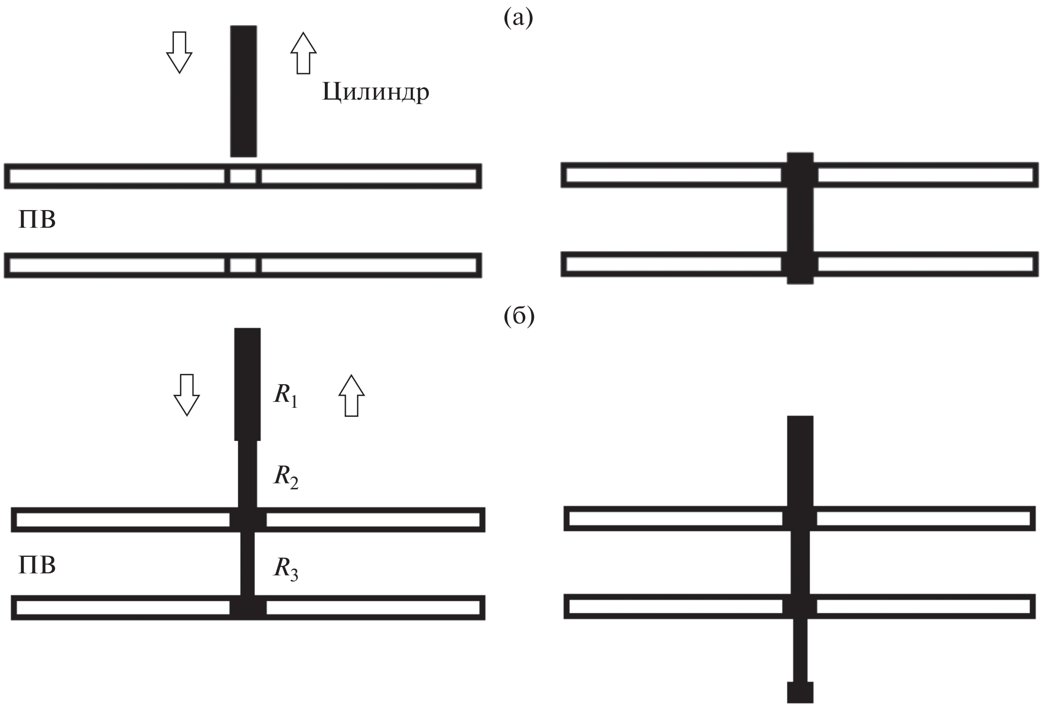



**Рис. 1.** Двухпозиционное (а) и многопозиционное (б) управление.

нием радиуса. Определенные перспективы имеет обсуждаемая в данной работе идея дискретного управления, в рамках которой данный параметр может принимать ряд фиксированных значений. При этом имеется возможность свести задачу механического управления к изменению глубины погружения цилиндра в ПВ.

Реализация дискретного управления поясняется на рис. 1а. В рамках данного варианта все цилиндры, формирующие ЭМК, могут находиться в двух состояниях:

– цилиндр полностью удален из ПВ;

– цилиндр полностью погружен в ПВ.

Предполагается, что все цилиндры в ЭМК имеют одинаковые радиусы. Элемент регулярного ЭМК – это полностью погруженный цилиндр. Дефекты, формирующие волноведущие и другие функциональные области, – это удаленные цилиндры. Такой вариант механического управления уместно назвать двухпозиционным управлением по числу состояний.

Возможно также и многопозиционное управление (рис. 1б). В этом случае в ПВ погружается металлическая структура, состоящая из нескольких цилиндров с разными радиусами. Достоинством представленного на рис. 1а и 1б дискретного управления является применение линейного перемещения такого же, как в случае емкостных цилиндров. Перемещение может осуществляться в ручном режиме и электромеханически. В последнем случае управление осуществляется при помощи электрических сигналов.

Также мы можем отметить всегда имеющуюся возможность управления структурой ЭМК путем его перекомпоновки, которая сводится к погружению в ПВ и удалению из него металлических цилиндров. В этом случае число типов цилиндров с разными радиусами может быть существенно расширено по сравнению с многопозиционным управлением. Создание СВЧ-схем на основе ЭМК в режиме сборки аналогично созданию объемных объектов при помощи конструктора лего, также содержит набор типовых элементов, соединяющихся разными способами. Поэтому данный вариант реконфигурируемого ЭМК можно назвать СВЧ-лего.

Целью данной, а также предполагаемых последующих работ является оценка возможностей устройств на основе ЭМК с двухпозиционным (бинарным) и трехпозиционным управлением. Предполагается провести электродинамическое моделирование, оптимизацию и экспериментальное исследование ряда структур на основе EBG-волноводов. Их совокупность может рассматриваться как элементная база реконфигурируемых СВЧ-схем, с помощью которой можно создавать сложные разветвленные устройства разного функционального назначения.

При формировании указанной элементной базы мы ориентировались на результаты электроди-

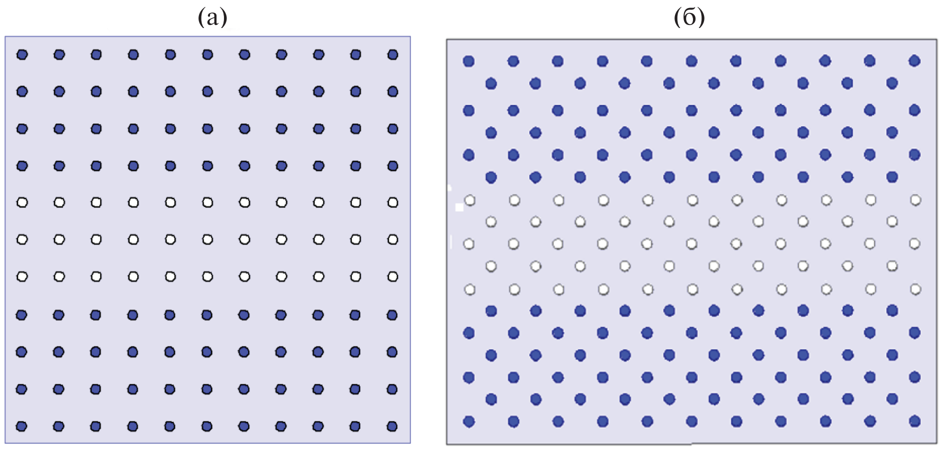



**Рис. 2.** Трехрядный осевой (а) и пятирядный диагональный (б) EBG-волноводы.

намического моделирования, представленные в работах [11, 12]. В них были исследованы однородные ЭМК из металлических цилиндров, а также разные типы одиночных и связанных волноводов. В указанных работах было показано, что EBG-волноводы могут классифицироваться по числу рядов элементов ЭМК, удалением которых образуется волновод, а также по признаку ориентации волновода относительно оптических осей ЭМК. Таким образом, мы имеем одно-, двух-, трехрядные и т.д. волноводы. Кроме того, они могут быть осевыми и диагональными, если речь идет об ЭМК с квадратной сеткой. Особое место занимают ЭМК с гексагональной сеткой, но на данном этапе мы их не рассматриваем.

В данной работе будем рассматривать структуры, в которых используются определенные типы EBG-волноводов. Для осевых волноводов ограничимся трехрядными структурами, имеющими определенные преимущества по сравнению с аналогичными одно- и двухрядными волноводами. Диагональные волноводы имеют более высокую рядность, которая выбирается из условия соответствия ширины и положения рабочего диапазона частот диагонального волновода и трехрядного осевого волновода, выполненных в одном и том же ЭМК. На основании этого условия мы использовали пятирядные диагональные волноводы.

Исходя из этого мы можем сформировать следующий минимальный набор базовых элементов:

– осевой одиночный волновод;

– диагональный одиночный волновод;

– связанные осевые волноводы;

– поворот на 90° осевого волновода;

– поворот на 90° диагонального волновода;

– поворот волновода на 45°;

– *Y*-делитель мощности с входом на осевом волноводе;

– *Y*-делитель мощности с входом на диагональном волноводе;

– Т-образный делитель мощности на осевых волноводах;

– Т-образный делитель мощности на диагональных волноводах;

– направленный ответвитель на связанных волноводах.

Данный перечень включает минимальный набор базовых элементов, который может быть существенно расширен. Мы рассмотрим различные повороты EBG-волноводов в ЭМК с двух- и трехпозиционным управлением.

На первом этапе проведена оптимизация поворотов и определена их структура. Для этого мы используем систему электродинамического моделирования HFSS. На втором этапе проведено экспериментальное исследование элементов с двухпозиционным управлением. Поскольку экспериментальное исследование предполагает измерение достаточно малых коэффициентов отражения, то для его выполнения была разработана специальная рефлектометрическая методика, позволившая исключить влияние на результаты измерений неидеальных переходов с коаксиальной линии на металлический волновод и с металлического волновода на EBG волновод.

## 2. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВОРОТОВ EBG-ВОЛНОВОДОВ С ДВУХПОЗИЦИОННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Осевой трехрядный и диагональный пятирядный EBG-волноводы изображены на рис. 2. Видно, что они получаются путем удаления из ЭМК соответственно трех и пяти рядов цилиндров, ориентированных вдоль главных и побочных (диагональных) оптических осей кристалла. На

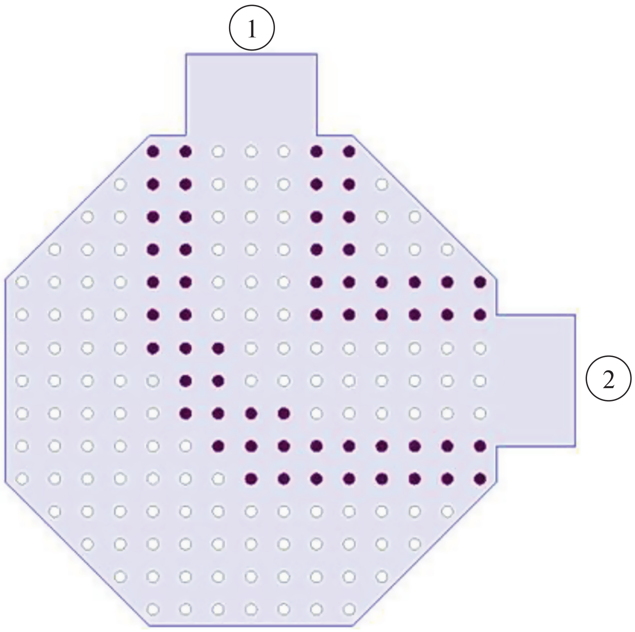



**Рис. 3.** Модель поворота на 90° осевого волновода (здесь и далее цифрами 1, 2 в кружочках обозначены выходы).

основе результатов работ [11, 12] были выбраны параметры ЭМК: период $P = 5.75$ и радиус цилиндра $R = 1$. Высота ЭМК $h = 10$. Все размеры здесь и далее приводятся в миллиметрах. Данные параметры соответствуют рабочему диапазону частот 7...13 ГГц стандартного металлического волновода сечением 23 × 10.

На практике волноводные элементы имеют более узкий рабочий диапазон, так как на нижних частотах их характеристики ухудшаются из-за близости к критической частоте основной волны, а на верхнем краю полосы из-за появления паразитных резонансов, связанных с высшими типами волн. Поэтому при оптимизации EBG-элементов мы стремились к достижению приемлемых характеристик в диапазоне частот 8...12 ГГц.

Повороты EBG-волноводов относятся к классу H-плоскостных волноводных поворотов, которые известны в теории и технике СВЧ-устройств [13]. Для достижения хорошего согласования данного элемента используются два подхода: создание изгиба волновода с постоянным радиусом и излом волновода с согласующим зеркалом. Дискретная структура EBG-волновода плохо подходит для формирования плавных нерегулярностей, таких как изгиб. Поэтому основным направлением было выбрано применение согласующего зеркала.

На примере поворота осевого волновода на 90° мы поясним процесс поиска оптимального решения, который связан с изучением различных вариантов устройства. В качестве отправной точки используется исходный вариант 1 поворота осевого волновода на 90° с согласующим зеркалом, представленный на рис. 3. Далее в его конструкцию вносятся изменения, направленные на улучшение технических характеристик. Были рассмотрены три конструкции – варианты 2–4. Из них выбирается устройство с лучшими параметрами – оптимальный вариант. Для поворотов других типов мы не будем подробно рассматривать их оптимизацию и ограничимся анализом базового и оптимального вариантов.

Отметим, что модель, использованная для электродинамического моделирования, содержит выходы в виде отрезков стандартных металлических волноводов указанного выше сечения. По этой причине на расчетные характеристики оказывают влияние также переходы со стандартного волновода на EBG-волновод. Однако, как отмечается в работах [11, 12], коэффициент отражения от таких переходов весьма мал. Он находится в диапазоне –(20...30) дБ. Поэтому далее мы не предпринимали специальных мер для выделения вклада собственно EBG-элемента в результирующий коэффициент отражения, предполагая, что они отличаются незначительно.

На рис. 4 представлена частотная зависимость модуля коэффициента отражения поворота (кривая *1*). Видно, что область его согласования смещена в сторону высоких частот. По этой причине в целевом диапазоне 8...12 ГГц согласование находится на неудовлетворительном уровне. Можно предположить, что большой уровень отражения обусловлен сужением волноведущего канала в области размещения зеркала. Такое сужение эквивалентно появлению участка запредельного волновода, являющегося источником рассогласования устройства.

Для устранения этого недостатка были рассмотрены варианты 2–4 поворота, представленные на рис. 5а–5в. Этим структурам соответствуют кривые *2*–*4* на рис. 4. Видно, что удаление элемента ЭМК в вершине клиновидной области при $x = 2P$, $y = 2P$ (вариант 2, кривая *2*) положительно сказалось на согласовании поворота. Коэффициент отражения в области частот 9.2...13 ГГц уменьшился до уровня –15 дБ. Однако в нижней части диапазона он по-прежнему достаточно высокий.

В варианте 3 цилиндр при $x = 2P$, $y = 2P$ обратно введен в ЭМК, но зеркало, расположенное под углом 45° к осям волноводов, смещено на один период по сравнению с вариантами 1 и 2 (см. рис. 4, кривая *3*). Видно, что коэффициент отражения находится ниже уровня –15 дБ в весьма широком диапазоне 7...12.3 ГГц.

Дальнейшее расширение переходной области поворота, соединяющей EBG-волноводы (см. рис. 5, вариант 4), не привело к улучшению его характеристик. Данной структуре соответствует кривая *4* на рис. 4. Видно, что расширение области

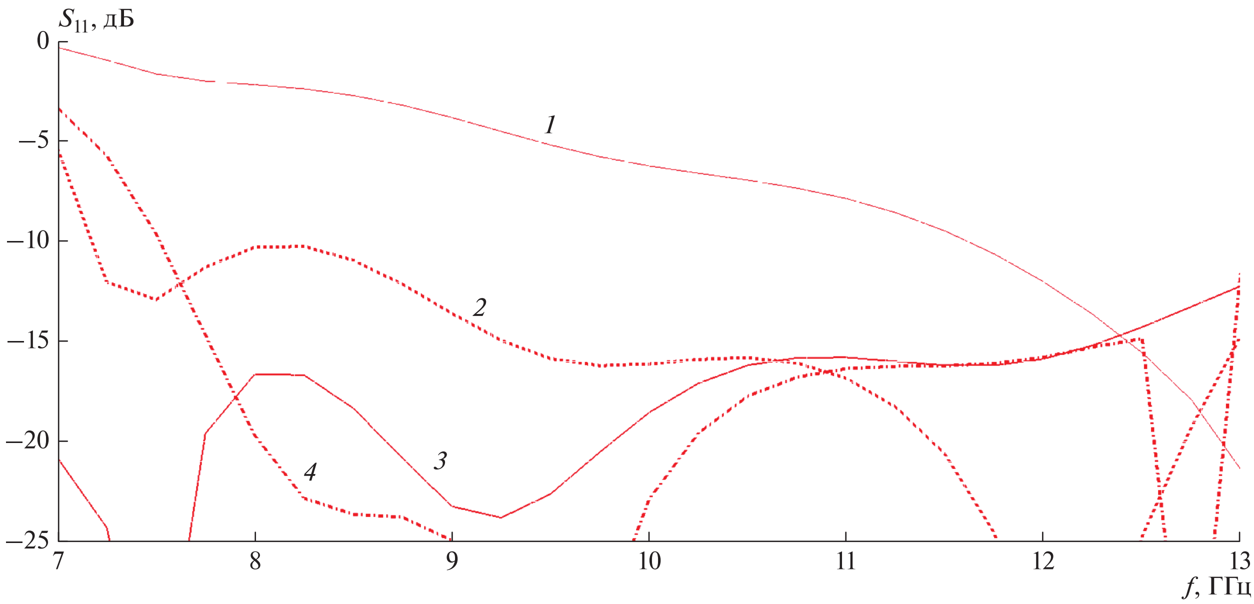



**Рис. 4.** Частотная характеристика поворота на 90° осевого волновода с двухпозиционным управлением: кривая *1* для поворота, представленного на рис. 3, кривые *2*–*4* – на рис. 5а–5в соответственно.

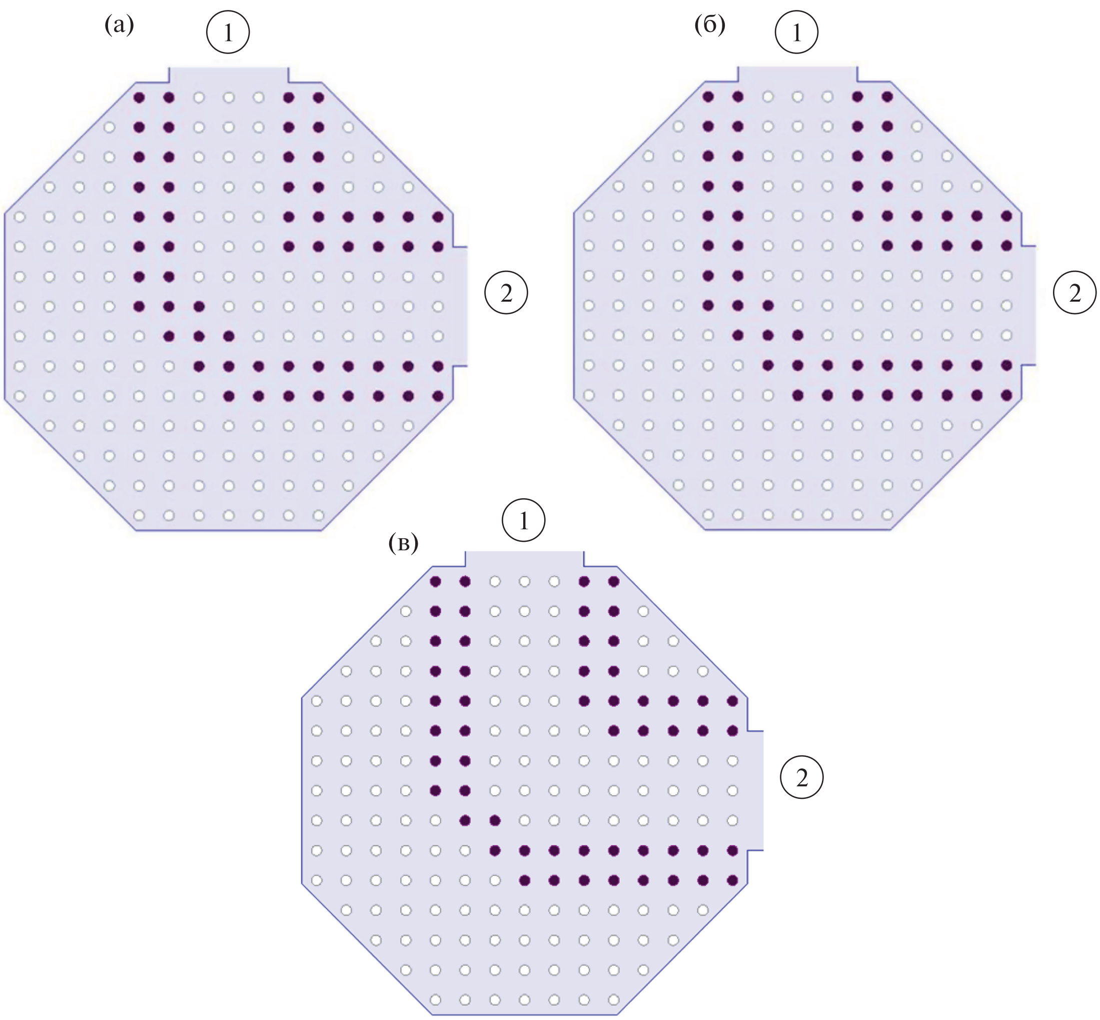



**Рис. 5.** Варианты поворотов 2 (а), 3 (б) и 4 (в) осевого волновода на 90°.

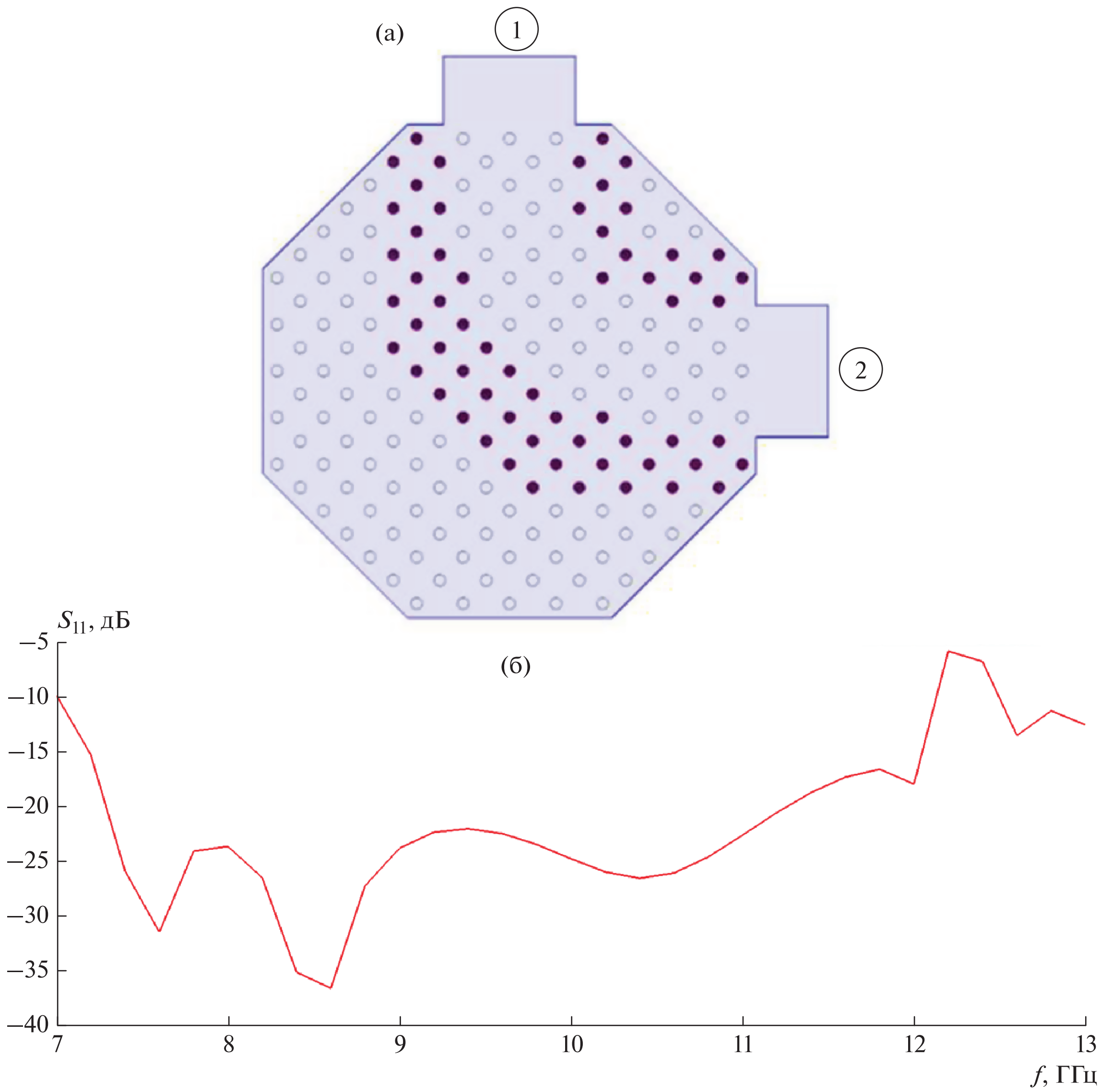



**Рис. 6.** Оптимальный вариант поворота диагонального волновода на 90° (а) и частотная зависимость коэффициента отражения этого поворота (б).

соединения волноводов приводит к появлению резонанса на частотах выше 12.5 ГГц, который проявляется в резких изломах частотной характеристики. Согласование в нижней части диапазона 7...8 ГГц ухудшилось по сравнению с вариантом 3, однако в области 8...10.2 ГГц коэффициент отражения существенно уменьшился до значений, меньших –20 дБ.

Отметим, что дальнейшие манипуляции со структурой поворота не привели к заметному улучшению его характеристик. Оптимальными структурами мы можем считать конкурирующие варианты 3 и 4. Вариант 3 имеет более широкую полосу согласования, а в варианте 4 она *уже*, но уровень коэффициента отражения в ней ниже. В целом можно сделать вывод, что поворот осевого волновода на 90° может быть согласован в целевом диапазоне 8...12 ГГц на уровне –15 дБ. Отметим, что данный уровень коэффициента отражения является типовым для элементов с двухпозиционным управлением. За редким исключением согласовать их на более низком уровне отражения в указанной полосе частот не удается.

Оптимизация поворотов осевого волновода на 45° и диагонального волновода на 90° проводилась в рамках изложенных выше подходов. Поэтому не будем подробно описывать все этапы поиска оптимальных конструкций элементов, а приведем окончательные их варианты.

На рис. 6а показана конструкция поворота диагонального волновода на 90°, а на рис. 6б рассчитанная для него частотная характеристика коэффициента отражения. Видно, что в диапазоне

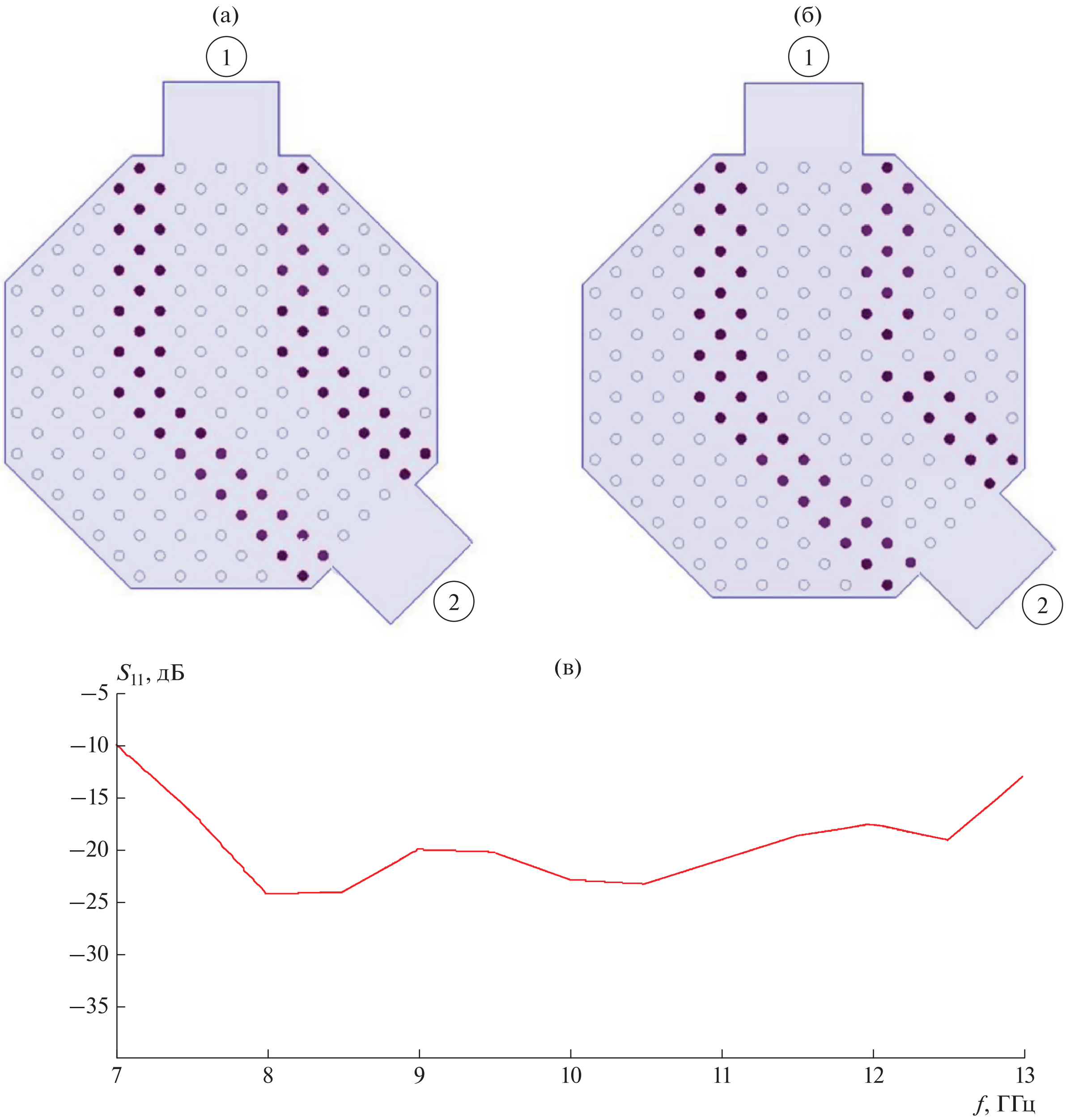



**Рис. 7.** Базовый (а) и оптимальный (б) варианты поворота на 45° и частотная характеристика оптимального варианта (в).

7.2...12 ГГц коэффициент отражения ниже уровня −15 дБ, а в диапазоне 7.2...11.2 ГГц он не превышает значения −20 дБ. На частотах выше 12 ГГц можем отметить резкие изломы частотной характеристики, обусловленные уже отмеченными выше резонансами внутри полости поворота.

Следующим исследованным элементом является поворот волновода на 45°. Особенностью этого элемента является то, что один его вход выполнен на осевом волноводе, а второй – на диагональном. Базовая конструкция поворота показана на рис. 7а. Она представляет собой простое сочленение осевого и диагонального волноводов.

Центрами рассеяния в такой структуре естественным образом являются точки соединения стенок волноводов. В ходе оптимизации в этих местах произошли изменения в положении цилиндров. В результате получена оптимальная конструкция двухпозиционного поворота на 45°, которая показана на рис. 7б. На рис. 7в представлена ее частотная характеристика. Видно, что поворот данного типа согласован в полосе 7.7...11.2 ГГц по уровню −20 дБ, а по уровню −15 дБ он имеет полосу согласования 7.3...12.8 ГГц. Данный результат является наилучшим для поворотов, исследованных в данной работе.

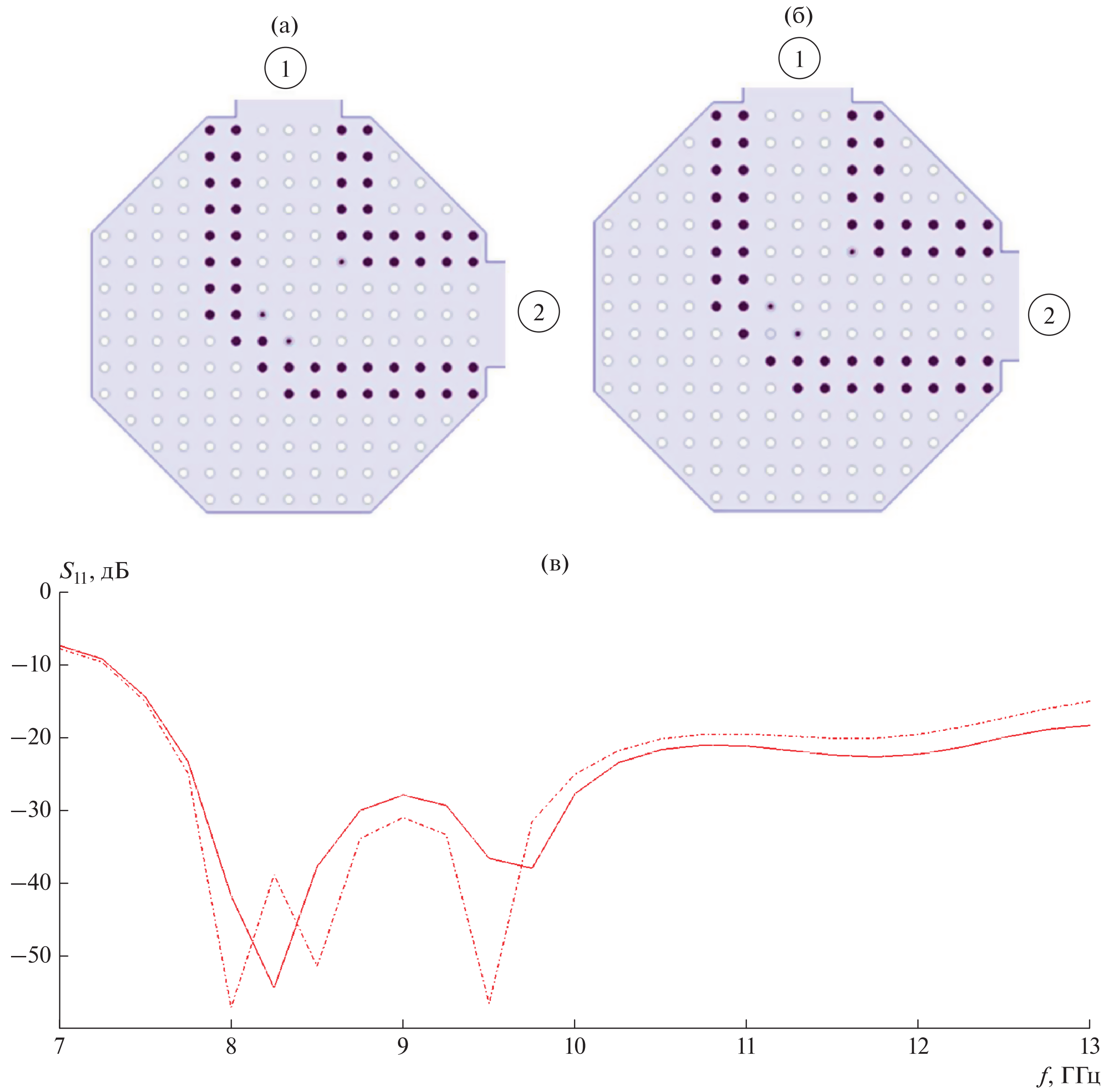



**Рис. 8.** Оптимальные повороты на 90° осевого волновода с трехпозиционным управлением (а, б) и их частотные характеристики (в): *1* (для а) и *2* (для б).

## 3. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВОРОТОВ EBG-ВОЛНОВОДОВ С ТРЕХПОЗИЦИОННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Следующий этап электродинамического моделирования состоит в исследовании и оптимизации параметров поворотов с трехпозиционным управлением, которое подразумевает применение цилиндров трех радиусов, равных 1, 0.5 и 0. Нулевой радиус соответствует удаленному из ЭМК цилиндру.

На рис. 8а и 8б показаны конструкции двух незначительно отличающихся вариантов поворотов осевых волноводов с трехпозиционным управлением на 90°. Видно, что большинство цилиндров имеют стандартный радиус, равный 1. Три элемента ЭМК, расположенные в вершине поворота и на его зеркале, имеют радиус меньше 0.5. Расширение набора размеров цилиндров позволило улучшить частотную характеристику данного волноводного элемента по сравнению с двухпозиционным вариантом (см. рис. 4), который обеспечивал согласование на уровне −15 дБ. Трехпозиционный поворот, показанный на рис. 8б, обеспечивает согласование на уровне −20 дБ в полосе 7.7...12.5 ГГц. Частотные характеристики обоих поворотов, представленных на рис. 8а,8б, показаны на рис. 8в (кривые *1*, *2* соответственно).

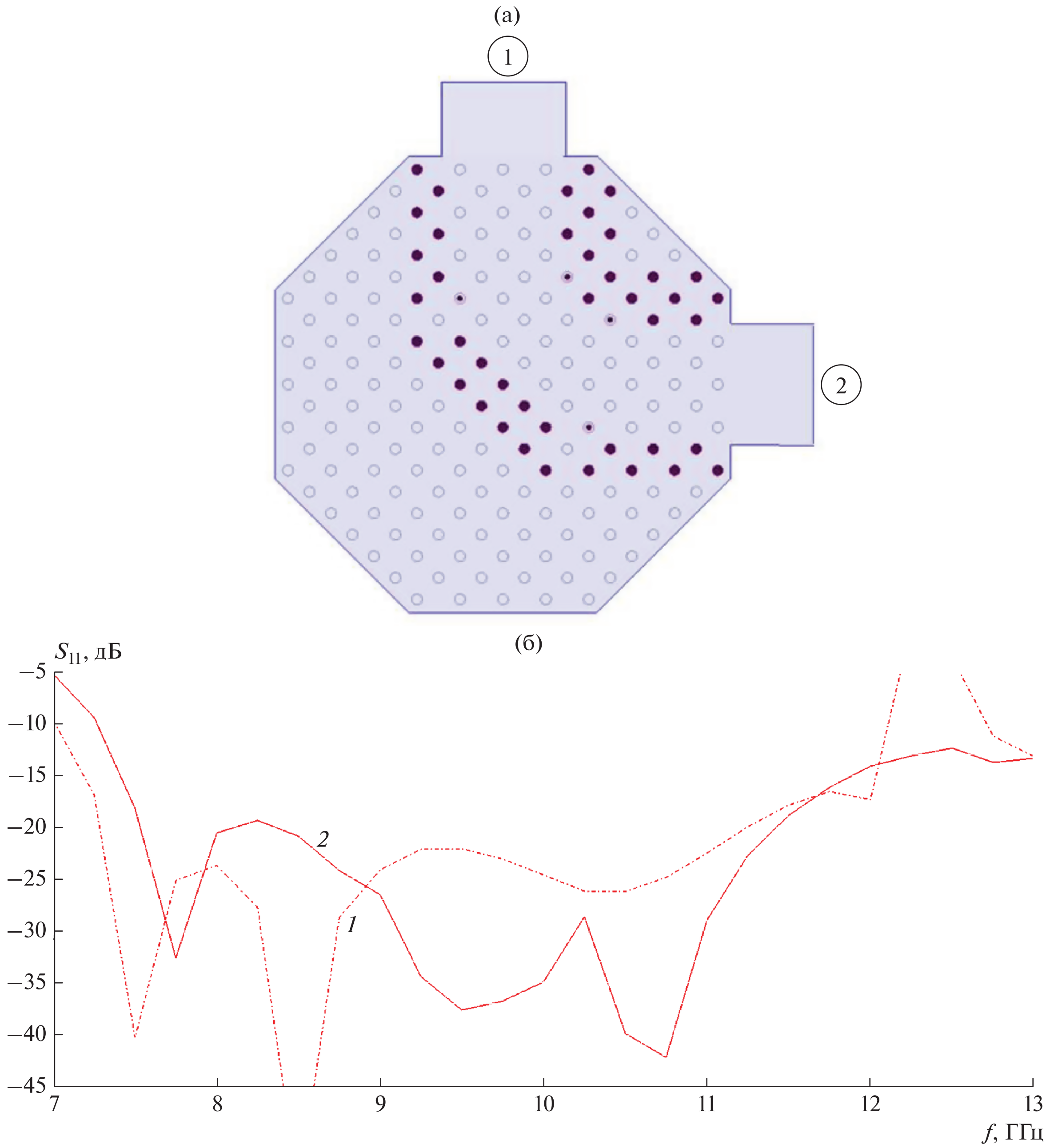



**Рис. 9.** Поворот диагонального волновода с трехпозиционным управлением на 90° (а) и частотные характеристики поворотов (б) с двухпозиционным (*1*) и трехпозиционным (*2*) управлением.

Поворот диагонального волновода на 90°, изображенный на рис. 6 в двухпозиционном варианте, продемонстрировал достаточно хорошие характеристики (см. рис. 7). Он согласован по уровню –20 дБ в полосе 7.3...11.2 ГГц. Согласованию на более высоких частотах мешает резонанс, возникающий в полости перехода.

Переход к трехпозиционному управлению не дал существенного улучшения параметров поворота. На рис. 9а показан вариант трехпозиционного поворота с лучшими характеристиками, которые показаны на рис. 9б для устройств с двух- и трехпозиционным управлением. Видно, что трехпозиционный вариант имеет полосу рабочих частот 7.5...11.5 ГГц, определенную по уровню –20 дБ, которая ближе к целевому диапазону 8...12 ГГц, чем в случае двухпозиционного варианта. Однако расширения полосы частот добиться не удалось.

Похожая ситуация имеет место в случае поворота на 45°. Исходный двухпозиционный вариант, показанный на рис. 7б, уже имел достаточно хорошие параметры. Поэтому существенного их

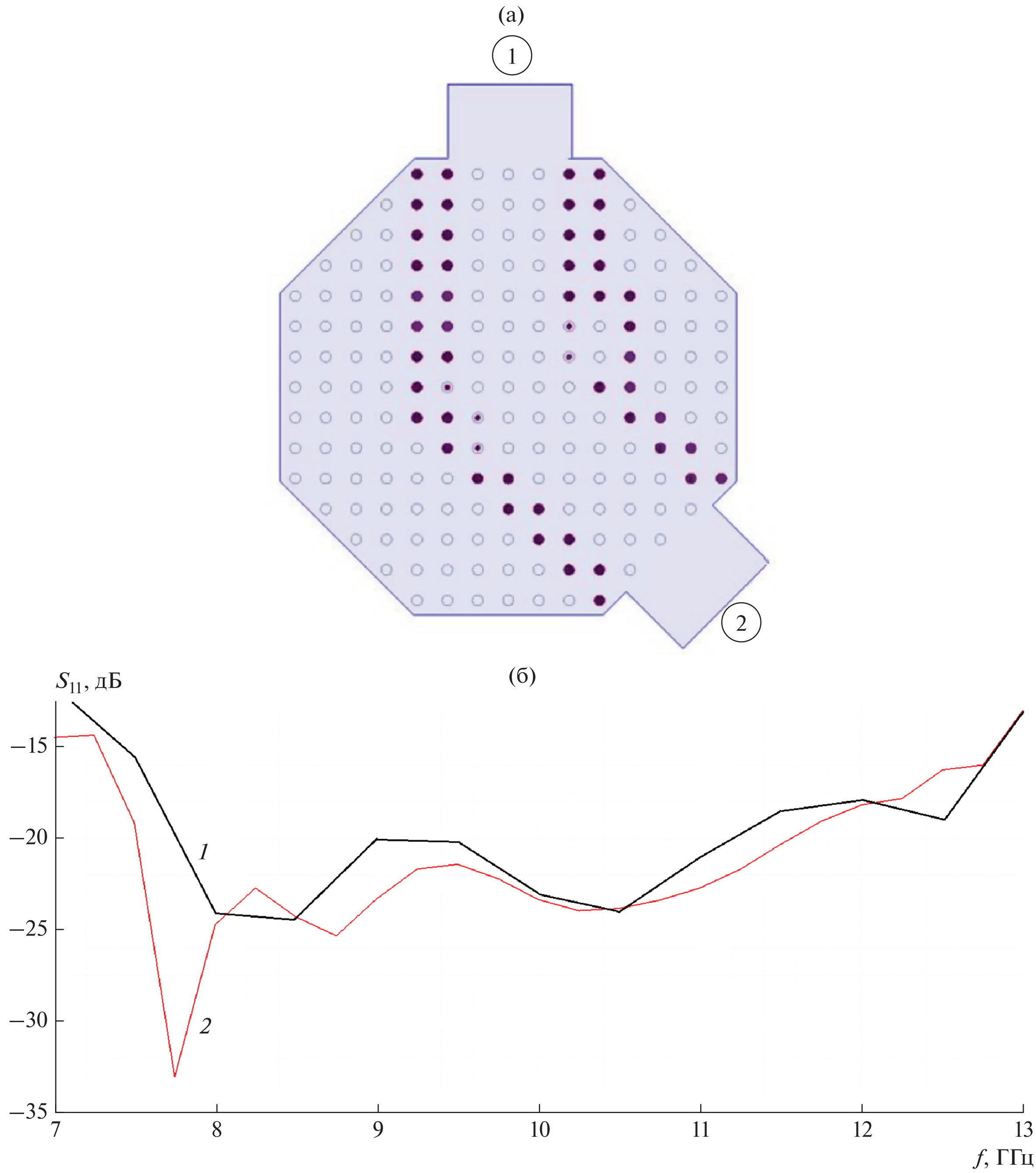



**Рис. 10.** Поворот на 45° с трехпозиционным управлением (а) и частотные характеристики поворотов (б) с двухпозиционным (*1*) и трехпозиционным (*2*) управлением.

улучшения при переходе к трехпозиционному управлению было трудно ожидать. Тем не менее можем отметить некоторое заметное расширение полосы согласования и уменьшение уровня отражения в структуре, показанной на рис. 10а. Ее частотной характеристике соответствует кривая *2* на рис. 10б. Для сравнения приведена также кривая *1*, полученная для двухпозиционного поворота. Можно отметить, что удается достигнуть уровня согласования –20 дБ в полосе 7.5...11.5 ГГц.

## 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ОБРАЗЕЦ

Для проведения экспериментальных исследований был изготовлен образец, представленный на рис. 11а. Он состоит из двух металлических пластин восьмиугольной формы, которые выполняют функцию экранов ПВ. Толщина пластин равна 3. В экранах ПВ имеется система круглых отверстий с диаметром 2. В эти отверстия погружаются металлические цилиндры длиной 16, имеющие расширения (рис. 11б), которые ис-

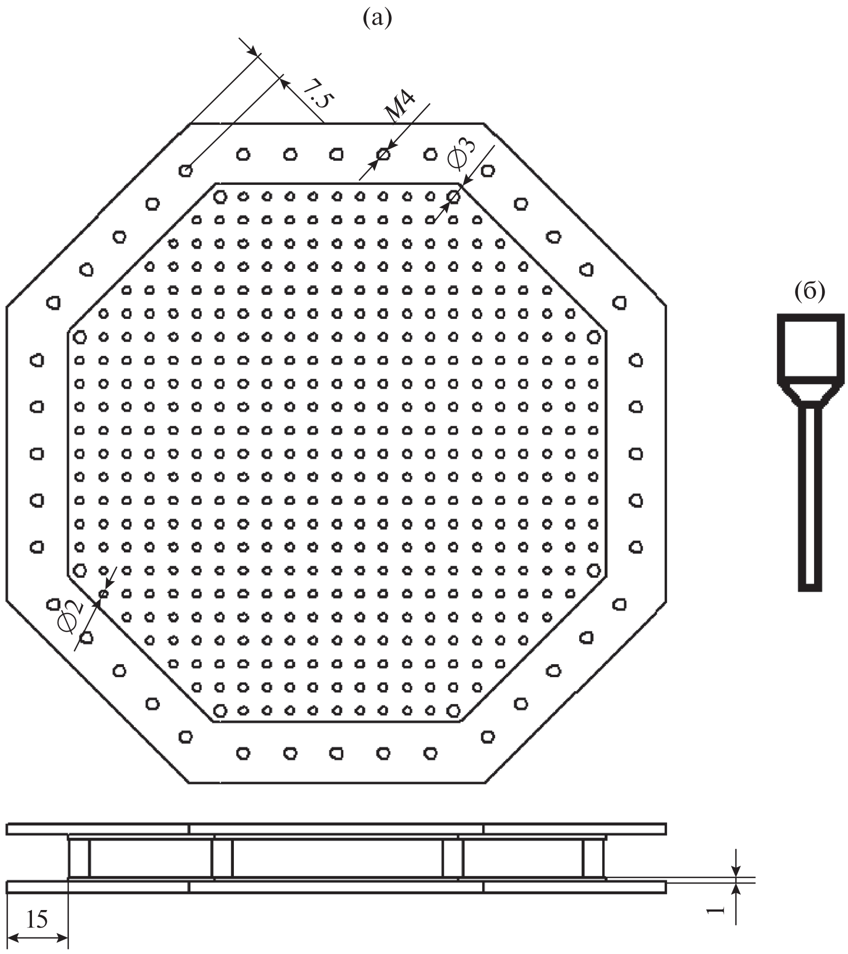



**Рис. 11.** Образец для экспериментального исследования (а) и элемент ЭМК (б).

пользуются для их фиксации в отверстиях. Расстояние между экранами равно 10, что совпадает с высотой стандартного металлического волновода сечением 23 × 10. Отверстия формируют квадратную сетку ЭМК с периодом 5.75. Механически экраны ПВ закрепляются при помощи цилиндрических стоек диаметром 6 и высотой 10. Стойки крепятся к экранам при помощи винтов М3.

По краям металлических пластин имеется выборка шириной 15 и глубиной 1. Она предназначена для размещения между экранами металлического волновода, имеющего стенки толщиной 1. Металлические волноводы используются для возбуждения EBG-структур. Восьмиугольная форма образца позволяет исследовать элементы, имеющие выходы как в виде осевых, так и в виде диагональных волноводов.

## 5. РЕФЛЕКТОМЕТРИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Из результатов электродинамического моделирования, представленных в разд. 2,3, видно, что задача экспериментального исследования EBG-структур сводится к измерению сравнительно малых коэффициентов отражения в достаточно широкой полосе частот. Решение этой задачи предъявляет жесткие требования к измерительной аппаратуре. В частности, следует отметить, что доступные измерительные приборы МИКРАН имеют выходы на коаксиальной линии и, таким образом, для их использования необходимы коаксиально-волноводные переходы. К сожалению, их характеристики не позволяют выполнить с необходимой точностью измерение коэффициента отражения в требуемой полосе частот, так как собственный коэффициент отражения перехода достигает уровня ниже –20 дБ лишь в диапазоне 10...12 ГГц.

Для решения данной проблемы была использована специальная рефлектометрическая методика измерений, которая позволяет практически полностью исключить негативное влияние коаксиально-волноводных переходов. Структурная схема измерительной установки показана на рис. 12. Она включает коаксиально-волноводный переход (КВП), диафрагму, размещенную между волно-

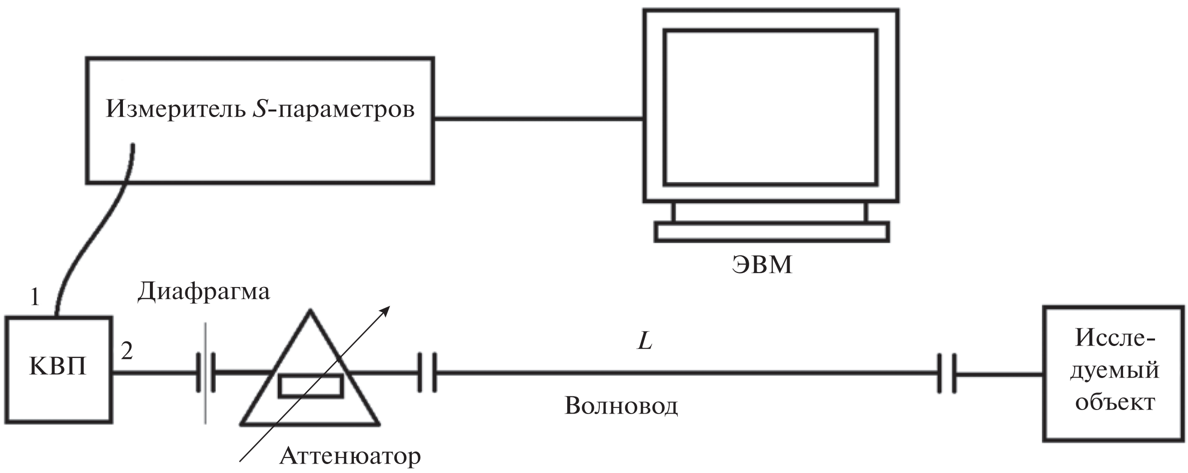



**Рис. 12.** Рефлектометрическая схема измерений.

водными фланцами КВП и перестраиваемого аттенюатора, волноводную секцию длиной $L$ и исследуемый объект, который присоединяется к волноводу при помощи фланцев.

Известные соотношения теории цепей СВЧ [14] позволяют записать суммарный коэффициент отражения $R$ на входе измерителя $S$-параметров следующим образом:

$$R = S_{110} + \frac{S_{120}^2 R_x \exp(-2i\gamma L - 2\Delta)}{1 - S_{220} R_x \exp(-2i\gamma L - 2\Delta)}, \quad (1)$$

где $R_x$ – коэффициент отражения исследуемого объекта, $\mathbf{S}_0$ – матрица рассеяния КВП вместе с диафрагмой,

$$\gamma = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2} \quad (2)$$

– постоянная распространения волновода ($k$ – волновое число свободного пространства, $a = 23$), $\Delta$ – ослабление сигнала в аттенюаторе. Вход 1 КВП соответствует коаксиальному входу, а вход 2 – волноводному.

Допуская, что матрица $\mathbf{S}_0$ является матрицей рассеяния унитарного четырехполюсника [14], можем получить из формулы (1) выражение для модуля коэффициента отражения:

$$\begin{gathered} |R|^2 = \frac{a + b\cos\theta}{c + b\cos\theta}, \\ a = |S_{110}|^2 + |R_x|^2 \exp(-4\Delta), \\ b = 2|S_{110}||R_x| \exp(-4\Delta), \\ c = 1 + |S_{110}|^2 |R_x|^2 \exp(-4\Delta), \\ \theta = -2\gamma L + \varphi_{220} + \varphi_x, \end{gathered} \quad (3)$$

где $\varphi_{220}$ – фаза параметра $S_{220}$, а $\varphi_x$ – фаза коэффициента отражения $R_x$.

Отметим, что при изменении в широкой полосе частот функция $\cos\theta$ является быстро осциллирующей функцией за счет выбора длины волноводной секции $L$. При этом параметры $a$, $b$, $c$ меняются значительно медленнее. Причем разница в скорости изменения может регулироваться в достаточно широких пределах выбором параметра $L$. Данный фактор позволяет эффективно использовать преобразование Фурье и связанную с ним процедуру фильтрации для выделения из функции $|R(\theta)|$ полезной составляющей, пропорциональной интересующему нас параметру $R_x$.

Нетрудно показать, что первая гармоника функции $|R(\theta)|^2$ пропорциональна параметру $b$, если он достаточно мал. Более точная оценка показывает, что с относительной погрешностью 0.05 первая гармоника пропорциональна $b$ при $b < 0.3$. Данное условие нетрудно выполнить, выбирая затухание аттенюатора $\Delta$.

Изложенные выводы справедливы, когда параметр $\theta$ изменяется в бесконечных пределах. На практике он меняется в широких, но конечных пределах. За счет этого происходит расширение спектра функции $|R(\theta)|^2$ и возникают связанные с этим погрешности. Однако их появление не меняет в целом алгоритм обработки сигнала, который поступает в ЭВМ от измерителя $S$-параметров.

Отметим, что приведенные выше выводы были сделаны на основе анализа суммарного коэффициента отражения как функции параметра $\theta$. В реальности измерительный прибор передает в компьютер сигнал, являющийся функцией частоты $f$. При этом постоянная распространения волновода (2) нелинейно зависит от частоты, и, таким образом, функция $|R(f)|^2$ имеет паразитную частотную модуляцию, обусловленную дисперсией волноводной волны. Наличие такой модуляции безусловно является негативным эффектом, который приводит к “размытию” спектра сигнала и затрудняет его фильтрацию. Поэтому весьма полезной процедурой, которая предшествует фильтрации, оказалось преобразование частоты следующего вида:

$$f_m = \sqrt{f^2 - f_c^2}, \quad (4)$$

где $f_c = 150/a$ – критическая частота в гигагерцах основной волны волновода, $a = 23$. После применения преобразования (4) функция $|R(f_m)|^2$ не имеет паразитной частотной модуляции.

Для получения достоверной количественной оценки коэффициента отражения измерительная схема должна быть откалибрована. Калибровка включает обязательное измерение, когда в качестве нагрузки используется короткозамыкатель с коэффициентом отражения, равным минус единице. Также может быть проведено измерение сигнала с согласованной нагрузкой, у которой $R_x = 0$. Данное измерение не является обязательным. Как следует из формул (3), из него можем найти параметр $a$. Однако, как отмечалось выше, он является медленно меняющейся функцией частоты $f_m$. Ее вклад легко устраняется путем фильтрации. Калибровка по короткозамыкателю позволяет найти параметр $u_k$ как функцию переменной $f_m$:

$$u_k = 2|S_{110}|\exp(-4\Delta). \quad (5)$$

Измерение коэффициента отражения с неизвестной нагрузкой и последующая фильтрация дают сигнал

$$u_x = 2|S_{110}||R_x|\exp(-4\Delta). \quad (6)$$

С учетом (5) получаем

$$|R_x| = u_x/u_k. \quad (7)$$

Как видим, описанная выше процедура измерения коэффициента отражения не зависит от качества КВП, так как элементы его матрицы рассеяния слабо зависят от частоты и их влияние устраняется в ходе фильтрации измеренных сигналов. Более того, мы специально вводим диафрагму между КВП и волноводной секцией с целью получить удобное для измерений значение коэффициента отражения $S_{110}$, которое регулируется размерами окна диафрагмы.

Для тестирования измерительной методики, описанной выше, была изготовлена емкостная волноводная диафрагма, коэффициент отражения от которой предварительно рассчитывался с помощью HFSS. Диафрагма имеет размер $d = 6.9$ и толщину $t = 0.3$.

Измеренный модуль коэффициента отражения как функция модифицированной частоты $f_m$ при калибровке схемы на короткозамыкатель показан на рис. 13а. Спектр данного сигнала, полученный путем быстрого преобразования Фурье, представлен на рис. 13б. Видно, что он состоит из ряда локализованных спектральных компонент, соответствующих гармоникам функции (3). В идеальном случае спектральные компоненты имеют вид дельта-функций. В измеренном сигнале они имеют конечную ширину. Видна низкочастотная составляющая, соответствующая медленно меняющимся функциям, а также первая, вторая и т.д. гармоники сигнала. Появление гармоник связано с многократными отражениями волн между КВП и короткозамыкателем. Такая структура спектра позволяет легко определить границы полосы пропускания фильтра, который должен выделить первую гармонику. Отметим, что высокая степень локализации спектральных составляющих во многом обеспечена применением преобразования (4).

Задавая границы полосы пропускания фильтра от $n = 80$ до 150, можем обеспечить надежное выделение первой гармоники. Калибровочный сигнал после фильтрации показан на рис. 14. Видно, что он имеет высокочастотное заполнение и медленно меняющуюся амплитуду, которая в данном исследовании представляет наибольший интерес. Для ее выделения необходимо осуществить преобразование, эквивалентное детектированию сигнала. Мы использовали операцию взятия модуля сигнала, после чего вновь находили спектр сигнала, из которого выделялась низкочастотная компонента. Обратное преобразование Фурье от выделенной части спектра дает искомую огибающую сигнала, которая и есть сигнал $u_k$ (5).

Аналогично описанные выше операции фильтрации и детектирования проводятся и с сигналом, полученным от исследуемой нагрузки. Эти операции позволяют получить функцию $u_x$ и коэффициент отражения (7). На рис. 15 приведена частотная зависимость коэффициента отражения от диафрагмы. Кривая *1* получена путем измерений, а кривая *2* рассчитана с помощью HFSS. Видно, что отличие измеренных данных от расчетных не превышает 0.6 дБ. При этом сам коэффициент отражения находится на уровне –20 дБ в нижней части частотного диапазона, возрастая до –15 дБ в его верней части.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ EBG-СТРУКТУР

На первом этапе экспериментальных исследований был исследован отрезок EBG-волновода с двумя переходами на стандартный волновод. Длина отрезка EBG-волновода составила 23 периода с выбранным значением $P = 5.75$. Результаты измерений приведены на рис. 16. Качественно экспериментальная частотная характеристика совпадает

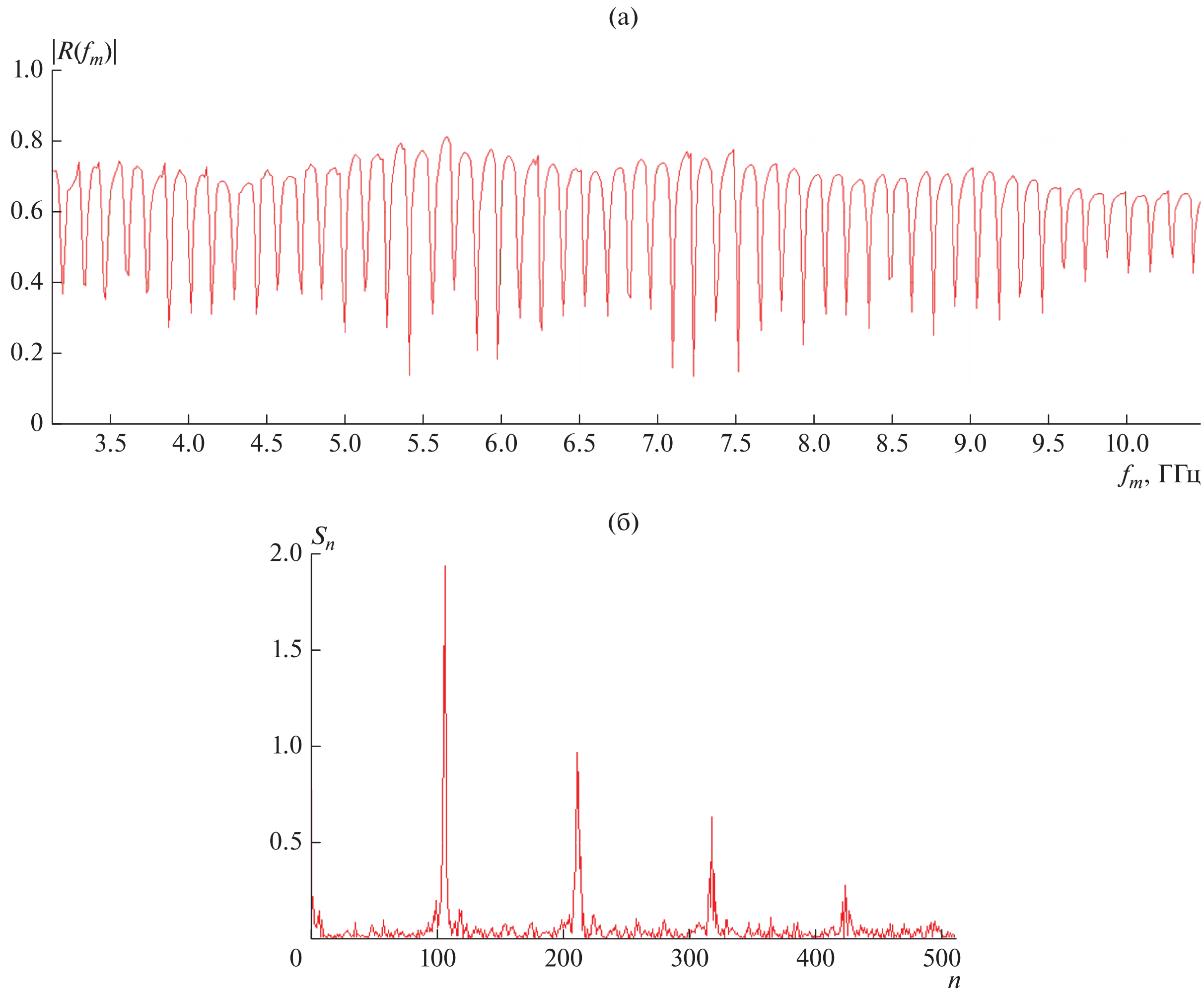



**Рис. 13.** Частотная зависимость модуля коэффициента отражения при калибровке на короткозамыкатель (а) и спектр калибровочного сигнала (б).

