



Российская Академия Наук

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

3

МАРТ

Москва

2022

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

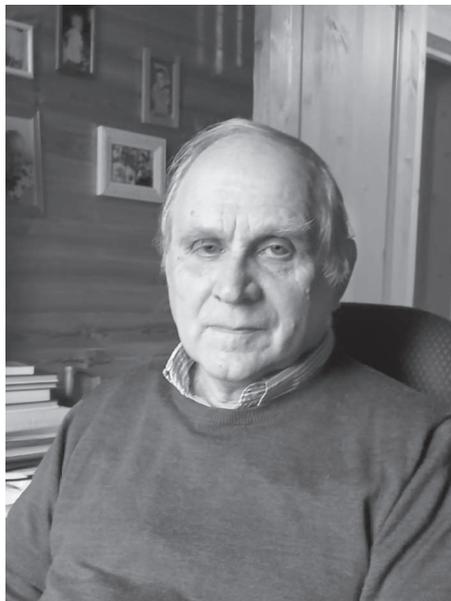
Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»



**Миллер Борис Михайлович
(к 70-летию со дня рождения)**

DOI: 10.31857/S0005231022030011

3 октября 2021 г. исполнилось 70 лет члену редколлегии нашего журнала, профессору, доктору физико-математических наук, главному научному сотруднику Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Миллеру Борису Михайловичу.

Миллер Борис Михайлович — выдающийся ученый в области теории оптимального управления дискретно-непрерывными детерминированными и стохастическими динамическими системами. Им опубликовано более 200 научных работ, из них 6 монографий, 107 статей в российских и зарубежных журналах и сборниках, среди которых «Автоматика и телемеханика», «SIAM J. Control & Optimization», «Automatica», журналы MDPI: «Sensors», «Drones», «Remote Sensing», издания IEEE, IFAC, IMACS, 8 патентов и авторских свидетельств и многие другие. Круг научных интересов Бориса Михайловича включает не только задачи оптимального управления, но и проблемы обработки изображений применительно к задачам навигации автономных беспилотных авиационных и подводных аппаратов, а также применение методов теории управления в задачах контроля водохранилищ, в механических системах с ударными воздействиями и в задачах управления передачей данных через беспроводные линии связи.

Способности Б.М. Миллера к точным наукам проявились еще в школе, когда он выигрывал областные олимпиады по математике и физике в г. Ижевске, был отмечен среди победителей Всесоюзной Олимпиады по физике и был принят в физико-математическую школу-интернат №18 при МГУ, которой руководил академик А.Н. Колмогоров. После окончания школы поступил в МФТИ, где ему повезло оказаться на базовой кафедре в Институте проблем управления в лаборатории, которой руководил профессор А.М. Петровский и где работали выдающиеся специалисты в области прикладной статистики и стохастического управления Р.Ш. Липцер, В.Н. Вапник, А.И. Яшин.

Одной из тем работы лаборатории было управление лечением злокачественных заболеваний, где характерна разномасштабность развития заболеваний и терапевтических воздействий (радио и хемотерапия), для которых в те годы было трудно избежать поражающего воздействия на здоровые ткани, а не только на опухоли. Эти типичные задачи нелинейного импульсного управления с ограничениями требовали разработки новых методов не только оптимизации, но и описания в виде специальных дифференциальных уравнений. Как отмечал О. Hájek в своей рецензии на книгу *Differential systems involving impulses*, by S.G. Pandit and S.G. Deo (1982), прямолинейные подходы к задачам нелинейного импульсного управления зачастую вели к парадоксальным выводам, особенно при аппроксимации импульсных воздействий ограниченными и при возможности слияния импульсов. Интересно, что уже в своей дипломной работе Б.М. Миллер предложил оригинальный *метод разрывной замены времени*, который позволил выделить класс задач нелинейного импульсного управления, для которых эти проблемы отсутствуют и можно построить законченную непротиворечивую теорию, включающую и теоремы существования оптимального управления, и условия оптимальности (АиТ, 1976, № 6; 1978, №№ 1, 3; 1982, № 6). Позже этот метод переоткрывался многими исследователями, стоит упомянуть, например, A. Bressan and F. Rampazzo (1988), R.V. Vinter and F.-L. Pereira (1988), и до сих пор является содержательным методом анализа нелинейных задач оптимизации с импульсными управлениями, который успешно используют многие исследователи: В.А. Дыхта, О.Н. Самсонок, А.Н. Сесекин, А.В. Арутюнов в передовых исследовательских центрах Иркутска, Екатеринбурга и Москвы. Развитие метода разрывной замены времени позволило получить полное решение задачи управления наблюдениями в дискретно-непрерывных системах и распространить методы импульсного управления на задачи динамики механических систем с ударами, что отражено в серии монографий выпущенных Б.М. Миллером совместно с профессором Е.Я. Рубиновичем: *Impulsive control in Continuous and Discrete-Continuous Systems*, Kluwer, 2003; *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями*, М.: Наука, 2005; *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями*, М.: Ленанд, 2019.

В последние годы в связи с исследованием механических систем с ударами ими предложен новый *метод сингулярных пространственно-временных преобразований*, с его помощью решена, например, одна из проблем о падении

стержня на шероховатую поверхность, где уже более 100 лет был известен парадокс Пенлеве (J. Mathematical Sciences, 2016). Классическая механика для систем с односторонними ограничениями в таких задачах приводит либо к неоднозначным решениям, либо к непродолжимости решения. Проблема в том, что за кратковременный период взаимодействия с препятствием происходит микроскопическое сжатие поверхности, проникновение стержня внутрь и изменение угловой скорости его вращения. В предложенном методе производится растяжение времени с одновременным растяжением линейного масштаба, что позволяет учесть все упомянутые выше эффекты и определить элементы движения стержня после удара (АиТ, 2019, № 10).

Область интересов Б.М. Миллера охватывает также задачи стохастического управления и фильтрации, где им развит метод управления системами, описываемыми марковскими цепями в непрерывном времени с фазовыми ограничениями, сочетанием непрерывных и импульсных воздействий, имеющими многочисленные приложения при управлении потоками передачи данных, управлении связанными водохранилищами и системами газоснабжения (App. Oper. Res., 2015), в задачах поиска и слежения за подвижными объектами. Серия работ по данной проблематике опубликована им в «АиТ» (см., например, 2011, № 2), в журнале «Automatica» (2010), в изданиях IFAC (IFAC-PapersOnLine, 2017), в журналах MDPI (Sensors, 2015; Drones, 2019; Mathematics, 2020).

Работы Б.М. Миллера всегда вызывали интерес и высокую оценку зарубежных исследователей, с которыми он успешно сотрудничает, начиная с 90-х годов. Следует упомянуть проф. В. Рунггалдиера (Университет Падуя, Италия), проф. Дж. Бентсмана (Университет Урбана-Шампэйн, США), проф. Ф. Дюфура (Университет Бордо, Франция) и др., а также его неоднократные приглашения в CNRS и INRIA. Совместно с ними им опубликованы работы в ведущих журналах в области теории управления, среди которых «SIAM J. Control & Optimization», «IEEE Transactions on Automatic Control», «Automatica», «Systems & Control Letters».

Б.М. Миллер всегда был активен в области приложений. После окончания аспирантуры он работал в ЦКБ Красногорского завода ведущим инженером, начальником сектора и начальником лаборатории, его областью были методы анализа и оптимизации оптико-электронных комплексов различного назначения, таких как системы космической разведки, системы управления огнем и автоматические системы управления экспозицией и фокусировкой бытовой фотоаппаратуры, результатом было восемь авторских свидетельств и более десятка статей (ЖТФ, 1985; Изв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1984). Предложенный им метод расчета сдвига изображения при съемке с подвижного носителя оказался не только универсальным для обеспечения оптимального разрешения при использовании оптоэлектронных приемников с накоплением сигнала (Automation and Remote Control, 2007, No. 3), но является основой для управления разрешением видеокамеры БПЛА как датчика скорости в режиме посадки (АиТ, 2017, № 12; Sensors, 2018–2019). В последние годы Б.М. Миллер активно работает в области управления беспилотными

аппаратами воздушного и подводного применения с использованием навигации по наземным ориентирам (Remote Sens., 2020; Drones, 2021) и ландшафту дна (Sensors, 2019–2020).

Б.М. Миллер преподает с 1979 г. по 1994 г., сначала во Всесоюзном приборостроительном институте, профессором кафедры прикладной математики, в МАИ — с 1990 по 2005 г. профессором кафедры теории вероятностей, в МФТИ — с 1993 по 2005 г. доцентом и профессором кафедры проблем управления. С 2003 г. он преподавал во Франции в Университетах Бордо I, IV, где читал курсы теории вероятностей, теории мартингалов и финансовой математики. С 2005 г. он преподавал в школе математики Университета Монаш (Мельбурн, Австралия), где читал курсы лекций по статистике, теории временных рядов, методам стохастического управления.

По возвращении в Россию в 2014 г. он работает главным научным сотрудником Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН и преподает на кафедре интегрированных киберсистем МФТИ. Среди его студентов и аспирантов профессора и доценты ведущих университетов Москвы. Коллективы под его руководством были неоднократно отмечены грантами РФФИ, международными грантами Сороса и ИНТАС, он также был удостоен грантов Национального совета по научным исследованиям США. Работа по теории управления марковскими цепями была отмечена грантом Австралийского совета по научным исследованиям, что позволило в течение четырех лет финансировать совместную работу с российскими и зарубежными учеными в Университете Монаша в 2009–2012 гг., включая поездки в Мельбурн и на важные международные конференции. Б.М. Миллер был руководителем научных проектов, выполняемых совместно ИППИ РАН с Самсунг Электроникс и Карл Цейс.

За цикл работ по теории управления наблюдениями в дискретно-непрерывных системах Б.М. Миллер с коллективом авторов удостоен премии Ленинского комсомола. Его работы неоднократно отмечались дипломами в конкурсе лучших работ Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, он был трижды удостоен гранта выдающегося ученого РФ, его учебник по теории случайных процессов был отмечен Дипломом второй степени среди лучших учебных пособий МАИ. Он — член трех специализированных советов по присуждению ученых степеней в ИППИ РАН и КФУ.

Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика», коллеги и ученики Бориса Михайловича поздравляют его с юбилеем и желают ему здоровья и новых творческих успехов.

© 2022 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Московский физико-технический институт”, Москва)

СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ ПРИ ПОМОЩИ НАБЛЮДАТЕЛЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ¹

Предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя. Выписан градиентный метод для отыскания динамической обратной связи по выходу и дано его обоснование. Рассмотрен ряд примеров.

Ключевые слова: линейные системы, внешние возмущения, обратная связь по выходу, наблюдатель, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231022030023

1. Введение

Вопросам стабилизации и управления линейными системами по выходу с использованием наблюдателя посвящено множество публикаций, относящихся к самым разным областям автоматического управления. Так, в работах Измайлова [1] (и ранее Полоцкого [2]), посвященных проблеме всплеска, речь шла именно о наблюдателях. Систематическое изложение теории наблюдателей можно найти в монографии [3].

В работе [4], посвященной задаче подавления ограниченных внешних возмущений, рассматривался синтез динамической обратной связи по выходу, которая минимизирует размер эллипсоида, содержащего состояние линейной системы управления. Соответствующая задача синтеза управления была сведена к решению задачи полуопределенного программирования в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН) [5, 6]. При этом использовалась оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера [7]. Вместе с тем в [4] пришлось произвести ряд закруглений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства и установить окончательный результат в

¹ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005.

терминах ЛМН. При этом сами ЛМН получились довольно громоздкими, а найденные условия — излишне консервативными.

Среди наиболее идейно близких к такому подходу публикаций следует упомянуть и монографию [8], в которой был предложен ЛМН-подход к синтезу стабилизирующих регуляторов по измеряемому выходу с использованием наблюдателя. Впрочем, в ней не затрагивается случай произвольных ограниченных внешних возмущений — принадлежащих классу L_∞ .

С другой стороны, в последнее время стал очень популярным подход к задачам управления линейными системами как к задачам оптимизации. Так, в классической задаче о линейно-квадратичном регуляторе можно рассматривать матрицу линейной обратной связи как переменную и свести проблему к минимизации показателя качества по этой переменной. Градиент такой функции для обратной связи по выходу был выписан еще в статье [9] 1970 г., однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно, см. [10–14]. В [15] аналогичный подход был впервые применен к задачам с внешними возмущениями.

Настоящая статья является естественным продолжением как работы [4], так и [15]. В ней предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя; далее эта задача решается градиентным методом. Многочисленные примеры демонстрируют эффективность предлагаемого алгоритма.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матрицы, T — символ транспонирования, tr — след матрицы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение Фробениуса для матриц, I — единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A , а $\sigma(A) = -\max_i \text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ — степень устойчивости гурвицевой матрицы A . Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Постановка задачи и подходы к решению

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x + D_1w, \\ z &= C_2x, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y \in \mathbb{R}^l$, оптимизируемым выходом $z \in \mathbb{R}^r$, управлением $u \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, ограниченным

в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Пара (A, B) управляема, пара (A, C_1) наблюдаема.

Хотя природа возмущений в состоянии и выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы D и D_1 “вырезают” из вектора w разные “куски”; общий случай также может быть рассмотрен ценой некоторого усложнения.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y . Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход z .

Построим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C_1 \hat{x}$:

$$(2) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C_1\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ — матрица наблюдателя.

Введем в рассмотрение невязку

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t);$$

согласно (1), (2) она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC_1)e + (D - LD_1)w, \quad e(0) = x_0.$$

Таким образом, при построении обратной связи с помощью динамического регулятора

$$(3) \quad u = K\hat{x}, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

приходим к системе

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x - BKe + Dw, \\ \dot{e} &= (A - LC_1)e + (D - LD_1)w, \\ z &= C_2x \end{aligned}$$

с регулируемым выходом z .

Важно отметить, что часто синтез статического регулятора по выходу невозможен, т.е. матрица $A + BKC_1$ не стабилизируема выбором K , тогда как динамический регулятор (3) может быть построен (при малоограничительных требованиях управляемости и наблюдаемости системы; подробнее см. раздел 2.3).

2.2. Метод инвариантных эллипсоидов

Напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [6, 16]). Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и измеримым по t внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^l$, ограниченным в каждый момент времени:

$$(6) \quad |w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Пусть система (5) устойчива (т.е. матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$(7) \quad \mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным для динамической системы (5), (6), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geq 0$.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде \mathcal{E}_x , при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде. Инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости, т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида \mathcal{E}_x , стремится к эллипсоиду \mathcal{E}_x с течением времени.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи естественно интересоваться минимальными (в том или ином смысле) эллипсоидами, содержащими выход системы. Нетрудно видеть, что если \mathcal{E}_x — инвариантный эллипсоид (7) с матрицей P , то выход системы (5) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$(8) \quad \mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\}.$$

Эллипсоид (8) будем называть *ограничивающим (по выходу)*. Часто в качестве критерия его минимальности рассматривается линейная функция $f(P) = \text{tr} CPC^T$, значение которой равно сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида.

В [5] был установлен результат, дающий критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств. Несколько уточняя этот критерий (см. [6]), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть матрица A гурвицева, $\sigma = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $0 < \alpha < 2\sigma$, удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$$

на интервале $0 < \alpha < 2\sigma$ и, если α^* — точка минимума и $x(0)$ удовлетворяет условию $x^T(0)P^{-1}(\alpha^*)x(0) \leq 1$, гарантируется оценка

$$|z(t)|^2 \leq f(\alpha^*), \quad 0 \leq t < \infty.$$

2.3. Подход к решению

Введем составной вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

придадим системе (4) вид

$$(9) \quad \dot{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}}_{A_c} g + \underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

$$z = \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_{C_2} g.$$

Следуя методу инвариантных эллипсоидов, заключим состояние g системы (9) в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E}_g = \{g \in \mathbb{R}^{2n} : x^T P^{-1} x \leq 1\},$$

порожденный матрицей $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r : z^T (C_2 P C_2^T)^{-1} z \leq 1\}$$

по выходу z с матрицей $C_2 P C_2^T$. В качестве критерия его минимальности примем критерий следа, т.е. величину $\operatorname{tr} C_2 P C_2^T$.

Обратим внимание, что в отличие от [4], здесь — для оценки выхода z с помощью ограничивающего эллипсоида — строится инвариантный эллипсоид по состоянию x , а не по его оценке \hat{x} , что гораздо более естественно.

Заметив, что матрица A_c представима в виде

$$A_c = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_1} K \underbrace{\begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}}_{N_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{M_2} L \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -C_1 \end{pmatrix}}_{N_2},$$

в соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации функции $\text{tr } \mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^T$ при ограничении

$$(10) \quad \begin{aligned} & \left(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2 + \frac{\alpha}{2} I \right) P + \\ & + P \left(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2 + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D} \mathcal{D}^T = 0 \end{aligned}$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Вместе с тем в качестве критерия качества выберем функционал

$$(11) \quad f(K, L, \alpha) = \text{tr } \mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^T + \rho_K \|K\|_F^2 + \rho_L \|L\|_F^2,$$

в котором помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, введены штрафы за величину матриц регулятора и наблюдателя (при этом коэффициенты $\rho_K, \rho_L > 0$ регулируют их важность); в то же время их наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по K и L , см. раздел 3.2.

Замечание 1. Обратим внимание, что блочная матрица A_c имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$. В свою очередь, существование матриц K и L таких, чтобы матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$ были устойчивыми, вытекает из свойств управляемости и наблюдаемости исходной системы.

Введем для удобства обозначение

$$A_{K,L} = \mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2.$$

В силу замечания 1 заведомо существуют матрицы K_0 и L_0 такие, что матрица A_{K_0, L_0} гурвицева. Матрицы (K, L) , обладающие этим свойством, будем называть *стабилизирующей матричной парой*.

3. Оптимизация функции $f(K, L, \alpha)$

В предыдущем разделе было установлено, что исходная задача синтеза динамической обратной связи при помощи наблюдателя, подавляющей воздействие внешних возмущений, свелась к задаче минимизации функции $f(K, L, \alpha)$, определяемой соотношением (11), при ограничении

$$(12) \quad \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T = -\frac{1}{\alpha} \mathcal{D} \mathcal{D}^T$$

по переменным $P = P^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Запись $f(K, L, \alpha)$ подчеркивает, что при заданных K , L и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (12); тем самым независимыми переменными являются K , L и α .

3.1. Оптимизация функции $f(\alpha)$

Итак, приходим к уравнению Ляпунова (12) вида $AP + PA^T = -DD^T$ с *полуопределенной* правой частью. Важно отметить, что в настоящей работе не предполагается ни требование квадратности и невырожденности матрицы D , введенное в [15], ни стандартное требование управляемости пары (A, D) .

Замечание 2. Согласно [6, лемма 1.2.3] единственное решение уравнения Ляпунова (12) лишь положительно *полуопределено* (при гурвицевой матрице $A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I$, т.е. при $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$). При этом на указанном интервале оно представимо в явном виде как

$$\begin{aligned} P = P(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I)t} \frac{1}{\alpha} DD^T e^{(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I)^T t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} e^{A_{K,L}t} DD^T e^{A_{K,L}^T t} dt \succcurlyeq 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $C_2 PC_2^T \succcurlyeq 0$, поэтому функция $f(\alpha) = \text{tr } C_2 PC_2^T$, рассматриваемая как функция только от параметра α (при некоторой фиксированной стабилизирующей паре (K, L)), строго положительна на рассматриваемом интервале. В самом деле, в противном случае полуопределенная матрица $C_2 PC_2^T$ обращалась бы в нуль, что невозможно в силу $C_2 \neq 0$ и $D \neq 0$ (из последнего имеем $P \neq 0$).

Эти результаты позволяют полностью перенести на рассматриваемый случай свойства функции $f(\alpha)$, установленные в [15]. В частности, функция $f(\alpha)$ определена, положительна и сильно выпукла на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует $c > 0$ такое, что

$$(13) \quad f(\alpha) \geq \frac{c}{\alpha(2\sigma - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L}).$$

Минимизацию функции $f(\alpha)$ можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. Зададимся начальным приближением $0 < \alpha_0 < 2\sigma(A_{K,L})$, например $\alpha_0 = \sigma(A_{K,L})$, и применим итерационный процесс

$$(14) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

При этом согласно [15]

$$f'(\alpha) = \text{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{D} \mathcal{D}^T \right), \quad f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left(X + \frac{1}{\alpha^3} \mathcal{D} \mathcal{D}^T \right),$$

где Y и X — решения уравнений Ляпунова

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) + C_2^T C_2 = 0$$

и

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) X + X \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + P - \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{D} \mathcal{D}^T = 0.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

Теорема 2 [15]. *В методе (14) справедливы оценки*

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ — некоторая константа (она может быть выписана явно).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), а вторая — квадратичную сходимость в окрестности решения. Реально требуется не более трех — четырех итераций для получения решения с большой точностью (если только начальная точка не слишком близка к границам интервала). Таким образом, авторы располагают быстрым алгоритмом для оптимизации по параметру α .

3.2. Оптимизация функции $f(K, L)$

Теперь займемся минимизацией функции

$$f(K, L) = \min_{\alpha} f(K, L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

Лемма 1. *Функция $f(K, L)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов.*

Действительно, если матрица $A_{K,L}$ гурвицева, то $\sigma(A_{K,L}) > 0$ и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$ решение $P \succcurlyeq 0$ уравнения Ляпунова (12) существует. Тем самым определена (строго положительная в силу замечания 2) функция $f(K, L, \alpha)$; при этом $f(K, L) > 0$ в силу (13). Множество ее определения \mathcal{S} может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими, см. [15].

Лемма 2. *На множестве \mathcal{S} стабилизирующих матричных пар функция $f(K, L)$ коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:*

$$(15) \quad f(K, L) \geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^T) \|\mathcal{D}\|_F^2}{4\sigma(A_{K,L}) (\|A_{K,L}\| + \sigma(A_{K,L}))},$$

$$f(K, L) \geq \rho_K \|K\|^2, \quad f(K, L) \geq \rho_L \|L\|^2.$$

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{(K, L) \in \mathcal{S}: f(K, L) \leq f(K_0, L_0)\}.$$

Из леммы 2 вытекает очевидное

Следствие 1. Для любых $(K_0, L_0) \in \mathcal{S}$ множество \mathcal{S}_0 ограничено.

С другой стороны, у функции $f(K, L)$ на множестве \mathcal{S}_0 существует точка минимума (как у непрерывной — в силу свойств решения уравнения Ляпунова — функции на компактном множестве), но множество \mathcal{S}_0 не имеет общих точек с границей \mathcal{S} в силу (15). Далее будет показано, что $f(K, L)$ дифференцируема на \mathcal{S}_0 . Следовательно, справедливо

Следствие 2. Существует точка минимума (K_, L_*) на множестве \mathcal{S} , и в ней градиент функции $f(K, L)$ обращается в нуль.*

Перейдем к свойствам градиента функции $f(K, L, \alpha)$.

Лемма 3. Функция $f(K, L, \alpha)$ определена на множестве стабилизирующих матричных пар (K, L) и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha f(K, L, \alpha) &= \text{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{D} \mathcal{D}^T \right), \\ \nabla_K f(K, L, \alpha) &= 2 (\rho_K K + M_1^T Y P N_1^T), \\ \nabla_L f(K, L, \alpha) &= 2 (\rho_L L + M_2^T Y P N_2^T),\end{aligned}$$

где матрица Y является решением уравнения Ляпунова

$$(16) \quad \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) + C_2^T C_2 = 0.$$

Минимум $f(K, L, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_L f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(K, L, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, L, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала (см. подраздел 3.1).

Градиенты функции $f(K, L)$ по K и по L не являются липшицевыми на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что они обладают этим свойством на его подмножестве \mathcal{S}_0 , аналогично тому, как это было сделано в [15].

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

4. Алгоритм решения

Ниже предлагается следующий итеративный подход к решению задачи (10)–(11). В его основе лежит попеременное применение градиентного метода по переменным K и L и минимизация по параметру α по методу Ньютона.

Алгоритм для минимизации $f(K, L, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами

$$\varepsilon > 0, \quad \gamma_K > 0, \quad \gamma_L > 0, \quad 0 < \tau_K < 1, \quad 0 < \tau_L < 1$$

и начальными стабилизирующими приближениями K_0 и L_0 .

Вычисляем величину $\alpha_0 = \frac{1}{2}\sigma(\mathcal{A} + M_1 K_0 N_1 + M_2 L_0 N_2)$.

2. На j -й итерации имеем величины K_j , L_j и α_j .

Вычисляем градиент $H_j^K = \nabla_K f(K_j, L_j, \alpha_j)$. Если $\|H_j^K\| \leq \varepsilon$, то K_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода по K :

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j^K H_j^K,$$

при этом длину шага $\gamma_j^K > 0$ подбираем дроблением γ_K до выполнения условий:

а) K_{j+1} стабилизирует матрицу $\mathcal{A} + M_1 K_{j+1} N_1 + M_2 L_j N_2$;

б) $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau_K \gamma_j^K \|H_j^K\|^2$.

4. Имея величину K_{j+1} , вычисляем градиент $H_j^L = \nabla_L f(K_{j+1}, L_j, \alpha_j)$.

Если $\|H_j^L\| \leq \varepsilon$, то L_j принимаем за приближенное решение.

5. Делаем шаг градиентного метода по L :

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j^L H_j^L,$$

при этом длину шага $\gamma_j^L > 0$ подбираем дроблением γ_L до выполнения условий:

а) L_{j+1} стабилизирует матрицу $\mathcal{A} + M_1 K_{j+1} N_1 + M_2 L_{j+1} N_2$;

б) $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau_L \gamma_j^L \|H_j^L\|^2$.

6. Для полученных K_{j+1} , L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, L_{j+1}, \alpha)$ по α и получаем α_{j+1} . Переходим к п. 2.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Пусть для некоторых K , L , α и $P \succ 0$ выполняется

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2) P + P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T P + \\ + \alpha P + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D} \mathcal{D}^T = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим приращение по K :

$$K \rightarrow K - \gamma H^K, \quad H^K = \nabla_K f(K, L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2$ останется устойчивой (гурвицевой).

Для этого достаточно потребовать, чтобы P оставалась матрицей квадратичной функции Ляпунова для $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2$, т.е.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2)P + \\ & + P(\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2)^T P \prec 0 \end{aligned}$$

или, с учетом исходного уравнения,

$$\gamma \left(-M_1 H^K N_1 P - P(M_1 H^K N_1)^T \right) \prec \alpha P + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D} \mathcal{D}^T,$$

откуда

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1} \left(-M_1 H^K N_1 P - P(M_1 H^K N_1)^T, \alpha P + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D} \mathcal{D}^T \right).$$

Аналогичным образом предлагается выбирать пробный шаг при оптимизации по переменной L .

Можно предложить еще один способ выбора пробного шага. Найдем для некоторой стабилизирующей пары (K, L) решение P уравнения Ляпунова

$$(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)P + P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T P = -I.$$

Рассмотрим приращение по K :

$$K \rightarrow K - \gamma H^K, \quad H^K = \nabla_K f(K, L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица P останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2$, т.е.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2)P + \\ & + P(\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2LN_2)^T P \prec 0. \end{aligned}$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$\gamma \left(-M_1 H^K N_1 P - P(M_1 H^K N_1)^T \right) \prec I,$$

откуда

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1} \left(-M_1 H^K N_1 P - P(M_1 H^K N_1)^T \right).$$

Аналогичным образом выбирается пробный шаг при оптимизации по переменной L .

Также весьма многообещающим представляется способ, аналогичный предложенному в [14] и основанный на использовании вторых производных; согласно ему пробный шаг по K выбирается по формуле

$$\gamma_j = \frac{\|H_j^K\|^2}{\nabla_{KK}^2 f(K, L)[H_j^K, H_j^K]}.$$

Вычисление выражения в знаменателе производится с помощью формулы²

$$\frac{1}{2} \nabla_{KK}^2 f(K, L)[E, E] = \rho_K \langle E, E \rangle + 2 \langle M_1^T Y P_K N_1^T, E \rangle,$$

где P_K — решение уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) P_K + P_K \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + M_1 E N_1 P + P (M_1 E N_1)^T = 0.$$

Пробный шаг по L выбирается аналогичным образом.

Использование вторых производных требует всего лишь решения еще двух уравнений Ляпунова, т.е. не сильно усложняет вычисления. Впрочем, этот подход требует отдельного обоснования.

5. Примеры

Пример 1. Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений на примере задачи управления двухмассовой системой — системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной с коэффициентом упругости κ , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 1).

Управляющее воздействие $u \in \mathbb{R}$ прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

компоненты которого воздействуют на левое и правое тело соответственно. Возмущение предполагается произвольным, но ограниченным в любой момент времени: $|w(t)| \leq 1$.

Обозначим через x_1, v_1 соответственно координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

есть вектор состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение.

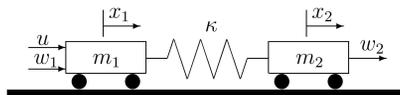


Рис. 1. Двухмассовая система из примера 1.

² Соответствующий результат устанавливается аналогично доказательству леммы 5 в [15].

В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

а в качестве регулируемого — вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

При единичных параметрах системы ($m_1 = m_2 = \kappa = 1$) непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 0.$$

Заметим, что для этой задачи статического регулятора по выходу не существует: матрица $A + BKC_1$ не стабилизируема за счет выбора K .

В [4] был предложен подход к решению этой задачи, основанный на технике линейных матричных неравенств [5] и методе инвариантных эллипсоидов [6]. Следуя ему, получаем матрицу регулятора

$$\widehat{K} = (-8,9842 \quad 6,6234 \quad -6,3412 \quad -5,2864) \cdot 10^4,$$

матрицу наблюдателя

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} 1,6533 & -0,0655 \\ 0,1231 & 1,3992 \\ 1,6800 & -0,1450 \\ -0,0456 & 1,0700 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по выходу z с матрицей

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 18,3672 & 3,6100 \\ 3,6100 & 17,5092 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \widehat{R} = 35,8764.$$

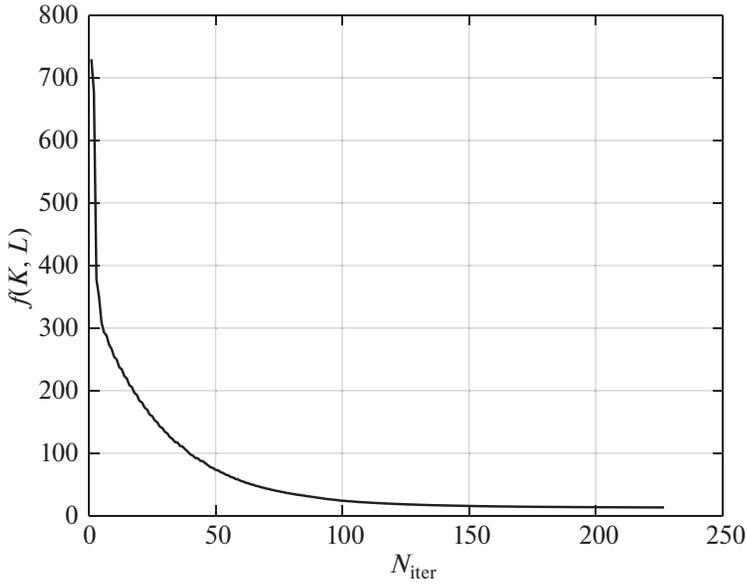


Рис. 2. Оптимизационная процедура в примере 1.