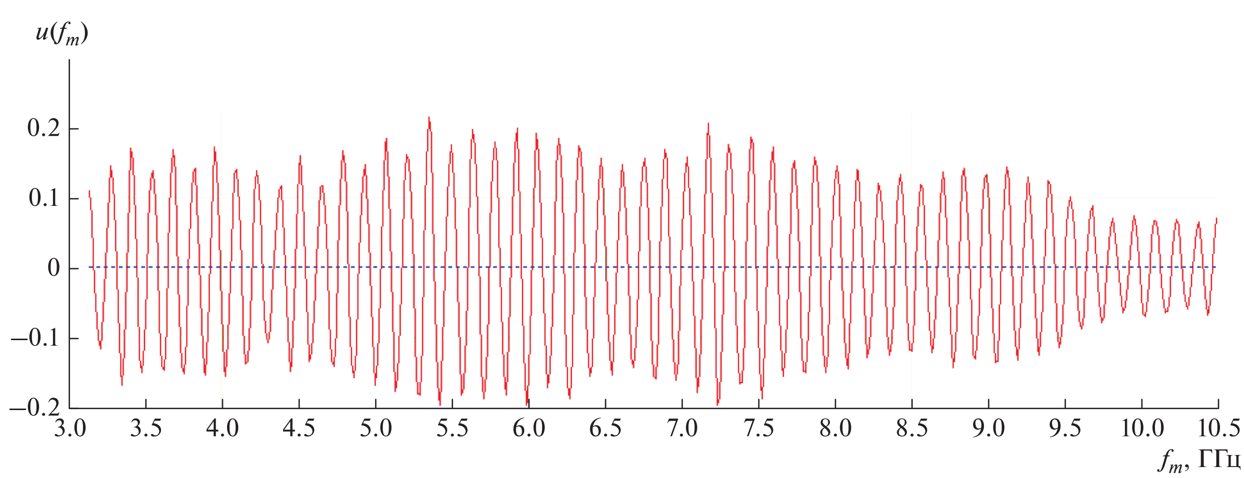



**Рис. 14.** Калибровочный сигнал после фильтрации.

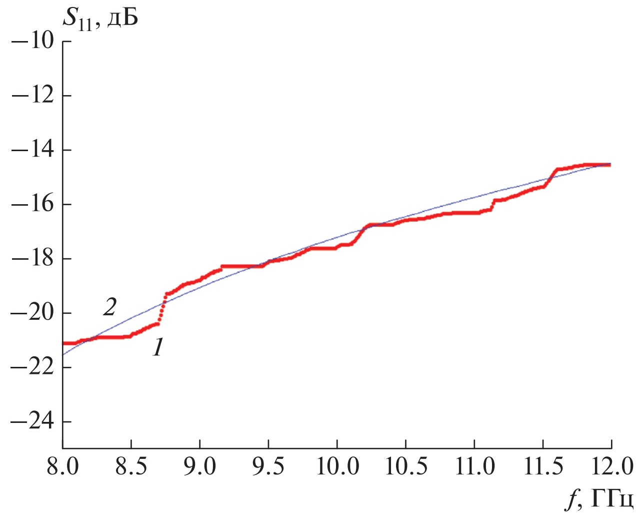



**Рис. 15.** Измеренная (*1*) и расчетная (*2*) частотные зависимости коэффициента отражения от диафрагмы.

с расчетной. Наблюдаются характерные пульсации коэффициента отражения, обусловленные интерференцией волн, отраженных от двух переходов. Однако уровень коэффициента отражения заметно превосходит расчетные значения. В центре рабочего диапазона 8...12 ГГц амплитуда пульсаций достигает значений −(24...25) дБ, тогда как по расчетам они должны находиться на уровне −30 дБ. На краях диапазона амплитуда пульсаций находится на уровне −20 дБ.

Предполагая, что переходы имеют одинаковые коэффициенты отражения, можем сделать вывод, что каждый из них согласован на уровне не лучше, чем −26 дБ. Этому уровню согласования соответствует достаточно малое отражение. Однако в отличие от расчетной ситуации, даже такие отражения от переходов могут вносить существенные искажения в результирующий коэффициент отражения измеряемого поворота EBG-волновода, который, как показано в разд. 2, находится на уровне −(15...20) дБ. Причина увеличения коэффициента отражения в экспериментальном образце может быть обусловлена особенностями конструкции перехода, показанной на рис. 17. Данная конструкция допускает зазоры между стандартными волноводами и экранами ПВ, поскольку в ней стандартный волновод фиксируется только по вертикали при помощи прижимного винта.

Дальнейшие исследования показали, что паразитный сигнал, порожденный переходами, как правило, меняется в зависимости от частоты заметно быстрее полезного сигнала, создаваемого волноводным элементом. Это свойство полезного сигнала позволяет использовать для его выделения процедуру фильтрации или усреднения, которая подавляет быстро изменяющиеся компоненты.

Для пояснения данного подхода рассмотрим частотные характеристики осевого поворота EBG-волновода на 90°. Структура поворота показана на рис. 5в. На рис. 18а представлена фотография образца для экспериментального исследования, а на рис. 18б показана его частотная характеристика до усреднения (кривая *1*) и после усреднения (кривая *2*). На кривой *1* хорошо видны периодические пульсации, порожденные переходами, которые накладываются на некоторый средний уровень, определяемый кривой *2*. В этом случае кривую *2* можем рассматривать как частотную характеристику собственно исследуемого поворота. Для сравнения на рис. 19 показаны экспериментальная и расчетная частотные характеристики поворота осевого волновода на 90°.

Структура исследованного поворота диагонального волновода на 90° показана на рис. 6. Получен-

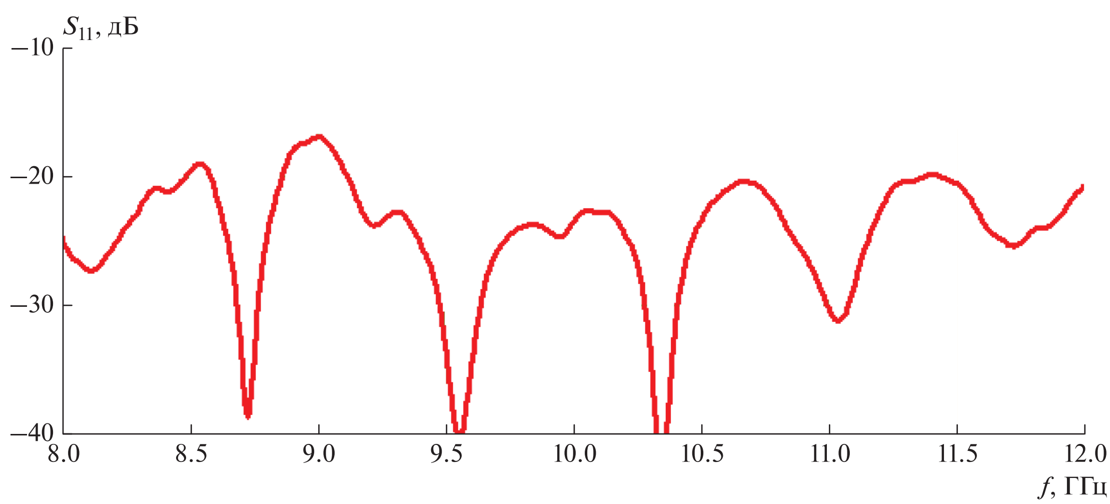



**Рис. 16.** Частотная характеристика EBG-волновода с двумя переходами на стандартный волновод.

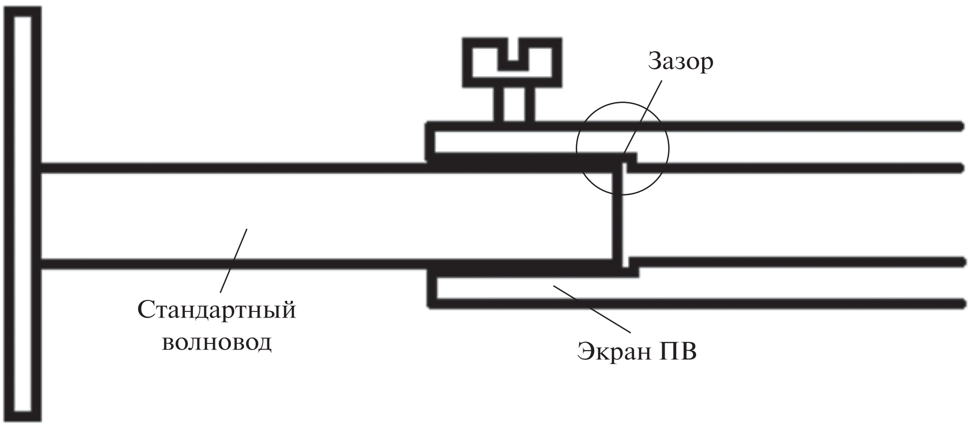



**Рис. 17.** Узел возбуждения EBG-волновода.

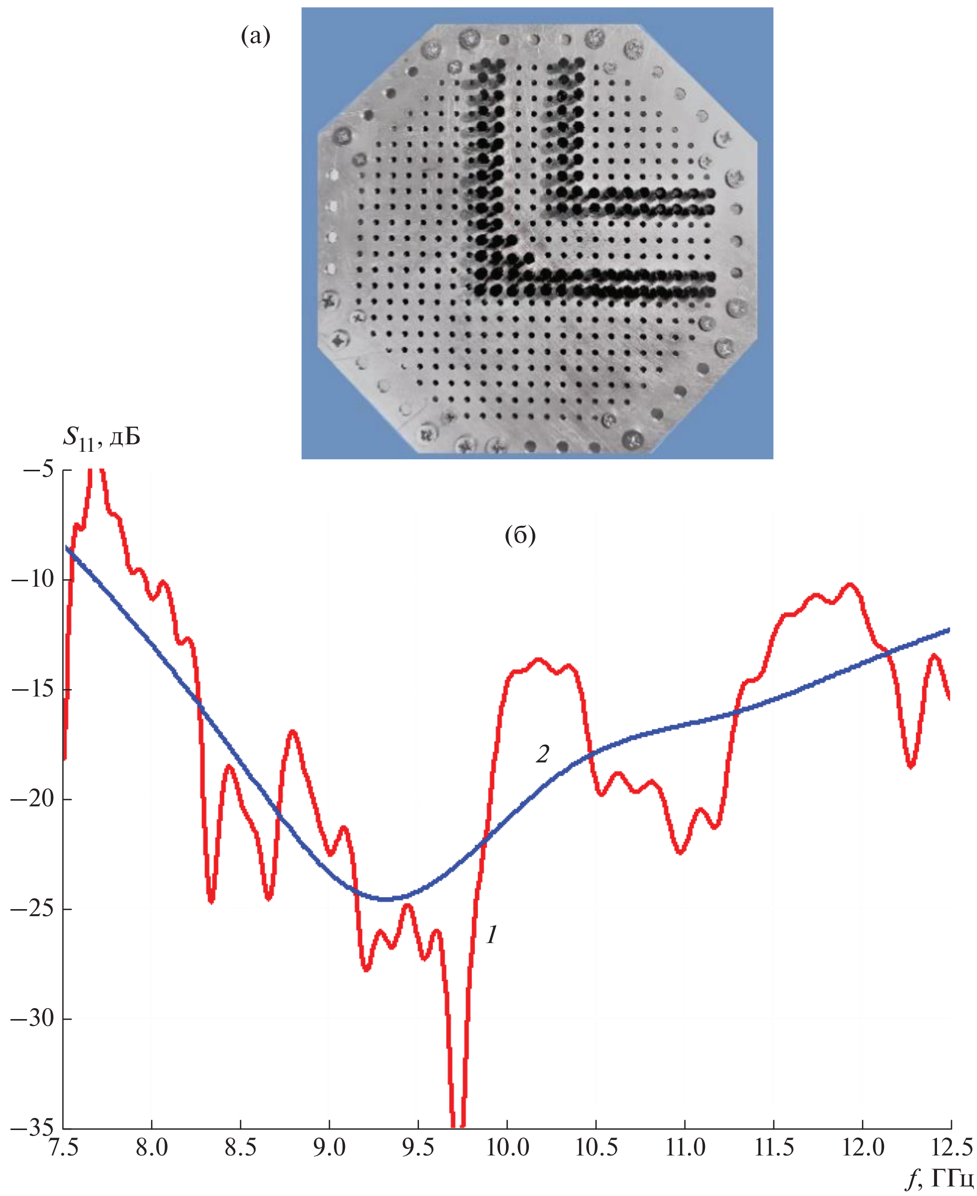



**Рис. 18.** Образец экспериментально исследованного поворота осевого волновода на 90° (а) и его измеренная частотная характеристика (б) до (*1*) и после усреднения (*2*).

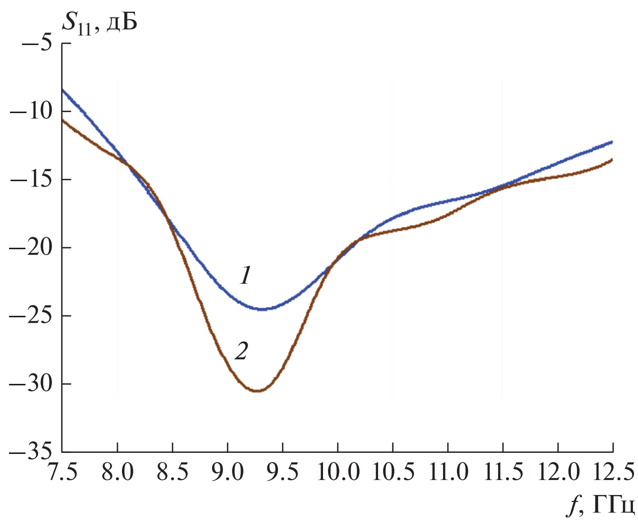



**Рис. 19.** Измеренная (*1*) и расчетная (*2*) частотные характеристики поворота осевого волновода на 90°.

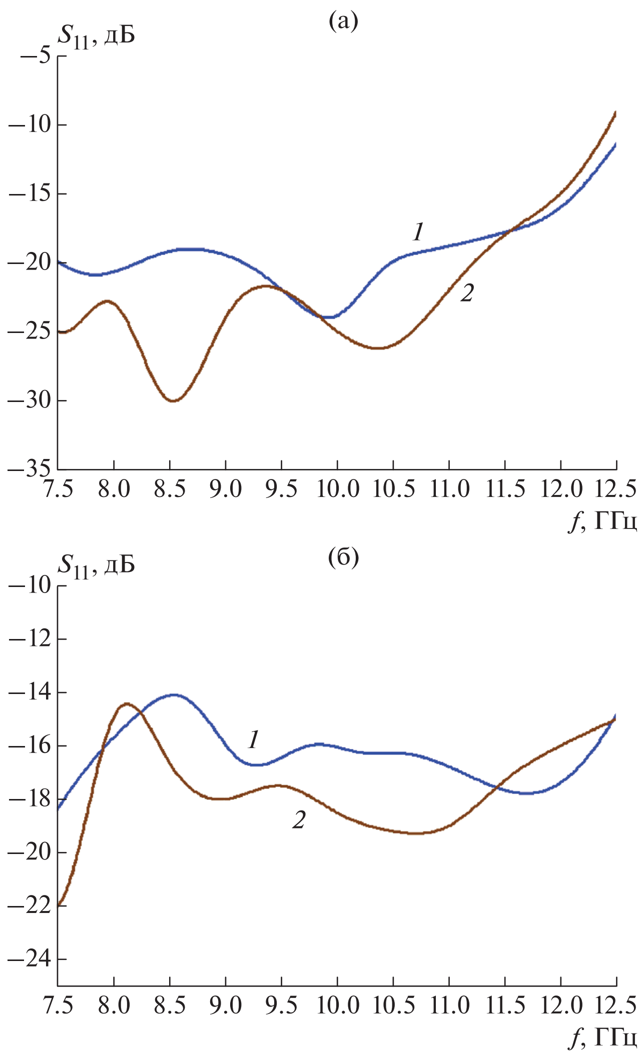



**Рис. 20.** Измеренная (*1*) и расчетная (*2*) частотные характеристики поворота диагонального волноводов на 90° (а) и на 45° (б).

ные для него частотные характеристики представлены на рис. 20а, на котором кривая *1* соответствует измеренной, а кривая *2* расчетной характеристикам. Аналогичные кривые для поворота на 45° представлены на рис. 20б (структуру см. на рис. 7б).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты данной работы свидетельствуют о том, что элементы с двухпозиционным управлением обеспечивают согласование на уровне −15 дБ в диапазоне 8...12 ГГц. Переход к трехпозиционному управлению снижает коэффициент отражения до уровня −20 дБ. Эти выводы следуют как из результатов электродинамического моделирования, так и из экспериментальных исследований, подтверждающих расчетные данные.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Kuriazidou C.A., Contopanagos H.F., Alexopolos N.G.* // IEEE Trans. 2001. V. MTT-49. № 2. P. 297.
2. *Гуняков В.А., Герасимов В.П., Мысливец С.А. и др.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 21. С. 76.
3. *Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В. и др.* // Изв. ВУЗов Электроника. 2010. № 1. С. 24.
4. *Банков С.Е.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 6. С. 671.
5. *Банков С.Е.* Электромагнитные кристаллы. М.: Физматлит, 2010.
6. *Банков С.Е.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 2. С. 133.
7. *Фролова Е.В., Банков С.Е., Калиничев В.И.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 6. С. 553.
8. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 926.
9. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 6. С. 523.
10. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 11. С. 1227.
11. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 982.
12. *Банков С.Е., Калиничев В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 10. С. 1115.
13. *Левин Л.* Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981.
14. *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ. М.: Высш. школа, 1988.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 644–648

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.86

# РАССЕЯНИЕ МОНОПОЛЯРНОГО *TE*-ПОЛЯРИЗОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ЦИЛИНДРЕ


**В. Н. Корниенко[a, *], В. В. Кулагин[a, b], Д. Н. Гупта[c]**

[a]*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

[b]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Университетский просп., 13, Москва, 119234 Российская Федерация*

[c]*Факультет физики и астрофизики, Университет Дели, Северный Кампус, Университет Дели, Дели-110007, Индия*

**E-mail: korn@cplire.ru*

Поступила в редакцию 13.11.2020 г.
После доработки 13.11.2020 г.
Принята к публикации 23.12.2020 г.

Методами вычислительного эксперимента рассмотрена задача рассеяния на идеально проводящем бесконечном цилиндре монополярного электромагнитного импульса, электрическое поле которого параллельно оси цилиндра. Показано, что вне зависимости от соотношения пространственной длины импульса и диаметра цилиндра, рассеянное поле является монополярным.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070068

## ВВЕДЕНИЕ

Как показывают последние исследования, монополярные импульсы электрического поля могут применяться во многих областях, в том числе при взаимодействии мощных импульсов с объектами как естественного, так и искусственного происхождения (см., например, [1]). Следует отметить, что в большинстве из описанных в литературе случаев речь идет о неизлучаемом поле: объекты, подвергаемые воздействию, располагаются между обкладками конденсатора и т.д.

В ряде работ, опубликованных в последнее время, говорится о возможности генерации и излучения монополярных электромагнитных импульсов (МЭМИ) в свободное пространство. Так, в ряде вычислительных экспериментов [2, 3], связанных с исследованием прохождения релятивистского электронного зеркала через наклонно расположенную тонкую металлическую фольгу, наблюдалось формирование МЭМИ. Здесь механизм формирования, скорее всего, связан с образованием на поверхности фольги пространственно локализованного и перемещающегося с течением времени по поверхности металла электрического тока, который и был источником МЭМИ.

Другой пример формирования МЭМИ инфракрасного или терагерцевого диапазонов, основанный на синхронном ускорении электронов, вытесняемых из наноразмерной мишени мощным лазерным импульсом с крутым фронтом, численно исследован в [4]. Показано, что при этом излучается цилиндрическая волна, причем ее амплитуда может достигать релятивистских значений.

Пару МЭМИ противоположной полярности, как показано в [5], может излучить локализованный линейный однонаправленный электрический ток, если на некотором временном интервале он имеет постоянное значение. Тогда при нарастании тока формируется МЭМИ одной полярности, а при спаде – противоположной. Расстояние между импульсами соответствует промежутку времени, в течение которого ток постоянен.

Монополярные импульсы могут быть получены и за счет эффекта фотопроводимости. Например, экспериментально доказана возможность генерации МЭМИ инфракрасного диапазона за счет возбуждения фотоиндуцированных носителей заряда лазерным излучением длительностью 120 фс в тонкой пластинке GaAs при наличии на ней электрического смещения от 4 до 11 кВ/см [6].

Одновременно с проблемой генерации МЭМИ различных диапазонов частот возникает необходимость проведения исследований распространения таких импульсов в пространстве, которое содержит области с различными электромагнитными свойствами. Стимулирование таких исследований связано с необходимостью управлять пространственными характеристиками МЭМИ, в том числе фокусировать излучение в определенной области пространства. В частности, задача отражения МЭМИ с плоским фронтом от идеально проводящей поверхности была рассмотрена в [4]. В работе [7] методами вычислительного эксперимента проведено исследование дифракции монополярного импульса на диэлектрическом цилиндре. Как известно, цилиндрическая поверхность является стандартным объектом для исследования процессов в теории дифракции. Кроме того, она может рассматриваться как элемент различных оптических систем.

Цель данной работы – исследование пространственно-временной структуры поля рассеяния МЭМИ заданной поляризации на бесконечном идеально проводящем цилиндре.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дана двумерная область $G$ свободного пространства. Область $G$ имеет прямоугольную форму. Ее левый нижний угол совпадает с началом декартовой системы координат $xyz$, сама же область лежит в плоскости $\{x, y, 0\}$. Ось $x$ соответствует продольному направлению, ось $y$ – поперечному.

Область $G$ содержит идеально проводящий цилиндр (неоднородность), ось которого параллельна оси $z$, радиус равен $r_c$.

В положительном направлении оси $x$ распространяется МЭМИ с плоским фронтом, $E_z$- и $H_y$-компоненты которого отличны от нуля. Электрическое поле импульса параллельно оси цилиндра. Такой вид поляризации МЭМИ будем называть *TE*-поляризацией, так как силовые линии электрического поля оказываются перпендикулярными всем возможным направлениям распространения электромагнитных волн в рассматриваемой системе.

Не ограничивая общности, рассмотрим следующий пространственный профиль электрической компоненты импульса в начальный момент времени:

$$E_z(x,y,t=0)=\begin{cases}0, & \dfrac{t-(x-x_0)}{c}<0\\ \alpha_0\left(t-(x-x_0)/c\right)^2\exp\left(-\beta(t-(x-x_0)/c)\right), & \dfrac{t-(x-x_0)}{c}\ge 0\end{cases}, \qquad (1)$$

здесь $\alpha_0$ – амплитуда МЭМИ, $x_0$ – положение фронта импульса при $t = 0$, $\beta$ – коэффициент, определяющий длительность импульса, $c$ – скорость света в вакууме.

Как следует из (1), передний фронт импульса сначала нарастает по квадратичному закону и достигает своего максимума при $t = \beta/2$. Далее поле импульса монотонно стремится к нулю.

Зафиксировав параметры МЭМИ, найдем пространственно-временное распределение рассеянного поля при различных значениях радиуса цилиндра.

Для вычисления поля в последовательные моменты времени внутри области $G$ воспользуемся системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме, задав для компонент поля $E_z$, $H_x$ и $H_y$ соответствующие поставленной задаче граничные и начальные условия.

Для удобства нормируем время на длительность падающего импульса $\tau$, которую определим по уровню 0.5 амплитуды $E_z$. Пространственные координаты нормируем соответственно на величину $c\,\tau$.

Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных будем проводить, используя численный метод конечно-разностной аппроксимации, который обеспечивает второй порядок точности [8]. Для выполнения условий излучения поля на границах области применим метод идеально согласованного слоя [9].

Так как амплитуды падающего импульса и рассеянного поля могут существенно отличаться, используем следующий алгоритм выделения рассеянного поля, который основан на принципе суперпозиции.

Представим электрическое и магнитное поля в виде суммы полей падающего импульса и рассеянного поля:

$$E_z = E_z^{(i)} + E_z^{(s)},\quad \vec{H} = \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(s)}, \qquad (2)$$

где $\left(E_z^{(i)}, \vec{H}^{(i)}\right)$ – поле импульса, $\left(E_z^{(s)}, \vec{H}^{(s)}\right)$ – поле рассеяния.

Найдем $\left(E_z^{(s)}, \vec{H}^{(s)}\right)$ в два этапа. На первом этапе проведем вычисление электромагнитного поля в $G$ при отсутствии цилиндра (реперный расчет). Это поле будет соответствовать полю падающего

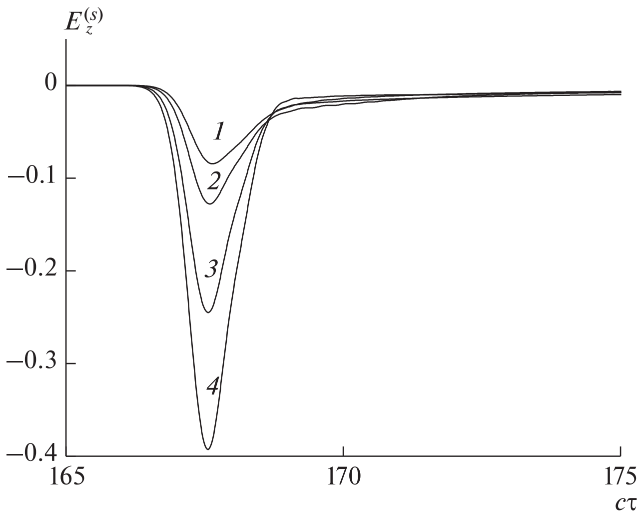



**Рис. 1.** Зависимость электрического поля отраженного импульса от времени для $r_c$ = 0.125 (*1*), 0.5 (*2*), 2.5 (*3*) и 7.4 $c\tau$ (*4*).

МЭМИ $\left(E_z^{(i)}, \vec{H}^{(i)}\right)$. На втором этапе вычислим поля с учетом неоднородности (полное поле), которое в (2) обозначено как $(E_z, \vec{H})$. Тогда поле рассеяния будет равно

$$\begin{aligned} E_z^{(s)}(x,y,t) &= E_z(x,y,t) - E_z^{(i)}(x,y,t), \\ \vec{H}^{(s)}(x,y,t) &= \vec{H}(x,y,t) - \vec{H}^{(i)}(x,y,t). \end{aligned} \tag{3}$$

Предложенный алгоритм позволяет легко выделить $\left(\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}\right)$ на фоне $\left(\vec{E}^{(i)}, \vec{H}^{(i)}\right)$ даже тогда, когда соотношение амплитуд этих полей составляет несколько порядков.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В проведенных вычислительных экспериментах размер области $G$ по оси $y$ был равен 75, а по оси $x$ – 250 (в нормированных единицах). Для построения временных зависимостей компонент электромагнитного поля была выбрана точка наблюдения $P_t$, координаты которой совпадали с центром $G$ ($x = 125$, $y = 37.5$). Продольная координата центра круга $x_c$, соответствующего поперечному сечению идеально проводящего цилиндра, зависела от его радиуса следующим образом:

$$x_c = 150 + r_c.$$

Такая связь позволила сделать постоянным расстояние от поверхности цилиндра до точки наблюдения вне зависимости от $r_c$. В наших вычислительных экспериментах оно было равно 25 $c\tau$.

Для исследования пространственного распределения поля были выбраны точки наблюдения, находящиеся на линии $y = 37.5$, которая параллельна продольной оси и проходит через центр идеально проводящего цилиндра.

На рис. 1 приведены временные зависимости $E_z^{(s)}$-компоненты поля для значений радиуса цилиндра 0.125, 0.5, 2.5 и 7.4 в точке $P_t$. В рассмотренных случаях $E_z^{(s)}(t) < 0$ на всем временном интервале, т.е. рассеянное на цилиндре поле является монополярным. Его амплитуда $A^{(s)}$ (модуль экстремального значения зависимости $E_z^{(s)}(t)$) монотонно убывает с уменьшением $r_c$. Задний фронт импульса рассеянного поля асимптотически стремится к нулю, однако убывает он существенно медленнее, чем задний фронт падающего МЭМИ. Можно показать, что его временная зависимость хорошо аппроксимируется функцией вида

$$F_t(\tau) = C_1\left(C_2\tau - C_3\right)^{-1/2} + C_4\left(C_5\tau - C_6\right)^{-1}, \tag{3}$$

где $C_1$, ..., $C_6$ – постоянные коэффициенты.

Структура электромагнитного поля, описываемая выражением (3), соответствует полю, создаваемому коротким однонаправленным током, протекающим вдоль боковой поверхности цилиндра. Причем первое слагаемое соответствует полю излучения, а второе – ближнему полю этого тока.

Зависимости электрического поля отраженного импульса от продольной координаты в различные моменты времени после отражения МЭМИ от поверхности цилиндра для $r_c = 0.5$ показаны на рис. 2. Импульс рассеянного поля распространяется в сторону отрицательных значений продольной координаты, при этом $E_z^{(s)}$ ($x$, $y = 37.5$, $t$) < 0 для любого $x$, а амплитуда импульса уменьшается по мере удаления от цилиндра.

Известно, что амплитуда цилиндрической волны убывает обратно пропорционально квадратному корню расстояния от источника. На рис. 3 приведены зависимости амплитуды рассеянного импульса от расстояния до цилиндра для значений $r_c = 0.125$, 0.5, 2.5 и 7.4. Треугольниками обозначены точки, поле в которых рассчитано численными методами, кривыми показан результат аппроксимации полученных значений функцией

$$F_r(\tau) = C_7\left(C_8\tau - C_9\right)^{-1/2}.$$

При выборе надлежащих значений коэффициентов $C_7 \ldots C_9$ наблюдается хорошее соответствие указанных зависимостей от продольной координаты. Это дает основание полагать, что рассеянное поле представляет собой именно поле излучения.

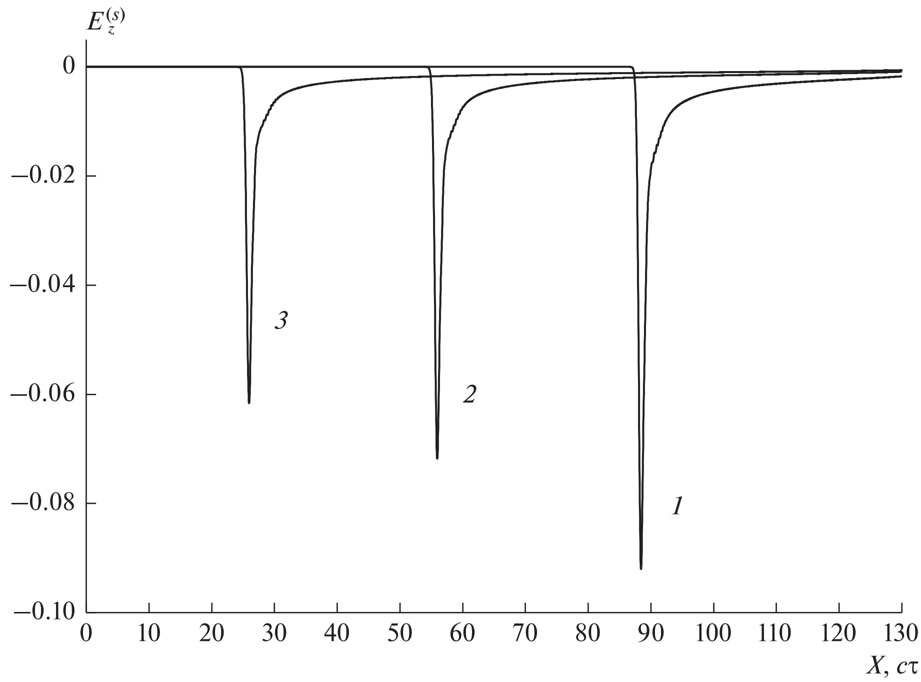



**Рис. 2.** Зависимость электрического поля от продольной координаты для $r_c = 0.5$ в различные моменты времени: $\tau = 50$ (*1*), 83 (*2*) и 114 (*3*).

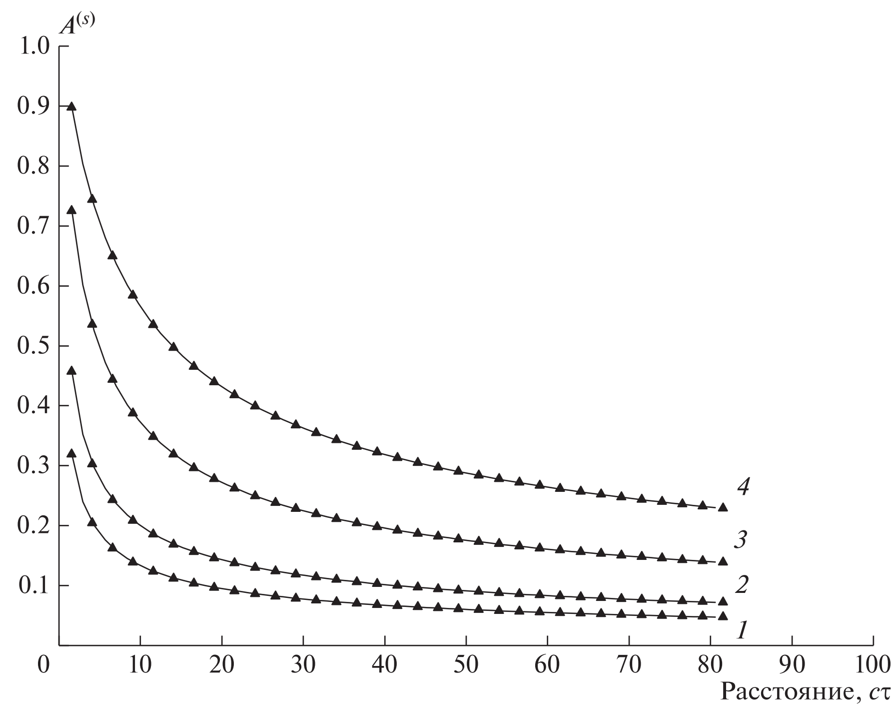



**Рис. 3.** Зависимость амплитуды импульса рассеянного поля от расстояния до поверхности цилиндра для $r_c = 0.125$ (*1*), 0.5 (*2*), 2.5 (*3*) и 7.4 $c\tau$ (*4*), треугольники – поле рассчитано при помощи численных методов, кривые – результат аппроксимации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенное численное моделирование процессов рассеяния монополярного импульса излучения на идеально проводящем цилиндре в случае, когда силовые линии электрического поля падающего импульса параллельны оси цилиндра, показало, что рассеянное поле сохраняет свойство монополярности. Также показано, что отраженное поле сходно с полем цилиндрической волны.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Моделирование проводилось на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (В.Н. Корниенко и В.В. Кулагин) и Департамента науки и технологии правительства Индии (Д.Н. Гупта, научный проект № 19-52-45035-Инд-а) в рамках совместного проекта ДНТ-РФФИ 2020 № INT/RUS/RFBR/394.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуляев Ю.В., Черепенин В.А., Таранов И.В. и др.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 2. С. 189.
2. *Wu H.-C., Meyer-ter-Vehn J.* // Nature Photonics. 2012. V. 6. P. 304.
3. *Xu J., Shen B., Zhang X. et al.* // Scientific Rep. 2018. V. 8. № 1. P. 2669.
4. *Кулагин В.В., Корниенко В.Н., Черепенин В.А. и др.* // Квант. электроника. 2019. Т. 49. № 8. С. 788.
5. *Корниенко В.Н., Румянцев Д.Р., Черепенин В.А.* // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 3. http://jre.cplire.ru/jre/mar17/8/text.pdf.
6. *You D., Jones R.R., Bucksbaum P.H.* // Opt. Lett. 1993. V. 18. № 4. P. 290.
7. *Корниенко В.Н., Кулагин В.В., Олейников А.Я.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 2. С. 258.
8. *Taflove A.* Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method. L.: Artech House, 1995.
9. *Berenger J.P.* // J. Comp. Phys. 1994. V. 114. № 2. P. 185.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 649–653

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

# СВЕРХШИРОПОЛОСНЫЙ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РУПОРНЫЙ ОБЛУЧАТЕЛЬ

© 2021 г. В. А. Калошин[a], В. Ч. Фам[b, *]

[a]Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125007 Российская Федерация

[b]Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141700 Российская Федерация

*E-mail: phamchung@phystech.edu

Поступила в редакцию 10.10.2020 г.
После доработки 10.10.2020 г.
Принята к публикации 12.12.2020 г.

Предложен и исследован сверхширокополосный облучатель в виде трехслойного металлодиэлектрического конического рупора. Рупор имеет двухслойное диэлектрическое заполнение, третий слой – воздух. Электродинамическое моделирование и оптимизация параметров излучателя проведены с использованием методов конечных элементов и конечных разностей во временной области. В результате численного моделирования показано, что оптимизированный облучатель в полосе частот 76% обеспечивает согласование на уровне ниже –15 дБ, уровень главного лепестка амплитудной диаграммы направленности на границах угла облучения (56°) лежит в пределах –10...–15 дБ, при этом неравномерность фазовой диаграммы направленности – менее 7°.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070056

## ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что рабочая полоса частот зеркальных и линзовых антенных систем определяется прежде всего облучателем. В связи с необходимостью реализации широкополосного и многодиапазонного режима работы антенных систем в различных приложениях разработке соответствующих облучателей посвящен ряд работ [1–7].

В статье [1] было проведено исследование характеристик излучения открытого конца круглого металлодиэлектрического волновода (экранированного диэлектрического волновода). Теоретическое исследование показало возможность реализации в полосе частот 9...13 ГГц осесимметричных диаграмм направленности (ДН) со стабильной шириной главного лепестка на двух поляризациях при низком уровне кросс-поляризации и боковых лепестков.

В работе [2] представлены результаты исследования рупора с диэлектрическим заполнением для спутниковой связи. Рупор может работать в двух диапазонах, в частности, в С- и $K_u$-диапазонах частот.

В работе [3] предложен облучатель для работы в декадной полосе частот. Экспериментальные исследования макета такого облучателя [4] показали, что коэффициент отражения в полосе частот 2...14 ГГц в ряде частотных точек превышает уровень –10 дБ. Амплитудная и фазовая ДН облучателя в работе [4] не приведены.

Различные варианты четырехгребневого нерегулярного рупорного облучателя исследованы в работах [5–7]. Моделирование и измерения экспериментальных образцов [5] показали стабилизацию ширины ДН в диапазоне 2...12 ГГц. Измеренные коэффициенты отражения меньше –10 дБ во всем указанном диапазоне и меньше –15 дБ в диапазоне частот 2.5...11 ГГц. Фазовые ДН в этих работах не исследовались.

Цель данной работы – исследование и оптимизация характеристик рупорного металлодиэлектрического облучателя с двухслойным диэлектрическим заполнением для реализации стабильной ширины главного лепестка и фазовой ДН в сверхширокой полосе частот.

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РУПОРНОГО ОБЛУЧАТЕЛЯ

Рассмотрим трехслойный осесимметричный металлодиэлектрический рупор (рис. 1), где $a$ и $b$-радиусы апертуры первого и второго диэлектрического конуса соответственно, $c$-радиус апертуры металлического конуса, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ – диэлектрические проницаемости первого и второго

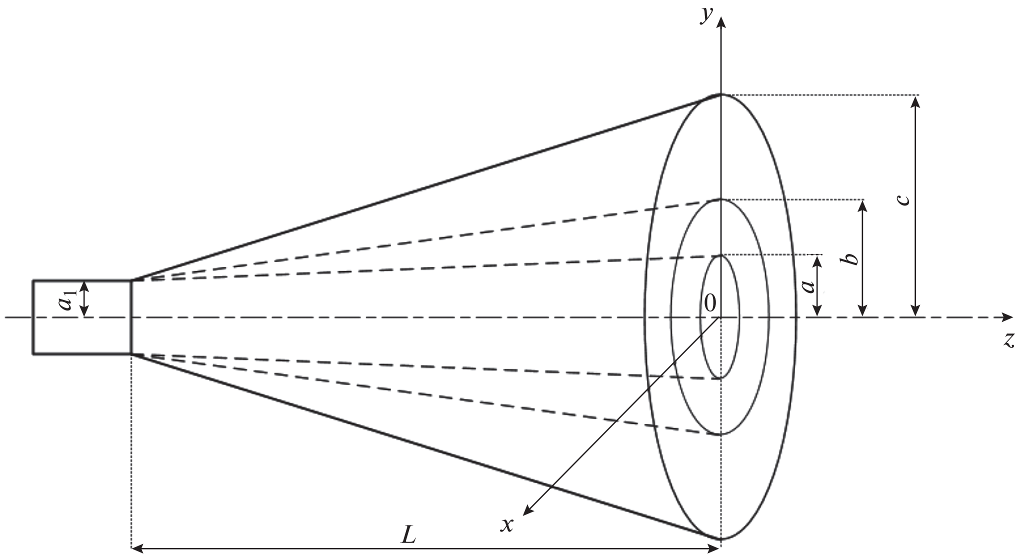



**Рис. 1.** Металлодиэлектрический рупорный облучатель.

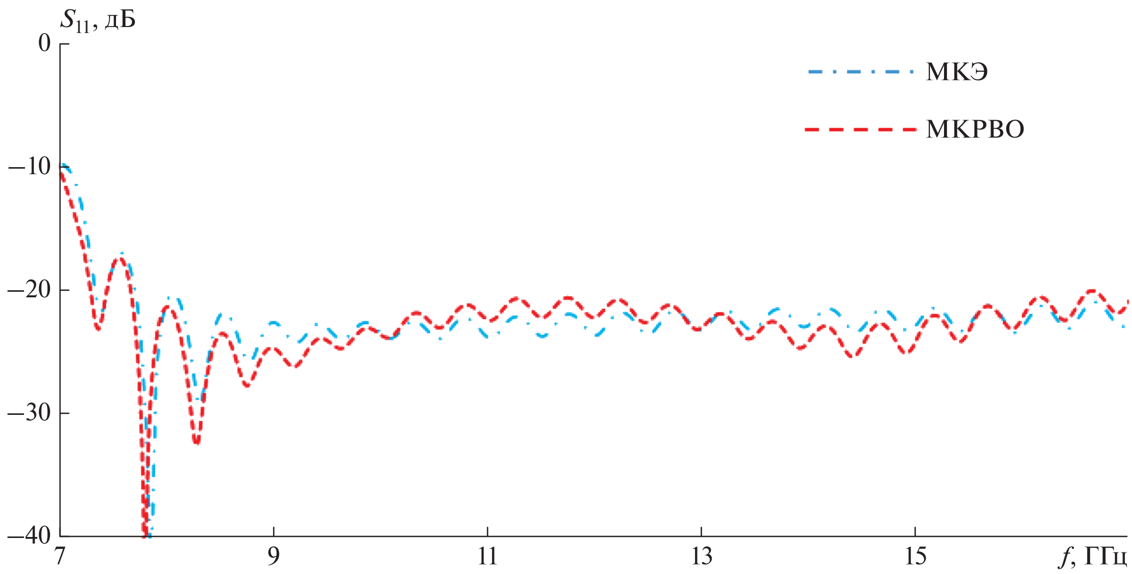



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента отражения $S_{11}$ облучателя от частоты, рассчитанная с использованием МКЭ (*1*) и МКРВО (*2*).

конусов. Рупор возбуждается заполненным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$ металлическим волноводом радиусом $a1$.

С использованием электродинамического моделирования методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей во временной области (МКРВО) были исследованы частотные зависимости ширины главного лепестка ДН и коэффициента отражения от входа рупорного облучателя. В процессе моделирования проводилась оптимизация по всем параметрам для заданной длины рупора $L = 250$ мм с целью максимизации полосы частот, в которой уровень главного лепестка ДН на заданном угле находится в интервале –10...–15 дБ. В результате для угла отклонения от оси 28° были найдены оптимальные значения параметров $a1 = 11$ мм, $a = 15.25$ мм, $b = 28$ мм, $c = 60$ мм, $\varepsilon_1 = 1.4$, $\varepsilon_2 = 1.18$.

Рассчитанная с использованием МКЭ и МКРВО частотная зависимость коэффициента отражения $S_{11}$ от входа рупора представлена на рис. 2. На рисунке видно, что коэффициент отражения в по-

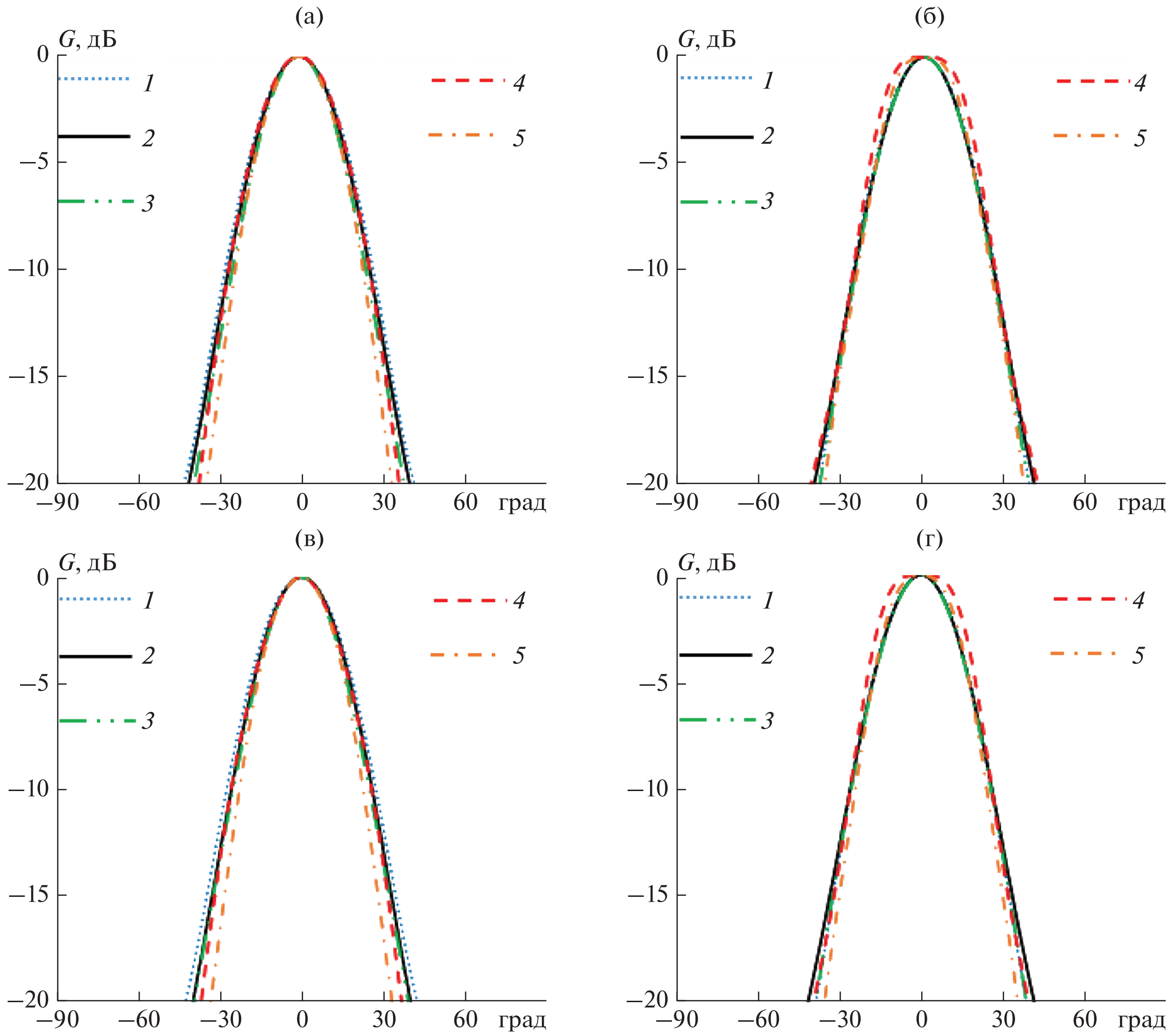



**Рис. 3.** Диаграммы направленности облучателя в Е- (а, в) и Н-плоскостях (б, г), рассчитанные с использованием МКЭ (а, б) и МКРВО (в, г) на частотах 7 (*1*), 9 (*2*), 11.5 (*3*), 14 (*4*) и 16.3 ГГц (*5*).

лосе частот 7.3...16.3 ГГц не превышает уровень –15 дБ.

Диаграммы направленности облучателя в Е- и в Н-плоскостях на пяти частотах, рассчитанные с использованием МКЭ и МКРВО, представлены на рис. 3. На рисунке видно, что ширина ДН на уровне –10 дБ почти не меняется при изменении частоты.

На рис. 4 представлены частотные зависимости полуширины главного лепестка ДН излучателя по уровням –10 и –15 дБ, рассчитанные также с использованием МКЭ и МКРВО. Из рисунка видно, что для угла отклонения от оси 28° (штрих-пунктирная линия) уровень главного лепестка ДН в полосе частот 7...16.3 ГГц лежит в пределах –10...–15 дБ.

На рис. 5 показана зависимость положения фазового центра облучателя от частоты, рассчитанная с использованием МКЭ, а также его оптимальное положение (внутри излучателя на расстоянии 2 мм от апертуры).

На рис. 6 приведены фазовые ДН облучателя на пяти частотах, рассчитанные с использованием МКЭ для оптимального положения фазового центра. Как видно из рисунка, в Е- и в Н-плоскости фазовые искажения ДН в угле 56° не превышают 7°.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основание полученных результатов можно сделать следующие выводы.

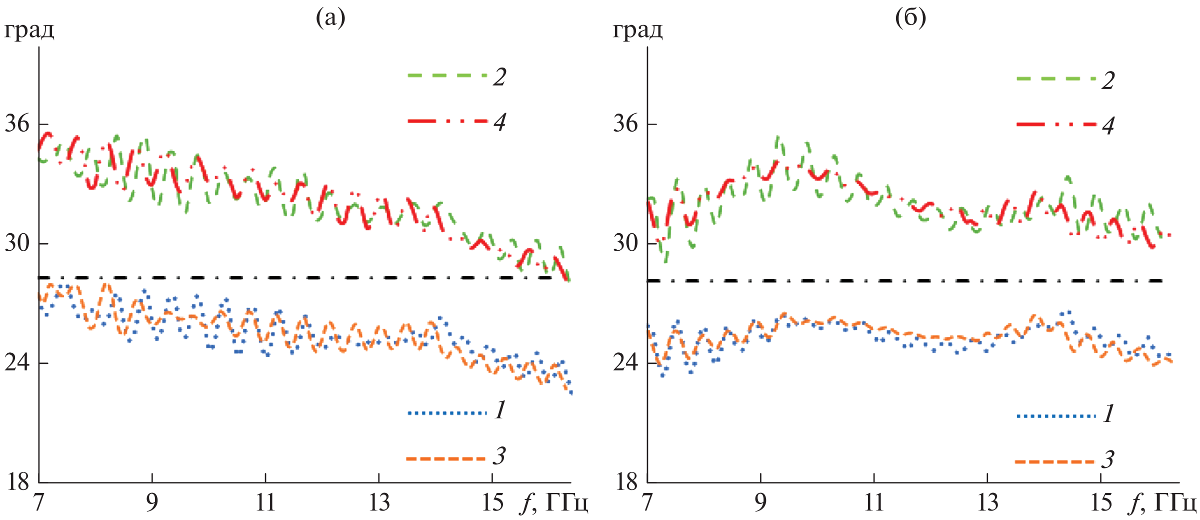



**Рис. 4.** Частотные зависимости полуширины главного лепестка ДН излучателя в E- (а) и H-плоскостях (б), рассчитанные с использованием МКЭ (*1*, *2*) и МКРВО (*3*, *4*) по уровням 10 (*1*, *3*) и 15 дБ (*2*, *4*); штрих-пунктирной линией показан заданный угол (28°).

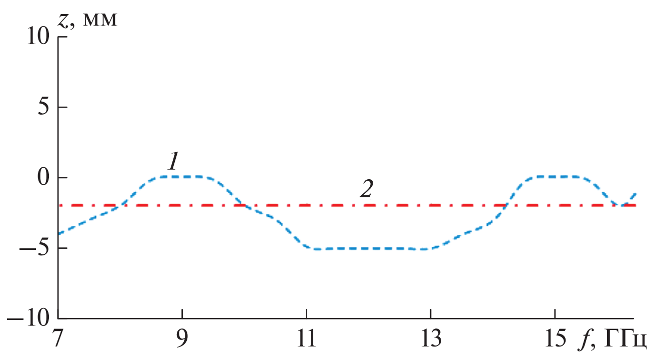



**Рис. 5.** Зависимость положения фазового центра (*1*) от частоты и его оптимальное положение (*2*).

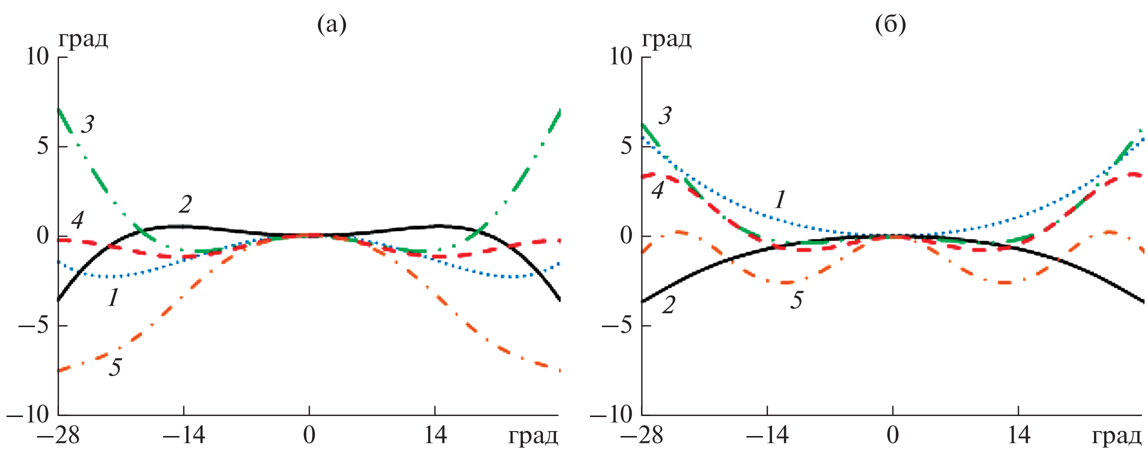



**Рис. 6.** Фазовые диаграммы направленности в E- (а) и H-плоскости (б) на частотах 7 (*1*), 9 (*2*), 11.5 (*3*), 14 (*4*) и 16.3 ГГц (*5*).

1. Предложенный и исследованный рупорный облучатель согласован со входом круглого волновода по уровню отражения ниже –15 дБ в полосе частот 7.3...16.3 ГГц.

2. Уровень для угла 28° диаграммы направленности рупорного облучателя в полосе частот 7–16.3 ГГц меняется в пределах –10...–15 дБ, при этом неравномерность фазовой диаграммы направленности – не более 7°.

Таким образом, рабочая полоса частот рупорного облучателя 7.3...16.3 ГГц (76%).

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-006.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Весник М.В., Калошин В.А.* // Журн. радиоэлектроники. 2001. № 2. http://jre.cplire.ru/jre/feb01/4/text.html.
2. *Dubrovka F.F., Dubrovka R.F., Ovsianyk Y.A.* // Proc. 6th Int. Conf. Antenna Theory and Techniques. Sevastopol. 17–21 Sep. 2007. N.Y.: IEEE, 2007. P. 398.
3. *Olsson R., Kildal P.S., Weinreb S.* // IEEE Trans. 2006.V. AP-54. № 2. P. 368.
4. *Yang J., Pantaleev M., Kildal P. et al.* // IEEE Trans. 2011. V. AP-59. № 6. P. 1918.
5. *Akgiray A., Weinreb S., Imbriale W.A.* // Proc. 2011 IEEE Int. Symp. on Antennas and Propagation (APSURSI). Spokane. 3–8 Jul. N.Y.: IEEE, 2011. P. 1135.
6. *Akgiray A., Weinreb S., Imbriale W.A., Beaudoin C.* // IEEE Trans. 2013. V. AP-61. № 3. P. 1099.
7. *Dong B., Yang J., Dahlström J. et al.* // IEEE Trans. 2019. V. AP-67. № 1. P. 585.

*РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 654–661*

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

*УДК 528.8.044.6*

# ЛИДАРНЫЙ МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ФОНОВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕТАНА В УСЛОВИЯХ ЗАМУТНЕННОЙ АТМОСФЕРЫ

**© 2021 г. В. И. Григорьевский[a], *, Я. А. Тезадов[a]**

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация*

**E-mail: vig248@rambler.ru*

Поступила в редакцию 07.12.2020 г.
После доработки 07.12.2020 г.
Принята к публикации 27.01.2021 г.

Проведено моделирование уточнения вертикального профиля концентрации метана в атмосфере Земли при отсутствии прямой видимости на трассе космический аппарат–поверхность Земли. Для целей моделирования вертикальный профиль концентрации метана аппроксимирован многочленом шестой степени, а уточнение профиля проводили варьированием его коэффициентов до совпадения с экспериментальными данными. Приведены экспериментальные данные зондирования метана с поверхности Земли, когда применение метода ограничено или не совсем достоверно. Рекомендовано для повышения разрешающей способности лидара в выделенных областях на поверхности Земли применять сканирование приемопередатчика, обеспечивающее фиксацию луча в заданной точке при пролете спутника по траектории орбиты.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070044

## ВВЕДЕНИЕ

Метан является одним из активных парниковых газов в атмосфере Земли, влияя на формирование климата на планете и участвуя во многих химических реакциях в тропосфере и стратосфере [1]. После небольшого перерыва, с 1999 до 2005 г., концентрация метана снова начала увеличиваться со скоростью ~6 частей на 1 млрд в год (6 ppb/год) [2]. Это связано с возможным таянием вечной мерзлоты, возросшей хозяйственной деятельностью человека, некоторыми другими факторами. Мониторинг метана из космоса может уточнить прогнозы по динамике развития процесса накопления метана в атмосфере и, возможно, смягчить последствия от глобального потепления климата. Многие спутники, находящиеся в настоящий момент на орбитах, имеют на борту как активные, так и пассивные датчики метана, работающие на различных принципах, уточняющие распределение метана в пространстве [3]. Однако активных лидаров, как наиболее точных, в настоящее время мало. Проект Merlin по определению глобального распределения метана со спутника, возглавляемый двумя группами из французской LMD (Laboratoire de Météorologie Dynamique) и Немецкого института физики атмосферы при дополнительной поддержке нескольких французских и немецких исследовательских институтов на базе Германского центра космических и воздушных полетов (DLR), планируют осуществить в 2021 г. [3]. В данном проекте рассматривается возможность измерения интегральной концентрации метана в столбе атмосферы с точностью в единицы процентов. Активный метод измерений основан на дифференциальном поглощении оптического излучения в линии и вне линии поглощения метана. В передатчике газоанализатора планируется использовать параметрический генератор света с мощностью в импульсе ~50...100 кВт, а в фотоприемнике – высокочувствительный лавинный фотодиод, работающий в диапазоне инфракрасных длин волн ~1650 нм. В ходе исследований альтернативного активного метода с квазинепрерывным лидаром на борту выявлена возможность применения его на космическом аппарате (КА). Как показывает расчет, мощность передатчика такого лидара должна быть не менее 30 Вт [4]. В данном методе лидар излучает лазерный луч с линейно-частотной модуляцией на длине волны света, совпадающей с линией поглощения газа (например, с линией R3 поглощения метана на длине волны ~1653.7 нм), а затем принимает отраженное от Земли излучение и обрабатывает соответствующим образом получаемые данные с целью определения как интегральной концентрации газа на трассе распространения, так и ширины линии поглощения. В процессе мониторинга часто возникали ситуации, когда отсутствовала прямая видимость между КА и Землей, причинами этого являлись облачность на трассе измерений, различные выбросы вулканической и иной деятельности в атмосфере Земли: дымка, туманы, снегопады и т.д. Возникает вопрос, можно ли уточнить в этих условиях по получаемым данным распределение концентрации газа в пространстве на всей трассе измерений, несмотря на отсутствие прямой видимости между КА и Землей, и с какой достоверностью.

Цель работы – моделирование метода восстановления распределения концентрации метана в пространстве на основе лидарных измерений с космичекой орбиты и уточнение вертикального профиля фоновой концентрации газа в условиях замутненной атмосферы, а также поиск возможных методов повышения разрешающей способности лидарных измерений в таких условиях.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ФОНОВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕТАНА В УСЛОВИЯХ ПРЯМОЙ ВИДИМОСТИ И В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ ПЛОТНОГО ОБЛАЧНОГО СЛОЯ НА ТРАССЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Известно, что в случае прямой видимости на трассе измерений лидар принимает отраженное от Земли излучение с уровнем мощности $\sim 10^{-11}...10^{-12}$ Вт при применении квазинепрерывного лидара с выходной мощностью передатчика ~30 Вт при радиусе приемного объектива 0.5 м [4]. В данном случае отношение сигнал/шум может составлять величину ~100 при усреднении результатов измерений за время 1...10 с при использовании высокочувствительных лавинных фотодиодов с порогом обнаружения $\sim 3.2 \times 10^{-14}$ Вт/Гц$^{1/2}$, что дает разрешение по горизонтали ~40...80 км при скорости движения КА по орбите ~7.8 км/с [5]. Основными источниками шумов лидара являются шумы темнового тока фотоприемника, солнечная засветка, а также обратное молекулярное или аэрозольное рассеяние атмосферы, составляющее величину $\sim 10^{-11}...10^{-13}$ Вт в зависимости от погодных условий. Однако в случае отсутствия прямой видимости принимаемое обратное рассеяние является информативным сигналом (полезный эффект), по которому можно судить о вертикальном профиле концентрации газа в атмосфере на всей трассе вплоть до поверхности Земли. Квазинепрерывный лидарный метод позволяет измерять усредненные величины осажденного слоя метана и ширины его линии поглощения на трассе до точки отражения. В случае замутненной атмосферы этой точкой является облако, аэрозоль, туман и т.д.

Предлагаемая методика экстраполяции данных под облачный слой основывается на статистической функции (профиле) $f(x)$ распределения концентрации газа по высоте [6] в нормальных условиях с хорошей видимостью на всей трассе. Эта функция позволяет определить средний по трассе измерения осажденный слой метана $l(h)$ как интеграл по высоте от произведения указанной функции на барометрический экспоненциальный множитель падения атмосферного давления с высотой:

$$l(h) = \int_0^h f(75 - x)\exp((75 - x)/8.9)dx. \qquad (1)$$

Здесь $h$ – текущая высота, а за точку отсчета $f(0)$ принято расстояние над поверхностью Земли, равное 75 км, где функция $f(x)$ обращается в нуль. Интегрирование ведется до высоты $h$ по направлению к Земле (в силу этого расстояние с $h = 75$ км – это уровень поверхности Земли). Подынтегральная функция $\exp(-(75 - x)/8.9)$ – это барометрический коэффициент падения давления с высотой, который при $x = 75$ км (поверхность Земли) обращается в единицу. Статистическая функция $f(x)$ хорошо аппроксимируется многочленом шестой степени, при этом он выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 2.35816\times10^{-10}(75 - x)^6 - \\ & - 4.85176\times10^{-8}(75 - x)^5 + \\ & + 3.20739\times10^{-6}(75 - x)^4 - \\ & - 4.82155\times10^{-5}(75 - x)^3 - \\ & - 1.975395\times10^{-3}(75 - x)^2 + \\ & + 1.9504372\times10^{-2}(75 - x) + 1.676475562. \end{aligned} \qquad (2)$$

График многочлена (2) представлен на рис. 1. По аналогии с барометрической эта зависимость представлена для аргумента $(75 - x)$ так, чтобы при $x = 75$ км она обращалась в среднюю концентрации метана у поверхности Земли ~1.7 ppm (молекул на миллион). Такая аппроксимация среднестатистического распределения метана по высоте, не отличается от представленной в [6] более чем на +/–0.01 ppm (~0.5%) и ее с хорошей точностью можно использовать в моделировании и вычислениях. В свою очередь, усредненная по высоте ширина линии поглощения метана $2\gamma$ записывается в следующей форме:

$$2\gamma = \frac{1}{h}\int_0^h 2\gamma_0 f'(75 - x)\exp(-(75 - x)/8.9)dx, \qquad (3)$$

где $f'(75 - x)$ – нормированная на единицу статистическая функция распределения концентрации метана по высоте, а $2\gamma_0 = 0.0618$ нм – ширина его линии поглощения в приземном слое атмосферы.

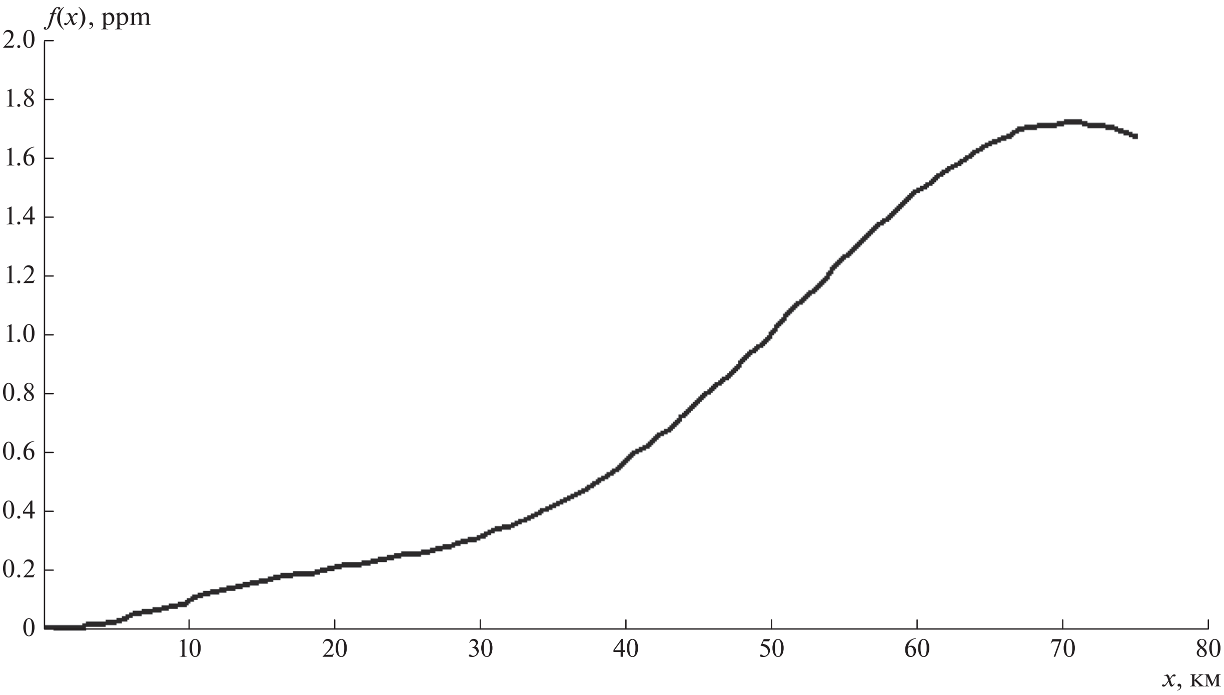



**Рис. 1.** Аппроксимация статистической функции $f(x)$ распределения метана по высоте.

Для прозрачной атмосферы на основе полученных экспериментальных данных среднего осажденного слоя метана и ширины линии поглощения можно уточнить стандартное распределение газа по высоте, решая обратную задачу. В случае отклонения концентрации газа и ширины линии поглощения от стандартных величин ищем такое распределение, которое мало отличается от получаемых в эксперименте данных. При наличии плотного облачного слоя между Землей и КА возможно получить от этого слоя достаточный для регистрации отраженный сигнал. В данном случае рассматриваются измерения с космической орбиты. Например, если облако расположено на высоте ~10 км над Землей и имеет показатель преломления $n$ ~ 1.3 (вода), то коэффициент отражения от него, рассчитанный по формулам Френеля, составляет величину около 2%, что сопоставимо с альбедо черной Земли (~2...5%), а принимаемый отраженный сигнал составит $P_{\text{отр}} \sim 3 \times 10^{-12}$ Вт для указанных выше параметров лидарной системы. К этому сигналу надо добавить сигнал рассеяния в облачном слое $P_{\text{расс}}$. Например, если облако состоит из капель с радиусом ~0.1 мкм (наиболее вероятный размер капель, при котором частицы могут долго парить и не оседать в воздухе [7]) с плотностью рассеивающих частиц (плотность дисперсной фазы) $N_0 \sim 2 \times 10^{16}$ 1/м$^3$ у поверхности Земли, то на расстоянии в ~0.05...0.1 м в этом облаке в телесном угле 4π произойдет полное рассеяние света $P_{\text{общ}}$. Такая оценка получена на основании формулы общей рассеянной мощности в облаке в телесном угле 4π [8]:

$$P_{\text{общ}} \approx 4P_0\left(\frac{9\pi^3V^2}{\lambda^4}\right)\left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{n_1^2 + 2n_0^2}\right)^2 NL, \quad (4)$$

где $P_0 = 30$ Вт – излучаемая лидаром мощность, $N = 7.2 \times 10^{15}$ – число рассеивающих частиц в 1 м$^3$ на высоте 10 км, $V$ – объем рассеивающей частицы радиусом ~0.1 мкм, $\lambda = 1.65$ – длина волны излучения, $L$ – длина, на которой происходит основное рассеяние света (~0.1 м), $n_1$ и $n_2$ – показатели преломления дисперсной фазы и дисперсной среды соответственно равные 1.33 и 1.

В формуле (4) сделано следующее допущение: индикатриса рассеяния одиночной частицы изотропна и определяется произведением выражений в круглых скобках формулы (4). Интерпретация данной формулы заключается в суммировании рассеянной мощности света от всех частиц, находящихся на пути луча в рассматриваемом слое в телесном угле 4π. При этом на приеме можно получить $P_{\text{расс}} \sim 4 \times 10^{-12}$ Вт рассеянной мощности для указанной плотности рассеивающих частиц и расстояния от КА до отражающего облака ~440 км (10 км над поверхностью Земли). Такой уровень принимаемой лидаром рассеянной мощности $P_{\text{расс}}$ получен из нижеследующей формулы (5), вытекающей из формулы (4), для облачного слоя толщиной ~0.05...0.1 м в рассеивающем телесном угле, стягиваемом приемным объективом лидара:

$$P_{\text{расс}} \approx \int_{R_0}^{R_0+0.05} P_0 A^2 \left(\frac{9\pi^3 V^2}{\lambda^4 R^2}\right) \times \\ \times N_0(\exp(-(450\,000 - R)/9800)) \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{n_1^2 + 2n_0^2}\right)^2 dR. \quad (5)$$

Здесь $A = 0.5$ м – радиус приемного объектива лидара, $R_0$ – расстояние от лидара до рассеивающего слоя (~440 км), $N_0 = 2 \times 10^{16}$ – число рассеивающих частиц в 1 м$^3$ вблизи поверхности Земли, остальные обозначения те же, что и для формулы (4). Интерпретация формулы (5) заключается в суммировании рассеяной мощности света, попадающей в приемный объектив лидара, от всех частиц, находящихся на пути луча в слое толщиной ~0.05 м. Экспонента, стоящая под знаком интеграла, отражает барометрический коэффициент падения концентрации с высотой. Таким образом, результат принимаемой лидаром мощности от облачных образований $P_{\text{лид}} = P_{\text{отр}} + P_{\text{расс}}$ увеличивается, в частности, с количеством и размером рассеивающих частиц.

В рассматриваемом примере расположения плотного облака на высоте ~10 км над Землей можно точно решить обратную задачу для определения функции распределения концентрации метана при изменении высоты от облака до вышележащих слоев атмосферы, а условие непрерывности функции распределения концентрации метана и ее производных – для аппроксимации и определения распределения концентрации газа непосредственно под облаком, вплоть до поверхности Земли.

Основными данными для такого определения концентрации являются измеренные величины средней ширины линии поглощения газа, среднего осажденного слоя на измеряемом участке трассы и расстояние от КА до облачного слоя. При дальнейших измерениях на данном участке траектории КА в случае наличия прямой видимости на трассе, возможно уточнение полученных результатов.

Упрощенный алгоритм обработки сигнала и уточнения профиля статистической функции распределения метана при изменении высоты на всей трассе представлен на рис. 2. Уточнение профиля концентрации метана сводится в простейшем случае к подбору постоянной составляющей и коэффициента при линейном члене выражения (2). Если, например, измеренное значение осажденного слоя больше, а ширина линии меньше чем теоретические значения, полученные для нормального профиля концентрации, то профиль будет соответствовать кривой *2* на рис. 3, а не кривой *3*. Подтверждающие этот вывод цифры приведены ниже. Если облачный слой находится на расстоянии, например, 10 км над Землей, то нормальному профилю концентрации (кривая *1*) соответствует значение осажденного слоя метана 14.983 мм и ширина линии поглощения ~$2.14 \times 10^{-3}$ нм. Предположим, что в эксперименте получены соответственно следующие значения: 15.93 мм и $2.077 \times 10^{-3}$ нм. Видно, что средний осажденный слой метана примерно на 1 мм (~7%) больше, чем для стандартного профиля. Подбор коэффициентов при линейном и постоянном членах выражения (2) дает следующий вид функции $f(x)$, удовлетворяющей экспериментальным данным:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 2.35816\times10^{-10}(75-x)^6 - \\ & - 4.85176\times10^{-8}(75-x)^5 + \\ & + 3.20739\times10^{-6}(75-x)^4 - \\ & - 4.82155\times10^{-5}(75-x)^3 - \\ & - 1.975395\times10^{-3}(75-x)^2 + \\ & + 1.5504372\times10^{-2}(75-x) + 1.826475562. \end{aligned} \quad (6)$$

Профиль, соответствующий кривой *3* на рис. 3, отличающийся от стандартного профиля только постоянным членом (1.776 вместо 1.676), также дает значение осажденного слоя метана ~15.98 мм, однако ширина линии поглощения для такой кривой, как показывает расчет по формуле (3), равна $2.18 \times 10^{-3}$ мм и примерно на 5% больше, чем измеренное значение. Для кривой *2* ширина линии поглощения составляет величину $2.08 \times 10^{-3}$ нм, что делает ее более вероятным профилем распределения. Величину изменения в 5% в ширине линии поглощения можно зафиксировать при соответствующем соотношении сигнал/шум для используемой измерительной аппаратуры [5].

Однако не всегда можно определить профиль метана за облачным слоем. Например, при измерениях, когда зондирование производилось с поверхности Земли до сравнительно плотных облачных слоев, находящихся на высотах 1.5 и 3.4 км [5], нельзя уточнить профиль по всей высоте. Экспериментально полученные в указанной работе данные по концентрации метана оказались равными соответственно 2.125 и 4.59 мм осажденного слоя метана. Если вычислить теоретические значения соответствующих величин по формулам (1)–(3) для стандартного распределения газа, то значения получаются следующими: 2.33 и 4.81 мм, что больше, чем в эксперименте (ошибка получения экспериментальных данных не превышала 3%). Поэтому чтобы удовлетворялись экспериментальные данные, постоянный член (2) должен быть равен 1.576. В этом случае отклонение от эксперимента не превышает значения 0.07 единиц или менее 3%, а именно: 2.19 и 4.52 мм осажден-

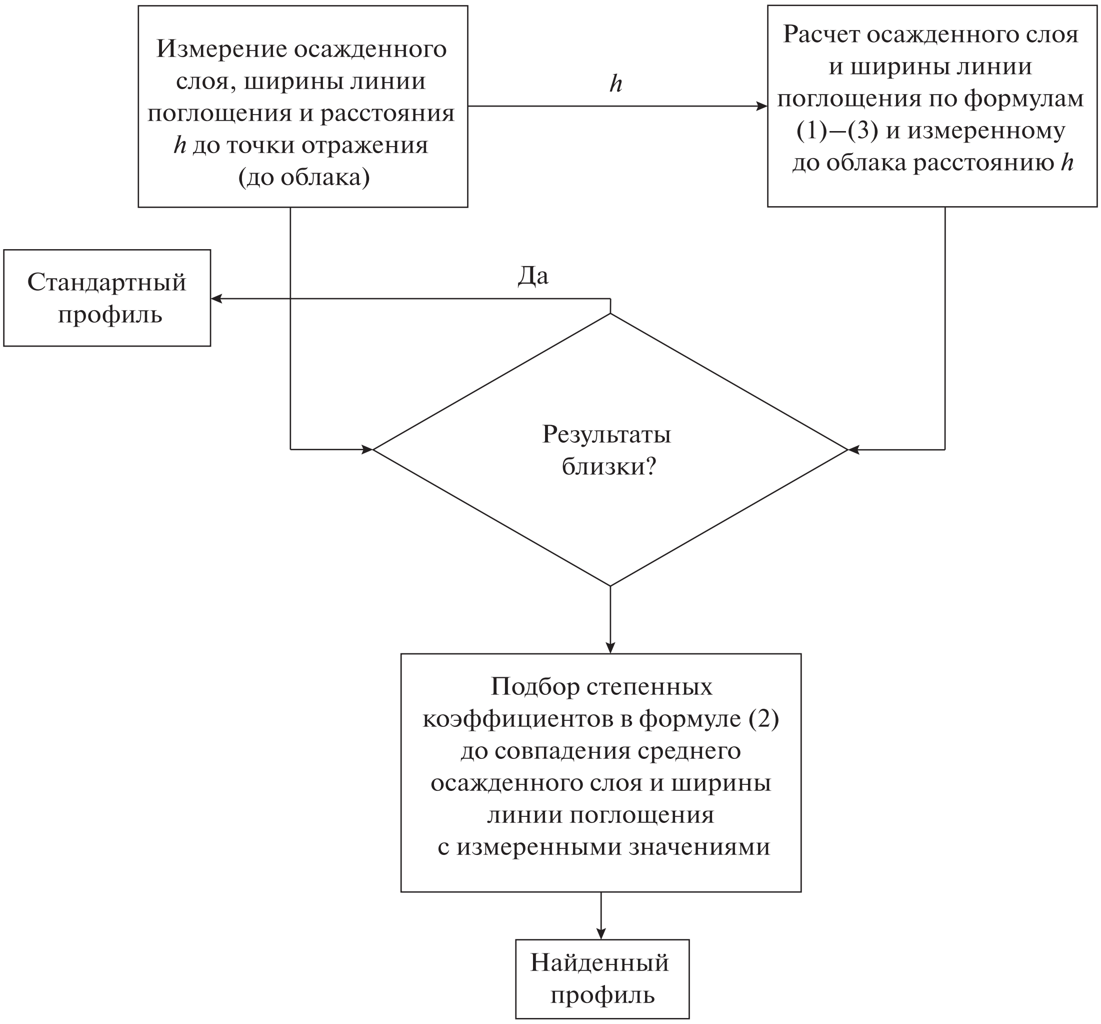



**Рис. 2.** Упрощенный алгоритм определениия вертикального профиля распределения концентрации метана на разной высоте.

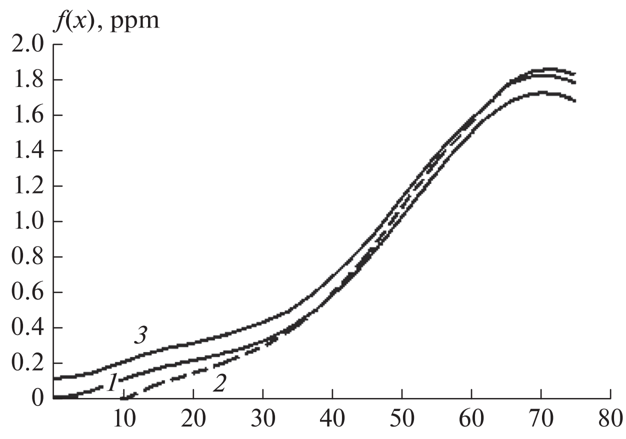



**Рис. 3.** Профили концентрации метана: *1* – нормальный, *2* – с увеличенным осажденным слоем метана в тропосфере и уменьшенным осажденным слоем в стратосфере (ширина линии поглощения $2.08 \times 10^{-3}$ нм), *3* – с увеличенным осажденным слоем метана в тропосфере и стратосфере (ширина линии поглощения $2.18 \times 10^{-3}$ нм).

ного слоя метана. Но в данном случае распределение метана по высоте будет неопределенно и выглядеть или как кривая *1* (постоянный член равен 1.576), или как кривая *2* с коэффициентом при линейном члене, равном 0.022504372, и постоянным членом, равным 1.576, или как кривая *3* с коэффициентом при линейном члене 0.015504372 и постоянным членом 1.576 (рис. 4), поскольку во всех трех случаях расчетная и полученная экспериментально ширина линии поглощения совершенно одинаковы: для низкого облачного слоя 1.5 км она равна 0.057 нм, а для высокого облачного слоя 3.4 км – 0.051 нм. Такой вариант неоднозначности профиля при измерениях с Земли закономерен, поскольку мала высота зондирования, а ширина линии поглощения и концентрация газа на приземных высотах меняются достаточно слабо.

Иначе обстоит дело при зондировании метана со спутника. В этом случае часть трассы от высот орбиты порядка 450 км до высот в ~10 км (это

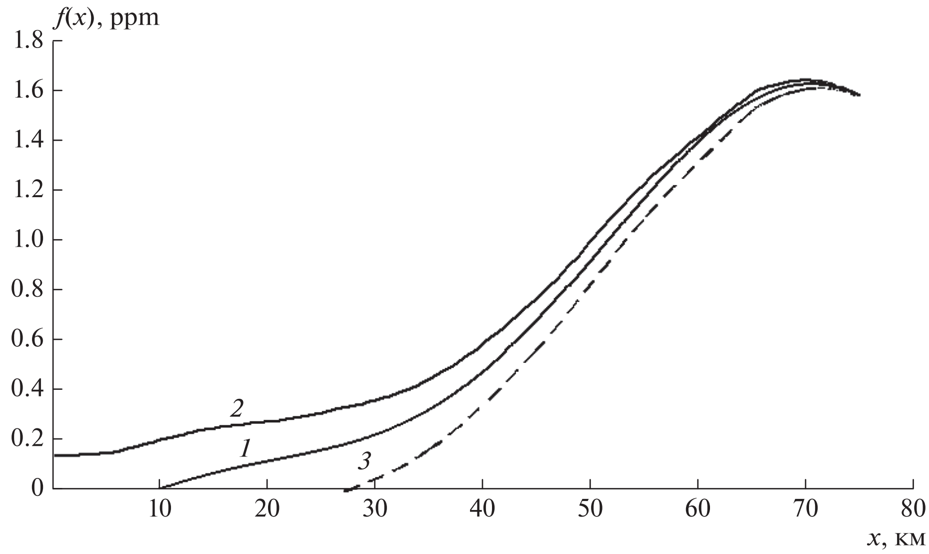



**Рис. 4.** Распределения концентрации метана по высоте, удовлетворяющие экспериментальным данным при зондировании с Земли: *1* – постоянный член равен 1.576; *2* – коэффициент при линейном члене равен $2.2504372 \times 10^{-2}$, постоянный член 1.576; *3* – коэффициент при линейном члене равен $1.5504372 \times 10^{-2}$, постоянный член 1.576.

примерно максимальная высота облачных слоев) большую часть времени наблюдений имеет прямую видимость, и поэтому измерения по изложенной методике становятся достоверными с возможностью последующего уточнения данных измерений при появлении прямой видимости на трассе КА–Земля.

## 2. УТОЧНЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ФОНОВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕТАНА ПРИ НАЛИЧИИ “РЫХЛОГО” ТУМАНА НА ТРАССЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Для случая облаков типа тумана, когда в воздухе находятся достаточно “рыхлые” образования, например из мелких водяных капель, можно также рассчитать принимаемый сигнал, основываясь на обратном рассеянии Рэлея для малых по сравнению с длиной волны частиц или рассеянии Ми (при длине волны излучения лидара сравнимой с размером рассеивающих частиц). Например, если расстояние, на котором происходит полное рассеяние света, составляет ~10 км над поверхностью Земли, то плотность частиц “рыхлого” облака (или тумана) должна составлять величину в $\sim 10^5$ раз меньше, чем в приведенном выше случае плотного облака $N_0 \sim 2 \times 10^{16}$ 1/м$^3$ (10 км/0.1 м $= 10^5$), т.е. $N_0 \sim 2 \times 10^{11}$ 1/м$^3$ частиц радиусом ~0.1 мкм. В этом случае рассеяние происходит во всем 10-километровом слое тумана вплоть до поверхности Земли, в основном в нижнем слое протяженностью ~5...10 км. Поскольку результат принимаемой рассеянной мощности сильно зависит от плотности и размеров рассеивающих частиц, то в процессе зондирования желательно иметь информацию о составе среды рассеяния, в качестве которой можно использовать, например, синхронную фотографию трассы измерения и величину принимаемого сигнала. В случае “рыхлого” тумана (концентрация частиц у поверхности Земли $N_0 \sim 2 \times 10^{11}$ 1/м$^3$) мощность $P_{\text{лид}}$, принимаемая лидаром и получаемая от слоя атмосферы толщиной 5000 м, находящегося на расстоянии $R_0$ от лидара, можно определить по аналогичной (5) формуле:

$$P_{\text{лид}} \approx \int\limits_{R_0}^{R_0+5000} P_0 \pi A^2 \left(\frac{9\pi^2 V^2}{\lambda^4 R^2}\right) \times \\ \times N(\exp((450\,000 - R)/9800)) \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{n_1^2 + 2n_0^2}\right)^2 dR. \quad (7)$$

Здесь суммируется рассеянная мощность света, попадающая в приемный объектив лидара, от частиц, находящихся на пути луча в слое толщиной 5000 м.

Графически мощность, принимаемая лидаром и рассчитанная по формуле (7), представлена на рис. 5. Из рисунка видно, что основной источник лидарного сигнала – это нижний слой атмосферы высотой ~10 км. Определим наиболее вероятную область отражения лазерного луча как центр тяжести фигуры, ограниченной графиком. Нетрудно подсчитать, используя (7), что эта точка находится на расстоянии ~7 км от поверхности Земли.

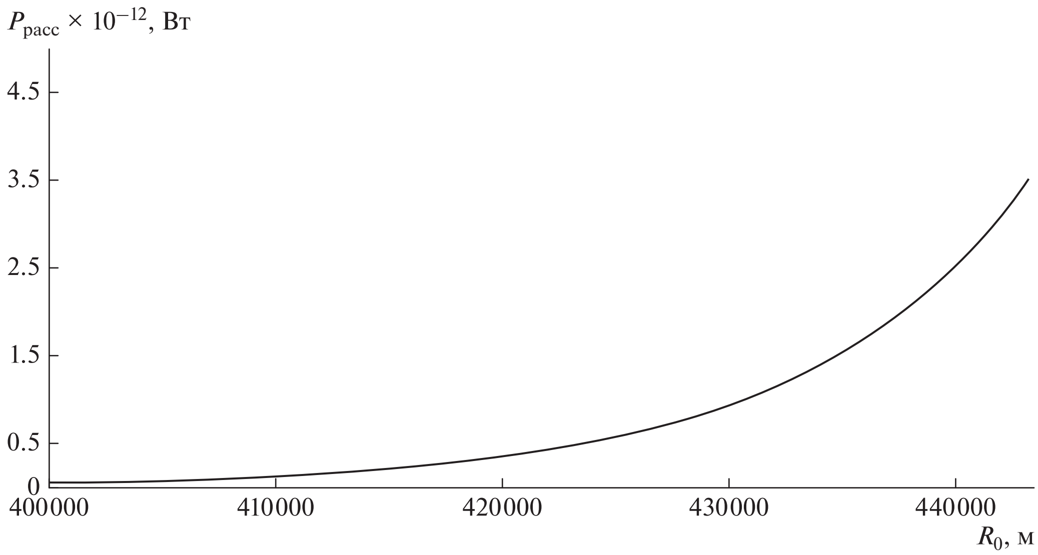



**Рис. 5.** Зависимость мощности, попадающей в приемный объектив лидара, от расстояния зондирования для слоя рассеяния 5000 м.

Таким образом, считая, что лидар имеет датчик расстояния, дающий в случае рыхлого тумана неопределенное расстояние до области отражения из-за значительного разброса времени прихода отраженного импульса, можно считать достоверной областью отражения, расстояние в ~7 км над поверхностью Земли. Расстояние до точки отражения желательно оценивать с точностью до ~1000 м. В этом случае результаты аппроксимации профиля концентрации получаются точнее. В квазинепрерывных лидарах с прямым фотодетектированием принимаемых сигналов есть возможность определения расстояния до объекта отражения, например, по заднему фронту спадающего принятого квазиимпульса [9], но в случае рыхлого тумана такой измеритель может давать большие погрешности, порядка нескольких километров. Алгоритм восстановления профиля концентрации в данном случае такой же, как на рис. 2, однако расстояние до точки отражения принимаем равным 7 км над уровнем Земли (443 км от орбиты КА).

При рассмотрении варианта облачности, промежуточной между рассмотренными выше крайними случаями, когда плотные облака находятся в более низком слое тропосферы или наблюдается не "рыхлый" туман, а туман с более высокой концентрацией капель, расстояние до области отражения может быть измерено датчиком расстояния в пределах указанной точности ~1000 м, и этого достаточно для уточнения профиля концентрации метана на протяжении всей трассы также с разрешением ~1000 м.

В заключение остановимся на методе повышения разрешающей способности космических лидаров, который, по нашему мнению, возможен в технической реализации лидарного сканирования. Как видно из представленных выше расчетов, наиболее вероятные принимаемые лидаром уровни мощности сигналов в заданном диапазоне длин волн составляют величины ~$10^{-11}$...$10^{-12}$ Вт, и такие мощности находятся на пределе чувствительности современных фотоприемников, например, на основе лавинных фотодиодов. В силу этого разрешающая способность космических лидаров (как квазинепрерывных, так и импульсных) составляет величину ~50 км в горизонтальной плоскости при достаточно длительном усреднении ~5...10 с. За это время спутник пролетает расстояние ~ 40...80 км.

Однако для объектов повышенного интереса, например магистральных газопроводов, газохранилищ и т.д., есть возможность повысить область локализации зондирования, немного усложнив аппаратуру лидара на КА с целью возможности удержания пятна лазера на интересующей области отражения (рис. 6). В изображенном на рисунке варианте, приемопередатчик лидара при движении КА по орбите поворачивается на небольшой угол с целью поддержания пятна лазера в заданной области отражения. Нетрудно оценить точность поворота приемопередатчика в таком режиме сканирования. Если пятно у поверхности Земли имеет размер ~100 × 100 м, а высота орбиты ~450000 м, то точность поворота приемопередатчика составит ~1/4500 рад = 0.8 угл. мин, что вполне достижимо технически. В данном случае пространственное разрешение лидарных измерений в горизонтальной плоскости составит вели-

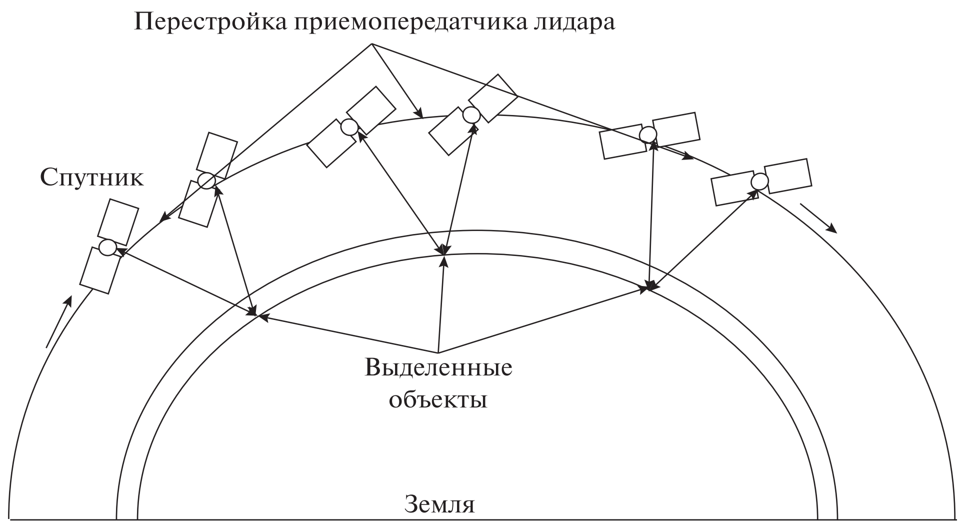



**Рис. 6.** Сканирование выделенных объектов с высоким пространственным разрешением.

чину порядка размера пятна излучения, т.е. ~100...200 м.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено моделирование уточнения вертикального профиля концентрации метана в атмосфере Земли при отсутствии прямой видимости на трассе КА–поверхность Земли. Поскольку на высоких широтах облачность значительное время закрывает поверхность Земли, важно использовать все возможности, чтобы не было значительных окон неопределенности в получаемых данных на всей трассе, включая нижнюю тропосферу. Предложенная методика использования отраженного и рассеянного сигнала от облаков и облачных (или аэрозольных) образований и экстраполирование данных по вертикальному профилю метана на всю трассу при отсутствии прямой видимости поверхности Земли может исключить отсутствие информации и повысить точность и достоверность статистических данных по определению концентрации метана, а следовательно, и по влиянию его на динамику климата в целом. Для повышения разрешающей способности лидара для особо важных областей на поверхности Земли возможно применение сканирования приемопередатчика, обеспечивающее неподвижность луча в заданной области отражения при пролете спутника по траектории орбиты.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0030-2019-0008.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shindel D.T., Faluvegi G.S., Koch D.M. et al.* // Science. 2009. V. 326. P. 716.
2. *Nisbet G.N., Dlugokencky E.J., Bousquet P.E.* // Science. 2014. V. 343. P. 493.
3. *Weidmann D., Hoffmann A., Macleod N. et al.* // Remote Sens. 2017. V. 9. № 1073. P. 1.
4. *Акимова Г.А., Григорьевский В.И., Матайбаев В.В. и др.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 10. С. 1010.
5. *Григорьевский В.И., Тезадов Я.А.* // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 5. С. 369.
6. *Бажин Н.М.* Метан в окружающей среде. Новосибирск: Изд-во РАН, 2010.
7. *Береснев С.А., Грязин В.И.* Физика атмосферных аэрозолей, курс лекций. Екатеринбург: Уральский ун-т, 2008.
8. *Новикова В.А., Варжель С.В.* Рассеяние света и его применение в волоконной оптике. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2019.
9. *Григорьевский В.И., Садовников В.П., Тезадов Я.А. и др.* // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2017. № 6. С. 32.
10. *Тимофеев Ю.М., Васильев А.В.* Основы теоретической атмосферной оптики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007.

*РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 662–672*

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

*УДК 537.624;537.632*

# ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕКТОРОМ ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРОМ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

**© 2021 г. Э. Г. Локк[a, *], А. В. Луговской[a], С. В. Герус[a]**

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141196 Российская Федерация*

**E-mail: edwin@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 29.07.2020 г.
После доработки 10.02.2021 г.
Принята к публикации 21.02.2021 г.

Получены аналитические формулы для всех компонент высокочастотного поля, вектора Пойнтинга $\vec{P}$ и вектора групповой скорости $\vec{U}$ электромагнитных волн, которые распространяются в произвольном направлении в неограниченной бигиротропной среде, описываемой эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Доказано, что соответствующие компоненты векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ пропорциональны друг другу (и, следовательно, эти векторы параллельны), причем отношение этих компонент представляет собой объемную плотность энергии волны. Рассчитано изменение модуля и ориентации вектора $\vec{U}$ и ориентации вектора $\vec{P}$ в зависимости от ориентации волнового вектора для различных типов электромагнитных волн, распространяющихся в ферромагнитной среде (частном случае бигиротропной среды). Найдено, что векторы $\vec{U}$ и $\vec{P}$ всегда ориентированы одинаково для всех типов волн в ферромагнитной среде.

**DOI:** 10.31857/S003384942107007X

## ВВЕДЕНИЕ

Исторически понятия “вектор групповой скорости” и “вектор Пойнтинга” возникли независимо друг от друга, причем оба этих понятия были введены в физику при описании волн в изотропных средах. Так, идея групповой скорости волны, отличающейся от фазовой скорости, впервые была предложена Гамильтоном в 1839 г., а позднее (поскольку эта идея осталась незамеченной) понятие о групповой скорости вновь было введено Стоксом и Рэлеем. Общее представление о потоке энергии в пространстве было введено в физику Умовым в 1874 г., а затем Пойнтинг в 1885 г. получил формулу для расчета потока электромагнитной энергии. В дальнейшем понятия вектора групповой скорости $\vec{U}$ и вектора Пойнтинга[1] $\vec{P}$ стали использовать и для характеристики волн в анизотропных средах. Поскольку оба эти вектора были введены в физику *независимо друг от друга*, то при их использовании для характеристики волн в анизотропных средах необходимо было установить как их взаимную ориентацию, так и их ориентацию по отношению к направлению переноса энергии. В частности, для плоских волн в безграничной анизотропной среде в [1] было показано, что в отсутствие поглощения скорость переноса энергии равна групповой скорости, а в [2] – что в прозрачной немагнитной среде с симметричным тензором диэлектрической проницаемости векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ нормальны поверхности волновых векторов. В дальнейшем на основе использованного в [2] подхода аналогичные результаты были получены для магнитостатических волн в различных ферритовых структурах [3] и для электромагнитных волн в безграничной бигиротропной среде, описываемой эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей [4], а в работах [5–7] была исследована скорость переноса энергии волн в среде с положительной аномальной дисперсией и в среде с проводимостью.

Следует, однако, отметить, что поскольку в работах [2–4] фактически было доказано, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ *нормальны одной и той же поверхности* (поверхности волновых векторов или изочастотной поверхности), то возникает вопрос: всегда ли эти векторы будут направлены одинаково или же существуют среды (условия), когда эти векторы могут быть направлены противоположно? Оче-

[1] Часто называемого также вектором Умова–Пойнтинга.

видно, что кроме анализа уравнений в векторной форме для сравнения ориентаций векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ у волн с неколлинеарной ориентацией групповой и фазовой скоростей необходимо получить для них аналитические выражения в какой-нибудь анизотропной среде, причем при выводе данных выражений не следует использовать различные приближенные методы. Одной из наиболее подходящих анизотропных сред для такого исследования является бигиротропная среда (частными случаями которой являются плазма и ферромагнитная среда), в которой ранее уже исследовалось распространение электромагнитных волн на основе уравнений Максвелла (без магнитостатического приближения) [8–12].

Ниже, развивая исследования, изложенные в [8, 9, 12], получены аналитические выражения для векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ электромагнитных волн, распространяющихся в произвольном направлении в бигиротропной среде, найдено отношение проекций этих векторов, проанализирован физический смысл этого отношения, а также рассчитаны ориентации этих векторов для безграничной ферромагнитной среды.

## 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Распространение электромагнитных волн в неограниченном бигиротропной среде уже исследовалось ранее (подробнее см. [8, гл. 5] и [9, гл. 5]). Напомним кратко основные соотношения, необходимые для намеченного исследования.

Пусть имеется бигиротропная среда, намагниченная до насыщения однородным постоянным магнитным полем $\vec{H}_{C0}$. Введем декартову систему координат $\Sigma_D = \{x; y; z\}$ так, чтобы ось $z$ была направлена вдоль вектора $\vec{H}_{C0}$. В общем случае такую намагниченную бигиротропную среду можно охарактеризовать диэлектрической и магнитной проницаемостями, описываемыми эрмитовыми тензорами второго ранга $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}}$ :

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}} = \begin{vmatrix} \mu & i\nu & 0 \\ -i\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}, \quad \overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{vmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Электромагнитное поле с частотой ω, распространяющееся в данной среде и изменяющееся во времени по гармоническому закону ~exp($i\omega t$), должно удовлетворять системе уравнений Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} + i\omega\vec{B}/c = 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} - i\omega\vec{D}/c = 0 \\ \operatorname{div}\vec{D} = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

где $c$ — скорость света в вакууме, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — комплексные амплитуды векторов напряженностей электрического и магнитного СВЧ-полей, а $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — комплексные амплитуды векторов напряженностей электрической и магнитной СВЧ-индукций, которые связаны с $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соотношениями

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\varepsilon}}\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\mu}}\vec{H}. \tag{3}$$

С учетом выражений (1) и (3) систему (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + ik_0\mu H_x - k_0\nu H_y = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0\nu H_x + ik_0\mu H_y = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + ik_0\mu_{zz} H_z = 0, \tag{6}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) + i\nu\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) + \mu_{zz}\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - ik_0\varepsilon E_x + k_0 g E_y = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_0 g E_x - ik_0\varepsilon E_y = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - ik_0\varepsilon_{zz} E_z = 0, \tag{10}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + ig\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + \varepsilon_{zz}\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \tag{11}$$

где $k_0 = \omega/c$.

Из системы (4)–(11) можно получить два уравнения, содержащие лишь компоненты $E_z$ и $H_z$. Действительно, продифференцируем уравнение (4) по $y$, а уравнение (5) — по $x$ и вычтем полученные выражения:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) - \\ - k_0\nu\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) - ik_0\mu\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Продифференцируем также уравнение (8) по $y$, а уравнение (9) – по $x$ и вычтем полученные выражения:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}\right)+ \\ + k_0 g\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)-ik_0\varepsilon\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0. \quad (13)$$

Третье слагаемое в (12) преобразуем с учетом выражения (11), а затем с учетом (6); четвертое слагаемое в (12) преобразуем с учетом выражения (7), а затем сложим его с пятым слагаемым в (12) и учтем (10). В итоге уравнение (12) примет вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+ \\ + k_0^2\varepsilon_{zz}\mu_\perp E_z+k_0\mu_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right)\frac{\partial H_z}{\partial z}=0, \quad (14)$$

где $\mu_\perp=(\mu^2-\nu^2)/\mu$.

Теперь третье слагаемое в (13) преобразуем с учетом выражения (7), а затем с учетом (10). Четвертое слагаемое в (13) преобразуем с учетом выражения (11), а затем сложим его с пятым слагаемым в (13) и учтем (6). В итоге уравнение (13) примет вид

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}+ \\ + k_0^2\mu_{zz}\varepsilon_\perp H_z-k_0\varepsilon_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right)\frac{\partial E_z}{\partial z}=0, \quad (15)$$

где $\varepsilon_\perp=(\varepsilon^2-g^2)/\varepsilon$.

Таким образом, мы получили систему из двух уравнений, (14) и (15), содержащих лишь компоненты $E_z$ и $H_z$. Будем искать решения этой системы в виде однородной плоской электромагнитной волны с волновым вектором $\vec{k}$, т.е. будем считать, что компоненты полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ($E_x$ $E_y$, $E_z$, $H_x$, $H_y$ и $H_z$) изменяются в пространстве, как и во времени, по гармоническому закону:

$$E_{x,y,z}=E_{x0,y0,z0}\exp(-ik_x x-ik_y y-ik_z z) \quad \text{или} \\ \vec{E}=\vec{E}_0\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \quad (16)$$

$$H_{x,y,z}=H_{x0,y0,z0}\exp(-ik_x x-ik_y y-ik_z z) \quad \text{или} \\ \vec{H}=\vec{H}_0\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \quad (17)$$

где наряду с декартовой системой координат введена также сферическая система координат $\Sigma_S=\{r;\varphi;\theta\}$ в соответствии с соотношениями

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

Очевидно, что модуль $k$ волнового вектора $\vec{k}$ и его компоненты $k_x$, $k_y$ и $k_z$ также связаны соотношениями

$$k_x=k\sin\theta\cos\varphi,\quad k_y=k\sin\theta\sin\varphi,\quad k_z=k\cos\theta,$$

причем $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=k_\varphi^2+k_z^2$, где $k_\varphi$ – проекция вектора $\vec{k}$ на плоскость $xy$, т.е. $k_\varphi^2=k_x^2+k_y^2=k^2\sin^2\theta$. Подставляя выражения (16) и (17) в (14) и (15), получим систему уравнений

$$F_\nu E_{z0}+i\mu_{zz}F_{\nu g}H_{z0}=0, \quad (18)$$

$$F_g H_{z0}-i\varepsilon_{zz}F_{\nu g}E_{z0}=0, \quad (19)$$

где безразмерные функции $F_\nu$, $F_g$ и $F_{\nu g}$ в системах $\Sigma_D$ и $\Sigma_S$ имеют вид

$$F_\nu=\frac{k_\varphi^2}{k_0^2}+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{k_z^2}{k_0^2}-\varepsilon_{zz}\mu_\perp= \\ =\frac{k^2}{k_0^2}\left(\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\cos^2\theta\right)-\varepsilon_{zz}\mu_\perp, \quad (20)$$

$$F_g=\frac{k_\varphi^2}{k_0^2}+\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{k_0^2}-\mu_{zz}\varepsilon_\perp= \\ =\frac{k^2}{k_0^2}\left(\sin^2\theta+\frac{\mu_{zz}}{\mu}\cos^2\theta\right)-\mu_{zz}\varepsilon_\perp, \quad (21)$$

$$F_{\nu g}=\frac{k_z}{k_0}\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right)=\frac{k}{k_0}\cos\theta\left(\frac{g}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\mu}\right), \quad (22)$$

причем обе недиагональные компоненты $\nu$ и $g$ тензоров $\ddot{\varepsilon}$ и $\ddot{\mu}$ входят только в функцию $F_{\nu g}$, тогда как в функцию $F_\nu$ входит только компонента $\nu$, а в функцию $F_g$ – только $g$.

Приравнивая отношения $H_{z0}/E_{z0}$, найденные из (18) и (19), получим дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в бигиротропной среде:

$$F_\nu F_g-\varepsilon_{zz}\mu_{zz}F_{\nu g}^2=0 \quad \text{или} \quad F(\omega,\vec{k})=0. \quad (23)$$

Перемножая $F_\nu$ и $F_g$ и находя $F_{\nu g}^2$ в (23) с учетом (20)–(22), получим следующее биквадратное уравнение[2] относительно $k/k_0$:

$$\frac{k^4}{k_0^4}\left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\mu}\right)-\frac{k^2}{k_0^2}\times \\ \times\left[\sin^2\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}\right)+2\cos^2\theta\left(1+\frac{g\nu}{\varepsilon\mu}\right)\right]+\varepsilon_\perp\mu_\perp=0. \quad (24)$$

Выражения (23) и (24) представляют собой разные формы дисперсионного уравнения для электромагнитных волн в бигиротропной среде.

[2] Уравнение (24) приведено ранее, см. [9, (4.31)].

Дискриминант $D$ уравнения (24) можно привести к виду

$$\begin{gathered}D=\left[\sin^2\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}\right)+2\cos^2\theta\left(1+\frac{g\nu}{\varepsilon\mu}\right)\right]^2-\\ -4\left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\mu}\right)\varepsilon_\perp\mu_\perp=\\ =\sin^4\theta\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}-\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}\right)^2+4\cos^4\theta\left(\frac{\nu}{\mu}+\frac{g}{\varepsilon}\right)^2+\\ +4\sin^2\theta\cos^2\theta\left[\frac{\varepsilon_\perp\nu^2}{\varepsilon_{zz}\mu^2}+\frac{\mu_\perp g^2}{\mu_{zz}\varepsilon^2}+\frac{\nu g}{\mu\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}\right)\right],\end{gathered}\tag{25}$$

из которого видно, что последнее слагаемое в (25) может быть отрицательным, поэтому необходимо проверять (исходя из конкретных зависимостей компонент тензоров $\ddot{\varepsilon}$ и $\ddot{\mu}$), является ли величина $D$ всегда положительной для конкретной исследуемой среды. Следует отметить, что в таких средах как плазма и ферромагнетик, где либо $\nu = 0$, либо $g = 0$, выражение (25) существенно упрощается. Например, при $g = 0$ и $\nu \neq 0$, а также при $g \neq 0$ и $\nu = 0$ получим соответственно:

$$D=\sin^4\theta\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_{zz}}-1\right)^2+4\frac{\nu^2}{\mu^2}\cos^2\theta,\tag{26}$$

$$D=\sin^4\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_{zz}}-1\right)^2+4\frac{g^2}{\varepsilon^2}\cos^2\theta.\tag{27}$$

Очевидно, что в (26) и (27) все слагаемые положительны и величина $D$ не может принимать в этих случаях отрицательные значения.

## 2. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Запишем выражения для электрических и магнитных компонент ВЧ-поля через амплитуду одной из компонент – например, через амплитуду $E_{z0}$. Для компоненты $H_z$ такое выражение можно записать непосредственно из соотношения (17):

$$\begin{gathered}H_z=H_{z0}\exp(-ik_xx-ik_yy-ik_zz)=\\ =i\frac{F_\nu}{\mu_{zz}F_{\nu g}}E_{z0}\exp(-ik_xx-ik_yy-ik_zz).\end{gathered}\tag{28}$$

Выражения для остальных компонент ВЧ-поля получим, подставляя соотношения (16) и (17) в уравнения (4)–(11), производя дифференцирование и помножив полученные выражения на $i$:

$$k_zE_{y0}-k_yE_{z0}+\mu k_0H_{x0}+i\nu k_0H_{y0}=0,\tag{29}$$

$$k_xE_{z0}-k_zE_{x0}-i\nu k_0H_{x0}+\mu k_0H_{y0}=0,\tag{30}$$

$$k_yE_{x0}-k_xE_{y0}+\mu_{zz}k_0H_{z0}=0,\tag{31}$$

$$\begin{gathered}(\mu k_x-i\nu k_y)H_{x0}+\\ +(\mu k_y+i\nu k_x)H_{y0}+\mu_{zz}k_zH_{z0}=0,\end{gathered}\tag{32}$$

$$k_zH_{y0}-k_yH_{z0}-\varepsilon k_0E_{x0}-igk_0E_{y0}=0,\tag{33}$$

$$k_xH_{z0}-k_zH_{x0}+igk_0E_{x0}-\varepsilon k_0E_{y0}=0,\tag{34}$$

$$k_yH_{x0}-k_xH_{y0}-\varepsilon_{zz}k_0E_{z0}=0,\tag{35}$$

$$(\varepsilon k_x-igk_y)E_{x0}+(\varepsilon k_y+igk_x)E_{y0}+\varepsilon_{zz}k_zE_{z0}=0.\tag{36}$$

Помножим уравнение (36) на $k_y$, а уравнение (31) – на $(\varepsilon k_x - igk_y)$ и вычтем полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту $E_{x0}$), а затем из полученного уравнения найдем величину $E_{y0}$. Подставляя $E_{y0}$ в (16) и учитывая соотношения (18) и (28), получим

$$\begin{gathered}E_y=\frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(\frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_yk_0-\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}k_yk_z+i\frac{F_\nu}{F_{\nu g}}k_xk_0\right)\times\\ \times\exp(-ik_xx-ik_yy-ik_zz).\end{gathered}\tag{37}$$

Аналогичным образом помножим уравнение (36) на $k_x$, а уравнение (31) – на $(\varepsilon k_y + igk_x)$ и сложим полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту $E_{y0}$). В итоге, находя из полученного уравнения величину $E_{x0}$ и подставляя ее в (16), с учетом (18) и (28) имеем

$$\begin{gathered}E_x=\frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(\frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_xk_0-\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}k_xk_z-i\frac{F_\nu}{F_{\nu g}}k_yk_0\right)\times\\ \times\exp(-ik_xx-ik_yy-ik_zz).\end{gathered}\tag{38}$$

Помножим уравнение (32) на $k_y$, а уравнение (35) – на $(\mu k_x - i\nu k_y)$ и вычтем полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту $H_{x0}$). В итоге, находя из полученного уравнения величину $H_{y0}$ и подставляя ее в (17), с учетом (18) и (28) получим

$$\begin{gathered}H_y=\frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(i\varepsilon_{zz}\frac{\nu}{\mu}k_yk_0-i\frac{F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_yk_z-\varepsilon_{zz}k_xk_0\right)\times\\ \times\exp(-ik_xx-ik_yy-ik_zz).\end{gathered}\tag{39}$$

Помножим уравнение (31) на $k_x$, а уравнение (34) – на $(\mu k_y + i\nu k_x)$ и сложим полученные выражения (чтобы избавиться от слагаемых, содержащих компоненту $H_{y0}$). В итоге, находя из полученного уравнения величину $H_{x0}$ и подставляя ее в (17), с учетом (18) и (28) имеем

$$\begin{gathered}H_x=\frac{E_{z0}}{k_\varphi^2}\left(i\varepsilon_{zz}\frac{\nu}{\mu}k_xk_0-i\frac{F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_xk_z+\varepsilon_{zz}k_yk_0\right)\times\\ \times\exp(-ik_xx-ik_yy-ik_zz).\end{gathered}\tag{40}$$

Итак, в формулах (28), (37)–(40) все компоненты электромагнитного ВЧ-поля выражены через амплитуду $E_{z0}$.

Получим теперь выражения для компонент вектора Пойнтинга $\vec{P}$, который, как известно, определяется формулой

$$\vec{P} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E}\vec{H}^*]. \tag{41}$$

Используя формулы (28), (37)–(40) и учитывая, что $k_0 = \omega/c$, для компонент вектора Пойнтинга получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_y H_z^* - E_z H_y^*\right) = \\ &= k_x \frac{\varepsilon_{zz}\omega E_{z0}^2}{8\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\left(F_\nu + F_g\right), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_z H_x^* - E_x H_z^*\right) = \\ &= k_y \frac{\varepsilon_{zz}\omega E_{z0}^2}{8\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\left(F_\nu + F_g\right), \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) = \frac{cE_{z0}^2}{8\pi k_\varphi^4}\times \\ &\times\left[\frac{\varepsilon_{zz}^2}{\varepsilon}k_x^2 k_z k_0 - \frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_x^2 k_0^2\varepsilon_{zz} - \frac{\nu F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_y^2 k_0^2\varepsilon_{zz} + \right. \\ &+ \frac{F_\nu^2}{\mu F_{\nu g}^2}k_y^2 k_z k_0 - \frac{gF_\nu}{\varepsilon F_{\nu g}}k_y^2 k_0^2\varepsilon_{zz} + \frac{\varepsilon_{zz}^2}{\varepsilon}k_y^2 k_z k_0 - \\ &\left. - \frac{\nu F_\nu}{\mu F_{\nu g}}k_x^2 k_0^2\varepsilon_{zz} + \frac{F_\nu^2}{\mu F_{\nu g}^2}k_x^2 k_z k_0\right] = \\ &= \frac{cE_{z0}^2 k_0\varepsilon_{zz}}{8\pi k_\varphi^2}\left[k_z\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon} + \frac{\mu_{zz}F_\nu}{\mu F_g}\right) - \frac{F_\nu}{F_{\nu g}}k_0\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right)\right] = \\ &= k_z \frac{\varepsilon_{zz}\omega E_{z0}^2}{8\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\times \\ &\times\left[\frac{\mu_{zz}}{\mu}F_\nu + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}F_g - \varepsilon_{zz}\mu_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Выше при последнем преобразовании величины $P_z$ использованы соотношения между величинами $F_\nu$, $F_g$ и $F_{\nu g}$ в соответствии с (23) и выражение (22).

## 3. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БИГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Прежде чем получить выражения для вектора групповой скорости и его компонент в бигиротропной среде, оговорим условия применимости этих выражений и самого термина групповая скорость. Как известно, групповая скорость — это скорость перемещения полезного сигнала, модулирующего синусоидальную волну (с более высокой частотой), при условии, что форма этого сигнала по мере распространения волны сохраняется. Очевидно, что это условие безоговорочно выполняется только в средах с линейной дисперсией. В диспергирующих же средах, к которым относится исследуемая бигиротропная среда и многие другие анизотропные (по отношению к распространению волн) среды, следует оговорить условия применимости понятия групповой скорости. Так, в работе [13] было предложено использовать понятие “групповая скорость” в таких средах лишь на некотором конечном расстоянии, на котором форма модулирующего сигнала практически не искажается, причем величина этого расстояния, очевидно, будет зависеть от дисперсионных характеристик конкретной среды. В частности, развивая представленный в [13] подход, в работе [14] было предложено оценивать это расстояние по формуле, включающей отношение первой производной и квадрата второй производной дисперсионной зависимости среды (см. [14, ур-ния (24) и (25)]).

Таким образом, учитывая степень кривизны дисперсионной зависимости, мы всегда можем выбрать *расстояние*, на котором при данных конкретных условиях (параметрах среды) можно использовать понятие групповой скорости. Очевидно также, что если ограничиться рассмотрением случаев, когда модулируемая волна распространяется на очень маленькое (бесконечно малое) расстояние, то тогда понятие групповой скорости можно использовать практически в любой среде. Поэтому можно считать, что приведенные ниже выражения для вектора групповой скорости и его компонент всегда справедливы при распространении электромагнитных волн в бигиротропной среде на малые расстояния.

При сформулированных условиях выражение для вектора групповой скорости волны $\vec{U}$, характеризующего *величину скорости и направление* перемещения *группы волн*, определяется выражением (см., например, [13, 15])

$$\vec{U} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\vec{x}_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\vec{y}_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\vec{z}_0, \tag{45}$$

причем соотношение (45) справедливо не только для волны, являющейся суммой двух или нескольких синусоидальных волн, но и для волны, представляющей собой узкий квазимонохроматический волновой пакет с определенным набором частот и волновых чисел [13]. Как правило, при исследовании реальных сред или структур зависимость $\omega(\vec{k})$ в явном виде можно получить лишь в редких случаях, тогда как вывести дисперсионное уравнение волны $F(\omega, \vec{k}) = 0$ удается гораздо чаще. Поэтому, используя правило дифференцирования неявной функции, выражение (45) можно записать в виде

$$\vec{U} = -\frac{\partial F/d\vec{k}}{\partial F/\partial\omega} = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \mathrm{grad}_{\vec{k}} F = = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial k_x}\vec{x}_0 + \frac{\partial F}{\partial k_y}\vec{y}_0 + \frac{\partial F}{\partial k_z}\vec{z}_0\right), \quad (46)$$

Выражение (46) удобно использовать при исследовании волн в анизотропных средах, где групповая скорость отличается от фазовой не только по величине, но и по направлению. Так, *вектор* $\mathrm{grad}_{\vec{k}} F$ определяет *пространственную* ориентацию вектора $\vec{U}$, а производная $\partial F/\partial\omega$ – это *число*, которое (вместе с модулем вектора $\mathrm{grad}_{\vec{k}} F$) определяет модуль вектора $\vec{U}$.

При фиксированных параметрах среды и значении частоты дисперсионное уравнение принимает вид

$$F(\vec{k}) = F(k_x, k_y, k_z) = 0$$

и описывает поверхность волновых векторов или изочастотную поверхность. Семейство изочастотных поверхностей (или – в двумерном случае – изочастотных зависимостей), рассчитанных для различных фиксированных значений частоты, часто анализируется в работах по исследованию волн в анизотропных средах, поскольку вектор $\mathrm{grad}_{\vec{k}} F$ (а значит, и вектор $\vec{U}$) всегда направлен по нормали к изочастотным поверхностям или зависимостям (называемым в векторном анализе поверхностями или зависимостями уровня). Это свойство обычно используется для наглядного изображения вектора $\vec{U}$ (см., например, [15, 16]).

Вычислим теперь вектор групповой скорости $\vec{U}$ электромагнитных волн, распространяющихся в бигиротропной среде. Подставляя в (46) частные производные[3] дисперсионного уравнения (23) по волновым числам, получим

$$U_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_x} = -2\frac{k_x}{k_0^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left(F_\nu + F_g\right), \quad (47)$$

$$U_y = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_x} = -2\frac{k_y}{k_0^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left(F_\nu + F_g\right), \quad (48)$$

$$U_z = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial k_z} = = -2\frac{k_z}{k_0^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1} \left[\frac{\mu_{zz}}{\mu}F_\nu + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}F_g - \varepsilon_{zz}\mu_{zz}\left(\frac{g}{\varepsilon} + \frac{\nu}{\mu}\right)^2\right]. \quad (49)$$

Производную $\partial F/\partial\omega$, входящую в соотношения (46)–(49), можно найти из дисперсионного уравнения (23). Предполагая, что компоненты $\varepsilon_{zz}$ и $\mu_{zz}$ не зависят от частоты, и оставляя произвольными зависимости от частоты компонент $\varepsilon$, $g$, $\varepsilon_\perp$, $\mu$, $\nu$ и $\mu_\perp$, получим следующее выражение:

$$\frac{\partial F}{\partial\omega} = -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon}\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon^2}\frac{k_z^2}{k_0^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \varepsilon_{zz}\frac{\partial\mu_\perp}{\partial\omega}\right)F_g - -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \frac{\mu_{zz}}{\mu^2}\frac{k_z^2}{k_0^2}\frac{\partial\mu}{\partial\omega} + \mu_{zz}\frac{\partial\varepsilon_\perp}{\partial\omega}\right)F_\nu - - 2\varepsilon_{zz}\mu_{zz}\left[\frac{k_z}{k_0}\left(\frac{\partial(g/\varepsilon)}{\partial\omega} + \frac{\partial(\nu/\mu)}{\partial\omega}\right) - \frac{F_{\nu g}}{\omega}\right]F_{\nu g}. \quad (50)$$

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОТНОШЕНИЯ МОДУЛЕЙ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Сравнивая выражения для компонент вектора Пойнтинга $\vec{P}$ (42)–(44) и выражения для компонент вектора $\vec{U}$ (47)–(49), видно, что соответствующие компоненты $P_x$, $P_y$, $P_z$ и $U_x$, $U_y$, $U_z$ пропорциональны друг другу, т.е.

$$w = \frac{P_x}{U_x} = \frac{P_y}{U_y} = \frac{P_z}{U_z} = -\frac{\omega k_0^2 \varepsilon_{zz} E_{z0}^2}{16\pi F_g k^2 \sin^2\theta}\frac{\partial F}{\partial\omega} = = -\frac{V^2}{c^2}\frac{f\varepsilon_{zz}E_{z0}^2}{8F_g\sin^2\theta}\frac{\partial F}{\partial\omega}, \quad (51)$$

где $V = \omega/k$ – модуль фазовой скорости волны.

Пропорциональность компонент $P_x$, $P_y$, $P_z$ и $U_x$, $U_y$, $U_z$ означает, что вектор Пойнтинга $\vec{P}$ и вектор групповой скорости $\vec{U}$ всегда параллельны. Однако параллельность векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ в бигиротропной среде не означает, что эти векторы всегда направлены одинаково, поскольку, как видно из (51), коэффициент пропорциональности $w$ в принципе может быть как положительным, так и отрицательным числом (величины $\partial F/\partial\omega$, $F_\nu$ и $F_g$, по-видимому, могут быть как положительными, так и отрицательными). Очевидно, возникает вопрос, возможна ли в принципе такая ситуация,

[3] Во избежание ошибок при дифференцировании уравнения (23) по волновым числам, как и при дифференцировании по частоте $\omega$, следует заменить используемые обозначения $k_\varphi^2$, $F_\nu$, $F_g$ и $F_{\nu g}$ соответствующими выражениями (20)–(22), содержащими волновые числа $k_x$, $k_y$, и $k_z$, а величину $k_0$ заменить на $\omega/c$. После проведения дифференцирования перечисленные обозначения можно вновь использовать для краткой записи выражений (47)–(50).

когда величина $w$ будет отрицательной, и что это означает.

Для ответа на этот вопрос выясним физический смысл величины $w$. Очевидно, что пропорциональность компонент $P_x$, $P_y$, $P_z$ и $U_x$, $U_y$, $U_z$ в соответствии с (51) означает также, что

$$|w| = |\vec{P}|/|\vec{U}|. \quad (52)$$

Поскольку модуль вектора Пойнтинга описывает энергию, проходящую за 1 с через единицу площади, а модуль вектора групповой скорости описывает расстояние, которое проходит эта энергия (в направлении, перпендикулярном единичной площади) за эту же секунду (и, следовательно, эта энергия равномерно распределена вдоль этого расстояния), то очевидно, что *модуль величины w описывает объемную плотность энергии волны*.

Возникает вопрос, как же следует интерпретировать знак, которым в соответствии с (51) обладает величина $w$. Рассуждая логически, мы должны сделать вывод, что, если векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ направлены одинаково, то волна характеризуется *положительной* объемной плотностью энергии, а если эти векторы направлены противоположно, – *отрицательной* объемной плотностью энергии. Как видно, вопрос о взаимной ориентации векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ сводится к вопросу о существовании волн с *отрицательной объемной плотностью энергии*, что в отличие от классической физики допускает квантовая физика [17, 18].

## 5. ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОРА ПОЙНТИНГА И ВЕКТОРА ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ У ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Попробуем выяснить взаимную ориентацию векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ для электромагнитных волн, распространяющихся в неограниченной ферромагнитной среде, у которой диэлектрическая проницаемость – скаляр ($\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\perp = \varepsilon$, $g = 0$), $\mu_{zz} = \text{const}$, а компоненты $\mu$ и $\nu$ зависят от частоты следующим образом:

$$\mu = 1 + \frac{\omega_M\omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} = \frac{\omega_\perp^2 - \omega^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (53)$$

$$\nu = \frac{\omega_M\omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (54)$$

где $\omega_H = \gamma H_{c0}$, $\omega_M = 4\gamma\pi M_{c0}$, $\omega_\perp^2 = \omega_H(\omega_H + \omega_M)$, $\gamma$ – гиромагнитная постоянная, $4\pi M_{c0}$ – намагниченность насыщения феррита.

Дисперсионное уравнение, описывающее электромагнитные волны в неограниченной ферритовой среде, в соответствии с (23) примет вид

$$F(\omega, \vec{k}) = F_\nu F_g - \mu_{zz}\varepsilon\frac{k_z^2\nu^2}{k_0^2\mu^2} = 0. \quad (55)$$

Полагая в (50) $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\perp = \varepsilon = \text{const}$ и $g = 0$, получим выражение

$$\frac{\partial F}{\partial\omega} = -\left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \varepsilon\frac{\partial\mu_\perp}{\partial\omega}\right)F_g - \left(2\frac{k_\varphi^2}{\omega k_0^2} + 2\frac{\mu_{zz}}{\mu}\frac{k_z^2}{\omega k_0^2} + \frac{\mu_{zz}}{\mu^2}\frac{k_z^2}{k_0^2}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right)F_\nu - 2\varepsilon\mu_{zz}\frac{\nu}{\mu}\frac{k_z^2}{k_0^2}\left[\frac{\partial(\nu/\mu)}{\partial\omega} - \frac{\nu}{\mu\omega}\right]. \quad (56)$$

Найдем производные величин $\mu$, $\mu_\perp$ и $\nu/\mu$ по частоте, исходя из (53) и (54):

$$\frac{\partial\mu}{\partial\omega} = 2\omega\frac{\omega_\perp^2 - \omega_H^2}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2} = \frac{2\omega\omega_M\omega_H}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2}, \quad (57)$$

$$\frac{\partial\mu_\perp}{\partial\omega} = 2\omega\omega_M\frac{\omega_H + \omega_M}{(\omega_\perp^2 - \omega^2)^2} = \frac{2\omega\omega_M\omega_\perp^2}{\omega_H(\omega_\perp^2 - \omega^2)^2}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial(\nu/\mu)}{\partial\omega} = \omega_M\frac{\omega_\perp^2 + \omega^2}{(\omega_\perp^2 - \omega^2)^2}. \quad (59)$$

Из формул (57)–(59) видно, что производные величин $\mu$, $\mu_\perp$ и $\nu/\mu$ по частоте *всегда являются положительными числами*.

Прежде чем проводить расчеты, напомним, что недавно в работе [12] исследовались изочастотные поверхности и их сечения (изочастотные зависимости) для электромагнитных волн в неограниченной ферромагнитной среде. В частности, как видно из [12], можно считать, что все изочастотные поверхности этих волн образованы путем вращения соответствующих изочастотных зависимостей[4] вокруг оси $z$ (см. [12, рис. 1 и 2]). Таким образом, не обязательно исследовать характеристики волны (например, ориентации и модули векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$) *в каждой точке* изочастотной поверхности – достаточно рассмотреть эти характеристики *только для точек* изочастотной зависимости, которая является сечением этой поверхности *любой* плоскостью, проходящей через ось $z$. В частности, ниже при проведении расчетов в качестве такой плоскости использована *плоскость xz*. Отметим, что кроме изочастотной зависимости $k_x(k_z)$ в плоскости $xz$ также *лежат* произвольный волно-

[4] Используя терминологию стереометрии, можно сказать, что изочастотная зависимость является *образующей* для соответствующей фигуры вращения – изочастотной поверхности.

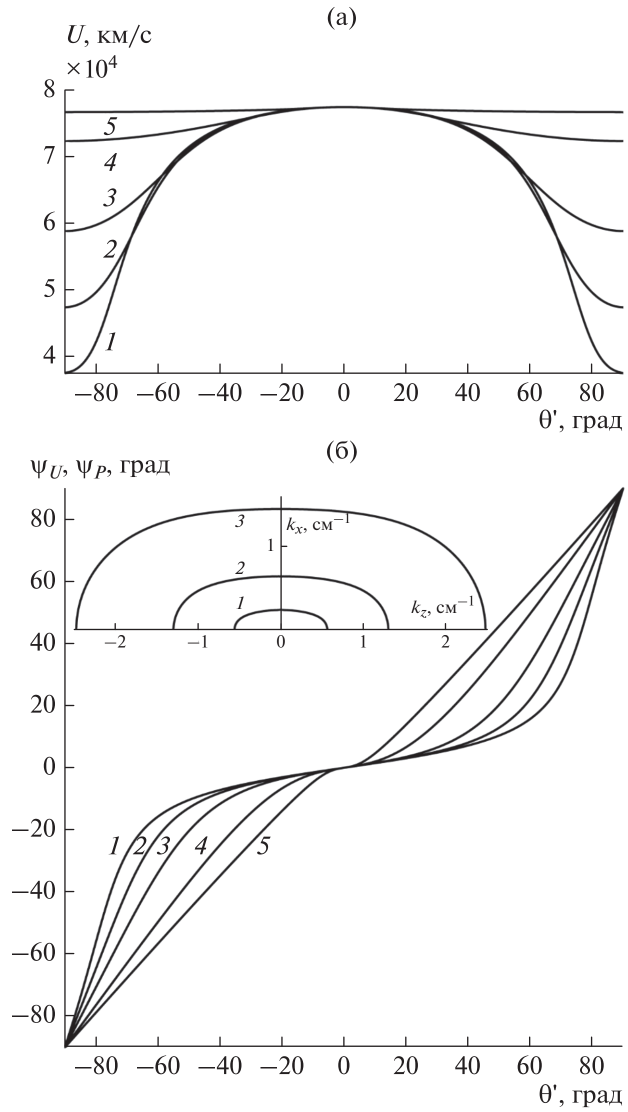



**Рис. 1.** Модуль $U$ вектора групповой скорости (а), а также ориентации $\psi_U$ и $\psi_P$ вектора групповой скорости и вектора Пойнтинга (б) в зависимости от ориентации θ' волнового вектора для нерезонансных волн в неограниченном ферромагнитном пространстве при $f = 0.3$ (*1*), 0.8 (*2*), 1.8 (*3*), 6 (*4*), и 20 ГГц (*5*); на вставке – изочастотные зависимости для $k_x > 0$ при $f = 0.3$ (*1*), 0.8 (*2*), 1.8 (*3*).