Теперь воспользуемся предлагаемым подходом, положив $\rho_K = 0,01$, $\rho_L = 0,001$ и взяв в качестве начального приближения для регулятора матрицу

$$K_0 = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -10 & 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве начального приближения для наблюдателя матрицу

$$L_0 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \\ 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Динамика изменения критерия $f(K, L)$ при расчете по вышеописанному алгоритму показана на рис. 2.

Процесс завершился нахождением матрицы регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} -6,1908 & 3,8595 & -4,9321 & -3,2368 \end{pmatrix},$$

(норма $\|K^*\| = 9,3821$ которого много меньше, чем у регулятора \widehat{K} , полученного методом ЛМН), а также матрицы наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 5,1504 & 2,7780 \\ -4,6186 & -1,0657 \\ 13,2831 & 5,5175 \\ 4,0128 & 3,0511 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 16,9272,$$

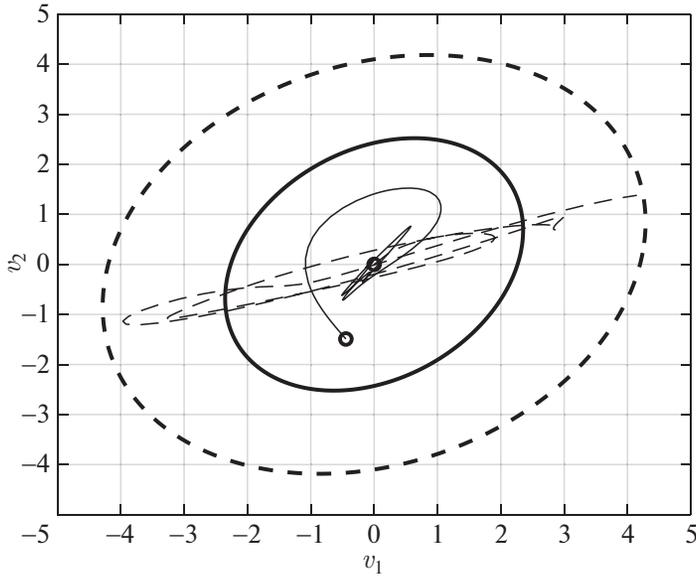


Рис. 3. Ограничивающие эллипсы и траектории выхода в примере 1.

и соответствующего ограничивающего эллипса по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 5,1094 & 0,9660 \\ 0,9660 & 4,9536 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } R^* = 10,0630.$$

На рис. 3 сплошной полужирной линией показан найденный ограничивающий эллипс; для сравнения полужирным пунктиром показан ограничивающий эллипс при LMI-подходе. На этом же рисунке сплошной линией показана траектория выхода z системы при некотором начальном условии и допустимом внешнем возмущении, а пунктиром — траектория ее оценки $\hat{z} = C_2 \hat{x}$ при $\hat{x}(0) = 0$; как видно, она покидает ограничивающий эллипс.

На рис. 4 сплошной линией показана динамика величины $|z(t)|$, а пунктиром — ее оценки $|\hat{z}(t)|$.

Изменим теперь начальное приближение матрицы наблюдателя на

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -15 & 10 \\ 8 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

В результате процесс сойдется к матрице регулятора

$$K^* = (-8,4182 \quad -0,0044 \quad -3,1765 \quad -6,3851),$$

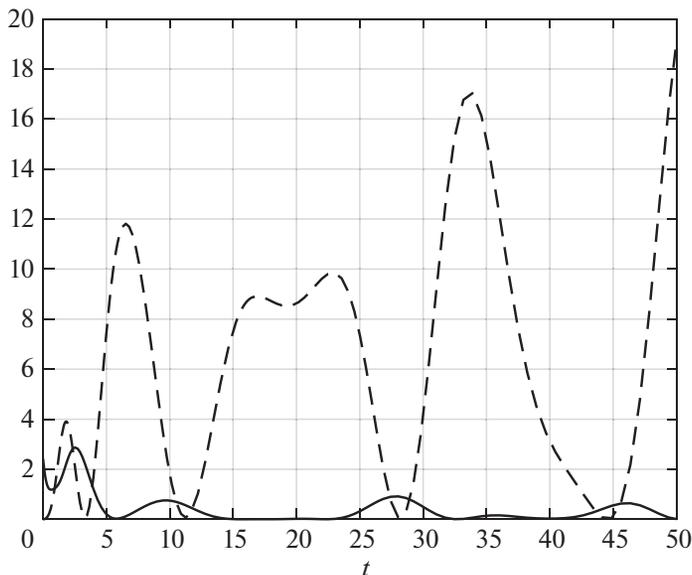


Рис. 4. Динамика изменения величин $|z(t)|$ и $|\hat{z}(t)|$ в примере 1.

где $\|K^*\| = 11,0329$, матрице наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 6,3792 & 13,4718 \\ -5,7668 & -3,9960 \\ 7,8898 & 5,2154 \\ -3,8242 & -1,9790 \end{pmatrix},$$

для которой $\|L^*\| = 18,7649$, и соответствующему ограничивающему эллипсу по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 5,3326 & 0,8664 \\ 0,8664 & 5,0403 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } R^* = 10,3729.$$

При сравнительно различных матрицах регулятора и наблюдателя найденные эллипсы отличаются всего лишь на 3% по критерию следа, см. рис. 5. Для сравнения штрихпунктиром показан ограничивающий эллипс, полученный в соответствии с методом [17] синтеза линейных динамических регуляторов по выходу, основанным на решении ЛМН.

Пример 2. Вновь обратимся к системе из примера 1; пусть теперь наблюдению доступно все — зашумленное — состояние системы:

$$C_1 = I, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

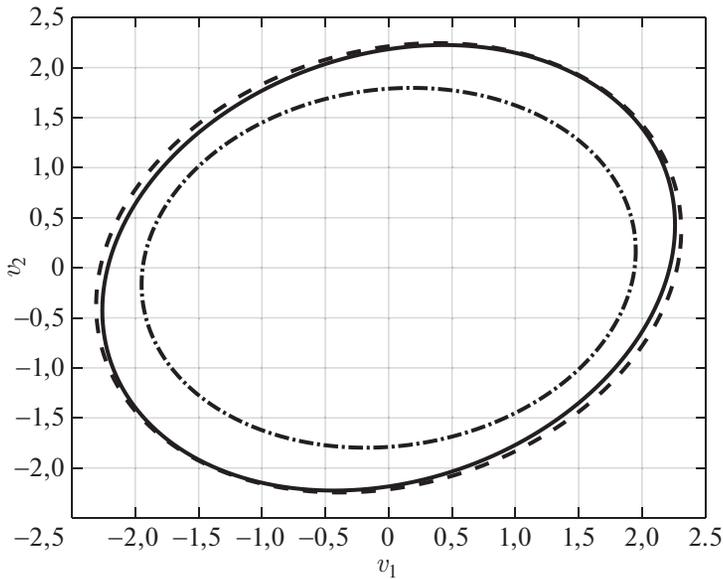


Рис. 5. Ограничивающие эллипсы в примере 1.

ЛМН-подход доставляет матрицу регулятора

$$\hat{K} = (-1,4474 \quad 1,0068 \quad -0,9406 \quad -0,9006) \cdot 10^{10},$$

матрицу наблюдателя

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1,2219 & -0,3075 & 0,1889 & 0,3736 \\ 0,0869 & 0,8083 & 0,1552 & 0,4082 \\ -0,0833 & -0,2344 & 1,9514 & 0,0692 \\ 0,0543 & 0,3880 & -0,0735 & 0,8007 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по выходу z с матрицей

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 9,4702 & 2,4556 \\ 2,4556 & 9,7464 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \hat{R} = 19,2166.$$

Обратим внимание на величину матрицы регулятора. С целью ее уменьшения принято вводить компоненту управления в минимизируемый выход: $z = C_2x + B_2u$, что естественно приводит к дополнительному увеличению размера ограничивающего эллипсоида.

Предлагаемый подход при начальных приближениях

$$K_0 = (-10 \quad 1 \quad -10 \quad 1), \quad L_0 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

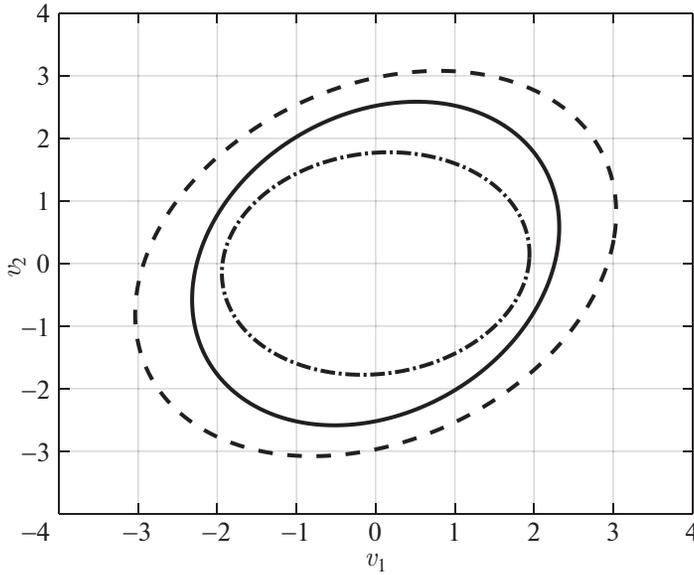


Рис. 6. Ограничивающие эллипсы в примере 2.

доставляет матрицу регулятора

$$K^* = (-9,8237 \quad 2,9696 \quad -6,9974 \quad -1,1508),$$

матрицу наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 9,9369 & 1,3231 & -0,3335 & 0,0487 \\ 1,1640 & 0,4330 & 0,8599 & 0,3908 \\ 10,0696 & 0,6950 & 0,4359 & 0,1733 \\ 0,9665 & 0,8494 & -0,3407 & -0,5958 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипсоид с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 5,3755 & 1,3414 \\ 1,3414 & 6,6900 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } R^* = 12,0655.$$

На рис. 6 сплошной линией показан найденный ограничивающий эллипс. Для сравнения точечной линией показан ограничивающий эллипс, полученный при помощи ЛМН-подхода, а штрихпунктиром — ограничивающий эллипс, предоставляемый линейным динамическим регулятором по выходу.

Пример 3. Рассмотрим двойной математический маятник, состоящий из двух невесомых стержней длины l_1 и l_2 , на концах которых укреплены грузики массами m_1 и m_2 . Система движется в вязкой среде с коэффициентом сопротивления γ , в вертикальной плоскости xy , и положение маятника определяется углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали, см. рис. 7.

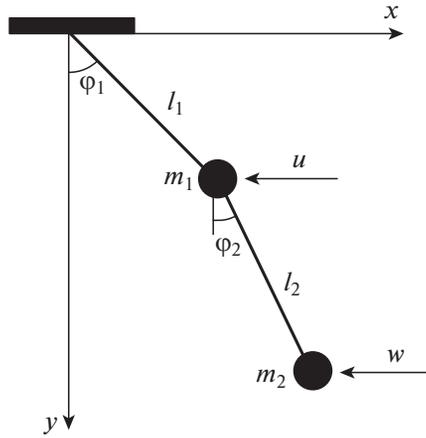


Рис. 7. Двойной математический маятник из примера 3.

Для компенсации ограниченного внешнего возмущения $w: |w| \leq 1$, воздействующего на “нижнее” тело, к “верхнему” телу приложено управляющее воздействие u .

Вводя переменные

$$\varphi_3 = \dot{\varphi}_1, \quad \varphi_4 = \dot{\varphi}_2,$$

приходим к линеаризованной системе

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \varphi_3, \\ \dot{\varphi}_2 &= \varphi_4, \\ \dot{\varphi}_3 &= -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_1} \varphi_1 + \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \varphi_2 - \frac{\gamma}{m_1} \varphi_3 + \frac{1}{m_1} u, \\ \dot{\varphi}_4 &= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_2} \varphi_1 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l_2} \varphi_2 - \frac{\gamma}{m_2} \varphi_4 + \frac{1}{m_2} w. \end{aligned}$$

При

$$m_1 = m_2 = 1, \quad l_1 = l_2 = g, \quad \gamma = 0,2$$

матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве наблюдаемого выхода выберем

$$y = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 0,$$

а в качестве регулируемого выхода — вектор

$$z = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении *статической* обратной связи в соответствии с [15] получаем стабилизирующий регулятор по выходу

$$\widehat{K} = (0,0088 \quad -0,8657)$$

и матрицу

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 1,5854 & -0,0437 \\ -0,0437 & 26,6679 \end{pmatrix}$$

ограничивающего эллипсоида; при этом $\text{tr } \widehat{R} = 28,2533$.

Теперь воспользуемся предлагаемым подходом. Поскольку матрица A системы устойчива, в качестве начальных приближений казалось бы естественно выбирать нулевые, однако точка $K = L = 0$ является седловой для минимизируемой функции. Поэтому в качестве начального приближения для регулятора возьмем матрицу

$$K_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

а в качестве начального приближения для наблюдателя сгенерируем некоторую матрицу

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0,7653 & -0,2647 \\ -0,1251 & 0,5897 \\ 0,6699 & -0,8014 \\ -0,3497 & 0,9036 \end{pmatrix},$$

оставляющую матрицу $A - LC_1$ устойчивой.

Процесс (при $\rho_K = 0,01$, $\rho_L = 0,001$) завершился нахождением матрицы регулятора

$$K^* = (0,5492 \quad 0,1428 \quad -1,4488 \quad 0,4888), \quad \|K^*\| = 1,6309,$$

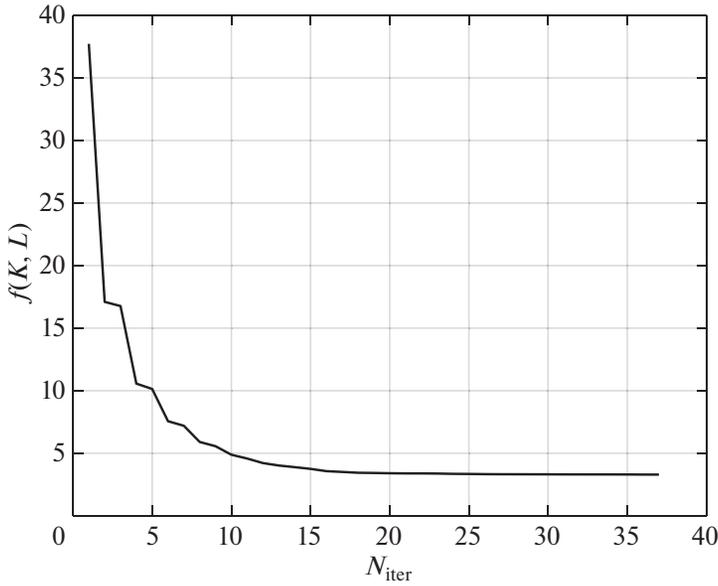


Рис. 8. Оптимизационная процедура в примере 3.

матрицы наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1,0623 & -0,2113 \\ 0,5233 & 1,1165 \\ 1,3406 & -0,4269 \\ -0,2458 & 1,3874 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 1,9715,$$

и соответствующего ограничивающего эллипса по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 1,0674 & 0,3449 \\ 0,3449 & 2,1921 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } R^* = 3,2595.$$

Динамика изменения критерия $f(K, L)$ при расчете по вышеописанному алгоритму показана на рис. 8.

Для сравнения, при ином — также произвольном — начальном приближении

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0,0826 & -0,0346 \\ 0,7379 & 0,6160 \\ 0,1141 & 0,4720 \\ -0,9572 & 0,1446 \end{pmatrix}$$

процесс доставляет матрицу регулятора

$$K^* = (0,7847 \quad -0,0119 \quad -1,4160 \quad 0,5955), \quad \|K^*\| = 1,7250,$$

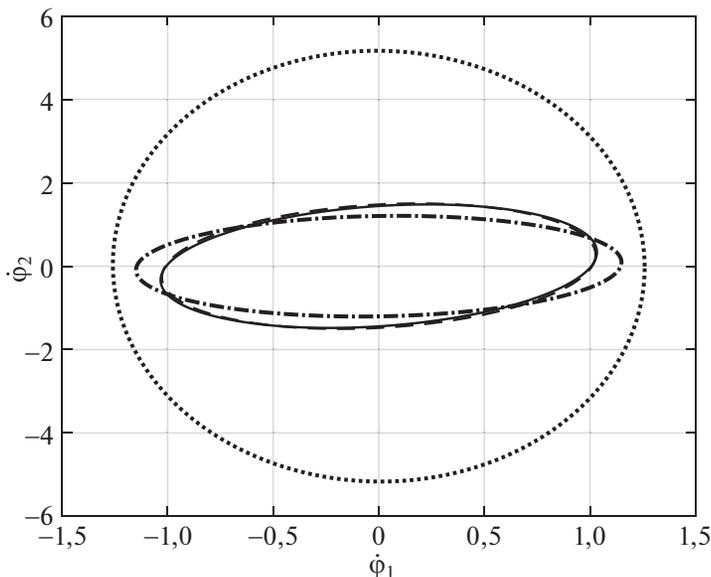


Рис. 9. Ограничивающие эллипсы в примере 3.

матрицу наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1,0002 & -0,0842 \\ 0,7970 & 0,9984 \\ 0,9408 & -0,1216 \\ -1,0109 & 1,0961 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 1,9280,$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 1,0529 & 0,2916 \\ 0,2916 & 2,2591 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } R^* = 3,3120.$$

Как и в примере 1, при различных матрицах регулятора и наблюдателя найденные эллипсы отличаются по критерию следа лишь на несколько процентов.

На рис. 9 сплошной линией и пунктиром показаны найденные ограничивающие эллипсы. Для сравнения точечной линией показан ограничивающий эллипс, полученный при помощи статической обратной связи, его размер в 8 раз больше (по критерию следа), а штрихпунктиром — ограничивающий эллипс, предоставляемый линейным динамическим регулятором по выходу.

6. Заключение

Предложен новый подход к задаче стабилизации по выходу. Он обладает преимуществами перед известным методом [4], основанным на ЛМН.

Важной задачей для дальнейших исследований является обобщение предлагаемого подхода на другие типы динамических регуляторов (а не только регуляторов с использованием наблюдателей).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Рассмотрим последовательность стабилизирующих матричных пар $\{K_j, L_j\} \subseteq \mathcal{S}$ такую, что

$$(K_j, L_j) \rightarrow (K, L) \in \partial\mathcal{S},$$

т.е. $\sigma(A_{K,L}) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\sigma(A_{K_j, L_j}) - \sigma(A_{K, L})| = \sigma(A_{K_j, L_j}) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения Ляпунова (12), ассоциированного с парой (K_j, L_j) :

$$\left(A_{K_j, L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P_j + P_j\left(A_{K_j, L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha_j}D D^T = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K_j, L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T Y_j + Y_j\left(A_{K_j, L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + C_2 C_2^T = 0.$$

Тогда (см. [15, лемма П.1])

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr}(C_2 P_j C_2^T) + \rho \|K_j\|_F^2 \geq \text{tr}(P_j C_2 C_2^T) = \text{tr}\left(Y_j \frac{1}{\alpha_j} D D^T\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D\|_F^2 \geq \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^T)}{2 \|A_{K_j, L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^T)}{4\sigma(A_{K_j, L_j}) \|A_{K_j, L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D\|_F^2 \geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^T)}{4\sigma(A_{K_j, L_j}) (\|A_{K_j, L_j}\| + \frac{\alpha_j}{2})} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^T)}{4\sigma(A_{K_j, L_j}) (\|A_{K_j, L_j}\| + \sigma(A_{K_j, L_j}))} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^T)}{4\varepsilon (\|A_{K_j, L_j}\| + \varepsilon)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(A_{K_j, L_j}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr}(\mathcal{C}_2 P_j \mathcal{C}_2^T) + \rho_K \|K_j\|_F^2 + \rho_L \|L_j\|_F^2 \geq \rho_K \|K_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \rho_K \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr}(\mathcal{C}_2 P_j \mathcal{C}_2^T) + \rho_K \|K_j\|_F^2 + \rho_L \|L_j\|_F^2 \geq \rho_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \rho_L \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Дифференцирование по α производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 3.1.

Для дифференцирования по K функции (11) при ограничении в виде уравнения Лапунова

$$(II.1) \quad \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^T = 0$$

относительно матрицы P инвариантного эллипсоида придадим величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} &\left(A + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2LN_2 + \frac{\alpha}{2}I\right)(P + \Delta P) + \\ &+ (P + \Delta P)\left(A + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2LN_2 + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} &\left(A_{K,L} + M_1\Delta P N_1 + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A_{K,L} + M_1\Delta P N_1 + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \\ &+ \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)\Delta P + \Delta P\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (II.1) из этого уравнения имеем:

$$(II.2) \quad \begin{aligned} &\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)\Delta P + \Delta P\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \\ &+ M_1\Delta K N_1 P + P(M_1\Delta K N_1)^T = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала $f(K, L, \alpha)$ по K , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= \text{tr} \mathcal{C}_2 \Delta P \mathcal{C}_2^T + \rho_K \text{tr} K^T \Delta K + \rho_K \text{tr} (\Delta K)^T K = \\ &= \text{tr} \mathcal{C}_2^T \mathcal{C}_2 \Delta P + 2\rho_K \text{tr} K^T \Delta K. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (16), двойственное к (П.2). Из двойственных уравнений (П.2) и (16) имеем (см. [15, лемма П.1]):

$$\begin{aligned}\Delta_K f(K, L, \alpha) &= \operatorname{tr} 2N_1 P Y M_1 \Delta K + 2\rho_K \operatorname{tr} K^T \Delta K = \\ &= \langle 2(\rho_K K + M_1^T Y P N_1^T), \Delta K \rangle.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 2(\rho_K K + M_1^T Y P N_1^T).$$

Полностью аналогичным образом устанавливается, что

$$\nabla_L f(K, L, \alpha) = 2(\rho_L L + M_2^T Y P N_2^T).$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измайлов Р.Н.* Эффект “всплеска” в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // *АиТ.* 1987. № 8. С. 56–62.
Izmailov R.N. The “Peak” Effect in Stationary Linear Systems with Scalar Inputs and Outputs // *Autom. Remote Control.* 1987. V. 48. No. 8. P. 1018–1024.
2. *Полоцкий В.Н.* О максимальных ошибках асимптотического идентификатора состояния // *АиТ.* 1978. № 8. С. 26–32.
3. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
4. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ.* 2008. № 5. С. 72–90.
Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
5. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
7. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1971. V. AC-16. No. 6. P. 596–620.
8. *Баладин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
9. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
10. *Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M.* Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // *Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning.* Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
11. *Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R.* Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // *Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control.* Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.

12. *Zhang K., Hu B., Başar T.* Policy Optimization for \mathcal{H}_2 Linear Control with \mathcal{H}_∞ Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // arXiv: 1910.09496, 2020.
13. *Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M.* LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // arXiv:1907.08921, 2019.
14. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
15. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
16. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
17. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // АиТ. 2011. № 4. С. 27–42.
Khlebnikov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: A Linear Dynamic Output Controller // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 699–712.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 02.11.2021

После доработки 10.12.2021

Принята к публикации 24.12.2021

© 2022 г. М.А. МУНИЦЫНА, канд. физ.-мат. наук (munitsyna@gmail.com)
(Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДИНАМИКА КЕЛЬТСКОГО КАМНЯ НА ПЛОСКОСТИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ¹

Рассматривается задача о динамике кельтского камня на неподвижной горизонтальной плоскости. По аналогии с [1] предполагается, что со стороны плоскости на тело действует сила классического вязкого трения. Приводится аналитическое обоснование смены направления вращения с положительного (в направлении поворота главных центральных осей инерции относительно осей геометрической симметрии тела) на отрицательное при некоторых ограничениях на параметры задачи. Для приближенной системы уравнений, описывающей динамику тела, определяются соответствующие начальные условия и приводится приближенное выражение для финальной угловой скорости.

Ключевые слова: кельтский камень, вязкое трение.

DOI: 10.31857/S0005231022030035

1. Введение

Хорошо известно [2], что устойчивость вращения кельтского камня вокруг вертикальной оси зависит от направления вращения. В большинстве работ, посвященных этому свойству, рассматривается неголономная постановка задачи (см., например, [1, 3–8]), в которой вращения могут быть устойчивы только в отрицательном направлении. Этим свойством, как правило, объясняется смена направления вращения кельтского камня в процессе движения при начальном вращении в положительном направлении.

Однако, например, в [9] указывается физическая необоснованность данной постановки, вследствие чего, например, в [9, 10] рассматриваются поликомпонентные модели взаимодействия кельтского камня с опорной плоскостью, которые при наличии верчения и малой скорости проскальзывания соответствуют рассматриваемой в настоящей работе модели вязкого трения. Та же модель трения рассматривается, например, в [11] для оценки количества смен направления вращения тела, близкого к однородному эллипсоиду.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении тяжелого выпуклого твердого тела по неподвижной горизонтальной плоскости. Пусть \mathbf{v} — скорость центра масс тела, $\boldsymbol{\omega}$ — его угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор восходящей вертикали. Тогда радиус-вектор \mathbf{r} точки контакта тела и плоскости определяется равенством

$$\boldsymbol{\gamma} = -\text{grad } f(\mathbf{r})/|\text{grad } f(\mathbf{r})|$$

($f(\mathbf{x}) = 0$ — уравнение поверхности тела в главных центральных осях инерции $Sx_1x_2x_3$), а скорость этой точки имеет вид $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$.

Будем считать, что на тело действуют сила тяжести $-mg\boldsymbol{\gamma}$, нормальная компонента реакции опорной плоскости $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ и сила вязкого трения $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{u}$. Уравнения движения тела, записанные в его главных центральных осях, имеют вид

$$(1) \quad m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = (N - mg)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F},$$

$$(2) \quad \mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}],$$

$$(3) \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0,$$

$$(4) \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0.$$

Здесь $\mathbb{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции тела. Уравнение (1) выражает теорему о движении центра масс тела, (2) — теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс, (3) — условие постоянства вектора восходящей вертикали, а (4) — условие контакта тела с плоскостью.

Заметим, что если в течение движения величина N изменит знак с положительного на отрицательный, то произойдет отрыв тела от опорной плоскости. В случае же безотрывного движения из системы (1)–(4) определяется величина нормальной реакции опорной плоскости

$$(5) \quad N = m(g + ([\mathbf{r}, \dot{\boldsymbol{\omega}}] + [\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega}], \boldsymbol{\gamma}) + ([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}])).$$

Будем считать, что положительная полуось Sx_3 перпендикулярна поверхности тела. Тогда система (1)–(3) с учетом (5) имеет решения вида

$$(6) \quad \begin{aligned} v_1 = v_2 = v_3 &= 0, \\ \gamma_1 = \gamma_2 &= 0, \quad \gamma_3 = 1, \\ \omega_1 = \omega_2 &= 0, \quad \omega_3 = \omega = \text{const} \end{aligned}$$

(нижним индексам соответствуют проекции векторов на оси системы $Sx_1x_2x_3$), на которых величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу тела. Им соответствуют равномерные вращения тела вокруг перпендикулярной его поверхности главной оси инерции, совпадающей с вертикалью. Уравнение поверхности тела в окрестности точки контакта в положении,

соответствующем значению $\gamma_3 = 1$, можно представить в виде

$$(7) \quad f(\mathbf{x}) = x_3 + a_3 - \frac{(x_1 \cos \delta + x_2 \sin \delta)^2}{2a_1} - \frac{(x_1 \sin \delta - x_2 \cos \delta)^2}{2a_2} + O_3(x_1, x_2),$$

где a_1, a_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в точке контакта, a_3 — высота центра масс, δ — угол между векторами главных кривизн и главными осями. Рассматриваемое тело является кельтским камнем [1], если выполнены соотношения $A_1 \neq A_2, a_1 \neq a_2, \delta \neq 0 \pmod{\pi/2}$.

Хорошо известны [1, 3] условия устойчивости решений (6) в случае неголономной постановки задачи, соответствующей случаю $\kappa \rightarrow +\infty$ [12], одним из которых является отрицательное направление вращения. В случае произвольного коэффициента вязкого трения линеаризованные уравнения возмущенного движения системы в окрестности решений (6) довольно громоздки [1] и аналитический анализ условий устойчивости затруднителен. Однако соответствующие области устойчивости при фиксированных параметрах задачи могут быть построены численно [13]. Существуют такие параметры задачи [13], что в неголономной постановке задачи вращения (6) всегда неустойчивы, а в случае вязкого трения всегда существуют устойчивые вращения как в положительном, так и в отрицательном направлениях. При этом численные эксперименты показывают, что при достаточно большом начальном отклонении от вращения (6) в положительном направлении финальное значение угловой скорости вращения может быть отрицательным.

3. Движения в окрестности устойчивых равновесий

Введем такие масштабы измерения масс, длин и времени, что $g = 1, A_3 = 1$ и $mg(a_2 - a_3) = A_1$, сохраняя все предыдущие обозначения. Будем считать, что в равновесии ($\omega_3 = 0$) центр масс тела занимает наинизшее положение ($a_3 < a_1, a_3 < a_2$), т.е. равновесие устойчиво, и рассмотрим движение в его окрестности, считая малыми переменные $v_1, v_2, \gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, а движение безотрывным. Тогда уравнения (1)–(3) с учетом (5) допускают интеграл (4) и геометрический интеграл $(\gamma, \gamma) = 1$, позволяющие исключить переменные v_3 и γ_3 и соответствующие им уравнения. Остальные уравнения запишем для первых шести малых переменных с точностью до первого порядка:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega_1, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{m}{A_1} (\gamma_2 a_3 - b_3 \gamma_1 - b_2 \gamma_2) - \frac{\kappa a_3}{A_1} (\omega_1 a_3 + v_2), \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{m}{A_2} (-\gamma_1 a_3 + b_3 \gamma_2 + b_1 \gamma_1) - \frac{\kappa a_3}{A_2} (\omega_2 a_3 - v_1), \\ \dot{v}_1 &= \frac{\kappa}{m} (a_3 \omega_2 - v_1), \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\kappa}{m} (a_3 \omega_1 + v_2), \end{aligned}$$

а для производной ω_3 по времени — с точностью до четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_3 = & (A_1 - A_2)\omega_2\omega_1 + m(b_3(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - (b_1 - b_2)\gamma_2\gamma_1) + \\
 & + \kappa\omega_3 \left(\frac{a_1a_2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}{(a_1 + a_2)^2} - \right. \\
 (9) \quad & \left. - (b_1\gamma_1^2 + b_2\gamma_2^2)(b_1 + b_2) - 2b_3(a_1 + a_2)\gamma_1\gamma_2 \right) + \\
 & + \kappa \left[a_3(b_1\omega_1\gamma_1 + b_2\omega_2\gamma_2 + b_3(\omega_2\gamma_1 + \omega_1\gamma_2)) + \right. \\
 & \left. + b_1v_2\gamma_1 - b_2v_1\gamma_2 - b_3(v_1\gamma_1 - v_2\gamma_2) \right],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_1 \cos^2 \delta + a_2 \sin^2 \delta, \\
 b_2 &= a_2 \cos^2 \delta + a_1 \sin^2 \delta, \\
 b_3 &= (a_1 - a_2) \sin \delta \cos \delta.
 \end{aligned}$$

Система (8) замкнута и при $\kappa = 0$, $\delta = 0$ соответствует уравнениям малых колебаний с частотами 0, 1 и

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{m(a_1 - a_3)}{A_2}},$$

которые заменой

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \omega_1 &= -\rho \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \rho \sin \theta \cos \varphi, \\
 \omega_2 &= \xi_2 \rho \cos \theta \sin(\varphi + \sigma), & \gamma_1 &= \rho \sin \theta \cos(\varphi + \sigma)
 \end{aligned}$$

приводятся к виду

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\sigma} = \eta = \xi_2 - 1, \quad \dot{v}_1 = 0, \quad \dot{v}_2 = 0.$$

Выполним замену (10) в уравнениях (8), (9), считая малыми параметры κ , δ и η . Тогда переменные ρ , θ , σ , v_1 и v_2 в новом времени являются медленными, а φ — быстрой. Величина ω_3 при этом также является медленной переменной, так как в отсутствие трения решения уравнений движения выпуклого тела на гладкой плоскости являются условно-периодическими функциями времени [14] и первое слагаемое правой части (9) в среднем не меняется.