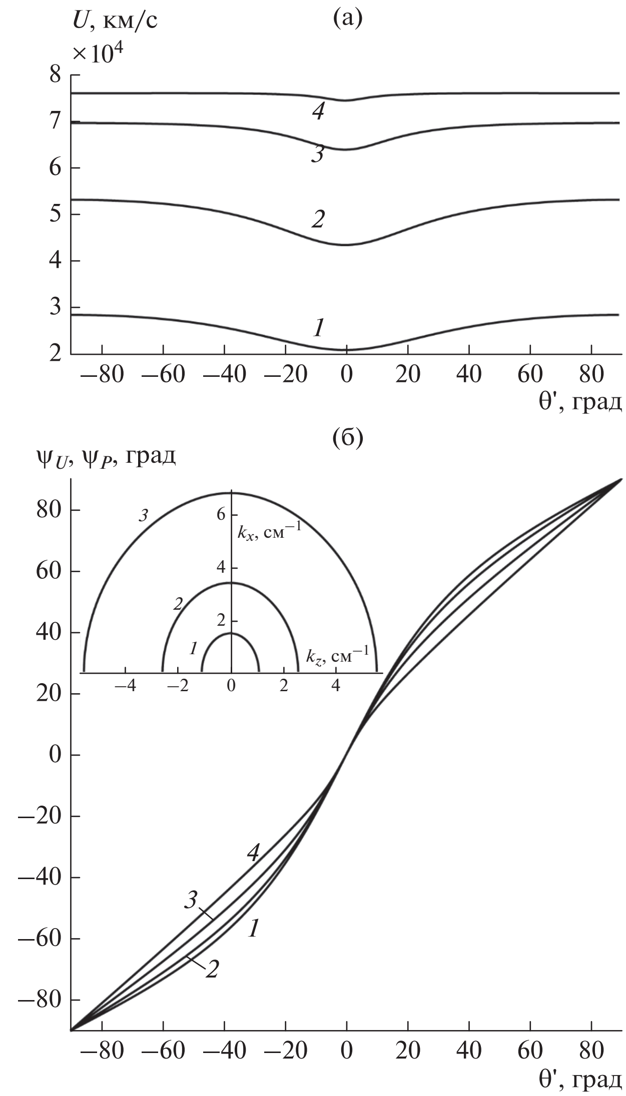



**Рис. 2.** Модуль $U$ вектора групповой скорости (а), а также ориентации $\psi_U$ и $\psi_P$ вектора групповой скорости и вектора Пойнтинга (б) в зависимости от ориентации θ' волнового вектора для пострезонансных волн в неограниченном ферромагнитном пространстве при $f = 6$ (*1*), 7 (*2*), 10 (*3*) и 20 ГГц (*4*); на вставке – изочастотные зависимости для $k_x > 0$ при $f = 6$ (*1*), 7 (*2*), 10 (*3*).

вой вектор $\vec{k}$, направленный в любую точку этой зависимости, вектор групповой скорости $\vec{U}$, исходящий из этой точки, и вектор Пойнтинга $\vec{P}$, параллельный вектору $\vec{U}$ в соответствии с (51). Таким образом, не теряя общности рассуждений, вместо трехмерного анализа можно проводить двумерный анализ характеристик волн в плоскости $xz$, *полагая при этом* $P_y = U_y = 0$.

Отметим, что при расчетах углы, определяющие ориентации векторов $\vec{k}$, $\vec{U}$ и $\vec{P}$, удобнее отсчитывать[5] от оси $x$, а не от оси $z$. Поэтому введем угол θ', определяющий ориентацию вектора $\vec{k}$ относительно оси $x$, причем угол θ' и введенный ранее угол θ будут связаны простым соотношением

$$\theta' = \theta + 90^\circ. \quad (60)$$

[5] Это связано с тем, что в исследуемой среде векторы $\vec{k}$, $\vec{U}$ и $\vec{P}$ не всегда могут быть ориентированы вдоль оси $z$, а вдоль оси $x$ эти векторы могут быть направлены всегда и для всех типов волн (что видно из приведённых далее рисунков).

Теперь, подставляя выражения (57)–(59) в (56), а (56) в (47)–(49), можно найти модуль вектора групповой скорости

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \qquad (61)$$

и угол, определяющий ориентацию вектора $\vec{U}$ относительно оси $x$,

$$\psi_U = \arcsin(U_z/U). \qquad (62)$$

Точно также можно найти модуль вектора Пойнтинга

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \qquad (63)$$

и угол, определяющий ориентацию вектора $\vec{P}$ относительно оси $x$,

$$\psi_P = \arcsin(P_z/P). \qquad (64)$$

Изменение величины $U$ и углов $\psi_U$ и $\psi_P$ в зависимости от ориентации $\theta'$ волнового вектора $\vec{k}$ для нерезонансной, пострезонансной и спиновой волн, распространяющихся в ферромагнитной среде, представлены[6] соответственно на рис. 1–3, а на вставках к рис. 1, 2 и на рис. 4 показаны соответствующие изочастотные зависимости для положительных значений $k_x$. Отсчет углов $\psi_P$, $\psi_U$ и $\theta'$ на рис. 1–4 производился относительно оси $x$ (или $k_x$). При расчетах использованы следующие параметры среды: $H_{c0}$ = 300 Э, $\varepsilon$ = 15 и $4\pi M_{c0}$ = = 1750 Гс (что соответствует железо-иттриевому гранату).

Как видно из рис. 1б, 2б и 3б, углы $\psi_U$ и $\psi_P$ *совпадают для всех типов электромагнитных волн в ферромагнитной среде*.

Отметим, что использование для расчета углов $\psi_U$ и $\psi_P$ формул (62) и (64), содержащим функцию арксинус, обусловлено тем, что при вычислении этих углов по формулам $\psi_U = \mathrm{arctg}(U_z/U_x)$ и $\psi_P = \mathrm{arctg}(P_z/P_x)$ для противоположно направленных векторов будут получены *одинаковые* значения углов (из-за одновременной смены знака обеих проекций у противоположно направленного условного вектора $\vec{R}$), что поясняют построе-

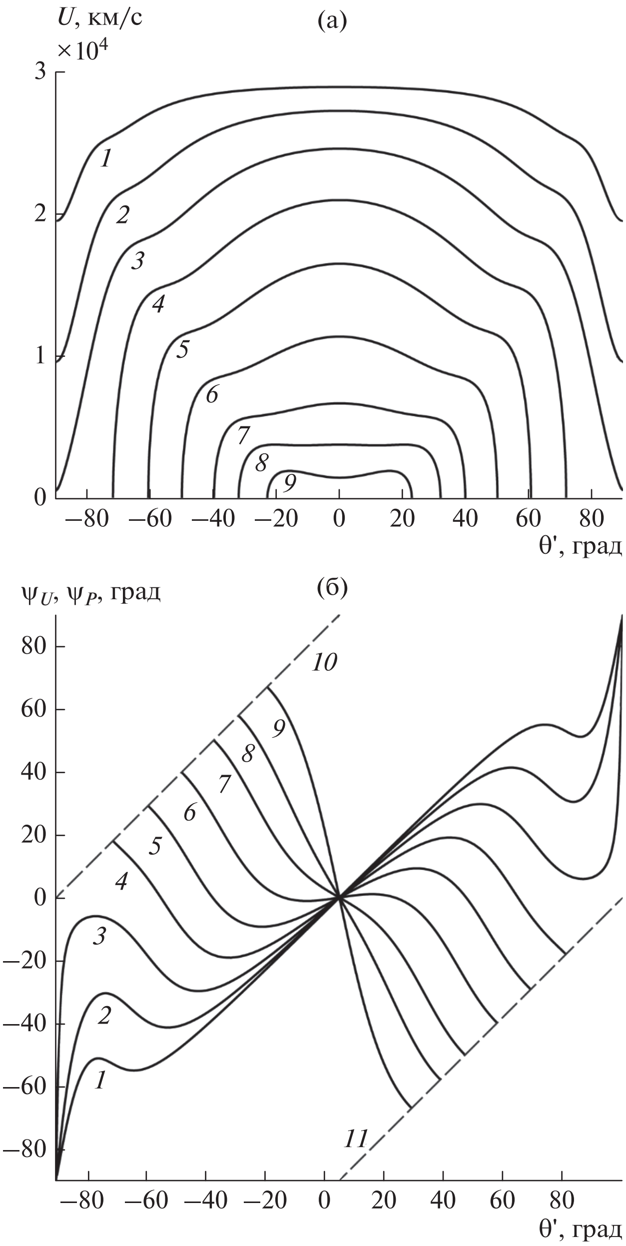



**Рис. 3.** Модуль $U$ вектора групповой скорости (а) и ориентации $\psi_U$ и $\psi_P$ вектора групповой скорости и вектора Пойнтинга (б) в зависимости от ориентации $\theta'$ волнового вектора для спиновых волн при $f$ = 300, 550, 800, 1050, 1300, 1550, 1770, 1915 и 2050 МГц (кривые *1–9* соответственно); значения $\psi_U$ и $\psi_P$, лежащие на прямых *10* и *11*, соответствуют бесконечно большой величине волнового числа $k$ (для тех частот, у которых изочастотные зависимости имеют асимптоты).

[6] Изменение величин $P$ и $w$ в данной работе не представлено, поскольку они зависят от мощности источника возбуждения волн. Казалось бы, можно их нормировать на множитель $E_{z0}^2$, однако такой расчет приведет к некорректному представлению об изменении величин $P$ и $w$ в зависимости от различных параметров. Так, например, зависимости $P(\theta')/E_{z0}^2$ и $w(\theta')/E_{z0}^2$ не имеют смысла при распространении волн вдоль оси $z$, поскольку в этом случае формулы (42)–(44) и (51) нельзя использовать (так как в их знаменателе будет стоять $\sin^2\theta = 0$) и, кроме того, в этом случае $E_{z0} = H_{z0} = 0$ (о чём упоминалось в [9, 12]). Отметим также, что при распространении волн вдоль осей $x$ и $y$ формулы (42)–(44) и (51) также нельзя использовать, поскольку в знаменателе будет стоять $F_g = 0$ (если подставить в формулу (21) $k_z = 0$, а $k_\varphi^2$ положить равным $k_0^2\varepsilon_\perp\mu_{zz}$ в соответствии с [9, (4.52)], то получим $F_g = 0$). Таким образом, исследование изменения величин $P$ и $w$ представляет собой отдельную задачу и выходит за рамки данной работы.

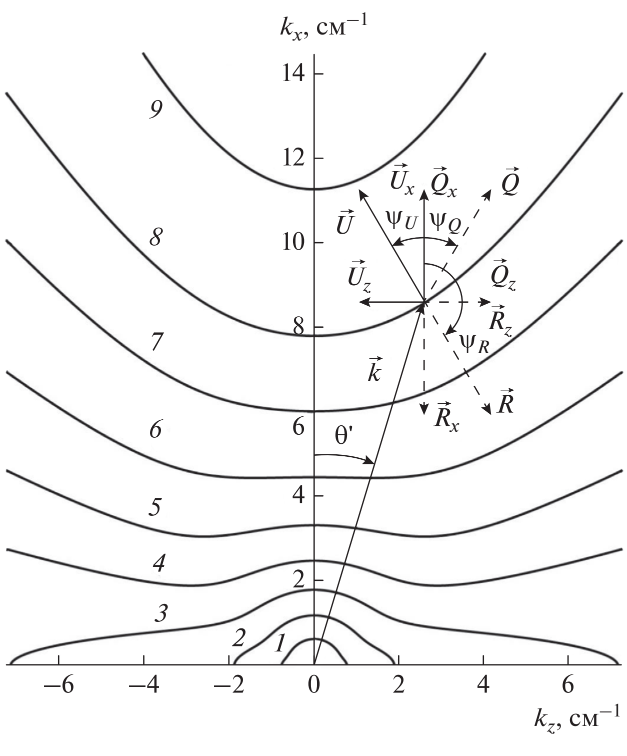



**Рис. 4.** Изочастотные зависимости спиновых волн (для полуплоскости $k_x > 0$) при $f$ = 300, 550, 800, 1050, 1300, 1550, 1770, 1915 и 2050 МГц (кривые *1–9* соответственно); показаны произвольный волновой вектор $\vec{k}$, соответствующий вектор групповой скорости $\vec{U}$, а также условные противоположно направленный вектор $\vec{R}$ и симметричный ему вектор $\vec{Q}$, такие, при которых выполняются соотношения $U = R = Q$, $U_x = Q_x = -R_x$, $U_z = -Q_z = -R_z$; также показаны углы θ', $\psi_U$, $\psi_R$ и $\psi_Q$, определяющие, соответственно, ориентации векторов $\vec{k}$, $\vec{U}$, $\vec{R}$ и $\vec{Q}$.

ния на рис. 4. Более того, поскольку область значений функции арксинус также ограничена интервалом −90...+90°, то и при вычислении углов $\psi_U$ и $\psi_P$ по формулам (62) и (64) для противоположно направленного условного вектора $\vec{R}$ будет получена неверная ориентация ($\psi_Q$ вместо $\psi_R$, так как $Q_z = R_z$ (см. рис. 4)). Поэтому значения углов $\psi_U$ и $\psi_P$, полученные по формулам (62) и (64), дополнительно проверяли на основе сравнения знаков одинаковых проекций векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$ ($U_x$ и $P_x$, а также $U_z$ и $P_z$), и в итоге можно утверждать, что *ориентации $\psi_U$ и $\psi_P$ векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$ для всех типов электромагнитных волн в ферромагнитной среде всегда совпадают*.

Отметим, что *одинаковая* ориентация *векторов* $\vec{U}$ и $\vec{P}$, характерная для всех типов электромагнитных волн в ферромагнитной среде, по-видимому, обусловлена определенными причинно-следственными условиями, накладываемыми на изменение компонент магнитной проницаемости в зависимости от частоты, в частности, положительными значениями производных (57)–(59) (подробнее об этом см. [2, §80 и 84]). В то же время вопрос о взаимной ориентации векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$ в других, более сложных средах, в частности, в средах с потерями, остается пока открытым.

Анализируя зависимости $\psi_U(\theta')$ и $\psi_P(\theta')$ на рис. 1–3, отметим, что углы $\psi_U$ и $\psi_P$ изменяются в диапазоне значений −90...+90° для спиновых волн в интервале частот $\omega < \omega_H$, а также для нерезонансных и пострезонансных волн, т.е. когда изочастотная зависимость волны является замкнутой кривой. Если же изочастотные кривые являются незамкнутыми, что имеет место для спиновой волны при $\omega_H < \omega < \omega_\perp$ (см. рис. 4, кривые *4–9*), то распространение волн характеризуется наличием углов отсечки волнового вектора $\theta'_{k1}$ и $\theta'_{k2}$, определяемых в [12, выражения (17)], а также наличием углов отсечки $\psi_{U1}$, $\psi_{U2}$ и $\psi_{P1}$, $\psi_{P2}$ у векторов $\vec{U}$ и $\vec{P}$, причем зависимости $\psi_{U1}(\theta'_{k1})$, $\psi_{P1}(\theta'_{k1})$ и $\psi_{U2}(\theta'_{k2})$, $\psi_{P2}(\theta'_{k2})$ описывают, соответственно, прямые *10* и *11* на рис. 4.

Характеризуя зависимости $U(\theta')$ на рис. 1–3, отметим, что интервалы углов θ', где величина $U$ практически постоянна, соответствуют участкам изочастотных зависимостей, которые достаточно хорошо аппроксимирует окружность, при этом неважно, где будет находиться центр этой окружности (ср., например, рис. 3а и 4, кривые *8*).

Следует отметить, что полученные выше выражения для вектора Пойнтинга, вектора групповой скорости и компонент электромагнитного поля, наряду с дисперсионным уравнением для электромагнитных волн в бигиротропной среде [9, 12] открывают хорошие перспективы для дальнейшего исследования поляризации этих волн, влияния диссипации на их характеристики и т.п., что позволит получить более точное представление о волновых процессах, происходящих в реальных анизотропных средах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе системы уравнений Максвелла описано распространение электромагнитных волн с произвольно ориентированным волновым вектором в бигиротропной среде, характеризующейся эрмитовыми тензорами диэлектрической и магнитной проницаемостей второго ранга. Получены аналитические формулы для всех компонент электромагнитного поля, вектора Пойнтинга $\vec{P}$ и вектора групповой скорости $\vec{U}$ исследуемых волн.

Найдено, что соответствующие компоненты векторов $\vec{P}$ и $\vec{U}$ – $P_x$, $P_y$, $P_z$ и $U_x$, $U_y$, $U_z$ – пропорциональны друг другу, причем отношение этих компонент представляет собой объемную плотность энергии электромагнитной волны $w$. Рассчитаны модуль и ориентация вектора $\vec{U}$, а также ориентация вектора $\vec{P}$ в зависимости от ориентации волнового вектора $\vec{k}$ для нерезонансных, пострезонансных и спиновых волн, распространяющихся в неограниченной ферромагнитной среде (частном случае бигиротропной среды). Найдено, что векторы $\vec{P}$ и $\vec{U}$ всегда ориентированы одинаково для всех перечисленных типов волн. Обнаружено, что участкам изочастотных зависимостей волн, которые по форме близки к окружности, соответствуют практически постоянные значения величины $U$.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания (тема № 0030-2019-0014).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1979.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. *Вугальтер Г.А.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 8. С. 92.
4. *Локк Э.Г., Герус С.В., Анненков А.Ю.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2020. Т. 84. № 5. С. 731.
5. *Давидович М.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 22. С. 53.
6. *Давидович М.В.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 5. С. 40.
7. *Давидович М.В.* // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 6. С. 623.
8. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.*, Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994.
10. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 9. С. 1101.
11. *Зубков В.И., Щеглов В.И.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 10. С. 1186.
12. *Локк Э.Г.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 3. С. 259.
13. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.
14. *Локк Э.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 8. С. 1080.
15. *Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993.
16. *Локк Э.Г.* // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 4. С. 397.
17. *П.А.М. Дирак.* Воспоминания о необычной эпохе. М.: Наука, 1990.
18. *Де Бройль Л.* Революция в физике. М.: Атомиздат, 1965.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 673–681

ЭЛЕКТРОНИКА СВЧ

УДК 621.385.69.077:621.385.19

# ОБ ОСОБЕННОСТИ СВОЙСТВ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА ОРОТРОНА С ДВУХРЯДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2021 г. Е. А. Мясин[a, *], А. Н. Соловьев[a]

[a]Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

*E-mail: eam168@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 31.10.2019 г.
После доработки 13.07.2020 г.
Принята к публикации 10.02.2021 г.

Исследованы электродинамические характеристики (ЭДХ) открытых резонаторов (ОР), образованных многофокусным сферическим и плоским зеркалами с использованием на плоских зеркалах периодических структур: однорядной – “четвертьволновой гребенки”, у которой высота ламели $h_s = \lambda/4$, или двухрядной (ДРПС) “полуволновой” при $h_s = \lambda/2$ и “промежуточной” при $\lambda/4 < h_s < \lambda/2$ ($\lambda$ – длина волны) – и проведено сравнение этих ЭДХ. Показано, что в ОР с “промежуточной” ДРПС имеет место неизвестная ранее особенность распределения высокочастотного поля основного типа колебания по оси симметрии ОР. Использование в оротроне ОР с “промежуточной” ДРПС при $h_s/\lambda < 0.3...0.32$ обеспечивает возможность увеличения эффективности электронно-волнового взаимодействия и, как следствие, увеличение КПД и генерируемой мощности. Приведены результаты эксперимента и расчета, подтверждающего это.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070093

## ВВЕДЕНИЕ

Для продвижения оротрона с двухрядной периодической структурой (ДРПС) в субтерагерцовый диапазон приходится увеличивать длину электронно-волнового взаимодействия, что влечет за собой поиск конструкций открытых резонаторов, способных обеспечить необходимое распределение высокочастотного (ВЧ) поля основного типа колебаний в ОР. Исследование ВЧ-полей в одном из вариантов такого резонатора [1] приведено в данной работе.

## 1. КОНСТРУКЦИЯ ОРОТРОНА С ДВУХРЯДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ И УВЕЛИЧЕННОЙ ДЛИНОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

Схема конструкции оротрона с фокусирующим многофокусным сферическим зеркалом *1* (число фокусов $N_ф = 5$) представлена на рис. 1. Зеркало выполнено в виде пересекающихся сферических поверхностей с одинаковым радиусом $R_0$. Расстояние между осями симметрии этих поверхностей выбрано так, чтобы обеспечивать вдоль движения электронного потока гауссово распределение ВЧ-поля в начале области взаимодействия, затем сформировать распределение ВЧ-поля, близкое к однородному распределению, и вновь – гауссово распределение ВЧ-поля в конце области взаимодействия. В конструкцию ОР входят также электронная пушка *2*, коллектор *3*, электронный поток *4* толщиной $h$, плоское зеркало *5*, на котором расположена ДРПС с периодом $l$, щелью $d$ между выступами и с расстоянием между рядами $2H$ для пролета электронов. ДРПС занимает всю поверхность плоского зеркала. Расстояние между зеркалами $H_{ОР}$, фокусирующее магнитное поле $B_z$ направлено вдоль оси $z$.

Сначала была выбрана длина волны $\lambda = 1$ мм. Радиус сферы фокусирующего зеркала $R_0 = 65$ мм. Высота открытого резонатора $H_{ОР} = 5\lambda/2 = 2.5$ мм. Использовали многофокусное фокусирующее зеркало, в котором при проведении расчетов число фокусов $N_ф$ изменялось от 5 до 11 таким образом, что расстояние между крайними фокусами $L_c$ оставалось неизменным и составляло величину 20 мм. Вместе с изменением числа фокусов $N_ф$ изменялось и расстояние между фокусами $L_ф$ в соответствии с выражением

$$L_ф = L_c/(N_ф - 1).$$

Период ДРПС $l = 0.18$ мм, длина зазора $d = 0.08$ мм. При использовании “полуволновой” ДРПС высота вдоль оси $z$ ламелей $h_z = 0.5$ мм. Для “промежуточной гребенки” высота ламелей $h_z = 2b_1 + 2H =$

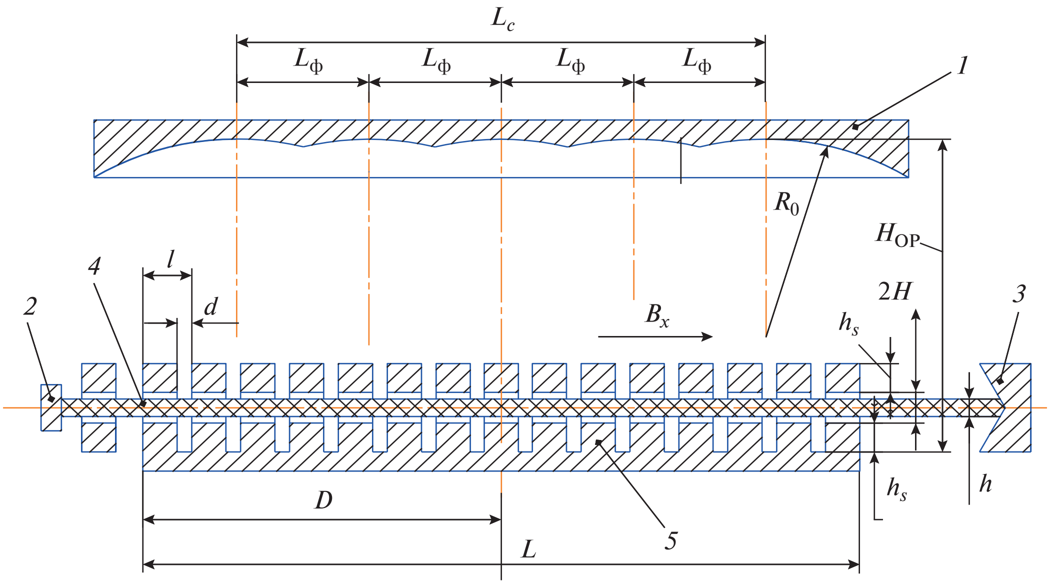



**Рис. 1.** Схема конструкции оротрона с фокусирующим многофокусным зеркалом: *1* – пятифокусное сферическое фокусирующее зеркало ОР с числом фокусов $N_ф = 5$, *2* – электронная пушка, *3* – коллектор, *4* – электронный поток, толщиной $h$, *5* – плоское зеркало, на котором расположена ДПРС с периодом $l$, щелью $d$ между выступами, и с расстоянием между рядами $2H$ для пролета электронов.

$= 2 \times 0.148 + 0.1 = 0.396$ мм, где $b_1$ – высота каждого ряда, $2H$ – высота пролетного канала. В этих структурах для прохождения ленточного электронного пучка в центре ламелей прорезан пролетный канал высотой $2H = 0.1$ мм и шириной $2C = 4r_к$. При использовании "четвертьволновой гребенки" высота ламели 0.25 мм и ленточный электронный пучок проходит над ламелями, почти касаясь их гребней. Как показывает расчет, поперечный размер (радиус) каустики на плоском зеркале $r_к = 1.995$ мм (при $H_{ОР} = 2.5$ мм для длины волны $\lambda = 1$ мм).

## 2. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА С "ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ГРЕБЕНКОЙ" И ФОКУСИРУЮЩИМ МНОГОФОКУСНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ЗАРКАЛОМ, У КОТОРОГО РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ КРАЙНИМИ ФОКУСАМИ $10r_к$

Расчеты ЭДХ ОР проводились для основных мод $TEM_{00q}$ ($q$ – число полуволн, укладывающихся между зеркалами резонатора) на длине волны примерно $\lambda = 1$ мм с использованием программного комплекса CST Microwave Studio [2], который предназначен для моделирования электромагнитных полей в сложных СВЧ-устройствах.

Для открытого резонатора, образованного многофокусным фокусирующим зеркалом и плоским с "промежуточной гребенкой", рассчитаны зависимости электродинамических характеристик (ЭДХ): резонансных частот – $f_0$, добротностей колебаний – $Q_0$, нормы колебаний $N_r$, относительной мощности потерь $P_п/W = 2\pi f_0/Q_0$. Сначала были проведены расчеты зависимости ЭДХ ОР от числа фокусов $N_ф$ [3]. Результаты расчетов ЭДХ здесь не приводятся, так как были сделаны для ОР с "полуволновой", "промежуточной" и "четвертьволновой гребенкой" на плоском зеркале, как в работе [4]. Кроме того, на печать выводились анимационные картины и распределения ВЧ-поля по координатам $X$, $Y$, $Z$. Как следует из расчетов, при использовании "промежуточной гребенки" в ОР собственная добротность его примерно в 1.4 раза больше, а относительная мощность потерь в 1.45 раза меньше, чем при использовании в ОР "полуволновой гребенки". При сопоставлении ЭДХ ОР с "четвертьволновой гребенкой" и ЭДХ ОР с "промежуточной гребенкой" собственная добротность последнего оказалась примерно в 2.4 раза больше, а относительная мощность потерь в 2.4 раза меньше. В этой связи были проведены расчеты зависимости ЭДХ для ОР с $N_ф$, = 11 от величины гребня периодической структуры от $h_z = 0.25$ мм, что соответствует "четвертьволновой гребенке", до 0.5 мм, что соответствует "полуволновой гребенке". Сначала были проведены расчеты ЭДХ для $h_z = 0.25$ мм и 0.396 мм, а затем для $h_z$ от 0.4 до 0.5 мм с шагом 0.02 мм вблизи $\lambda = 1$ мм. Оптимальные значения ЭДХ ОР зафиксированы для высоты выступа $h_z = 0.396$ мм при $\lambda \approx 1.0138$ мм

($f$ = 295.905 ГГц), т.е. для “промежуточной гребенки”.

Так как для этой высоты выступа ($h_z$ = 0.396 мм) добротность ОР была максимальна при $H_{\text{OP}}$ = 2.5 мм, были рассмотрены ЭДХ “промежуточной гребенки” с этим $h_z$ в зависимости от высоты резонатора $H_{\text{OP}}$. Были проведены расчеты ЭДХ для разных высот ОР, от 2.5 до 4 мм с шагом 0.2 мм для ОР с 11-фокусным фокусирующим зеркалом. Расчет ЭДХ проводился, так же как и в предыдущих случаях, для каждой высоты. На печать выводились анимационные картины и распределения ВЧ-поля по трем координатам: продольной, вдоль пространства взаимодействия оротрона, – $Z$, поперек нее – $X$ и вдоль оси симметрии ОР – $Y$. Здесь будут приведены только самые информативные примеры анимационных картин и изменения распределения ВЧ-поля по оси симметрии ОР – $Y$, которые представляют наибольший интерес. Следует обратить внимание на распределение яркости по высоте анимационных изображений ВЧ-поля и вид распределений ВЧ-поля по оси $Y$. На рис. 2а–2в представлены анимационные картины по трем координатам для $H_{\text{OP}} = 5\lambda/2$ = 2.5 мм, что соответствует расчетной частоте $f_0$ = 295.897 ГГц и длине волны $\lambda \approx$ 1.0138 мм, и так как $h_z$ = 0.396 мм, то $h_z/\lambda$ = 0.39.

На рис. 2г представлено распределение ВЧ-поля по координате $Y$. Такого же типа распределения ВЧ-поля по координате $Y$ сохраняются вплоть до высоты ОР 3 мм. При $H_{\text{OP}}$ = 3мм, $f_0$ = = 243.783 ГГц, $\lambda \approx$ 1.2306 мм, $h_z$ = 0.396 мм, $h_z/\lambda$ = = 0.32179, и анимационная картина ВЧ-поля $E_{005}$ по координате $Y$ принимает вид, представленный на рис. 3а.

Как видно на анимационной картине ВЧ-поля по оси $Y$, максимум яркости возник в пределах пролетного канала, хотя на распределении ВЧ-поля по этой координате (см. рис. 3б) этот максимум не ярко выражен.

При $H_{\text{OP}}$ = 3.2 мм, $f_0$ = 228.212 ГГц, $\lambda \approx$ 1.31456 мм; $h_z$ = 0.396 мм, $h_z/\lambda$ = 0.30124 анимационная картина и распределение ВЧ-поля $E_{005}$ по координате $Y$ принимают вид, представленный на рис. 4а и 4б соответственно.

Распределение ВЧ-поля $E_{005}$ по координате $Y$ (см. рис. 4б) имеет вид распределения ВЧ-поля для “четвертьволновой гребенки” [4].

Этот вид распределения ВЧ-поля будет сохраняться и до высоты 4 мм включительно, когда для ВЧ-поля $E_{005}$ длина волны $\lambda$ = 1.6 мм и $h_z/\lambda$ = = 0.396/1.6 = 0.2475.

Таким образом, впервые установлено, что в распределении ВЧ-поля по оси симметрии ОР (по координате $Y$) “промежуточная” ДРПС “может вести себя” как полуволновая ДРПС с $h_z = \lambda/2$ или как “четвертьволновая гребенка” с $h_z = \lambda/4$, т.е. в последнем случае имеет место $\lambda/4$-резонанс. Использование этого свойства ДРПС в оротроне обеспечивает дополнительное увеличение эффективности электронно-волнового взаимодействия и, как следствие, должно приводить к увеличению КПД и выходной мощности. Происходит это, когда $h_z/\lambda$ становится меньше 0.3...0.32.

## 3. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ ОРОТРОНА КОРОТКОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА С “ПРОМЕЖУТОЧНОЙ” ДРПС

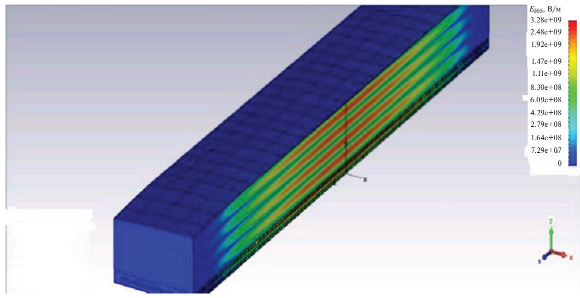
Проведем оценку возможности реализации параметров ДРПС, необходимых для использования этого ее свойства в нашем экспериментальном макете оротрона коротковолновой части миллиметрового диапазона, а именно в диапазоне 1.9...1 мм, для увеличения КПД и мощности генерации.

Исходя из соотношения $h_z/\lambda$ < 0.3...0.32, оценим высоту выступа $h_z$ для длин волн в диапазоне $\lambda$ = 1.5...1 мм. Тогда для $\lambda$ = 1.5 мм (200 ГГц) получим $h_z$ = 0.32 × 1.5 = 0.48 мм, т.е. при высоте пролетного канала 0.1 мм и одинаковой высоте рядов ДРПС высота каждого ряда $b_1 = b_2$ = 0.19 мм. Однако для оптимизации напряженности электрического ВЧ-поля в пролетном канале (для выбранной длины волны) высоты рядов ДРПС могут быть разными. В данном случае, например, $b_1$ = 0.25 мм, а $b_2$ = 0.13 мм.

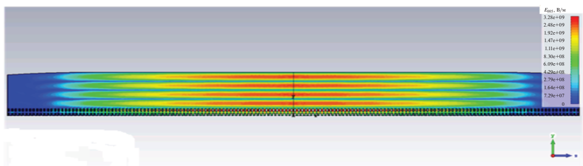
Следует отметить, что высота второго ряда в используемой конструкции ДРПС, не имеющего контакта с поверхностью плоского зеркала, как показал эксперимент, не может быть меньше чем 0.12 мм, если рабочий ток превышает 150 мА.

Теперь оценим высоту выступа $h_z$ для длины волны $\lambda$ = 1.0 мм (300 ГГц) получим $h_z$ = 0.32 × 1.0 = = 0.32 мм, т.е. при высоте пролетного канала 0.1 мм и одинаковой высоте рядов ДРПС высота каждого ряда $b_1 = b_2$ = 0. 11 мм. При этом максимум ВЧ-поля находится на высоте 0.25 мм, т.е. на высоте, при которой находится второй ряд ДРПС. При этом напряженность ВЧ-поля вблизи нижнего ряда, расположенного на плоском зеркале, оказывается существенно меньше, чем вблизи второго ряда. Для того чтобы вблизи второго ряда в пролетном канале напряженность ВЧ-поля была максимальной, необходимо, чтобы высота второго ряда была 0.07 мм. Тогда при высоте пролетного канала 0.1мм высота первого ряда будет 0.15 мм. Таким образом, в этом случае нельзя реализовать оптимальную амплитуду ВЧ-поля в пролетном канале за счет изменения высоты рядов, как в предыдущем случае. Ситуацию можно было бы улучшить за счет уменьшения высоты пролетного канала, уменьшив ее, например, до 0.07 мм. Но,

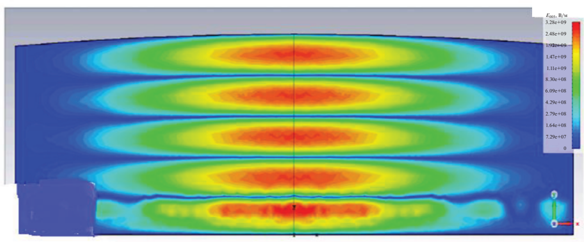
(а)



(б)



(в)



(г)

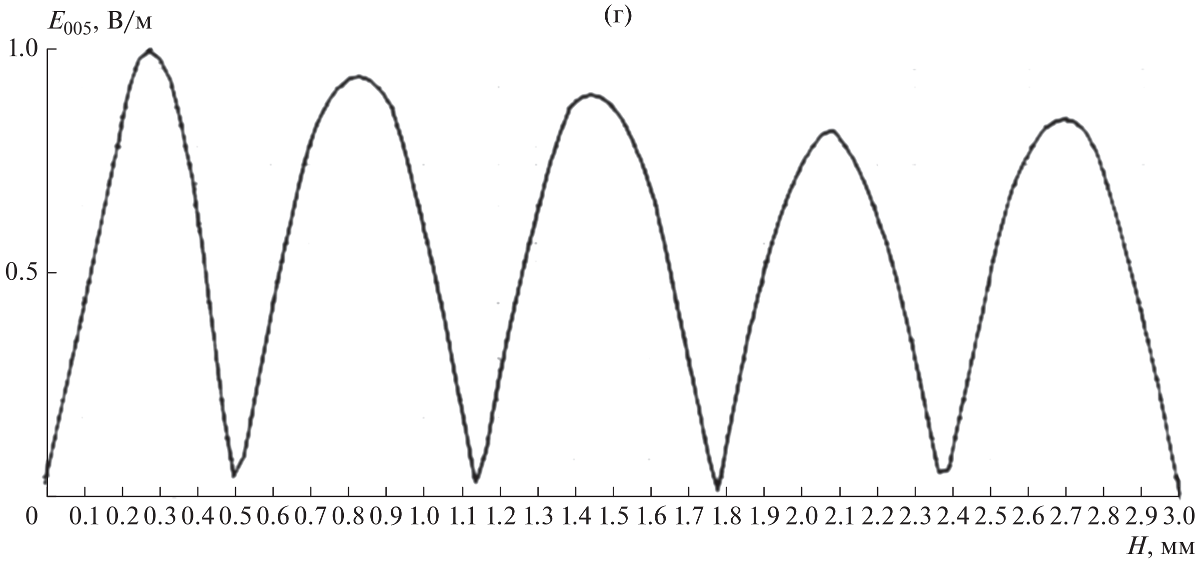



**Рис. 2.** Анимационные картины ВЧ-поля $E_{005}$ по координатам $Z$ (а), $X$ (б), $Y$ (в) и распределение ВЧ-поля по $Y$ при $X = 0$, $Z = 0$ (г).

во-первых, в нашем оротроне это по техническим причинам невозможно, а во-вторых, все равно высота второго ряда $b_2 = 0.11$мм < 0.12 мм. Поэтому необходимо использовать новую конструкцию ДРПС, в которой это ограничение будет снято.

Как следует из расчетов, это замечательное свойство “промежуточной” ДРПС проявляется у нее на длинах волн существенно длиннее оптимальной, чем если бы эта ДРПС использовалась как “полуволновая” ($\lambda = b_0/2$), и, наоборот, суще-

(а)

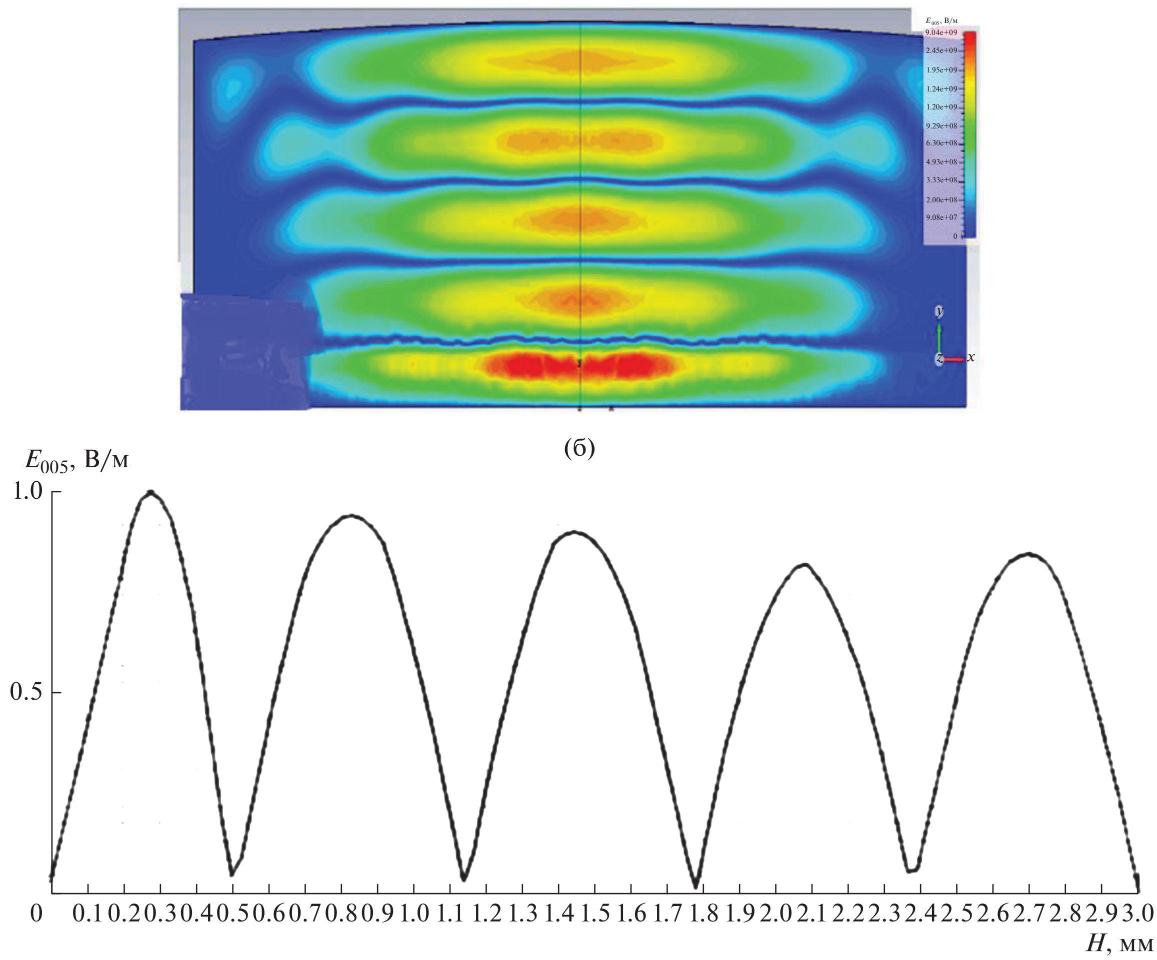



**Рис. 3.** Анимационная картина ВЧ-поля $E_{005}$ по координате $Y$ (а) и распределение ВЧ-поля по $Y$ при $X = 0$, $Z = 0$ (б).

ственно короче, чем если бы эта ДРПС использовалась как “четвертьволновая гребенка” ($\lambda = b_0/4$). И в связи с тем, что максимум распределения ВЧ-поля в “полуволновой” ДРПС для длины волны $\lambda$ = 1.0 мм располагается на оси пролетного канала, в “промежуточной” ДРПС он располагается существенно выше оси пролетного канала.

Таким образом, в настоящее время для иллюстрации этого свойства открытого резонатора с “промежуточной” ДРПС в оротроне следует выбрать первый из рассмотренных вариантов возможной технической реализации такого прибора.

## 4. КОНСТРУКЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МАКЕТА ОРОТРОНА

На основе результата проведенного анализа, была разработана и создана конструкция оротрона с “промежуточной” ДРПС, имеющей соотношение высоты рядов $b_1$ = 0.25 мм, а $b_2$ = 0.13 мм, и проведены эксперименты по исследованию работы такого оротрона [5]. В ОР использовалось семифокусное сфероцилиндрическое зеркало с радиусом кривизны 32 мм цилиндра и сферы, при длине $L_ц$ = 4 мм каждого из семи цилиндров с образующей, перпендикулярной электронному потоку, и общей длиной 34.2 мм. Расстояние между “фокусами” соседних цилиндров составляло $l_ц$ = 3.2 мм. Цилиндрические участки фокусирующего зеркала позволяли при ширине катода 5 мм, обеспечивающего создание плоского электронного потока, создать практически по всей его ширине плоское распределение ВЧ-поля для основного типа колебания ОР вместо гауссова распределения при использовании простого сфероцилиндрического зеркала с образующей цилиндра вдоль пространства взаимодействия. Это обеспечило возможность эффективного электронно-волнового взаимодействия по всей его ширине. Так как неоднородность ВЧ-поля по высоте пролетного канала $H$ = 0.1 мм при периоде ДРПС$l$ = 0.29 мм определяет отношение $l/H \approx 3$, то ее также можно

(а)

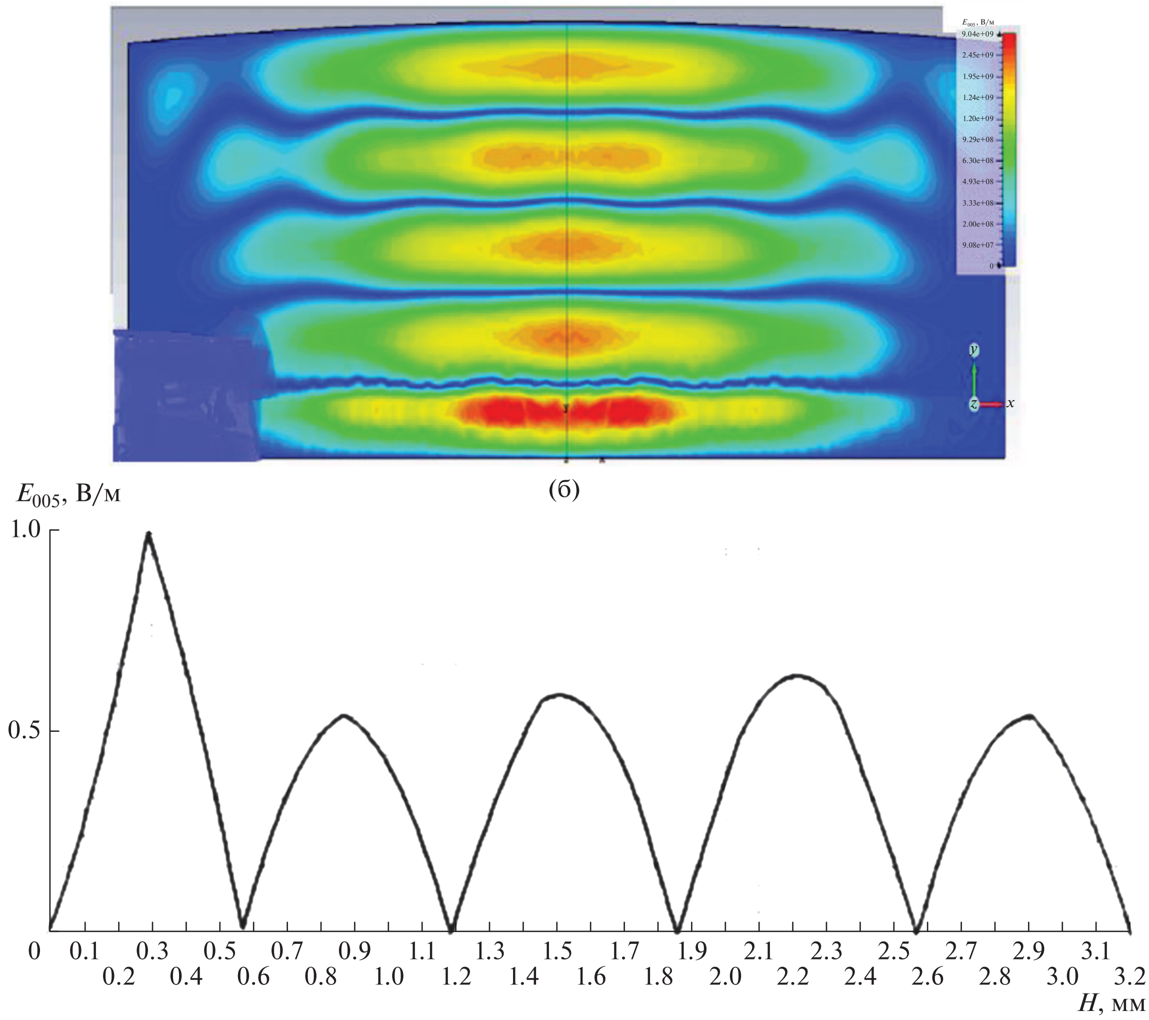



**Рис. 4.** Анимационная картина ВЧ-поля $E_{005}$ по координате $Y$ (а) и распределение ВЧ-поля по $Y$ при $X = 0$, $Z = 0$ (б).

не учитывать [6], т.е. эффективно работает весь плоский электронный поток. При этом длина плоского зеркала со структурой должна обеспечивать отсутствие дифракционных потерь. Как показано в работе [7], минимальный размер круглых сферических зеркал определяется условием:

$$\lg \Delta g = -0.87(a/r_{\text{к}})^2 < -1\times 10^{-2},$$

где $a$ – радиус круглого зеркала, $\Delta g$ – относительные дифракционные потери волны при одном отражении от зеркала.

Поэтому длина плоского зеркала $L_{\text{з.пл}} = 3.2 \times 6 + 4r_{\text{к}} = 19.2 + 4 \times 2.68 = 29.92$ мм, а длина взаимодействия $L = 3.2 \times 6 + 3r_{\text{к}} = 19.2 + 3 \times 2.68 = 27.24$ мм; $L^2 = 7.52$ см$^2$. Так как радиус каустики на фокусирующем зеркале определяется по формуле $r_{\text{к}} = \{(\lambda/\pi)[(R^2H)/(R - H)]^{0.5}\}^{0.5} = 3.11$ мм, то длина фокусирующего зеркала, достаточная для отсутствия дифракционных потерь, будет $19.2 + 4 \times 3.11 = 31.645$ мм. Результаты экспериментального исследования приведены на рис. 5.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 5 представлены две зависимости выходной мощности оротрона от частоты генерации для двух значений величины связи с нагрузкой $D$ 3 мм и 2.5 мм. Они определяют расстояние отверстия вывода энергии в плоском зеркале ОР во внешний волноводный тракт от максимума ВЧ-поля в последнем (от катодного края зеркала) “сфероцилиндре” фокусирующего семифокусного сфероцилиндрического зеркала. Чем это расстояние больше, тем связь с нагрузкой меньше, и если оно меньше, то связь с нагрузкой больше.

Как видно на рис. 5, ВЧ-мощность, генерируемая прибором, резко нарастает с уменьшением частоты. Как показал проведенный выше анализ

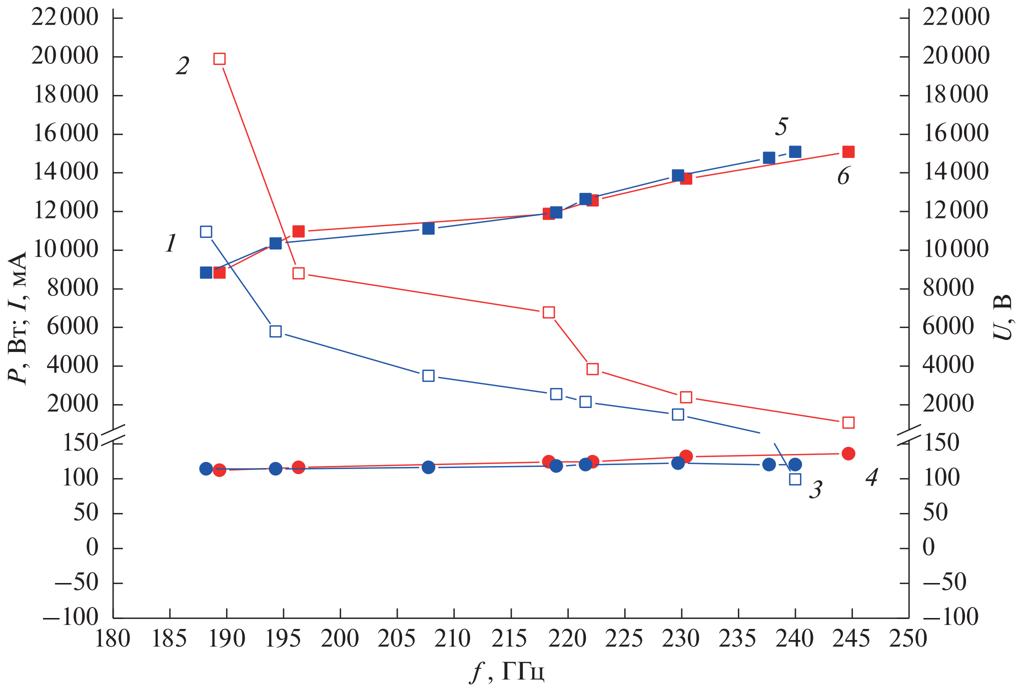



**Рис. 5.** Зависимость выходной мощности $P_1$ (*1*), $P_2$ (*2*), тока пучка $I_1$ (*3*), $I_2$ (*4*), напряжения $U_1$ (*5*), $U_2$ (*6*) от частоты при разной величине связи ОР ($D_1$, $D_2$) с нагрузкой в оротроне с семифокусным сфероцилиндрическим фокусирующим зеркалом ОР: $D_1 = 3$ мм, $D_2 = 2.5$ мм.

ЭДХ ОР, причиной такой зависимости может являться неизвестное ранее свойство ДРПС изменять характер распределения ВЧ-поля вдоль оси ОР. Тот факт, что резонансное увеличение ВЧ-мощности на частоте ≈190 ГГц связано именно с неизвестным ранее свойством ДРПС, был подтвержден в работе [5] также расчетом КПД оротрона с этим семифокусным зеркалом по "Программе расчета" [8]. В расчете было показано, что при нагруженной добротности $Q = 2000$, рабочем токе 100 мА и напряжении 9 кВ, на длине волны 1.58 мм может быть получен эффективный режим генерации с выходной мощностью до 20 Вт и КПД в нагрузке до 2.2%.

Следует отметить, что для получения эффективных режимов работы оротрона с использованием этого свойства "промежуточной" ДРПС необходимо выполнить целый ряд условий при разработке конструкции прибора. О некоторых из них было сказано раньше. Так, необходимость оптимизации связи ОР с нагрузкой иллюстрирует рис. 5, а возможность использовать всю ширину электронного потока позволяет конструкция фокусирующего зеркала ОР. Однако чтобы реализовать эффективный режим работы оротрона, нужно, прежде всего, оценить параметры прибора, при которых возможно его самовозбуждение, т.е. пусковой ток генерации, который должен быть не менее чем в два раза меньше рабочего тока этого режима. Так как рассматриваемый режим работы аналогичен режиму работы оротрона с "четвертьволновой гребенкой", то рассмотрение следует провести так, как это сделано в работе [9]. Этот вопрос рассмотрен подробно в Приложении. В результате найдено расчетное значение пускового тока генерации в приборе, которое составило 40.4 мА, что практически совпадает с измеренным в эксперименте значением в 40 мА.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представлены результаты исследования электродинамических характеристик открытых резонаторов (ОР), образованных многофокусным (от пяти до одиннадцати фокусов) сферическим и плоским зеркалами с тремя типами периодических структур на плоском зеркале. На основе сравнения ЭДХ периодических структур для ламелей разных высот $h_z$ (от $\lambda/4 \le h_z \le \lambda/2$) выбрана высота, оптимальная для "промежуточной" двухрядной структуры $h_z = 0.396$ мм. Для выбранной высоты $\lambda/4 < h_z < \lambda/2$ для ОР с 11-фокусным сферическим зеркалом и переменной высотой ОР ($H_{\text{ОР}}$) от 2.5 до 4 мм при неизменном количестве полуволн (равным пяти), т.е. увеличением длины волны, исследованы распределения ВЧ-поля по трем координатам. В результате анализа *впервые установлено*, что в распределении ВЧ-поля по оси симметрии ОР (по координате *Y*) "промежуточная" ДРПС "может вести себя" как полуволновая ДРПС с $h_z = \lambda/2$ или как "четвертьволновая гребенка" с $h_z = \lambda/4$, т.е. в последнем случае имеет место $\lambda/4$-резонанс. Использование этого свойства ОР с ДРПС в оротроне при $h_z/\lambda < 0.3...0.32$ обеспечивает увеличение эффективности электронно-волнового взаимодействия и, как следствие, должно приводить к увеличению КПД и выходной мощности. Проведена оценка возможности создания оротрона с использованием ОР с "промежуточной" ДРПС в коротковолновой части миллиметрового диапазона. На основе результатов этого анализа разработана конструкция оротрона диапазона 1.3...1.6 мм и создан прибор с фокусирующим семифокусным сфероцилиндрическим зеркалом и "промежуточной" ДРПС на плоском зеркале. Проведено его экспериментальное исследование, в котором зафиксирована генерация на частоте ≈190 ГГц в 20 Вт при напряжении 9 кВ и токе 100 мА с КПД в нагрузке ≈2.2%. Численное моделирование этого режима по Программе расчета [8] подтвердило возможность его реализации при нагруженной добротности $Q_{ОР} = 2000$. Был также проведен расчет пускового тока генерации для этого режима, в результате которого расчетное значение пускового тока практически совпало с измеренным в эксперименте.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

В работе [9] получены две формулы для пускового тока с малым и большим пространственным зарядом. Поэтому прежде всего нужно определить, к какому из них следует отнести рассматриваемый режим. Для этого необходимо вычислить [9] параметр $\varphi_p = h_pL$, где $L$ – длина взаимодействия, $h_p = \omega_p/V_e$, $\omega_p$ – плазменная частота, $V_e$ – скорость электронов потока. Если $\varphi_p \ll 1$, то пространственным зарядом можно пренебречь и использовать для пускового тока формулу (50) из работы [9] для малого пространственного заряда, а если $\varphi_p \gg 1$, то следует использовать формулу (51) из той же работы [9]. Таким образом, для того чтобы сделать выбор между этими двумя формулами, необходимо вычислить $\varphi_p$. Следуя и во всех дальнейших расчетах работе [9], получаем выражение для вычисления $\varphi_p$ для малого пространственного заряда, используя [9, формула (49)]

$$\varphi_p = (2\pi\Gamma\pi^2/8\psi Q)^{0.5}, \qquad (П.1)$$

а также [9, формула (50)]. В (П.1) $\Gamma$ – коэффициент уменьшения плазменной частоты, $Q$ – нагруженная добротность ОР, $\psi = W_1/W$ – коэффициент использования электрического поля в ОР ($W_1$ – энергия первой пространственной гармоники в объеме плоского электронного потока, а $W$ – энергия ВЧ-поля, запасенная в ОР) [9, формула (43)]:

$$\psi = W_1/W = \theta B^2 S_0 L/8\pi W, \qquad (П.2)$$

$\theta$ – коэффициент использования электронного потока, в данном случае равный 1, так как неоднородность ВЧ-поля по ширине и толщине электронного потока можно не учитывать.

Для нашего прибора толщина плоского электронного потока $2H = 0.1$ мм при периоде ДРПС $l = 0.29$ мм определяет отношение $l/2H \approx 3$, и так как в соответствии с [9, формула (32)]

$$B = [1 + \exp(-2H\pi/l)]A_1/2, \qquad (П.3)$$

то

$$B = [1 + \exp(-2.093)]A_1/2 \approx \approx (1.123/2)A_1 = 0.5615A_1,$$

поэтому

$$B^2 = \{[1 + \exp(-2H\pi/1)]A_1/2\}^2 \approx \approx 0.31528(A_1)^2. \qquad (П.4)$$

Подставляя значения $S_0 = 0.01 \times 0.5$ см$^2$ и $L = L_{7ц} + 3r_к = 3.2 \times 6 + 3 \times 2.68 = 27.24$ мм $= 2.7245$ см в формулу (П.2) для $\psi$ имеем

$$\psi \approx 0.171\times10^{-3}/W. \qquad (П.5)$$

Следует обратить внимание на то, что для определения длины взаимодействия $L$ к $L_{7ц}$ добавляется не $4r_к$, а $3r_к$, т.е. не по $2r_к$ на плоском зеркале от сферической поверхности с каждой стороны семифокусного сфероцилиндрического фокусирующего зеркала. Необходимость такого решения основывается на экспериментальных результатах определения пускового тока в ОР с различными многофокусными фокусирующими зеркалами. Если бы длина взаимодействия была $L_{7ц} + 4r_к$, то $W_1 = 0.171 \times 10^{-3}$ следовало увеличить в 29.92/27.24 раз и тогда получили бы

$$\psi_0 = 1.075\times0.171\times10^{-3}/W \approx 0.184\times10^{-3}/W. \qquad (П.6)$$

Таким образом, величина $\psi_0$ увеличилась, и в результате уменьшились величины $\varphi_p$ и пускового тока $I_0$.

Теперь необходимо вычислить $W$. В работе [9, формула (44)], приводится выражение

$$W = \nu_1(A_1)^2V/8\pi, \qquad (П.7)$$

где $V$ – объем ОР, $A_1$ – амплитуда первой пространственной гармоники, $\nu_1 = \pi^2/8$ для оптимальной "четвертьволновой гребенки", у которой отношение щели к периоду $d/l = 0.5$, и высота гребня $h = b_0 = \lambda/4$. Поэтому отношение $A_1/A_0 = 0.637$ ($A_0$ – амплитуда ВЧ-поля в ОР).

Первое условие в ДРПС экспериментального макета оротрона выполнено. Однако второе условие, конечно, не выполнено. Но поскольку оротрон с этой ДРПС ведет себя так, как будто оно должно выполняться, то выражение (П.7) будем считать справедливым с $\nu_1 = \pi^2/8$. Тот факт, что для нашего прибора $b_0/\lambda = 0.3$, а отношение $A_1/A_0 = 0.5$, будет учтен в расчете $W_1$. Вычисляем

$$W = \pi(A_1)^2 V/64 = [\pi(A_1)^2 S_1]H_{\text{ОР}}/64,$$

где $S_1$ – площадь поверхности плоского зеркала, $H_{\text{ОР}}$ – высота ОР.