Осредняя записанные в новых переменных уравнения (8), (9) по быстрой переменной с точностью до первого порядка малых параметров, получим

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= -\kappa \frac{a_3^2}{2A_1A_2} \rho (A_1 \cos^2 \theta - A_2 \sin^2 \theta) - \delta \frac{(A_2 - A_1)^2}{2A_1A_2} \rho \cos \theta \sin \theta \sin \sigma, \\
 \dot{\sigma} &= \eta - \delta \frac{(A_2 - A_1)}{2A_1A_2} (A_1 \sin^2 \theta - A_2 \cos^2 \theta) \frac{\cos \sigma}{\sin \theta \cos \theta}, \\
 \dot{\theta} &= \kappa \frac{a_3^2(A_2 - A_1)}{2A_1A_2} \sin \theta \cos \theta + \delta \frac{(A_2 - A_1)}{2A_1A_2} (A_1 \sin^2 \theta + A_2 \cos^2 \theta) \sin \sigma, \\
 (11) \quad \dot{\omega}_3 &= \kappa a_3 \left(a_3 + \frac{A_1 + A_2}{2m} \right) \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin \sigma + \\
 &+ \frac{\kappa}{2m} \left(\left(a_3 + \frac{A_1}{m} \right)^2 \sin^2 \theta - \left(a_3 + \frac{A_2}{m} \right)^2 \cos^2 \theta \right) \rho^2 \omega_3 + \\
 &+ \delta \frac{(A_2 - A_1)}{2} \rho^2 \cos 2\theta - \eta \frac{(A_1 + A_2)}{2} \rho^2 \cos \sigma \sin \theta \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Поскольку эти уравнения не содержат переменных v_1 и v_2 , соответствующие уравнения не приводятся.

Заметим, что в системе (11) уравнения для θ и σ отделяются. В зависимости от параметров задачи они могут иметь равновесия вида $\sigma = \sigma_0$, $\theta = \theta_0$, определяющиеся равенствами

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \cos^2 \sigma_0 &= \frac{1}{2} - \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{\alpha} + \frac{\sqrt{(\alpha - \nu_1^2 + \nu_2^2)^2 + 4\nu_1^2\nu_2^2}}{2\alpha}, \\
 \operatorname{ctg} \theta_0 &= \frac{-\nu_1 \pm \sqrt{\nu_1^2 - \alpha \cos^2 \sigma_0}}{\cos \sigma_0},
 \end{aligned}$$

где

$$\nu_1 = \frac{\kappa a_3^2}{2\delta A_2}, \quad \nu_2 = \frac{\eta A_1}{\delta(A_2 - A_1)}, \quad \alpha = \frac{A_1}{A_2}.$$

Характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения отделяющейся системы в окрестности этих равновесий имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda\eta \operatorname{tg} \sigma_0 + \operatorname{tg}^2 \sigma_0 + \frac{\eta^2}{\nu_1^2\nu_2^2} \operatorname{ctg}^2 \sigma_0 = 0,$$

и равновесия устойчивы при $\operatorname{tg} \sigma_0 > 0$.

Будем считать, что параметры задачи таковы, что указанные равновесия (12) существуют и начальные значения $\theta(0)$ и $\sigma(0)$ соответствуют устойчивым из них. Тогда, пренебрегая отклонениями θ и σ от начальных значений

в системе (11) с точностью до первого порядка малых параметров, получим

$$(13) \quad \dot{\rho} = -\beta_1 \rho, \quad \dot{\omega}_3 = -\rho^2(\beta_2 + \beta_3 \omega_3),$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\kappa a_3^2}{2(A_1 \sin^2 \theta_0 + A_2 \cos^2 \theta_0)} > 0, \\ \beta_2 &= \left(\frac{\kappa^2 a_3^3 (2ma_3 + (A_1 + A_2))}{2m(A_1 \sin^2 \theta_0 + A_2 \cos^2 \theta_0)} + \frac{\eta^2 A_1 A_2 (A_2 + A_1)}{(A_1 \sin^2 \theta_0 - A_2 \cos^2 \theta_0)(A_2 - A_1)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0}{\delta} + \frac{\delta(A_2 - A_1) \cos 2\theta}{2}, \\ \beta_3 &= \frac{(A_1^2 \cos^2 \theta_0 + A_2^2 \sin^2 \theta_0)}{2m^2} + \frac{a_3(A_1 \cos^2 \theta_0 + A_2 \sin^2 \theta_0)}{m} + \frac{a_3^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что если $A_2 > A_1$ и параметры системы таковы, что $\nu_1^2 > \alpha \cos^2 \sigma_0$ (что справедливо при рассматриваемых далее значениях параметров), то для соответствующего знаку “+” в формуле (12) значению θ_0 справедливы соотношения

$$\cos 2\theta_0 > \cos^2 \theta_0 (\alpha + 1) > 0,$$

$$A_1 \cos^2 \theta_0 - A_2 \sin^2 \theta_0 = A_2 \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \sigma_0} \left(\alpha \cos^2 \sigma_0 - \left(\nu_1 - \sqrt{\nu_1^2 - \alpha \cos^2 \sigma_0} \right)^2 \right) > 0$$

и величина β_2 заведомо положительна.

Решение системы (13) имеет вид

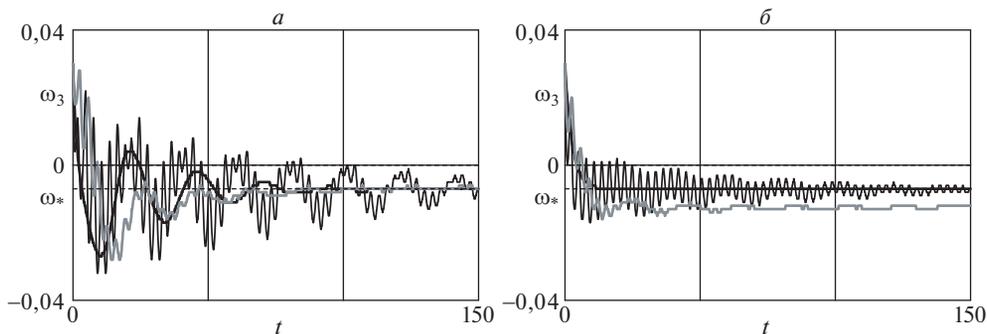
$$(14) \quad \rho = \rho(0) \exp(-\beta_1 t), \quad \omega_3 = -\frac{\beta_2}{\beta_3} + \left(\omega_3(0) + \frac{\beta_2}{\beta_3} \right) \exp\left(-\frac{\beta_3}{2\beta_1} (\rho(0)^2 - \rho^2) \right),$$

откуда, в частности, следует, что в случае $\beta_2 > 0$ при начальной угловой скорости вращения, большей (меньшей) значения $\omega_* = -\beta_2/\beta_3 < 0$, в процессе движения ее величина убывает (возрастает). Таким образом, смена направления вращения возможна только с положительного на отрицательное, если начальное отклонение от вращения удовлетворяет неравенству

$$\rho(0)^2 > \frac{\beta_1}{\beta_3} \ln \frac{\beta_3 \omega_3(0) + \beta_2}{\beta_2}.$$

Можно также отметить, что при начальных условиях $\rho(0) \neq 0$, $\omega_3(0) = 0$ из (14) получим $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_3(t) < 0$, что соответствует такому характерному для кельтского камня эффекту [3], как переход от колебательных движений к вращательному.

На рисунке *a* представлены зависимости величины ω_3 от времени при интегрировании точных уравнений движения (1)–(3), (5) (серая кривая), приближенных уравнений (8), (9) (тонкая кривая) и осредненной системы (11)



Рисунок

(жирная кривая) кельтского камня с параметрами

$$(15) \quad m = 0,01, \quad A_1 = 0,12, \quad A_2 = 0,92, \quad a_1 = 100, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 1, \\ \delta = 0,1 \quad (\eta = 0,105),$$

на плоскости с коэффициентом трения $\kappa = 0,01$ при начальных условиях

$$\gamma_1(0) = 0,2, \quad \gamma_2(0) = 0,001, \quad \omega_3(0) = 0,03, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0, \\ (\rho(0) \approx 0,2, \quad \theta(0) \approx 0,005, \quad \sigma(0) = \varphi(0) = 0).$$

На рисунке *б* представлены решение (13) при аналогичных начальных условиях

$$\rho(0) = 0,2, \quad \omega_3(0) = 0,03$$

и решения точных и приближенных уравнений при соответствующих начальных условиях вида

$$\gamma_1(0) \approx 0,122, \quad \gamma_2(0) \approx 0,158, \quad \omega_1(0) = 0, \quad \omega_2(0) \approx -0,019, \quad \omega_3(0) = 0,03, \quad \mathbf{v}(0) = 0.$$

Полученные результаты показывают, что система уравнений (8), (9) сохраняет исследуемые свойства исходной системы (1)–(3), (5), и при заданных параметрах задачи финальные значения угловой скорости вращения при интегрировании (8), (9) отличаются на малую величину от финальных значений осредненной системы (11), которые при соответствующих начальных значениях углов $\theta(0)$ и $\sigma(0)$, в свою очередь, близки к финальному значению угловой скорости вращения при интегрировании системы (13), определенному равенством (14).

4. Заключение

Таким образом, если в равновесии центр масс кельтского камня занимает наинизшее положение, то в случае малого трения, малого угла поворота главных центральных осей инерции тела относительно его осей геометрической симметрии и при выполнении неравенства $\sqrt{A_1/A_2(a_1 - a_3)/(a_2 - a_3)} - 1 \ll 1$ ($\eta \ll 1$) смена направления кельтского камня имеет аналитическое обоснование в рамках модели классического вязкого трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1988.
2. *Walker J.* The mysterious “rattleback”: a stone spins in one direction and then reverses // *Sci. Amer.* 1979. No. 10. P. 144–149.
3. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2014.
4. *Mamaev I.S., Borisov A.V.* Strange attractors in rattleback dynamics // *Phys. Usp.* 2003. Vol. 46. No. 4. P. 393–403.
5. *Franti L.* On the rotational dynamics of the rattleback // *Open Physics.* 2013. Vol. 11. No. 2. P. 162–172.
6. *Kazakov A.O., Gonchenko A.S., Gonchenko S.V.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a celtic stone // *Regular Chaotic Dynam.* 2013. Vol. 18. No. 5. P. 521–538.
7. *Nakanishi H., Kondo Y.* Rattleback dynamics and its reversal time of rotation // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 95. No. 6. 062207.
8. *Przybylska M., Rauch-Wojciechowski S.* Understanding reversals of a rattleback // *Regular Chaotic Dynam.* 2017. Vol. 22. No. 4. P. 368–385.
9. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф.* Глобальное движение кельтского камня // *Известия РАН. МТТ.* 2008. № 3. С. 8–16.
10. *Kudra G., Awrejcewicz J.* Celtic stone dynamics revisited using dry friction and rolling resistance // *Shock Vibrat.* 2012. Vol. 19. No. 5. P. 1115–1123.
11. *Takano H.* Spin reversal of a rattleback with viscous friction // *Regular Chaotic Dynam.* 2014. Vol. 19. No. 1. P. 81–99.
12. *Карпетян А.В.* О Реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // *ПММ.* 1981. Т. 45. № 1. С. 42–51.
13. *Муницына М.А.* Численное исследование динамики кельтского камня на плоскости с вязким трением // *Труды МФТИ.* Т. 12. № 1(45). 2020. С. 137–142.
14. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies // London: Macmillan, 1884.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 10.06.2020

После доработки 27.07.2021

Принята к публикации 15.10.2021

© 2022 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АГРЕГИРОВАНИЕ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ПРИТЯГИВАЮЩИМ ЦИКЛОМ¹

Рассматривается множество автономных систем, в каждой из которых реализуется невырожденный для периодического решения случай. Решается задача агрегирования этих систем в модель, содержащую связанные подсистемы, с целью построения системы с притягивающим циклом. Предлагаются способы агрегирования, находятся слабые связи–управления, строятся скорректированные системы.

Ключевые слова: агрегирование, подсистемы, периодическое решение, невырожденный случай, слабая связь–управление, скорректированная система, цикл, притяжение.

DOI: 10.31857/S0005231022030047

1. Введение

В публикации [1] введена модель, содержащая связанные подсистемы (МССП) и описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой подсистемы — системы автономных ОДУ. Наличие связи между подсистемами определяется параметром связи ε , при нулевом значении которого модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае — индивидуальная, сама подсистема может быть линейной или нелинейной и описывать различные процессы: механические, электрические, биофизические и т.д. Система МССП моделирует систему, в которой одновременно происходят различные связанные между собой процессы. В случае связей, не зависящих явно от времени, получается автономная МССП. Одноровневая МССП называется связанной (coupled) системой.

МССП относится к сложной системе. Основным методом изучения сложных систем стала декомпозиция (см. [2–9]). При декомпозиции свойства сложной системы исследуются на основе свойств подсистем с учетом связей между ними. Из-за своей структуры МССП допускает естественную декомпозицию

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

на подсистемы. Агрегирование сложной системы заключается в объединении подсистем в единое целое, обладающее требуемым динамическим свойством. Способы агрегирования сложной системы методом Ляпунова приводятся в [10].

Колебания автономной МССП изучались в ряде публикаций (см., например, [11–14]). При этом в [13] для решения задачи стабилизации колебания МССП предложено выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и саму стабилизацию. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения других управлений. Анализ уравнения Ван дер Поля с позиции МССП приводит в [15, 16] к нахождению универсальных слабых связей–управлений, реализующих идею [13], и построению управляемой механической системы с малым коэффициентом ε усиления регулятора. Такая управляемая система называется ε -скорректированной системой. В результате коррекции система обладает орбитально асимптотически устойчивым циклом, близким к выделенному колебанию самой системы. С построением ε -скорректированных систем для подсистем, допускающих семейства невырожденных периодических решений, находится путь к агрегированию механических систем в связанную систему.

По альтернативе в [11] в невырожденном для периодических решений случае в автономной системе реализуется семейство периодических решений или цикл. В механической системе цикл рождается в ε -скорректированной системе (см. [15, 16]) из семейства периодических решений. Поэтому подсистема с семейством периодических решений располагается на нижнем уровне иерархии МССП. Сама скорректированная система принадлежит следующему уровню иерархии, на котором могут находиться и другие подсистемы с циклами. Более того, этот уровень может содержать подсистемы с семействами периодических решений так же, как и нижний уровень может иметь подсистемы с циклами. На последующих уровнях иерархии МССП могут быть подсистемы с семействами периодических решений, подсистемы с циклами, скорректированные системы. Такой сложной представляется структура агрегированной автономной системы, содержащей связанные подсистемы. С другой стороны, выясняется, что агрегирование связанных систем с семействами периодических решений и агрегирование связанных систем с циклами становятся основными этапами при агрегировании любой автономной МССП, допускающей цикл.

В статье решается задача агрегирования автономной МССП, обладающей притягивающим циклом.

2. Скорректированная автономная система

Согласно разделу 1 на нижнем уровне иерархии автономной МССП располагаются подсистемы, допускающие семейства периодических решений (одночастотных колебаний). Рассматривается семейство невырожденных колебаний, на котором согласно [11] период монотонно (см. [17]) зависит от одного

параметра, обозначенного здесь через h . Такими являются, в частности, колебания лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил — потенциальных и неконсервативно позиционных.

Для механических систем задача нахождения универсальных связей—управлений и построение скорректированных (управляемых) систем, допускающих орбитально асимптотически устойчивый цикл, решалась в [15, 16]. Далее дается построение скорректированной системы для системы общего вида.

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$(1) \quad \dot{z} = Z(z), \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \dots, z_n^0, t)$, где z^0 — начальная точка (при $t = 0$). Для (1) необходимые и достаточные условия существования T -периодического решения даются равенством

$$(2) \quad f \equiv z(z_1^0, \dots, z_n^0, T) - z^0 = 0.$$

В предположении, что (2) имеет решение $z^0 = z^*$, $T = T^*$, вычисляется ранг Ra_* функциональной матрицы для функции f в точке z^* при $T = T^*$. Используются определения из [11].

Определение 1. Случай $Ra_ = n - 1$ называется невырожденным для периодического решения случаем.*

Определение 2. Изолированное периодическое решение автономного уравнения называется циклом.

В данной статье анализируется невырожденный случай для периодического решения. В нем система (1) допускает цикл или семейство Σ периодических решений с монотонным по скалярному параметру h периодом $T(h)$ (см. [11, 17]). Решения из Σ заполняют двумерное инвариантное многообразие $\hat{\Sigma}$. Без ограничения общности сначала рассматривается система

$$(3) \quad \dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y),$$

заданная на $\hat{\Sigma}$. Семейство Σ описывается формулами: $x = x(h, t)$, $y = y(h, t)$. Тогда уравнения в вариациях для решения из Σ имеют периодическое решение $\dot{x}(h, t)$, $\dot{y}(h, t)$. Второе решение этих уравнений находится дифференцированием по h и в невырожденном случае не будет периодическим. При этом соответствующие нулевые характеристические показатели (ХП) образуют жорданову клетку.

На плоскости (x, y) для фиксированного h решение из семейства Σ представляется замкнутой кривой, а все решения — семейством по h замкнутых кривых. Значит, семейство Σ удобно представлять в полярной системе координат (r, θ) , выбирая за r параметр семейства h . Тогда скорость изменения угла θ будет зависеть от h . При этом при необходимости используется перенос начала координат.

В новых переменных уравнения (3) записываются в виде

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(r).$$

Управляемая система

$$(4) \quad \dot{\rho} = -\varepsilon\rho, \quad \dot{\theta} = \omega(r^* + \rho); \quad \rho = r - r^*, \quad \varepsilon = \text{const},$$

строится в окрестности решения, на котором $r = r^*$. При малом $\varepsilon > 0$ решение $\rho = 0$ первого уравнения становится устойчивым, а управляемая система в переменных (r, θ) допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл.

Вывод сохраняется для многомерной системы, в которой многообразии $\hat{\Sigma}$ обладает свойством притяжения, что обеспечивается соответствующими отрицательными ХП. В граничном случае, когда часть этих ХП принадлежит мнимой оси, притяжение к $\hat{\Sigma}$ обеспечивается по каждой переменной малым управлением, как происходит в первом уравнении системы (4).

Таким образом, получается принципиальное решение задачи построения скорректированной системы, обладающей орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Теорема 1. Пусть автономная система содержит многообразие $\hat{\Sigma}$, заполненное семейством Σ невырожденных периодических решений, для которого ХП принадлежат левой полуплоскости или мнимой оси. Для такой системы всегда строится скорректированная система, допускающая орбитально асимптотически устойчивый цикл.

3. Построение скорректированной системы

Согласно теореме 1, скорректированная система существует. В ней орбитальная асимптотическая устойчивость обеспечивается диссипацией, действующей в каждой текущей точке траектории. В уравнении второго порядка диссипация создается нелинейной силой, линейной по скорости: таким является универсальное управление в [15, 16].

При переходе от уравнения второго порядка к системе двух уравнений (3), в которой $\dot{x} = y$, оказывается, что диссипация линейна по скорости \dot{x} . При этом одновременно происходит диссипация по координате y . Действующее на систему управление находится из необходимых условий существования в системе цикла. При этом универсальное управление из [15, 16] является простейшим по виду и реализуется в мягком режиме функционирования триода. Очевидно, управление не будет единственным.

В общем случае (3) строится скорректированная система

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y), \\ \dot{y} &= Y(x, y) + \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)X(x, y), \end{aligned}$$

где постоянная σ равняется $+1$ или (-1) , а постоянная K вычисляется далее.

При $\varepsilon = 0$ система (5) допускает семейство Σ . Поэтому для решения вопроса о существовании и устойчивости цикла используется амплитудное (бифуркационное) уравнение

$$(6) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} (1 - Kx(h, t)^2)X(x(h, t), y(h, t))\eta(h, t)dt = 0,$$

где $(\xi(h, t), \eta(h, t))$ — T -периодическое решение системы, сопряженной к уравнениям в вариациях для периодического решения автономной системы. С учетом возможности выбора времени t с точностью до постоянной полагается $\eta(h, 0) = 0$. Само равенство (6) получается как необходимое условие существования T^* -периодического решения системы (5) в первом приближении по ε : $T^* = T(h^*)$. Число K вычисляется из условия существования корня $h = h^*$ уравнения (6). В результате получается

$$(7) \quad K = \frac{\int_0^{T^*} X(h^*, t)\eta(h^*, t)dt}{\int_0^{T^*} x^2(h^*, t)X(h^*, t)\eta(h^*, t)dt},$$

где $X(h, t) = X(x(h, t), y(h, t))$.

Формула (7) справедлива для произвольного корня $h = h^*$ амплитудного уравнения (6). При учете этого факта вводится функция $K(h^*)$ или функция $K(h)$ с переменной h .

Далее используется тождество

$$\int_0^{T(h)} (1 - Kx(h, t)^2)X(x(h, t), y(h, t))\eta(h, t)dt \equiv 0,$$

дифференцированием которого по параметру h в точке $h = h^*$ и учетом равенства $\eta(h, T) = 0$ вычисляется производная

$$(8) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\kappa, \quad \kappa = \int_0^{T^*} x^2(h^*, t)X(h^*, t)\eta(h^*, t)dt.$$

Из формулы (8) выводится достаточное условие $dI(h^*)/dh \neq 0$ существования цикла в точке $h = h^*$. Условие выполняется, если $\chi = dK(h^*)/dh \neq 0$ и интеграл в (8) отличен от нуля. В этой ситуации выбором соответствующего знака постоянной σ , $\sigma dI(h^*)/dh < 0$, завершается построение орбитально асимптотически устойчивого цикла.

Таким образом, справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть система (3) допускает семейство Σ невырожденных периодических решений. Тогда посредством управления с функцией $u = (1 - Kx^2)X(x, y)$, действующего на правую часть уравнения по y в системе (3), для каждой точки $h = h^*$, в которой $\chi_k \neq 0$, строится ε -скорректированная система, обладающая орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Замечание 1. Теорема 2 также формулируется с использованием управления $(1 - Ky^2)Y(x, y)$, действующего на правую часть уравнения по x в системе (3).

Замечание 2. Теорема 2 доставляет конструктивный способ построения скорректированной системы, обладающей орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Замечание 3. В случае механической системы, подверженной действию позиционных сил, универсальное управление найдено в [15].

Замечание 4. Теорема 2 распространяется на многомерную систему с притягивающим многообразием $\hat{\Sigma}$.

Пример 1. Для консервативной системы с одной степенью свободы в (3) выполняются равенства

$$X(x, y) = y, \quad Y(x, y) = F(x).$$

Поэтому скорректированное уравнение (5) записывается в виде

$$\ddot{x} = F(x) + \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{x}.$$

Функция $\eta(h, t) \equiv \dot{x}(h, t)$ (см. [13]), и амплитудное уравнение (6) приобретает вид

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} [1 - Kx^2(h, t)] \dot{x}^2(h, t) dt = 0.$$

Достаточное условие существования орбитально асимптотически устойчивого цикла в скорректированной консервативной системе с одной степенью свободы дается неравенством $\sigma\chi < 0$.

Для математического маятника $F(x) = -\sin x$, а функция $K(h)$ согласно [18] монотонно убывает. Поэтому $\chi < 0$, и условие существования орбитально асимптотически устойчивого цикла выполняется с константой $\sigma = 1$.

4. Агрегирование подсистем, допускающих циклы

Рассматривается гладкая слабо связанная система

$$(9) \quad \dot{z}^s = Z^s(z^s) + \varepsilon u^s(z^1, \dots, z^m), \quad z^s \in \mathbb{R}^{m_s}, \quad s = 1, \dots, m.$$

Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ каждая из подсистем допускает орбитально асимптотически устойчивый цикл $z^s = z^s(t + \gamma_s)$ с периодом T : γ_s — временной сдвиг на траектории. Задача заключается в нахождении таких функций u^s , чтобы связанная система (9) при малых $\varepsilon > 0$ также обладала орбитально асимптотически устойчивым циклом.

Согласно [12] записываются амплитудные уравнения

$$(10) \quad g^s(\gamma) \equiv \int_0^T \sum_{k=1}^{m_s} u_k^s(z^1(t + \gamma_1), \dots, z^m(t + \gamma_m)) \psi_k^s dt = 0, \quad s = 1, \dots, m,$$

доставляющие необходимое и достаточное условие существования в (9) в первом приближении по ε решения периода T ; функция $z^s = z^s(t + \gamma_s)$, $s = 1, \dots, m$, вычисляется на цикле подсистемы. Функции $\{\psi_k^s\}$ образуют систему T -периодических решений линейной сопряженной системы. Векторное уравнение (10) содержит m неизвестных. В [12, теорема 1] доказывается, что корню $\gamma = \gamma^*$ уравнения (10), для которого ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g(\gamma)$, $g = (g^1, \dots, g^m)$, равен $m - 1$, отвечает цикл связанной системы. При этом функции u^s связывают все подсистемы в одну автономную систему, в которой для цикла реализуется невырожденный для периодического решения случай. В этой ситуации по теореме Андронова–Витта [19] цикл будет орбитально асимптотически устойчивым, если ненулевые ХП находятся в левой полуплоскости. С другой стороны, для устойчивого цикла задача стабилизации цикла решается самим фактом существования цикла. Следовательно, согласно результатам в [12, теорема 3] задача стабилизации цикла связанной системы решается надлежащими автономными управлениями u^s .

Далее предполагается, что все ХП цикла в каждой подсистеме принадлежат левой полуплоскости. Для подсистем, обладающих семействами периодических решений, это достигается построением скорректированных систем. Но в любом случае агрегирование подсистем, обладающих устойчивыми циклами, проводится нахождением функций u_k^s , гарантирующих перемещение $m - 1$ нулевых ХП в отрицательную полуплоскость.

Для определения векторов u^s используется подход, идея которого лежит в теории вынужденных колебаний. В этом подходе с учетом факта устойчивости циклов в подсистемах вектор u^1 полагается нулевым, а остальные u^s определяются по формулам

$$(11) \quad u^s = \sigma_s [1 - K_s(z^1)^2] v^s(z^s), \quad (z^1)^2 = \sum_{j=1}^{m_1} (z_j^1)^2, \quad s = 2, \dots, m,$$

где числа σ_s равны $+1$ или (-1) , K_s — постоянные, а функция v^s зависит только от вектора z^s . Получается, что подсистема с номером 1 действует на все другие подсистемы, не испытывая действия других подсистем: связь — односторонняя. Более того, на каждую из этих подсистем действует только

первая подсистема. В результате анализ системы (9) включает независимый анализ $m - 1$ систем

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{z}^1 &= Z^1(z^1), \\ \dot{z}^s &= Z^s(z^s) + \varepsilon \sigma_s [1 - K_s(z^1)^2] v^s(z^s), \quad s = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Постоянная K_s в системе (12) находится из условия выполнения равенства

$$(13) \quad g^s(\gamma) \equiv \sigma_s \int_0^T [1 - K_s(z^1(t + \gamma_1))^2] \sum_{k=1}^{m_s} v_k^s(z^s(t + \gamma_s)) \psi_k^s(t + \gamma_s) dt = 0, \\ s = 2, \dots, m.$$

Это уравнение вместе с тождеством $g^1(\gamma_1) \equiv 0$ служит системой амплитудных уравнений для (12). С учетом произвольности сдвига γ_1 при нахождении корня уравнения (13) используется переменная интегрирования $\tau = t + \gamma_1$. Тогда получаются $m - 1$ независимых уравнений

$$(14) \quad \begin{aligned} g^s(\nu_s) &\equiv \sigma_s \int_0^T [1 - K_s(z^1(\tau))^2] f_s(\tau, \nu_s) d\tau = 0, \\ f_s(\tau, \nu_s) &= \sum_{k=1}^{m_s} v_k^s(z_k^s(\tau + \nu_s)) \psi_k^s(\tau + \nu_s), \quad s = 2, \dots, m, \end{aligned}$$

для нахождения временных сдвигов $\nu_s = \gamma_s - \gamma_1$, $s = 2, \dots, m$. Эти уравнения исследуются, когда средние значения не равны нулю:

$$(15) \quad \kappa_s = \frac{1}{T} \int_0^T f_s(\tau, \nu_s) d\tau \neq 0.$$

Из (14) для корня $\nu_s = \nu_s^*$ уравнения (13) с номером s определяется число

$$(16) \quad K_s = \frac{\int_0^T f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau}{\int_0^T (z^1(\tau))^2 f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau},$$

т.е. устанавливается существование корня $\nu_s = \nu_s^*$ для рассматриваемого уравнения в (14).

Таким образом, система амплитудных уравнений (10) имеет корень, для которого сдвиг γ_1 произволен, а остальные сдвиги $\gamma_s = \gamma_1 + \nu_s^*$, $s = 2, \dots, m$, находятся как корни уравнений (14).

При рассмотрении равенства (16) как формулы для нахождения зависимости $K_s(\nu_s)$ из (13) следует тождество

$$(17) \quad \int_0^T [1 - K_s(\nu_s)(z^1(\tau))^2] f_s(\tau, \nu_s) d\tau \equiv 0.$$

Отсюда при $\nu_s = \nu_s^*$ выводится равенство

$$-dK_s(\nu_s^*) \int_0^T (z^1(\tau))^2 f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau + d \int_0^T [1 - K_s(\nu_s^*)(z^1(\tau))^2] f_s(\tau, \nu_s^*) d\tau = 0.$$

Поэтому при $\nu_s = \nu_s^*$ для всех номеров $s = 2, \dots, m$ вычисляется производная

$$(18) \quad \frac{dg^s(\nu_s^*)}{d\nu_s} = \sigma_s \chi_s \kappa_s, \quad \chi_s = \frac{dK_s(\nu_s^*)}{d\nu_s}.$$

В результате для невырожденного случая, когда все $dK_s(\nu_s^*)/d\nu_s \neq 0$, ранг функциональной матрицы отображения $\gamma \rightarrow g(\gamma)$ равняется $m - 1$. Следовательно, достаточные условия агрегирования подсистем в МССП, обладающей циклом, выполняются.

Интеграл в (15) не зависит от ν_s . Поэтому из (17) следует T -периодичность функции $K_s(\nu_s)$. Эта функция, как следует из ее определения, не сводится к постоянной. Следовательно, ее производная обращается в нуль только в конечном числе точек.

Следующий шаг агрегирования заключается в выборе таких функций (11), чтобы МССП обладала притягивающим циклом. По предположению все ХП циклов в подсистемах лежат в отрицательной полуплоскости; они наследуются циклом МССП. В невырожденном случае нулевые ХП подсистем с номерами $s = 2, \dots, m$ становятся ненулевыми. Поэтому выбором чисел σ_s они перемещаются при необходимости в левую полуплоскость.

Таким образом, решается задача агрегирования МССП, содержащей подсистемы с циклами и обладающей притягивающим циклом.