Площадь плоского зеркала

$$S_1 = (l_{\text{ц}} + 4r_{\text{к}})L_{\text{з.пл}} = (4\text{ мм} + 4\times 2.68)\times 29.92 =$$
$$= 14.72\times 29.92\text{ мм} = 440.422\text{ мм}^2 \approx 4.404\text{ см}^2,$$

$$H_{\text{ОР}} = 8.583\text{ мм} = 0.8583\text{ см}.$$

Итак,

$$W = \pi(A_1)^2 V/64 =$$
$$= \pi(A_1)^2 S_1 H_{\text{ОР}}/64 \approx 0.185(A_1)^2.$$

$$\psi = W_1/W = 0.171\times 10^{-3}(A_1)^2/W = \\ = (A_1)^2\times 0.171\times 10^{-3}/0.185(A_1)^2. \quad (\text{П.8})$$

Отсюда следует

$$\psi \approx 0.924\times 10^{-3}, \\ \psi_0 \approx 0.184(A_1)^2/0.185(A_1)^2 = 0.9935\times 10^{-3}. \quad (\text{П.9})$$

Однако, как говорилось ранее, наша структура, хотя и ведет себя как “четвертьволновая гребенка”, но с параметрами, отличными от оптимальных. Действительно, для оптимальной “четвертьволновой гребенки” необходимо, чтобы $b/\lambda = 0.25$, и тогда $A_1/A_0 = 0.637$. Но в случае нашего эксперимента $b/\lambda = 0.3$ и $A_1/A_0 = 0.5$. Так как энергия, запасенная в электронном потоке, $W_1 \sim A_1^2$, а в ОР $W \sim A_0^2$, то коэффициент $\psi = W_1/W \sim (A_1/A_0)^2$ и должен быть соответственно уменьшен до $\psi_1$, а $\psi_0$ до $\psi_{01}$ соответственно:

$$\psi_1 = W_1(0.5/0.637)^2/W =$$
$$= W_1\times 0.616/W = 0.569\times 10^{-3},$$

$$\psi_{01} = 0.9935\times 0.616\times 10^{-3} =$$
$$= 0.61199\times 10^{-3} \approx 0.612\times 10^{-3}.$$

Подставляя значения $\psi_1 = 0.569 \times 10^{-3}$ и $Q = 2000$ в формулу (П.1), получим $\psi_1 Q \approx 1.14$, и полагая $\Gamma =$ $= 0.5$ [6], для малого пространственного заряда получим

$$\varphi_p = (2\pi\Gamma\pi^2/8\psi Q)^{0.5} = 3.3946^{0.5} \approx 1.829,$$
$$\text{или } 1.966,\text{ т.е.} \approx > 1.$$

Однако в работе [9] приводится выражение $q_2/q_1 =$ $= 64\Gamma/\pi^3\psi Q$, где $q_2$ и $q_1$ – вычислены по [9, формулы (51) и (50)] для большого и малого пространственного заряда соответственно. Также указывается, что в случае, если это отношение меньше 1, пространственный заряд мало влияет на взаимодействие электронного потока с ВЧ-полем. В нашем случае $q_2/q_1 = 64\Gamma/\ \pi^3\psi Q \approx 0.91$ для $\psi_1$, или 0.978 для $\psi_{01}$, и можно для вычисления пускового тока пользоваться формулой из [9, (50)] для малого пространственного заряда:

$$I_0 = 8\times 10^{-5} S_0 U_0^{3/2}/L^2\psi Q. \quad (\text{П.10})$$

Подставляя в формулу значения $S_0 = 5 \times 10^{-3}$ см$^2$, $U_0 = 9 \times 10^3$ В, $L = 2.724$ см, $\psi_1 Q \approx 1.14$, получаем

$$I_0 \approx (8\times 10^{-5}\times 5\times 10^{-3}\times$$
$$\times (9^3\times 10^9)^{0.5}/2.724^2\times 1.14)\,A =$$
$$= 40.37\times 10^{-3} A \approx 40.4\text{ мА}.$$

Это значение пускового тока весьма близко к значению 40 мА, наблюдаемому в эксперименте. В случае если бы в выражении для $W_1$ длина взаимодействия была не 2.724 см, а 2.929 см, то расчетное значение пускового тока было бы меньше измеренного в $(2.929/2.724)^3 = 1.243$ раз и составило бы 32.5 мА.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мясин Е.А., Евдокимов В.В., Ильин А.Ю., Соловьев А.Н.* Оротрон. Патент РФ на полезную модель № 87830. Опубл. офиц. бюл. “Изобретения. Полезные модели” № 29 от 20.10.2009.
2. *Курушин А.А., Пластиков А.Н.* Проектирование СВЧ устройств в среде CST Microwave Studio. М.: МЭИ, 2010.
3. *Мясин Е.А., Соловьёв А.Н.* // Матер. 27-й Междунар. Крым. конф. “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь, 2017. С. 381.
4. *Мясин Е.А., Соловьёв А.Н.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 7. С. 652.
5. *Мясин Е.А., Евдокимов В.В., Ильин А.Ю., Соловьёв А.Н.* // Журн. радиоэлектроники 2020. № 2. http://jre.cplire.ru/jre/feb20/9/text.pdf.
6. *Белявский Б.А., Цейтлин М.Б.* // РЭ. 1980. Т. 25. № 5. С. 1108.
7. *Богомолов Г.Д.* Исследование генерации оротрона в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах. Канд. дис. ... физ.-мат. наук. М.: ИПФ АН СССР, 1968. 123 с.
8. *Андреев Ю.В., Мясин Е.А.* Государственная регистрация программы для ЭВМ № 2016613929. Опубл. офиц. бюл. “Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем” № 5 от 20.05.216.
9. *Русин Ф.С.* Линейная теория оротрона. Электроника больших мощностей. Сб. 5. М.: Наука, 1968. С. 9.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 682–697

НАНОЭЛЕКТРОНИКА

УДК 621.396.67

# ОБ ИМПЕДАНСНЫХ УСЛОВИЯХ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОПРОВОДАХ

© 2021 г. М. В. Давидович*

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012 Российская Федерация*

**E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru*

Поступила в редакцию 11.08.2020 г.
После доработки 22.11.2020 г.
Принята к публикации 29.11.2020 г.

В рамках модели Ландауэра–Датты–Лундстрома получены приближенные формулы для проводимости металлических нанопроволок конечной ширины и толщины, а также пленок конечной толщины, переходящие в известные предельные случаи. Соотношения удобны для определения проводимости наноразмерных структур с учетом обоих поперечных размеров. Для оценки числа мод проводимости квантовых проволок с конечными поперечными размерами предложены приближенные формы распределения потенциала и функционалы для решения соответствующего уравнения Шредингера. Проведена численная оценка числа энергетических уровней. Рассмотрено решение задачи о волне Зоммерфельда–Ценнека в прямоугольном проводе, которая на высоких частотах переходит в поверхностный плазмон. Решение существенно зависит от изменения плазменной частоты, связанной с поперечными размерами.

**DOI:** 10.31857/S0033849421060085

## ВВЕДЕНИЕ

Тонкие металлические, полупроводниковые и другие хорошо проводящие структуры в виде проводов различной формы, включая углеродные нанотрубки (УНТ), ленточные (полосковые) проводники шириной $w$ и толщиной $t$, широко применяются при создании различных проволочных метаматериалов [1–12], гиперболических метаматериалов в виде плоскослоистых металлодиэлектрических структур [13–18], дифракционных решеток, двумерных и трехмерных фотонных кристаллов [9–12], линий передачи, нанотранзисторов, терагерцевых усилителей [19–21] и т.п. В этих структурах $w$ и $t$ могут иметь размеры от нескольких (или даже одного-двух) нанометров до нескольких десятков или сотен нанометров, а для моделирования необходимо знать их импедансы как функции размеров и частоты. Теория проводимости Друде, которая хорошо работает для вырожденных металлов ($k_B T \ll E_F$) и в случае больших по сравнению с длиной свободного пробега (ДСП) размеров проводников становится плохо применимой при уменьшении размеров (включая и длину проводников $L$) до ДСП $\lambda_0$ и менее [22–30]. Тем более она не применима к графену, графеновым нанолентам, УНТ, квантовым проволокам и подобным им структурам. Строгий анализ требует решения задач квантовой механики, электродинамики и неравновесной статистической механики, поэтому подобного рода задачи решаются приближенными методами типа формализма Грина–Кубо, модели Ландауэра–Датты–Лундстрома (ЛДЛ) [22–30], транспортного уравнения Больцмана в приближениях времени релаксации, Бхатнагара–Гросса–Крука [31] и ряда других. В сверхтонких пленках (с толщиной 2...10 нм) существенны поверхностные эффекты, в том числе влияние кластеров обусловленных коагуляцией металла при получении сплошных пленок с металлической проводимостью, отражение носителей заряда от поверхностей. Минимальная достижимая толщина $t_c \sim 1...2$ нм, соответствующая перколяционному барьеру, как раз определяет минимально возможный слой из нескольких атомарных слоев, при котором еще можно говорить о макросвойствах вещества. Влияние поверхностного рассеяния наряду с объемным рассеянием учитывалось в ряде моделей, в частности Фукса–Зондгеймера [32, 33], Майадаса–Шацкеса [34], Телье–Тоссе–Пишара [35], Варкуша [36] и др. Квазибаллистический перенос заряда с размерными эффектами шероховатости количественно описан с помощью соотношений теории Намба [37, 38]. Квантоворазмерные эффекты рассмотрены в ряде работ, в частности [39–43], а также исследовались и получены экспериментально [44–51]. В ряде работ получены различные экспериментальные зависимости удельной проводимости металлических пленок $\sigma(t)$ для толщин от 1 до 100 нм (см. [50, 51]). Обычно проводимость наноструктур определяется на основе числа мод проводимости [25–30], которое в свою очередь оценивается по числу укладывающихся на структуре волн де-Бройля.

Цель работы – рассмотрение импедансных свойств металлических проволок малых поперечных размеров $w$, $t$ и тонких металлических пленок в рамках транспортной модели ЛДЛ. При этом акцент сделан на получении простых аналитических соотношений и на точном определении числа мод проводимости.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Удельная проводимость в концепции Друде определяется как $\sigma = qn\bar{\mu} = q^2 n\tau_p / m_e$, где подвижность носителей $\bar{\mu} = q\tau_p / m_e$, $q$ – заряд, $m_e$ – эффективная масса носителей заряда (например, электронов), $\tau_p = \lambda_0 / v$ – время релаксации импульса, связанное с ДСП $\lambda_0$ в бесконечном образце и со средней скоростью носителей $v$. Дрейфовое в среднем направленное движение, подразумевающее ускорение между двумя наиболее вероятными ближайшими столкновениями, после которых электрон полностью теряет направленный против электрического поля импульс (соответственно, и энергию, передавая ее фононам), для малых длин образцов становится баллистическим. В случае идеальных квантоворазмерных структур имеют место упругие рассеяния носителей относительно границ, что требует, вообще говоря, решения квантовомеханических задач. При $w \ll \lambda_0$ получаем двумерную структуру – двумерный электронный газ (ДЭГ). Для металлов при комнатной температуре соответствующая пленка должна иметь порядок толщин от нескольких нанометров до двух-трех десятков нанометров, поскольку $\lambda_0$ для используемых в наноплазмонике металлов при комнатной температуре имеет порядок от нескольких десятков до сотни нанометров. При снижении температуры $\lambda_0$ растет, поэтому указанные границы сдвигаются в большую сторону. Минимальная толщина обусловлена тем, что в пленке может быть не менее нескольких атомарных слоев. Однако имеются идеальные (атомарно тонкие) структуры ДЭГ типа графена, силицена, борофена.

Получаемые электрофизические параметры следует усреднять по энергиям носителей, используя функцию распределения Ферми–Дирака

$$f(E,\mu,T) = \left[1 + \exp\left((E-\mu)/(k_B T)\right)\right]^{-1},$$

где $\mu$ – электрохимический потенциал. Будем также обозначать $f(E,\mu,T) = f(E)$. В вырожденном бесконечном проводнике усреднение по энергиям носителей дает формулу Друде [52]. Строгое определение электрофизических параметров требует решения кинетических уравнений при воздействии электромагнитных волн. Имеется ряд приближенных подходов, основанных на методах статистической механики и термодинамики необратимых процессов (транспортном уравнении Больцмана, формализме Кубо, или формулах Грина–Кубо, неравновесных функций Грина–Келдыша). В частности, эти модели позволяют определять проводимости таких структур, как графен [31, 53–56]. Наиболее простым формализмом является транспортная модель ЛДЛ [23–30, 57–60], которой здесь мы и придерживаемся. В ней причиной тока носителей заряда является различие в подготовке равновесных электродов $f_1(E)$ и $f_2(E)$, а также наличие в проводящем канале свободных уровней для заполнения носителями с электрода 1 с последующим их переходом на свободные уровни электрода 2. Такой как бы статический подход, тем не менее, позволяет определить проводимость [22–30], пригодную для достаточно высоких частот, особенно если длина канала мала. Проводники ведут себя по-другому, когда их размеры становятся сравнимы или меньше ДСП $\lambda_0$ в бесконечном материале. Именно, возникает баллистический транспорт, который приводит к тому, что и сама ДСП $\lambda$ изменяется и становится зависимой от размеров. Далее будем рассматривать проводник с размерами $w$, $t$, $L$, считая, что ток течет вдоль длины $L$. При баллистическом транспорте существенны размерное квантование (размерные квантовые эффекты), т.е. рассмотрение носителей в квантовых ямах (одномерных, двумерных и трехмерных), причем при транспорте носителей имеет значение отражение их от соответствующих стенок. Важно квантово-механическое рассмотрение задачи, определяющее число состояний и число мод проводимости [29, 30], что определяет проводимость структуры. Переход от классического рассмотрения к квантовому изложен в работах [61–68].

Для численного анализа перечисленных структур желательно иметь выражения в виде простых приближенных формул для проводимости проволоки поперечного размера $w$, $t$ и длины $L$, а также погонной проводимости, что и является целью работы. Пусть $d = 1, 2, 3$ означает размерность проводника. Указанные соотношения должны быть, с одной стороны, простыми, а с другой – достаточно точными и переходить в известные формулы в одномерном случае $d = 1$ (квантовая нить, $w \to 0, t \to 0$), двумерном случае $d = 2$ (квантовая яма $t \to 0$) и трехмерном случае $d = 3$ неограниченного образца ($w \to \infty$, $t \to \infty$). Случай квантовой точки (искусственного атома) $d = 0$ для транспорта не интересен, но важен для анализа локализованных плазмонов.

## 2. АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПРОВОДНИКОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Используя концепцию баллистического сопротивления/проводимости $R_B = 1/G_B$, для проводника любой размерности $d$ и длины $L$ можно записать его сопротивление в виде

$$R = R_B(L+\lambda)/\lambda = \rho_d(L+\lambda)\left\{1, \frac{1}{w}, \frac{1}{wt}\right\}. \quad (1)$$

Величины в фигурных скобках соответствуют размерностям 1, 2, 3. Это, в частности, означает обычно принятые записи через удельные сопротивления $\rho_d$ и проводимости $\sigma_d$

$$\rho_d = \frac{1}{\sigma_d} = \frac{1}{G_B\lambda}\{1, w, wt\}. \quad (2)$$

В (1) и (2) равенства для фигурных скобок определяют соответствующие физические размерности удельных величин для проводников размерностей $d = 1, 2, 3$. При малых размерах соотношения типа (1) нелинейно зависят от размеров (квантуются), однако они весьма удобны для удельных и погонных параметров и поверхностных импедансов при электродинамическом анализе устройств в силу простоты. Естественно размерности $\rho_d$ и $\sigma_d$ в силу (2) разные, при этом обычные удельные величины суть $\rho = \sigma^{-1} = \rho_3 = \sigma_3^{-1}$. Длина свободного пробега массивного проводника в теории Друде определяется как $\lambda_0 = \bar{v}\tau$, где $\bar{v}$ — средняя скорость, $\tau$ — время свободного пробега (релаксации импульса), т.е. $\tau^{-1}$ — вероятность рассеяния в единицу времени с полной потерей направления, когда скорость направлена после столкновения случайным образом. Приобретаемая во внешнем поле за время $\tau$ дополнительная энергия полностью релаксирует к равновесному состоянию в точке столкновения, т.е. передается фононам. Очевидно, ДСП зависит от того, как определена средняя скорость. При движении носителей вдоль оси $z$ $\bar{v} = \langle |v_z| \rangle$ при усреднении по энергиям, вводя в рамках теории случайных блужданий коэффициент диффузии $\bar{D} = \langle v_z^2 \tau \rangle$, можно определить проводимость трехмерного проводника как [52]

$$\sigma = \sigma_3 = q^2 \bar{D} d_{EF} = q^2 \bar{D} D_d(E_F)/(Lwt), \quad (3)$$

где $d_{EF}$ — плотность состояний на поверхности Ферми, $D_d(E)dE$ — число энергетических состояний в интервале $dE$ (индекс $d$ означает квантовую размерность (one-dimensional), т.е. 1-$d$ означает структуру, не ограниченную по одной координате). Формула (3) получена усреднением по энергиям в случае вырождения. В общем случае надо усреднять по энергиям с функцией $-\partial f_0/\partial E$, где обозначена равновесная функция Ферми–Дирака $f_0 = f(E, \mu_0, T)$, $\mu_0 = E_F$. В случае малой длины $L$ неравновесного проводника, включенного между двумя равновесными проводниками с электрохимическими потенциалами $\mu_1$ и $\mu_2$ следует усреднять с функцией $f_1(E) - f_2(E)$. Формула (3) допускает обобщение на любую размерность [30]

$$\sigma_d = q^2 \bar{D} g_d = \frac{q^2 \bar{D} D_d}{L}\left\{1; \frac{1}{w}; \frac{1}{wt}\right\}, \quad g_d = \frac{D_d}{L}\left\{1; \frac{1}{w}; \frac{1}{wt}\right\}. \quad (4)$$

Вводя закон дисперсии $E(\vec{p})$, получаем, вообще говоря, тензорную проводимость. Рассмотрим изотропные зависимости $E(p)$. Усреднение $v_z(E)$ по углам (направлениям с учетом баллистического движения) дает [29, 30] $\langle |v_z(E)| \rangle = v(E)$, $\langle v_z^2(E) \rangle = v^2(E)$ для 1-$d$ проводника, $\langle |v_z(E)| \rangle = 2v(E)/\pi$, $\langle v_z^2(E) \rangle = v^2(E)/2$ для 2-$d$ проводника, $\langle |v_z(E)| \rangle = v(E)/2$, $\langle v_z^2(E) \rangle = v^2(E)/3$ для 3-$d$ проводника, что записываем как

$$\langle |v_z| \rangle = \bar{v}\{1;\ 2/\pi;\ 1/2\}, \quad (4)$$

$$\bar{D} = \langle \bar{v}_z^2 \tau \rangle = \bar{v}^2 \tau \{1; 1/2; 1/3\}. \quad (5)$$

Используя определение $\lambda = 2\bar{D}/\langle |v_z| \rangle$, получаем

$$\lambda = \bar{v}\tau\{2; \pi/2; 4/3\}. \quad (6)$$

Здесь $\bar{v}$, $\tau$ соответствует бесконечному образцу, а индекс $d$ в (5) и (6) опущен. Обобщим приведенные соотношения на случай проводника прямоугольного сечения так, чтобы имело место совпадение при его вырождении в двумерный и одномерный проводники:

$$\lambda = \lambda_0 \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + w} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + t}\right)\right\}, \quad (7)$$

$$R = R_B \frac{L+\lambda}{\lambda}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 + w} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + t}\right) + \left(2 - \exp(-w/\lambda_0) - \exp(-t/\lambda_0)\right)\right\}. \quad (8)$$

Здесь $\lambda_0 = \bar{v}\tau$, $R_B = R_{B1} = 2L/(q^2 D\bar{v})$ — баллистическое сопротивление одномерного проводника. Из (7) для $\lambda_d$ следует $\lambda_1 = 2\lambda_0$ (если $w = t = 0$), $\lambda_2 \approx \lambda_0(1.5 + \lambda_0/w)$ (если $t = 0$, $w \gg \lambda_0$), что приближенно соответствует $\pi\lambda_0/2$, а также $\lambda_3 = \lambda_0$. Соотношение (8) соответствует объемному ограниченному проводнику. Для одномерного проводника получаем $R = R_{\rm B}(L+\lambda)/\lambda$, для двумерного проводника $R = (3/2)R_{\rm B}(L+\lambda)/\lambda$, для трехмерного $R = 2R_{\rm B}(L+\lambda)/\lambda$, что хорошо согласуется с определением баллистической проводимости [30]:

$$G_{{\rm B}d} = \frac{q^2 D_d \bar{v}}{2L}\left\{1, \frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}\right\}. \tag{9}$$

В случае малых по сравнению с ДСП поперечных размеров для квантовой проволоки имеем

$$R = R_{\rm B}\frac{L+\lambda}{\lambda}\times \\ \times\left\{1 - (w/\lambda_0 + t/\lambda_0)/2 - \left((w/\lambda_0)^2 + (t/\lambda_0)^2\right)\right\}. \tag{10}$$

Очевидно, при анализе длинных структур из квантовых проволок можно рассматривать их как осевые токи с погонным сопротивлением (импедансом) $\rho_l = R/L \approx R_{\rm B}$, при этом формула (10) дает значение погонного сопротивления с учетом конфигурации проволоки. При моделировании структур линейными токами вдоль оси проволоки граничные условия следует накладывать на ее поверхности в виде $\vec{J}_S = \sigma_S \vec{E}_S$, где индексом $S$ обозначена поверхностная плотность тока, поверхностная проводимость и касательное к поверхности электрическое поле. Считая, что ток в баллистической проволоке распределен равномерно (это приближение можно оправдать пропорциональностью числа мод проводимости поперечным размерам и малыми размерами по сравнению с длиной волны), получаем удельное сопротивление $\rho = \rho_l wt$:

$$\rho = R_{\rm B} wt\frac{L+\lambda}{L\lambda}\times \\ \times\left\{1 - (w/\lambda_0 + t/\lambda_0)/2 - \left((w/\lambda_0)^2 + (t/\lambda_0)^2\right)\right\}. \tag{11}$$

Определение удельной двумерной (поверхностной) проводимости берется как предел $\sigma_S = \sigma/t$ при стремлении толщины проводника к нулю. Если $\vec{J}_S = \vec{z}_0 J_S$ – поверхностная, а $\vec{J} = \vec{z}_0 J_z$ – объемная плотности тока, то осевой ток равен $I_z = 2(w+t)J_S = wtJ_z$, если считать эти распределения равномерными. Отсюда получаем

$$\sigma_S = G_{\rm B}\frac{\lambda}{2(1+\lambda/L)(w+t)}\times \\ \times\left\{1 - (w/\lambda_0 + t/\lambda_0)/2 - \left((w/\lambda_0)^2 + (t/\lambda_0)^2\right)\right\}^{-1}. \tag{12}$$

Очевидно, соотношения можно распространить на круглые проволочки с радиусом $r$, считая что $w = t = r\sqrt{\pi}$. К сопротивлению (8), которое рассмотрено в условиях постоянного тока, следует, вообще говоря, добавить индуктивную часть, т.е. взять $Z = R + i\omega(L_G + L_K)$, где

$$L_G = \frac{\mu_0 L}{2\pi}\ln\left(\frac{2L}{w+t} + 1/2\right), \tag{13}$$

– геометрическая индуктивность,

$$L_K = \frac{m_e L}{e^2 n_e wt}\frac{\lambda}{\lambda + L}. \tag{14}$$

– кинетическая индуктивность. В (14) добавлен множитель, учитывающий то, что кинетическая индуктивность возникает при баллистическом транспорте. Если период колебаний поля $T_0 = 2\pi/\omega$ сравним со временем свободного пробега, то приобретаемая в поле кинетическая энергия начинает резко уменьшаться. Поскольку частоты столкновений $\omega_c = 1/\tau$ для металлов лежат в инфракрасном диапазоне, то в терагерцевом диапазоне использовать $L_K$ желательно, особенно для коротких проводников. В общем случае можно ввести частотную корректировку:

$$L_K'(\omega) = L_K\omega_c/(\omega_c + \omega).$$

Естественно, что приведенные формулы приближенные. Более строгие подходы к получению поверхностного или объемного импедансов должны основываться на определении числа мод проводимости из УШ и рассматривать решения уравнений Максвелла с учетом поверхностного эффекта, при этом весьма важно определение параметра $\tau$, который зависит от того, каков характер отражений носителей от границ – зеркальный, смешанный или диффузный. Соответственно важна и структура границ –атомарная или кластерная.

## 3. ПРОВОДИМОСТЬ, ЧИСЛО ЕЕ МОД И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ

Баллистическая проводимость пропорциональна числу мод $M_d \sim D_d/L$ [25–30]:

$$G_{{\rm B}d} = \frac{q^2 M_d}{h} = \frac{q^2 D_d \bar{v}}{2L}\left\{1, \frac{2}{\pi}, \frac{1}{2}\right\}, \tag{15}$$

поэтому число мод определяется плотностью состояний $D_d$. Для широких и толстых проводников естественно считать, что число мод пропорционально $wt$. Для числа мод с импульсом, меньше некоторого значения $p$, известно выражение

$$M_d(p) = \left[1, \frac{2t}{h/p}, \frac{\pi wt}{(h/p)^2}\right] = \frac{hN_d(p)}{2Lp}\left\{1, \frac{4}{\pi}, \frac{3}{2}\right\}, \tag{16}$$

где квадратные скобки означают взятие целой части. Здесь

$$N_d(p) = \left[\frac{2L}{h/p}, \pi\frac{Lt}{(h/p)^2}, \frac{4\pi}{3}\frac{Lwt}{(h/p)^3}\right] \quad (17)$$

– число состояний с импульсом меньше $p$. Вводя закон дисперсии в виде $E = E(p)$, для числа состояний и его плотности $D_d$ имеем

$$N_d(E) = \int_{-\infty}^{E} D(E')dE',\ D_d(E) = \frac{dN_d(E)}{dE} = $$
$$= \frac{dN_d(E)}{dp}\frac{dp(E)}{dE} = \frac{dp(E)}{dE}\frac{p^{d-1}d}{h^d}\{2L, \pi Lt, 4\pi L\,wt/3\}. \quad (18)$$

Для получения формул типа (18) используются простые законы дисперсии типа $E(p) = E_c + p^2/(2m)$. В случаях $d = 1, 2, 3$ имеем $p = |p_z|$, $p^2 = p_z^2 + p_x^2$, $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Для графена обычно берут области в зоне Бриллюэна вблизи двух точек Дирака, где дисперсия имеет вид

$$E(k) = \pm\hbar k v_{\rm F} = \pm\hbar k\sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Отсюда число мод проводимости графеновой ленты ширины $w$ есть $M(E) = 2wE/(\pi\hbar v_{\rm F})$, $v_{\rm F} \approx 10^6$ м/с. Естественно, что приведенные соотношения приближенные, но в силу их простоты они весьма удобны для моделирования. Определяя ток усреднением по энергии [30] –

$$I = \frac{q}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D_d(E)}{\tau(E)}[f_1(E) - f_2(E)]dE = $$
$$= \frac{2q}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(E)}{\lambda(E)+L}M_d(E)[f_1(E) - f_2(E)]dE,$$

получаем линейный отклик на разность электрических потенциалов $U$ в виде проводимости [29, 30]

$$G(L) = \frac{2q^2}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(E)}{\lambda(E)+L}M_d(E)\frac{-\partial f_0(E)}{\partial E}dE.$$

Здесь $f_1(E) - f_2(E) = -(\partial f_0(E)/\partial E)qU$ при определении проводимости $G = I/U$. Аналогично получаем линейный отклик на изменение температуры, а также и нелинейные отклики [30]. Удельную погонную проводимость можно в первом приближении определить так:

$$\sigma_0(z) = [G(0) + z/L(G(L) - G(0))]L/(tw).$$

Аналогично получаем эффективную погонную поверхностную проводимость в виде

$$\sigma_{0S}(z) = [G(0) - z/L(G(0) - G(L))]L/(2(t+w)).$$

Указанные проводимости есть функции координаты $z$, отсчитываемой от истока к стоку. У истока проводимость $G(0) = G_b$ баллистическая и максимальная. Пропорциональность удельных проводимостей длине $L$ не должна смущать, так как линейный отклик пропорционален напряжению $U$, а компонента электрического поля $E_z = -U/L$. Рассматривая указанные величины как статические, в приближении времени релаксации получаем частотные зависимости, например $\sigma(z) = \sigma_0(z)/(1+\omega\tau)$. Приближение справедливо для длин волн, существенно больших $L$. Поверхностный импеданс бесконечного графенового листа с учетом температурной зависимости приведен в ряде работ, например, [18, 31, 54, 56]. В работах [20, 53, 69, 70] рассмотрен и импеданс графеновой наноленты, который зависит не только от ее ширины, но и структуры, и окружения (подложки), и формы краев, а учет числа мод и плотности состояний проведен в [71].

Рассмотрим простые модели для проводимости металлических структур. Для металлической пленки толщиной $t$ имеет место размерное квантование, в результате которого дисперсия принимает вид

$$E(p) = E_{n_x} + \left(p_z^2 + p_y^2\right)/(2m_e).$$

Для ленты с размерами $w$, $t$ имеем $E(p) = E_n + p_z^2/(2m_e)$, где $E_n$ – уровни энергии в соответствующей двумерной потенциальной яме, которые можно описать мультииндексом $n = (n_x, n_y)$. В бесконечно глубокой двумерной яме имеется бесконечное число состояний $E_n = (\pi\hbar)^2 \times \left((n_x/t)^2 + (n_y/w)^2\right)/(2m_e)$, отсчитываемых от дна. Однако для конечной ямы это весьма приближенная модель. На рис. 1 и 2 условно показано распределение энергий электрона в одномерной яме полубесконечного проводника и в яме для пленки проводника толщиной $t$. В обоих случаях ямы не прямоугольные. Их прямоугольные границы $|x| \le t/2$ смещены во вне на некоторое расстояние $a$ по сравнению с областью $|x| \le t'/2$, соответствующей границам центров атомов (см. рис. 1а). Для полубесконечной структуры максимальное значение $E_n = E_{\rm F}$ определяет уровень Ферми, а число уровней с учетом вырождения по спину – число состояний. Любой реальный образец конечный, но при больших размерах энергия Ферми $E_{\rm F}$ перестает от них зависеть, число состояний конечно, но велико, а распределение можно считать непрерывным. Отсчитываемая от дна ямы (от энергии внутренних оболочек ядер) энергия $E_{\rm F}$ вместе с работой выхода $W_0$ образует яму с минимумом потенциала $V_0 = -(E_{\rm F} + W_0)$. На самом деле от $-V_0$ отсчитываются уровни $E_n$, но в широкой яме $E_F = -(E_n - E_1) \approx -E_n$, где $E_n$ – последний уровень. Нуль потенциала соответствует свободному электрону. Конфигурация ямы зависит от распределения потенциала $V(x)$, который определяется как работа, необходимая для перемещения электрона из ямы с уровня Ферми во внешнюю точку $x$ (см. рис. 1). Наиболее простая конфигурация – прямоугольная яма $V(x) = -V_0$ при $|x| \le t/2$, $V(x) = 0$ при $|x| > t/2$. Решение уравнения Шредингера (УШ) для нее хорошо известно в виде трансцендентного соотношения [72]

$$kt = n_0\pi - \arcsin\left(\hbar k/\sqrt{2m_e|V_0|}\right),$$

где $k = \sqrt{2m_e(E - V_0)}/\hbar$, $n_0 = 1, 2, \ldots$ Из данного соотношения следуют значения толщин $t_{n_0} = n_0\pi/k_m$, при которых уровни увеличиваются на единицу, где $k_m = \sqrt{2m_e|V_0|}/\hbar$. При $n_0 = 1$ происходит дополнение одного уровня к уже имеющемуся при $t < t_1$. Уменьшение $t$ от макроскопических значений к микроскопическим приводит к увеличению расстояний между уровнями и к уменьшению получаемой таким образом работы выхода. Кроме того, уровни расположены неравномерно, сгущаясь ко дну. Рассмотрим приближенную к реальности модель. Считаем, что до энергии Ферми конфигурация ямы прямоугольная, а далее имеется барьер (рис. 2а). Для его расчета необходимо воспользоваться методом теории изображений [73, 74]. Теория достаточно простая, но весьма хорошо описывает форму потенциального барьера. Однако сила изображения $F = e^2/\left(16\pi\varepsilon_0 x'^2\right)$ обращается в бесконечность на границе ямы ($x' = 0$, см. рис. 1). Эта сила перестает работать на расстояниях порядка атомных, что качественно можно объяснить так. Пусть атом металла отдает один электрон в зону проводимости, при этом $a$ – радиус иона. Такой ион будет притягивать электрон только на расстояниях порядка $a$ и более. Часть электронных оболочек атомов перекрывается, образуя кристалл. Удаление из него электрона проявляется как недостаток электронной плотности в окружении ближайшего атома (атомов), что и определяет зеркальную силу. Величина $a$ примерно равна радиусу атома или иона, который обычно имеет порядок от половины постоянной решетки и менее. В работах [73, 74] на основе метода изображений получены выражения, которые для случая, представленного на рис. 1, позволяют записать потенциал в виде

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 = -(W_0 + E_F), & x \le 0; \\ -\dfrac{e^2}{16\pi\varepsilon_0(x + a)}, & x > 0. \end{cases} \quad (19)$$

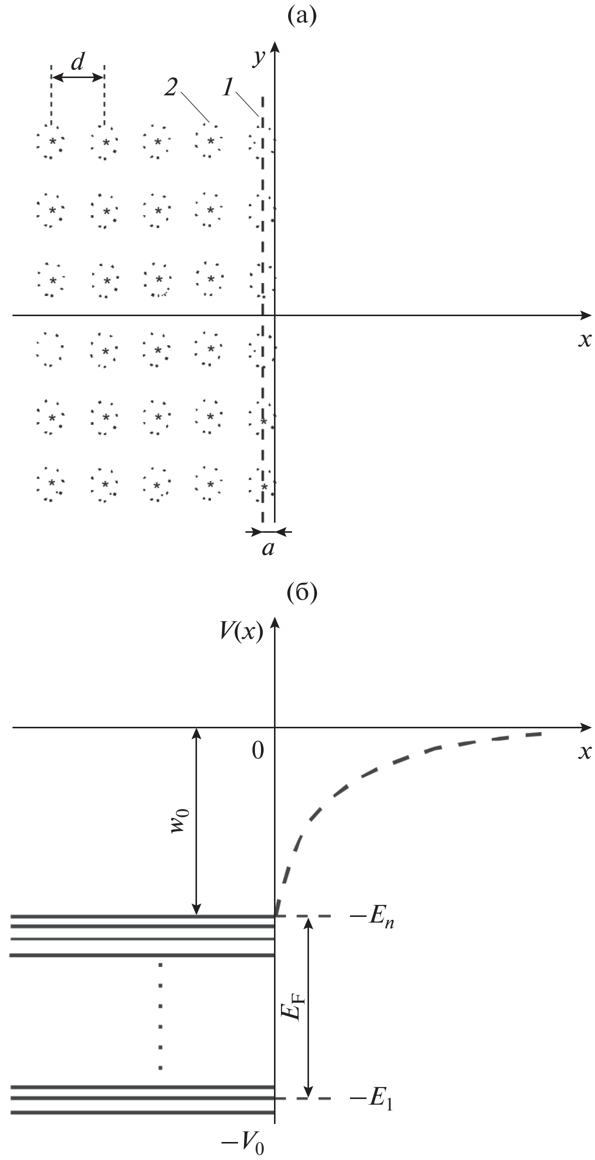



**Рис. 1.** Схематическое изображение поверхности массивного (полубесконечного) проводника с плоскостью зеркальных изображений *1* и атомами *2* в решетке (а) и схема энергетических зон и потенциальной ямы (б).

Потенциал имеет скачок $E_F$ и согласно (19) $W_0 = -V(0) = e^2/(16\pi\varepsilon_0 a)$. Экспериментально измеренная работа выхода зависит от кристаллографических направлений, а также от поверхностных таммовских уровней. Следовательно, от них зависит и $a$. В качестве такой константы можно использовать радиус одиночного атома, радиус иона, ковалентный радиус, что обусловливает некоторый произвол, слабо влияющий на форму потенциального барьера. Желательно определять $a$ через

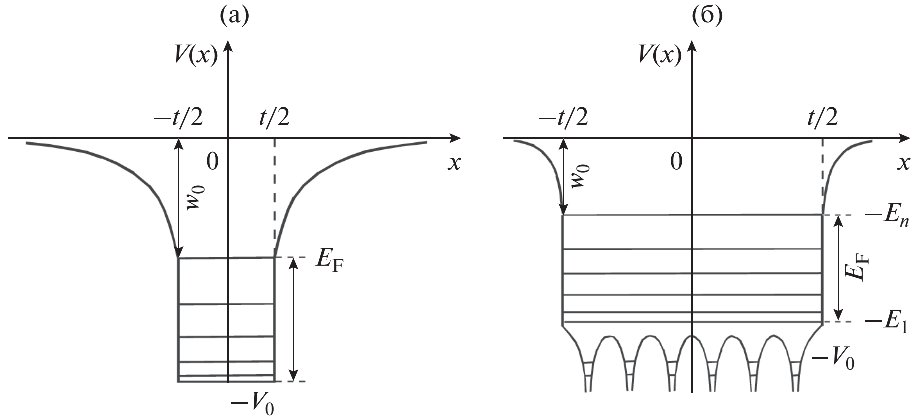



**Рис. 2.** Схематический вид энергетических уровней и потенциальной ямы с плоским дном для металлической пленки толщиной $t$ (а) и аналогичной ямы с энергетическими уровнями с учетом квазипериодической структуры атомов (б).

работу выхода, учитывая, что она может зависеть от состояния поверхности, при этом в силу определения работы выхода следует использовать минимальную величину. В качестве примера в табл. 1 приведены постоянные решетки ряда металлов, радиусы атомов, ковалентные радиусы, радиусы ионов решетки +1e, экспериментальные значения работ выхода и соответствующие значения, полученные по приведенной формуле при этих радиусах. Из табл. 1 видно, что наиболее хорошо коррелирует значение $a$ в качестве радиуса иона, хотя есть и исключения, что, по-видимому, связано с количеством отдаваемых электронов в зону проводимости, типом связи атомов в решетке и необходимостью использования радиусов соответствующих ионов. Так, радиус иона серебра +1e составляет 0.126 нм, но если взять радиус иона +2e, равный 0.089 нм, то получаем $W_0 = 4.045$ эВ. Нахождение работы выхода строгими квантово-механическими методами было предпринято в ряде ранних работ, например [75], но не увенчалось точными количественными результатами из-за сложности задачи. Современные публикации по применению метода сильной связи позволяют вычислять энергетический спектр и, соответственно, работу выхода для структур конечных размеров весьма точно [71, 76]. По-видимому, достаточно точно работу выхода можно определить методами молекулярной динамики, зная кристаллическую структуру и плотность связанных электронных состояний в кристалле. Поскольку потенциалы ионизации атомов примерно в четыре раза выше, чем работы выхода для соответствующих им материалов, ясно, что используемый простой метод изображений хорошо описывает форму ямы и потенциального барьера. Последний возникает при приложении к проводнику внешнего положительного электрического потенциала [74]. Распределение потенциала для ямы с плоским дном (см. рис. 2а) имеет вид

$$V(x,t) = \begin{cases} -V_0 = -\left(W_0 + E_F - E_1\right), & x \le t/2; \\ -\dfrac{e^2}{16\pi\varepsilon_0\left(|x| - t/2 + a\right)}, & x > t/2. \end{cases} \quad (20)$$

**Таблица 1.** Сравнение экспериментальных и вычисленных по (19) значений работы выхода для радиуса $a$ атома, ковалентного радиуса и радиуса иона +1e

| Материал | Постоянная решетки, нм | $a$, нм* | $W_0$, эВ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | эксперимент | расчет для трех значений $a$* |
| Барий | 0.5020 | 0.222; 0.198; 0.134 | 2.52–2.7 | 1.62; 1.82; 2.68 |
| Золото | 0.4704 | 0.144; 0.134; 0.137 | 5.1–5.47 | 2.5; 2.68; 2.62 |
| Вольфрам | 0.54 | 0.141; 0.170; 0.07 | 4.32–5.22 | 2.55; 2.11; 5.14 |
| Медь | 0.3615 | 0.128; 0.117; 0.077 | 4.36–5.10 | 2.81; 3.07; 4.67 |
| Молибден | 0.315 | 0.139; 0.130; 0.07 | 2.52–2.7 | 2.59; 2.78; 5.14 |
| Серебро | 0.4086 | 0.144; 0.134; 0.126 | 4.52–4.74 | 2.5; 2.69; 2.86 |

* $a$ – соответственно радиус атома, ковалентный радиус и радиус иона.

Здесь $E_F = E_n - E_1 > 0$, $E_1$ – уровень, отсчитываемый от дна ямы $-V_0$. Аналогичный результат для диэлектрической пластины толщиной $t$ с диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon$ дается бесконечным рядом изображений [73, 74]. При этом потенциал изменяется и внутри пластины, а работа выхода зависит от ее толщины. Измеряя работу выхода относительно центра пластины, можно оценивать ДП тонких пластин. Результат (20) получается заменой коэффициента отражения электрической индукции $k = (1-\tilde{\varepsilon})/(1+\tilde{\varepsilon})$ на $k = -1$ (что соответствует бесконечной ДП металла $\tilde{\varepsilon}$). Наличие наноразмерной диэлектрической пленки на поверхности металла значительно уменьшает ширину и высоту потенциального барьера [73, 74].

Для определения $V_0$ следует вспомнить, что реально необходимо решать трехмерное многочастичное уравнение Шредингера (УШ) с учетом спина в трехмерном квазипериодическом потенциале (см. рис. 2б). Но поскольку электроны внутренних оболочек атомов сильно связаны и почти не влияют на распределение электронов по энергиям в зоне проводимости, за дно ямы можно принять уровень, соответствующий потенциалу ионизации иона кристаллической решетки (см. рис. 2б) и решать одночастичное УШ. В принципе, решить УШ с таким потенциалом не представляет труда, но проще решать его для потенциальной ямы с плоским дном. Для определения глубины $V_0$ такой ямы следует учесть, что при ее сужении уровни энергии повышаются, а потенциалу ионизации атома $W_i = e^2/4\pi\varepsilon_0 a$ соответствует радиус иона $a$. Предположим, что кристаллическая решетка кубическая, а в зону проводимости каждый атом отдает один электрон. Объем иона $4\pi a^3/3$, а объем в плоской яме, приходящийся на один ион есть $d^3 - 4\pi a^3/3$. Для получения сдвига $\Delta E = W_i - V_0$ можно связать приходящийся на электрон объем с неопределенностью координат и импульса. Тогда $\Delta E = (\pi\hbar)^2 \Big/ \left(8m_e\left(d^3 - 4\pi a^3\right)^{2/3}\right)$.

Будем использовать другой способ. В точке $d/2$ на одинаковом расстоянии от ближайших атомов электрические силы на электрон не действуют. Для того чтобы оторвать электрон от иона из точки $r = a$ в точку $r = d/2$ (без учета сил от соседних ионов и электронного облака), следует затратить энергию $\Delta E = W_i - e^2/2\pi\varepsilon_0 d$. Поэтому можно определить дно так: $V_0 = W_i - \Delta E$. Реально квазипериодическая структура также влияет на сдвиг, который должен быть немного меньше. Для проволоки потенциал двумерной ямы приближенно записываем в виде $V(x,y,z) = (V(x,t)V(y,w))^{1/2}$.

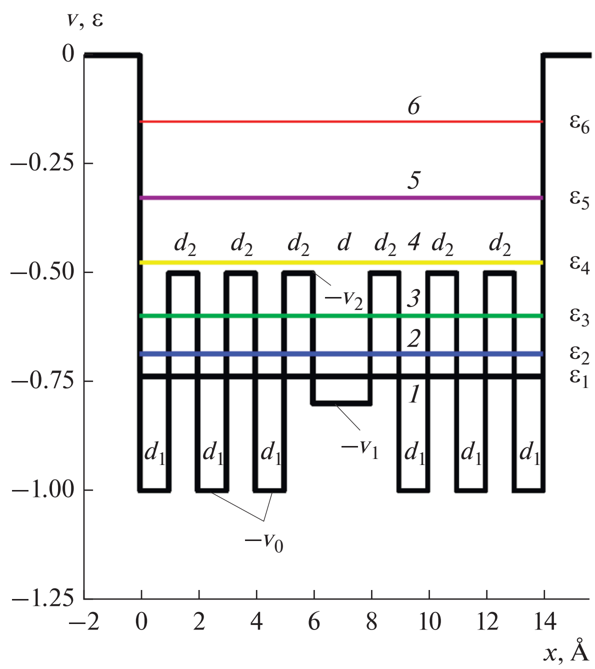



**Рис. 3.** Нормированные энергетические уровни (*1*–*6*) и конфигурация потенциала для потенциальной ямы с пятью периодами слева и справа от центральной области с дислокацией $2d$ при $d_1 = d_2 = d = 1$ Å, $-v_0 = 1$, $-v_1 = 0.8$, $-v_2 = 0.5$.

Для оценки числа мод проводимости в такой проволоке следует решать УШ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 + V(x,y,z)\right]\Psi(x,y,z) = E_n. \qquad (21)$$

В одномерном случае решить УШ со сложной конфигурацией потенциала весьма просто. На рис. 3 приведено такое решение для изображенной там же потенциальной ямы. Использованы нормированная энергия $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$ и потенциал $v(x) = 2mV(x)/\hbar^2$. В таких обозначениях согласно (21) энергия и потенциал измеряются в обратных квадратах длины. Перевод значений в электронвольты осуществляется множителем 27.61. Для решения УШ был использован метод матриц передачи размерности 2. Матрица связывает значения $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ на левой и правой границах ямы. Поскольку слева $\Psi(x) = \Psi(0)\exp(ik_0 x)$, а справа $\Psi(x) = \Psi(t)\exp(-ik_0(x-t))$, где $k_0 = -i\sqrt{2m(-E)}/\hbar^2$, при этом в яме $k = \sqrt{2m(E-V)}/\hbar^2$, то характеристическое уравнение сводится к нахождению корней определителя системы двух однородных линейных уравнений, что представляет собой весьма простую задачу для ямы произвольной конфигурации. Послед-

**Таблица 2.** Нормированные уровни энергии для конфигурации рис. 3 ($d_1 = d_1 = d = 1.0$ Å) в зависимости от нормированного потенциала $v$

| $\varepsilon_i$ | Уровни энергии при разных значениях $v$ | | |
|---|---|---|---|
| | −1 | −1.2 | −0.8 |
| $\varepsilon_6$ | −0.1521 | −0.1523 | −0.1518 |
| $\varepsilon_5$ | −0.3267 | −0.3433 | −0.3131 |
| $\varepsilon_4$ | −0.4763 | −0.4782 | −0.4761 |
| $\varepsilon_3$ | −0.5981 | −0.6150 | −0.5810 |
| $\varepsilon_2$ | −0.6850 | −0.6857 | −0.6843 |
| $\varepsilon_1$ | −0.7375 | −0.7595 | −0.7231 |

нюю можно аппроксимировать ступенчатым потенциалом или же получить интегральное уравнение (ИУ) для параметров рассеяния, если профиль ямы задан в виде аналитической функции.

В табл. 2 показано, как влияет вид дислокации на уровни энергии для рис. 3, а на рис. 4 дана зависимость числа уровней от ширины одномерной ямы рис. 2 с барьерами $\tilde{n}$ и резкими стенками $n_0$.

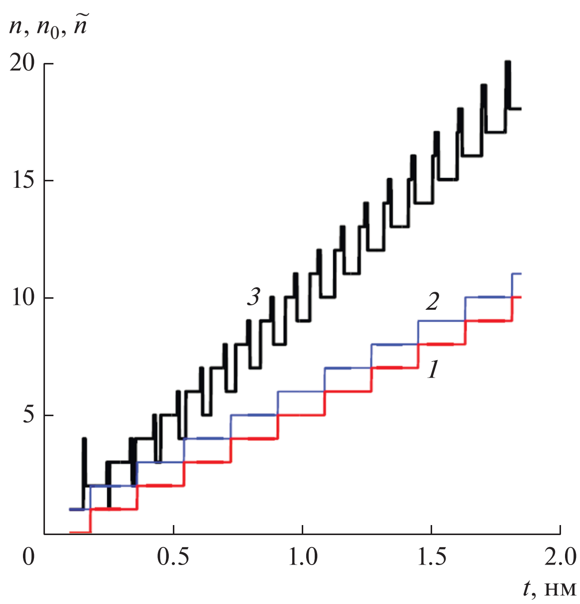



**Рис. 4.** Числа энергетических уровней $n$, $n_0$ и $\tilde{n}$ в двумерной яме с плоским дном в зависимости от ширины $t$; кривая *1* – расчет на основе числа волн де-Бройля, *2* – яма с резкими стенками $n_0$, *3* – определение $\tilde{n}$ из решения УШ для ямы с двумя барьерами (см. рис. 2); глубина ямы $V_0 = 11.46$ эВ, работа выхода $W_0 = 4.36$ эВ.

Там же приведены результаты оценки числа уровней на основе числа волн де-Бройля. Именно, в яме глубиной $V_0$ максимально возможный импульс есть $p = \sqrt{2m_eV_0}$, поэтому $n = 2t\sqrt{2m_eV_0}/h$. Отметим, что $n$ коррелирует с $n_0$, а именно $n_0 = n + 1$. Можно считать их идентичными, если число укладывающихся волн де-Бройля округлять в большую сторону. Конечно, экстремально малые модельные значения толщины не соответствуют реальной яме для металлической пленки, для которой получение толщин порядка 1 нм есть существенная проблема. Немонотонный характер зависимости $\tilde{n}(t)$ можно объяснить ступенчатой аппроксимацией барьера. Барьер аппроксимировался двенадцатью ступенями, при этом точность аппроксимации составила 7%, а ширина барьера равнялась $12a$. Сравнение с расчетом для шести ступеней не привело к существенным изменениям в числе и картине уровней. Дальнейшее увеличение разбиений нецелесообразно в силу ухудшения обусловленности алгоритма. Для ее улучшения элементы матрицы каждой ступени нормировались на максимальный экспоненциальный множитель в матричных элементах.

Результаты расчета показывают, что учет барьера приводит к существенному увеличению уровней, часть которых можно трактовать как поверхностные состояния. Рассмотренные модели ямы с плоским дном плохо соответствуют реальности, поскольку сильно поднимаются уровни, а последний уровень плохо соответствует уровню Ферми в реальном металле. Это особенно характерно для широкой ямы с плоским дном, для которой уровень Ферми близок к нулю. Более предпочтительна яма с квазипериодической структурой на дне (см. рис. 3). Определяя ее уровни, т.е. и работу выхода, можно построить конфигурацию барьеров. Расчет с таким потенциалом изменит уровни, что потребует пересчета барьеров. Более точная оценка числа уровней здесь возможна на основе последовательных приближений.

Двумерная яма и трехмерный ящик представляют собой несколько более сложные задачи, по решению которых реальнее оценить число мод проводимости. Выделим в проволоке некую длину $L$, кратную периоду. Трехмерное решение уравнения (21) будем искать в следующем виде:

$$\Psi(x,y,z) = K(x,t)K(y,w)\times \\ \times \sum_{k=1}^{N_x}\sum_{l=1}^{N_y}\sum_{m=0}^{N_z} A_{klm}\sin\left(\frac{k\pi x}{t'}-\frac{1}{2}\right)\times \\ \times\sin\left(\frac{l\pi y}{w'}-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{2imz}{L}\right), \tag{22}$$

где $K(x,t) = \left(\sqrt{2\pi}t\right)^{-1}\exp\left(-x^2/\left(2t^2\right)\right)$ – гауссов форм-фактор, а число учтенных функций существенно больше имеющихся уровней. Двумерное решение получается учетом только члена с $m = 0$. Параметры со штрихом означают увеличенные на две ширины барьера размеры ямы. Это приближение означает, что волновая функция обрезается и не выходит за эти пределы. Можно использовать и прямоугольный форм-фактор, но для штрихованных размеров. В этом случае базисные функции ортогональны, однако система не полная, поскольку исключены функции непрерывного спектра. Минимальная отрицательная энергия ищется как минимум квадратичного функционала [72]

$$E_n = \frac{\int\limits_{-t'}^{t'}\int\limits_{-w'}^{w'}\int\limits_{-t'}^{t'}\int\limits_{-w'}^{w'}\int\limits_{-L/2}^{L/2}\int\limits_{-L/2}^{L/2}\Psi(x',y',z')\left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_e}+V(x,y,z)\right]\Psi(x,y,z)\,dxdydzdx'\,dy'\,dz'}{\int\limits_{-t'}^{t'}\int\limits_{-w'}^{w'}\Psi^2(x,y,z)dxdydz}, \quad (23)$$

что приводит к нахождению корней равного нулю определителя большой размерности. Усложнение также связано с необходимостью численного интегрирования при вычислении матричных элементов. Отметим, что функционал (23) не требует нормировки волновых функций. Функционал показывает, что число уровней, следовательно, и число мод зависят от глубины ямы $V_0$, и эквивалентен уравнению $\left(\Psi,\hat{E}\Psi\right) = E_n(\Psi,\Psi)$, в котором скобки означают скалярное произведение согласно (23). Его минимум эквивалентен экстремуму функционала $\left(\Psi,\hat{E}\Psi\right)$, когда $E_n$ выступает в роли множителя Лагранжа условия $(\Psi,\Psi)=1$ [72]. Определитель имеет $N = N_xN_y(N_z+1)$ корней. При их нахождении следует брать только отрицательные значения. Более строгий подход требует ортогонализации, при этом использовать нормировку нецелесообразно из-за возникновения нелинейных уравнений. Если $\Psi_1$ – собственная функция для $E_1$, то $E_2$ ищется с помощью множителя Лагранжа как экстремум функционала $\Lambda = \left(\Psi,\hat{E}\Psi\right) - E_2(\Psi,\Psi) - \lambda_1(\Psi,\Psi_1)$, что приводит к системе $N+1$ уравнений с множителем Лагранжа $\lambda_1$. Здесь определитель есть полином по $E_2$ степени $N$. В качестве значения $E_2$ следует использовать минимальный отрицательный корень. Очевидно, $\Lambda_{ext} = 0$. Процесс можно продолжить, найдя все отрицательные значения энергии. Если использовать функцию $\Phi(x,y,z) = \Psi(x,y,z)\exp(-ip_zz)$, то трехмерное УШ сводится к определению дисперсии $E = E_n + p_z^2/2m_e$ для квантовой проволоки с периодическим потенциалом, при этом достаточно взять $L = d$. Поскольку работа выхода и конфигурация барьеров определяются атомной структурой (трехмерными потенциалами атомов) и несущественно отличаются для массивных проводников и тонких пленок, имеющих, по крайней мере, несколько атомарных слоев, то для строгого учета числа уровней и плотности состояний следует рассматривать решения трехмерных УШ (21) и функционал (23) с потенциалами, соответствующими реальным металлам и заменами $E_n \to E_n + p_z^2/(2m_e)$, $L \to d$. Такой подход с использованием строгого трехмерного периодического потенциала наиболее точный для определения мод проводимости квантовой проволоки.

## 4. ЧИСЛО МОД ДЛЯ ПРОВОДНИКОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Полагая яму прямоугольной и конечной, получаем для отрицательных энергий приближенное условие ($n = (k,l,m)$):

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_e}\left((k/t)^2 + (l/w)^2 + (2m/L)^2\right) \le E_{\mathrm{F}} < V_0. \quad (24)$$

Рассмотрев потенциальную яму вида $t = w = L/2$, получаем $k^2 + l^2 + m^2 < 2m_eE_{\mathrm{F}}\,t^2/\hbar^2\,\pi^2$. Число решений этого неравенства приближенно дает число уровней. Решений не будет, если $V_0 < 2\hbar^2\,\pi^2/\left(2m_et^2\right)$, что указывает на приближенность подхода. Уравнение Шредингера для функционала (23) с конечным потенциалом формально соответствует теории возмущений, а функционал по крайней мере имеет один отрицательный минимум. Переход от бесконечного потенциала к конечному нельзя рассматривать как малое возмущение. Поэтому максимальное значение $E_n$ не следует ассоциировать с $-E_{\mathrm{F}}$. Однако оценивать нижний уровень как $E_1 \approx -V_0 + (\hbar\pi)^2/\left(2m_et^2\right)$ можно. Теперь следует определить число мод в модели ЛДЛ. Обычно используется простой изотропный закон дисперсии $E(|\vec{p}|)$, например квадратичный или линейный. Энергия Ферми задается плотностью свободных носителей $n$ в бесконечных структурах, а не определяется. Число мод вдоль $L$ вычисляется как число укладывающихся де-бройлевских длин волн $h/p_z$. Считается, что уровни распределены равномерно с промежутком $\Delta p_z = h/L$. Поэтому $N(p_z) = 2Lp_z/h$, что характерно для 1-$d$ проводников. Для 2-$d$ проводников $|\vec{p}|^2 = p^2 = p_x^2 + p_z^2$, и число мод получается делением площади круга на площадь одной моды: $N(p) = \pi p^2/\left((L/h)(t/h)\right)$. Для 3-$d$ проводника делится объем в импульсном пространстве на объем, приходящийся на одну моду:

$$N(p) = g(4\pi/3)\,p^3/(L/h)(t/h)/(w/h). \qquad (25)$$

Поскольку до этого спин не учитывался, здесь введен фактор вырождения по спину $g = 2$. Формула (25) не учитывает глубину потенциальной ямы и хорошо работает только для достаточно широких и глубоких ям, когда состояний много (точнее говоря, для вырожденного газа невзаимодействующих фермионов). Из нее для максимального импульса $p_{\mathrm{F}}$, как обычно, получаем $E_{\mathrm{F}} = \left(\hbar^2/2m_e\right)\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}$. Для нанопроводов равномерность распределения уровней нарушается. Нужно решать задачу (23) желательно со сложным потенциалом с неплоским дном. Хотя функция (25) ступенчато зависит от размеров, при малых размерах она может плохо коррелировать с реальным числом уровней (рис. 4). Энергия (24) отсчитывается от дна бесконечно глубокой ямы и плохо определяет уровни вблизи края ямы конечной глубины. Если $-E_n$ находится из (23), то функцию $N(p)$ следует определять как число уровней энергии, удовлетворяющих условию $E_n \le p^2/(2m_e)$.

Рассмотрим медную нанопроволоку с размерами $t = w = 4d$, $L = 20d$, $d = 0.3615$ нм. Берем $W_0 = 4.53$, $E_{\mathrm{F}} = 7.04$ эВ. Потенциал ионизации иона меди $W_i = 20.29$ эВ. Глубину ямы с учетом смещения на $(\hbar\pi)^2/\left(2m_e t^2\right)$ уровня $E_1$ определяем как $V_0 = 11.83$ эВ. Согласно принципу равномерного распределения состояний в фазовом пространстве получаем $E_1 = -11.57$, тогда как минимизация функционала (23) по девяти базисным функциям (три по каждой из координат) дает $E_1 = -11.48$ эВ, а по 25 функциям $E_1 = -11.51$ эВ. Соответственно изменяются уровень Ферми и число мод. Число уровней определяет эффективную плазменную частоту $\omega_p$, которая используется в ДП металла $\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_L - \omega_p^2/\left(\omega^2 - i\omega\omega_c\right)$ для анализа волн в нанопроводах [1–10] и колебаний локализованных плазмонов. Здесь $\varepsilon_L$ соответствует вкладу в ДП от кристаллической решетки и межзонных переходов. Для квантоворазмерных структур эффективная $\omega_p$ зависит от размеров и может существенно снизится.

Уравнение Шредингера (21) для мод в проводнике конечного поперечного сечения может быть записано по аналогии с уравнением для мод соответствующего диэлектрического волновода (ДВ) в следующем виде:

$$\left[\nabla^2 + k^2\right]\Psi(x,y,z) = 0, \qquad (26)$$

где $k^2 = k_0^2\varepsilon(x,y) = 2m_e\left[E - V(x,y)\right]/\hbar^2$, $k_0 = p/\hbar = \sqrt{2m_e E}/\hbar$. В ДВ $\varepsilon(x,y)$ – неоднородная по поперечному сечению ДП, где $\varepsilon(x,y) = 1 - V(x,y)/E$. Случаю $V \equiv 0$ соответствует свободное движение частицы $\Psi(x,y,z) \sim \exp\left(-i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right)$, $|\vec{k}| = k_0$. Потенциалу $V > 0$ соответствует потенциальный барьер, причем для энергий, меньших $0 < E < V(x,y)$, будет $\varepsilon(x,y) < 0$. Если $-V(x,y) < E < 0$, то $0 < \varepsilon(x,y) < 1$. Электродинамический аналог для барьера – туннелирование волн сквозь плазменную структуру с отрицательной ДП. При $V < 0$ получаем потенциальную яму. Для энергий $V(x,y) < E < 0$ будет $\varepsilon(x,y) > 1$. Здесь электродинамический аналог – распространение собственных мод в ДВ. Отличие электродинамической задачи в том, что она векторная, и в том, что она может быть несамосопряженной (для вытекающих мод, а также при наличии диссипации, т.е. для комплексной ДП $\varepsilon$). Соответственно, надо искать решения для $E_z$ и $H_z$ в случае разделения мод, или более сложные задачи с тензорной ФГ для гибридных мод [77, 78]. Решение задачи (26) ищем в виде $\Psi(x,y,z) = \exp(-ik_z z)\Phi(x,y)$, что приводит к УШ

$$\left[\nabla_{x,y}^2 + k_\tau^2\right]\Phi(x,y) = k_\tau^2\left(1 - \varepsilon(x,y)\right)\Phi(x,y), \quad (27)$$

где $k_\tau = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ – искомое поперечное волновое число. Решение (27) можно записать через функцию Грина (ФГ)

$$\Phi(x,y) = \\ = k_\tau^2 \int_S G(x,y|x',y')\left(\varepsilon(x',y') - 1\right)\Phi(x',y')\,dx'\,dy'. \quad (28)$$

Здесь ФГ выражается через функцию Ганкеля

$$G(x,y|x',y') = -(i/4)\,H_0^{(2)}\left(k_\tau\left|\vec{r}_\tau - \vec{r}_\tau'\right|\right),$$

а интегрирование ведется по области $S$ поперечного сечения, определяемой из условия $V(x,y) < 0$. На самом деле это не решение задачи, а ИУ для $\Phi(x,y)$, поскольку волновая функция входит в правую часть под интеграл. Интегральное уравнение (28) удобно тем, что может быть сведено к конечной области, если взять яму конечных размеров. Ему соответствует квадратичный функционал

$$\Lambda(\Phi) = \int_\Omega \Phi^2(x,y)\,dxdy - k_\tau^2 \int_\Omega\int_\Omega \Phi(x,y) G(x,y|x',y')(\varepsilon(x',y')-1) \times \\ \times \Phi(x',y')\,dx'dy'dxdy, \tag{29}$$

а также и функционал

$$k_\tau^2 = \frac{\int_\Omega \Phi^2(x,y)\,dxdy}{\int_\Omega\int_\Omega \Phi(x,y) G(x,y|x',y')(\varepsilon(x',y')-1)\Phi(x',y')\,dx'dy'dxdy}. \tag{30}$$

Последний позволяет итерационно определять собственную энергию, но совместно с итерационным решением ИУ (28) для собственных функций [77], поскольку параметр $k_\tau$ входит в правую часть (30) нелинейно. При этом можно вводить множители Лагранжа с соответствующими условиями ортогональности собственных функций. Решение задачи о прямоугольном ДВ на основе такого подхода было выполнено в работах [77, 78]. По своей форме ИУ (28) сходно с уравнением метода возмущений. Однако брать волновые функции $\exp(-ik_x x - ik_y y)$ для невозмущенной задачи о свободной частице с $V = 0$ невыгодно. Удобно брать волновые функции типа (22), определенные в конечной области. Тогда метод последовательных приближений для ИУ (28) определяет волновую функцию уже вне ямы, т.е. позволяет определить вероятность обнаружения частицы во всей области, хотя интегрирование проводится только по области $S$ (для трехмерной задачи — в $\Omega$). Такой подход более предпочтителен, чем на основе (23). Для ДВ он позволяет определять комплексные моды [77]. Для определения действительных значений энергии удобнее искать экстремум (29) $\delta\Lambda(\Phi) = 0$.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОВОЛОЧНОГО ВОЛНОВОДА

На рис. 5 представлены результаты вычисления дисперсии моды $H_{11}$ волновода в виде изолированного металлического бруса прямоугольной формы $(w = t)$. Впервые возможность распространения волны вдоль одиночного металлического провода рассмотрел А. Зоммерфельд [79, 80]. Это известная втекающая медленная поверхностная волна Зоммерфельда—Ценнека. При очень высоких оптических частотах, когда металл по свойствам становится близок к диэлектрику, она переходит в основную $HE_{11}$-волну ДВ (см. [77, 80]). Для круглого волновода и проволочного фотонного кристалла волна рассчитана в [10]. Соответствующая волна Ценнека над проводящей полуплоскостью быстрая. Простейший метод расчета в тонком проводнике состоит в возбуждении пространства осевым током с помощью ФГ и наложение импедансных условий на поверхности. Будем придерживаться более строгого метгода объемного ИУ [10, 77], заключающегося в том, что возбуждение происходит за счет тока поляризации

$$\vec{J}_p(\vec{r}) = i\omega\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}(\omega)-1)\vec{E}(\vec{r}).$$

В нашем случае в силу представления $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}_\tau)\exp(-ik_z z)$ получается двумерное объемное ИУ, т.е. уравнение на поперечном сечении $S$:

$$\vec{E}(\vec{r}_\tau) = (\tilde{\varepsilon}(\omega)-1)\frac{(\nabla_\tau\nabla_\tau\cdot + k_\tau^2)}{4i} \times \\ \times \iint_S H_0^{(2)}(k_\tau|\vec{r}_\tau - \vec{r}_\tau'|)\vec{E}(\vec{r}_\tau')\,dS'. \tag{31}$$

Пусть $N(w,t)$ — число уровней энергии в соответствующей потенциальной яме для двумерного УШ. Оно соответствует случаю, когда длина про-

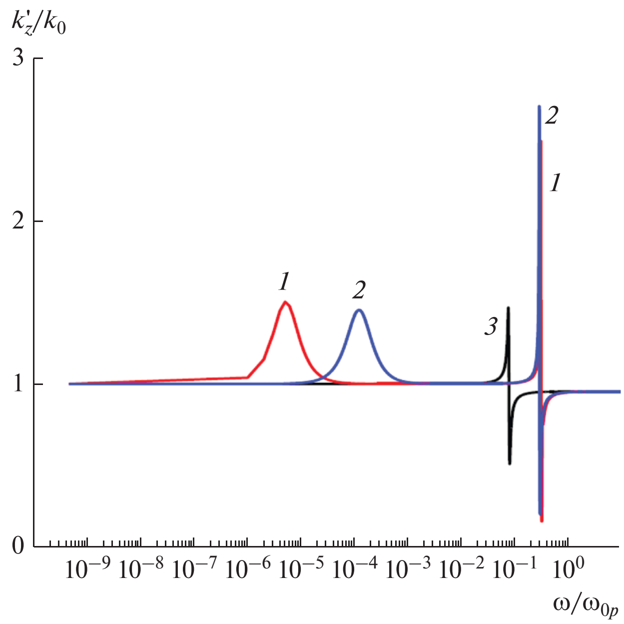



**Рис. 5.** Замедление $n_z' = k_z'/k_0$ (штрих означает реальную часть) для квадратного медного провода для $t = 500$ (*1*), 100 (*2*) и 5 нм (*3*).