Теорема 3. Пусть имеется множество из m систем, каждая с орбитально асимптотически устойчивым циклом, причем периоды циклов совпадают. Тогда задача агрегирования автономной МССП, допускающей притягивающий цикл, решается функциями (11), (15): числа σ_s обеспечивают принадлежность ХП цикла левой полуплоскости. Цикл задается в подсистемах сдвигами ν_2^, \dots, ν_m^* по времени и существует для всех точек на окружностях по параметрам ν_s за исключением конечного числа точек.*

Замечание 5. В силу равноправности рассматриваемых подсистем вместо первой подсистемы системы (9) в схеме агрегирования можно выбирать любую из подсистем. При этом качественный результат — агрегированная МССП, обладающая притягивающим циклом — сохраняется. Однако циклы агрегированных МССП будут отличаться на величины порядка $O(\varepsilon)$.

Замечание 6. В предложенной схеме агрегирования одна из подсистем становится регулятором, который генерирует управляющий сигнал, а остальные подсистемы – объектами регулирования. Получается структура с регулятором в центре и объектами на периферии. Колебания в объектах не синхронизируются по времени. Природная аналогия напрашивается.

Замечание 7. Теорема 3 гарантирует решение задачи агрегирования системы с притягивающим циклом, однако решение зависит от выбора функций v^s , поэтому оно не единственное.

5. Агрегирование многоуровневой МССП

Теоремами 2 и 3 дается конструктивный способ агрегирования автономной МССП из подсистем, содержащих невырожденные периодические решения. Если набор подсистем состоит только из подсистем с циклами, то они агрегируются в МССП по теореме 3. Получается одноуровневая МССП.

С другим случае, когда в наборе подсистем содержатся только семейства периодических решений, согласно теореме 2 конструируются скорректированные системы, обладающие орбитально асимптотически устойчивыми циклами, которые агрегируются по теореме 3 в МССП. Получается двухуровневая МССП.

Наконец, в случае набора подсистем, содержащих невырожденные периодические решения разных типов, на первом уровне для подсистем с семействами периодических решений конструируются скорректированные системы, к которым на втором уровне добавляются подсистемы с циклами. В результате все подсистемы агрегируются в двухуровневую МССП.

Таким представляется правило агрегирования автономной МССП, обладающей притягивающим циклом. Однако в приложениях на каждом уровне иерархии к МССП могут добавляться подсистемы с разными типами невырожденных периодических решений. Тогда все подсистемы агрегируются в многоуровневую МССП. В любом случае при этом используется теорема 2 о скорректированной системе, а на самом верхнем уровне — теорема 3 об агрегировании подсистем с циклами.

Заметим, что агрегирование в связанную механическую систему идентичных консервативных систем на плоскости можно проводить построением общей для всех подсистем одной скорректированной системы.

Пример 2. Показывается, как на базе линейного осциллятора и математического маятника

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \text{const}, \quad \ddot{y} + \sin y = 0$$

агрегируется двухуровневая автономная система с притягивающим циклом.

Несмотря на вырожденность колебаний линейного осциллятора, скорректированная система — уравнение Ван дер Поля — допускает притягивающий цикл. Для математического маятника при применении теоремы 2 учитывается, что для маятника число $\chi < 0$, $\sigma = 1$ (пример 1). Малый коэффициент

усиления регулятора обозначается через ε_1 . Формируется первый уровень иерархии

$$(19) \quad \ddot{x}_1 + \omega x_1 = \varepsilon_1(1 - K_x x_1^2)\dot{x}_1, \quad \ddot{y}_1 + \sin y_1 = \varepsilon_1(1 - K_y y_1^2)\dot{y}_1,$$

записанный в переменных x_1 и y_1 и состоящий из скорректированных систем. На этом уровне каждая из подсистем допускает орбитально асимптотический устойчивый цикл. Для маятника с периодом $T = T(h)$, где h – постоянная энергии, периоды цикла осциллятора Ван дер Поля и цикла управляемого маятника совпадают при условии $T(h) = 2\pi/\omega$. Циклы единого для подсистем периода образуют семейство по сдвигу ν .

Подсистемы на первом уровне можно записать в виде системы

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, \dot{x}_1), \quad \dot{y}_1 = Y_1(y_1, \dot{y}_1),$$

к которой применяется теорема 3. Полученная система записывается в переменных x_2 и y_2 : формируется второй уровень иерархии

$$(20) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_2 &= X_1(x_2, \dot{x}_2), \\ \ddot{y}_2 &= Y_1(y_2, \dot{y}_2) + \varepsilon_2 \sigma [1 - K_{xy} (X_1^2(x_2, \dot{x}_2) + \dot{x}_2^2)] \dot{y}_2. \end{aligned}$$

В (20) постоянные σ и K_{xy} обеспечивают существование и притяжение циклов, ε_2 – коэффициент усиления регулятора. В амплитудном уравнении

$$\int_0^T [1 - K_{xy} (X_1^2(x_c(\tau), \dot{x}_c(\tau)) + \dot{x}_c^2(\tau))] \dot{y}_1(\tau + \nu) \psi(\tau + \nu) d\tau = 0$$

для цикла системы (20) функцией $x_c(\tau)$ описывается цикл Ван дер Поля, а функцией $y_1(\tau + \nu)$ – цикл управляемого маятника в (19): (φ, ψ) – периодическое решение сопряженной системы. При этом функция $y_1 = y + O(\varepsilon_1)$, а согласно вычислениям в [13] функция $\psi = -\dot{y} + O(\varepsilon_1)$. Поэтому интеграл

$$\kappa = - \int_0^T [\dot{y}^2(\tau + \nu) + O(\varepsilon_1)] d\tau$$

с учетом малости числа ε_1 отличен от нуля. Выполнением этого условия теоремы 3 констатируется достижение второго уровня иерархии – автономной системы с притягивающим циклом.

Таким образом, агрегирование проводится последовательным применением теорем 2 и 3.

6. Заключение

Агрегирование автономной МССП из подсистем, содержащих невырожденные периодические решения, проводится с целью конструирования системы, обладающей притягивающим циклом. В агрегированной МССП осуществляется естественная стабилизация колебания всей системы и происходит синхронизация колебаний подсистем по частоте. В данной статье предлагается агрегировать подсистемы на каждом этапе объединения в связанную

систему. При этом подсистемы с семействами периодических решений агрегируются путем конструирования скорректированных систем, обладающих притягивающими циклами, и отдельно дается решение задачи агрегирования подсистем с циклами. В результате получаются одноуровневые МССП, а также — многоуровневые МССП. Задача агрегирования в автономную МССП, обладающую притягивающим циклом, всегда получает решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы // *АиТ.* 2013. № 6. С. 26–41.
Tkhai V.N. Model with Coupled Subsystems // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 6. P. 919–931.
2. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределенными параметрами // *АиТ.* 1973. № 1. С. 5–22.
Matrosov V.M. The Method of Vector Lyapunov Functions in Analysis of Composite Systems with Distributed Parameters (Survey) // *Autom. Remote Control.* 1973. V. 34. No. 1. P. 1–15.
3. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. М.: Наука, 1987.
4. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
5. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974.
6. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
7. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
8. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами / Пер. с англ. под ред. В.М. Матросова, С.В. Савастюка. М.: Мир, 1994.
9. *Черноусько Ф.Л., Апаньевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
10. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012.
11. *Тхай В.Н.* Колебания автономной модели, содержащей связанные подсистемы // *АиТ.* 2015. № 1. С. 81–90.
Tkhai V.N. Oscillations in the Autonomous Model Containing Coupled Subsystems // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 1. P. 64–71.
12. *Тхай В.Н.* Колебания, устойчивость и стабилизация в модели, содержащей связанные подсистемы с циклами // *АиТ.* 2015. № 7. С. 40–51.
Tkhai V.N. Oscillations, Stability and Stabilization in the Model Containing Coupled Subsystems with Cycles // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 7. P. 1169–1178.
13. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // *АиТ.* 2016. № 6. С. 38–46.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.

14. *Тхай В.Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы с различными типами колебаний // *АиТ.* 2017. № 4. С. 21–36.
Tkhai V.N. Model Containing Coupled Subsystems with Oscillations of Different Types // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 4. P. 595–607.
15. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // *АиТ.* 2019. № 11. С. 83–92.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
16. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // *АиТ.* 2020. № 9 . С. 93–104.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an N Degree of Freedom Controlled Mechanical System // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
17. *Тхай В.Н.* Закон зависимости периода нелинейных колебаний от одного периода // *Прик. матем. и механ.* 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 430–434.
18. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 1959. No. 030022. P. 030022-1–030022-5.
19. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // *Журн. эксп. и теор. физики.* 1933. Т. 3. Вып. 5. С. 373–374.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 25.08.2020

После доработки 22.09.2021

Принята к публикации 20.11.2021

Стохастические системы

© 2022 г. М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук (shaykin36@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДНОМУ СИГНАЛУ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ТИПА

Важнейшей нерешенной задачей теории управления является задача оптимизации мультипликативной стохастической системы в классе регуляторов по выходному сигналу, наблюдаемому в шумах. Регулятор в цепи обратной связи должен быть допустимым, т.е. обеспечивать устойчивость замкнутой системы и гарантировать требуемый уровень подавления внешних возмущений, действующих на регулируемый объект. В статье в рамках стохастической теории H^2/H_∞ -управления при наличии помех решается задача анализа, т.е. нахождения условий существования допустимых регуляторов. Полученные результаты могут использоваться далее в задаче синтеза при условной оптимизации мультипликативной стохастической системы в классе допустимых регуляторов динамического типа.

Ключевые слова: H^2/H_∞ -теория управления, диффузионное уравнение Ито, индуцированная норма оператора, мультипликативная стохастическая система, регулируемый выходной сигнал, динамический регулятор по выходному сигналу.

DOI: 10.31857/S0005231022030059

1. Введение

Областью исследования в статье являются сложные стохастические системы, определенные векторными стохастическими дифференциальными уравнениями, при априорных ограничениях на класс регуляторов в цепи обратной связи от *наблюдаемого* выходного сигнала на вход регулируемого объекта. Цель статьи — получение условий разрешимости задачи о динамическом регуляторе в условиях действия внешних возмущений и шумов приборов, регистрирующих выходной сигнал объекта. Объект вырабатывает *регулируемый* выходной сигнал, и вредное влияние на этот сигнал внешнего возмущения тем сильнее, чем больше норма оператора передачи возмущения на регулируемый выход. Любая задача синтеза регулятора для заданного объекта состоит не только в том, чтобы минимизировать, например, энергетические затраты на регулирование, но прежде всего в том, чтобы выбором регулятора обеспечить

устойчивость замкнутой им системы и ограничить эффект вредного влияния внешнего возмущения на полезный регулируемый сигнал, поддерживая этот эффект в априори заданных пределах. Этим обстоятельством обусловлена важность задачи анализа условий, при которых такой, называемый *допустимым*, регулятор существует. Задача анализа, вообще актуальная для теории и практики управления и достаточно трудная сама по себе, особенно важна в стохастическом разделе H^2/H_∞ -теории, где она осложняется стохастической природой внешних возмущающих воздействий и шумов измерительных датчиков.

В рамках теории H^2/H_∞ -управления задача оптимизации естественно принимает характер теоретико-игрового взаимодействия природы и конструктора регулятора. Плодотворной взаимосвязи теории управления и теории игр должное внимание уделяется и в оптимизационных задачах H^2/H_∞ -управления. В теоретико-игровой постановке внешнее возмущение оказывается активным игроком, максимизирующим выбранный функционал потерь.

Классические теории управления LQR и LQG , для детерминизованных и гауссовских систем соответственно, можно называть теориями *безусловной* оптимизации. Современная H^2/H_∞ -теория является теорией *условной* оптимизации, осуществляемой на классе допустимых регуляторов, гарантирующих ограниченность заданным числом γ *индуцированной* нормы оператора L_{zv} передачи случайной функции $v(\cdot) \in L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^l))$ внешнего возмущения v на случайную функцию $z(\cdot) \in L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^m))$ регулируемого выхода z замкнутой системы. Здесь $[0, T)$ — интервал значений параметра $t > 0$ на конечном ($T < \infty$) или бесконечном ($T = \infty$) горизонте; $L^2([0, T]; D)$ — пространство квадратично интегрируемых функций переменной t со значениями в пространстве D ; $L^2(\Omega, R^m)$ — пространство m -значных случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) с σ -алгеброй \mathcal{F} и вероятностной мерой P . Индуцированная норма оператора L_{zv} (в данном случае на горизонте $R_+ := [0, \infty)$) определяется по формуле

$$\|L_{zv}\|_\infty = \sup_{v \in L^2(R_+; L^2(\Omega, R^l)), v \neq 0} \frac{\|z(\cdot)\|_{L^2(R_+; L^2(\Omega, R^m))}}{\|v(\cdot)\|_{L^2(R_+; L^2(\Omega, R^l))}}.$$

Норма же на пространстве $\mathcal{L}^2 := L^2([0, T]; L^2(\Omega, R^k))$ случайных процессов $y(\cdot) = (y(t))_{t \in [0, T)}$ определяется интегралом $\int_0^T E(\|y(t)\|^2) dt < \infty$, где E — оператор вычисления математического ожидания. Не существует аналитического способа вычисления индуцированной нормы в общем случае, но возможно компьютерное вычисление ее с заданной точностью.

Стохастическая H^2/H_∞ -теория имеет дело со стохастическими объектами, описываемыми стохастическими уравнениями Ито. В уравнении Ито вида

$$(1.1) \quad dx(t) = \varphi(t)dt + \Phi(t)dW(t), \quad \varphi = Ax + B_1v + B_2u, \\ \Phi dW = A_0x dw_0 + B_{01}v dw_1 + B_{02}u dw_2,$$

где x , v , u — векторы состояния, внешнего возмущения и сигнала управления, диффузионная компонента ΦdW имеет специфическое строение, дающее основание называть уравнение *мультипликативным* по каждой из этих трех переменных. Важные результаты по H^2/H_∞ -теории мультипликативных систем получены в публикациях [1–9]. С идеями H^2/H_∞ -теории связаны и задачи робастного управления. В детерминированном случае эти связи прослеживаются в [10–12].

К теме синтеза регуляторов по *вектору состояния* для мультипликативных объектов относятся публикации [13, 14]. Важнейшей особенностью принятого в них метода решения является теоретико-игровая формулировка задачи управления с ее понятием равновесной по Нэшу пары (u^*, v^*) точек, определяющих оптимальное управление u^* при наименее благоприятном внешнем возмущении v^* [15]. Нахождение равновесной пары сводится к решению системы из двух *связанных* матричных уравнений Риккати, но не классических, квадратичных по искомым переменным, а скорее дробно-рациональных по искомым переменным, и потому названных *обобщенными* уравнениями Риккати. Настоящая статья, тоже для стохастического объекта, имеет целью выяснение структуры регулятора, но не вида $u(t) = \mathcal{K}(t, x(\cdot)|_0^t)$, как в [13, 14], а регулятора по выходному сигналу $u(t) = \mathcal{K}(t, y(\cdot)|_0^t)$, $t > 0$. Аналогичная задача для менее общего объекта, мультипликативного только по векторам состояния и внешнего возмущения, рассматривалась в [7]. Для удобства читателя в п. 1 Приложения приведен пример детерминированной LQG/H_∞ -задачи, решение которой имеет структуру оптимального наблюдателя $\dot{\hat{x}} = A_k \hat{x} + B_k y$, совмещенного с оптимальным регулятором $\hat{u} = C_k \hat{x}$ по вектору состояния $\hat{x}(\cdot)$ [16]. Структура допустимого регулятора вида $u(t) = \mathcal{K}(t, \bar{x}(\cdot)|_0^t)$, где $\bar{x} = (x, \hat{x})$ — вектор состояния расширенной замкнутой системы, является более общей. Регулятор по выходу $u(t) = \mathcal{K}(t, y(\cdot)|_0^t)$, рассмотренный в [17], является еще более общим.

Изложим содержание статьи по разделам. В разделе 2 дана постановка задачи. В разделе 3 получено стохастическое уравнение объекта, замкнутого динамическим регулятором. В разделах 4 и 5 получено обобщенное уравнение Риккати, коэффициенты которого подсчитаны с помощью применения формулы Ито замены переменной. Необходимое условие допустимости динамического регулятора получено в разделе 6, в разделе 7 — достаточное условие. Два приложения, краткое заключение и список литературы завершают статью.

2. Постановка задачи анализа

Задача оптимизации мультипликативных систем является разделом теории H^2/H_∞ -управления, обобщающей LQ -теорию синтеза регуляторов для линейных систем по квадратическому критерию. От внешнего возмущения v в уравнении Ито (1.1) зависят как снос, так и диффузионная компонента. Предполагается, что все винеровские процессы $w_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, — скалярные, что не является ограничением. Не является ограничением и зависимость сноса $\varphi(t)$ и диффузии $\Phi(t)dW(t)$ от одного и того же возмущения $v(t)$. Наконец,

процессы $w_i(t)$ — статистически зависимые, не обязательно с единичной матрицей интенсивности. Используя общий формализм H^2/H_∞ -теории и специальные обозначения, введенные в [18], удастся свести задачу с несколькими возмущениями к задаче об объекте с одним мультипликативным векторным возмущением.

Как уже отмечалось в разделе 1, с задачей оптимизации при требовании одновременного подавления внешних возмущений ассоциируется дифференциальная теоретико-игровая задача, позволяющая найти пару v^* , u^* стратегий (наихудшее возмущение, наилучшее управление). Для постановки задачи о дифференциальной игре рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$(2.1) \quad \Sigma : \begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + B_1v(t) + B_2u(t))dt + A_0x(t)dw_0(t) + \\ + B_{01}v(t)dw_1(t) + B_{02}u(t)dw_2(t), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}v(t) + D_{12}u(t), \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Уравнение описывает стохастический объект Σ . В этом объекте векторы u , v — входные сигналы, представляющие управление и внешнее возмущение; векторы z , y — сигналы выходные, называемые соответственно регулируемым и наблюдаемым выходом. Регулятором в цепи обратной связи является детерминированная динамическая система с вектором состояния \hat{x} , заданная уравнениями

$$(2.2) \quad d\hat{x}(t) = A_k\hat{x}(t)dt + B_k y(t)dt, \quad u(t) = C_k\hat{x}(t) + D_k y(t)$$

с матричными коэффициентами, пока не определенными. См. п. 2 Приложения.

Теоретико-игровая формулировка задачи управления предполагает задание пары функционалов $J_1^T(u, v)$, $J_2^T(u, v)$ и нахождение пары функций u^* , v^* таких, что (i) $J_1^T(u^*, v^*) \leq J_1^T(u, v^*)$ на траекториях $x_t = x_t(x_0, u, v^*)$ уравнения Σ и (ii) $J_2^T(u^*, v^*) \geq J_2^T(u^*, v)$ на его траекториях $x_t = x_t(x_0, u^*, v)$. Такая пара (u^*, v^*) , если она существует, и является равновесной по Нэшу точкой теоретико-игровой задачи. Можно сказать, выражаясь кратко, что определение функции $v^*(\cdot)$ есть задача анализа, а определение $u^*(\cdot)$ — задача синтеза. В более подробном изложении задача анализа состоит в нахождении условий допустимости регулятора и преобразования их к виду, удобному для получения обобщенного матричного уравнения Риккати, через решение которого выражается искомое представление возмущения v^* . Условие допустимости для задачи на конечном горизонте $t \in [0, T]$ вытекает из требования $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ к замкнутой системе, которому должен удовлетворять регулятор. Конечная цель анализа состоит в описании класса допустимых регуляторов. На бесконечном горизонте $t \in [0, \infty)$ к требованию ограниченности $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ добавляется условие устойчивости замкнутой системы. В этой статье ограничиваемся случаем конечного горизонта $T < \infty$.

3. Уравнение объекта, замкнутого динамическим регулятором

Вектор состояния системы, замкнутой регулятором, обозначим через \bar{x} , полагая $\bar{x}' := (x', \hat{x}')$. Стохастическое уравнение для \bar{x} получается как результат некоторых громоздких, но элементарных вычислений, и нетрудно убедиться, что функции $t \mapsto \bar{x}(t)$, $t \mapsto z(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$(3.1) \quad \Sigma_2 : \begin{cases} d\bar{x}(t) = A_{cl}\bar{x}(t) dt + B_{cl}v(t) dt + A_{cl}^0\bar{x}(t)dw_0(t) + \\ + B_{cl}^0v(t)dw_1(t) + A_{cl}^1\bar{x}(t) dw_2(t) + B_{cl}^1v(t) dw_2(t), \\ z(t) = C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Непосредственно устанавливаются формулы, выражающие коэффициенты уравнений замкнутой системы Σ_2 . Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} u(t) &= C_k\hat{x}(t) + D_k(C_2x(t) + D_{21}v(t)), \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}v(t) + D_{12}(D_kC_2x(t) + C_k\hat{x}(t) + D_kD_{21}v(t)), \end{aligned}$$

откуда $z(t) = C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t)$, где

$$(3.2) \quad C_{cl} = [C_1 + D_{12}D_kC_2, D_{12}C_k], \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12}D_kD_{21}$$

(здесь C_{cl} — блочная 1×2 матрица). Далее получаем, что

$$(3.3) \quad A_{cl}^1 = B_{02} \begin{pmatrix} D_kC_2 & O \\ O & C_k \end{pmatrix}, \quad B_{cl}^0 = \begin{pmatrix} B_{01} \\ O \end{pmatrix}, \quad B_{cl}^1 = B_{02} \begin{pmatrix} D_kD_{21} \\ O \end{pmatrix}.$$

Блочные матрицы A_{cl} , A_{cl}^0 , B_{cl}^0 , B_{cl} равны:

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{pmatrix} A + B_2D_kC_2 & B_2C_k \\ B_kC_2 & A_k \end{pmatrix}, \quad A_{cl}^0 = \begin{pmatrix} A_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \\ B_{cl}^0 &= \begin{pmatrix} B_{01} \\ O \end{pmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2D_kD_{21} \\ B_kD_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} , D_{cl} получают представление через матрицу

$$M_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$$

параметров динамического регулятора. Соответствующие формулы имеют вид аффинных относительно M_k соотношений

$$(3.4) \quad A_{cl} = A^0 + B^I M_k C^I, \quad B_{cl} = B^0 + B^I M_k D_{21}^0,$$

$$(3.5) \quad C_{cl} = C^0 + D_{12}^0 M_k C^I, \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0$$

с матричными коэффициентами

$$(3.6) \quad \begin{cases} A^0 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}, & B^0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}, & C^0 = (C_1, O), & D_{12}^0 = (O, D_{12}), \\ B^I = \begin{pmatrix} O & B_2 \\ I & O \end{pmatrix}, & C^I = \begin{pmatrix} O & I \\ C_2 & O \end{pmatrix}, & D_{21}^0 = \begin{pmatrix} O \\ D_{21} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Стохастический объект Σ_2 является здесь мультипликативным не только по векторам состояния и внешнего возмущения, но и по вектору управления; а на вход регулятора подается теперь не вектор состояния объекта, а его выходной сигнал $y(\cdot)$, см. (2.1), измеряемый в шумах; наконец, регулятор берется не безынерционным, а динамическим (2.2) с вектором внутреннего состояния \hat{x} , определяемым некоторым дифференциальным уравнением.

4. Применение формулы Ито замены переменной

Дальнейшие преобразования имеют целью получить обобщенное уравнение Риккати, ассоциированное с системой (3.1) и функционалом $v \rightarrow J_2^T(u^*, v)$, которое позволит представить наихудшее возмущение v^* через решение уравнения Риккати. Эти преобразования связаны с применением формулы Ито замены переменной (точнее, следствия из формулы Ито) в стохастическом исчислении. Если

$$dx(t) = \varphi(t)dt + \Phi(t)dw(t)$$

— уравнение состояния и L_s — дифференциальный оператор вида

$$(L_s f)(t, x) = \partial_t f(t, x)\varphi(s, x) + 1/2 \operatorname{tr}(\partial_{\bar{x}\bar{x}}^2 f(t, \bar{x})\nu(t)),$$

где $\nu(t)dt = \operatorname{var}(\Phi(t, \bar{x}(t))dw(t)|\bar{x}(t))$, то согласно формуле Ито имеет место интегральное соотношение [19–21]

$$(4.1) \quad \mathbb{E}f(t, \bar{x}(t)) - \mathbb{E}f(0, \bar{x}(0)) = \mathbb{E} \int_0^t (\partial/\partial s + L_s)f(s, \bar{x}(s))ds,$$

где \mathbb{E} — оператор осреднения. В рассматриваемом здесь конкретном случае функции f в виде квадратичной формы $f(t, \bar{x}) = \langle \bar{x}, P(t)\bar{x} \rangle$ и уравнения Ито (3.1), представленного в интегральном виде

$$(4.2) \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(0) + \int_0^t (A_{cl}\bar{x}(s) + B_{cl}\nu(s))ds + \\ + \int_0^t [A_{cl}^0\bar{x}(s) \ B_{cl}^1\nu(s)]d \begin{pmatrix} w_0(s) \\ w_2(s) \end{pmatrix} + \int_0^t [A_{cl}^1\bar{x}(s) \ B_{cl}^0\nu(s)]d \begin{pmatrix} w_2(s) \\ w_1(s) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T],$$

сумму подынтегральных диффузионных компонент в (4.2) запишем в виде $\Phi dW := \Phi_1 dW_1 + \Phi_2 dW_2$, где $W_1 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$. Пусть $Q_{ij} dt = E[dW_i dW_j']$, $i, j = 1, 2$, — матрицы 2×2 и

$$(4.3) \quad \Phi_1 = [A_{cl}^0 \bar{x} \quad B_{cl}^1 v], \quad \Phi_2 = [A_{cl}^1 \bar{x} \quad B_{cl}^0 v].$$

Обозначим матрицы интенсивности винеровских процессов через

$$q_1 := Q_{11} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{02} \\ q_{02} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad q_2 := Q_{22} = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{12} \\ q_{12} & q_{11} \end{pmatrix}, \quad Q_{12} = \begin{pmatrix} q_{02} & q_{01} \\ q_{22} & q_{12} \end{pmatrix}.$$

Подынтегральная функция в (4.1) принимает вид

$$(4.4) \quad (\partial/\partial s + L_s)f(s, \bar{x}(s)) = \langle \bar{x}(s), \dot{P}(s)\bar{x}(s) \rangle + \\ + 2\langle P(s)\bar{x}(s), A\bar{x}(s) + B_1 v(s) \rangle + 1/2 \operatorname{tr}\{2P(s)\nu(s)\},$$

где

$$\nu(s) ds = \operatorname{var}(\Phi_1(s)dW_1(s) + \Phi_2(s)dW_2(s)|\bar{x}(s)) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Phi_i(s) Q_{ij} \Phi_j'(s).$$

В правой части (4.4) первое слагаемое есть квадратичная форма переменной $\bar{x}(s)$ и $\dot{P}(s)$ — матрица этой формы; второе слагаемое — квадратичная форма на пространстве значений пары переменных $(\bar{x}(s), v(s))$. Вычислим третье слагаемое $\operatorname{tr}\{P(s)\nu(s)\}$.

Для первого слагаемого (при $i = j = 1$) в двойной сумме имеем

$$(4.5) \quad \operatorname{tr}\{\Phi_1'(s)P(s)\Phi_1(s)q_1(s)\} = \\ = \operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} \bar{x}'(s)(A_{cl}^0)' \\ v'(s)(B_{cl}^1)' \end{pmatrix} P(s) [A_{cl}^0 \bar{x} \quad B_{cl}^1 v(s)] q_1(s)\right\} = \\ = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{00}(A_{cl}^0)'P(s)A_{cl}^0 & q_{02}(A_{cl}^0)'P(s)B_{cl}^1 \\ q_{02}(B_{cl}^1)'P(s)A_{cl}^0 & q_{22}(B_{cl}^1)'P(s)B_{cl}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Аналогично

$$(4.6) \quad \operatorname{tr}\{\Phi_2'(s)P(s)\Phi_2(s)q_2(s)\} = \\ = \operatorname{tr}\left\{\begin{pmatrix} \bar{x}'(s)(A_{cl}^1)' \\ v'(s)(B_{cl}^0)' \end{pmatrix} P(s) [A_{cl}^1 \bar{x} \quad B_{cl}^0 v(s)] q_2(s)\right\} = \\ = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{22}(A_{cl}^1)'P(s)A_{cl}^1 & q_{12}(A_{cl}^1)'P(s)B_{cl}^0 \\ q_{12}(B_{cl}^0)'P(s)A_{cl}^1 & q_{11}(B_{cl}^0)'P(s)B_{cl}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Продолжая вычисления, имеем (при $i = 1, j = 2$)

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad \text{tr} \{ \Phi_2'(s) P(s) \Phi_1(s) Q_{12}(s) \} &= \\
 &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{x}'(s) (A_0^1)' \\ v'(s) (B_{cl}^0)' \end{pmatrix} P(s) [A_{cl}^0 \bar{x} \ B_{cl}^1 v(s)] Q_{12}(s) \right\} = \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{02} (A_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^0 & q_{22} (A_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^1 \\ q_{01} (B_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^0 & q_{12} (B_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle
 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \text{tr} \{ \Phi_1'(s) P(s) \Phi_2(s) q_2(s) \} &= \\
 &= \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{x}'(s) (A_{cl}^0)' \\ v'(s) (B_{cl}^1)' \end{pmatrix} P(s) [A_{cl}^1 \bar{x} \ B_{cl}^0 v(s)] Q_{21}(s) \right\} = \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{02} (A_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^1 & q_{22} (A_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^0 \\ q_{01} (B_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^1 & q_{12} (B_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Сумму четырех блочных 2×2 матриц в формулах (4.5)–(4.8) обозначим через $\mathcal{S}(P)$. Блочные элементы S_{ij} этой суммарной матрицы равны

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad S_{11} &= q_{00} (A_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^0 + q_{02} (A_{cl}^0)' P(s) A_{cl}^1 + q_{02} (A_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^0 + \\
 &\quad + q_{22} (A_{cl}^1)' P(s) A_{cl}^1, \\
 S_{12} &= q_{01} (A_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^0 + q_{12} (A_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^0 + q_{02} (A_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^1 + \\
 &\quad + q_{22} (A_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^1, \\
 S_{22} &= q_{11} (B_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^0 + q_{12} (B_{cl}^0)' P(s) B_{cl}^1 + q_{12} (B_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^0 + \\
 &\quad + q_{22} (B_{cl}^1)' P(s) B_{cl}^1
 \end{aligned}$$

и, разумеется, $S_{21} = S_{12}'$.

В правой части (4.4) последний член, как и второй, тоже есть квадратичная форма на пространстве переменных (\bar{x}, v) , и их сумма задана матрицей $\mathcal{D}(P) + \mathcal{S}(P)$, где $\mathcal{D}(P)$ – матрица второй квадратичной формы в (4.4). Полученные формулы используются при выводе обобщенного уравнения Риккати в разделе 6.

5. Функционал потерь в задаче анализа

Проверка условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ в требовании допустимости решения была бы простой, если бы существовал явный способ вычисления индуцированной нормы оператора L_{zv} . Однако такого способа не существует. Проверку

условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ без вычисления нормы $\|L_{zv}\|_\infty$ можно осуществить, привлекая к рассмотрению функционал

$$(5.1) \quad J_2^T(u^*, v) = \mathbb{E} \int_0^T (\gamma^2 v'(t)v(t) - z'(t)z(t)) dt$$

при фиксированном $u = u^*$. Этот функционал — квадратичный, но не знакоопределенный, и для него существует представление, удобное для последующего анализа:

$$(5.2) \quad J_2^T(u^*, v) = \mathbb{E}\langle \bar{x}(0), P(0)\bar{x}(0) \rangle - \mathbb{E}\langle \bar{x}(T), P(T)\bar{x}(T) \rangle + \\ + \mathbb{E} \int_0^T \left(\langle \bar{x}(t), \dot{P}(t)\bar{x}(t) \rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \mathcal{M}(\gamma, P(t)) \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right\rangle \right) dt,$$

где $\mathcal{M}(\gamma, P) := \mathcal{S}(P) + \mathcal{D}(P) + \mathcal{C}$. Здесь

$$(5.3) \quad \mathcal{D}(P) = \begin{pmatrix} PA_{cl} + A'_{cl}P & PB_{cl} \\ B'_{cl}P & O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -C'_{cl}C_{cl} & -C'_{cl}D_{cl} \\ -D'_{cl}C_{cl} & \gamma^2 I - D'_{cl}D_{cl} \end{pmatrix},$$

а матрица $\mathcal{S}(P)$ определена своими блоками (4.9) в разделе 4.