водника бесконечно большая, и от соответствующей ей координаты зависимости нет. Определение $N(w,t)$ требует решения задачи квантовой механики, но приближенно можно взять $N(t,t) \approx E_F m_e t^2 / (\hbar^2 \pi^2)$. В яме конечной длины величина $N_z = 2Lp_z/h$ есть число состояний на длине $L$ в области импульсов $(0, p_z)$. Уровень $E_k$ расщепляется на $n_k$ подуровней в силу зависимости $E_k = E_{k-1} + p_{zn_k}^2/(2m_e) \le E_F$. Здесь $E_0 = -V_0$. Поэтому $n_k = 2L\sqrt{2m_e(E_k - E_{k-1})}/h$. В широкой яме уровни близки, и поэтому можно считать $E_F \approx E_N$, поскольку $E_N = E_{N-1} + p_{zn_N}^2/(2m_e) \le E_F$. Число электронов проводимости в единице объема проводника есть

$$n = \sum_{k=1}^{N} n_k = \frac{4}{twh}\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2m_e(E_k - E_{k-1})}. \qquad (32)$$

Поэтому в $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ следует брать плазменную частоту $\omega_p = \sqrt{ne^2/(\varepsilon_0 m_e)}$ со значением $n$ из (32). Для квантовой точки с малым размером $L$ следует рассматривать трехмерную яму с числом уровней $N(t,w,L)$ и определять $n = 2N(t,w,L)$. В случае нескольких атомов в структуре квантовой точки более точный подход может быть основан на более точном определении уровней, например методом сильной связи [71, 76].

Уравнение (31) является гиперсингулярным ИУ. Для его решения образуем билинейный функционал

$$\Lambda\left(\tilde{\tilde{\vec{E}}}, \vec{E}\right) = 4i\iint_S \tilde{\tilde{\vec{E}}}^*(\vec{r}_\tau)\,\vec{E}(\vec{r}_\tau)\,dS - (\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1)\times$$
$$\times \iint_S \tilde{\tilde{\vec{E}}}^*(\vec{r}_\tau)\left(\nabla_\tau\nabla_\tau \cdot + k_\tau^2\right)\iint_S H_0^{(2)}\left(k_\tau\left|\vec{r}_\tau - \vec{r}_\tau^{\,\prime}\right|\right)\vec{E}\left(\vec{r}_\tau^{\,\prime}\right)dS'. \qquad (33)$$

Методы понижения порядка сингулярности для ИУ типа (31) получены в ряде работ и приведены в [77]. В качестве $\tilde{\tilde{\vec{E}}}(\vec{r}_\tau)$ возьмем разложение по модам прямоугольного волновода, касательные компоненты которых обращаются в нуль на контуре поперечного сечения $S$. Перенесем действие оператора $\nabla_\tau$ на $\tilde{\tilde{\vec{E}}}$, что уменьшает сингулярность ядра, при этом контурные интегралы не возникают. Поскольку внутри провода $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}_\tau)\exp(-ik_z z) = \nabla_\tau \cdot \vec{E}_\tau(\vec{r}_\tau) - ik_z E_z(\vec{r}_\tau) = 0$ и $\nabla_\tau^2 \vec{E}_\tau(\vec{r}_\tau) + k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \vec{E}_\tau(\vec{r}_\tau) = 0$, $k_{\tau\tilde{\varepsilon}} = \sqrt{k_0^2\tilde{\varepsilon} - k_z^2}$, где $k_{\tau\tilde{\varepsilon}}$ – поперечное волновое число в металле, то снижается число коэффициентов в представлении поля. Функции, по которым будем разлагать поле, представим так [77]:

$$E_z(x,y) = \begin{Bmatrix} C_1\cos(\alpha x)\cos(\beta y) \\ C_2\sin(\alpha x)\sin(\beta y) \end{Bmatrix},$$

$$E_x(x,y) = \begin{Bmatrix} A_1\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ A_2\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \end{Bmatrix},$$

$$E_y(x,y) = \begin{Bmatrix} B_1\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ B_2\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \end{Bmatrix},$$

$$E_z(x,y) = \begin{Bmatrix} C_3\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ C_4\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \end{Bmatrix},$$

$$E_x(x,y) = \begin{Bmatrix} A_3\sin(\alpha x)\sin(\beta y) \\ A_4\cos(\alpha x)\cos(\beta y) \end{Bmatrix},$$

$$E_y(x,y) = \begin{Bmatrix} B_3\cos(\alpha x)\cos(\beta y) \\ B_4\sin(\alpha x)\sin(\beta y) \end{Bmatrix},$$

где $A_1 = iC_1k_z\alpha/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, $A_2 = -iC_2k_z\alpha/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, $B_1 = iC_1k_z\beta/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, $B_2 = -iC_2k_z\beta/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, $A_3 = iC_3k_z\alpha/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, $A_4 = -iC_4k_z\alpha/\left(k_\tau^2\tilde{\varepsilon}\right)$, $B_3 = -iC_3k_z\beta/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, $B_4 = iC_4k_z\beta/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2$, при этом $\alpha^2 + \beta^2 = k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 = k_0^2\tilde{\varepsilon} - k_z^2$. Для собственных мод ДВ без диссипации $k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 > 0$ и $k_\tau^2 < 0$. Такая мода медленная: $k_z > k_0$, а величины $\alpha$ и $\beta$ действительные. При понижении частоты мода может стать несобственной быстрой вытекающей. Для металлического провода все поперечные волновые числа, включая $\alpha$ и $\beta$, комплексные. Для квадратного провода $\alpha = \beta = \sqrt{\left(k_0^2\tilde{\varepsilon} - k_z^2\right)/2}$. На самом деле моды волновода гибридные, т.е. следует учесть электрическое поле, возбуждаемое компонентой $H_z$. Ее запишем в двух видах:

$$H_z(x,y) = \begin{Bmatrix} D_1\sin(\alpha x)\sin(\beta y) \\ D_2\cos(\alpha x)\cos(\beta y) \end{Bmatrix},$$
$$H_z(x,y) = \begin{Bmatrix} D_3\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ D_4\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \end{Bmatrix}.$$

Электрическое поле, соответствующее $H_z$, представляется так:

$$E_x(x,y) = \begin{Bmatrix} -ik_0Z_0\beta D_1\sin(\alpha x)\cos(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \\ ik_0Z_0\beta D_2\cos(\alpha x)\sin(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \end{Bmatrix},$$
$$E_y(x,y) = \begin{Bmatrix} ik_0Z_0\alpha D_1\cos(\alpha x)\sin(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \\ -ik_0Z_0\alpha D_2\sin(\alpha x)\sin(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \end{Bmatrix},$$

$$E_x(x,y) = \begin{Bmatrix} ik_0Z_0\beta D_3\sin(\alpha x)\sin(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \\ -ik_0Z_0\beta D_4\cos(\alpha x)\cos(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \end{Bmatrix},$$
$$E_y(x,y) = \begin{Bmatrix} ik_0Z_0\alpha D_3\cos(\alpha x)\cos(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \\ -ik_0Z_0\alpha D_4\sin(\alpha x)\sin(\beta y)/k_{\tau\tilde{\varepsilon}}^2 \end{Bmatrix}.$$

Здесь $Z_0 = 120\pi$ Ом. В силу симметрии все моды удобно классифицировать как четные-нечетные относительно $x$ и $y$ порознь для компонент $E_z$ или $H_z$ [77]. Однако традиционная классификация рассматривает гибридные $EH$- и $HE$-моды. Основная мода ДВ без низкочастотной отсечки – это $HE_{11}$-мода, где индексы соответствуют числу вариаций поля вдоль осей: $\alpha \approx m_x\pi/t$, $\beta \approx m_y\pi/w$. В ДВ $m_x$ и $m_y$ не целые и приближаются к таковым значениям только при высоких частотах [77]. В металлическом проводе эти параметры не только не целые, а даже комплексные, поэтому волна экспоненциально затухает к его центру. Это так, если глубина проникновения $\delta$ значительно меньше размеров, при этом существенен поверхностный импеданс. Если $\delta$ намного больше поперечных размеров, то поле внутри провода почти не изменяется. Этот случай соответствует тому, что имеются только основные волны, различающиеся поляризацией. Пусть $w \gg t$, тогда $|\alpha| \gg |\beta|$. Такая $HE$-мода описывается коэффициентами $C_3$, $D_3$. Для нее $|E_x| \ll |E_y|$ и $|B_3| < |D_3|$, т.е. мода в основном определяется через компоненту $H_z(x, y) = D_3 \sin(\alpha x)\cos(\beta y)$, а влиянием $E_z$ можно пренебречь. При стремлении частоты к нулю все продольные компоненты стремятся к нулю, и мода становится близка по структуре к плоской волне, идущей со скоростью света. Если $w = t$, имеем четырехкратное поляризационное вырождение. Поперечное волновое число в вакууме удобно определять из функционала совместно с решением ИУ (31):

$$k_\tau^2 = \frac{4i\iint\limits_S \tilde{\tilde{\vec{E}}}{}^*(\vec{r}_\tau)\,\vec{E}(\vec{r}_\tau)\,dS - (\tilde{\varepsilon}(\omega)-1)\iint\limits_S\iint\limits_S \nabla_\tau\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}{}^*(\vec{r}_\tau)\left[\nabla_\tau H_0^{(2)}\left(k_\tau\left|\vec{r}_\tau-\vec{r}_\tau^{\,'}\right|\right)\cdot\vec{E}\left(\vec{r}_\tau^{\,'}\right)\right]dS'\,dS}{(\tilde{\varepsilon}(\omega)-1)\iint\limits_S\iint\limits_S \tilde{\tilde{\vec{E}}}{}^*(\vec{r}_\tau)\,H_0^{(2)}\left(k_\tau\left|\vec{r}_\tau-\vec{r}_\tau^{\,'}\right|\right)\vec{E}\left(\vec{r}_\tau^{\,'}\right)dS'}. \quad (34)$$

Функционал (34) упрощается, если $\tilde{\tilde{\vec{E}}}{}^*(\vec{r}_\tau)$ – поперечные функции $H$-мод полого прямоугольного волновода. В этом случае $\nabla_\tau\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}{}^*(\vec{r}_\tau) = 0$. Тогда для определения моды $HE_{11}$ достаточно двух мод. Для моды квадратного провода $\alpha = \beta = \sqrt{\left(k_\tau^2 + k_0^2(\tilde{\varepsilon}-1)\right)/2}$, поэтому (34) становится дисперсионным уравнением. Его решение приведено на рис. 5. Для толстого провода берем плазменную частоту меди $\omega_{0p} = 2.14\times 10^{16}$. Для медного провода с $w = t = 100$ нм $\omega_p = 2.0\times 10^{16}$ ГГц, что практически совпадает с $\omega_{0p}$. Для провода с $w = t = 5$ нм оценка дает $N(t,t) \approx 250$, $n \approx 2\left(N+\sqrt{N/2}\right)/t^3 = 4.2\times 10^{27}$ м$^3$, $\omega_p = 5.35\times 10^{15}$ Гц.

В обоих случаях взято $\omega_c = 7.0\times 10^{13}$, $\varepsilon_L = 10$. На сверхнизких частотах глубина проникновения $\delta$ много больше размеров проволоки, которая является слабо направляющей структурой. Волна идет практически со скоростью света, но чуть медленнее и немного втекает (малая часть энергии идет в проводе, а большая часть энергии распространяется в вакууме). Медленность обусловлена конечностью поперечного сечения. Волна $HE_{11}$ вырождается в волну $H_{11}$, для которой приближенно можно написать дисперсионное уравнение $\alpha k_\tau^2 \times \left(\alpha^2 - (\pi/t)^2\right)(\tilde{\varepsilon}(\omega)-1)I(k_\tau) = \pi\sin(\alpha t)$, где обозначено

$$I(k_\tau) = \int\limits_0^\infty \frac{X(k_\tau,\chi)\,Y(\gamma,\chi)}{\left[\chi^2-(\pi/t)^2\right]\left[\alpha^2-\chi^2\right]\gamma}\,d\chi,$$

$$\gamma = \sqrt{\chi^2 - k_\tau^2}, \quad \alpha = \sqrt{\left(k_\tau^2 + k_0^2(\tilde{\varepsilon}-1)\right)/2},$$

$$X(k_\tau,\chi) = \cos(t\chi/2)\times$$
$$\times\left[\chi\cos(\alpha t/2)\sin(\chi t) - \alpha\sin(\alpha t/2)\cos(\chi t)\right],$$

$$Y(k_\tau,\chi) = \frac{4\sin(\alpha t/2)}{\gamma\alpha} - \frac{-4\exp(-t\gamma/2)}{\gamma\alpha(\alpha^2+\gamma^2)}\times$$
$$\times\left[\alpha^2\sin(\alpha t/2)\,\mathrm{ch}(t\gamma/2) + \gamma\alpha\cos(\alpha t/2)\,\mathrm{sh}(t\gamma/2)\right].$$

Для провода в низкочастотном пределе $EH$-волны также трансформируются в $E$-волны, которые также переходят в плоскую волну. С ростом частоты уменьшается глубина проникновения $\delta$ и замедление растет, достигая максимума при $\delta \sim t$ (если размер не слишком мал). Далее существенен импедансный характер структуры и уменьшение скин-слоя, приводящие к уменьшению втекания и снижению замедления с частотой. Но в области плазмонного резонанса $\tilde{\omega}_p = \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L + 1}$ замедление опять растет, возникает медленный поверхностный плазмон, переходящий в области выше плазменной частоты в моду ДВ. Отсутствие низкочастотных отсечек по сравнению с идеальным ДВ связано с комплексной ДП металла.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели ЛДЛ получены простые соотношения для баллистического транспорта в проводниках малых, но конечных размеров, позволяющие использовать импедансный подход на относительно низких частотах с учетом поперечных размеров. Для высокочастотного электродинамического моделирования наноразмерных проволочных и пленочных металлических структур следует учитывать зависимость числа мод проводимости, плотности состояний и плазменной частоты от размеров, при этом поверхностная проводимость становится зависимой от размеров структуры.

Изменение плазменной частоты может существенно повлиять на анализ плазмонов в наноструктурах. Физически объяснить изменение плазменной частоты и проводимости можно путем усиления влияния связанных состояний на поверхности и изменением условий связи в атомах в структуре малых размеров. Строгая оценка указанных эффектов должна быть основана на строгом решении задач квантовой механики. При размерах $t = w > 18$ нм проводимость медного нанопровода выше, чем многослойной структуры аналогичной толщины из графеновых нанолент или углеродных нанотрубок [53], поэтому использование металлических структур весьма перспективно.

Предложены простые виды конфигурации потенциалов в проводниках и соответствующие функционалы для УШ, позволяющие приближенно и точно оценивать число энергетических уровней и мод проводимости. Для квантоворазмерных наноструктур простые приближенные оценки могут существенно расходится с точными значениями.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0004).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belov P.A., Marques R., Maslovski S.I. et al.* // Phys. Rev. B. 2003. V. 63. № 11. P. 113103.
2. *Nefedov I.S., Viitanen A.J., Tretyakov S.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 4. P. 046612.
3. *Nefedov I.S., Viitanen A.J.* // Metamaterials Handbook: Theory and Phenomena of Metamaterials / Ed. F. Gapolino. Boca Raton; CRC Press, 2009. P. 1.
4. *Nefedov I.S.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. № 15. P. 155423.
5. *Nefedov I., Tretyakov S.* // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 113410.
6. *Nefedov I.S., Simovski C.R.* // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 195459.
7. *Nefedov I.S., Tretyakov S.A.* // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. 2011. V. 9. P. 374.
8. *Liberal I., Nefedov I.S., Ederra I. et al.* // J. Appl. Phys. 2011. V. 110. P. 104902.
9. *Silveirinha M.G., Fernandes C.A.* // IEEE Trans. 2005. V. MTT-53. V. 4. P. 1418.
10. *Давидович М.В., Нефедов И.С.* // ЖЭТФ. 2014. V. 145. № 5. P. 771.
11. *Давидович М.В., Стефюк Ю.В., Шиловский П.А.* // ЖТФ. 2012. V. 82. V. 3. P. 7.
12. *Давидович М.В., Шиловский П.А.* // ЖТФ. 2012. V. 82. № 12. P. 79.
13. *Guo Y., Newman W., Cortes C.L., Jacob Z.* // Adv. Optoelectron. 2012. V. 452502. P. 1.
14. *Shekhar P., Atkinson J., Jacob Z.* // Nano Convergence. 2014. V. 1. P. 1.
15. *Vinogradov A.P., Ignatov A.I., Merzlikin A.M. et al.* // Opt. Express. 2011. V. 19. № 7. P. 6699.
16. *Zapata-Rodríguez C.J., Miret J.J., Vuković S., Belić M.R.* // Opt. Express. 2013. V. 21. № 16. P. 19113.
17. *Nefedov I.S., Valagiannopoulos C.A., Melnikov L.* // J. Optics. 2013. V. 15. P. 114003.
18. *Mikhailov S.A., Ziegler K.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. № 1. P. 016803.
19. *Lemme M.C., Echtermeyer T.J., Baus M., Kurz H.* // IEEE Electron. Devic. Lett. 2007. V. 28. № 4. P. 282.
20. *Chen Z., Lin Yu-M., Rooks M.J., Avouris P.* // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2007. V. 40. № 2. P. 213.
21. *Свинцов Д.А., Вьюрков В.В., Лукичёв В.Ф. и др.* // ФТП. 2013. V. 47. № 2. P. 244.
22. *Landauer R.* // IBM J. Research and Development. 1957. V. 1. № 3. P. 223.
23. *Landauer R.* // Philos. Mag. 1970. V. 21. P. 863.
24. *Landauer R.* // J. Mathem. Phys. 1996. V. 37. № 10. P. 5259.
25. *Datta S.* Electronic Transport in Mesoscopic Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
26. *Datta S.* Quantum Transport: Atom to Transistor. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
27. *Datta S.* Lessons from Nanoelectronics: A New Perspective on Transport. Hackensack: World Sci. Publ. Company, 2012.
28. *Lundstrom M., Jeong C.* Near-Equilibrium Transport: Fundamentals and Applications. Hackensack: World Sci. Publ. Company, 2013.
29. *Kruglyak Yu.A.* // Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies. 2013. V. 11. P. 519.
30. *Kruglyak Yu.* // J. Nanosci. 2014. Article ID 725420. P. 1.
31. *Lovat G., Hanson G.W., Araneo R., Burghignoli P.* // Phys. Rev. B. 2013. V. 87. № 11. P. 115429.
32. *Fuchs K.* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1938. V. 34. P. 100.
33. *Sondheimer E.H.* // Adv. Phys. 1952. V. 1. № 1. P. 1.
34. *Mayadas A.F., Shatzkes M.* // Phys. Rev. B. 1970. V. 1. № 4. P. 1382.

35. *Tellier C.R., Tosser A.J.* Size Effects in Thin Films. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ. Com., 1982.
36. *Warkusz F.* // Prog. Surf. Sci. 1980. V. 10. № 3. P. 287.
37. *Namba Y.* // Jpn. J. Appl. Phys. 1970. V. 9. P. 1326.
38. *Munoz R.C., Finger R., Arenas C. et al.* // Phys. Rev. B. 2002. V. 66. № 20. P. 205401.
39. *Feibelman P.J.* // Phys. Rev. B. 1983. V. 27. № 4. P. 1991.
40. *Boettger J.C., Trickey S.B.* // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. № 3. P. 1363.
41. *Kurbatsky V.P., Pogosov V.V.* // Vacuum. 2004. V. 74. P. 185.
42. *Сандомирский В.Б.* // РЭ. 1967. Т. 12. № 1. С. 158.
43. *Лифшиц И.М., Косевич А.М.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. 19. № 4. С. 395.
44. *Огрин Ю.Ф., Луцкий В.Н., Елинсон М.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. № 3. С. 114.
45. *Tanachutiwat S., Wang W.* // Third Int. ICST Conf. NanoNet 2008. Boston, 2008. P. 49.
46. *Munoz R., Arenas C., Kremer G., Moraga L.* // J. Phys. Condens. Matter. 2003. V. 15. № 3. P. 177.
47. *Hoffman H., Fisher G.* // Thin Solid Films. 1976. V. 36. P. 25.
48. *Fisher G., Hoffman H.* // Solid State Commun. 1980. V. 35. № 10. P. 793.
49. *Fisher G., Hoffman H.* // Z. Phys. B: Condens. Matter. 1980. V. 39. № 4. P. 287.
50. *Stasyuk Z.V.* // J. Phys. Studies. 1999. V. 3. № 1. P. 102.
51. *Бигун Р.И., Стасюк З.В., Барабаш М.Ю., Куницкий Ю.А.* // Химия, физика и технология поверхности. 2010. Т. 1. № 2. С. 128.
52. *Kruglyak Yu.A.* // Sci. J. “ScienceRise”. 2015. V. 2/2. № 7. P. 77.
53. *Ragheb T., Massoud Y.* // Proc. IEEE/ACM Int. Conf. on Computer-Aided Design (ICCAD 2008). 2008. P. 593.
54. *Hanson G.W.* // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. P. 064302.
55. *Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., Lakhtakia L. et al.* // Phys. Rev. B. 1999. V. 60. № 24. P. 17136.
56. *Falkovsky L.A., Pershoguba S.S.* // Phys. Rev. B. 2007. V. 76. № 15. P. 153410.
57. *Tešanović Z., Jarić M., Maekawa S.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. № 21. C. 2760.
58. *Tesanovic Z.* // J. Phys. C: Solid State Phys. 1987. V. 20. № 6. P. 829.
59. *Trivedi N., Ashcroft N.W.* // Phys. Rev. B. 1988. V. 38. № 17. P. 12298.
60. *Fishman G., Calecki D.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. № 11. P. 1302.
61. *Sheng L., Xing D.Y., Wang Z.D.* // Phys. Rev. B. 1995. V. 51. № 11. P. 7325.
62. *Munoz R., Vidal G., Kremer G. et al.* // J. Phys. Condens. Matter. 1999. V. 11. № 26. P. 299.
63. *Makarov N.M., Moroz A.V., Yampolskii V.A.* // Phys. Rev. B. 1995. V. 52. № 8. P. 6087.
64. *Makarov N.M., Tarasov Yu.V.* // Phys. Rev. B. 2001. V. 64. № 23. P. 235306.
65. *Izrailev F.M., Makarov N.M., Rendon M.* // Phys. Rev. B. 2005. V. 72. № 4. P. 041403.
66. *Meyerovich A.E., Ponamarev I.V.* // Phys. Rev. B. 2002. V. 65. P. 155413.
67. *Meyerovich A.E., Stepaniants S.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 316.
68. *Meyerovich A.E., Cheng Y.* // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. № 8. P. 085404.
69. *Renteria J.D., Nika D.L., Balandin A.A.* // Appl. Sci. 2014. V. 4. P. 525.
70. *Иванченко Г.С., Невзорова Ю.В.* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. 2011. Т. 2. № 15. С. 133.
71. *Nakada K., Fujita M.* // Phys. Rev. B. 1996. V. 54. № 24. P. 17954.
72. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматлит, 1963.
73. *Давидович М.В., Яфаров Р.К., Доронин Д.М.* // Труды 20-й Междунар. Крымской конф. СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии (CriMiKo’2010). Севастополь, 2010. С. 733.
74. *Davidovich M.V., Bushuev N.A., Yafarov R.K.* // 2014 Tenth Int. Vacuum Electron Sources Conf. and Second Int. Conf. on Emission Electronics, Saint-Petersburg, 2014. P. 67.
75. *Тамм Е.И., Блохинцев Д.И.* // ЖЭТФ. 1993. V. 3. № 2. С. 77.
76. *Tran N.T.T., Lin S.Y., Lin M.F., Glukhova O.E.* // J. Phys. Chem. 2015. V. 119. № 19. C. 10623.
77. *Давидович М.В.* Итерационные методы решения задач электродинамики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014.
78. *Davidovich M.V.* // Proc. Int. Conf. Transparent Optical Networks. Kielce, 1999. P. 181.
79. *Sommerfeld A.* // Annal. Phys. 1899. V. 303. № 2. P. 233.
80. *Давидович М.В.* Втекающие и вытекающие несобственные моды — анализ диссипативных дисперсионных уравнений и волна Ценнека. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014.

*РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 698–702*

## НАНОЭЛЕКТРОНИКА

*УДК 537.6/.8,537.624*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ СВОЙСТВ И ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ТОНКИХ ПЛЕНОК CoPt, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОННОГО ИСПАРЕНИЯ



**М. В. Степушкин[a, *], В. Е. Сизов[a], А. В. Здоровейщев[b], И. Л. Калентьева[b], Е. Н. Миргородская[a], А. Г. Темирязев[a], М. П. Темирязева[a]**

[a]*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского,1, Фрязино, Московской обл., 141190 Российская Федерация*

[b]*Научно-исследовательский физико-технический институт Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, просп. Гагарина, 23, корп.3, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация*

**E-mail: cokpoweheu@yandex.ru*

Поступила в редакцию 18.12.2020 г.
После доработки 29.01.2021 г.
Принята к публикации 14.02.2021 г.

Экспериментально исследованы пленки CoPt, полученные методом электронно-лучевого испарения с нанесением десяти бислоев Co и Pt общей толщиной 8 нм. Измерения эффекта Холла и продольного магнетосопротивления выполнены при изменении температуры от 8 до 300 К. При комнатной температуре методами магнитно-силовой микроскопии получены изображения доменных структур, соответствующих различным точкам кривой перемагничивания. Продемонстрирована возможность исследования эффекта Холла на искусственно созданных доменных структурах, сформированных локальным магнитным полем зонда атомно-силового микроскопа.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070111

## ВВЕДЕНИЕ

Пленочные структуры, в состав которых входят ферромагнетик и тяжелый металл, привлекают внимание исследователей, поскольку являются кандидатами для создания следующего поколения элементов памяти. Наличие перпендикулярной магнитной анизотропии и взаимодействия Дзялошинского–Мория определяет возможность существования в них таких нетривиальных магнитных структур, как скирмионы [1]. Считается, что на основе скирмионов можно будет создать энергетически выгодную память, передвигая их под действием тока [2]. В то же время с практической точки зрения важным является и вопрос об электрическом детектировании скирмионов [3]. Одним из путей его решения является детектирование на основе эффекта Холла. В этой связи появляются и фундаментальные вопросы о трактовке наблюдаемых явлений [4, 5]. Так авторы [6, 7] отмечают существенный вклад топологического эффекта Холла, а в работе [8] делается вывод о том, что основным является механизм на основе аномального эффекта Холла.

В подавляющем большинстве экспериментов, выполненных на пленках ферромагнетик–тяжелый металл, использовались структуры, полученные методом магнетронного напыления. В данной работе исследованы пленки, полученные альтернативным методом электронно-лучевого испарения, который имеет ряд особенностей, определяющих новые возможности использования пленок. Метод электронно-лучевого испарения является более низкоэнергетическим, что позволяет наносить пленки, содержащие такой диффузионно-активный материал как Co, даже на поверхность светоизлучающих гетеронаноструктур с активной областью, расположенной на небольшом (несколько нанометров) удалении от ферромагнитного слоя [9]. Большой угол Фарадея (порядка $1.5 \times 10^{6}$°/см) делает пленки, полученные таким методом, привлекательными для использования в приборах на основе магнитооптических эффектов. Пленки обладают одноосной анизотропией и имеют поле коэрцитивности порядка нескольких сот эрстед [10, 11]. Это, с одной стороны, обеспечивает значительную остаточную намагниченность, а с другой – дает возможность модифицировать доменную структуру относительно небольшим полем магнитного зонда атомно-силового микроскопа, переводя пленку в насыщенное состояние или создавая в ней скирмионы, стабильные при отсутствии внешнего поля [12]. Магнитотранспортные свойства таких пленок мало исследованы, поэтому представляется актуальной задача исследования эффекта Холла, а возможность при этом контролировать доменную структуру с помощью магнитно-силовой микроскопии (МСМ) открывает новые пути изучения физических процессов в таких системах.

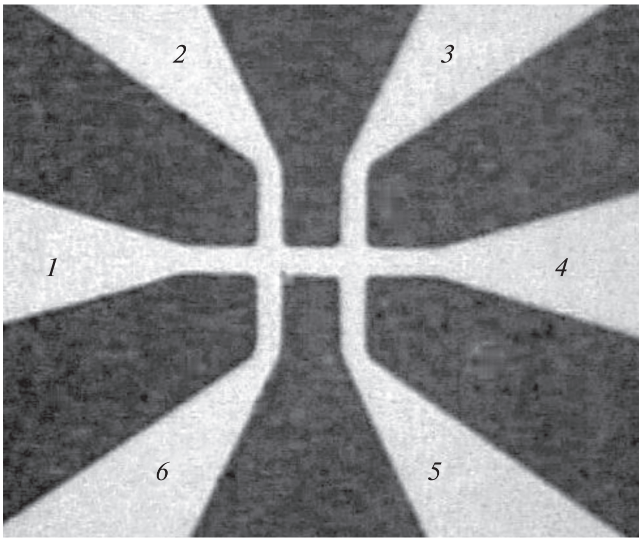



**Рис. 1.** Фотография экспериментальной структуры: ток протекает через токовые контакты *1* и *4*, а напряжение измеряется между двумя из потенциальных контактов *2*, *3*, *5* и *6* (ширина канала 5 мкм, расстояние между холловскими крестами 15 мкм).

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Исследуемые пленки были изготовлены в высоком вакууме методом электронно-лучевого испарения попеременно двух мишеней из высокочистых Co и Pt. Были получены структуры толщиной 8 нм, состоящие из десяти бислоев Co и Pt (толщина 0.3 и 0.5 нм соответственно). Для исследования магнитотранспортных свойств в таких пленках методом плазменного травления была сформирована проводящая полоска с четырьмя потенциальными отводами, образующими два холловских креста (рис. 1). Такая структура позволяет помимо измерения эффекта Холла определять продольное сопротивление образца и сравнивать характеристики материала в двух областях с различными доменными структурами, например, исходной на одном кресте и модифицированной зондом атомно-силового микроскопа на другом.

Измерения проводили при температурах от 8 K до комнатной по обычной схеме с синхронным детектированием на переменном сигнале частотой 133 Гц. Через образец пропускали ток от 45 нА до 2 мкА, что при ширине канала 5 мкм и толщине пленки 8 нм соответствовало плотности тока от $1.13 \times 10^6$ до $5 \times 10^7$ А/м$^2$. Согласно измерениям эффекта Холла в магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости пленки, насыщение образца происходило при значениях внешнего поля 1...2 кЭ. При дальнейшем увеличении поля (вплоть до 10 кЭ) величина эффекта Холла оставалась постоянной.

Из холловских измерений (рис. 2, пунктир) видно, что данные пленки обладают высокой остаточной намагниченностью, практически совпадающей с намагниченностью насыщения, а также сравнительно большой величиной эффекта

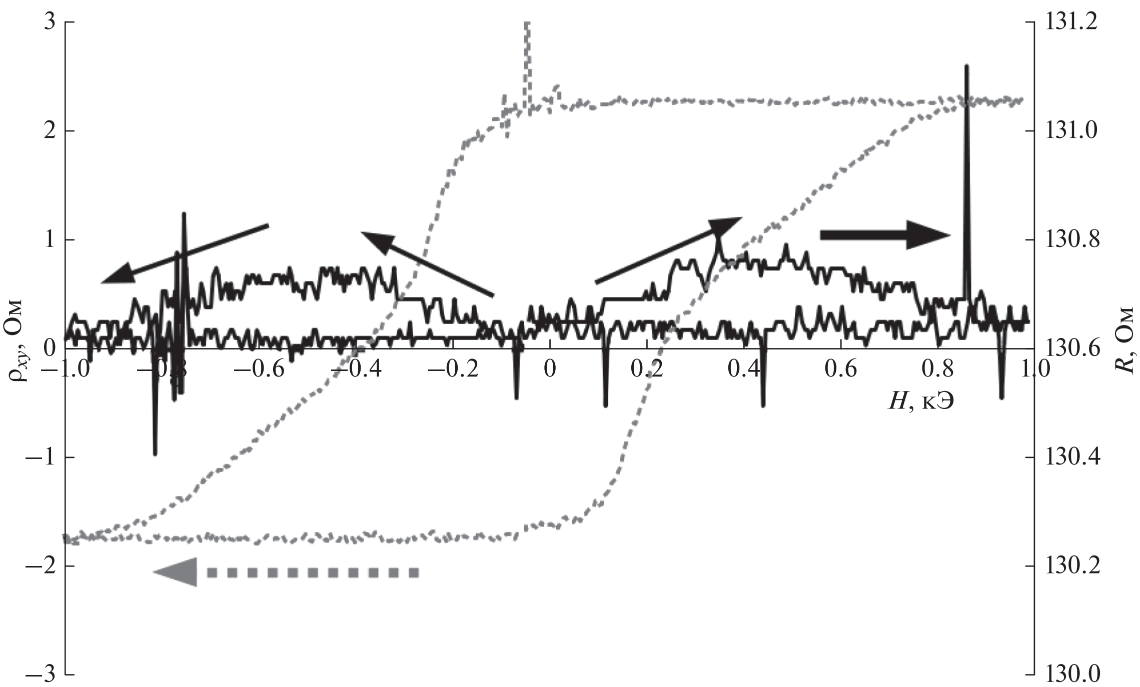



**Рис. 2.** Экспериментальные зависимости эффекта Холла $\rho_{xy}$ (сплошная линия) и продольного сопротивления *R* (пунктирная) от магнитного поля при температуре 200 K.

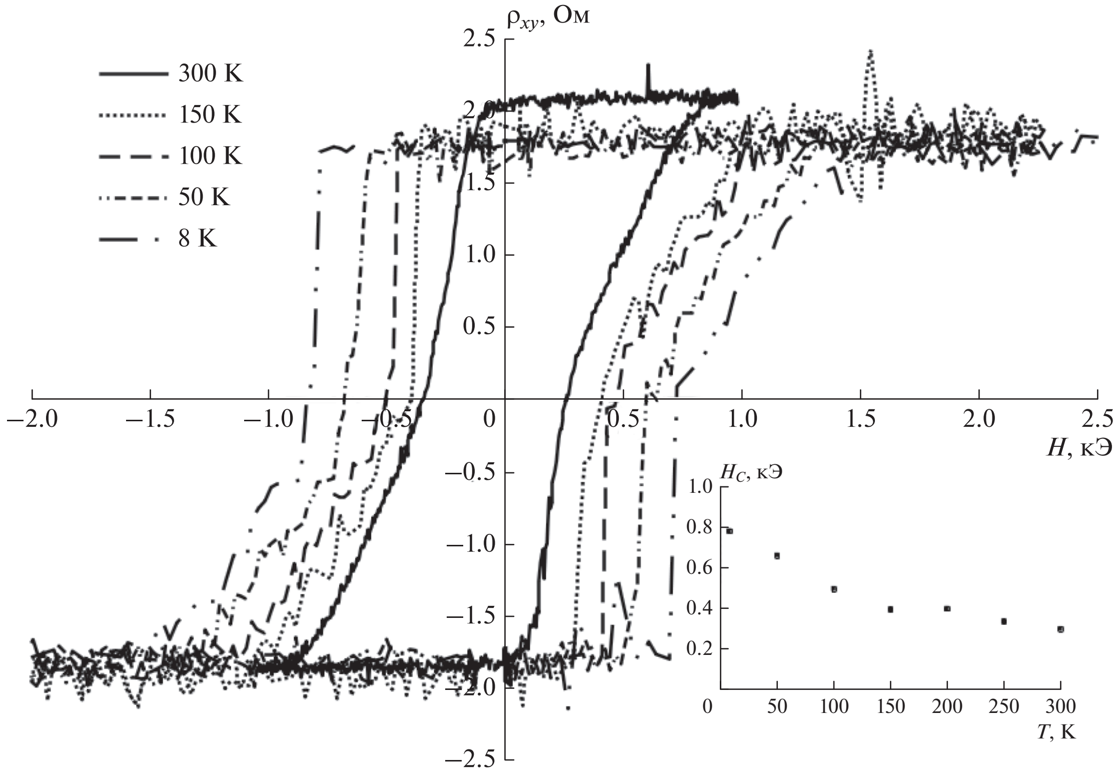



**Рис. 3.** Зависимости эффекта Холла от магнитного поля при различных температурах: 8, 50, 100, 150 и 300 K; на вставке – зависимость коэрцитивной силы от температуры.

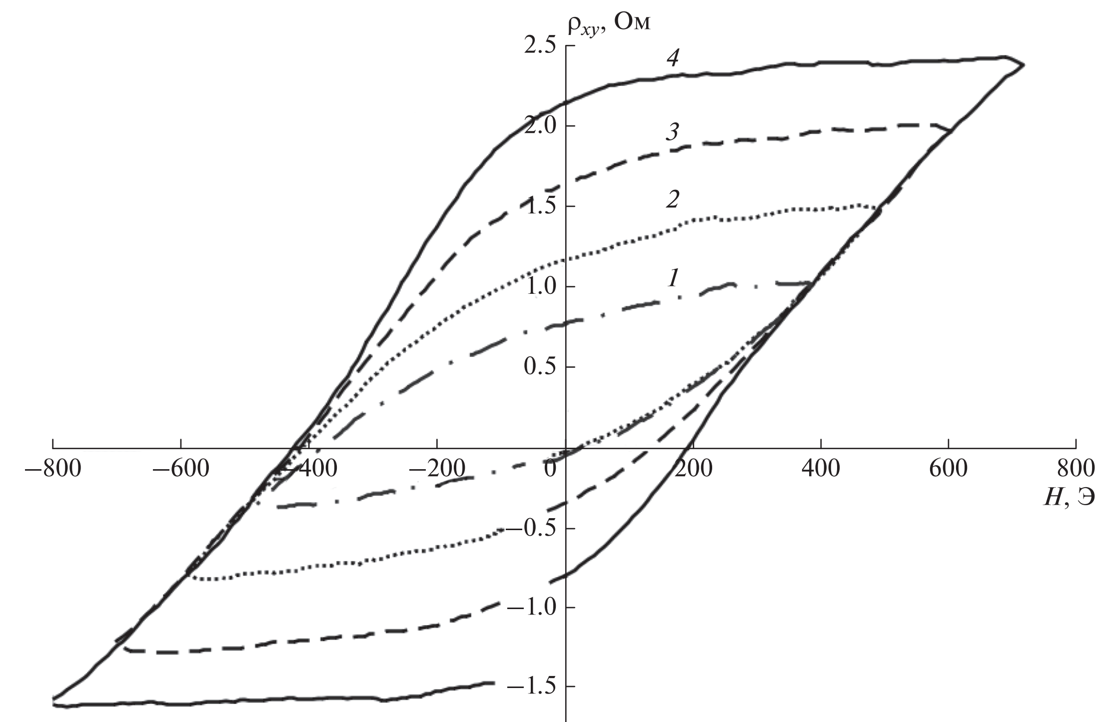



**Рис. 4.** Петли гистерезиса при последовательном увеличении максимального внешнего поля от 430 (*1*) до 540 (*2*), 650 (*3*) и 760 Э (*4*) (каждое следующее измерение начинали сразу после предыдущего с нулевого внешнего поля).

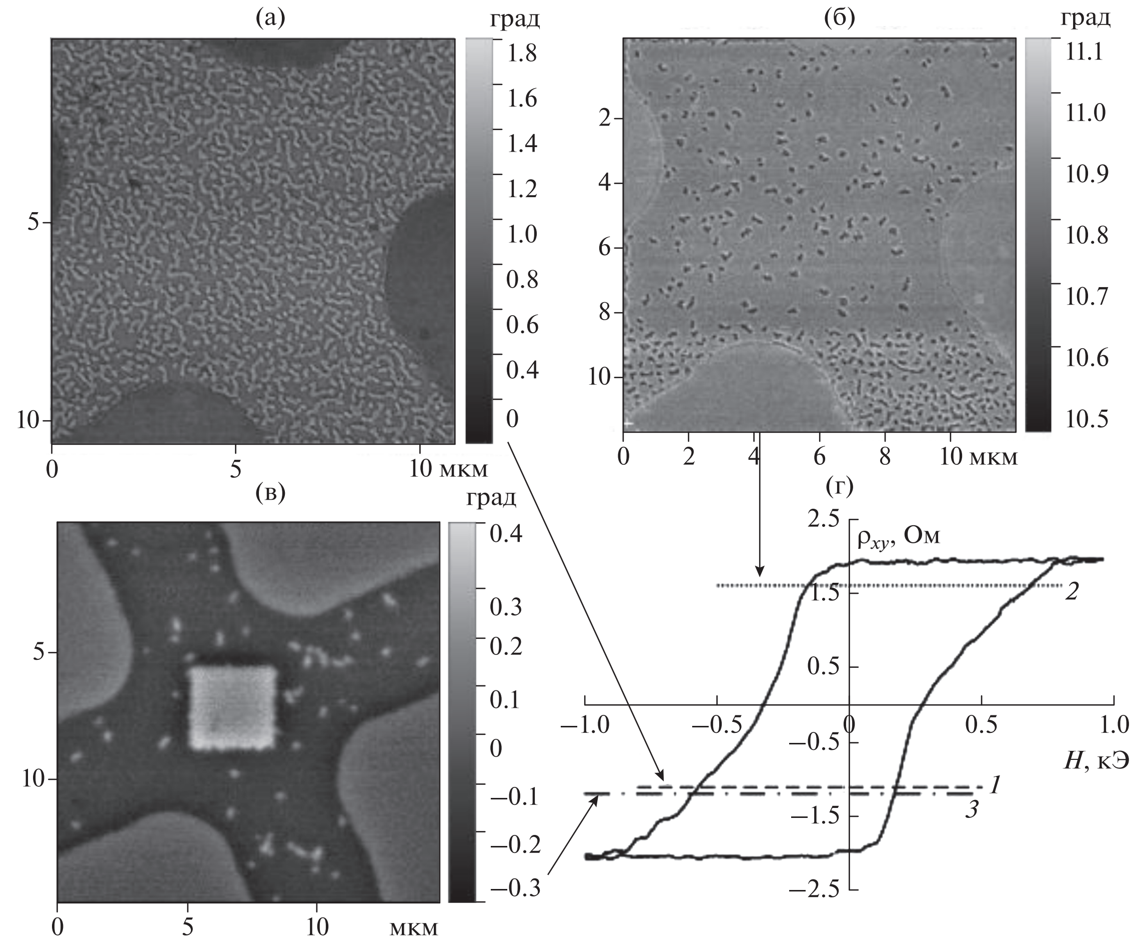



**Рис. 5.** Магнитная структура образца непосредственно в области холловского креста, полученная с помощью атомно-силового микроскопа: а – магнитная структура частично намагниченного образца, б, в – примеры структур, сформированных при помощи атомно-силового микроскопа, г – холловское сопротивление на графике петли гистерезиса для структур, представленных на рис. а–в (кривые *1*, *2*, *3* соответственно).

Холла. Так, на рис. 2 в областях насыщения величина сопротивления Холла $R$ (отношение холловского напряжения к току) составляла около 2 Ом, откуда по формуле $\rho = Rd$ ($d$ – толщина образца) можно вычислить удельное сопротивление Холла $\rho$, равное 1600 нОм см. Отметим, что в работах [6–8] аналогичная величина лежала в пределах 140...360 нОм см. Исследования на нескольких образцах показали высокую воспроизводимость результатов, а увеличение тока через образец до 1.9 мкА (что соответствует плотности тока $5 \times 10^7$ А/м$^2$) не приводило к изменению характеристик.

В диапазоне температур 8...300 K были измерены зависимости продольного сопротивления (см. рис. 1, отношение напряжения между потенциальными отводами *2*, *3* к току, протекающему через контакты *1*, *4* структуры) от магнитного поля. Одна из таких зависимостей, измеренная при температуре 200 K, приведена на рис. 2 (сплошная линия). Видно, что продольное магнетосопротивление меняется только при перемагничивании образца и достигает максимума, когда пленка находится в ненасыщенном (многодоменном) состоянии. В состоянии насыщения его величина остается постоянной и не зависит от направления намагниченности. При этом само относительное изменение магнетосопротивления при перемагничивании невелико и составляет порядка 0.1% или 0.1 ± 0.05 Ом во всей температурной области. При охлаждении с 300 до 10 K продольное сопротивление образца снизилось от 136.9 до 121.9 Ом.

На рис. 3 представлены зависимости эффекта Холла от магнитного поля при различных температурах. При снижении температуры от 300 до 8 K коэрцитивная сила увеличивается почти в три раза, с 250 до 700 Э, при этом величина эффекта Холла меняется незначительно (от 2.05 до 1.75 Ом). Подобная температурная зависимость коэрцитивности может быть обусловлена уменьшением энергии внешнего поля, необходимой для перемагничивания, при тепловом возбуждении [13].

Были проведены эксперименты по неполному перемагничиванию образца – снятию частичных петель гистерезиса (см. рис. 4). Они показали, что, остановив процесс перемагничивания при определенном значении поля и сбросив поле до нуля, мы можем зафиксировать теперь уже при нулевом поле самые разные значения величины эффекта Холла и, следовательно, состояния намагниченности. Это позволяет визуализировать различные доменные структуры методами МСМ, перенеся образец в атомно-силовой микроскоп (АСМ). Использовался АСМ SmartSPM (AIST-NT), в котором не имеется опции создания магнитного поля, перпендикулярного плоскости образца. Тем не менее, как было показано в предыдущих работах [9, 12, 14], изменять доменную структуру можно под воздействием магнитного поля зонда АСМ. В зависимости от предыстории образца и режима передвижения зонда можно как полностью перемагнитить пленку на определенном участке, так и сформировать скирмионы. Возможность измерения эффекта Холла одновременно с МСМ измерениями могла бы позволить исследовать влияние доменных границ и скирмионов на транспортные свойства в таких структурах. В качестве первого шага мы провели последовательные МСМ и холловские измерения, позволяющие оценить, как изменение магнитного состояния под воздействием магнитного поля зонда влияет на значение величины эффекта Холла. Относительно высокая коэрцитивность исследуемых пленок позволяет проводить такие эксперименты. На рис. 5 показаны три разных МСМ изображения, снятых в одной и той же области измерительной ячейки (площадь, представленная на рис. 5в, несколько больше, чем на рис. 5а, 5б). Величина эффекта Холла, для этих магнитных структур составила соответственно −1.1, +1.6 и −1.2 Ом. Для наглядности эти значения представлены горизонтальными линиями на фоне кривой перемагничивания рис. 5г. Доменная структура, представленная на рис. 5а, образовалась при частичном намагничивании пленки в установке для измерений эффекта Холла. На рис. 5б показана магнитная структура, которая сформировалась после частичного перемагничивания зондом пленки, в которой уже имелась доменная структура. На рис. 5в светлый квадратный домен – это область перемагниченная зондом после того, как под воздействием внешнего поля пленка была переведена в состояние, близкое к насыщению. Как видно, совершенно разные магнитные состояния могут быть сформированы магнитным зондом и совершенно разные доменные структуры могут иметь близкие значения величины эффекта Холла. Это открывает широкие возможности для исследования влияния различных магнитных состояний на эффект Холла. В то же время видно, что в дальнейшем для реализации этих возможностей было бы целесообразно проводить эксперименты на измерительной структуре меньшей площади, где вклад от отдельных элементов доменной структуры с характерными размерами порядка 100 нм можно определить с большей точностью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многослойные пленки CoPt, выращенные методом электронно-лучевого испарения, обладают большой величиной эффекта Холла, что упрощает детектирование магнитных доменов электрическими методами и делает данный материал перспективным для изготовления приборов спинтроники, магнитооптики и устройств хранения информации. Возможность искусственно формировать в таких пленках различные доменные структуры и соотносить их с транспортными свойствами может представлять интерес при исследовании особенностей протекания тока в структурах со сложной конфигурацией магнитных доменов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания (проект № 0030-2119-0001) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-29-03049-мк, 18-29-27018-мк, 18-29-27020-мк) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (проекты № МК-445.2020.2, МД-1708.2019.2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rößler U., Bogdanov A., Pfleiderer C.* // Nature. 2006. V. 442. № 7104. P. 797.
2. *Fert A., Cros V., Sampaio J.* // Nature Nanotechnology. 2013. V. 8. № 3. P. 152.
3. *Wang S., Tang J., Wang W. et al.* // J. Low Temp. Phys. 2019. V. 197. № 3–4. P. 321.
4. *Gerber A.* // Phys. Rev. B. 2018. V. 98. № 21. P. 214440.
5. *Zeissler K., Finizio S., Shahbazi K. et al.* // Nature Nanotechnology. 2018. V. 13. № 12. P. 1161.
6. *Soumyanarayanan A., Raju M., Oyarce A.G. et al.* // Nature Materials. 2017. V. 16. № 9. P. 898.
7. *Raju M., Yagil A., Soumyanarayanan A. et al.* // Nature Commun. 2019. V. 10. № 3. P. 696.
8. *Maccariello D., Legrand W., Reyren N. et al.* // Nature Nanotechnology. 2018. V. 13. № 3. P. 233.
9. *Здоровейщев А.В., Дорохин М.В., Вихрова О.В. и др.* // ФТТ. 2016. Т. 58. № 11. С. 2186.
10. *Здоровейщев А.В., Вихрова О.В., Демина П.Б. и др.* // ФТТ. 2019. Т. 61. № 9. С. 1628.
11. *Zdoroveyshchev A.V, Vikhrova O.V., Demina, P.B. et al.* // Int. J. Nanosci. 2019. V. 18. № 3–4. P. 1940019.
12. *Темирязев А.Г., Темирязева М.П., Здоровейщев А.В. и др.* // ФТТ. 2018. Т. 60. № 11. С. 2158.
13. *Mourdikoudis S., Simeonidis K., Gloystein K. et al.* // J. Nanosci. Nanotechnology. 2010. V. 10. № 9. P. 6078.
14. *Zhang S., Zhang J., Zhang Q. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2018. V. 112. № 13. P. 132405.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 703–716

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

# ГЕОМЕТРИЗОВАННЫЕ МОДЕЛИ СПЛОШНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО И ПЛОСКОСИММЕТРИЧНОГО РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ



**В. А. Сыровой***

*ВЭИ – филиал "РФЯЦ – ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина",*
*ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация*
**E-mail: red@cplire.ru*

Поступила в редакцию 30.10.2020 г.
После доработки 30.10.2020 г.
Принята к публикации 15.01.2021 г.

Сформулированы геометризованные модели релятивистского электронного потока при отсутствии внешнего магнитного поля, которые позволяют синтезировать непараксиальный пучок с катода заданной формы и с заданным распределением плотности тока в ρ-режиме эмиссии и основаны на интегрировании двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070123

## ВВЕДЕНИЕ

Геометризованная теория интенсивных электронных пучков наиболее полно изложена в монографиях [1, 2] и более поздних работах [3–7]. В отличие от традиционных подходов искомыми являются не только конфигурация и параметры потока, но и заранее не известная система координат $x^i$ ($i = 1, 2, 3$), связанная с геометрией течения: траектории частиц совпадают с координатными линиями $x^1$ либо поверхности $x^2 = \text{const}$ могут быть трубками тока. В общем случае произвольной ориентации магнитного поля система $x^i$ является неортогональной, если пучок стартует с термокатода при эмиссии в ρ- или $T$-режиме. Метрический тензор $g_{ik}$ системы $x^i$ удовлетворяет тождествам Ляме, выражающим факт эвклидовости пространства классической физики.

Для системы уравнений, объединяющей уравнения пучка и условия эвклидовости пространства, в двумерном случае удалось выполнить декомпозицию: сформулировать соотношение на трубке тока, имеющее вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно элемента $g_{22}$ метрического тензора с производными по $x^1$, в которое поперечная координата $x^2$ входит как параметр, и построить эволюционную систему уравнений первого порядка, выражающих производные по $x^2$ от геометрических и физических параметров потока через распределения необходимых функций на базовой трубке тока. Это представление позволяет сконструировать алгоритмы расчета непараксиальных пучков методом сшивания узких полос или построением высших приближений теории, представляющих собой фрагмент тэйлоровского разложения по поперечной координате $x^2$.

При этом возможно рассмотрение задач с произвольной ориентацией магнитного поля на катоде, которые в принципе не поддаются анализу в рамках параксиального формализма.

В работе [8] проведено тестирование двумерных геометризованных моделей на полном наборе известных точных решений уравнений пучка с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, продемонстрировавшее преимущество уже первого приближения по сравнению с классическим параксиальным подходом. Расходящийся плоский электростатический поток со спирального катода и спиральными траекториями использован для тестирования в работе [9]. Расчет траекторий [9] на основе первого приближения геометризованной теории иллюстрирует рис. 1, где параметр $q$ определяет ширину пучка.

Видно, что приемлемой точности можно добиться для потока с полушириной $q = 0.3$, для которого параксиальный подход является слишком грубым приближением. Ошибка вычисления потенциала составляет при этом 3.4%. Видимые на рис. 1 дефекты решения (смещение траектории и особенно координат катода – первая точка) могут быть существенно уменьшены за счет использования второго приближения как во всем поле течения, так и в прикатодной области: корректировка координат катода уменьшает ошибку их вычисления с 10% на рис. 1 до 0.8%. Использование второ-

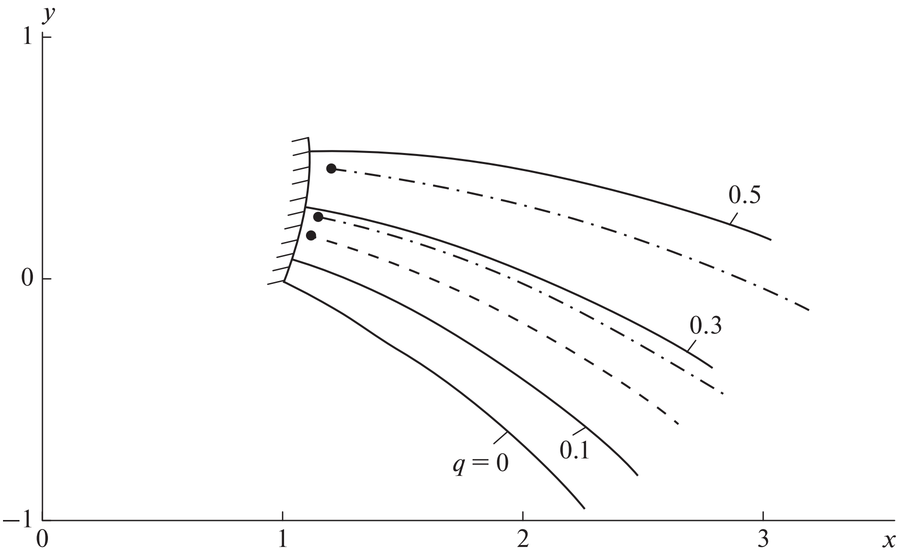



**Рис. 1.** Траектории $q$ = const расходящегося спирального потока со спирального катода [9]: сплошные линии – точное решение, штриховая – параксиальная теория, штрих-пунктирные – первое приближение геометризованной теории.

го приближения во всей области течения снижает уровень ошибки вычисления траекторий вдвое. В результате с ошибкой порядка 5% удается рассчитать существенно непараксиальную область течения с перепадом плотности тока на катоде в 3.3 раза.

Относительная консервативность траекторий, иллюстрируемая рисунком, по сравнению с прочими параметрами потока, послужила основанием для построения комбинированных моделей, в которых расчет траекторий в первом приближении сочетается с более подробным описанием прикатодной зоны. В работе [10] подобная модель построена для гиротрона при эмиссии в $\rho$-режиме.

Цель работы – формулировка второго приближения теории в случае сплошных осесимметричных и плоскосимметричных релятивистских электронных пучков без внешнего магнитного поля и, следовательно, при отсутствии закрутки или сносовой скорости. Модель включает получение уравнения второго приближения и начальных данных к нему с учетом сингулярности на катоде, присущей $\rho$-режиму эмиссии; построение выражений для второй и четвертой производных плотности тока эмиссии на оси пучка и второй производной кривизны катода. Последняя соответствует четвертым производным функций, определяющих его форму. Перечисленные параметры позволяют построить адекватную модель прикатодной области.

## 1. УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА

*Невырожденная базовая трубка тока.* Формулировку задачи о сплошном осесимметричном или плоскосимметричном потоке необходимо начинать с уравнений трубчатого пучка при отсутствии внешнего магнитного поля и при произвольной продольной координате $x^1$ на базовой поверхности $x^2 = \text{const}$. Ось сплошного пучка $x^2 = 0$ является вырожденной трубкой тока, на которой система $x^i$ локально ортогональна: $g_{12} = 0$ при $g_{12,2} \neq 0$.

В двумерном случае метрический тензор $g_{ik}$ системы $x^i$ имеет следующие элементы:

$$g_{11} \equiv h_1^2, \quad g_{22} \equiv h_2^2, \quad g_{12} = h_1 h_2 \cos\theta_{12}, \quad g_{33} \equiv h_3^2, \quad (1)$$

где $\theta_{12}$ – угол между осями $x^1$, $x^2$; $h_3 = R$ в осесимметричном и $h_3 = 1$ в плоском случаях.

Соотношение на трубке тока определено выражением

$$\frac{(1+\tilde{\varphi})u^2}{\sin\theta_{12}}\left\{\frac{1}{h_1}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} - h_2\frac{\theta_{12,1}^2}{h_1^2} - \cos\theta_{12}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1}\right\} + \frac{1}{h_1^2}\left(h_2\sin\theta_{12}\right)_{,1}\varphi_{,1} =$$
$$= h_2\sin\theta_{12}\left[-2(1+\tilde{\varphi})k_1^2u^2 + (1+\tilde{\varphi})k_1k_2u^2 + k_2\operatorname{tg}\theta\frac{1}{h_1}\varphi_{,1} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1}\varphi_{,1}\right)_{,1} - 2k_1uN - \frac{N^2-\tilde{E}_\nu^2}{1+\tilde{\varphi}}\right] + \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3(1+\tilde{\varphi})^2u}; \quad (2)$$
$$E_\nu = (1+\tilde{\varphi})k_1u^2 + uN, \quad 1+\varphi = 1\Big/\sqrt{1-u^2}.$$

Здесь $\varphi$, $u$ – потенциал электрического поля и скорость; $N$, $E_\nu$ – азимутальная компонента напряженности собственного магнитного поля и нормальное электрическое поле на трубке тока; $k_1$, $k_2$ – ее главные кривизны, причем $k_2$ отвечает за осесимметричность течения:

$$k_2 = -\cos\theta/R, \tag{3}$$

где $\theta$ – угол между касательной к трубке тока и осью $z$ цилиндрической системы $z$, $R$; для плоских потоков $k_2 = 0$.

Главные кривизны поверхности $x^1 = \text{const}$ обозначим символами $\kappa_1$, $\kappa_2$

$$\kappa_2 = \cos\vartheta/R, \tag{4}$$

причем в отличие от $k_2$ эта функция на оси $z$ в осесимметричном случае имеет конечную величину, равную $\kappa_1$. Частные производные по соответствующей координате обозначаются нижним индексом после запятой; нижний индекс 0 относит величину к катоду $x^1 = 0$. Соотношение (2) и все последующие выражения записаны в релятивистской нормировке, исключающей из уравнений все физические константы используемой системы единиц; тильдой отмечаются члены, исчезающие в нерелятивистском пределе.

Эволюционная система уравнений – вторая часть декомпозиции исходной системы – имеет вид

$$\begin{gathered}
z_{,2} = h_2\cos\vartheta, \quad R_{,2} = h_2\sin\vartheta, \quad \vartheta = \theta + \theta_{12};\\
\varphi_{,2} = h_2 E, \quad E = E_\nu \sin\theta_{12} + \frac{1}{h_1}\varphi_{,1}\cos\theta_{12};\\
\theta_{,2} = \frac{1}{\sin\theta_{12}}\frac{h_{2,1}}{h_1} + h_2\cos\theta_{12}k_1 - \frac{\operatorname{ctg}\theta_{12}}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1},\\
h_{1,2} = -h_1 h_2 \sin\theta_{12}k_1 + \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1};\\
u_{,2} = h_2\sin\theta_{12}\left(k_1 u + \frac{N - u\tilde{E}_\nu}{1+\tilde{\varphi}}\right) + \frac{h_2\cos\theta_{12}}{u(1+\tilde{\varphi})^3}\frac{\varphi_{,1}}{h_1},\\
k_{1,2} = \frac{1}{h_1\sin\theta_{12}}\left(\frac{h_{2,1}}{h_1}\right)_{,1} + \\
+ h_2\sin\theta_{12}k_1^2 + h_2\cos\theta_{12}\frac{k_{1,1}}{h_1} - \\
- \frac{h_2\theta_{12,1}^2}{h_1^2\sin\theta_{12}} - \frac{\operatorname{ctg}\theta_{12}}{h_1}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right]_{,1},\\
E_{\nu,2} = h_2\sin\theta_{12}\times\\
\times\left[(k_1+k_2)E_\nu + k_2\operatorname{tg}\theta\frac{\varphi_{,1}}{h_1} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{\varphi_{,1}}{h_1}\right)_{,1}\right] + \\
+ (1+\tilde{\varphi})u^2 h_2\cos\theta_{12}\frac{k_{1,1}}{h_1} + \\
+ \frac{\varphi_{,1}}{h_1}\left[2k_1 + \frac{1}{1+\tilde{\varphi}}\left(\frac{N}{u} - E_\nu\right)\right] + \\
+ k_2\operatorname{tg}\theta N u - \frac{1}{h_1}(h_2\sin\theta_{12})_{,1}\frac{\varphi_{,1}}{h_1} + \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3 u},\\
N_{,2} = h_2 k_2\sin\theta_{12}N(1 + \operatorname{ctg}\theta_{12}\operatorname{tg}\theta) + \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3},\\
\theta_{12,1} = \frac{1}{h_2\sin\theta_{12}}\left[\cos\theta_{12}h_{2,1} - \left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1}\right].
\end{gathered} \tag{5}$$

Обратим внимание на тот факт, что в правых частях уравнений (5) стоят величины, известные на базовой трубке тока. Комплексы типа $k_{1,1}/h_1$, $h_{2,1}/h_1$ имеют смысл физической составляющей градиента соответствующей величины в продольном направлении.

*Уравнения пучка на оси, первое приближение.* Локальная ортогональность системы $x^i$ на оси $z$ ($g_{12} = 0$, $\theta_{12} = \pi/2$, $h_1 = 1$) при $k_2 \to \infty$ в осесимметричном случае и $k_2 = 0$ для плоскосимметричных течений приводит к следующим трансформациям уравнения (2):

$$\begin{gathered}
(1+\tilde{\varphi})u^2 h_{2,11} + h_{2,1}\varphi_{,1} + \alpha h_2\varphi_{,11} = \beta\frac{b_0 J}{(1+\tilde{\varphi})^2 u},\\
\alpha = \begin{cases}1/2\\ 1\end{cases}, \quad \beta = \begin{cases}b_0/(2h_2)\\ 1\end{cases}, \quad b_0 \equiv h_{20},
\end{gathered} \tag{6}$$

где верхняя строка в выражениях для $\alpha$, $\beta$ соответствует осесимметричным потокам, а нижняя – плоским.

Правые части уравнений эволюционной системы на оси $z$ обращаются в нуль для четных функций поперечной координаты

$$\begin{gathered}
z_{,2} = 0, \quad h_{1,2} = 0, \quad h_{2,2} = 0, \quad \varphi_{,2} = 0,\\
u_{,2} = 0, J_{,2} = 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

в то время как производные нечетных функций определены выражениями[1]

$$\begin{gathered}
R_{,2} = h_2, \quad \theta_{,2} = h_{2,1}, \quad N_{,2} = \alpha\frac{b_0^2 J}{h_2}, \quad k_{1,2} = h_{2,11},\\
E_{\nu,2} = -\alpha h_2\varphi_{,11} - h_{2,1}\varphi_{,1} + \beta\frac{b_0 J}{u}; \quad k_1 k_2 = -\frac{k_{1,2}}{h_2}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Уравнения (8) были использованы при получении соотношения (6).

---

[1] В плоскосимметричном случае символы $z$, $R$ имеют смысл декартовых координат $z$, $y$; $x$ – циклическая координата, аналогичная азимуту $\psi$ для осесимметричных потоков.