Важность функционала J_2^T в H_∞ -теории состоит в том, что с его помощью можно дать необходимое условие допустимости регулятора. Согласно лемме 2.10 из публикации [7] из условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ (и требования внутренней устойчивости системы, если последняя рассматривается на бесконечном горизонте) вытекает неравенство $J_2^T(v) \geq -c|x(0)|^2$ для некоторого регулятора K и некоторого числа $c > 0$ при любых $v \in L^2[0, T]$ ($x(0)$ — произвольное начальное условие для уравнения состояния системы). Это неравенство в случае стационарной системы используется в [7] при доказательстве важного характеристического свойства индуцированной нормы оператора L_{zv} . Именно: для любого числа $\gamma > 0$ равносильны утверждения (i) $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ и (ii) существует матричная функция $P(\cdot) < 0$ такая, что $\mathcal{M}(P) > 0$. Матричное обобщенное уравнение Риккати, которому удовлетворяет функция $P(t)$, выводится далее в разделе 6.

6. Обобщенное уравнение Риккати

Из исходной системы Σ , см. (2.1), в разделе 3 была получена система (3.1), обозначенная через Σ_2 . В системе Σ_2 нет в явном виде сигнала $u(t)$, но есть внешнее возмущение $v(t)$. Для систем такого вида в H_2 -теории стандартным является критерий $J_2^T(u, v)$ в (5.1), неявно зависящий от u , где в формуле для $z(t)$, приведенной в (2.1), полагают $D_{12} = 0$. Заметим, что система Σ_2 в (3.1) — такого именно вида. Таким образом, для системы Σ_2 можно в силу (3.2) принять, что

$$(6.1) \quad J_2^T(u^*, v) = \mathbb{E} \int_0^T (\gamma^2 I - (C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t))'(C_{cl}\bar{x}(t) + D_{cl}v(t))) dt.$$

Функционал $J_2^T(u, v)$, квадратичный по исходным переменным x, v , остается квадратичным и по новым переменным \bar{x}, v . Далее, решая LQ -задачу вычисления экстремального значения v^* переменной v , воспользуемся одним простым тождеством, применявшимся в [14]. Приведем его здесь. Рассмотрим представление критерия $J_2^T(u^*, v)$ в виде (5.1), считая, что $\bar{x}(t)$ в подынтегральном выражении есть решение уравнения (3.1), полученное при фиксированном $u = u^*$.

Лемма. Квадратичная форма с матрицей $\mathcal{M}(\gamma, P(t))$, т.е. сумма

$$\langle \bar{x}, M_{11}\bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, M_{12}v \rangle + \langle v, M_{21}\bar{x} \rangle + \langle v, M_{22}v \rangle,$$

записывается в виде

$$(6.2) \quad \langle \bar{x}, (M_{11} + M_{12}F)\bar{x} \rangle + \langle v - F\bar{x}, M_{22}(v - F\bar{x}) \rangle,$$

где матрица F определяется соотношением $M_{21} + M_{22}F = 0$. Если M_{22} — неособенная матрица, то $F = -M_{22}^{-1}M_{21}$ и $v^* = F\bar{x}$ — экстремальная точка функционала $J_2^T(u^*, v)$.

Утверждение леммы относительно $v^*(t)$ справедливо при фиксированном $u = u^*$, но оно верно при любом допустимом управлении $u(\cdot)$, обеспечивающем устойчивость замкнутой системы и ограниченность заданным числом γ индуцированной нормы оператора L_{zv} на классе функций $v(\cdot)$ с интегрируемым квадратом. Обозначения $\mathcal{M}(\gamma, P)$, M_{ij}^γ , введенные выше, естественны, поскольку от γ зависит матрица $M_{22}^\gamma = \gamma^2 I + S_{22}(P) - D'_{cl}D_{cl}$. Из леммы следует, что

$$(6.3) \quad v^* = -(\gamma^2 I + S_{22}(P) - D'_{cl}D_{cl})^{-1} (B'_{cl}P + S_{21}(P) - D'_{cl}C_{cl}) \bar{x},$$

если матрица $M_{22}^\gamma(P)$ обратима. Согласно лемме при $v = F\bar{x}$ в (6.2) матричная функция $P(t)$ определяется как решение матричного дифференциального уравнения

$$(6.4) \quad \dot{P} + M_{11}^\gamma(P) - M_{12}^\gamma(P)(M_{22}^\gamma)^{-1}(P)M_{21}^\gamma(P) = 0, \quad P(T) = 0, \quad t \in [0, T].$$

В подробной записи имеем

$$(6.5) \quad -\dot{P} = PA_{cl} + A'_{cl}P + S_{11}^\gamma(P) - C'_{cl}C_{cl} - \\ - (PB_{cl} + S_{12}(P) - C'_{cl}D_{cl})(\gamma^2 I + S_{22}(P) - D'_{cl}D_{cl})^{-1}(B'_{cl}P + S_{21}(P) - D'_{cl}C_{cl}).$$

Начальным условием является $P(T) = 0$. Функции $S_{ij}(P)$, определенные в (4.9), линейно зависят от P .

Полученными результатами исчерпывается формальная проблема анализа, если решение обобщенного матричного дифференциального уравнения Риккати (6.5) для $P(t)$ существует. Следующий этап — это проблема существования решения уравнения (6.5), т.е. определения условий допустимости динамического регулятора вида (2.2).

7. Условия допустимости регулятора

В теории управления с безынерционным регулятором по вектору состояния задача определения структуры оптимального регулятора ставится как оптимизационная с применением критерия $J_1^T(u, v)$ при фиксированном значении v^* наименее благоприятного возмущения v . В рассматриваемом случае структура регулятора уже предопределена уравнениями в (2.2), и только значения матричных параметров следует определить исходя из условия допустимости регулятора такой структуры. Критерий допустимости сформулируем как условие существования точки *минимума* функционала $(-1)J_2^T(v)$, квадратичного, но не знакоположительного. Предполагаем заданным значение параметра $\gamma > 0$, а функционал $J_2^T(v)$ – представленным в виде (4.2) с матрицей $\mathcal{M}(\gamma, P) = \mathcal{S}(P) + \mathcal{D}(P) + \mathcal{C}$ подынтегральной квадратичной формы. Как уже отмечалось в разделе 5, условие допустимости $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$ равносильно существованию отрицательно определенной функции $P(t) < 0$ такой, что $\mathcal{M}(\gamma, P(t)) > 0$ для всех $t \in [0, T]$. Для последующего удобно записать условие $\mathcal{M}(\gamma, P) > 0$ в эквивалентной форме, заменив блочно-диагональную матрицу $\text{diag}\{\mathcal{M}(P), I\}$ блочной 3×3 матрицей $T\mathcal{N}(P)T' > 0$, где

$$\mathcal{N}(P) = \begin{pmatrix} PA_{cl} + A'_{cl}P + S_{11} & PB_{cl} + S_{12} & C'_{cl} \\ B'_{cl}P + S_{21} & \gamma^2 I + S_{22} & D'_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} & I \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I & O & -C'_{cl} \\ O & I & -D'_{cl} \\ O & O & I \end{pmatrix}.$$

Подставим в матрицу $\mathcal{N}(P)$ выражения для коэффициентов A_{cl}, B_{cl}, \dots , полученные в (3.4). Тогда для блоков-подматриц N_{ij} неотрицательно определенной матрицы $\mathcal{N}(P)$ получим формулы:

$$(7.1) \quad N_{11} = P(A^0 + B^I M_k C^I) + (A^0 + B^I M_k C^I)' P + S_{11}, \\ N_{12} = P(B^0 + B^I M_k D_{21}^0 + S_{12}), \quad N_{13} = (C^0 + D_{12}^0 M_k C^I)', \\ N_{22} = \gamma^2 I + S_{22}, \quad N_{23} = (D_{11} + D_{12}^0 M_k D_{21}^0)', \quad N_{33} = I.$$

Представим матрицу $N(P)$ в виде суммы матрицы \mathcal{H} , от M_k не зависящей, и двух матриц, линейно зависящих от M_k . Получим сумму $\mathcal{H} + \mathcal{Q}' M'_k \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q}$ с некоторыми матрицами \mathcal{Q} и \mathcal{R} и неотрицательно определенной матрицей \mathcal{H} . Согласно полученному в [7] стохастическому обобщению *леммы о проекции* из теории линейных матричных неравенств (см., например, [6]) линейное матричное неравенство

$$(7.2) \quad \mathcal{H} + \mathcal{Q}' M'_k \mathcal{R} + \mathcal{R}' M_k \mathcal{Q} > O$$

имеет решение M_k тогда и только тогда, когда матрица \mathcal{H} является положительно определенной на нулевых подпространствах $\ker \mathcal{Q}$ и $\ker \mathcal{R}$ матриц \mathcal{Q}, \mathcal{R} .

Лемма о проекции дает необходимое и достаточное условие выполнимости условия $\|L_{zv}\|_\infty < \gamma$. Условие формулируется не на языке теории матричных дифференциальных уравнений, а на языке нелинейных матричных

неравенств. Лемма не только решает вопрос об условиях допустимости регулятора M_k , но и позволяет вычислить значения A_k, B_k, C_k, D_k параметров регулятора, если они неизвестны. Далее в п. 2 Приложения приводится частное решение задачи *идентификации* параметров регулятора, допустимого в рамках представлений H_∞ -теории управления.

8. Заключение

Областью исследований в статье явилась H_∞ -теория управления стохастическими системами, определенными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, диффузионная компонента каждого из которых задана суммой $A_0 x dw_0 + B_{01} v dw_1 + B_{02} u dw_2$, в которой матрицы A_0, B_{01}, B_{02} известны, а интенсивности винеровских процессов xw_0, vw_1, uw_2 определены соответственно вектором состояния x , внешним возмущением v и управлением u . Векторы x, v неизвестны, вектор u поступает с выхода H_∞ -регулятора и обеспечивает поддержание в заданных пределах вредного действия возмущения на регулируемый выходной сигнал объекта управления. Взаимные интенсивности $q_{ij}, i \neq j$, винеровских процессов $w_i, i = 0, 1, 2$, удобно считать ненулевыми, если из общей модели желательнее исключить некоторые из процессов $w_i(t)$ для получения *частных* стохастических моделей. Таким образом, рассмотренная в статье модель мультипликативного стохастического объекта является довольно общей, чего нельзя, к сожалению, утверждать о принятой здесь модели регулятора по выходному сигналу. Действительно, в *детерминированном* варианте H_∞ -теории регулятор по выходному сигналу получается представленным в виде регулятора *по состоянию* \hat{x} некоторой вспомогательной системы, осуществляющей *фильтрацию* ненаблюдаемого вектора состояния x исходной системы по измеряемому выходному сигналу. См. п. 1 Приложения. С другой стороны, в представленной статье искомому регулятору по выходному сигналу *а priori навязывается* (см. п. 2 Приложения) такая же, как и в детерминированном случае, структура фильтра, вырабатывающего оценку \hat{x} неизвестного сигнала x , подаваемую затем на регулятор частного вида, а именно — на регулятор по состоянию. Структура же общего вида регулятора по выходному сигналу для мультипликативной стохастической системы остается, по существу, неизвестной.

Несмотря на отмеченную особенность постановки задачи об H_∞ -регуляторе, принятую в статье, эта задача представляется важной и интересной. Эта задача важна для поиска общей структуры допустимого регулятора и представляет самостоятельный интерес в качестве необходимого этапа при решении последующей более трудной задачи *синтеза* субоптимального регулятора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. В H^2/H_∞ -теории оптимального регулятора по выходному сигналу рассматривается линейный объект $\dot{x} = Ax + Bv_1 + Bu$ с регулируемым сигналом $z = (z_1, z_2)$, $z_1 = Cx$, $z_2 = u$ и наблюдаемым выходным сигналом $y = Cx + v_2$.

Возмущение $v = (v_1, v_2)$ является гауссовским белым шумом с нулевым средним и единичной спектральной плотностью (для простоты употребляем обозначение $v = (v_1, v_2)$ вместо более сложного $v = [v'_1, v'_2]'$; то же для z). Критерий для регулятора – квадратический,

$$J(u, v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{1}{T} \int_0^T (\langle x(t), C' C x(t) \rangle + \langle u(t), u(t) \rangle) dt.$$

Существуют неотрицательно определенные решения P_1, P_2 уравнений регулятора и фильтра соответственно:

$$\begin{aligned} A' P_1 + P_1 A - (1 - \gamma^{-2}) P_1 B B' P_1 + C' C &= 0, \\ A P_2 + P_2 A' - (1 - \gamma^{-2}) P_2 C' C P_2 + B B' &= 0. \end{aligned}$$

Определим $Z := (I - \gamma^{-2} P_2 P_1)^{-1}$. Регулятор $M_k = (A_k, B_k, C_k)$ (с коэффициентом $D_k = 0$) в цепи обратной связи имеет структуру регулятора по состоянию $u = C_k \hat{x} - B' P_1 Z \hat{x}$, где \hat{x} есть вектор состояния оптимального наблюдателя

$$\dot{\hat{x}} = A_k \hat{x} + B_k y = (A - (1 - \gamma^{-2}) P_2 C' C - B B' P_1 Z) \hat{x} + P_2 C' y.$$

Решение, приведенное в п. 1 Приложения, получено в [15]. Оно является следствием изложенной в статье теории, если применить ее к детерминированному объекту и рассмотреть предельный случай $\gamma \rightarrow \infty$.

2. Задача о регуляторе по измеряемому в шумах выходному сигналу объекта, мультипликативного по вектору состояния и вектору внешнего возмущения, завершается идентификацией параметров регулятора. В [7] для объекта, который не предполагался мультипликативным по вектору управления, значения M_k параметров регулятора вычислялись с помощью решения матричного неравенства (7.2). Без ограничения общности принимались предположения так называемого регулярного случая [5]

$$D_{11} = 0, \quad D'_{12} D_{12} = I, \quad D_{21} D'_{21} = I, \quad D'_{12} C_1 = 0, \quad D_{21} B'_1 = 0.$$

В предположении $P_{cl} > 0$ вводятся обозначения

$$P_{cl} = \begin{pmatrix} S & N \\ N' & Q \end{pmatrix}, \quad P_{cl}^{-1} = \begin{pmatrix} R & M \\ M' & T \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{11}(\gamma, P_{cl}) = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi'_{12} & \Pi_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрицы S и R – эрмитовы, являются матрицами квадратичных форм в пространстве состояний вектора $x(t)$. Матрица S удовлетворяет матричному линейному неравенству Риккати (неравенству наблюдателя, или фильтра), матрица R – квадратичному неравенству регулятора. Неравенство для S – автономное, неравенство для R зависит от S . В итоге анализа, проведенного

в [7], выясняется, что условию допустимости регулятора M_k удовлетворяют следующие значения его параметров (при выборе $N = R^{-1} - S = -Q$ для матрицы P_{cl}):

$$B_k = \gamma^2 (R^{-1} - S)^{-1} C'_2, \quad C_k = B'_2 R^{-1}, \quad D_k = 0,$$

$$A_k = -N^{-1} \left[SB_2 B'_2 R^{-1} + A' N - \right. \\ \left. - (SB_1 + q_{12} A'_0 SB_0) (\gamma^2 I + q_{22} B'_0 SB_0)^{-1} B'_1 N + \Pi_{11} \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McLane P.J.* Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State and Control-Dependent Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. AC-16. P. 292–299.
 2. *Willems J.L., Willems J.S.* Feedback Stabilizability for Stochastic Systems with State and Control Dependent Noise // Automatica. 1976. V. 12. P. 277–283.
 3. *Krylov N.V.* Introduction to the Theory of Diffusion Processes // Providence. 1995. RI. Amer. Math. Soc.
 4. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Изд-во Наука, 1977.
 5. *Doyle J., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.* State Space Solutions to Standard H_2 and H^∞ Control Problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. P. 831–847.
 6. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H^∞ Control // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1994. V. 4. P. 421–448.
 7. *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
 8. *Petersen I.R., Ugrinovskiy V.A., Savkin F.V.* Robust Control Design Using H_∞ -methods. London: Springer, 2006.
 9. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* H_∞ -control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems // Lect. Notes in Control and Information Sciences. 2005. V. 318. London.
 10. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
 11. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАРД, 2014.
 12. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems / Mathematical concepts and methods in science and engineering. SPRINGER, 2006.
 13. *Шайкин М.Е.* Синтез оптимального по состоянию регулятора, робастного к внешним возмущениям для одного класса нестационарных стохастических систем // АиТ. 2015. № 7. С. 122–134.
- Shaikin M.E.* Design of optimal state controller robust to external disturbance for one class of nonstationary stochastic systems // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1242–1251.

14. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы. Оптимизация и анализ // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 391–406.
Shaikin M.E. Multiplicative Stochastic Systems: Optimization and Analysis // Differential Equations. 2017. V. 53. No. 3. P. 1–16.
15. *Limebeer D.J.N., Anderson B.D.O., Khargonekar, Green M.* A Game Theretic Approach to H_∞ Control for Time-Varying Systems // SIAM J. Control Optim. 1992. V. 30. P. 262–283.
16. *Mustafa D., Glover K.* Minimum entropy H_∞ control. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
17. *Ugrinovskii V.A.* Robust H_∞ -Control in the Presense of Stochastic Unsertainty // Int. J. Control. 1998. V. 71. No. 2. P. 219–237.
18. *Шайкин М.Е.* Мультипликативные стохастические системы с несколькими внешними возмущениями // АиТ. 2018. № 2. С. 122–134.
Shaikin M.E. Multiplicative Stochastic Systems with Multiple External Disturbances // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 300–310.
19. *Kallianpur G.* Stochastic Filtering Theory. N.Y.–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1980.
20. *Булдинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
21. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 22.02.2021

После доработки 29.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021

Управление в технических системах

© 2022 г. М.Н. КРАСНЯНСКИЙ, д-р техн. наук (kras@tambov.ru),
А.Д. ОБУХОВ, канд. техн. наук (obuhov.art@gmail.com),
Д.Л. ДЕДОВ, канд. техн. наук (hammer68@mail.ru)
(Тамбовский государственный технический университет)

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ АДАПТИВНОЙ БЕГОВОЙ ПЛАТФОРМОЙ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ¹

Рассматривается проблема реализации системы управления беговой платформой для организации комфортного перемещения человека в виртуальной реальности с возможностью адаптации скорости платформы в зависимости от характера перемещения пользователя, что позволит повысить комфортность и степень погружения в виртуальное окружение. В статье используются управляемая беговая платформа (реализуемая на базе однонаправленной беговой дорожки) и система позиционирования человека на основе датчиков (трекеров) виртуальной реальности, что обеспечивает достаточную частоту и точность позиционирования человека. Для платформы разработано программное обеспечение, способное осуществить сбор данных о перемещении пользователя и сравнение различных алгоритмов управления. Осуществлена формализация набора функций для управления платформой, в том числе разработанных в рамках данного исследования, проведены их сравнение и оценка. В ходе экспериментальных исследований определены оптимальные функции управления для рассматриваемой беговой платформы. Выявлены преимущества и недостатки каждой функции. Научная новизна исследования заключается в реализации новых функций управления беговой платформой для повышения ее адаптивности к действиям пользователя за счет снижения среднего отклонения человека от начальной позиции и, следовательно, негативных эффектов колебания и инерции. Практическая значимость состоит в совершенствовании процесса сопряжения виртуальной реальности с устройствами, имитирующими передвижение человека (в рамках данного исследования — однонаправленной беговой дорожки), и разработке соответствующего программного обеспечения. Полученные результаты могут быть адаптированы под всенаправленные беговые платформы.

Ключевые слова: адаптивная беговая платформа, система управления, анализ движений человека, перемещение в виртуальной реальности.

DOI: 10.31857/S0005231022030060

¹ Работа выполнена при поддержке лаборатории медицинских VR тренажерных систем для обучения, диагностики и реабилитации.

1. Введение

Технологии виртуальной реальности активно применяются в различных сферах деятельности общества: при профессиональной подготовке специалистов, для проведения реабилитационных мероприятий, в развлекательных и образовательных системах [1, 2]. Несмотря на значительное повышение качества изображения, транслируемого в шлем виртуальной реальности, добавление новых датчиков и сенсоров, позволяющих улучшить степень погружения в виртуальное пространство, ряд вопросов остается нерешенным. Ключевым моментом при взаимодействии человека с виртуальной реальностью является задача комфортного и естественного перемещения в ней. Использование различного рода контроллеров или манипуляторов по-прежнему не может в полной мере заменить классическое перемещение при помощи ног, так как вызывает различные негативные реакции со стороны вестибулярного аппарата (укачивание, тошнота, головокружение и т.д. [3, 4]). Использование механизма управления камерой, при котором пользователь переносится (телепортируется) в выбранное место по визуальным и физическим ощущениям, не соответствует привычному процессу перемещения [5]. При использовании контроллеров возникает проблема взаимодействия с виртуальной средой, так как при таком подходе нельзя одновременно перемещаться и взаимодействовать с предметами.

Перспективным направлением в решении данной проблемы является использование беговых платформ, адаптирующихся под скорость перемещения пользователя и передающих эту информацию в системы виртуальной реальности. Это позволит обособить процесс перемещения, высвободить руки для взаимодействия с виртуальными объектами. Такой подход уже успешно апробирован во многих исследованиях [6, 7], подтверждено увеличение эффекта погружения в виртуальную реальность, удобства передвижения и взаимодействия с предметами, а также обеспечение необходимой физической нагрузки, что особенно актуально для профессиональной подготовки, фитнес-индустрии и реабилитации опорно-двигательной системы [8, 9]. Схема взаимодействия таких платформ и технологий виртуальной реальности представлена на рис. 1.

Однако несмотря на очевидный положительный эффект от использования беговых платформ, существует ряд проблем, требующих решения: несовершенство алгоритмов управления, наличие программного и аппаратного запаздывания [6]. Конструкция таких платформ не всегда позволяет выработать необходимый уровень физических нагрузок (решения, основанные на принципе скольжения, не дают подобного эффекта [7]), а система управления платформой может быть недостаточно эффективной и точной (из-за особенностей используемых методов позиционирования или алгоритмического обеспечения [10]).

Таким образом, проведенный анализ показал перспективность использования беговых платформ, адаптирующихся к темпу передвижения человека, при реализации систем виртуальной реальности. Поэтому актуальной задачей является организация взаимодействия с виртуальной реальностью на

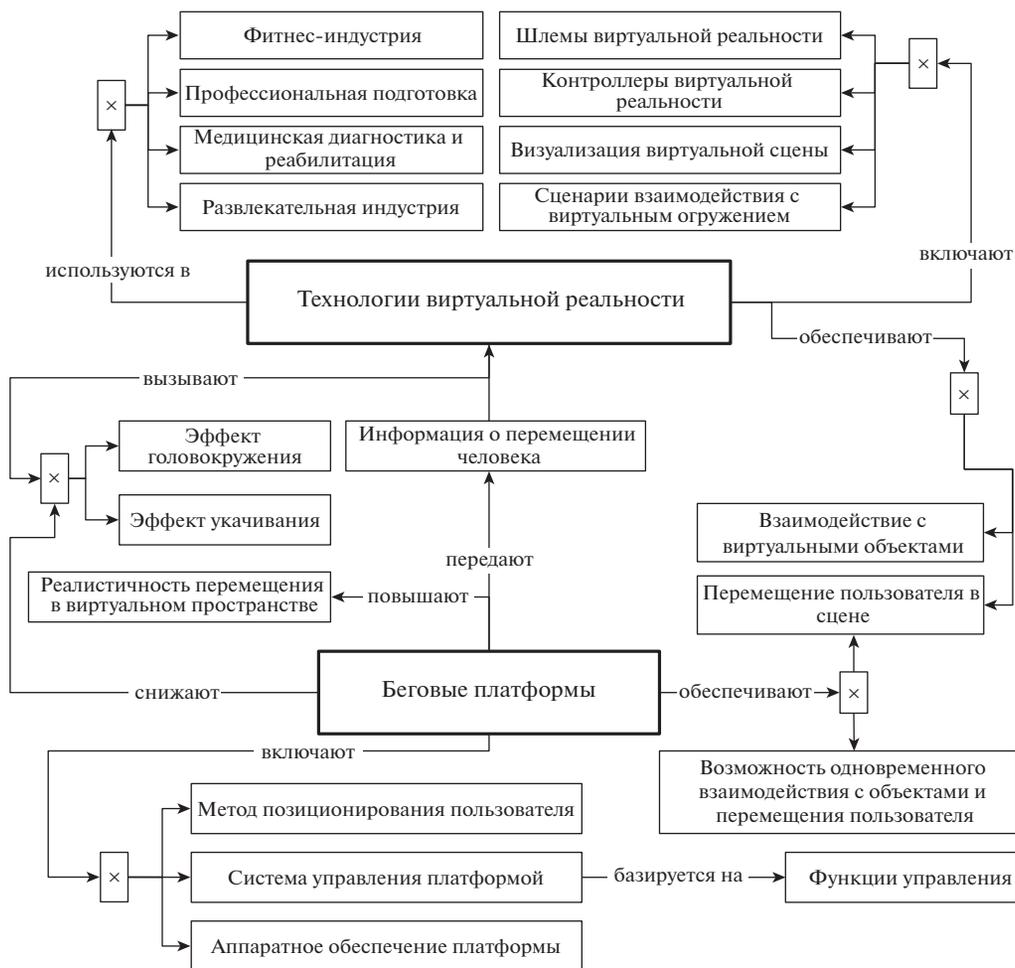


Рис. 1. Схема взаимодействия технологий виртуальной реальности и беговых платформ.

основе управляемой беговой платформы с разработкой новых алгоритмов управления, позволяющих повысить комфортность перемещения и степень погружения в виртуальное окружение за счет минимизации величины колебаний человека на платформе. Для ее решения необходимо осуществить сравнительный анализ существующих подходов к управлению платформой, выявить их преимущества и недостатки, реализовать новые, более эффективные функции управления и интегрировать их в программное обеспечение платформы.

2. Анализ процесса перемещения человека по беговой платформе

Реализация функций управления беговой платформой невозможна без точного позиционирования объекта (человека) на ее рабочем пространстве.

Данная задача может решаться различными способами: с помощью датчиков [11], обратной связи [12], оптических сенсоров [10], камер [13].

В данном исследовании для решения задачи позиционирования используются датчики на основе трекеров компании High Tech Computer (HTC) Corporation, позволяющие с помощью открытой библиотеки OpenVR получать информацию о координатах трекера по трем осям, а также углах его наклона с высокой частотой (не менее 50 раз в секунду) и точностью (погрешность около 0,7 мм) [14]. Недостатком данного подхода является необходимость использования базовых станций для формирования зоны отслеживания трекеров.

Далее необходимо проанализировать и формализовать процесс перемещения человека на беговой дорожке. Для этого возможно использование классической теории кинематики [15, 16], однако возросшие вычислительные затраты увеличат время обработки информации, что недопустимо в системах реального времени подобного рода, где беговая платформа должна реагировать на действия человека с минимальным запаздыванием.

Формализуем процессы перемещения человека в виде упрощенного математического обеспечения, которое будет достаточным для использования в системах виртуальной реальности, не потребует больших вычислительных затрат для работы с минимальной задержкой. Последнее условие является определяющим, так как система управления дорожкой должна реагировать на действия человека в реальном времени. Такое допущение возможно, так как в рамках решаемой задачи не требуется исследование кинематической модели движения человека, а необходимо формализовать лишь процесс его позиционирования в рамках беговой платформы.

Обозначим через P_M процесс перемещения человека по адаптивной беговой платформе в виртуальной реальности, который будет включать следующие составляющие:

$$(1) \quad P_M = (P_H, P_T, P_V),$$

где P_H , P_T , P_V – процессы перемещения человека, полотна платформы и камеры в виртуальной реальности соответственно.

Рассмотрим каждую составляющую процесса перемещения.

Процесс перемещения пользователя P_H будет включать координаты, описывающие положение человека в пространстве, и скорость в определенные моменты времени:

$$(2) \quad P_H = \{C_i, V_i\}, \quad i = \overline{1, N},$$

где N – количество отслеживаемых точек (трекеров),

$C_i = (X_i, Y_i, Z_i)$ – кортеж множеств координат i -й точки по трем осям, каждое множество включает значения координаты точки по соответствующей оси, полученные через некоторый интервал времени Δt , например, $Z_i = z_{i,j}$;

$V_i = \{v_{i,j}\}$ – множество скоростей i -й точки, м/с.

В качестве аппаратной основы беговой платформы используется управляемая однонаправленная беговая дорожка с регулируемой скоростью и углом наклона. При такой аппаратной реализации в качестве основной оси координат используется ось Z , направленная вдоль дорожки, что обусловлено спецификой работы шлема виртуальной реальности и заданной в нем системы координат. Так как однозначно положение человека на дорожке и его удаление от некоторой начальной или оптимальной позиции (z_0) задает только одна координата по оси Z , то для расчета скорости человека в некоторый момент времени j можно использовать формулу

$$(3) \quad v_{i,j} = \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta t},$$

где $\Delta z_{i,j} = (z_{i,j} - z_{i,j-1})$ – изменение координаты по оси Z ;

$z_{i,j} \in Z_i$ – текущее положение человека;

$z_{i,j-1} \in Z_i$ – предыдущее положение (отстающее по времени на Δt).

При анализе перемещения человека возможны два варианта: отслеживание по трекеру на спине или по двум точкам, расположенным на ногах [17, 18]. Во втором случае возможно использование в качестве координаты пользователя среднего значения между двумя трекерами или другие вариации.

Процесс перемещения полотна беговой платформы включает следующие компоненты:

$$(4) \quad P_T = (V_T, z_0, z_{\max}, L_T, L_S),$$

где V_T – функция выбора скорости платформы, значения которой зависят от положения или скорости человека, направление перемещения полотна платформы противоположно направлению движения человека, скорость в метрах в секунду, м/с;

z_0 – начальная точка, которая задается для калибровки пользователя в рабочем пространстве платформы;

z_{\max} – максимальное значение координаты (соответствует общей длине платформы);

$L_T = |z - z_0|$ – рабочая зона в метрах;

$L_S = |z_0|$ – безопасная зона (в ней система управления не реагирует на движения пользователя, следовательно, $V_T = 0$) в метрах.

Так как в процессе сбора данных о перемещении человека дорожка также движется, оказывая влияние на текущие координаты трекеров, то необходимо осуществить преобразование координат всех точек путем добавления сдвига полотна за время Δt при скорости платформы $V_T(z_{i,j})$:

$$(5) \quad z_{i,j}^{abs} = z_{i,j-1}^{abs} + \Delta z_{i,j} + V_T(z_{i,j})\Delta t,$$

где $z_{i,j}^{abs}$ – координаты человека без учета влияния скорости дорожки.

Используя формулу (5), можно полностью восстановить траекторию движения человека и использовать ее для дальнейшего тестирования различных алгоритмов управления, учитывая только специфику их функций.