*Уравнения пучка на оси, второе приближение.* Как соотношения на трубке тока, так и уравнения эволюционной системы высших приближений получаются по единому алгоритму, состоящему в дифференцировании по $x^2$, исключении при помощи эволюционной системы предыдущего приближения производных по этой переменной, возникающих в результате дифференцирования, и переходе к оси симметрии с раскрытием неопределенностей, вызванных стремлением $k_2$ к бесконечности в осесимметричном случае.

Двукратное дифференцирование по $x^2$ соотношения (2) приводит к уравнению для функции $h_{2,22}$, справедливому на оси $z$:

$$\begin{gathered}(1+\tilde{\varphi})u^2\left[h_{2,2211} - h_{2,11}h_{1,22} - h_{2,1}h_{1,221} - 2h_2\theta_{12,21}^2 - \right.\\ \left. - 2(\cos\theta_{12})_{,2}\, g_{12,211}\right] + \left\{u^2\tilde{\varphi}_{,22} + 2(1+\tilde{\varphi})uu_{,22} - \right.\\ \left. - (1+\tilde{\varphi})u^2\left[h_{1,22} + (\sin\theta_{12})_{,22}\right]\right\}h_{2,11} + \\ + (\varphi_{,221} - 2\varphi_{,1}h_{1,22})h_{2,1} + \varphi_{,1}\left[h_{2,22} + h_2(\sin\theta_{12})_{,22}\right]_{,1} = \\ = \left[h_{2,22} + h_2(\sin\theta_{12})_{,22}\right]\times \\ \times\left[(1+\tilde{\varphi})k_1k_2u^2 + k_2\mathrm{tg}\theta\varphi_{,1} - \varphi_{,11}\right] + \\ + h_2\left\{-4(1+\tilde{\varphi})k_{1,2}^2u^2 + \tilde{\varphi}_{,22}k_1k_2u^2 + \right.\\ + (1+\tilde{\varphi})(k_1k_2)_{,22}u^2 + \\ + 2(1+\tilde{\varphi})k_1k_2uu_{,22} + (k_2\mathrm{tg}\theta)_{,22}\varphi_{,1} + \\ + \kappa_2(\varphi_{,221} - \varphi_{,1}h_{1,22}) - \varphi_{,2211} + 2\varphi_{,11}h_{1,22} + \\ \left. + \varphi_{,1}h_{1,221} - 4k_{1,2}uN_{,2} - 2\frac{N_{,2}^2 - \tilde{E}_{\nu,2}^2}{1+\tilde{\varphi}}\right\} + \frac{h_{30}}{h_3}\times \\ \times\frac{h_{20}J}{(1+\tilde{\varphi})^2u}\left(\frac{J_{,22}}{J} - 2\frac{\tilde{\varphi}_{,22}}{1+\tilde{\varphi}} - \frac{u_{,22}}{u}\right) + \frac{h_{20}J}{(1+\tilde{\varphi})^2u}\left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22}.\end{gathered} \tag{9}$$

Эволюционные уравнения второго приближения принимают вид

$$\begin{gathered}z_{,22} = -h_2h_{2,1} + g_{12,2}, \quad \varphi_{,22} = h_2E_{,2},\\ h_{1,22} = -h_2h_{2,11} + g_{12,21},\\ u_{,22} = h_2\left[h_{2,11}u - \theta_{12,2}\frac{\tilde{\varphi}_{,1}}{(1+\tilde{\varphi})^3u} + \frac{N_{,2} - u\tilde{E}_{\nu,2}}{1+\tilde{\varphi}}\right].\end{gathered} \tag{10}$$

Для входящих в (9) комплексов имеем

$$\begin{gathered}(\cos\theta_{12})_{,2} = \frac{1}{h_2}g_{12,2}, \quad (\sin\theta_{12})_{,22} = -\left(\frac{g_{12,2}}{h_2}\right)^2,\\ \theta_{12,2} = -\frac{g_{12,2}}{h_2}, \quad (k_1k_2)_{,22} = -\frac{1}{3}\left(h_{2,1}h_{2,111} + 4h_{2,11}^2 - \right.\\ - \frac{1}{h_2}h_{2,1}^2h_{2,11} + \frac{1}{h_2}h_{2,2211} - \frac{1}{h_2^2}h_{2,11}h_{2,22}\Big) + \\ + \frac{1}{3}\left(2h_{2,111}\theta_{12,2} - \frac{2}{h_2}h_{2,1}h_{2,11}\theta_{12,2} - \frac{2}{h_2}h_{2,11}\theta_{12,2}^2 + \right.\\ \left. + \frac{2}{h_2}h_{2,11}g_{12,21} + \frac{1}{h_2}h_{2,1}g_{12,211} - \frac{2}{h_2}\theta_{12,2}g_{12,211} + 2\theta_{12,21}^2\right),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}(k_2\mathrm{tg}\theta)_{,22} = -\frac{1}{3h_2}\times\\ \times\left[h_{2,221} + h_2h_{2,1}h_{2,11} - \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{2,22} + 2h_{2,1}^2\left(\frac{g_{12}}{h_2}\right)^2 - \right.\\ \left. - \left(h_{2,1}^2 - h_2h_{2,11}\right)g_{12,2} - \left(h_{2,1} + \frac{2}{h_2}g_{12,2}\right)g_{12,21}\right],\\ \left(\frac{h_{30}}{h_3}\right)_{,22} = \frac{1}{3}\frac{b_0}{h_2}\left[-\frac{1}{h_2}h_{2,22} + \left(h_{2,1} - \frac{g_{12,2}}{h_2}\right)^2 - b_3^2\right],\\ (k_2k_1)_{,22} = -\frac{1}{3}\frac{1}{h_2}\left(k_{1,222} - \frac{1}{h_2}h_{2,22}k_{1,2}\right) + \\ + \frac{2}{h_2}\left(\frac{1}{3}h_{2,1}^2 - \frac{1}{3}h_{2,1}\theta_{12,2} - \frac{1}{6}\theta_{12,2}^2\right)k_{1,2},\\ k_{1,222} = h_2h_{2,1}h_{2,111} + 4h_2h_{2,11}^2 + h_{2,1}^2h_{2,11} + \\ + h_{2,2211} - 2h_2\theta_{12,21}^2 - 2h_2h_{2,111}\theta_{12,2} + \\ + h_{2,11}\theta_{12,2}^2 - 2h_{2,11}g_{12,21} + (-h_{2,1} + 2\theta_{12,2})g_{12,211}.\end{gathered}$$

*Параметры потока.* Функции $h_2$, $h_{2,22}$, являющиеся решениями уравнений (6), (9), позволяют рассчитать все характеристики потока. Параметрические уравнения $R = R_e(z)$, $Z = z_e(z)$ границы пучка $x^2 = \eta = \mathrm{const}$ и потенциала $\varphi = \varphi_e(z)$ на ней определены соотношениями

$$\begin{gathered}R_e = R_{,2}\eta + \frac{1}{6}R_{,222}\eta^3,\\ z_e = z + \frac{1}{2}z_{,22}\eta^2 + \frac{1}{24}z_{,2222}\eta^4,\\ \varphi_e = \varphi(z) + \frac{1}{2}\varphi_{,22}\eta^2 + \frac{1}{24}\varphi_{,2222}\eta^4.\end{gathered} \tag{12}$$

Развернутые формулы для производных в (12) приведены в [1, 2].

В дальнейшем нам потребуется эволюционное уравнение четвертого порядка для $h_1$, вычисляемое по сформулированным выше правилам:

$$\begin{gathered}h_{1,2222} = -h_2h_{2,2211} - 3h_{2,11}h_{2,22} - h_2^2h_{2,1}h_{2,111} - h_2^2h_{2,11}^2 - \\ - h_2h_{2,1}^2h_{2,11} + g_{12,2221} + h_2\vartheta_{,2}g_{12,211} + \\ + (2h_2h_{2,11} + 4h_{2,1}\theta_{12,2})g_{12,21} - g_{12,21}^2 + \\ + (h_2h_{2,111} + 3h_{2,1}h_{2,11})g_{12,2} + 2\left(\frac{h_{2,11}}{h_2} + \frac{h_{2,1}^2}{h_2^2}\right)g_{12,2}^2.\end{gathered} \tag{13}$$

Выражение для $g_{12,222}$ приведено в [1, 2].

## 2. МОДЕЛЬ ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ

*Форма решения*. Решение вблизи стартовой поверхности $x^1 = 0$ при эмиссии в ρ-режиме имеет вид разложений по степеням параметра $\left(x^1\right)^{1/3}$:

$$\begin{gathered} h_1 = a_0\left(1 + \bar{a}_1 x^{1/3} + \bar{a}_2 x^{2/3} + \ldots\right), \\ h_2 = b_0\left(1 + \bar{b}_3 x + \bar{b}_4 x^{4/3} + \ldots\right), \\ h_3 = R_0\left(1 + \bar{R}_3 x + \bar{R}_4 x^{4/3} + \ldots\right), \\ g_{12} = G_1 x^{1/3} + G_2 x^{2/3} + \ldots, \\ \varphi = \varphi_4 x^{4/3}\left(1 + \bar{\varphi}_5 x^{1/3} + \bar{\varphi}_6 x^{2/3} + \ldots\right), \\ u = V_2 x^{2/3}\left(1 + \bar{V}_3 x^{1/3} + \bar{V}_4 x^{2/3} + \ldots\right), \\ N = N_0 + N_3 x + N_4 x^{4/3} + \ldots;\ x \equiv x^1. \end{gathered} \tag{14}$$

Для интегрирования уравнений (6), (9) необходимо задать начальные условия, в силу сингулярности эмитирующей поверхности сводящиеся к построению асимптотик для $h_2$, $h_{2,22}$ и прочих параметров течения. Вторые производные искомых функций в уравнениях (6), (9) имеют бесконечные значения при $x^1 = 0$ за счет членов с коэффициентами $b_4$, $b_5$, поэтому асимптотики должны включать эти параметры для первого уравнения и производные $b_{3,22}$, $b_{4,22}$, $b_{5,22}$ для второго.

Из нескольких возможных способов решения второй задачи выберем следующий. Учитывая, что в силу (7) на оси все коэффициенты $a_k$ имеют нулевые производные

$$a_{k,2} = 0, \tag{15}$$

найдем из уравнения (2) выражения для коэффициентов $\varphi_k$, связанных с $b_i$, сохраняя члены, дающие ненулевой вклад при двукратном дифференцировании по $x^2$. Это линейные по $a_k$, $k > 0$ слагаемые и квадратичные произведения нечетных функций $a_{k,2}N_0$, $N_0^2$; члены с $k_{20}$ требуют специального рассмотрения, так как производная $\left(k_{20}N_0^3\right)_{,22}$ отлична от нуля.

Правые части уравнения

$$\varphi_{,2} = h_2 E \tag{16}$$

могут быть вычислены с использованием уравнения (6), не содержащего функций $a_k$. Однократное дифференцирование полученных комплексов дает правильный результат в силу выполнения равенств (15) на оси, в то время как левая часть допускает выполнение двукратного дифференцирования коэффициентов $\varphi_k$, структура которых выявлена заблаговременно. Баланс членов в левой и правой частях уравнения (15) позволит получить требуемые соотношения.

*Предварительные рассмотрения*. Баланс членов порядка $x^{-2/3}$, $x^{1/3}$ в уравнении (2) приводит к следующим значениям первых коэффициентов разложения функций φ, *u*:

$$\begin{gathered} \varphi_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{9a_0^2 J}{2}\right)^{2/3}, \quad \bar{\varphi}_5 = \bar{a}_1; \\ V_2 = \left(\frac{9a_0^2 J}{2}\right)^{1/3}, \quad \bar{V}_3 = \frac{1}{2}\bar{a}_1. \end{gathered} \tag{17}$$

Выражение для кривизны $k_1$ позволяет связать разложение для этого параметра с разложениями из (14):

$$\begin{gathered} k_1 = \frac{1}{h_2 \sin\theta_{12}}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{g_{12}}{h_1}\right)_{,1} - \frac{h_{1,2}}{h_1}\right] = \\ = x^{-2/3}\left(k_{10} + k_{11}x^{1/3} + k_{12}x^{2/3} + \ldots\right), \\ k_{10} = \frac{1}{3}\frac{1}{a_0^2 b_0}G_1, \quad k_{11} = \frac{2}{3}\frac{1}{a_0^2 b_0}\left(G_2 - \bar{a}_1 G_1\right); \\ \cos\theta_{12} = c_1 x^{1/3} + c_2 x^{2/3} + \ldots, \\ c_1 = \frac{1}{a_0 b_0}G_1, \quad c_2 = \frac{1}{a_0 b_0}\left(G_2 - \bar{a}_1 G_1\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Разложение для потенциала φ начинается со степени $4/3$, поэтому в правой части уравнения (16) коэффициенты при слагаемых порядка $x^{2/3}$, $x^{3/3}$ должны быть обращены в нуль. Возникающие равенства служат для определения функций $G_1$, $G_2$:

$$G_1 = -a_0^2 b_0 \bar{N}_0, \quad G_2 = -\frac{5}{4}a_0^2 b_0 \bar{a}_1 \bar{N}_0, \quad \bar{N}_0 \equiv \frac{N_0}{V_2}. \tag{19}$$

Проведенное до конца рассмотрение показывает, что в более полном описании элемента $g_{12}$ нет необходимости:

$$G_3 = G_4 = \ldots = 0. \tag{20}$$

Параметрические уравнения произвольной трубки тока в локальных декартовых координатах *X*, *Y* (нормаль, касательная к катоду в точке старта) представим в виде

$$\begin{gathered} Y = Y(l) = f_4 l^{4/3} + f_5 l^{5/3} + \ldots, \\ X = X(l) = \int\sqrt{1 - Y'^2}\,dl, \end{gathered} \tag{21}$$

где $l$ – длина дуги образующей поверхности $x^2 = \text{const}$. Разложение для угла наклона θ к оси *z* выражается через траекторные коэффициенты $f_k$:

$$\begin{gathered} \theta = \theta_0 + \operatorname{arctg}\left(Y'/X'\right) = \theta_0 + \theta_1 l^{1/3} + \theta_2 l^{2/3} + \ldots, \\ \theta_1 = \frac{4}{3}f_4, \quad \theta_2 = \frac{5}{3}f_5, \quad \theta_3 = 2f_6 + \frac{32}{81}f_4^3. \end{gathered} \tag{22}$$

На трубке тока при $x^1 \equiv l$, $a_0 = 1$, $a_k = 0$ имеет место соотношение

$$k_1 = \theta_{,1}, \tag{23}$$

позволяющее определить первые траекторные коэффициенты

$$f_4 = -\frac{3}{4}\bar{N}_0, \quad f_5 = 0. \tag{24}$$

Рассматривая в выражении для $k_1$ из (18) члены порядка $x^0$, $x^{1/3}$, получаем

$$k_{12} = -\frac{a_{0,2}}{b_0} - \frac{1}{6}\bar{N}_0^3, \quad k_{13} = -\frac{a_{1,2}}{b_0} + \frac{1}{3}\bar{b}_3\bar{N}_0. \tag{25}$$

Дальнейшие балансы в (23) с учетом (25) приводят к следующим соотношениям:

$$k_{12} = \theta_3, \quad k_{13} = \frac{4}{3}\theta_4; \quad \frac{a_{0,2}}{b_0} = -2f_6, \\ \frac{a_{1,2}}{b_0} = -\frac{28}{9}f_7 + \frac{1}{3}\bar{b}_3\bar{N}_0. \tag{26}$$

Рассмотрим две соседние трубки тока $x^2 = 0$ и $x^2 = \eta$, которые будем отмечать индексами 0, 1 с длинами дуг $l_0$, $l_1$ и локальными декартовыми системами $X_0, Y_0$ и $X_1, Y_1$. Координаты $X$, $Y$ и $z$, $R$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} \bar{z} \equiv z - z_0 = X\cos\theta_0 - Y\sin\theta_0, \\ \bar{R} \equiv R - R_0 = X\sin\theta_0 + Y\cos\theta_0; \\ X = \bar{z}\cos\theta_0 + \bar{R}\sin\theta_0, \\ Y = -\bar{z}\sin\theta_0 + \bar{R}\cos\theta_0. \end{gathered} \tag{27}$$

Уравнения трубки тока $x^2 = \eta$ в системе $z$, $R$ на основании эволюционной системы (5) имеют вид

$$\begin{gathered} z^{(1)} = z^{(0)} + (h_2\cos\vartheta)^{(0)}\eta, \\ R^{(1)} = R^{(0)} + (h_2\sin\vartheta)^{(0)}\eta. \end{gathered} \tag{28}$$

Координаты точки на катоде, с которой стартует трубка $x^2 = \eta$, суть

$$\begin{gathered} z_0^{(1)} = z_0^{(0)} - (b_0\sin\theta_0)^{(0)}\eta, \\ R_0^{(1)} = R_0^{(0)} + (b_0\cos\theta_0)^{(0)}\eta. \end{gathered} \tag{29}$$

Уравнения базовой трубки тока $x^2 = 0$ через функции $X_0(l_0)$, $Y_0(l_0)$ с учетом (27) определены соотношениями

$$\begin{gathered} z^{(0)} - z_0^{(0)} = X_0(l_0)\cos\theta_0^{(0)} - Y_0(l_0)\sin\theta_0^{(0)}, \\ R^{(0)} - R_0^{(0)} = X_0(l_0)\sin\theta_0^{(0)} + Y_0(l_0)\cos\theta_0^{(0)}. \end{gathered} \tag{30}$$

Запишем выражения для $Y_1$, используя (27)–(30) и уравнение для $\theta$ из (5) при $x^1 = 0$ и ограничившись линейными членами по $\eta$:

$$\begin{gathered} Y_1 = -\bar{z}^{(1)}\sin\theta_0^{(1)} + \bar{R}^{(1)}\cos\theta_0^{(1)}, \quad \vartheta_0^{(0)} = \frac{\pi}{2} + \theta_0^{(0)}, \\ \bar{z}^{(1)} = z^{(1)} - z_0^{(1)} = \left[z^{(0)} + (h_2\cos\vartheta)^{(0)}\eta\right] - \\ - \left[z_0^{(0)} - b_0^{(0)}\sin\theta_0^{(0)}\right], \quad \bar{R}^{(1)} = R^{(1)} - R_0^{(1)} = \\ = \left[R^{(0)} + (h_2\sin\vartheta)^{(0)}\eta\right] - \left[R_0^{(0)} + b_0^{(0)}\cos\theta_0^{(0)}\right], \\ z^{(0)} - z_0^{(0)} = X_0\cos\theta_0^{(0)} - Y_0\sin\theta_0^{(0)}, \\ R^{(0)} - R_0^{(0)} = X_0\sin\theta_0^{(0)} + Y_0\cos\theta_0^{(0)}, \\ Y_1 = -X_0\sin\left(\theta^{(1)} - \theta_0^{(0)}\right) + Y_0\cos\left(\theta^{(1)} - \theta_0^{(0)}\right) + \\ + \left[-h_2^{(0)}\sin\left(\theta_0^{(1)} - \vartheta^{(0)}\right) - b_0^{(0)}\cos\left(\theta_0^{(1)} - \theta_0^{(0)}\right)\right]\eta. \end{gathered} \tag{31}$$

Учитывая выражения

$$\begin{gathered} \theta_0^{(1)} - \theta_0^{(0)} = \bar{b}_3^{(0)}\eta, \\ \theta^{(1)} - \vartheta^{(0)} = \left[\theta^{(0)} + b_3^{(0)}\eta\right] - \left[\frac{\pi}{2} + \theta_0^{(0)} + \vartheta_3^{(0)}x\right] = \\ = -\frac{\pi}{2} + \left[b_3^{(0)}\eta - \vartheta_3^{(0)}x\right], \end{gathered} \tag{32}$$

для первой трубки тока получаем

$$Y_1 = -X_0(l_0)b_3^{(0)}\eta + Y_0(l_0) + h_2^{(0)} - b_0^{(0)}. \tag{33}$$

Параметрические уравнения (21) базовой поверхности $x^2 = 0$ вблизи катода описываются соотношениями

$$\begin{gathered} Y_0 = f_4 l_0^{4/3} + f_5 l_0^{5/3} + f_6 l_0^{6/3} + \ldots, \\ X_0 = l_0 - \frac{8}{15}f_4^2 l_0^{5/3} - \frac{10}{9}f_4 f_5 l_0^{6/3} + \ldots \end{gathered} \tag{34}$$

Подстановка выражений для $X_0$, $Y_0$ из (34) в (33) дает

$$\begin{gathered} Y_1 = \left[f_4^{(0)} + b_4^{(0)}\eta\right]l_0^{4/3} + \\ + \left[f_5^{(0)} + \left(b_5 + \frac{8}{15}b_3 f_4^2\right)^{(0)}\eta\right]l_0^{5/3} + \ldots \end{gathered} \tag{35}$$

Длины дуг $l_0$, $l_1$ следующим образом связаны друг с другом:

$$\begin{gathered} l_1 = \int\left[a_0^{(1)} + a_1^{(1)}l_0^{1/3} + a_2^{(1)}l_0^{2/3} + \ldots\right]dl_0, \\ a_0^{(1)} = 1 + a_{0,2}^{(0)}\eta, \quad a_1^{(1)} = a_{1,2}^{(0)}\eta, \quad a_2^{(1)} = a_{2,2}^{(0)}\eta, \ldots \\ l_0 = l_1 - \frac{3}{4}a_1^{(1)}l_1^{4/3} - \frac{3}{5}a_2^{(1)}l_1^{5/3} + \ldots \end{gathered} \tag{36}$$

Переходя от $l_0$ к $l_1$ в формуле (35) с учетом (26), (36), получаем

$$\begin{gathered} Y_1 = \left[f_4^{(0)} + \left(\bar{b}_4 + \frac{8}{3}f_4 f_6\right)^{(0)} b_0^{(0)}\eta\right]l_1^{4/3} + \\ + \left[f_5^{(0)} + \left(\bar{b}_5 + \frac{44}{45}\bar{b}_3 f_4^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{28}{9}f_4 f_7 + \frac{10}{3}f_5 f_6\right)^{(0)} b_0^{(0)}\eta\right]l_1^{5/3} + \ldots \end{gathered} \tag{37}$$

Пропорциональные $\eta$ агрегаты в круглых скобках из (37) задают скорость изменения траекторных коэффициентов в $x^2$-направлении. Вместе с тем коэффициент $f_4$ определен через магнитное поле на катоде формулами (24), а $f_5 = 0$; производные этих коэффициентов по $x^2$ могут быть получены дифференцированием выражений (24) с использованием уравнения для $N_{,2}$ эволюционной системы (5):

$$\frac{1}{b_0} f_{4,2} = -\frac{3}{4}\left(k_{20}\bar{N}_0 - \frac{10}{3}\bar{N}_0 f_6 + \frac{1}{4}\bar{N}_0^4 + \frac{2}{9}\tilde{V}_2^2\right), \quad f_{5,2} = 0. \tag{38}$$

Приравнивая производные траекторных коэффициентов в (37), (38), получаем выражения для $\bar{b}_4$, $\bar{b}_5$:

$$\bar{b}_4 = \frac{1}{b_0} f_{4,2} - \frac{8}{3} f_4 f_6, \quad \bar{b}_5 = -\frac{28}{9} f_4 f_7 - \frac{10}{3} f_5 f_6 - \frac{44}{45}\bar{b}_3 f_4^2. \tag{39}$$

На оси сплошного пучка в осесимметричном и плоском случаях имеем соответственно

$$\bar{b}_4 = -\frac{1}{12}\tilde{V}_2^2, \quad \bar{b}_5 = 0; \quad \bar{b}_4 = -\frac{1}{6}\tilde{V}_2^2, \quad \bar{b}_5 = 0. \tag{40}$$

Полученная выше информация позволяет перейти к решению основной задачи.

## 3. ПЛОТНОСТЬ ТОКА ЭМИССИИ И КРИВИЗНА КАТОДА

*Плотность тока*. Баланс членов порядка $x^{4/3}$ в уравнении (16) в случае произвольной продольной координаты приводит к выражению для градиента плотности тока эмиссии

$$\frac{1}{b_0}\frac{J_{,2}}{J} = -5\frac{a_{0,2}}{a_0 b_0} + \left(6\bar{a}_2 + \frac{15}{16}\bar{a}_1^2\right)\bar{N}_0 - \frac{3}{4}\bar{N}_0^3. \tag{41}$$

Повторное дифференцирование по $x^2$ с переходом к оси $z$ позволяет получить вторую и четвертую производные, отличные от нуля:

$$\frac{1}{b_0^2}\frac{J_{,22}}{J} = -5\frac{a_{0,22}}{a_0 b_0^2}, \quad \frac{1}{b_0^4}\frac{J_{,2222}}{J} = -5\frac{a_{0,2222}}{a_0 b_0^4} + 15\frac{a_{0,22}^2}{a_0^2 b_0^4} + 18\frac{\bar{a}_{2,22}}{a_0 b_0^2}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} - \frac{9}{2}\frac{\bar{N}_{0,2}^3}{b_0^3}. \tag{42}$$

Уравнение для $h_{1,22}$ из (10) приводит к следующим значениям вторых производных $a_{k,22}$:

$$\begin{gathered}\frac{a_{0,22}}{b_0^2} = -2\bar{b}_6, \quad \frac{a_{1,22}}{b_0^2} = -\frac{28}{9}\bar{b}_7 - \frac{4}{9}\bar{b}_3\bar{b}_4, \\ \frac{a_{2,22}}{b_0^2} = -\frac{40}{9}\bar{b}_8 - \frac{4}{9}\bar{b}_4^2, \quad \frac{a_{3,22}}{b_0^2} = -6\bar{b}_9 - 2\bar{b}_3\bar{b}_6, \\ \frac{a_{4,22}}{b_0^2} = -\frac{70}{9}\bar{b}_{10} - 2\bar{b}_3\bar{b}_7 - \frac{22}{9}\bar{b}_4\bar{b}_6, \\ \frac{a_{5,22}}{b_0^2} = -\frac{88}{9}\bar{b}_{11} - \frac{40}{9}\bar{b}_3\bar{b}_8 - \frac{32}{9}\bar{b}_4\bar{b}_7, \\ \frac{a_{6,22}}{b_0^2} = -12\bar{b}_{12} - 6\bar{b}_3\bar{b}_9 - \frac{44}{9}\bar{b}_4\bar{b}_8 - 2\bar{b}_6^2.\end{gathered} \tag{43}$$

Формулы (43) справедливы как для осесимметричных, так и для плоских течений.

Уравнение (13) позволяет вычислить производную $a_{0,2222}$:

$$\frac{a_{0,2222}}{b_0^4} = -2\frac{b_{6,22}}{b_0^3} - 6\bar{b}_3\bar{b}_9 - 4\bar{b}_6^2 + \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(\frac{56}{27}\bar{b}_8 - \frac{52}{27}\bar{b}_4^2\right) + \frac{4}{9}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2}\bar{b}_4. \tag{44}$$

*Кривизна катода.* В силу локальной ортогональности системы $x^1$, $x^2$ при $x^1 = 0$ для вычисления вторых производных главных кривизн на оси можно пользоваться выражениями, записанными в ортогональной системе [1, 2]:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{h_1}\frac{h_{2,1}}{h_2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{h_1}\frac{h_{3,1}}{h_3} = -\frac{\sin\theta}{R}. \tag{45}$$

Двукратное дифференцирование по $x^2$ приводит к следующему результату:

$$\begin{gathered}\kappa_{1,22} = -\frac{1}{h_2}h_{2,221} + \frac{1}{h_2^2}h_{2,1}h_{2,22} + \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{1,22}, \\ \kappa_2 = -\frac{1}{h_2}\left[\theta_{,2} + \frac{1}{6}\left(\theta_{,222} - \theta_{,2}^3 - \frac{1}{h_2}\theta_{,2}R_{,222}\right)\eta^2\right], \\ \theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad \theta_{,222} = h_{2,221} - h_{2,1}h_{1,22}, \\ R_{,222} = h_{2,22} - h_2\theta_{,2}^2, \\ \kappa_{2,22} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{h_2}h_{2,221} + \frac{1}{h_2^2}h_{2,1}h_{2,22} + \frac{1}{h_2}h_{2,1}h_{1,22}\right).\end{gathered} \tag{46}$$

При $x^1 = 0$ для производных кривизн с учетом (43) получаем

$$\frac{\kappa_{10,22}}{b_0^2} = 3\frac{\kappa_{20,22}}{b_0^2} = -\frac{\bar{b}_{3,22}}{b_0^2} + \bar{b}_3\frac{a_{0,22}}{b_0^2} = -\left(\frac{\bar{b}_{3,22}}{b_0^2} + 2\bar{b}_3\bar{b}_6\right); \quad \kappa_{10} = -\bar{b}_3. \tag{47}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи при описании прикатодной области необходимо найти функции $\bar{b}_{3,22}$, $\bar{b}_{6,22}$.

## 4. НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

*Коэффициенты* $\varphi_k$ *с возможностью двукратного дифференцирования по* $x^2$. Выполняя намеченную в разд. 2 программу, рассмотрим общий случай соотношения (2). Выпишем уравнения, связывающие коэффициенты разложения потенциала и скорости, следующие из интеграла энергии:

$$\begin{gathered}
\bar{\varphi}_6 = 2\bar{V}_4 + \bar{V}_3^2, \;\; \bar{\varphi}_7 = 2\bar{V}_5 + 2\bar{V}_3\bar{V}_4, \\
\bar{\varphi}_8 = 2\bar{V}_6 + 2\bar{V}_3\bar{V}_5 + \bar{V}_4^2 + \frac{3}{4}\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_9 = 2\bar{V}_7 + 2\bar{V}_3\bar{V}_6 + 2\bar{V}_4\bar{V}_5 + 3\bar{V}_3\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_{10} = 2\bar{V}_8 + 2\bar{V}_3\bar{V}_7 + 2\bar{V}_4\bar{V}_6 + \bar{V}_5^2 - \bar{\varphi}_6\tilde{\varphi}_4 - \\
- \frac{1}{2}\bar{\varphi}_5^2\tilde{\varphi}_4 + \left(2\bar{\varphi}_6 + 2\bar{V}_3\bar{V}_5\right)\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_{11} = 2\bar{V}_9 + 2\bar{V}_5\bar{V}_6 + 3\bar{V}_5\tilde{V}_2^2, \;\; \bar{\varphi}_{12} = 2\bar{V}_{10} + \bar{V}_6^2 + \\
+ 3\bar{V}_6\tilde{V}_2^2 + \frac{5}{8}\tilde{V}_2^4, \;\; \bar{\varphi}_{13} = 2\bar{V}_{11} + 2\bar{V}_5\bar{V}_8, \\
\bar{\varphi}_{14} = 2\bar{V}_{12} + 2\bar{V}_5\bar{V}_9 + 2\bar{V}_6\bar{V}_8 + \frac{3}{2}\left(2\bar{V}_8 + 3\bar{V}_5^2\right)\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_{15} = 2\bar{V}_{13} + 2\bar{V}_5\bar{V}_{10} + 2\bar{V}_6\bar{V}_9 + \\
+ 3\left(\bar{V}_9 + 3\bar{V}_5\bar{V}_6\right)\tilde{V}_2^2 + \frac{15}{4}\bar{V}_5\tilde{V}_2^4, \\
\bar{\varphi}_{16} = 2\bar{V}_{14} + 2\bar{V}_5\bar{V}_{11} + 2\bar{V}_6\bar{V}_{10} + \bar{V}_8^2 + \\
+ \frac{3}{2}\left(2\bar{V}_{10} + 3\bar{V}_6^2\right)\tilde{V}_2^2 + \frac{15}{4}\bar{V}_6\tilde{V}_2^4 + \frac{35}{64}\tilde{V}_2^6.
\end{gathered} \tag{48}$$

Начиная с $\bar{\varphi}_{11}$ приведенные соотношения справедливы только на оси $z$.

Балансы членов в уравнении (2) (первый баланс – члены порядка $x^0$) приводят к следующим выражениям для коэффициентов $\bar{\varphi}_k$ и для $\bar{V}_k$, необходимых в дальнейшем

$$\begin{gathered}
\bar{\varphi}_6 = \frac{4}{5}\bar{a}_2 - \frac{3}{10}\bar{N}_0^2, \;\; \bar{\varphi}_7 = \frac{2}{3}\bar{a}_3 + \frac{8}{15}a_0T_0, \\
T_0 = \kappa_{10} + \kappa_{20}, \;\; \bar{\varphi}_8 = \frac{4}{7}\bar{a}_4 + a_0\bar{a}_1\left(\frac{13}{30}\kappa_{10} + \frac{14}{15}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{2}{3}\bar{b}_4 + a_0\bar{N}_0\left(\frac{2}{7}\frac{a_{0,2}}{a_0b_0} - \frac{1}{2}k_{20}\right) - \frac{5}{84}\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_9 = \frac{1}{2}\bar{a}_5 + a_0\bar{a}_2\left(\frac{289}{1050}\kappa_{10} + \frac{56}{75}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{23}{42}\bar{a}_1\bar{b}_4 - a_0\bar{a}_1k_{20}\bar{N}_0 - \frac{5}{42}\bar{a}_1\tilde{V}_2^2 - \frac{11}{14}\bar{b}_5 + \\
+ \frac{3}{14}\bar{N}_0\frac{a_{1,2}}{a_0b_0} + a_0\bar{N}_0^2\left(\frac{449}{700}\kappa_{10} - \frac{233}{350}\kappa_{20}\right), \\
\bar{\varphi}_{10} = \frac{4}{9}\bar{a}_6 + a_0\bar{a}_3\left(\frac{8}{45}\kappa_{10} + \frac{28}{45}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{16}{45}\bar{a}_2\bar{b}_4 - \frac{3}{5}a_0\bar{a}_2k_{20}\bar{N}_0 - \frac{2}{21}\bar{a}_2\tilde{V}_2^2 - \frac{8}{9}\bar{b}_6 + \\
+ \frac{83}{225}a_0^2\left(\kappa_{10}^2 + \kappa_{20}^2\right) + \frac{157}{450}a_0^2\kappa_{10}\kappa_{20} - \frac{1}{2}\frac{a_{0,2}^2}{a_0^2b_0^2} - \\
- \frac{4}{9}a_0^2k_{20}\frac{a_{0,2}}{a_0b_0} + \frac{1}{6}\bar{N}_0\frac{a_{2,2}}{a_0b_0} - \frac{99}{160}\bar{b}_4\bar{N}_0^2 + \\
+ \frac{733}{3780}\bar{N}_0^2\tilde{V}_2^2 + \frac{101}{360}a_0k_{20}\bar{N}_0^3; \;\; \bar{V}_4 = \frac{2}{5}\bar{a}_2 - \frac{3}{20}\bar{N}_0^2, \\
\bar{V}_5 = \frac{1}{3}\bar{a}_3 + \frac{4}{15}a_0T_0, \;\; \bar{V}_6 = \frac{2}{7}\bar{a}_4 + \\
+ a_0\bar{a}_1\left(\frac{1}{12}\kappa_{10} + \frac{1}{3}\kappa_{20}\right) - \frac{1}{3}\bar{b}_4 + \\
+ a_0\bar{N}_0\left(\frac{1}{7}\frac{a_{0,2}}{a_0b_0} - \frac{1}{4}k_{20}\right) - \frac{17}{42}\tilde{V}_2^2, \\
\bar{V}_7 = \frac{1}{4}\bar{a}_5 + a_0\bar{a}_2\left(\frac{13}{420}\kappa_{10} + \frac{4}{15}\kappa_{20}\right) - \\
- \frac{3}{28}\bar{a}_1\bar{b}_4 - \frac{3}{8}a_0\bar{a}_1k_{20}\bar{N}_0 - \frac{17}{28}\bar{a}_1\tilde{V}_2^2 - \frac{11}{28}\bar{b}_5 + \\
+ \frac{3}{28}\bar{N}_0\frac{a_{1,2}}{a_0b_0} + a_0\bar{N}_0^2\left(\frac{101}{280}\kappa_{10} - \frac{41}{140}\kappa_{20}\right).
\end{gathered} \tag{49}$$

*Балансы уравнения* $\varphi_{,22} = \left(h_2E\right)_{,2}$. Формула (41) выражала баланс членов порядка $x^{4/3}$ в уравнении (16). При рассмотрении членов более высокого порядка используются формулы

$$\begin{gathered}
\varphi_{k,2} = \frac{1}{2}V_2^2\left[\bar{\varphi}_{k,2} + \bar{\varphi}_k\left(\frac{4}{3}\frac{a_{0,2}}{a_0} + \frac{2}{3}\bar{J}_{,2}\right)\right], \;\; \bar{J}_{,2} \equiv \frac{J_{,2}}{J}; \\
\varphi_{k,22} = \frac{1}{2}V_2^2\left[\bar{\varphi}_{k,22} + \bar{\varphi}_k\left(\frac{4}{3}\frac{a_{0,22}}{a_0} + \frac{2}{3}\bar{J}_{,22}\right)\right], \\
\bar{J}_{,22} \equiv \frac{J_{,22}}{J}.
\end{gathered} \tag{50}$$

Приравняв в (16) члены порядка $x^{5/3}\ldots x^{10/3}$, выполнив однократное дифференцирование по $x^2$ полученных таким образом правых частей и двукратное дифференцирование функций $\varphi_k$ из (49) в левых частях, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}
\frac{a_{1,22}}{b_0^2} = \frac{1}{9}V_2^2\left(-\frac{46}{45}\kappa_{10} + \frac{14}{45}\kappa_{20}\right), \\
\frac{a_{2,22}}{b_0^2} = \frac{80}{63}\bar{b}_4\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} + \frac{3}{14}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2} - \frac{1}{6}\left(k_{20}\bar{N}_0^2\right)_{,2} - \frac{10}{63}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2, \\
\frac{\bar{b}_{3,22}}{b_0^2} = -5\bar{b}_9 - \frac{13}{2}\bar{b}_3\bar{b}_6,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{\bar b_{4,22}}{b_0^2} = \frac{3}{2}\left[\frac{9}{7}\frac{\bar a_{4,22}}{b_0^2} + \left(-\frac{61}{21}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} + \frac{11}{42}\tilde V_2^2\right)\bar b_6 + \right.\\ + \left(-\frac{23}{270}\kappa_{10}^2 + \frac{434}{18\,225}\kappa_{20}^2 - \frac{1907}{36\,450}\kappa_{10}\kappa_{20}\right)\tilde V_2^2 + \\ + \left(\frac{77}{90}\kappa_{10}^2 + \frac{53}{90}\kappa_{20}^2 + \frac{403}{450}\kappa_{10}\kappa_{20}\right)\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} - \\ \left. - \frac{1}{4}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0\bar N_0 k_{20}\right)_{,22} - \frac{7}{6}k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\right].\end{gathered} \tag{51}$$

Члены с $k_{20}$, присущие осесимметричной задаче, раскрываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}b_3^2\eta^2 + 0\cdot\eta^3, \quad R = b_0\eta - \frac{1}{6}b_0 b_3^2\eta^3,\\ N_0 = N_{0,2}\eta + \frac{1}{6}N_{0,222}\eta^3, \quad \frac{1}{b_0^3}N_{0,222} = -\kappa_{10}\kappa_{20}\frac{1}{b_0}N_{0,2},\\ a_0\bar N_0 k_{20} = \left(\frac{9J}{2}\right)^{-1/3} a_0^{4/3} N_0\left(-\frac{\cos\theta}{R}\right),\\ \frac{1}{b_0}N_{0,2} = J - \frac{\cos\theta}{R_0}N_0, \quad a_0 = 1 + \frac{1}{2}a_{0,22}\eta^2,\\ \frac{1}{b_0}\bar N_{0,2} = \frac{1}{9}\tilde V_2^2, \quad a_0\bar N_0 k_{20} = -\frac{a_0^2 N_{0,2}}{V_2}\times\\ \times\left(1 + \frac{2}{3}\frac{a_{0,22}}{a_0}\eta^2\right)\eta\left(1 + \frac{1}{6}\frac{N_{0,222}}{N_{0,2}}\eta^2\right)\times\\ \times\left(1 - \frac{1}{6}\bar J_{,22}\eta^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}b_3^2\eta^2\right)\frac{1}{b_0\eta}\left(1 + \frac{1}{6}b_3^2\eta^2\right);\\ -\frac{1}{4}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0\bar N_0 k_{20}\right)_{,22} - \frac{7}{6}k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} = -\frac{23}{54}\bar b_6\tilde V_2^2.\end{gathered} \tag{52}$$

Последнее выражение получено с учетом значения $\bar N_{0,2}$ в осесимметричном случае из (8).

Продолжая рассмотрение уравнения $\varphi_{,2} = h_2 E$, для $\varphi_{9,22}$ имеем ($\varphi_9 = 0$ на оси):

$$\begin{gathered}\frac{\bar b_{5,22}}{b_0^2} = \frac{28}{11}\left\{\frac{5}{4}\frac{\bar a_{5,22}}{b_0^2} + \left(\frac{1409}{2100}\kappa_{10} + \frac{68}{75}\kappa_{20}\right)\frac{a_{2,22}}{b_0^2} + \right.\\ + \left(-\frac{23}{84}\bar b_4 + \frac{3}{14}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} - \frac{65}{252}\tilde V_2^2\right)\frac{a_{1,22}}{b_0^2} + \\ + \left(\frac{449}{700}\kappa_{10} - \frac{233}{350}\kappa_{20}\right)\frac{\bar N_{0,2}^2}{b_0^2} + \\ + \left[\left(-\frac{4}{15}\bar b_4 - \frac{379}{5670}\tilde V_2^2\right)\kappa_{10} - \left(\frac{19}{15}\bar b_4 - \frac{1318}{2835}\tilde V_2^2\right)\kappa_{20}\right]\times\\ \times\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} + \left(\frac{11}{6}\bar\varphi_{11} - \frac{1}{3}\bar V_9 - \bar b_7\right)\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} - \frac{1}{2}\frac{1}{b_0^2}\left(a_1\bar N_0 k_{20}\right)_{,22} + \\ \left. + \left[k_{20}\bar N_0\left(\frac{31}{70}\kappa_{10}\bar N_0 + \frac{1}{5}\kappa_{20}\bar N_0 + \frac{9}{28}\frac{a_{1,2}}{b_0}\right)\right]_{,2}\right\}.\end{gathered} \tag{53}$$

Члены с производными, обязанными осесимметричности, раскрываются так:

$$\begin{gathered}a_1\bar N_0 k_{20} = -\frac{1}{2}a_{1,22}\eta^2\frac{a_0 N_{0,2}}{V_2}\eta\left(1 + \frac{1}{3}\frac{a_{0,22}}{a_0}\eta^2\right)\times\\ \times\left(1 + \frac{1}{6}\frac{N_{0,222}}{N_{0,2}}\eta^2\right)\times\left(1 - \frac{1}{6}\bar J_{,22}\eta^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}b_3^2\eta^2\right)\times\\ \times\frac{1}{b_0\eta}\left(1 + \frac{1}{6}b_3^2\eta^2\right) = -\frac{1}{9}a_{1,22}\tilde V_2^2\eta^2,\\ \left(a_1\bar N_0 k_{20}\right)_{,22} = -\frac{2}{9}a_{1,22}\tilde V_2^2, \quad \left(k_{20}\bar N_0^2\right)_{,2} = -\bar N_{0,2}^2,\\ \left(a_{1,2}k_{20}\bar N_0\right) = -a_{1,22}\bar N_{0,2}.\end{gathered} \tag{54}$$

В соответствии с формулами (42)–(44) нам необходимо вычислить производную $\bar b_{6,22}$ и коэффициент $\bar b_{12}$. Обозначим через $\bar B_{6,22}$ фрагмент функции $\bar b_{6,22}$, общий для осесимметричных и плоских течений и через $\bar\beta_{6,22}$ слагаемые, присущие осесимметричным потокам. Баланс членов порядка $x^{10/3}$, позволяющий рассчитать четвертую производную плотности тока эмиссии, приводит к следующему результату:

$$\begin{gathered}\frac{4}{9}\frac{\bar B_{6,22}}{b_0^2} = \frac{83}{225}\frac{1}{b_0^2}\left(\kappa_{10}\kappa_{10,22} + \kappa_{20}\kappa_{20,22}\right) + \\ + \frac{157}{900}\frac{1}{b_0^2}\left(\kappa_{20}\kappa_{10,22} + \kappa_{10}\kappa_{20,22}\right) - \left(6\bar b_9 + 2\bar b_3\bar b_6\right)\times\\ \times\left(\frac{28}{45}\kappa_{10} + \frac{38}{45}\kappa_{20}\right) - 2\bar b_6\left[\frac{383}{225}\left(\kappa_{10}^2 + \kappa_{20}^2\right)\right.\\ \left. + \frac{73}{50}\kappa_{10}\kappa_{20} + \frac{4}{9}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\right] - \frac{2}{9}\bar b_6^2 + \frac{11}{9}\frac{a_{6,22}}{b_0^2} + \\ + \left(\frac{332}{225}\kappa_{10}^2 + \frac{272}{225}\kappa_{20}^2 + \frac{254}{225}\kappa_{10}\kappa_{20} - \frac{1}{3}\bar V_{10} + \right.\\ \left. + 2\bar\varphi_{12} - \frac{1405}{10\,206}\bar b_4^2 + \frac{1445}{3402}\bar b_4\tilde V_2^2 - \frac{3364}{35\,721}\tilde V_2^4\right)\times\\ \times\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} + \left(-\frac{92}{135}\bar b_4 + \frac{733}{3780}\tilde V_2^2\right)\frac{\bar N_{0,2}^2}{b_0^2} + \\ + \frac{32\,506}{178\,605}\bar b_4\tilde V_2^4 - \frac{115}{23\,814}\tilde V_2^6.\end{gathered} \tag{55}$$

Функция $\bar\beta_{6,22}/b_0^2$ определена выражением

$$\begin{gathered}\frac{4}{9}\frac{\bar\beta_{6,22}}{b_0^2} = -\frac{2}{9}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0 k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0}\right)_{,22} - \frac{15}{64}\frac{1}{b_0^2}\left(a_0 k_{20}\bar N_0^3\right)_{,22} - \\ - \frac{3}{10}\frac{1}{b_0^2}\left(\bar a_2 a_0 k_{20}\bar N_0\right)_{,22} - \\ - \frac{1}{b_0}\left(\frac{11}{40}k_{20}\bar N_0\frac{a_{2,2}}{b_0} - \frac{263}{360}\bar b_4 k_{20}\bar N_0^2 + \right.\\ \left. + \frac{1}{6}k_{20}^2\bar N_0^3 + \frac{29}{72}k_{20}\bar N_0^2\tilde V_2^2\right)_{,2} + \frac{16}{9}\left(2\bar b_6 - \frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\right)\times\end{gathered}$$

$$\times a_0 k_{20}\frac{a_{0,2}}{b_0} - \frac{271}{1440}\frac{\bar N_0^2}{b_0^2} a_0 \bar N_0 k_{20} = $$
$$= 8\bar b_6^2 + \frac{8}{27}\bar b_3^2 \bar b_6 - \frac{32}{81}\bar b_6 \tilde V_2^2 + \frac{476\,977}{7\,348\,320}\tilde V_2^6. \qquad (56)$$

Функции $a_{k,22}$ из (43) при получении асимптотики для уравнения второго приближения (9) относительно $h_{2,22}$ и расчете четвертой производной плотности тока эмиссии (уравнения (51), (53)–(56)) выражаются через коэффициенты $\bar\varphi_k$, $\bar b_k$, связь между которыми устанавливает справедливое на оси $z$ уравнение (6). Поскольку это уравнение имеет различный вид для плоских и осесимметричных течений, два варианта потоков приходится рассматривать раздельно.

Сопоставление уравнений для $\bar a_{1,22}$, $\bar a_{2,22}$ из (43), (51) позволяет вычислить значения функций $\bar b_7$, $\bar b_8$, в то время как определение прочих $\bar b_k$ – отдельная задача:

$$\bar b_7 = -\frac{1}{7}\bar b_3 \bar b_4 + \left(\frac{23}{630}\kappa_{10} - \frac{1}{90}\kappa_{20}\right)\tilde V_2^2,$$
$$\bar b_8 = -\frac{1}{10}\bar b_4^2 - \frac{2}{7}\bar b_4\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} + \frac{3}{112}\left(k_{20}\bar N_0^2\right)_{,2} - \qquad (57)$$
$$- \frac{27}{560}\frac{\bar N_{0,2}^2}{b_0^2} + \frac{3}{112}\left(k_{20}\bar N_0^2\right)_{,2}.$$

## 5. СВЯЗЬ ФУНКЦИЙ $\bar\varphi_k$ И $\bar b_k$ НА ОСИ ПУЧКА

*Плоские потоки*. Предварим рассмотрение балансов в уравнении (6) специализацией уже полученных результатов:

$$\bar b_4 = -\frac{1}{6}\tilde V_2^2,\quad \frac{\bar N_{0,2}}{b_0} = \frac{2}{9}\tilde V_2^2,\quad \bar b_7 = \frac{4}{315}\kappa_{10}\tilde V_2^2,$$
$$\bar b_8 = \frac{101}{7560}\tilde V_2^4,\quad \bar\varphi_8 = \frac{13}{252}\tilde V_2^2,\quad \bar V_6 = -\frac{22}{63}\tilde V_2^2,$$
$$\frac{a_{1,22}}{b_0^2} = -\frac{46}{405}\kappa_{10}\tilde V_2^2,\quad \frac{a_{2,22}}{b_0^2} = -\frac{122}{1701}\tilde V_2^4;$$

$$\frac{\bar b_{4,22}}{b_0^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{7}\frac{\bar a_{4,22}}{b_0^2} - \frac{145}{378}\bar b_6\tilde V_2^2 + \frac{17}{162}\kappa_{10}\tilde V_2^2\right),$$
$$\frac{\bar b_{5,22}}{b_0^2} = \frac{28}{11}\left[\frac{5}{4}\frac{\bar a_{5,22}}{b_0^2} + \frac{1409}{2100}\kappa_{10}\frac{a_{2,22}}{b_0^2} - \right.$$
$$- \frac{83}{504}\frac{a_{1,22}}{b_0^2}\tilde V_2^2 + \frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\times \qquad (58)$$
$$\left.\times\left(\frac{449}{700}\frac{\bar N_{0,2}}{b_0} - \frac{127}{5670}\kappa_{10}\tilde V_2^2 + \frac{11}{6}\bar\varphi_{11} - \frac{1}{3}\bar V_9 - \bar b_7\right)\right],$$
$$\frac{\bar b_{6,22}}{b_0^2} = \frac{9}{4}\left[\frac{11}{9}\frac{\bar a_{6,22}}{b_0^2} + \frac{17}{9}\bar b_3\bar b_9 - \frac{2839}{450}\bar b_3^2\bar b_6 - \frac{2}{9}\bar b_6^2 + \right.$$
$$+ \frac{3487}{11340}\frac{\bar N_{0,2}^2}{b_0^2}\tilde V_2^2 + \frac{\bar N_{0,2}}{b_0}\left(-\frac{8}{9}\bar b_6 + \frac{332}{225}\bar b_3^2 + \right.$$
$$+2\bar\varphi_{12} - \frac{1}{3}\bar V_{10} - \frac{1405}{10206}\bar b_4^2 + \frac{1445}{3402}\bar b_4\tilde V_2^2 -$$
$$\left.\left. - \frac{3364}{35721}\tilde V_2^4\right) - \frac{769}{21870}\tilde V_2^6\right].$$

Выпишем балансы уравнения (6), начиная с членов порядка $x^{4/3}$:

$$\bar\varphi_{10} = -\frac{8}{9}\bar b_6 + \frac{83}{225}\bar b_3^2,\quad \bar\varphi_{11} = -\frac{44}{45}\bar b_7 -$$
$$- \frac{584}{675}\bar b_4 T_0 + \frac{152}{315}T_0\tilde V_2^2,$$
$$\bar\varphi_{12} = -\frac{58}{55}\bar b_8 + \frac{321}{21\,560}\tilde V_2^4,$$
$$\bar\varphi_{13} = \frac{37}{33}\left(-\bar b_9 - \frac{413}{370}\bar b_3\bar\varphi_{10} + \frac{39\,911}{249\,750}\bar b_3^3\right), \qquad (59)$$
$$\bar\varphi_{14} = \frac{9}{78}\left(-\frac{92}{9}\bar b_{10} - \frac{224}{45}\bar b_3\bar\varphi_{11} + \right.$$
$$\left. + \frac{23}{56}\bar\varphi_{10}\tilde V_2^2 - \frac{1381}{56\,700}\bar b_3^2\tilde V_2^2\right),$$
$$\bar\varphi_{15} = \frac{9}{91}\left(-\frac{112}{9}\bar b_{11} - \frac{364}{45}\bar b_3\bar\varphi_{12} + \right.$$
$$\left. + \frac{244}{189}\bar\varphi_{11}\tilde V_2^2 + \frac{5078}{178\,605}\bar b_3\tilde V_2^4\right);$$
$$\bar b_{12} = -\frac{1}{134}\left[105\bar\varphi_{16} + \frac{853}{10}\bar b_3\bar\varphi_{13} - \right.$$
$$- \left(11\bar\varphi_{12} + \frac{89}{21}\bar V_{10}\right)\tilde V_2^2 - \frac{3}{4}\bar\varphi_{10}^2 +$$
$$+ \left(83\bar b_6 + \frac{8}{25}\bar b_3^2\right)\bar\varphi_{10} - \frac{145}{63}\bar\varphi_8\tilde V_2^4 + 2\bar V_6^3 +$$
$$+ \left(-\frac{331}{63}\bar b_8 + \frac{8035}{7938}\bar b_4\tilde V_2^2 - \frac{5}{2}\bar V_6^2 - \frac{9}{4}\bar V_6\tilde V_2^2 - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{31}{4}\tilde V_2^4\right)\tilde V_2^2 - \frac{796}{15}\bar b_3\bar b_9 - \frac{5632}{354\,375}\bar b_3^4\right].$$

*Осесимметричные потоки*. Формулы для параметров осесимметричного течения, аналогичные (58), имеют вид[2]

$$\bar b_4 = -\frac{1}{12}\tilde V_2^2,\quad \frac{\bar N_{0,2}}{b_0} = \frac{1}{9}\tilde V_2^2,\quad \bar b_7 = \frac{17}{1260}\kappa_{10}\tilde V_2^2,$$
$$\bar b_8 = \frac{151}{30\,240}\tilde V_2^4,\quad \bar\varphi_8 = \frac{13}{252}\tilde V_2^2,\quad \bar V_6 = -\frac{22}{63}\tilde V_2^2,$$
$$\frac{a_{1,22}}{b_0^2} = \frac{32}{405}\kappa_{10}\tilde V_2^2,\quad \frac{a_{2,22}}{b_0^2} = -\frac{43}{1701}\tilde V_2^4,$$

[2] Исключение $\bar a_{k,22}$ из выражений для $\bar b_{k,22}$ по сравнению с формулами для плоских потоков обеспечивает более компактную форму записи.

$$
\begin{gathered}
\frac{\bar{b}_{4,22}}{b_0^2} = -15\bar{b}_{10} + \frac{323\,382}{16\,065}\bar{b}_3\bar{b}_7 + \frac{85}{21}\bar{b}_4\bar{b}_6, \\
\frac{\bar{b}_{5,22}}{b_0^2} = \frac{28}{11}\left[-\frac{110}{9}\bar{b}_{11} - \frac{50}{9}\bar{b}_3\bar{b}_8 - \frac{40}{9}\bar{b}_4\bar{b}_7 - \right. \\
- \frac{3313}{2100}\bar{b}_3\frac{a_{2,22}}{b_0^2} - \frac{65}{126}\frac{\bar{a}_{1,22}}{b_0^2}\tilde{V}_2^2 - \frac{917}{700}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} + \\
\left. + \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(-\frac{5963}{11340}\bar{b}_3 + \frac{11}{6}\bar{\varphi}_{11} - \frac{1}{3}\bar{V}_9 - \bar{b}_7\right)\right],
\end{gathered} \tag{60}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\bar{b}_{6,22}}{b_0^2} = \frac{9}{4}\left[-\frac{132}{9}\bar{b}_{12} - \frac{109}{45}\bar{b}_3\bar{b}_9 - \frac{484}{81}\bar{b}_4\bar{b}_8 + \right. \\
+ \frac{16}{3}\bar{b}_6^2 - \frac{2659}{270}\bar{b}_3^2\bar{b}_6 + \frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\left(-\frac{40}{9}\bar{b}_6 + \frac{289}{75}\bar{b}_3^2 + \right. \\
\left. + 2\bar{\varphi}_{12} - \frac{1}{3}\bar{V}_{10} - \frac{1405}{10\,206}\bar{b}_4^2 + \frac{64\,807}{90\,720}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2\right) - \\
\left. - \frac{10\,714}{535\,815}\tilde{V}_2^6\right].
\end{gathered}
$$

Балансы в уравнении (6) в осесимметричном случае приводят к следующим соотношениям:

$$
\begin{gathered}
\bar{\varphi}_{10} = -\frac{16}{9}\bar{b}_6 + \frac{163}{150}\bar{b}_3^2, \\
\bar{\varphi}_{11} = -\frac{88}{45}\bar{b}_7 - \frac{43}{45}\bar{b}_4 T_0 - \frac{1319}{56\,700}T_0\tilde{V}_2^2, \\
\bar{\varphi}_{12} = -\frac{116}{55}\bar{b}_8 + \frac{5699}{582120}\tilde{V}_2^4, \\
\bar{\varphi}_{13} = \frac{3}{11}\left(-\frac{74}{9}\bar{b}_9 + \frac{4898}{405}\bar{b}_3\bar{b}_6 - \frac{122\,029}{30\,375}\bar{b}_3^3\right), \\
\bar{\varphi}_{14} = \frac{9}{39}\left(-\frac{92}{9}\bar{b}_{10} - \frac{219}{90}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{11} + \right. \\
\left. + \frac{8259}{24192}\bar{\varphi}_{10}\bar{V}_2^2 - \frac{244\,501}{725\,760}\bar{b}_3^2\tilde{V}_2^2\right), \\
\bar{\varphi}_{15} = \frac{18}{91}\left(-\frac{112}{9}\bar{b}_{11} - 5\bar{b}_3\bar{\varphi}_{12} + \frac{1}{3}\bar{\varphi}_{11}\bar{V}_2^2 - \right. \\
\left. - \frac{1369\,973}{5\,000\,940}\bar{b}_3\tilde{V}_2^4\right); \quad \bar{b}_{12} = -\frac{1}{134}\left[\frac{105}{2}\bar{\varphi}_{16} + \right. \\
+ \frac{99}{5}\bar{b}_3\bar{\varphi}_{13} - \left(\frac{13}{4}\bar{\varphi}_{12} + \frac{41}{21}\bar{V}_{10}\right)\tilde{V}_2^2 - \frac{3}{8}\bar{\varphi}_{10}^2 + \\
+ \left(\frac{1075}{16}\bar{b}_6 - \frac{52}{75}\bar{b}_3^2\right)\bar{\varphi}_{10} - \frac{76}{567}\bar{\varphi}_8\tilde{V}_2^4 + \frac{1}{9}\bar{V}_6^3 + \\
+ \left(\frac{17}{9}\bar{b}_8 + \frac{3}{4}\bar{b}_4\tilde{V}_2^2 - \frac{5}{27}\bar{V}_6^2 - \frac{37}{216}\bar{V}_6\tilde{V}_2^2 + \frac{565}{31104}\tilde{V}_2^4\right) \times \\
\left. \times \tilde{V}_2^2 - \frac{1502}{15}\bar{b}_3\bar{b}_9 + \frac{7424}{50\,625}\bar{b}_3^4\right].
\end{gathered} \tag{61}
$$

Антипараксиальные разложения, определяющие асимптотику решения вблизи сингулярной стартовой поверхности при эмиссии в $\rho$-режиме, обладают тем свойством, что коэффициенты разложения потенциала $\varphi_{4+3k}$ могут быть заданы произвольно, в то время как коэффициенты с промежуточными значениями индексов жестко определены (регламентированы) значениями компонент магнитного поля на катоде и коэффициентами $\varphi_{4+3k}$. Впервые этот факт был отмечен в работе [11]. В применении к рассматриваемой задаче величины $\varphi_{4+3k}$, $k \ge 0$ задают плотность тока эмиссии $J$, кривизну катода $\kappa_{10}$, вторую производную $J_{,22}$, вторую производную кривизны $\kappa_{10,22}$, четвертую производную $J_{,2222}$ и т.д., полностью определяя тем самым физические и геометрические параметры пучка.

Связь пар $\bar{b}_4, \bar{\varphi}_8; \bar{b}_5, \bar{\varphi}_9; \bar{b}_7, \bar{\varphi}_{11}; \bar{b}_8, \bar{\varphi}_{12}$ позволяет рассчитать коэффициенты разложения потенциала при известных значениях $\bar{b}_k$, которые удалось установить на основе регуляризации решения. Соответствующие коэффициенты разложения скорости $\bar{V}_k$ следуют из интеграла энергии (48). Однако выполненная регуляризация не дает возможности указать значения коэффициентов $b_k \ne b_{3l}$ начиная с $k = 10$.

## 6. РЕГЛАМЕНТИРОВАННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ $b_k$, $k > 10$

Необходимые в рамках рассматриваемой модели коэффициенты $b_{10}$, $b_{11}$ связаны со значениями $\varphi_{14}$, $\varphi_{15}$; $V_{12}$, $V_{13}$. Эволюционное уравнение на оси $z$

$$
k_{1,2} = h_{2,11} \tag{62}
$$

из (8) позволяет выразить величины $\bar{b}_k$ через производные траекторных коэффициентов $f_k$ в формуле (21):

$$
\bar{b}_k = \frac{1}{b_0} f_{k,2}. \tag{63}
$$

Наиболее простой способ вычисления функций $f_k$ – построение антипараксиальных разложений в ортогональной системе $s$, $l$, $\psi$ (нормаль, длина дуги вдоль катода, азимут), связанной со стартовой поверхностью $s = 0$ и имеющей следующие коэффициенты Ляме:

$$
h_1 = 1, \quad h_2 = 1 - \kappa_{10}s, \quad h_3 = R = R_0(1 - \kappa_{20}s). \tag{64}
$$

Поверхность катода зададим параметрически

$$
R = R_0(l), \quad z = Z_0(l). \tag{65}
$$

Уравнения пучка в рассматриваемом случае определены соотношениями

$$
\begin{gathered}
\left(h_2 p_l\right)_{,s} - p_{s,l} + h_2 H_\psi = 0, \quad p_l^2 + p_s^2 = \left(1+\varphi\right)^2 - 1, \\
\left(h_2 h_3 \varphi_{,s}\right)_{,s} + \left(\frac{h_3}{h_2}\varphi_{,l}\right)_{,l} = h_2 h_3\left(1+\tilde{\varphi}\right)\sigma, \\
\sigma = \frac{\rho}{1+\varphi}, \quad \left(h_2 h_3 \sigma p_s\right)_{,s} + \left(h_2 \sigma p_l\right)_{,l} = 0, \\
-\left(h_3 H_\psi\right)_{,s} = h_3 \sigma p_l, \quad \vec{p} = \left(1+\varphi\right)\vec{v}.
\end{gathered}
\tag{66}
$$

Здесь $\vec{p}$ — импульс, $\sigma$ — скалярная плотность заряда. Структура решения соответствует эмиссии в $\rho$-режиме:

$$
\begin{gathered}
p_s = U_2 s^{2/3}\left(1 + \bar{U}_4 s^{2/3} + \bar{U}_5 s + \ldots\right), \\
p_l = U_2 s\left(\bar{V}_3 + \bar{V}_4 s^{1/3} + \bar{V}_5 s^{2/3} + \ldots\right), \\
\varphi = \varphi_4 s^{4/3}\left(1 + \bar{\varphi}_6 s^{2/3} + \bar{\varphi}_7 s + \ldots\right), \\
\sigma = s^{-2/3}\left(\sigma_{-2} + \sigma_0 s^{2/3} + \sigma_1 s + \ldots\right).
\end{gathered}
\tag{67}
$$

Дифференциальное уравнение траектории имеет вид

$$
\frac{dl}{ds} = \frac{p_l}{\left(1-\kappa_1 s\right)p_s} = \alpha_1 s^{1/3} + \alpha_3 s + \ldots + \alpha_8 s^{8/3}. \tag{68}
$$

Для решения поставленной задачи необходимо вычислить коэффициенты разложения компонент импульса вплоть до $\bar{V}_{10}$ и $\bar{U}_9$. Функции $\bar{V}_3(l), \bar{V}_5(l), \bar{V}_6(l), \bar{U}_4(l), \bar{U}_5(l)$ необходимо разложить в окрестности точки старта $l = l_0$, сохраняя приведенные ниже члены:

$$
\begin{gathered}
\bar{V}_3(l) = \bar{V}_3(l_0) + \bar{V}_3'(l_0)\bar{l} = \bar{V}_3(l_0) + \\
+ \bar{V}_3'(l_0)\left(l_4 s^{4/3} + l_6 s^2 + l_7 s^{7/3}\right), \\
\bar{V}_5(l) = \bar{V}_5(l_0) + \bar{V}_5'(l_0) l_4 s^{4/3}, \\
\bar{V}_6(l) = \bar{V}_6(l_0) + \bar{V}_6'(l_0) l_4 s^{4/3}, \\
\bar{U}_4(l) = \bar{U}_4(l_0) + \bar{U}_4'(l_0) l_4 s^{4/3}, \\
\bar{U}_5(l) = \bar{U}_5(l_0) + \bar{U}_5'(l_0) l_4 s^{4/3}, \\
\bar{l} = l - l_0 = l_4 s^{4/3} + l_6 s^2 + l_7 s^{7/3} + \ldots
\end{gathered}
\tag{69}
$$

Коэффициенты в правой части уравнения (68) с учетом разложений (69) вычисляются в точке $l = l_0$ и следующим образом связаны с коэффициентами из (67):

$$
\begin{gathered}
\alpha_1 = \bar{V}_3, \quad \alpha_3 = \bar{V}_5 - \bar{U}_4\bar{V}_3, \quad \alpha_4 = \bar{V}_6 - \bar{U}_5\bar{V}_3 + \kappa_{10}\alpha_1, \\
\alpha_5 = \bar{V}_7 - \bar{U}_4\bar{V}_5 + \left(-\bar{U}_6 + \bar{U}_4^2\right)\bar{V}_3 + \bar{V}_3' l_4, \\
\alpha_6 = \bar{V}_8 - \bar{U}_4\bar{V}_6 - \bar{U}_5\bar{V}_5 + \left(-\bar{U}_7 + 2\bar{U}_4\bar{U}_5\right)\bar{V}_3 + \kappa_{10}\alpha_3, \\
\alpha_7 = \bar{V}_9 - \bar{U}_4\bar{V}_7 - \bar{U}_5\bar{V}_6 + \left(-\bar{U}_6 + \bar{U}_4^2\right)\bar{V}_5 + \\
+ \left(-\bar{U}_8 + 2\bar{U}_4\bar{U}_6 + \bar{U}_5^2 - \bar{U}_4^3\right)\bar{V}_3 + \kappa_{10}\alpha_4 + \kappa_{10}^2\alpha_1 + \\
+ \bar{V}_3' l_6 + \left(\bar{V}_5' - \bar{U}_4\bar{V}_3' - V_3\bar{U}_4'\right) l_4, \\
\alpha_8 = \bar{V}_{10} - \bar{U}_4\bar{V}_8 - \bar{U}_5\bar{V}_7 + \\
+ \left(-\bar{U}_6 + \bar{U}_4^2\right)\bar{V}_6 + \left(-\bar{U}_7 + 2\bar{U}_4\bar{U}_5\right)\bar{V}_5 + \\
+ \left(-\bar{U}_9 + 2\bar{U}_4\bar{U}_7 + 2\bar{U}_5\bar{U}_6 - 3\bar{U}_4^2\bar{U}_5\right)\bar{V}_3 + \kappa_{10}\alpha_5 + \\
+ \bar{V}_3' l_7 + \left(\bar{V}_6' - V_3\bar{U}_5'\right) l_4.
\end{gathered}
\tag{70}
$$

Коэффициенты разложения компонент импульса в результате построения локального решения системы (66) определены формулами

$$
\begin{gathered}
U_2 = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3}, \quad \bar{U}_4 = -\frac{9}{20}\bar{N}_0^2, \quad \bar{U}_5 = \frac{4}{15}T_0, \\
\bar{U}_6 = \frac{3}{14}\bar{N}_0\bar{J}_{,2} - \frac{243}{2800}\bar{N}_0^4 + \frac{19}{126}\tilde{U}_2^2, \\
\bar{U}_7 = -\frac{12}{35}T_0\bar{N}_0^2, \\
\bar{U}_8 = \frac{67}{450}T_0^2 - \frac{2}{9}\kappa_{10}\kappa_{20} - \frac{2}{45}\left(\bar{J}_{,22} - k_{20}\bar{J}_{,2}\right) - \frac{1}{180}\bar{J}_{,2}'^2 + \\
+ \frac{61}{1680}\bar{N}_0^3\bar{J}_{,2} - \frac{29}{80}\bar{N}_0^2\bar{N}_{0,2} - \frac{1863}{56\,000}\bar{N}_0^6 + \frac{71}{2520}\bar{N}_0^2\tilde{U}_2^2, \\
\bar{U}_9 = \frac{1}{20}\left[\bar{N}_0\left(\frac{46}{21}\kappa_{10,2} + 2\kappa_{20,2}\right) + \right. \\
+ \left(\frac{1069}{135}\kappa_{10} + \frac{1837}{945}\kappa_{20}\right)\bar{N}_0\bar{J}_{,2} - \\
\left. - \frac{24\,839}{10\,500}T_0\bar{N}_0^4 + \left(\frac{78\,608}{15309}\kappa_{10} + \frac{79\,256}{15309}\kappa_{20}\right)\tilde{U}_2^2\right]; \\
\bar{V}_3 = -\bar{N}_0, \quad \bar{V}_5 = \frac{1}{5}\bar{J}_{,2}, \quad \bar{V}_6 = -\frac{1}{2}T_0\bar{N}_0, \\
\bar{V}_7 = -\frac{9}{140}\bar{N}_0^2\bar{J}_{,2} - \frac{27}{70}\bar{N}_0\bar{N}_{0,2} - \frac{1}{14}\bar{N}_0\tilde{U}_2^2, \\
\bar{V}_8 = \frac{1}{10}T_{0,2} + \left(\frac{7}{30}\kappa_{10} + \frac{1}{30}\kappa_{20}\right)\bar{J}_{,2}, \\
\bar{V}_9 = \left(-\frac{1}{2}\kappa_{10}^2 - \frac{1}{3}\kappa_{20}^2 - \frac{1}{6}\kappa_{10}\kappa_{20} + \frac{1}{14}\bar{J}_{,22} - \right. \\
\left. - \frac{1}{21}\bar{J}_{,2}^2 - \frac{27}{2800}\bar{N}_0^3\bar{J}_{,2}\right)\bar{N}_0 + \\
+ \left(\frac{1}{14}\bar{J}_{,2} - \frac{81}{700}\bar{N}_0^3\right)\bar{N}_{0,2} + \left(\frac{109}{1890}\bar{J}_{,2} + \frac{1}{30}\bar{N}_0^3\right)\tilde{U}_2^2, \\
\bar{V}_{10} = -\frac{3}{10}\left[\frac{12}{35}\bar{N}_0^2 T_{0,2} + \left(\frac{23}{70}\kappa_{10} + \frac{4}{35}\kappa_{20}\right)\bar{N}_0^2\bar{J}_{,2} + \right. \\
+ \left(\frac{69}{35}\kappa_{10} + \frac{24}{35}\kappa_{20}\right)\bar{N}_0\bar{N}_{0,2} + \\
\left. + \left(\frac{319}{630}\kappa_{10} + \frac{1}{6}\kappa_{20}\right)\bar{N}_0\tilde{U}_2^2\right].
\end{gathered}
\tag{71}
$$

В результате интегрирования уравнения (68) с правой частью (70) трубка тока в криволинейной системе $s$, $l$ описывается выражением

$$\bar{l} = l - l_0 = \frac{3}{4}\alpha_1 s^{4/3} + \frac{1}{2}\alpha_3 s^2 + \frac{3}{7}\alpha_4 s^{7/3} + \ldots. \qquad (72)$$

Воспользуемся связью [1, 2] произвольных ортогональных координат с локальными декартовыми координатами $X$, $Y$, которая для системы $s$, $l$ принимает вид

$$\begin{gathered} s = X - \frac{1}{2}\kappa_1 Y^2 - \frac{1}{6}\kappa_1' Y^3, \\ \bar{l} = Y + \kappa_1 XY + A_2 Y^3 + B_2 XY^2 + \kappa_1^2 X^2 Y. \end{gathered} \qquad (73)$$

Непоясняемые в (73) коэффициенты $A_2$, $B_2$ не являются существенными в рассматриваемом случае. Перейдем при помощи формул (73) к координатам $X$, $Y$:

$$\begin{gathered} Y = f_4 X^{4/3} + f_6 X^2 + f_7 X^{7/3} + \ldots \\ f_4 = \frac{3}{4}\alpha_1, \quad f_6 = \frac{1}{2}\alpha_3, \quad f_7 = \frac{3}{7}\alpha_4 - \kappa_1 f_4, \\ f_8 = \frac{3}{8}\alpha_5, \quad f_9 = \frac{1}{3}\alpha_6 - \kappa_1 f_6 - \frac{1}{2}\alpha_1\kappa_1 f_4^2, \\ f_{10} = \frac{3}{10}\alpha_7 - \kappa_1 f_7 - \kappa_1^2 f_4, \\ f_{11} = \frac{3}{11}\alpha_8 - \kappa_1 f_8 - B_2 f_4^2 - \alpha_1\kappa_1 f_4 f_6 - \frac{1}{2}\alpha_3\kappa_1 f_4^2. \end{gathered} \qquad (74)$$

Отметим, что в формуле (63) при вычислении функций $\bar{b}_k$ использовались траекторные коэффициенты из (21) для функции $Y = Y(l)$, а не для представления $Y = Y(X)$. Длина дуги $l$ для кривой (74) определена формулой

$$l = \int \sqrt{1 + Y'^2}\, dX, \qquad (75)$$

которую после интегрирования можно обратить, чтобы выразить $X$ через $l$. При этом различие величин $X$, $l$ описывается членами с нелинейными комбинациями коэффициентов $f_k$, которые при дифференцировании по $x^2$ и переходе к оси $z$, где все $f_k = 0$, дадут нулевой вклад. По этой причине при вычислении функций $\bar{b}_k$ можно дифференцировать траекторные коэффициенты (74). В результате получим

$$\begin{gathered} \bar{b}_4 = -\frac{3}{4}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}, \quad \bar{b}_6 = \frac{1}{10}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2}, \\ \bar{b}_7 = \left(\frac{31}{140}\kappa_{10} - \frac{1}{10}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}, \\ \bar{b}_8 = \frac{153}{1120}\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2} + \frac{5}{168}\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2, \\ \bar{b}_9 = \frac{1}{30}T_{0,22} - \kappa_{10}\bar{b}_6 + \left(\frac{19}{150}\kappa_{10} - \frac{1}{150}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2}, \\ \bar{b}_{10} = \frac{3}{10}\left[\left(-\frac{227}{90}\kappa_{10}^2 - \frac{23}{90}\kappa_{20}^2 - \frac{139}{45}\kappa_{10}\kappa_{20} + \right.\right. \\ \left. + \frac{31}{315}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2} + \frac{2}{45}k_{20}\frac{\bar{J}_{,2}}{b_0}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0} + \\ \left. + \frac{26}{945}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2}\tilde{V}_2^2\right] - \kappa_{10}\bar{b}_7 - \kappa_{10}^2\bar{b}_4, \\ \bar{b}_{11} = \frac{3}{11}\left[\left(-\frac{153}{175}\kappa_{10} - \frac{18}{175}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}^2}{b_0^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{151727}{765450}\kappa_{10} + \frac{3412}{15309}\kappa_{20}\right)\frac{\bar{N}_{0,2}}{b_0}\tilde{V}_2^2\right] - \kappa_{10}\bar{b}_8. \end{gathered} \qquad (76)$$

Связи между функциями $\bar{b}_k$ и $\bar{\varphi}_k$ в (61) позволяют установить значения коэффициентов разложения потенциала, а соотношения (48), следующие из интеграла энергии, дают возможность вычислить соответствующие коэффициенты $\bar{V}_k$ разложения скорости. В результате получена вся необходимая информация для построения асимптотики функции $h_{2,22}$ в (9) и формулы для четвертой производной плотности тока эмиссии $J_{,2222}$ в (42).

Выражения для $\bar{b}_7$, $\bar{b}_8$ в (76) представляют собой форму записи, альтернативную по отношению к выражениям (57), полученным из соображений регуляризации решения; обе формы приводят к тождественным результатам.

В случае плоских и осесимметричных потоков величины $\bar{b}_{10}$, $\bar{b}_{11}$ принимают следующие значения:

$$\begin{gathered} \bar{b}_{10} = -\left(\frac{1}{540}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2} + \frac{67}{4725}\kappa_{10}\right)\tilde{V}_2^2, \\ \bar{b}_{11} = -\frac{598628}{404157600}\kappa_{10}\tilde{V}_2^4; \\ \bar{b}_{10} = \left(\frac{13}{7560}\frac{\bar{J}_{,22}}{b_0^2} - \frac{22}{175}\kappa_{10}\right)\tilde{V}_2^2, \\ \bar{b}_{11} = \frac{4300171}{404157600}\kappa_{10}\tilde{V}_2^4. \end{gathered} \qquad (77)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная в работе модель плоскосимметричных и осесимметричных релятивистских потоков при отсутствии внешнего магнитного поля, сводящаяся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, позволяет синтезировать непараксиальный электронный пучок с катода заданной формы и с заданным распределением плотности тока эмиссии $J$. Произвольные значения плотности тока $J$, второй и четвертой производных $J_{,22}$, $J_{,2222}$ на оси, кривизны $\kappa_{10}$ катода и второй производной $\kappa_{10,22}$ достигаются за счет коэффициентов разложения потенциала $\varphi_4$, $\bar{\varphi}_7$, $\bar{\varphi}_{10}$, $\bar{\varphi}_{13}$, $\bar{\varphi}_{16}$. Соответствующие соотношения определяют связь между функциями $J$, $\kappa_1$ и $\varphi(z)$.

Рассмотренные конфигурации электронных потоков наиболее часто используются в приборах СВЧ и сильноточных ускорителях. Задача о формировании подобных течений даже в случае очень узких пучков не может быть решена методами классической параксиальной теории или теории В.Т. Овчарова [12], распространенной на релятивистские скорости, из-за невозможности выполнить условия термоэмиссии на стартовой поверхности при работе с ортогональной системой координат.

По сравнению с численными моделями, в том числе коммерческими пакетами траекторного анализа, предложенный в работе подход исключает ошибки, связанные с грубым описанием сингулярной прикатодной зоны. Дополненный известными алгоритмами расчета торцевой лапласовской области [13], основанными на теории антипараксиальных разложений, он служит основой для создания теплового зазора с теоретически обоснованной конфигурацией. Произвольное его исполнение для мощных пучков и пучков с высокой компрессией, обычное при использовании пакетов траекторного анализа, должно приводить к существенным ошибкам, которые впоследствии приходится компенсировать за счет экспериментальной доводки прибора. Проблемы, связанные с формированием теплового зазора и вариантами его практической реализации, обсуждаются в работе [14].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сыровой В.А.* Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. *Syrovoy V.A.* Theory of Intense Beams of Charged Particles. US: Elsevier, 2011.
3. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
4. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2014. Т. 59. № 4. С. 358.
5. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 3. С. 263.
6. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
7. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
8. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
9. *Вашковский А.В., Неганова Л.А., Сыровой В.А.* // Прикл. физика. 1998. № 3–4. С. 33.
10. *Сыровой В.А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 9. С. 1114.
11. *Алексахин Ю.И.* Препринт ОИЯИ № Р-81-619. 1984.
12. *Овчаров В.Т.* // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
13. *Сапронова Т.М., Сыровой В.А.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1106.
14. *Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А.* // Электрон. техника. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 717–724

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.3.049.774.2

# СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ И СРЕДСТВА УСКОРЕННОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПРИЕМОПЕРЕДАТЧИКОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ


**Д. А. Доможаков[a], *, С. В. Кондратенко[a]**

[a] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Каширское шоссе, 31, Москва, 115409 Российская Федерация*

**E-mail: dadomozhakov@mephi.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2021 г.
После доработки 28.01.2021 г.
Принята к публикации 15.02.2021 г.

Разработаны специализированные методы и реализующие их средства (высокоуровневые модели), способные существенно ускорить расчеты высокоскоростных приемопередатчиков последовательных каналов. Приведен подробный анализ временных затрат при расчетах и измерениях высокоскоростных приемопередатчиков и выигрышей от применения предложенных специализированных методов и средств на этапе проектирования этих устройств. Приведены примеры расчетов проектируемого приемопередатчика с определением основных параметров, характеризующих качество их работы, в том числе относительного числа ошибок при приеме.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070032

## ВВЕДЕНИЕ

Вместе со сложностью проектируемых систем на кристалле возрастает роль методов и средств их ускоренного высокоуровневого моделирования. Известны и широко используются различные методы и средства такого рода. К ним относятся, например, VHDL- и AHDL-модели цифровых и смешанных устройств, IBIS-модели периферийных узлов, поведенческие модели СВЧ-устройств на основе s-параметров, а также специализированные алгоритмы и пакеты моделирования отдельных классов устройств и систем (схемы на коммутируемых конденсаторах, те же СВЧ-устройства, аналоговые и цифровые фильтры и т.д.) [1–4]. Достаточно узкая специализация этих методов и средств – естественное следствие их повышенной вычислительной эффективности.

Характерный для высокоуровневого моделирования оценочный характер получаемых результатов создает проблему при проектировании периферийных высокоскоростных приемопередатчиков (ПВП) последовательных каналов. Основной показатель качества ПВП – относительное число ошибок при приеме – BER (Bit Error Rate), допустимый уровень которого для современных приемопередатчиков может составлять $10^{-12}$ или даже $10^{-15}$ [5]. Поэтому при проектировании ПВП необходим анализ длинных тестовых последовательностей и особенно важно в процессе расчетов исключить или снизить до допустимого уровня влияние локальных ошибок и их накопление, которые могут привести к недостоверным результатам и, в частности, к значениям показателя BER, отличающимся на несколько порядков от истинных значений. Следует отметить, что в большинстве работ, посвященных проектированию ПВП, основной упор делается не на контроле показателя BER в процессе проектирования, а на проверке значений этого показателя по результатам измерений изготовленных образцов ПВП.

Цель данной работы – усовершенствовать существующие специализированные методы и средства ускоренной характеризации высокоскоростных приемопередатчиков последовательных каналов, а также определить возможные варианты их практического применения.

## 1. ИДЕИ УСКОРЕННОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПРИЕМОПЕРЕДАТЧИКОВ

Идеи и методы ускоренной характеризации, развиваемые авторами в данной работе, связаны с анализом особенностей устройства и функционирования ПВП, которые содержат цифровые и аналоговые части (рис. 1).

Ключевой особенностью аналоговых частей, взаимодействующих непосредственно с линией передачи, являются возможные существенные искажения формы сигналов (нарушение целостности

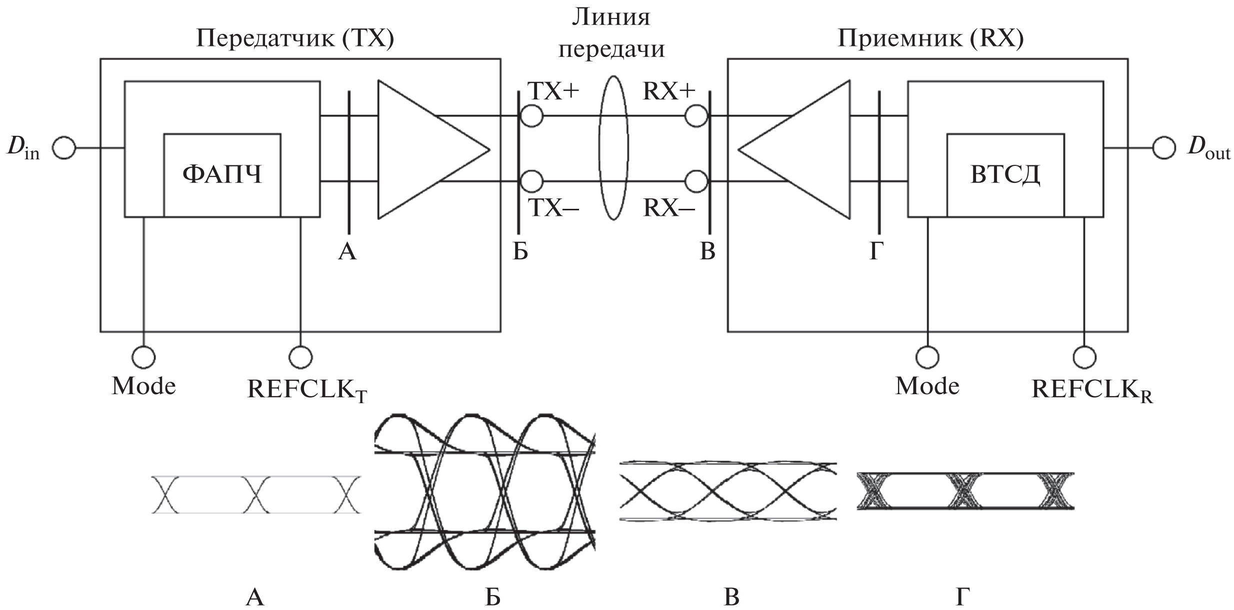



**Рис. 1.** Структура приемопередающего тракта и примеры глазковых диаграмм в сечениях А–Г.

сигналов) и, соответственно, необходимость контроля изменений как амплитуды, так и временных параметров сигналов в линии передачи и во внутренних каскадах передатчика и приемника до нормализации этих сигналов по амплитуде, что является необходимым условием преобразования аналоговых сигналов в цифровые. В свою очередь основными критичными блоками в цифровых частях является устройство фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) в передатчике и, особенно, устройство восстановления тактовых сигналов из данных (ВТСД) в приемнике. От точности восстановления тактового сигнала во времени, характеризуемой его джиттером, зависит вероятность ошибки при приеме, т.е. показатель BER, как интегральный показатель качества ПВП в целом.

Один из существенных эффектов, приводящих к нарушению целостности сигналов на выходе передатчика и далее, на входе приемника – межсимвольные интерференции (МСИ), являющиеся следствием наложения друг на друга не полностью законченных переходных процессов в сечениях Б, В на рис. 1 при смене передаваемых данных ($1 \rightarrow 0$ или $0 \rightarrow 1$). Для снижения влияния эффекта МСИ на качество работы приемопередающего тракта важно обеспечить сужение по основанию импульсной характеристики на входе приемника – в сечении В, желательно в пределах длительности передачи 1 бит (Т1). С этой целью используется опция предыскажений в передатчике, принцип действия и конкретные реализации которой описаны, например, в работах [6, 7]. В качестве примера на рис. 2а приведен вид переходной и импульсной характеристик, полученной дифференцированием сигнала на входе приемника – в сечении В на участке, соответствующем передаче последовательности бит 01111.

Примененная нами идея ускоренного моделирования эффекта МСИ состоит в том, что ПВП рассматривается как стационарная линейная система, включающая передатчик, линию передачи и приемник, Исследуемый сигнал передаваемой последовательности на выходе или в промежуточном выбранном сечении системы может быть представлен по принципу суперпозиции переходных процессов от серии положительных и отрицательных перепадов (рис. 2б). Для нахождения реакции системы на эту последовательность многократно используется один раз рассчитанная переходная характеристика.

Сигналы, поступающие на вход решающей части приемника (сечение Г на рис. 1), имеют шум в амплитудной и временной областях. Основной причиной возникновения битовых ошибок приема в данной части тракта является джиттер моментов перепадов принимаемых данных. Элементы последовательной логики приемника реализует операцию развертки последовательного потока данных в параллельный. Положение восстановленного блоком ВТСД тактового сигнала внутри битового интервала принимаемых данных существенно влияет на вероятность возникновения битовых ошибок. В связи с этим важной является задача контроля фазовых соотношений тактовых сигналов и принимаемых данных на входе цифровой части приемника и задача финальной оценки уровня BER при приеме данных.

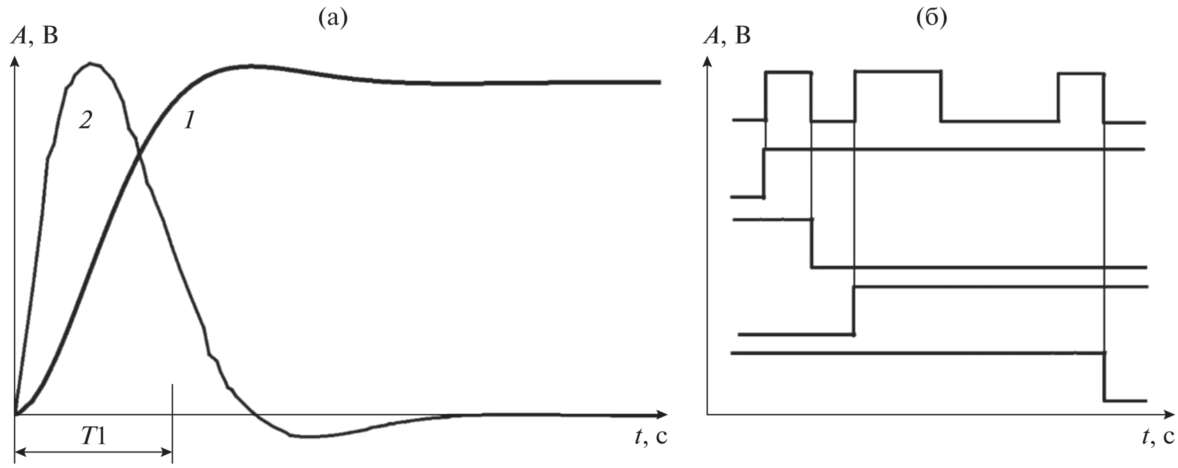



**Рис. 2.** Нормированные переходная (*1*) и импульсная (*2*) характеристики с длительностью по основанию, превышающей интервал $T1$ (а), разбиение входной псевдослучайной последовательности на серию положительных и отрицательных перепадов (б).

## 2. АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА УСКОРЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В работе [8] с участием авторов подробно описаны алгоритм и написанная в среде SciLab программа высокоуровневого поведенческого моделирования ПВП, а также представлены результаты расчетов, полученные с использованием этой программы. Выбор данного пакета прикладных математических программ был вызван, с одной стороны, его доступностью (возможностью свободного применения) и небольшими используемыми ресурсами на компьютере, а с другой стороны – широкими функциональными возможностями, далеко перекрывающими потребности решаемой задачи и составляющими в этом смысле альтернативу пакету MatLab, который имеет схожий язык программирования.

Алгоритм, реализующий описанный в работе [8, п. 1] метод ускоренного моделирования ПВП, предусматривает суммирование переходных процессов от одиночных перепадов входного сигнала. Кроме анализа влияния искажений передаваемых сигналов из-за МСИ возможен учет влияния шумов. Выигрыш во времени счета обусловлен тем, что реакция на единичный перепад системы была определена заранее (табл. 1). При этом нет компромисса с точностью расчетов, поскольку реакция на перепад может быть получена с использова-

**Таблица 1.** Абсолютные и относительные времена расчетов и измерений

| Способ получения результатов | Абсолютное время, затрачиваемое на расчет или измерение 1 бит (интервал времени $T1$) | Время расчетов на интервале $T1$, отнесенное ко времени измерения 1 бит | Примечания |
|---|---|---|---|
| Измерения в реальном времени | $T1 = 1/V = 400$ пс | 1 | – |
| Расчеты в САПР Cadence на транзисторном уровне | 171 мс | $0.43 \times 10^9$ | При максимальном шаге расчетов maxstep = 10 пс и включенной опции Transient Noise |
| | 165 мс | $0.41 \times 10^9$ | При отключенной опции Transient Noise |
| | 23 мс | $0.58 \times 10^8$ | При автоматически изменяющимся шаге расчетов и отключенной опции Transient Noise |
| Расчеты с использованием специализированной программы в среде SciLab | 30 мс | $0.75 \times 10^8$ | При $dt = 1$ пс |
| | 3.1 мс | $0.78 \times 10^7$ | При $dt = 10$ пс |

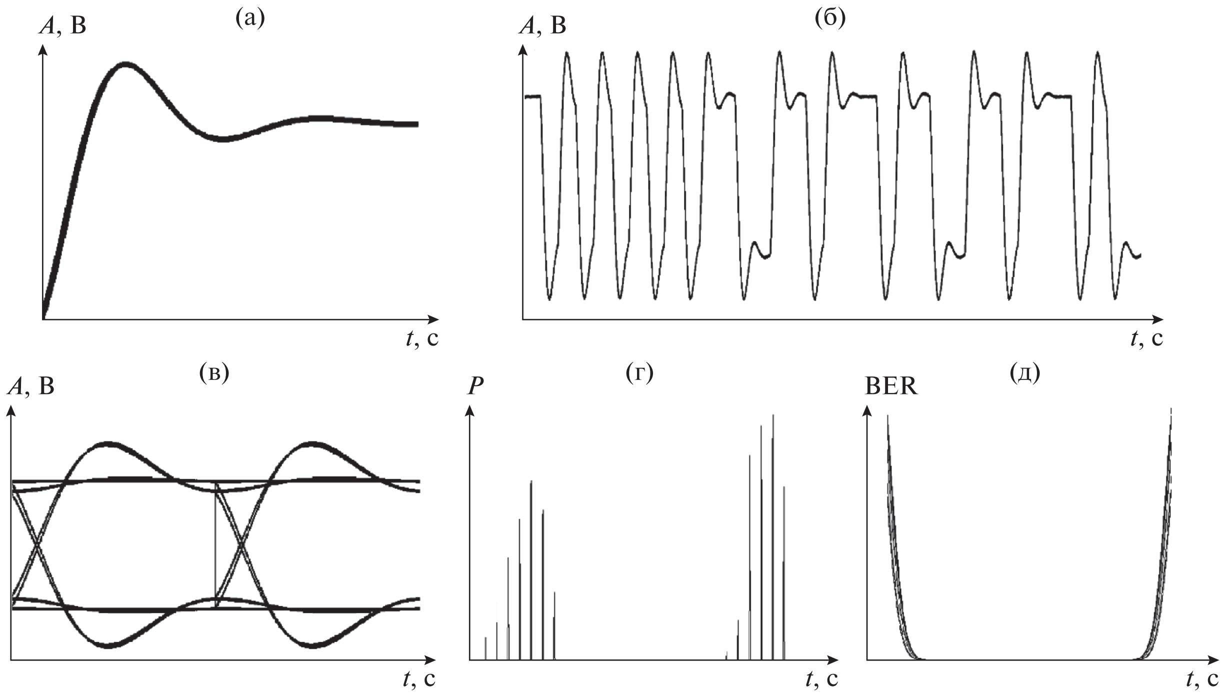



**Рис. 3.** Результаты моделирования для тестового примера: переходный процесс на интервале 5τ (а), фрагмент смоделированной реакции системы на псевдослучайный входной тестовый сигнал на интервале 1000T1 (б), глазковая диаграмма (в), распределение джиттера на интервале $T1$ (г) и U-образные кривые для определения показателя BER (д).

нием сколь угодно сложной модели исследуемой системы на транзисторном уровне. Моделирование на транзисторном уровне производилось на ограниченном интервале времени, который достаточен для практически полного установления переходного процесса (за время в несколько постоянных времени τ, характеризующих процесс установления). Недостаток описанного алгоритма состоит в его невысокой вычислительной эффективности: асимптотическая сложность находится на уровне $O(N^2)$, где $N$ – длина тестовой последовательности, выраженная в числе переданных бит или в равном ему числе единичных интервалов $T1$. Это ограничивает комфортное время моделирования в процессе проектирования ПВП при длине тестовых последовательностей в несколько сотен бит, что абсолютно недостаточно для получения сколько-нибудь статистически значимых результатов расчетов.

Авторами разработан и реализован алгоритм ускоренного моделирования ПВП типа "скользящего окна", когда в каждый текущий момент времени суммируются по принципу суперпозиции только те переходные процессы, которые попадают в интервал (условно) 5τ, гарантирующий высокую степень затухания переходных процессов. Нетрудно показать, что время счета как сочетание времен выполнения операций суммирования/вычитания с использованием исходного алгоритма и алгоритма ускоренного моделирования подчиняются соответственно соотношениям

$$t_{\text{сч.исх}} \sim \frac{N^2}{N_1} \quad \text{и} \quad t_{\text{сч.уск}} \sim N\frac{N_\tau}{N_1}. \qquad (1)$$

Здесь $N$ – общее число точек при расчетах во времени с заданным фиксированным шагом (по умолчанию в программе принят шаг $dt = 1$ пс, достаточно малый, чтобы не пропустить деталей переходных процессов), $N_1$ – число точек во времени, затрачиваемое на передачу одного бита информации (соответствует единичному интервалу $T1$, связанному со скоростью передачи ПВП $V$ соотношением $T1V = 1$), $N_\tau$ – число точек во времени, соответствующее затуханию с заданной точностью переходных процессов в выбранном сечении анализируемой системы (5τ в частном случае).

На рис. 3 приведены в иллюстративном виде (без детализации разметок по осям) исходные и обработанные результаты моделирования для сигнала на выходе передатчика (или в другом интересующем сечении в аналоговой части приемо-передающего тракта), переходный процесс которого задается выражениями

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-t/\tau)\cos(\omega_0 t), & \text{если} \quad t \le 5\tau \\ 1, & \text{если} \quad t > 5\tau \end{cases}, \qquad (2)$$

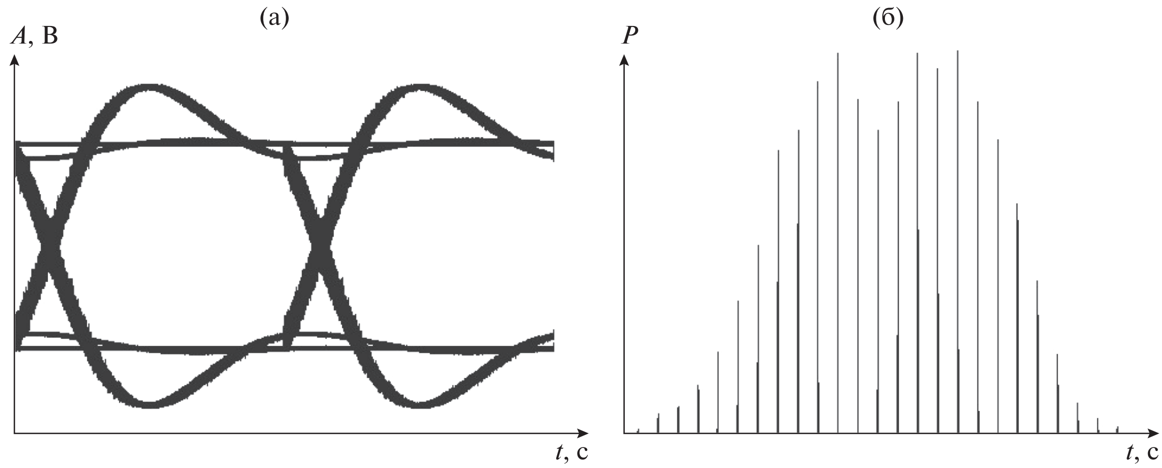



**Рис. 4.** Уточненные глазковая диаграмма (а) и распределение джиттера (б).

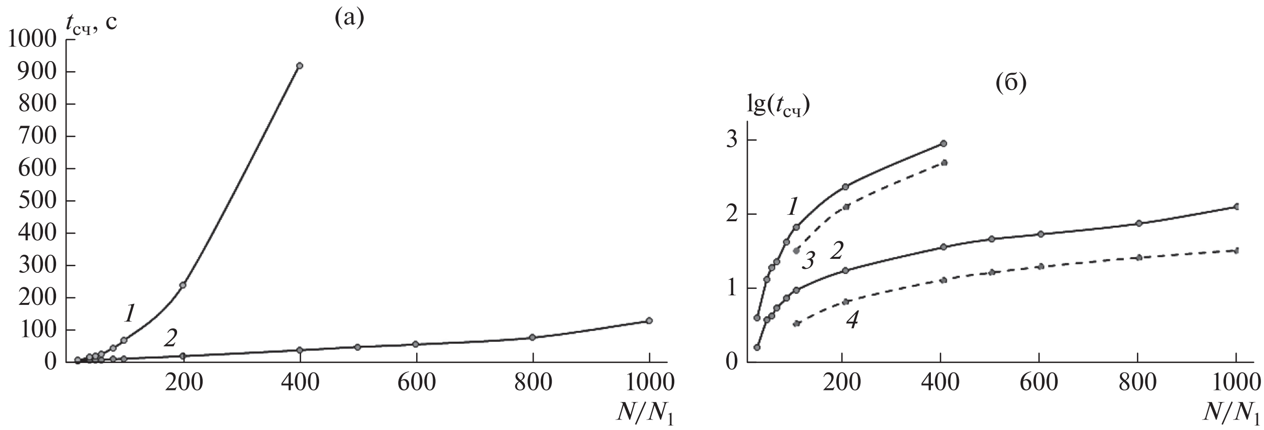



**Рис. 5.** Зависимости времени счета от нормированной длины тестовой последовательности в линейном (а) и логарифмическом масштабе (б): *1* – время исходного расчета, *2* – время ускоренного расчета, *3* – идеальная кривая $\lg N^2$, *4* – идеальная кривая $\lg N$.

при $\tau = 531$ пс и $f_0 = 73$ МГц ($\omega_0 = 2\pi f_0$). К сигналу подмешан шум 0.02 (rand()–0.5), где rand() – генератор случайных чисел в SciLab с равномерным распределением от 0 до 1.

Излишняя идеализация анализируемых устройств в специализированной программе может привести к отличию результатов расчетов от аналогичных экспериментальных данных. Для придания большей реалистичности и физического смысла были добавлены к используемой модели неопределенности (шумы) при формировании моментов времени смены отсчетов сигналов. Параметры таких шумов могут быть получены посредством моделирования передатчика и приемника на транзисторном уровне. Это позволяет получить более адекватную форму глазковой диаграммы и форму распределения джиттера (рис. 4), подобную наблюдаемым при измерениях гауссовским распределениям на экране осциллографа (ср. зависимости на рис. 3в и 3г).

На рис. 5 приведены зависимости времени счета от нормированной длины тестовой последовательности $N/N_1$, равной числу проанализированных единичных интервалов $T1$ ($T1 = 1.25$ нс в данном случае). На рис. 5а эти зависимости приведены в линейном масштабе по вертикальной оси. Расчеты произведены на ноутбуке с CPU i5-5200U 2.2 ГГц, RAM 4 ГБ. Видно, что на интервале $1000T1$ при использовании алгоритма ускоренного моделирования время счета составляет около 2 мин – достаточно комфортное время при проектировании. Для исходного алгоритма временные затраты недопустимо большие. На рис. 5б те же зависимоти приведены в логарифмическом масштабе по вертикальной оси, что позволяет проверить и подтвердить корректность приведенных выше зависимостей времени счета от $N$. Слабые отклонения от монотонных зависимостей связаны со случайным характером входного тестового сигнала, влияющим на конкретный численный результат.

## 3. АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ЗАТРАТ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ И РАСЧЕТАХ

Исходя из требований математической статистики для получения показателя BER с достоверностью не хуже 95% необходим анализ приемопередающего тракта при длине тестовой последовательности не меньше 3/BER [9]. Тогда требуемое время измерений $t_{изм}$ составит 3/(BER × $V$), так что $t_{изм}$ = 1400 с ≅ ≅ 23 мин при BER = $10^{-12}$ и $V$ = 2.5 Гбит/с. Из-за сложных моделей проектируемых ПВП (особенно на транзисторном уровне их представления) и необходимости анализа большого числа быстро протекающих переходных процессов в процессе тестирования получение значимых результатов расчетов существенно замедляется. Данную проблему усугубляет ограниченная производительность обычных компьютеров – рабочих станций (не многопроцессорных серверов или суперкомпьютеров). Вопросы могут состоять только в том, насколько время счета ограничивает длину теста при проектировании ПВП, какой выигрыш дает переход к высокоуровневому моделированию и каковы целесообразные варианты применения результатов расчетов на практике. Ответы на данные вопросы приведены ниже.

Выполнялось сравнение времен расчетов исследуемых устройств с использованием САПР сквозного моделирования Cadence (на транзисторном уровне представления этих устройств) и разработанной специализированной программы высокоуровневого моделирования, написанной в среде SciLab. Расчеты в среде Cadence выполнялись для конкретного варианта реализации аналоговых частей передатчика и приемника с интерфейсом CML, выполненных по КМОП-технологии с проектными нормами 180 нм и включенных в порядке “приемник–передатчик”. Сигнальный тракт содержит 6 CML каскадов или 12 одновременно задействованных транзисторов. На его выходе включены RLC модели выводов для отражения реальных процессов, приводящих к линейным искажениям сигналов (нарушению их целостности). В табл. 1 представлено сравнение абсолютных и относительных времен расчетов и измерений при скорости $V$ = 2.5 Гбит/с.

Анализ полученных результатов приводит к следующим выводам. Расчеты исследуемого тракта в САПР Cadence на транзисторном уровне при повышенной точности, учете влияния физических источников шумов во временной области и длине теста 1000$T$1 занимают несколько минут. Следует отметить, что такие расчеты выполняли на удаленном высокопроизводительном сервере (CPU i7-8700 3.2 ГГц, RAM 32 ГБ). Расчеты с использованием специализированной программы в среде SciLab и заведомо менее производительного компьютера при шаге расчетов $dt$ = 1 пс соизмеримы по времени с расчетами на транзисторном уровне при пониженной точности. Увеличение этого шага до $dt$ = 10 пс не приводит к видимым изменениям переходных процессов и глазковых диаграмм и позволяет практически пропорционально снизить общее время расчетов, делая реальным повышение длины тестовой последовательности до 10 000$T$1. В любом случае из-за отличий временных затрат при измерениях и расчетах на семь–девять порядков очевидно, что решаемые при расчетах задачи должны существенно отличаться от задач при измерениях.

## 4. АЛГОРИТМ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПОКАЗАТЕЛЯ BER В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В работе [10] представлены метод и конкретная методика расчета показателя BER на этапе проектирования, основанная на полуаналитической модели тракта передачи. Данная методика, так же как рассмотренная выше специализированная программа ускоренного моделирования, предполагает трудоемкие предварительные расчеты ПВП на транзисторном уровне только на ограниченных временных интервалах. Точность результата такого расчета подтверждена моделированием в САПР сквозного проектирования тракта передачи на выборках ограниченного объема со снижением отношения сигнал/шум.

Методика, основанная на полуаналитической модели тракта передачи, и специализированная программа, использующая табличные модели исследуемых устройств, дополняют друг друга. В рамках методики посредством моделирования ПВП в САПР Cadence определяются характеристики случайного джиттера моментов перепадов передаваемых данных и тактовых сигналов. С помощью специализированной программы определяется детерминированная составляющая джиттера как следствие межсимвольной интерференции. На основании полученных результатов с учетом архитектуры исследуемого ПВП формируется полуаналитическая модель тракта. В тракт входят блоки – участники процесса обработки и передачи данных. Результатом расчетов с использованием полученной полуаналитической модели тракта являются U-образные кривые (рис. 6).

Сложность полуаналитической модели и время расчетов ПВП с ее использованием не зависят

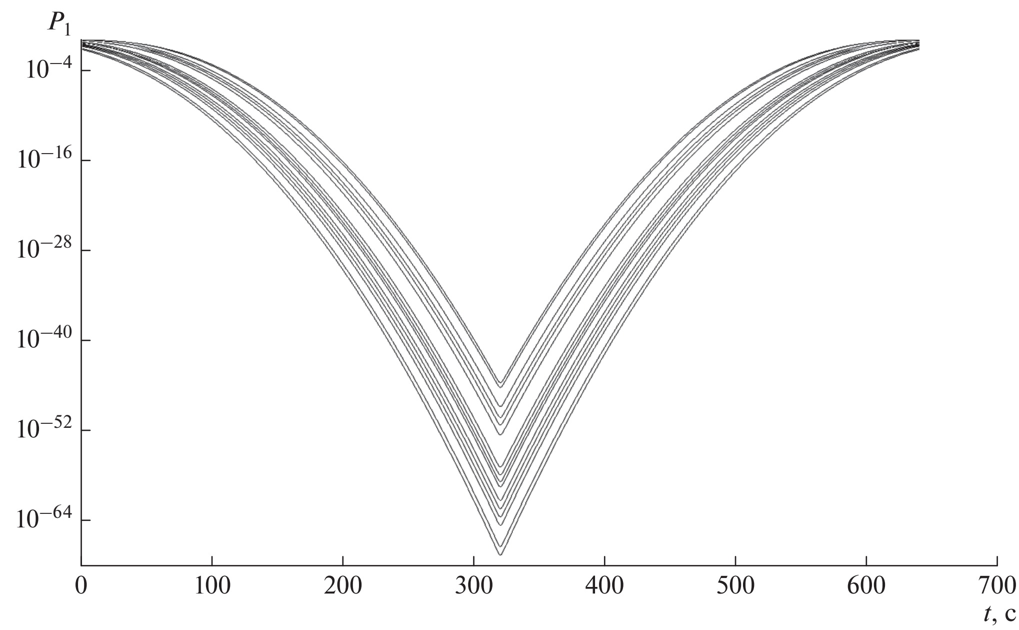



**Рис. 6.** Уточненные U-образные кривые для определения показателя BER.

от уровня представления тракта при его расчетах с использованием САПР, будь это транзисторное представление или представление с учетом паразитных топологических структур. Возрастает только время построения самой полуаналитической модели, которое несоизмеримо меньше времени расчетов ПВП на транзисторном уровне с использованием САПР на длинных тестовых последовательностях. Таким образом, становится возможной оперативная оценка на этапе проектирования вклада отдельных блоков в составе тракта в величину показателя BER. Возрастает также точность определения этого показателя в связи с учетом основных составляющих джиттера, а не только его детерминированной составляющей, полученной по результатам анализа табличных моделей.

## 5. ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЛАГАЕМЫХ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ НА ПРАКТИКЕ

Как универсальные, так и специализированные средства расчетов являются инструментами, настраиваемыми пользователями, если исходить из необходимости достижения компромисса между точностью и временными затратами. Особенностью расчетов аналоговых частей ПВП, как отмечено ранее, являются одновременно высокие требования к точности и к объему выборки – длине теста (т.е. времени расчетов), если принять во внимание необходимость обнаружения и корректного моделирования маловероятных событий, способных ухудшить показатель BER. В этом смысле предлагаемый алгоритм и специализированная программа, использующая представление исследуемых устройств в виде высокоуровневых табличных моделей типа “вход–выход”, сама реализует компромисс между точностью и временем расчетов, недостижимый при использовании САПР сквозного моделирования устройств на транзисторном уровне. Однако, как показано в разд. 3, даже при использовании такой специализированной программы возможная длина теста составляет $10^3...10^4$ единичных интервалов $T1$ из-за практических ограничений на время расчетов. К тому же необходимо иметь в виду дополнительные “накладные расходы”, связанные с обменом данными между универсальной САПР и специализированной программой, а также с обработкой результатов расчетов, которая также может занять существенное время. Что касается связи между САПР и внешними математическими программами, то она может быть организована имеющимися в САПР штатными средствами (скрипты, прямая поддержка таких пакетов).

В целом рекомендации по использованию предлагаемых методов и специализированных средств ускоренной характеризации ПВП следующие.

– Специализированная программа не предназначена и не может быть применена для прямого получения результатов расчетов в объеме, достаточном для определения статистически значимых значений показателя BER, и в этом смысле не может конкурировать с прямыми измерениями готовых образцов.

– Специализированная программа способна снизить временные затраты при расчетах ПВП как минимум на порядок в сравнении с универсальной САПР при той же точности расчетов и наилучшим образом подходит для расчетов на наихудший случай при условии применения коротких (длиной до $10^3...10^4$ единичных интервалов $T1$, бит) "тяжелых" тестовых последовательностей, которые провоцируют условия возникновения ошибок при приеме и ухудшение показателя BER.

– Преимущество использования специализированной программы в сравнении с универсальной САПР с точки зрения времени расчетов особенно ярко проявляется на финальном этапе проектирования, когда реализуется проверка влияния паразитных параметров топологии на параметры проектируемых устройств. Из-за роста числа узлов в схемах время счета с использованием САПР при этом может увеличиться более чем на порядок. Как отмечено в п. 4, сложность высокоуровневых моделей с учетом паразитных параметров топологии и время расчетов с использованием специализированной программы практически не меняются, даже с учетом затрат на время построения таких моделей.

– Предложенный подход на основе высокоуровневых табличных моделей в совокупности с методикой расчета, описанной в разд. 4, позволяют построить единую полуаналитическую модель приемопередающего тракта и с ее помощью произвести статистически значимый расчет показателя BER. При этом основной объем временных затрат приходится на формирование модели. Полуаналитическая модель состоит из независящих друг от друга частей, повторяющих структурные блоки ПВП. При данном подходе параметрический анализ не требует значительного времени расчета, поскольку финальный этап оценки величины BER не требует повторного моделирования тракта целиком, как это реализовано в стандартных САПР сквозного проектирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные специализированные методы и средства в совокупности решают задачу ускоренной характеризации проектируемых высокоскоростных приемопередатчиков последовательных каналов. Выигрыш во времени счета в сравнении с использованием САПР сквозного проектирования достигается не за счет снижения точности расчетов, а за счет детального анализа исследуемых устройств на коротких временных интервалах (до $10^3...10^4$ бит) и последующего высокоуровневого моделирования процессов в приемопередающем тракте, вносящих определяющий вклад в интегральный показатель качества BER. В сравнении с САПР использование разработанной специализированной программы обеспечивает выигрыш во времени расчетов, по крайней мере, на порядок. Предложенная методика построения и анализа единой полуаналитической модели тракта обеспечивает получение корректных оценок показателя BER на этапе проектирования, не откладывая решение этой задачи на этап измерения готовых образцов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Рабаи Ж.М., Чандракасан А., Николич Б.* Цифровые интегральные схемы. Методология проектирования. М.: ИД Вильямс, 2007.
2. IBIS (I/O Buffer Information Specification). Version 7.0. Ratified March 15, 2019. IBIS Open Forum, 2019.
3. *Seng-Pan U., Martins R.P., da Franca J.E.* Design of very High-Frequency Multirate Switched-Capacitor Circuits. Dordrecht: Springer, 2006.
4. *Разевиг В.Д., Потапов Ю.В., Курушин А.А.* Проектирование СВЧ устройств с помощью Microwave Office. М.: СОЛОН-Пресс, 2003.
5. *Redd J.* // Lightwave Magazine. 2004. V. 21. № 9. P. 16647704.
6. Understanding the Pre-Emphasis and Linear Equalization Features in Stratix IV GX Devices. Altera Corporation Applicatoin Note. 2011.
7. *Ševčík B., Brančík L., Kubíček M.* // Int. J. Mathematical Models and Methods in Appl. Sci. 2011. V. 5. № 3. P. 433.
8. *Доможаков Д.А., Кондратенко С.В.* // Вопр. радиоэлектроники. 2019. № 8. С. 64.
9. *Mitic D., Lebl A., Markov Z.* // Serbian J. Electr. Eng. 2012. № 9. P. 361.
10. *Байков В.Д., Доможаков Д.А., Дубинский А.В.* // Наноиндустрия. 2019. Спецвыпуск. С. 287.

*РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2021, том 66, № 7, с. 725–728*

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

*УДК 796.015.59*

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОМИОСТИМУЛЯТОРА ПОВЫШЕННОЙ МОЩНОСТИ

**© 2021 г. П. С. Мартьянов***

*Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН,*
*ул. Бутлерова,15, Москва, 117342 Российская Федерация*

**E-mail: La3232@mail.ru*

Поступила в редакцию 13.01.2021 г.
После доработки 13.01.2021 г.
Принята к публикации 23.01.2021 г.

Представлена разработка оригинального электромитстимулятора, а также исследованы функциональные возможности предлагаемого устройства. Основной особенностью данного устройства является получение выходного сигнала повышенной мощности, а также его применение в полуавтоматическом режиме. Данный электромиостимулятор был создан в НТЦ УП РАН на основе предыдущих разработок в этой области. Проведен пробный эксперимент с целью испытания данного прибора в тренировочном процессе спортсменов высокой квалификации.

**DOI:** 10.31857/S0033849421070081

## ВВЕДЕНИЕ

Среди множества разработанных спортивных электронных приборов представлены различные модели электромиостимуляторов. Особенность электромиостимуляции заключается в том, что она воздействует с помощью электрических сигналов на нервно-мышечный аппарат человека и активизирует большее количество мышечных волокон, чем при естественном мышечном сокращении. Это позволяет развивать большие мышечные усилия, а в случае невозможности осуществления самопроизвольных сокращений осуществлять движение в неподвижной до этого мышце. В различных литературных источниках отмечается положительное влияние на повышение физических качеств атлетов. Наиболее существенные отличия выявлены в показателях силы, гибкости и быстроты [1, 2]. Важно, что электромиостимуляционый (ЭМС) сигнал воздействует на нервномышечный аппарат атлетов как в статическом положении тела (так называемая электромиостимуляционная тренировка) [3], так и при воспроизведении упражнения в определенной фазе движения (в зависимости от тех двигательных задач, которые ставятся перед спортсменом в данный момент времени) [1]. Кроме того, режимы подачи ЭМС-сигналов на работающие мышцы атлетов могут быть различными, например, режим “двигательной подсказки” или режим “мощностного наполнения” [4]. Данный метод тренировочного воздействия применяется в различных видах спорта: в тяжелой атлетике, велоспорте, силовом троеборье, легкой атлетике, гимнастике и др.

Представленный в работе электромиостимулятор имеет два выходных канала: первый канал работает в автоматическом режиме, что позволяет самостоятельно регулировать такие параметры, как частота выходного сигнала, амплитуда, длительность пачки импульсов, скважность. Второй выходной канал полуавтоматический, т.е. длительность самой пачки импульсов можно выбирать любую, это необходимо для ЭМС-тренировки в преодолевающей или уступающей фазе движения.

Для более эффективного воздействия ЭМС-сигнал может иметь различную форму импульсов, частоту, амплитуду, скважность. Перечисленные параметры могут варьироваться в широком диапазоне. В ходе экспериментальных исследований были определены оптимальные величины частоты и скважности [5]. Величина ЭМС-сигнала, как правило, ограничивается индивидуальными особенностями организма спортсменов. Что касается формы сигнала, то чаще применяется прямоугольная, реже — треугольная. Это связано с тем, что сигнал прямоугольной формы оказывает более масштабное воздействие на нервно-мышечный аппарат человека и делает мышечное сокращение гораздо мощнее, за счет вовлечение в работу большего числа двигательных единиц.

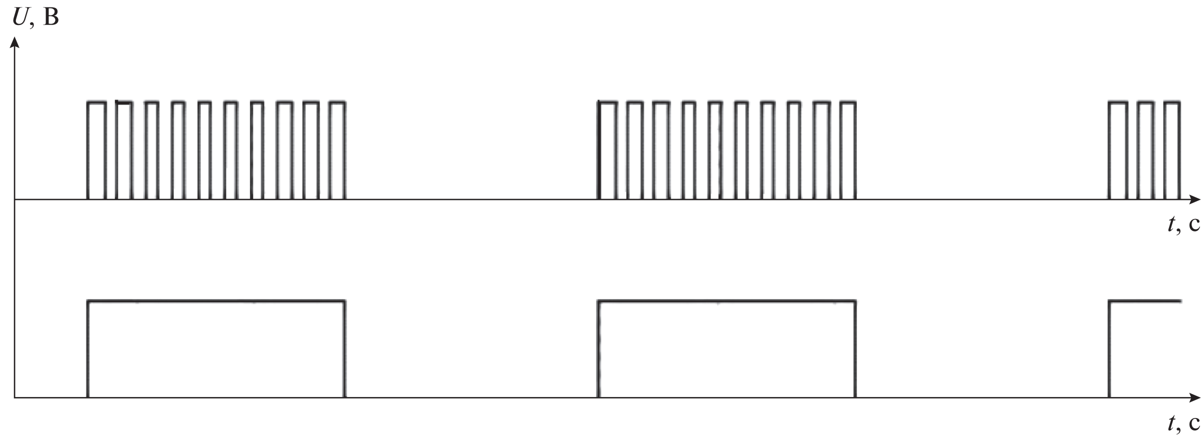



**Рис. 1.** Схематическое изображение сигнала в виде пачек импульсов.

## 1. ОПИСАНИЕ УСТРОЙСТВА

Стандартная тренировка с использованием ЭМС-воздействия осуществляется в виде активизации нервно-мышечного аппарата атлета серией последовательных пачек импульсов, с определенной частотой, длительностью и скважностью. Схематическое изображение выходного сигнала в виде последовательности импульсов представлено на рис. 1.

Отличие разработанного макета электромиостимулятора от предыдущего, реализованного нами устройства состоит в том, что воздействие на мышцы атлета производится непосредственно во время выполнения упражнения. При использовании автоматического режима работы (периодическая последовательность пачек импульсов) сложно подстроиться в ритм движения атлета при выполнении им упражнения. Для этого намного удобней использовать полуавтоматический режим работы устройства, когда воздействие сигнала на мышцы атлета осуществляется в нужный момент времени с целью развития максимальных усилий [6].

Мощность выходного ЭМС-сигнала зависит от разных параметров. У стимуляторов Миоволна-4, Миомодель-10, SilverFoxF-905, NV-2000X (а также их аналогов) интенсивность (мощность) воздействия достигается за счет увеличения длительности каждого импульса в пачке. В этом случае испытуемый чувствует более сильное сокращение мышц. В предлагаемом нами стимуляторе интенсивность воздействия на нервно-мышечный аппарат увеличивается за счет роста амплитуды сигнала без увеличения длительности импульсов. Результаты экспериментов показывают, что этот метод более эффективен для увеличения силовых показателей и больше подходит для спортсменов высокой квалификации. Кроме того, сокращение длительности импульсов в пачке дает возможность осуществить ЭМС-воздействие непосредственно в движении, поскольку длительность определенных фаз в различных упражнениях измеряется секундами и миллисекундами. Второй выходной канал устройства работает в полуавтоматическом режиме, когда при включении тумблера на корпусе формируются пачки импульсов с теми же параметрами амплитуды и частоты, что и на первом выходном канале. Это особенно необходимо для более согласованного включения мышц при использовании устройства во время выполнения упражнения.

Фотография электромиостимулятора приведена на рис. 2. Основные его характеристики: напряжения питания 12 В, амплитуда выходного сигнала 12...60 В, форма сигнала – однополярный меандр, частота 50...110 Гц, длительность пачки импульсов 0.5...6 с.

Для генерации высоковольтного сигнала в макете использовался импульсный повышающий регулятор напряжения LM2577, который преобразовывает постоянное входное напряжение в напряжение на выходе в диапазоне 3.5...70 В. Данное решение позволило не использовать трансформаторы, которые являются громоздкими, занимают довольно большую площадь печатной платы и увеличивают габариты устройства и вес конструкции.

Для проектирования ниже предложенного макета электромиостимулятора использовалась структурная схема, которая представленная на рис. 3. Повышающий регулятор напряжения LM2577 преобразовывает входное напряжение питания 12 В в регулируемое напряжение от 12 до 60 В, необходимое для работы транзисторного ключа. Регулировка напряжения от 12 до 60 В осуществляется за счет переменных резисторов 16K1 номиналом 25 кОм. Стабилизатор напряжения LM7805 преобразовывает напряжение 12 в 5 В, что нужно для питания микросхем таймеров NE555 и элемента И-Не. Первый таймер генерирует импульсы в диапазоне ча-


**Рис. 2.** Макет электромиостимулятора.

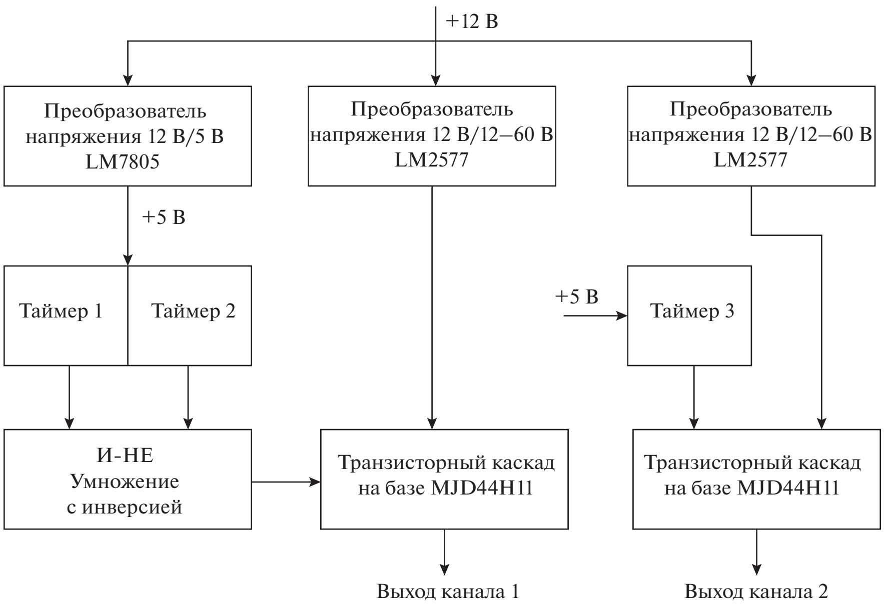



**Рис. 3.** Структурная схема электромиостимулятора.

стот 50...110 Гц, второй таймер – в диапазоне частот 0.2...2 Гц. Регулировка частоты сигнала осуществляется с использованием переменных резисторов 16К1 номиналами 25 и 50 кОм. Далее эти два сигнала умножаются с инверсией микросхемой логики И-НЕ, в результате чего получаются уже пачки импульсов амплитудой около 5 В. Эти пачки импульсов поступают на вход транзисторного ключа на базе высоковольтных транзисторов MJD44H11 и MJD45H11, которые усиливают выходной сигнал в диапазоне значений амплитуд 12...60 В в зависимости от требований. Затем с выхода первого канал сигнал поступает на электроды из токопроводящей ткани, закрепленные на теле испытуемого. Полуавтоматический режим работы обеспечивает второй канал, формирующий непрерывный импульсный сигнал с такими же значениями амплитуды и частоты с тем отличием, что сигнал подается на выход 2 при нажатии тактовой кнопки, поэтому использование второго таймера и умножителя не нужно. Если кнопка не нажата, то на выходе 2 сигнала нет. В

**Рис. 4.** Фотография внешнего вида печатного узла.

цепях 1 и 2 канала стоят вольтметры, которые показывают выходную амплитуду сигнала.

Фотография внешнего вида печатного узла макета устройства представлена на рис. 4.

На заключительном этапе был проведен пробный эксперимент с разработанным макетом. ЭМС-воздействие производилось на мышцы рук предплечья с амплитудой сигнала в диапазоне 30...55 В с частотой в диапазоне 60...100 Гц в течение одного одного месяца два-три раза в неделю по 10–15 мин. Силовые показатели мышц предплечья измеряли на ручном динамометре. В результате эксперимента, сила сгибателей мышц кисти увеличилась в среднем на 30%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан макет высоковольтного электромиостимулятора. Для реализации высоковольтных цепей применялся преобразователь напряжения LM2577, что дало значительный выигрыш по габаритам и массе устройства по сравнению с использованием трансформатора.

2. Реализован полуавтоматический канал, дающий возможность использовать устройство в нужный момент при выполнении атлетом упражнения.

3. Проведен пробный эксперимент, показывающий эффективность применения макета электромистимулятора для увеличения силовых показателей атлетов высокой квалификации.

4. По результатам работы был получен патент на полезную модель [7].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Мартьянов С.С.* Методические приемы адаптивной коррекции движения в тяжелоатлетических упражнений и их реализация при помощи программирующих устройств: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. М.: Всесоюз. научно-исслед. ин-т физической культуры (ВНИИФК), 1989. 20 с.
2. *Мартьянов С.С., Кубышева Н.Л., Мартьянов П.С.* // Междунар. сб. научных трудов “Интеграция мировых научных процессов как основа общественного прогресса”. Вып. 44. Казань: Общество науки и творчества. 2016. С. 183.
3. *Коц Я.М.* Спортивная физиология. Учебник. М.: Физкультура и спорт, 1998. С. 200.
4. *Ратов И.П.* // Теория и практика физической культуры. 1976. № 10. С. 66.
5. *Мартьянов С.С.* // Обучение и воспитание: методики и практика. 2015. № 23. С. 104.
6. *Мартьянов П.С., Чуриков Д.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 10. С. 1037.
7. *Мартьянов П.С.* Электромиостимулятор повышенной мощности // Пат. РФ № 191018. Опубл. офиц. бюл. “Изобретения. Полезные модели” № 20. 18.07.2019 г.