Процесс перемещения в виртуальном пространстве определяется следующим образом:

$$(6) \quad P_V = (C_V, V_V),$$

где C_V – положение камеры в виртуальном пространстве;

V_V – скорость аватара пользователя в виртуальном пространстве (в м/с, заданных для трехмерной сцены), которая соответствует скорости полотна платформы V_T (возможно, с умножением на некоторый поправочный коэффициент [19]).

После получения значения скорости V_V осуществляется сдвиг аватара в виртуальном пространстве:

$$(7) \quad C_V(t + \Delta t) = C_V(t) + V_V \Delta t.$$

Задача поиска оптимальной функции управления V_T может быть сформулирована различными способами [20]: на основе анализа отклонения траектории движения человека от некоторого эталона, разницы между скоростью платформы и человека или на основе других критериев. В простейшей форме за критерий оптимальности функции управления можно принять минимальное выборочное среднее траектории человека \bar{Z} , которое отражает величину колебаний человека на пространстве платформы в процессе перемещения относительно некоторой нулевой позиции:

$$(8) \quad R(V_T) = \bar{Z} \rightarrow \min.$$

Таким образом, для успешного решения поставленной задачи организации перемещения человека в виртуальном пространстве с применением беговой платформы необходимо выбрать функцию V_T из некоторого множества вариантов, при которой критерий $R(V_T)$ достигает экстремума.

3. Анализ и формализация функций управления беговой платформой

В данном исследовании рассматриваются следующие функции управления: линейная, нелинейная (параболическая), нелинейная модифицированная, зональная, детализированная зональная и пропорционально-дифференциальная.

На рис. 2 представлены графики первых пяти функций, так как они находятся в прямой зависимости от положения пользователя (z) в отличие от пропорционально-дифференциальной функции, которая будет зависеть еще и от скорости движения пользователя. Рассмотрим формализованное представление каждой из функций.

Для упрощения записи формул функций управления платформой примем следующие общие обозначения: z (или $z_{i,j}$) – текущее положение человека, $z_{i,j-1}$ – предыдущее положение в момент, отстающий по времени на Δt .

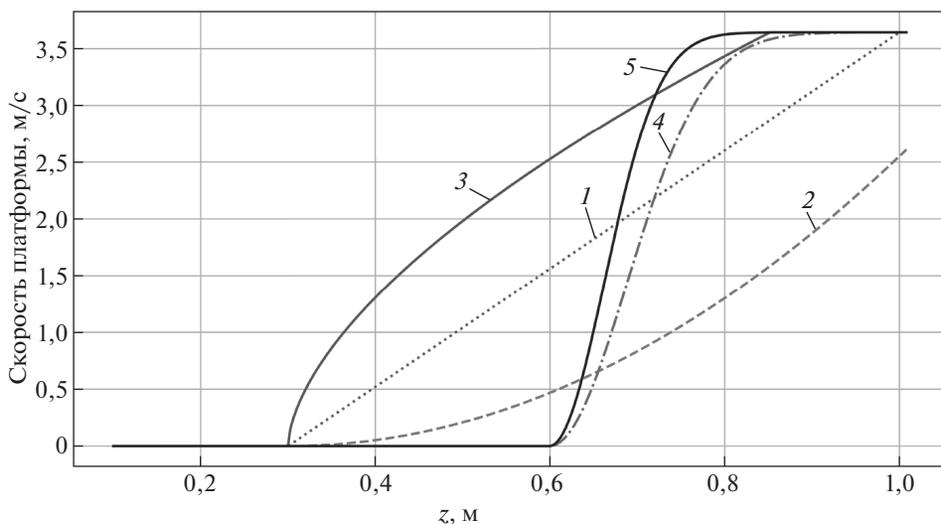


Рис. 2. Сравнение динамики изменения функций управления в зависимости от положения человека на платформе: 1 – линейная, 2 – нелинейная (параболическая), 3 – нелинейная модифицированная, 4 – зональная с накоплением, 5 – детализированная зональная с накоплением.

Линейная функция (график 1), увеличивая или уменьшая скорость полотна пропорционально положению человека, равномерно регулирует скорость на всей длине рабочей области платформы:

$$(9) \quad V_{T,lin}(z) = \frac{(z - z_0) V_T^{\max}}{L_T},$$

где $V_{T,lin}(z)$ – линейная функция расчета скорости, зависящая от текущего положения человека z и удаленности от стартовой точки z_0 ;

V_T^{\max} – максимально возможная скорость платформы, м/с.

Нелинейная (параболическая) функция $V_{T,par}$ (график 2) изменяет скорость беговой платформы более плавно и имеет вид:

$$(10) \quad V_{T,par}(z) = \frac{(z - z_0)^2 V_T^{\max}}{L_T}.$$

Так как процесс изменения скорости на первой половине рабочей зоны при функции $V_{T,par}$ оказался слишком медленным (рис. 2), то при использовании параболической функции платформа не смогла выйти на максимальную скорость при $z = 1$. Поэтому была произведена модификация (график 3), которая позволила увеличить скорость реакции на изменение положения человека и сократить эффект запаздывания в начале разгона платформы:

$$(11) \quad V_{T,mod}(z) = \frac{(z - z_0)^{0,6} V_T^{\max}}{L_T},$$

где $V_{T,mod}(z)$ – модифицированная нелинейная функция расчета скорости.

Зональная функция управления $V_{T,m1}$ (график 4) основана на разделении рабочей зоны на две зоны: торможения и ускорения. При нахождении человека в одной из них скорость дорожки плавно нарастает или убывает с заданным шагом:

$$(12) \quad V_{T,m1}(z) = \begin{cases} V_{T,m1} - \frac{k_1(z_c - z)}{z_c - z_0}, & z_0 < z \leq z_c, \\ V_{T,m1} + \frac{k_2(V_T^{\max} - V_{T,m1})(z - z_c)}{z^{\max} - z_c}, & z > z_c, \end{cases}$$

где k_1, k_2 – коэффициенты, определяющие скорость торможения или ускорения соответственно;

z_c – центральная точка рабочей зоны, заданная эмпирически, $z_0 < z_c < z^{\max}$.

Детализированная зональная функция управления $V_{T,m2}$ (график 5) отличается от зональной добавлением большего количества зон: торможения, удержания и ускорения. При таком подходе алгоритм стремится разместить человека в центральной зоне удержания с постоянной скоростью (скоростью удержания V_{def}), соответствующей текущей скорости человека. Скорость удержания V_{def} используется в качестве основной в первых двух зонах, а в третьей зоне V_{def} обновляется:

$$(13) \quad V_{T,m2}(z) = \begin{cases} V_{def} \frac{z - z_0}{z_{t1} - z_0}, & z_0 < z \leq z_{t1}, \\ V_{def}, & z_{t1} < z \leq z_{t2}, \\ V_{T,m2} + \frac{(V_T^{\max} - V_{T,m2})(z - z_{t2})}{z^{\max} - z_{t2}}, & V_{def} = V_{T,m2}, \quad z > z_{t2}, \end{cases}$$

где z_{t1}, z_{t2} – вспомогательные точки, разделяющие рабочую зону на зоны торможения, удержания и ускорения.

На рис. 2 имеется некоторое допущение для зональных функций – присутствует лишь отражение процесса равномерного ускорения платформы (начиная с положения 0,6 м) без демонстрации процесса торможения, так как этот процесс напрямую зависит от той скорости, с которой пользователь попадает в зону торможения.

Пропорционально-дифференциальная (ПД) функция $V_{T,PD}$ основана на соответствующем законе регулирования и использует информацию о смещении объекта наблюдения (человеке), а также о его скорости (производной от этого смещения) [21]:

$$(14) \quad V_{T,PD}(z_{i,j}, t) = V_{T,PD}(z_{i,j-1}, t - \Delta t) + k_1(z_{i,j} - z_{i,j-1}) + k_2 \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta t},$$

где $V_{T,PD}(z_{i,j}, t)$ – скорость в текущий момент времени t при текущем положении $z_{i,j}$ человека;

$V_{T,PD}(z_{i,j-1}, t - \Delta t)$ – скорость платформы в предыдущую итерацию при положении $z_{i,j-1}$ человека;

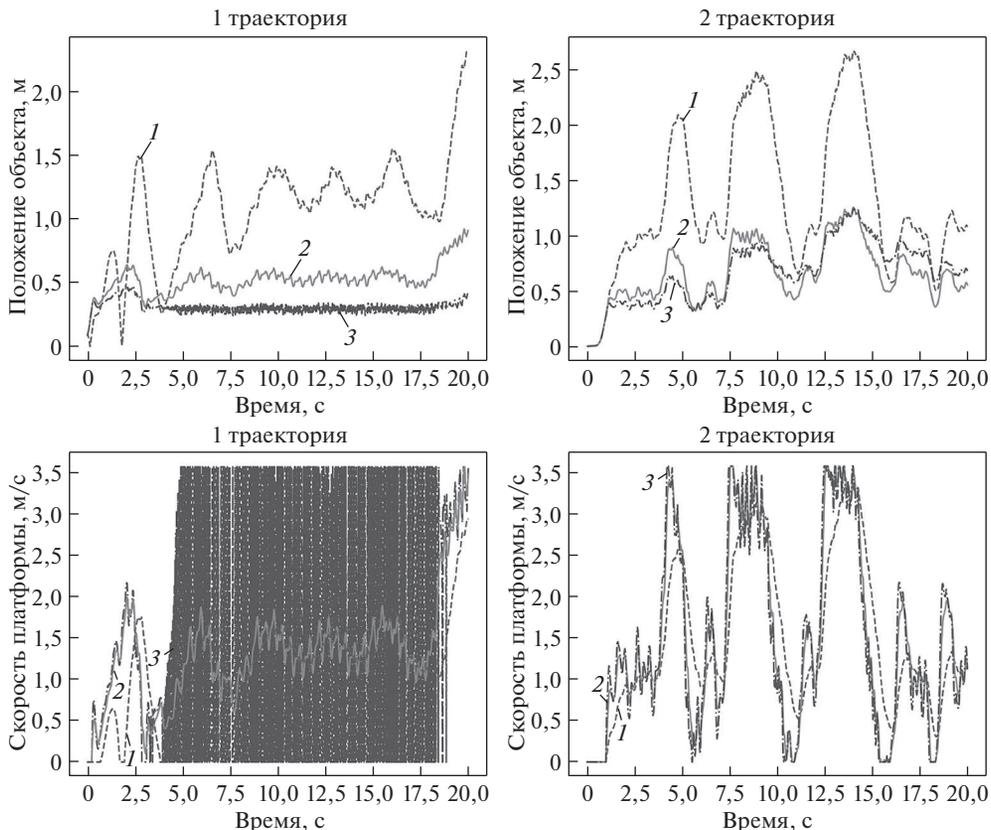


Рис. 3. Поведение пропорционально-дифференциальной функции управления при различных коэффициентах: 1 – $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, 2 – $k_1 = 10$, $k_2 = 20$, 3 – $k_1 = 20$, $k_2 = 40$.

k_1 , k_2 – поправочные коэффициенты, определяющие влияние пропорциональной и дифференциальной составляющих функции $V_{T,PD}$.

Так как ПД функция управления зависит не только от положения пользователя, но и от его скорости, отдельно рассмотрим характер изменения данной функции. Выбор коэффициентов k_1 и k_2 определяет эффективность работы функции управления. Данный эффект проиллюстрирован на рис. 3, где для двух траекторий использовались три различных варианта коэффициентов ПД функций управления. Два верхних графика отражают положение человека при различных значениях коэффициентов, нижние графики – рассчитанную по ПД функции скорость.

Неправильно подобранные коэффициенты не позволяют платформе своевременно и в нужном размере увеличивать или уменьшать скорость платформы, что приводит к значительному запаздыванию (графики положения человека при $k_1 = 2$, $k_2 = 5$).

Из рис. 3 можно сделать вывод, что увеличение коэффициентов повышает скорость реакции системы управления, однако на первой траектории избы-

точные значения коэффициентов ($k_1 = 20$, $k_2 = 40$) привели к хаотичному регулированию скорости от минимального до максимального значения, что обеспечило колебание человека в одной точке с высокой частотой. Такие колебания могут вызвать негативное влияние на вестибулярный аппарат пользователя.

Средние значения коэффициентов ($k_1 = 10$, $k_2 = 20$) показали достаточно хорошие результаты в обоих случаях. Таким образом, подбор оптимальных значений коэффициентов может быть темой отдельных исследований, так как может присутствовать зависимость от характера движения пользователя, свойств аппаратного обеспечения (длины и скорости платформы). В рамках данного исследования будут использоваться значения $k_1 = 10$, $k_2 = 20$. Из-за специфики работы беговой дорожки подбор коэффициентов осуществлялся аналитически, в дальнейшем планируется более точная настройка ПДФункции известными методами (например, Циглера–Никольса). Далее необходимо осуществить экспериментальное сравнение алгоритмов при различных траекториях движения человека.

4. Экспериментальное сравнение функций управления

При проведении экспериментов использовались следующие пять функций: линейная, нелинейная модифицированная, зональная, детализированная зональная, ПД. Эксперименты проводились на беговой платформе в виде однонаправленной беговой дорожки с рабочей зоной в 1 м, способной развивать скорость от 0 до 3,5 м/с (с возможностью выбора 250 промежуточных значений) [22]. Программное обеспечение системы управления беговой платформой реализовано на основе языка программирования Python с применением следующих библиотек: pySerial (для подключения к аппаратному обеспечению платформы и плате Arduino [23]), OpenVR (для получения данных о положении трекеров и, следовательно, человека [24]), Matplotlib (для построения графиков траекторий движения человека и скорости платформы [25]). Специфика системы управления и наличие определенной инерции у серводвигателей позволяют судить об отсутствии существенной разницы при колебаниях скорости в 5–10 единиц, что позволяет игнорировать малые отклонения датчика вплоть до 4 см.

Для определения оптимальной функции управления используем записанные траектории перемещения человека без учета влияния скорости дорожки в качестве входных данных для каждой функции (по формуле (5)). Таким образом, условия для всех экспериментов будут идентичными, а результаты будут соответствовать перемещению человека при различных функциях управления. В качестве основной оценки функций управления будем использовать выборочное среднее траектории человека \bar{Z} , а также вспомогательные метрики: максимальное отклонение от начальной позиции $\max(|z|)$, дисперсию $D(Z)$, среднеквадратическое отклонение σ_Z (квадратный корень из дисперсии) траектории человека, дисперсию $D(V_T)$ и среднеквадратическое отклонение σ_{V_T} скорости беговой платформы.

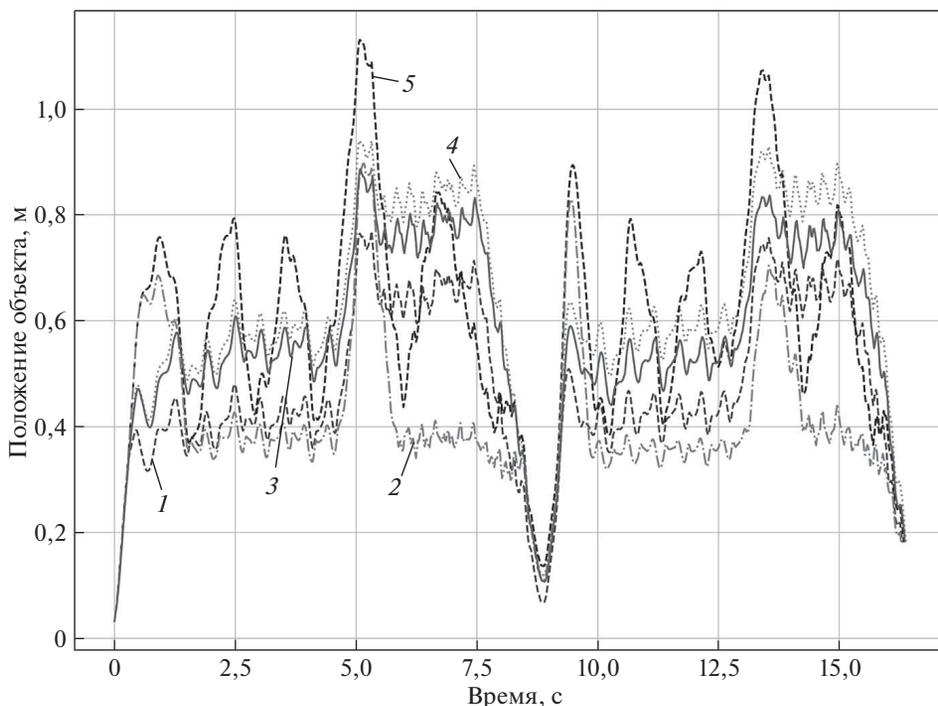


Рис. 4. Сравнение функций управления на первой траектории движения человека: 1 – линейная, 2 – нелинейная модифицированная, 3 – зональная, 4 – детализированная зональная, 5 – пропорционально-дифференциальная.

В первом эксперименте сравним все пять функций управления. Полученные в результате траектории движения пользователя для каждой функции представлены на рис. 4, а значения основных метрик — в табл. 1. Лучшие результаты по каждой метрике выделены.

Среди анализируемых функций наихудшие результаты по основному критерию \bar{Z} и дополнительным метрикам ($\max(|z|)$, $D(Z)$ и σ_Z) показали линейная и зональная функции. Причиной такого результата для обеих функций является недостаточно высокая динамика изменения скорости: это хорошо отражают графики на рис. 2, где линейная функция значительно отстает по этому показателю от нелинейной модифицированной, а зональная — от дета-

Таблица 1. Результаты первого эксперимента

Функция	\bar{Z}	$\max(z)$	$D(Z)$	σ_Z	$D(V_T)$	σ_{V_T}
Линейная	0,624	0,940	0,035	0,187	0,754	0,868
Нелинейная модифицированная	0,473	0,768	0,023	0,154	0,777	0,881
Зональная	0,600	1,131	0,042	0,205	1,164	1,079
Детализированная зональная	0,411	0,897	0,020	0,143	1,006	1,003
Пропорционально-дифференциальная	0,574	0,886	0,028	0,170	0,762	0,873

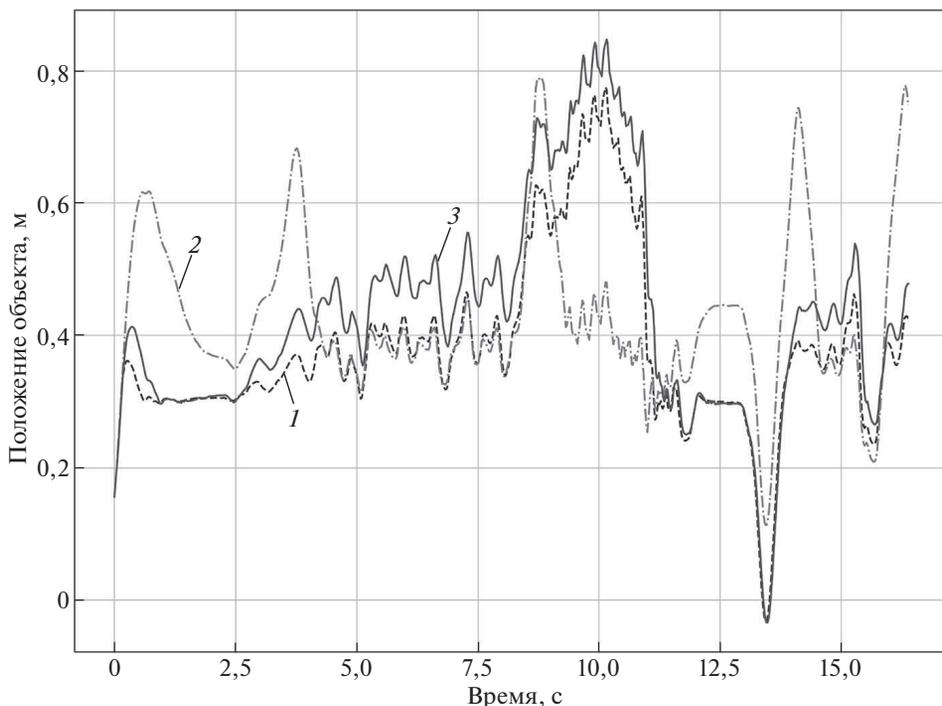


Рис. 5. Сравнение функций управления на второй траектории движения человека: 1 – линейная, 2 – нелинейная модифицированная, 3 – зональная.

лизированной зональной. По причине своей недостаточной эффективности в следующем эксперименте данные функции не будут принимать участия. Однако по показателям $D(V_T)$ и σ_{V_T} наибольшее колебание значений скорости оказалось у зональных функций.

Для второй траектории движения пользователя получены результаты, представленные на рис. 5 и в табл. 2. Поведение выбранных функций управления на новой траектории соответствует первому эксперименту, они также остаются работоспособными.

Во втором эксперименте наилучшие результаты показала нелинейная модифицированная функция. Детализированная зональная и ПД функции выглядят перспективно за счет возможности варьирования значениями коэффициентов, что может повлиять на динамику изменения скорости, однако в рамках проведенных экспериментов они не показали лучших результатов,

Таблица 2. Результаты второго эксперимента

Функция	\bar{Z}	$\max(z)$	$D(Z)$	σ_Z	$D(V_T)$	σ_{V_T}
Нелинейная модифицированная	0,380	0,775	0,017	0,131	0,757	0,870
Детализированная зональная	0,427	0,789	0,014	0,120	0,935	0,967
Пропорционально-дифференциальная	0,429	0,847	0,025	0,159	0,732	0,855

хотя и могут использоваться в качестве алгоритма управления. Колебание значений скорости (метрики $D(V_T)$ и σ_{V_T}) у нелинейной модифицированной и ПД функции показывает лучшие результаты с незначительным превосходством ПД функции.

Таким образом, в качестве функций для реализации системы управления адаптивной беговой платформой рекомендуется использование нелинейной модифицированной функции. Использование детализированной зональной и ПД функций также допустимо.

5. Заключение

В статье рассмотрена задача реализации системы управления адаптивной беговой платформой для организации перемещения в виртуальной реальности. Для ее решения проведено сравнение существующих и новых функций управления. На основе анализа предметной области формализованы процессы перемещения человека, платформы, а также аватара в виртуальной реальности в упрощенной форме. Поставлена задача исследования — минимизация среднего значения траектории человека, а также определены дополнительные метрики для оценки функций управления.

Проведен анализ функций управления, в том числе нескольких новых подходов к управлению беговой платформой. Каждая функция управления формализована, исследована динамика ее изменения в зависимости от положения человека на платформе, а также его скорости (для пропорционально-дифференциальной функции).

В ходе экспериментальных исследований определено, что наилучшие показатели по совокупности метрик показывает нелинейная модифицированная функция, далее следуют детализированная зональная и пропорционально-дифференциальная функции. Худшие результаты получены на линейной и зональной функциях, их использование не рекомендуется. В процессе исследований реализованы подходы к сбору и обработке данных о перемещении человека на беговой платформе для получения и последующего использования траектории пользователя.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности улучшения рассмотренных функций управления за счет варьирования значений коэффициентов, обработки отдельных сценариев взаимодействия с платформой (резкий разгон или остановка человека) с использованием дополнительного алгоритмического обеспечения или методов машинного обучения, а также использования комбинаций различных функций на отдельных участках платформы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова А.В.* Технологии виртуальной и дополненной реальности: возможности и препятствия применения // Стратегические решения и риск-менеджмент. 2018. № 3. С. 88–107. <https://doi.org/10.17747/2078-8886-2018-3-88-107>

2. *Krasnyanskiy M., Obukhov A., Dedov D., Siukhin A.* Modeling of the Learning Process in Adaptive Training Complexes // *J. Appl. Engineering Sci.* 2018. V. 16. No. 4. P. 487–493. <https://doi.org/10.5937/jaes16-17627>
3. *Almeida A., Rebelo F., Noreiga P., Vilar E.* Virtual Reality Self-induced Cybersickness: an Exploratory Study // *Advances in Intelligent Syst. and Comput.* 2018. P. 26–33. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-60582-1_3
4. *Risi D., Palmisano S.* Effects of Postural Stability, Active Control, Exposure Duration and Repeated Exposures on HMD Induced Cybersickness // *Displays.* 2019. V. 60. P. 9–17. <https://dx.doi.org/10.1016/j.displa.2019.08.003>
5. *Canessa A., Casu P., Solari F., Chessa M.* Comparing Real Walking in Immersive Virtual Reality and in Physical World using Gait Analysis // *VISIGRAPP (2: HUCAPP)*. 2019. P. 121–128. <http://dx.doi.org/10.5220/0007380901210128>
6. *Alqahtani A.S., Daghestani L.F., Ibrahim L.F.* Environments and System Types of Virtual Reality Technology in STEM: A survey // *Int. J. Advanced Comput. Sci. and Appl.* 2017. V. 8. No. 6. P. 77–89. <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2017.080610>
7. *Wehden L.O., Reer F., Janzik R., Tang W.Y., Quandt T.* The Slippery Path to Total Presence: How Omnidirectional Virtual Reality Treadmills Influence the Gaming Experience // *Media and Communication.* 2021. V. 9. No. 1. P. 5–16. <http://dx.doi.org/10.17645/mac.v9i1.3170>
8. *Debska M., Polechonski J., Mynarski A., Polechonski P.* Enjoyment and Intensity of Physical Activity in Immersive Virtual Reality Performed on Innovative Training Devices in Compliance with Recommendations for Health // *Int. J. Environmental Research and Public Health.* 2019. V. 16. No. 19. P. 3673. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193673>
9. *Vanoglio F., Olivares A., Bonometti G.P., Damiani S., Gaiani M., Comini L., Luisa A.* A Decision Making Algorithm for Rehabilitation after Stroke: A Guide to Choose an Appropriate and Safe Treadmill Training // *Neurorehabilitation.* 2021. P. 1–11. <http://dx.doi.org/10.3233/NRE-210065>
10. *Kim J., Gravunder A., Park H.S.* Commercial Motion Sensor Based Low-cost and Convenient Interactive Treadmill // *Sensors.* 2015. V. 15. No. 9. P. 23667–23683. <http://dx.doi.org/10.3390/s150923667>
11. *Haji Maghsoudi O., Vahedipour A., Spence A.* Three-dimensional-based Landmark Tracker Employing a Superpixels Method for Neuroscience, Biomechanics, and Biology Studies // *Int. J. Imaging Syst. and Technology.* 2019. V. 29. No. 4. P. 419–430. <https://doi.org/10.1002/ima.22317>
12. *Hejrati B., Crandall K.L., Hollerbach J.M., Abbott J.J.* Kinesthetic Force Feedback and Belt Control for the Treadport Locomotion Interface // *IEEE Trans. Haptics.* 2015. V. 15. No. 8. P. 176–187. <https://doi.org/10.1109/TOH.2015.2404357>
13. *Zhao H., Hao F.* Target Tracking Algorithm for Table Tennis Using Machine Vision // *J. Healthcare Engineering.* 2021. P. 1–7. <https://doi.org/10.1155/2021/9961978>
14. *Ikkal M.S., Ramadoss V., Zoppi M.* Dynamic Pose Tracking Performance Evaluation of HTC Vive Virtual Reality System // *IEEE Access.* 2020. V. 9. P. 3798–3815. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3047698>
15. *Vieten M.M., Weich C.* The Kinematics of Cyclic Human Movement // *PloS one.* 2020. V. 15. No. 3. P. 0225157. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0225157>

16. *Alamdari A., Krovi V.N.* A Review of Computational Musculoskeletal Analysis of Human Lower Extremities // Human Modelling for Bio-Inspired Robotics. 2017. P. 37–73. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803137-7.00003-3>
17. *Goncalves G., Melo M., Barbosa L., Vasconcelos-Raposo J., Bessa M.* Evaluation of the Impact of Different Levels of Self-representation and Body Tracking on the Sense of Presence and Embodiment in Immersive VR // Virtual Reality. 2021. P. 1–14. <https://doi.org/10.1007/s10055-021-00530-5>
18. *Souza G.S.D.S.E., Rodrigues F.B., Andrade A.O., Vieira M.F.* A Simple, Reliable Method to Determine the Mean Gait Speed Using heel Markers on a Treadmill // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 2017. V. 20. No. 8. P. 901–904. <https://doi.org/10.1080/10255842.2017.1309395>
19. *Caramenti M., Lafortuna C.L., Mugellini E., Abou Khaled O., Bresciani J.P., Dubois A.* Matching Optical Flow to Motor Speed in Virtual Reality While Running on a Treadmill // PloS one. 2018. V. 13. No. 4. P. e0195781. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0195781>
20. *Mombaur K., Clever D.* Inverse Optimal Control as a Tool to Understand Human Movement // Geometric and Numerical Foundations of Movements. 2017. P. 163–186. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51547-2_8
21. *Spence A.J., Nicholson-Thomas G., Lampe R.* Closing the Loop in Legged Neuromechanics: an Open-source Computer Vision Controlled Treadmill // J. Neuroscience Methods. 2013. V. 215. No. 2. P. 164–169. <https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2013.03.009>
22. *Karpushkin S., Dedov D., Siukhin A., Kolodin A., Volkov A.* Structural Model of Software and Hardware Platform for the Training Complex Based on a Controlled Treadmill // Int. Multidisciplinary Scientific GeoConference: SGEM. 2020. V. 15. No. 1.3. P. 613–619. <https://doi.org/10.5593/sgem2019/1.3/S03.078>
23. *Koerner L.J., Caswell T.A., Allan D.B., Campbell S.I.* A Python Instrument Control and Data Acquisition Suite for Reproducible Research // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. 2019. V. 69. No. 4. P. 1698–1707. <https://doi.org/10.1109/TIM.2019.2914711>
24. *Egger J., Gall M., Wallner J., Boechat P., Hann A., Li X., Schmalstieg D.* HTC Vive MeVisLab Integration via OpenVR for Medical Applications // PloS one. 2017. V. 12. No. 3. P. e0173972. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0173972>
25. *Yim A., Chung C., Yu A.* Matplotlib for Python Developers: Effective Techniques for Data Visualization with Python // Packt Publishing Ltd, 2018. 300 p.

Статъя представена к публикации членом редколегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 03.08.2021

После доработки 15.11.2021

Принята к публикации 20.11.2021

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru)

(Алтайский государственный университет, Барнаул),

Ю.Г. АЛГАЗИНА, канд. эконом. наук (algazina@inbox.ru)

(Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул)

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ УСЛОВИЙ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ РЕФЛЕКСИВНОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ОЛИГОПОЛИИ

Представлено исследование динамик коллективного поведения взаимосвязанных рациональных агентов в условиях неполной информации. Доказываются утверждения, позволяющие унифицировать условия сходимости к равновесию для двух траекторий реакции агентов на ожидаемые действия окружения: 1) “классического” оптимизационного поведения, при котором агенты стараются выбрать оптимальные ответы, игнорируя возможные текущие “отрицательные состояния”; 2) поведения, гарантирующего каждому агенту движение в направлении к цели и неотрицательные текущие состояния. Показывается применение полученных результатов в моделях олигополии Курно и Штакельберга с рефлексивным поведением агентов. Получены достаточные условия сходимости процессов коллективного поведения в олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Ключевые слова: рефлексивное коллективное поведение, равновесие, условия сходимости, модели олигополии, неполная информированность, аналитические результаты.

DOI: 10.31857/S0005231022030072

1. Введение

Значительное число математических работ посвящено рефлексивному поведению (см., например, [1, 2]) агентов с реакцией по Курно [3] и/или Штакельбергу [4] на действия окружения. “Классические” модели оптимизационного поведения, когда каждый агент в процессе принятия решений выбирает свой наилучший ответ на ожидаемые действия других агентов, часто сильно упрощены, недостаточно реалистичны, не учитывают их информированность, реальные условия и экономические ограничения (см., например, [1, 5–8]).

Однако с усложнением моделей более проблематичным становится аналитическое исследование условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему процесса принятия решений. Один из возможных

подходов к этой проблеме состоит в поиске общих закономерностей функционирования систем на основе простых и усложненных моделей и универсализации аналитических решений (см., например, [9–11]).

В данной статье показывается возможность унификации условий сходимости для двух траекторий реакции рефлексирующих агентов на ожидаемые состояния окружения: 1) “классического” оптимизационного поведения, при котором агенты на каждом шаге процесса принятия решений стараются выбрать оптимальные ответы, игнорируя возможные текущие “отрицательные состояния”; 2) поведения, гарантирующего каждому агенту движение в направлении к цели и неотрицательные состояния на каждом шаге процесса. Это позволяет аналитические результаты об условиях сходимости для более простых моделей (первого случая траектории) обобщить на более сложные модели (траектории) поведения агентов.

Полученные результаты проиллюстрированы для рефлексивных моделей олигополии с линейными функциями затрат агентов и спроса с различной реакцией агентов на действия окружения: 1) все агенты рефлексируют по Курно; 2) один или несколько агентов рефлексирует по Штакельбергу, остальные — по Курно.

При этом в условиях допустимости ответов агентов на ожидаемые действия конкурентов рассматриваются случаи, когда учитываются и не учитываются такие экономические категории как конкурентоспособность и убыточность агентов.

2. Постановка задачи исследования

Пусть динамическая система состоит из n взаимосвязанных целенаправленных агентов и функционирует в дискретном времени. Состояние системы в момент времени t дается n -мерным вектором $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, и текущее положение цели i -го агента $x_i(q_{-i}^t)$ зависит от состояний (действий) остальных агентов, где $q_{-i}^t = (q_1^t, \dots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \dots, q_n^t)$. Текущее положение цели агента — такое его действие, которое максимизировало бы его целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же действия, что и в предыдущий (см., например, [1, 9, 10]).

Определим *процесс* 1, если смена состояния системы при переходе от предыдущего момента времени t к последующему $(t + 1)$, т.е. преобразование компонент вектора q^t в q^{t+1} , представляется в виде

$$(1) \quad q_i^{t+1} = x_i(q_{-i}^t), \quad i \in N, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Требование неотрицательности состояний агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано по формуле

$$(2) \quad q_i^{t+1} = \begin{cases} x_i(q_{-i}^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \leq 0. \end{cases}$$

Определим итерационное преобразование (2) состояний агентов как *процесс 2*.

Определим *процесс 3*, когда смена состояний системы удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [9, 10] — в каждый момент времени каждый из агентов изменяет свое состояние, делая шаги в направлении текущего положения цели и следуя итерационной процедуре

$$(3) \quad q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1} (x_i(q_{-i}^t) - q_i^t).$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ — параметры, выбираемые агентами, определяют величины их шагов.

В *процессе 4* учтено требование неотрицательности состояний агентов

$$(4) \quad q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1} (x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \leq 0. \end{cases}$$

В (3) и (4) агент выбором параметра $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ может делать “неполный шаг” от своего предыдущего состояния к текущему положению цели, а в (1) и (2) всегда делает полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$, тем самым выбирает свой наилучший ответ. Естественно, чтобы при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$ (3) переходило в (1), а (4) — в (2). Также в (4) и (2) агенту целесообразно, желая максимизировать свою целевую функцию, обнулять свой выпуск, если его текущее положение цели равно нулю или отрицательно. Подобным образом в процессах реализована идея градиентных методов оптимизации для поиска равновесий динамической системы.

Очевидно, что аналитическое исследование сходимости процесса 1 менее сложно, чем процесса 2, а процесса 3 — чем процесса 4. В разделе 4 приведены основные утверждения, позволяющие аналитические результаты об условиях сходимости процесса 1 обобщить на процесс 2, а процесса 3 — на процесс 4, а также представлены иллюстрации доказанных результатов для различных моделей олигопольного рынка.

3. Базовая модель олигополии

В качестве примера возможных приложений доказанных результатов будет рассмотрена классическая модель олигополии, состоящая из n конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов с целевыми функциями

$$(5) \quad \Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i}, \quad i \in N,$$

линейными функциями затрат

$$(6) \quad \phi_i(q_i) = f_i q_i + d_i, \quad i \in N,$$

и с линейной обратной функцией спроса вида

$$(7) \quad p(Q) = a - bQ.$$

Здесь: q_i — выпуск i -го агента, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ — суммарный объем выпуска, f_i, d_i — предельные и постоянные издержки агентов, $p(Q)$ — единая рыночная цена, a, b — параметры спроса. Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют.

Пусть каждый агент может реагировать на действия окружения одним из двух способов: 1) рефлексировать по Курно; 2) рефлексировать по Штакельбергу.

Обозначим: N_c — множество агентов с реакцией по Курно, N_s — множество агентов с реакцией по Штакельбергу; $N_c \cup N_s = N$ и $N_c \cap N_s = \emptyset$, $|N_c| = n_c$, $|N_s| = n_s$, $n_c + n_s = n$. Определим расчетные формулы для текущего положения цели (см., например, [3, 4, 12–15]).

Агент $i \in N_c$ с рефлексией по Курно, точно зная выпуски q_{-i}^t остальных агентов в предыдущий момент времени и не ожидая их изменения в текущий момент времени, рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле

$$(8) \quad x_i(q_{-i}^t) = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}.$$

Агент $i \in N_s$ с рефлексией по Штакельбергу, зная выпуски q_{-i}^t остальных агентов в предыдущий момент времени и ожидая в текущий момент времени от них поведения по Курно, полагает, что в точности знает реакцию остальных агентов на свои действия, и рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле

$$(9) \quad x_i(q_{-i}^t) = \frac{n(h_i - Q_{-i}^t)}{1 + n}.$$

Здесь обозначено: $h_i = \frac{a-f_i}{b}$, $Q_{-i}^t = \sum_{j \neq i} q_j^t$, $i, j \in N$.

Поясним вывод формул (8) и (9) для положения цели $x_i(q_{-i}^t)$.

Оптимальный текущий выпуск агента можно определить из условия $\frac{\partial \Pi^t}{\partial q_i^t} = \frac{\partial p^t}{\partial q_i^t} q_i^t + p^t - \frac{\partial \phi}{\partial q_i^t} = 0$. Отсюда (полагая, что оптимальный выпуск не равен нулю) $\frac{\partial p^t}{\partial q_i^t} = \frac{1}{q_i^t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_i^t} - p^t \right)$. Из формулы цены (7) имеем $\frac{\partial p^t}{\partial q_i^t} = -b \frac{\partial Q^t}{\partial q_i^t}$. Тогда с учетом (6) и (7) имеем, что $b \frac{\partial Q^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{q_i^t} (f_i - a + bQ^t)$ или $1 + \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = \frac{1}{q_i^t} h_i - 1 - \frac{1}{q_i^t} Q_{-i}^t$.

Получаем окончательно, что $q_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2 + \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}}$ ($i \in N$; $t = 0, 1, 2, \dots$).

Сначала рассмотрим применение полученной формулы к ведомому агенту. Допустим, что i -й агент является ведомым. Согласно определению дифференциала имеем $dQ_{-i}^t = \sum_{j \in N} \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_j^t} dq_j^t$. По предположению Курно следует,

что $dQ_{-i}^t = 0$. Тогда для i -го агента должны быть равны нулю не только dq_j^t ($j \neq i$), но и $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$, так как в противном случае при $dq_i^t \neq 0$ будет $dQ_{-i}^t \neq 0$. Итак, $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$, и имеем выражение $q_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2}$ ($i \in N_c$) для оптимального текущего выпуска агента с реакцией по Курно на предполагаемые им выпуски конкурентов.

Теперь рассмотрим применение полученной формулы к агенту-лидеру. Допустим, что i -й агент является лидером. Из его предположения, что остальные агенты действуют как ведомые, следует, что $dq_j^t = 0$ и $dQ_{-j}^t = 0$ при $j \in N \setminus \{i\}$. Имеем $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = 0$, а также $q_j^t = \frac{h_j - Q_{-j}^t}{2}$, откуда получаем $\frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q_{-j}^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q^t}{\partial q_i^t} + \frac{1}{2} \frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} + \frac{1}{2} \frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t}$ или $\frac{\partial q_j^t}{\partial q_i^t} = -1 - \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$ при $j \in N \setminus \{i\}$. Суммируя левые и правые части последних равенств по $j \in N \setminus \{i\}$, получаем, что $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = -(n-1) - (n-1) \frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t}$, т.е. $\frac{\partial Q_{-i}^t}{\partial q_i^t} = -\frac{n-1}{n}$. Тогда $q_i^t = \frac{h_i - Q_{-i}^t}{2 - \frac{n-1}{n}}$ или $q_i^t = \frac{n(h_i - Q_{-i}^t)}{1+n}$ ($i \in N_s$) — оптимальный текущий выпуск агента с реакцией по Штакельбергу на предполагаемые выпуски остальных агентов.

Поясним также отличие рефлексивной модели олигополии от классической игры Штакельберга и информированность агентов. Здесь выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно). Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций. Он использован, например, в [8, 12] и, как отмечается в [8], адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно. В игре Штакельберга лидер первым делает ход, который становится известен другим агентам. Здесь агенты с реакцией по Курно не знают хода лидера, синхронного своему ходу. Более того, они не знают, что у них есть лидер (лидеры), полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее “интеллектуальными”, чем они сами, или что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Агенты, действующие по Курно, не знают, что другие такие агенты действуют так же.

Следуя [1], агенты, выбирающие действия по Курно, обладают низким (“нулевым”) рангом рефлексии. Лидеры обладают более высоким (“первым”) рангом рефлексии, считая всех остальных нерефлексирующими (агентами с нулевым рангом рефлексии), и в соответствии с этим предсказывают их выбор. Выбор лидеров будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая, по их мнению, должна сложиться. Предполагается, что все агенты не допускают существования агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем они сами.

Также все агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции, включающую параметры спроса a и b , ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной априорной информацией относительно ожидаемых объемов их выпуска,

множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций конкурентов. Лидер также знает общее число агентов на рынке.

4. Методы исследования

Выведем формальные выражения для норм матриц перехода от t -го к $(t+1)$ -му моменту времени в итерационных процессах (1)–(4) для базовой модели олигополии.

Сначала рассмотрим классическую модель индикаторного поведения (3).

Эту модель для агента с реакцией по Курно перепишем с учетом (8) в виде

$$(10) \quad q_i^{t+1} = q_i^t - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left(2q_i^t + \sum_{j \neq i} q_j^t \right) + \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} h_i, \quad \gamma_i^{t+1} \in [0; 1], \quad i \in N_c.$$

Модель индикаторного поведения агента с реакцией по Штакельбергу перепишем с учетом (9) в виде

$$(11) \quad q_i^{t+1} = q_i^t - \gamma_i^{t+1} \frac{n}{1+n} \left(q_i^t \frac{1+n}{n} + \sum_{j \neq i} q_j^t \right) + \gamma_i^{t+1} \frac{n}{1+n} h_i, \\ \gamma_i^{t+1} \in [0; 1], \quad i \in N_s.$$

Здесь и далее для определенности будем считать, что первые n_s агентов действуют по Штакельбергу, остальные — по Курно и $q^t = (q_1^t, \dots, q_{n_s}^t, q_{n_s+1}^t, \dots, q_n^t)$.

Исследование сходимости к равновесию процесса (10)–(11) может быть сведено к итерационному решению системы линейных алгебраических уравнений. С целью упрощения записи выражений проведем замену переменных

$$(12) \quad \lambda_i^{t+1} = \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}, \quad i \in N_c; \quad \lambda_i^{t+1} = \gamma_i^{t+1} \frac{n}{1+n}, \quad i \in N_s.$$

Запишем (10)–(11) в эквивалентной матричной форме

$$(13) \quad q^{t+1} = q^t - \Lambda^{t+1} A q^t + \Lambda^{t+1} h, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_s & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & A_c \end{pmatrix} \text{ — клеточная матрица, т.е. квадратная матрица раз-}$$

мера $n \times n$, вдоль диагонали которой идут квадратная подматрица A_s размера $n_s \times n_s$ и квадратная подматрица A_c размера $n_c \times n_c$;

$$A_s = \begin{pmatrix} (1+n)/n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (1+n)/n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & (1+n)/n \end{pmatrix}, \quad A_c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix};$$

$\Lambda^{t+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{t+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_n^{t+1} & \dots \end{pmatrix}$ — диагональная матрица параметров λ^{t+1} , зада-

ющих тот или иной итерационный процесс; $q^t = (q_1^t, q_2^t, \dots, q_n^t)'$ — вектор-столбец в вещественном n -мерном пространстве R^n (где q' обозначает вектор-строку, транспонированную к q) и $h = \left(\frac{a-f_1}{b}, \frac{a-f_2}{b}, \dots, \frac{a-f_n}{b}\right)'$.

Для модели олигополии с линейными функциями затрат агентов и линейной обратной функцией спроса равновесный выпуск $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ определяется как решение системы уравнений $Aq = h$ (см., например, [13]).

Поскольку матрица A имеет обратную матрицу, то существует единственное решение этой системы уравнений при любой правой части $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)'$.

Используя (13), $Aq^* = h$ и очевидное равенство $q^* = q^* - \Lambda^{t+1}Aq^* + \Lambda^{t+1}Aq^*$, получаем, что погрешность итерационного процесса $\partial^t = (\partial_1^t, \partial_2^t, \dots, \partial_n^t)'$ $= (q_1^t - q_1^*, q_2^t - q_2^*, \dots, q_n^t - q_n^*)'$ удовлетворяет уравнению $\partial^{t+1} = \partial^t - \Lambda^{t+1}A\partial^t$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), которое отличается от (13) только тем, что является однородным.

Положим

$$(14) \quad B^t = E - \Lambda^{t+1}A = \begin{pmatrix} B_s^t & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & B_c^t \end{pmatrix},$$

где $B_s^t = \begin{pmatrix} 1 - (1+n)\lambda_1^{t+1}/n & -\lambda_1^{t+1} & \dots & -\lambda_1^{t+1} \\ -\lambda_2^{t+1} & 1 - (1+n)\lambda_2^{t+1}/n & \dots & -\lambda_2^{t+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda_{n_s}^{t+1} & -\lambda_{n_s}^{t+1} & \dots & 1 - (1+n)\lambda_{n_s}^{t+1}/n \end{pmatrix}$ и

$$B_c^t = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_{n_s+1}^{t+1} & -\lambda_{n_s+1}^{t+1} & \dots & -\lambda_{n_s+1}^{t+1} \\ -\lambda_{n_s+2}^{t+1} & 1 - 2\lambda_{n_s+2}^{t+1} & \dots & -\lambda_{n_s+2}^{t+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda_n^{t+1} & -\lambda_n^{t+1} & \dots & 1 - 2\lambda_n^{t+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(15) \quad \partial^{t+1} = B^t \partial^t = \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1^{t+1}/n) \partial_1^t - \lambda_1^{t+1} \sum_{i \in N_s} \partial_i^t \\ \dots \\ (1 - \lambda_{n_s}^{t+1}/n) \partial_{n_s}^t - \lambda_{n_s}^{t+1} \sum_{i \in N_s} \partial_i^t \\ \dots \\ (1 - \lambda_{n_s+1}^{t+1}) \partial_{n_s+1}^t - \lambda_{n_s+1}^{t+1} \sum_{i \in N_c} \partial_i^t \\ \dots \\ (1 - \lambda_n^{t+1}) \partial_n^t - \lambda_n^{t+1} \sum_{i \in N_c} \partial_i^t \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Сходимость итерационного процесса (15) означает, что $\partial^t \rightarrow 0$ по норме при $t \rightarrow \infty$, и полностью определяется матрицей B^t — матрицей перехода от t -го к $(t+1)$ -му моменту времени (см., например, [16]). Здесь E — единичная матрица.

Под нормой вектора x , обозначаемой как $\|x\|$, понимаем евклидову норму, которая определяется по формуле $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$. Последовательность векторов $\{x^t\}_{t=0}^\infty$ сходится к равновесию x^* по норме при $t \rightarrow \infty$ (будем записывать как $x^t \rightarrow x^*$), если $\|x^t - x^*\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Норма вещественной матрицы B , имеющей n строк и n столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как $\|B\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$, или как в следующей эквивалентной форме $\|B\| = \max_{\|x\|=1} \|Bx\|$. Из определения нормы следует, что $\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|$ для всех B , x или $\|Bx\| \leq \|B\|$ для всех B , $\|x\| = 1$ [16].

Тогда

$$(16) \quad \|B^t\| = \max_{\|x^t\|=1} \|B^t x^t\| = \\ = \max_{\|x^t\|=1} \sqrt{\sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2},$$

где x^t — произвольный единичный вектор.

Перейдем к построению матрицы перехода для модели (4).

Обозначим: N_c^t — множество агентов с реакцией по Курно, для которых $x_i(q_{-i}^t) \leq 0$; N_s^t — множество агентов с реакцией по Штакельбергу, для которых $x_i(q_{-i}^t) \leq 0$.

Определим клеточную матрицу $\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} \tilde{A}_s^t & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \tilde{A}_c^t \end{pmatrix}$, где на главной диа-

гонали для $i \in N_s^t$ стоят числа “ $\frac{1}{n}$ ”, для $i \in N_c^t$ стоят числа “1”, другие элементы в этих строках нулевые. Остальные элементы матриц \tilde{A}^t и A совпадают.

Определим диагональную матрицу параметров $\tilde{\Lambda}^{t+1}$, в которой на главной диагонали для $i \in N_s^t$ стоят числа “ n ”, для $i \in N_c^t$ стоят числа “1”. Остальные элементы матриц $\tilde{\Lambda}^{t+1}$ и Λ^{t+1} совпадают.

Процесс 4 запишем в эквивалентной матричной форме

$$(17) \quad q^{t+1} = q^t - \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t q^t + \tilde{\Lambda}^{t+1} h - \tilde{H}^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где \tilde{H}^t — вектор-столбец, в котором для $i \in N_s^t$ стоят величины “ nh_i ”, для $i \in N_c^t$ стоят величины “ h_i ”, остальные элементы нулевые.

Для оценки погрешности итерационного процесса (17) введем фиктивный процесс $q^* = q^* - \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t q^* + \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t q^* = q^* - \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t q^t + \tilde{\Lambda}^{t+1} A q^* - \tilde{\Lambda}^{t+1} (A - \tilde{A}^t) q^*$, $t = 0, 1, 2, \dots$

Разность между (17) и последним выражением с учетом $Aq^* = h$ дает уравнение для этой погрешности в виде

$$(18) \quad \partial^{t+1} = \partial^t - \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t \partial^t - \tilde{H}^t + \tilde{\Lambda}^{t+1} (A - \tilde{A}^t) q^*, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что в (18) выражение $(-\tilde{H}^t + \tilde{\Lambda}^{t+1} (A - \tilde{A}^t) q^*)$ определяет вектор-столбец, в котором стоят величины “ $-q_i^* - n \sum_{j \in N_c} q_j^*$ ” для $i \in N_s^t$ и “ $-q_i^* - \sum_{j \in N_s} q_j^*$ ” для $i \in N_c^t$. Остальные элементы нулевые.

Положим

$$(19) \quad \tilde{B}^t = E - \tilde{\Lambda}^{t+1} \tilde{A}^t.$$

По (18)–(19) имеем неравенство

$$(20) \quad \partial^{t+1} \leq \tilde{B}^t \partial^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Матрица \tilde{B}^t и вектор-столбец $\tilde{B}^t \partial^t$ отличаются от B^t и $B^t \partial^t$ соответственно тем, что строки $i \in N_s^t \cup N_c^t$ — нулевые.

Тогда норма вещественной матрицы \tilde{B}^t , подчиненной евклидовой векторной норме, определяется выражением

$$(21) \quad \begin{aligned} \|\tilde{B}^t\| &= \max_{\|x^t\|=1} \|\tilde{B}^t x^t\| = \\ &= \max_{\|x^t\|=1} \sqrt{\sum_{i \in N_s \setminus N_s^t} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c \setminus N_c^t} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2}. \end{aligned}$$

Пример. На рынке 5 агентов. Пусть два агента реагируют по Штакельбергу и у одного из них (для определенности первого, $i = 1$) в момент времени t расчетное текущее положение цели оказалось неположительным. Пусть в тот же момент времени у одного из трех агентов, действующих по Курно (для определенности последнего, $i = 5$), также неположительное положение цели. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} 6/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^t = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6/50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Lambda}^{t+1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{t+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{t+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}^t = \begin{pmatrix} 6h_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_5 \end{pmatrix},$$

$$-\tilde{H}^t + \tilde{\Lambda}^{t+1} (A - \tilde{A}^t) q^* = \begin{pmatrix} -q_1^* - 5 \sum_{j=3}^5 q_j^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_5^* - \sum_{j=1}^2 q_j^* \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2^{t+1} & 1 - 6\lambda_2^{t+1}/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\lambda_3^{t+1} & -\lambda_3^{t+1} & -\lambda_3^{t+1} \\ 0 & 0 & -\lambda_4^{t+1} & 1 - 2\lambda_4^{t+1} - \lambda_4^{t+1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}^t \partial^t = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_2^t - \lambda_2^{t+1} \left(\frac{1}{5} \partial_2^t + \sum_{j=1}^2 \partial_j^t \right) \\ \partial_3^t - \lambda_3^{t+1} \left(\partial_3^t + \sum_{j=3}^5 \partial_j^t \right) \\ \partial_4^t - \lambda_4^{t+1} \left(\partial_4^t + \sum_{j=3}^5 \partial_j^t \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\tilde{B}^t\| = \max_{\|x^t\|=1} \sqrt{\left[x_2^t - \lambda_2^{t+1} \left(\frac{x_2^t}{5} + \sum_{j=1}^2 x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i=3}^4 \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j=3}^5 x_j^t \right) \right]^2}.$$

5. Результаты и их обсуждение на рефлексивной модели олигополии

Наряду с изучением свойств матриц перехода процессов представим новые результаты об условиях сходимости процессов к положению равновесия.

В терминах нормы матрицы перехода B^t можно привести следующие достаточные условия сходимости процесса 3 с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Лемма. Для сходимости к равновесию процесса (15) при любом начальном приближении q^0 достаточно выполнения условия

$$(22) \quad \|B^t\| < 1$$

начиная с некоторого момента t_0 .

Доказательство. Сходимость к решению q^* при любом начальном приближении q^0 следует из того, что для каждого $k > 0$

$$\begin{aligned} \|q^{t_0+k} - q^*\| &= \|\partial^{t_0+k}\| \leq \|B^{t_0+k-1}\| \cdot \|\partial^{t_0+k-1}\| \leq \\ &\leq \|B^{t_0+k-1}\| \cdot \|B^{t_0+k-2}\| \cdot \|\partial^{t_0+k-2}\| \leq \\ &\leq \|B^{t_0+k-1}\| \cdot \|B^{t_0+k-2}\| \cdot \dots \cdot \|B^{t_0}\| \cdot \|\partial^{t_0}\| \end{aligned}$$

и

$$\|q^{t_0+k} - q^*\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

Утверждение 1. $\|\tilde{B}^t(\lambda^{t+1})\| \leq \|B(\lambda^{t+1})\|$ для $\lambda_i^{t+1} \in [0; \frac{1}{2}]$, $i \in N_c$; $\lambda_i^{t+1} \in [0; \frac{n}{1+n}]$, $i \in N_s$; $t = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

Утверждение 2. Если начиная с некоторого момента t_0 $\|B^t\| < 1$, то процессы 3 и 4 сходятся при любом начальном приближении q^0 .

Доказательство. Для процесса 4 по (20) $\|\partial^{t+1}\| \leq \|\tilde{B}^t\| \cdot \|\partial^t\|$, по утверждению 1 имеем $\|\tilde{B}^t\| \leq \|B^t\| < 1$. Справедливость утверждения 2 для обоих процессов следует из доказанной леммы. Утверждение 2 доказано.

Обозначим через $f(\lambda)$ подкоренное выражение в (16), т.е.

$$(23) \quad \begin{aligned} f(\lambda^{t+1}) &= \sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \\ &+ \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2. \end{aligned}$$

В следующем утверждении приводятся свойства функции $f(\lambda^{t+1})$, которые могут быть полезны при выводе условий сходимости процессов.

Утверждение 3. Пусть векторы λ^{t+1} , $\vec{\lambda}^{t+1}$, $\overleftarrow{\lambda}^{t+1}$ такие, что $\lambda_i^{t+1} \in [0; \frac{n}{1+n}]$, $\vec{\lambda}_i^{t+1} \in [0; \frac{1}{2}]$, $\overleftarrow{\lambda}_i^{t+1} \in [0; \frac{1}{2}]$, где $[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}] \subseteq [0; \frac{1}{2}]$, если $i \in N_c$, и $[\vec{\lambda}_i^{t+1}; \overleftarrow{\lambda}_i^{t+1}] \subseteq [0; \frac{n}{1+n}]$, если $i \in N_s$.

Тогда функция $f(\lambda^{t+1})$:

а) выпукла вниз по каждой отдельной i -й компоненте на отрезке $[\bar{\lambda}_i^{t+1}; \tilde{\lambda}_i^{t+1}]$, т.е.

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \alpha_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \tilde{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) &\leq \\ &\leq \alpha_i^{t+1} f\left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \bar{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \\ &+ \beta_i^{t+1} f\left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \tilde{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right), \end{aligned}$$

если $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$ и $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$;

б) выпукла вниз на n -мерном прямоугольном параллелепипеде

$$\left[\bar{\lambda}_1^{t+1}, \tilde{\lambda}_1^{t+1}; \dots; \bar{\lambda}_i^{t+1}, \tilde{\lambda}_i^{t+1}; \dots; \bar{\lambda}_n^{t+1}, \tilde{\lambda}_n^{t+1}\right],$$

т.е.

$$f\left(\eta^{t+1} \bar{\lambda}^{t+1} + \mu^{t+1} \tilde{\lambda}^{t+1}\right) \leq \eta^{t+1} f\left(\bar{\lambda}^{t+1}\right) + \mu^{t+1} f\left(\tilde{\lambda}^{t+1}\right),$$

если $\eta^{t+1}, \mu^{t+1} \in [0; 1]$ и $\eta^{t+1} + \mu^{t+1} = 1$;

в) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} f\left(\alpha_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \tilde{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \tilde{\lambda}_i^{t+1}, \dots, \alpha_n^{t+1} \bar{\lambda}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1} \tilde{\lambda}_n^{t+1}\right) &\leq \\ (24) \quad &\leq \sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_i \in \{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\}} \dots \sum_{y_n \in \{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\}} y_1 \cdot \dots \cdot y_i \cdot \dots \cdot y_n \times \\ &\times f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_i^{t+1}, \dots, z_n^{t+1}\right), \end{aligned}$$

где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $z_i^{t+1} = \begin{cases} \bar{\lambda}_i^{t+1}, & y_i = \alpha_i^{t+1}, \\ \tilde{\lambda}_i^{t+1}, & y_i = \beta_i^{t+1}, \end{cases}$

$$\sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_i \in \{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\}} \dots \sum_{y_n \in \{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\}} y_1 \cdot \dots \cdot y_i \cdot \dots \cdot y_n = 1;$$

г) достигает максимума по крайней мере в одной из крайних точек n -мерного прямоугольного параллелепипеда

$$\left[\bar{\lambda}_1^{t+1}, \tilde{\lambda}_1^{t+1}; \dots; \bar{\lambda}_i^{t+1}, \tilde{\lambda}_i^{t+1}; \dots; \bar{\lambda}_n^{t+1}, \tilde{\lambda}_n^{t+1}\right];$$

д) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
 f\left(\alpha_1^{t+1}\bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\bar{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1}\bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\bar{\lambda}_i^{t+1}, \dots, \alpha_n^{t+1}\bar{\lambda}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1}\bar{\lambda}_n^{t+1}\right) &\leq \\
 &\leq \sum_{i \in N_s} \alpha_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \\
 &+ \sum_{i \in N_c} \alpha_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \\
 (25) \quad &+ \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \\
 &+ \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2,
 \end{aligned}$$

где $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$.

Доказательство утверждения 3 приведено в Приложении.

5.1. Олигополия Курно

Рассмотрим применение результатов, ранее полученных в этом разделе, к сходимости процессов 1–4.

Определяя процесс 1, учтем, что его можно рассматривать как частный случай процесса 3. Для этого положим $[\bar{\lambda}_i^{t+1}; \bar{\lambda}_i^{t+1}] = [0; \frac{1}{2}]$ и $\alpha_i^{t+1} = 0$, $\beta_i^{t+1} = 1$ ($\forall i \in N; t = 0, 1, 2, \dots$), что по формуле замены переменных (12) соответствует выбору агентами значений параметров $\gamma_i = 1$ ($\forall i \in N$), т.е. их наилучшим ответам на действия конкурентов.

Тогда для процесса 1 неравенство (25) (с учетом соотношения $\sum_{i \in N} (x_i^t)^2 = 1$) принимает вид

$$\begin{aligned}
 f(\bar{\lambda}^{t+1}) &\leq \sum_{i \in N} \left[x_i^t - \frac{1}{2} \left(x_i^t + \sum_{j \in N} x_j^t \right) \right]^2 = \\
 &= 1 - \left[\sum_{i \in N} (x_i^t)^2 - \sum_{i \in N} \left(\frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^t}{2} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Если симметрическая квадратичная форма $\sum_{i \in N} (x_i^t)^2 - \sum_{i \in N} \left(\frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^t}{2} \right)^2$ яв-

ляется положительно определенной, то $f(\bar{\lambda}^{t+1}) < 1$ и $\|B^t\| < 1$. Соответствующая этой квадратичной форме симметрическая матрица имеет вид $F =$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{n-1}{4} & -\frac{n-2}{4} & \cdots & -\frac{n-2}{4} \\ -\frac{n-2}{4} & 1 - \frac{n-1}{4} & \cdots & -\frac{n-2}{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{n-2}{4} & -\frac{n-2}{4} & \cdots & 1 - \frac{n-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Используем следующий известный результат (см., например, [17]): действительная квадратичная форма является положительно определенной в том и только в том случае, если определители всех главных (угловых) миноров соответствующей ей матрицы положительны (или, что равносильно, если матрица положительно определена).

Имеем, что при $n = 2$ определители главных миноров матрицы F положительны. При $n = 3$ определитель главного минора 3-го порядка равен нулю, при $n = 4$ определитель главного минора 2-го порядка отрицателен, при $n \geq 5$ определитель главного минора 1-го порядка неположителен, т.е. только для дуополии F является положительно определенной. Поэтому если $n = 2$, то $\|B^t\| < 1$ и по утверждению 1 $\|\tilde{B}^t\| \leq \|B^t\|$, а по утверждению 2 процессы 1, 2 сходятся.

Это полностью согласуется с известными результатами, полученными другими методами [14, 15, 18, 19], в том числе и только экспериментами (см., например, [13]), что в олигополии Курно (5)–(8) процессы 1 и 2: а) сходятся при $n = 2$ при любых начальных условиях, б) при $n \geq 3$ расходятся.

Рассмотрим процесс 3.

Положим $\left[\tilde{\lambda}_i^{t+1}; \bar{\lambda}_i^{t+1} \right] = \left[0; \frac{1}{1+n} \right]$, что по (12) соответствует значениям

параметров $\tilde{\gamma}_i^{t+1} = 2\bar{\lambda}_i^{t+1} = \frac{2}{1+n}$ ($\forall i \in N; t = 0, 1, 2, \dots$). Выбор такого диапазона объясняется тем, что для него есть доказанные результаты [14].

Для процесса 3, принимая во внимание $\sum_{i \in N} (x_i^t)^2 = 1$, неравенство (25) принимает вид

$$\begin{aligned} & f \left(\frac{\beta_1^{t+1}}{1+n}, \dots, \frac{\beta_i^{t+1}}{1+n}, \dots, \frac{\beta_n^{t+1}}{1+n} \right) \leq \\ & \leq \sum_{i \in N} (1 - \beta_i^{t+1}) (x_i^t)^2 + \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \frac{1}{1+n} \left(x_i^t + \sum_{j \in N} x_j^t \right) \right]^2 = \\ & = 1 - \left[\sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} (x_i^t)^2 - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(\frac{(n-1)x_i^t - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^t}{1+n} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Элементы симметрической матрицы F^t , соответствующей квадратичной форме $\sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} (x_i^t)^2 - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} \left(\frac{(n-1)x_i^t - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^t}{1+n} \right)^2$, имеют вид:

$$f_{ii}^t = \beta_i^{t+1} - \frac{(n-1)^2 \beta_i^{t+1}}{(1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N \setminus \{i\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2} = \frac{4n\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N \setminus \{i\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2},$$

$$f_{ij}^t = \frac{(n-1)(\beta_i^{t+1} + \beta_j^{t+1})}{(1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N \setminus \{i,j\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2} \quad (i, j \in N; i \neq j).$$

Если определители всех главных миноров матрицы F^t положительны, то квадратичная форма положительно определена и $\|B^t\| < 1$, а процессы 3 и 4 сходятся.

Для $n = 2$ матрица F^t имеет вид $F^t = \begin{pmatrix} \frac{8\beta_1^{t+1} - \beta_2^{t+1}}{9} & \frac{\beta_1^{t+1} + \beta_2^{t+1}}{9} \\ \frac{\beta_2^{t+1} + \beta_1^{t+1}}{9} & \frac{8\beta_2^{t+1} - \beta_1^{t+1}}{9} \end{pmatrix}$.

Эта матрица положительно определена, если $8\beta_1^{t+1} - \beta_2^{t+1} > 0$ и $\begin{vmatrix} 8\beta_1^{t+1} - \beta_2^{t+1} & \beta_1^{t+1} + \beta_2^{t+1} \\ \beta_2^{t+1} + \beta_1^{t+1} & 8\beta_2^{t+1} - \beta_1^{t+1} \end{vmatrix} = 9 \left[7\beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1} - (\beta_1^{t+1})^2 - (\beta_2^{t+1})^2 \right] > 0$. Пусть $\beta_1^{t+1} \neq 0$. Имеем общее решение двух этих неравенств в виде $\frac{\beta_2^{t+1}}{\beta_1^{t+1}} < \frac{7 + \sqrt{45}}{2} \approx 6,85$. Поскольку агенты однородные, то и $\frac{\beta_1^{t+1}}{\beta_2^{t+1}} < 6,85$. Таким образом, если $\frac{\beta_2^{t+1}}{\beta_1^{t+1}}$ и $\frac{\beta_1^{t+1}}{\beta_2^{t+1}}$ меньше, чем 6,85, то процессы 3 и 4 сходятся к равновесию. Это согласуется с результатами публикации [14], но в данном случае применяемый здесь метод: 1) с одной стороны, дает меньшую общность, поскольку по [14] процессы сходятся в диапазоне $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in (0; \frac{2}{3})$, т.е. $\forall \beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in (0; 1)$; 2) но, с другой стороны, дает новые точки сходимости $\gamma_1^{t+1} = \frac{2}{3} \vee \gamma_2^{t+1} = \frac{2}{3}$, т.е. когда $\beta_1^{t+1} = 1 \vee \beta_2^{t+1} = 1$.

Особенности условий сходимости процессов при использовании норм, по мнению авторов, обусловлены тем обстоятельством, что если одни агенты выбирают параметры λ (соответственно и β) равными или близкими к нулю, а другие — ближе к верхней границе диапазона, то заведомо $\|B^t\| > 1$. Поясним на следующем примере. Пусть $n = 2$ и $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Тогда, полагая $x_1^t = 1, x_2^t = 0$, по (16) имеем

$$\|B^t\| = \max_{\|x^t\|=1} \sqrt{(x_1^t)^2 + [x_2^t - \lambda_2(x_2^t + x_1^t + x_2^t)]^2} \geq \sqrt{1 + (\lambda_2)^2} > 1.$$

В этом, видимо, проявляется определенная ограниченность методов, основанных на нормах.

5.2. Олигополия с агентами, рефлексирующими по Штакельбергу

Сначала рассмотрим процесс 1, полагая $[\bar{\lambda}_i^{t+1}; \bar{\lambda}_i^{t+1}] = [0; \frac{n}{1+n}]$ для $i \in N_s$ и $[\bar{\lambda}_i^{t+1}; \bar{\lambda}_i^{t+1}] = [0; \frac{1}{2}]$ для $i \in N_c$, а также $\alpha_i^{t+1} = 0, \beta_i^{t+1} = 1$ ($\forall i \in N; t = 0, 1, 2, \dots$), что по формуле замены переменных (12) соответствует выбору агентами значений параметров $\gamma_i = 1$ ($\forall i \in N$), т.е. их наилучшим ответам на действия конкурентов.

Тогда неравенство (25) принимает вид

$$f(\bar{\lambda}^{t+1}) \leq 1 - \left[\sum_{i \in N} (x_i^t)^2 - \left(\frac{n}{1+n} \right)^2 \sum_{i \in N_s} \left(\sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} x_j^t \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{i \in N_c} \left(\sum_{j \in N_c \setminus \{i\}} x_j^t \right)^2 \right].$$

Для квадратичной формы, представленной выражением в квадратных скобках, соответствующая симметрическая матрица представляет собой клеточную матрицу размера $n \times n$, вдоль диагонали которой идут квадратная подматрица F_s размера $n_s \times n_s$ и квадратная подматрица F_c размера $n_c \times n_c$. При этом

$$F_s = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n^2(n_s-1)}{(1+n)^2} & -\frac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & \dots & -\frac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} \\ -\frac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & 1 - \frac{n^2(n_s-1)}{(1+n)^2} & \dots & -\frac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & -\frac{n^2(n_s-2)}{(1+n)^2} & \dots & 1 - \frac{n^2(n_s-1)}{(1+n)^2} \end{pmatrix},$$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_c-1}{4} & -\frac{n_c-2}{4} & \dots & -\frac{n_c-2}{4} \\ -\frac{n_c-2}{4} & 1 - \frac{n_c-1}{4} & \dots & -\frac{n_c-2}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{n_c-2}{4} & -\frac{n_c-2}{4} & \dots & 1 - \frac{n_c-1}{4} \end{pmatrix}.$$

Клеточная матрица будет положительно определена в том и только в том случае, если положительно определены обе ее подматрицы F_s и F_c .

Для рынка Курно ранее было показано, что подматрица F_c положительно определена только при $n_c \leq 2$. Поэтому рассмотрим соответствующие последнему неравенству случаи:

- 1) $n_c = 0$. Тогда $n_s = n$ и для подматрицы F_s определитель первого главного минора положителен только при $n_s = 1$ или $n_s = 2$. При $n_s = 2$ положителен также определитель второго главного минора;
- 2) $n_c = 1$. Тогда $n_s = n - 1$ и для подматрицы F_s определитель первого главного минора положителен только, если $n_s = 1$ или $n_s = 2$. При $n_s = 2$ положителен также и определитель второго главного минора;
- 3) $n_c = 2$. Если $n_s = 1$ ($n = 3$), то для подматрицы F_s определитель первого главного минора положителен. Если $n_s = 2$ ($n = 4$), то для подматрицы F_s положительны определители первого и второго главных миноров. Если $n_s > 2$ ($n > 4$), то для подматрицы F_s определитель первого главного минора отрицателен.

Обобщим полученные результаты в утверждении 4.

Утверждение 4. В олигополии (5)–(9) с одним или несколькими лидерами по Штакельбергу для процессов 1 и 2 неравенство $\|B^t\| < 1$ имеет место только на рынке, на котором не более четырех агентов и 1) $n_s, n_c \leq 2$; 2) если $n_s = 1$, то $n = 2$ или $n = 3$; 3) если $n_s = 2$, то $n = 3$ или $n = 4$. В этих случаях процесс 1 и процесс 2 сходятся к равновесию.

Для процесса 2 утверждение 4 следует из утверждений 1 и 2.

Полученные для процессов 1 и 2 выводы согласуются с известными результатами (см., например, [15, 20, 21]).

Перейдем к процессу 3.

Здесь, как и для рынка Курно, положим $[\bar{\lambda}_i^{t+1}; \bar{\lambda}_i^{t+1}] = [0; \frac{1}{1+n}]$. Это по (12) соответствует тому, что $\gamma_i^{t+1} \in [0; \frac{1}{n}]$, если $i \in N_s$, и $\gamma_i^{t+1} \in [0; \frac{2}{1+n}]$, если $i \in N_c$.

Неравенство (25) принимает вид

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\beta_1^{t+1}}{1+n}, \dots, \frac{\beta_i^{t+1}}{1+n}, \dots, \frac{\beta_n^{t+1}}{1+n}\right) \leq \\
& \leq \sum_{i \in N} (1 - \beta_i^{t+1}) (x_i^t)^2 + \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \frac{1}{1+n} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \\
& + \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \frac{1}{1+n} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 = \\
& = 1 - \sum_{i \in N} \beta_i^{t+1} (x_i^t)^2 + \sum_{i \in N_s} \frac{\beta_i^{t+1}}{n^2 (1+n)^2} \left[(n^2 - 1) x_i^t - n \sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} x_j^t \right]^2 + \\
& + \sum_{i \in N_c} \frac{\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2} \left[(n-1) x_i^t - \sum_{j \in N_c \setminus \{i\}} x_j^t \right]^2.
\end{aligned}$$

Элементы симметрической подматрицы F_s^t , соответствующей квадратичной форме $\sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} (x_i^t)^2 - \sum_{i \in N_s} \frac{\beta_i^{t+1}}{n^2(1+n)^2} \left[(n^2 - 1) x_i^t - n \sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} x_j^t \right]^2$ по агентам с реакцией по Штакельбергу, имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{ii}^t &= \beta_i^{t+1} - \frac{(n^2 - 1)^2 \beta_i^{t+1}}{n^2 (1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N_s \setminus \{i\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2} = \frac{(2n-1) \beta_i^{t+1}}{n^2} - \frac{\sum_{k \in N_s \setminus \{i\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2}, \\ f_{ij}^t &= \frac{n(n^2 - 1) (\beta_i^{t+1} + \beta_j^{t+1})}{n^2 (1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N_s \setminus \{i,j\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2} = \\ &= \frac{(n-1) (\beta_i^{t+1} + \beta_j^{t+1})}{n(1+n)} - \frac{\sum_{k \in N_s \setminus \{i,j\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2} \quad (i, j \in N_s; i \neq j). \end{aligned}$$

Элементы симметрической подматрицы F_c^t , соответствующей квадратичной форме $\sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} (x_i^t)^2 - \sum_{i \in N_c} \frac{\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2} \left[(n-1)x_i^t - \sum_{j \in N_c \setminus \{i\}} x_j^t \right]^2$, имеют вид

$$\begin{aligned} f_{ii}^t &= \frac{4n\beta_i^{t+1}}{(1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N_c \setminus \{i\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2}, \\ f_{ij}^t &= \frac{(n-1) (\beta_i^{t+1} + \beta_j^{t+1})}{(1+n)^2} - \frac{\sum_{k \in N_c \setminus \{i,j\}} \beta_k^{t+1}}{(1+n)^2} \quad (i, j \in N_c; i \neq j). \end{aligned}$$

Если определители всех главных миноров подматриц F_s^t и F_c^t положительны, то процессы 3 и 4 сходятся.

Для $n = 4$ и $n_s = 2$ ($i = 1, 2$), $n_c = 2$ ($i = 3, 4$) выпишем подматрицы F_s^t и F_c^t

$$\begin{aligned} F_s^t &= \begin{pmatrix} \frac{7\beta_1^{t+1}}{16} - \frac{\beta_2^{t+1}}{25} & \frac{3(\beta_1^{t+1} + \beta_2^{t+1})}{20} \\ \frac{3(\beta_2^{t+1} + \beta_1^{t+1})}{20} & \frac{7\beta_2^{t+1}}{16} - \frac{\beta_1^{t+1}}{25} \end{pmatrix}, \\ F_c^t &= \begin{pmatrix} \frac{16\beta_3^{t+1}}{25} - \frac{\beta_4^{t+1}}{25} & \frac{3(\beta_3^{t+1} + \beta_4^{t+1})}{25} \\ \frac{3(\beta_4^{t+1} + \beta_3^{t+1})}{25} & \frac{16\beta_4^{t+1}}{25} - \frac{\beta_3^{t+1}}{25} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $\beta_i^{t+1} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Определители главных миноров подматрицы F_s^t положительны, если $\frac{\beta_2^{t+1}}{\beta_1^{t+1}} < 3,4$. Определители главных миноров подматрицы F_c^t положительны, если $\frac{\beta_4^{t+1}}{\beta_3^{t+1}} < 9,45$. Такие же неравенства должны

выполняться для обратных отношений. Запишем условия сходимости процессов 3 и 4, переходя к параметрам γ

$$(26) \quad \frac{\gamma_1^{t+1}}{\gamma_2^{t+1}}, \frac{\gamma_2^{t+1}}{\gamma_1^{t+1}} < 3,4; \quad \frac{\gamma_3^{t+1}}{\gamma_4^{t+1}}, \frac{\gamma_4^{t+1}}{\gamma_3^{t+1}} < 9,45.$$

Таким образом, на рынке олигополии с четырьмя агентами, из которых первые два действуют по Штакельбергу, другие два — по Курно, процессы 3 и 4 с диапазонами шагов $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in (0; 0,25]$ и $\gamma_3^{t+1}, \gamma_4^{t+1} \in (0; 0,4]$ сходятся к равновесию при любых начальных выпусках агентов $\{q_i^0, i \in N\}$, если начиная с некоторого момента t_0 выбираемые агентами величины шагов удовлетворяют условиям (26).

Если один из агентов, действующих по Штакельбергу, выбирает верхнюю границу своего диапазона (равную 0,25), то (26) будет выполнено, когда другой выбирает шаг больше 0,074. Если один из агентов, действующих по Курно, выбирает верхнюю границу диапазона (равную 0,4), то (26) будет выполнено, когда другой выбирает шаг больше 0,043.

Аналогичные условия сходимости процессов можно получить для рынков с произвольным числом агентов и лидеров по Штакельбергу, а также для произвольных диапазонов выбора агентами величин шагов.

Так, для того же примера рынка, но с максимально возможными для агентов диапазонами шагов $\gamma_i^{t+1} \in (0; 1]$ ($i = 1, 2, 3, 4$), условия типа (26) имеют вид $\frac{\gamma_1^{t+1}}{\gamma_2^{t+1}}, \frac{\gamma_2^{t+1}}{\gamma_1^{t+1}} < 1,56$, $\frac{\gamma_3^{t+1}}{\gamma_4^{t+1}}, \frac{\gamma_4^{t+1}}{\gamma_3^{t+1}} < 4$. В частности, если $\gamma_1^{t+1} = 1$, то $\gamma_2^{t+1} > 0,64$, если $\gamma_3^{t+1} = 1$, то $\gamma_4^{t+1} > 0,25$.

6. Заключение

Введение в модели динамических систем предположений об информированности взаимосвязанных агентов, реальных экономических ограничений и условий приводит к повышению адекватности, но и к усложнению моделей. С усложнением моделей более проблематичным становится аналитическое исследование. Для моделей рефлексивного коллективного поведения рассматривается один из возможных подходов к исследованию условий их сходимости к равновесию, основанный на использовании норм матриц перехода от t -го к $(t + 1)$ -му моменту времени в процессах итерационного решения систем линейных алгебраических уравнений, а также на обобщении аналитических решений. Получены важные свойства норм. Проведены доказательства утверждений, позволяющих перенести результаты о сходимости для простых динамик на более сложные модели коллективного поведения. Полученные результаты проиллюстрированы для рефлексивных моделей олигополии с линейными функциями затрат агентов и спроса с реакцией агентов по Курно и Штакельбергу на действия окружения. Представлены новые результаты о сходимости процессов коллективного поведения в олигополии с произвольным числом лидеров по Штакельбергу.

Доказательство утверждения 1. Доказательство проведем от противного. Пусть $\tilde{x}^t \in \text{Arg max}_{\|x^t\|=1} \|\tilde{B}^t(\lambda^{t+1})x^t\|$ для некоторого произвольного набора параметров $\lambda_i^{t+1} \in [0; \frac{1}{2}]$, $i \in N_c$; $\lambda_i^{t+1} \in [0; \frac{n}{1+n}]$, $i \in N_s$. Допустим, что $\|\tilde{B}^t(\lambda^{t+1})\| > \|B^t(\lambda^{t+1})\|$, т.е.

$$\sqrt{\sum_{i \in N_s \setminus N_s^t} \left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{\tilde{x}_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} \tilde{x}_j^t \right) \right]^2} + \sum_{i \in N_c \setminus N_c^t} \left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\tilde{x}_i^t + \sum_{j \in N_c} \tilde{x}_j^t \right) \right]^2 > \|B^t(\lambda^{t+1})\|.$$

Но тогда

$$\sqrt{\sum_{i \in N_s \setminus N_s^t} \left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{\tilde{x}_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} \tilde{x}_j^t \right) \right]^2} + \sum_{i \in N_s^t} \left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\frac{\tilde{x}_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} \tilde{x}_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c \setminus N_c^t} \left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\tilde{x}_i^t + \sum_{j \in N_c} \tilde{x}_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c^t} \left[\tilde{x}_i^t - \lambda_i^{t+1} \left(\tilde{x}_i^t + \sum_{j \in N_c} \tilde{x}_j^t \right) \right]^2 > \|B^t(\lambda^{t+1})\|,$$

означающее $\|B^t(\lambda^{t+1})\tilde{x}^t\| > \|B^t(\lambda^{t+1})\|$ при $\|\tilde{x}^t\| = 1$. Что противоречит определению нормы $\|B^t\|$.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 3. Сначала докажем положение п. а.

Пусть i — произвольный агент и, для определенности, этот агент действует по Курно. Для агента с реакцией по Штакельбергу доказательство аналогично. По (23) имеем

$$\begin{aligned} & f \left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \alpha_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) = \\ & = \sum_{k \in N_s} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(\frac{x_k^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{k \in N_c \setminus \{i\}} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(x_k^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \\ & \quad + \left[x_i^t - \left(\alpha_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1} \right) \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 = \\ & = \sum_{k \in N_s} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(\frac{x_k^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{k \in N_c \setminus \{i\}} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(x_k^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\alpha_i^{t+1} \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) + \beta_i^{t+1} \left(x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) \right]^2 = \\
& = \alpha_i^{t+1} \left\{ \sum_{k \in N_s} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(\frac{x_k^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \right. \\
& + \sum_{k \in N_c \setminus \{i\}} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(x_k^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \left. \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 \right\} + \\
& + \beta_i^{t+1} \left\{ \sum_{k \in N_s} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(\frac{x_k^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \right. \\
& + \sum_{k \in N_c \setminus \{i\}} \left[x_k^t - \lambda_k^{t+1} \left(x_k^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \left. \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 \right\} - \\
& - \alpha_i^{t+1} \beta_i^{t+1} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 - \right. \\
& \left. - 2 \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \cdot \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь использовано равенство $\alpha_i^{t+1} \beta_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} - (\alpha_i^{t+1})^2 = \beta_i^{t+1} - (\beta_i^{t+1})^2$. Поскольку в последних фигурных скобках выражение представляет собой развернутый квадрат разности двух чисел, получаем требуемое неравенство

$$\begin{aligned}
f \left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \alpha_i^{t+1} \bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \tilde{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) & \leq \\
& \leq \alpha_i^{t+1} f \left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \bar{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) + \\
& + \beta_i^{t+1} f \left(\lambda_1^{t+1}, \dots, \lambda_{i-1}^{t+1}, \tilde{\lambda}_i^{t+1}, \lambda_{i+1}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right).
\end{aligned}$$

Положение п. а доказано.

Справедливость положения п. б следует из равенства

$$\begin{aligned}
& f \left(\eta \bar{\lambda}^{t+1} + \mu \tilde{\lambda}^{t+1} \right) = \\
& = f \left(\eta \bar{\lambda}_1^{t+1} + \mu \tilde{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \eta \bar{\lambda}_i^{t+1} + \mu \tilde{\lambda}_i^{t+1}, \dots, \eta \bar{\lambda}_n^{t+1} + \mu \tilde{\lambda}_n^{t+1} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in N_s} \left[\eta \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right) + \mu \left(x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right) \right]^2 + \\
&+ \sum_{i \in N_c} \left[\eta \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) + \mu \left(x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) \right]^2 = \\
&= \eta \left\{ \sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 \right\} + \\
&+ \mu \left\{ \sum_{i \in N_s} \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 \right\} - \\
&- \eta \mu \sum_{i \in N_s} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] \right\}^2 - \\
&- \eta \mu \sum_{i \in N_c} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \right\}^2 = \\
&\quad = \eta f(\bar{\lambda}^{t+1}) + \mu f(\tilde{\lambda}^{t+1}) - \\
&- \eta \mu \sum_{i \in N_s} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] \right\}^2 - \\
&- \eta \mu \sum_{i \in N_c} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \tilde{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \right\}^2 .
\end{aligned}$$

Здесь $\eta, \mu \in [0; 1]$ и $\eta + \mu = 1$.

Перейдем к доказательству положения п. в.

Доказательство проведем, основываясь на методе математической индукции.

По доказанному положению п. а для одного (первого) агента имеем

$$\begin{aligned}
&f \left(\alpha_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \tilde{\lambda}_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) \leq \\
&\leq \alpha_1^{t+1} f \left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) + \beta_1^{t+1} f \left(\tilde{\lambda}_1^{t+1}, \lambda_2^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) .
\end{aligned}$$

Для двух (первых) агентов имеем

$$f \left(\alpha_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \tilde{\lambda}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \bar{\lambda}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1} \tilde{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1} \right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha_1^{t+1} f\left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \bar{\lambda}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1} \bar{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \\
&\quad + \beta_1^{t+1} f\left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \bar{\lambda}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1} \bar{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \leq \\
&\leq \alpha_1^{t+1} \left[\alpha_2^{t+1} f\left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \bar{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \beta_2^{t+1} f\left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \bar{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \right] + \\
&\quad + \beta_1^{t+1} \left[\alpha_2^{t+1} f\left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \bar{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \beta_2^{t+1} f\left(\bar{\lambda}_1^{t+1}, \bar{\lambda}_2^{t+1}, \lambda_3^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \right].
\end{aligned}$$

Это подтверждает справедливость утверждения 3 для двух агентов. Пусть (24) имеет место для k (первых) агентов. Тогда

$$\begin{aligned}
&f\left(\alpha_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \alpha_k^{t+1} \bar{\lambda}_k^{t+1} + \beta_k^{t+1} \bar{\lambda}_k^{t+1}, \right. \\
&\quad \left. \alpha_{k+1}^{t+1} \bar{\lambda}_{k+1}^{t+1} + \beta_{k+1}^{t+1} \bar{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \leq \\
&\leq \alpha_{k+1}^{t+1} f\left(\alpha_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \alpha_k^{t+1} \bar{\lambda}_k^{t+1} + \beta_k^{t+1} \bar{\lambda}_k^{t+1}, \bar{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) + \\
&\quad + \beta_{k+1}^{t+1} f\left(\alpha_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \bar{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \alpha_k^{t+1} \bar{\lambda}_k^{t+1} + \beta_k^{t+1} \bar{\lambda}_k^{t+1}, \bar{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \leq \\
&\leq \alpha_{k+1}^{t+1} \left[\sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_k \in \{\alpha_k^{t+1}, \beta_k^{t+1}\}} y_1 \dots y_k \times \right. \\
&\quad \left. \times f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_k^{t+1}, \bar{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \right] + \\
&\quad + \beta_{k+1}^{t+1} \left[\sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_k \in \{\alpha_k^{t+1}, \beta_k^{t+1}\}} y_1 \dots y_k \times \right. \\
&\quad \left. \times f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_k^{t+1}, \bar{\lambda}_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right) \right] = \\
&= \sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_{k+1} \in \{\alpha_{k+1}^{t+1}, \beta_{k+1}^{t+1}\}} y_1 \dots y_{k+1} \cdot f\left(z_1^{t+1}, \dots, z_{k+1}^{t+1}, \lambda_{k+2}^{t+1}, \dots, \lambda_n^{t+1}\right).
\end{aligned}$$

Показано, что (24) имеет место для первых $(k + 1)$ агентов. Проведенные выкладки справедливы для любых, не только первых агентов.

Положение п. в доказано.

Положение п. г следует из (24) и того, что

$$\sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_i \in \{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\}} \dots \sum_{y_n \in \{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\}} y_1 \dots y_i \dots y_n = 1.$$

Докажем положение п. д. Имеем равенство

$$\begin{aligned} & f\left(\alpha_1^{t+1}\bar{\lambda}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1}\bar{\lambda}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1}\bar{\lambda}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1}\bar{\lambda}_i^{t+1}, \dots, \alpha_n^{t+1}\bar{\lambda}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1}\bar{\lambda}_n^{t+1}\right) = \\ & = \sum_{i \in N_s} \left[\alpha_i^{t+1} \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right) + \beta_i^{t+1} \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right) \right]^2 + \\ & + \sum_{i \in N_c} \left[\alpha_i^{t+1} \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) + \beta_i^{t+1} \left(x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right) \right]^2 = \\ & = \sum_{i \in N_s} \alpha_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \alpha_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 + \\ & + \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right]^2 - \\ & - \sum_{i \in N_s} \alpha_i^{t+1} \beta_i^{t+1} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(\frac{x_i^t}{n} + \sum_{j \in N_s} x_j^t \right) \right] \right\}^2 - \\ & - \sum_{i \in N_c} \alpha_i^{t+1} \beta_i^{t+1} \left\{ \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] - \left[x_i^t - \bar{\lambda}_i^{t+1} \left(x_i^t + \sum_{j \in N_c} x_j^t \right) \right] \right\}^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано, что $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$ и $\alpha_i^{t+1}\beta_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} - (\alpha_i^{t+1})^2 = \beta_i^{t+1} - (\beta_i^{t+1})^2$.

Из полученного равенства следует положение п. д. Положение п. д может быть также получено из (24). Утверждение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
2. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in Mathematical Models of Decision-Making // Int. J. Parallel Emerg. Distrib. Syst. 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.

3. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
4. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1 st Edition. Translation into English, Basin, Urch&Hill. Springer, 2011. (Original 1934).
5. The Handbook of Experimental Economics / Ed. by Kagel J. and Roth A. Princeton: Princeton University Press, 1995.
6. *Wright J., Leyton-Brown K.* Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games // Proc. Conf. Associat. Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10), 2010. P. 461–473.
7. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1. С. 11–20.
8. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // АиТ. 2017. № 11. С. 105–121.
Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.
9. *Онойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
10. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.
11. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the Nash-Optimal Strategies in the Meta-Game // Studies in Syst., Decision and Control. 2018. V. 100. P. 95–100.
12. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.
Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.
13. *Дюсуше О.М.* Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Эконом. журн. ВШЭ. 2006. № 1. С. 3–32.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
16. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
17. *Белицкий Г.Р., Любич Ю.И.* Нормы матриц и их приложения. Киев: Наукова думка, 1984.
18. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Appl. Math. Comput. 2019. V. 362. 124535.
19. *Elsadany A.A.* Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Appl. Math. Comput. 2017. V. 294. P. 253–263.

20. *Askar S., Simos T.* Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers // *Appl. Math. Comput.* 2018. V. 328. P. 301–311.
21. *Wu R., Van Gorder R.A.* Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // *Appl. Math. Comput.* 2018. V. 320. P. 240–250.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 23.07.2020

После доработки 23.11.2021

Принята к публикации 24.12.2021

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С.П. Королева)

РЕФЛЕКСИВНЫЙ АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ В ИГРЕ ТРИПОЛИИ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ ИЗДЕРЖЕК АГЕНТОВ

Рассматривается проблема определения информационных равновесий на рынке триполии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения всех агентов рынка в случае совпадения рангов рефлексии при линейных функциях спроса и издержек агентов. Сформированы модели рефлексивных игр, выведены формулы расчета информационных равновесий, исследованы предположительные вариации. Описание полной группы рефлексивных представлений трех агентов дало возможность выделить рефлексивные коалиции, т.е. группы ментально однотипных агентов, и показать, что такие коалиции выгодны, поскольку самые высокие выигрыши получают агенты, выдвигающие одинаковые представления о стратегиях окружения. Доказаны свойства предположительных вариаций (отрицательность и ограниченность суммы), присущие любой агрегативной игре, в которой функция полезности есть комбинация линейных функций цены и затрат.

Ключевые слова: олигополия, лидер по Штакельбергу, рефлексивная игра, равновесие по Нэшу, телекоммуникационный рынок.

DOI: 10.31857/S0005231022030084

1. Введение

В игре олигополии выигрыш агента зависит от стратегий других агентов, т.е. окружения; под окружением агента понимается совокупность остальных агентов рынка (игроков). Решение этой игры в виде равновесия Нэша [1] базируется на выдвижении гипотез о поведении окружения [2, 3], т.е. его стратегиях, которые формализуются в виде предположительных вариаций, характеризующих предполагаемое агентом ответное изменение объема выпуска контрагента, оптимизирующее критерий последнего при выбранном действии первого. Наряду с этим используется рефлексивный анализ [4], при котором исследуется многообразие представлений агента 1) о стратегиях окружения, 2) о представлениях окружения о стратегии агента; 3) о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. В этом ряду номер представления называется рангом [5].

Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Поэтому решением рефлексивной игры является информационное равновесие [6].

Рефлексия в играх олигополистов относительно мало исследована. Моделирование поведения агентов олигополии в модели рынка с постоянной ценой и линейными функциями издержек доказало устойчивость симметричного распределения рынка [7]. Другие компьютерные эксперименты [8–10] показали возможность появления лидеров по Штакельбергу, но наиболее распространенным результатом игр были сговоры.

Моделирование рефлексивных игр олигополистов исследовалось в постановке Курно–Штакельберга для первых двух рангов стратегической рефлексии [11]. Информационные равновесия анализировались при информационной рефлексии о значениях экзогенного параметра функции полезности [12], а также о параметрах функций издержек окружения [13]. Рассматривались [14] динамические рефлексивные игры в модели Штакельберга и анализировалось временное влияние информационного преимущества на эффективность агентов. Оценивалась эффективность лидерства по Штакельбергу по сравнению с представлением агента о рынке как о совершенной конкуренции [15]. Исследовалось [16] наличие лидеров и последователей в линейной модели олигополии, гетерогенной по виду функций полезности агентов (прибыль, выручка, рентабельность). В модели олигополии с нелинейными функциями издержек агентов исследовалось [17] взаимодействие ведомых агентов и лидеров по Штакельбергу, имеющих различные ранги рефлексии. В модели дуополии с линейными функциями спроса и издержек при одинаковых предельных и постоянных издержках агентов найдены [18] информационные равновесия при наличии лидеров по Штакельбергу произвольного уровня в случае совпадающих рангов рефлексии. В линейной модели олигополии исследовался динамический процесс формирования равновесия Курно [19] и Штакельберга [20] и доказаны условия сходимости процесса к аттрактору. Рефлексивный анализ также использовался в моделях формирования команд [21].

Анализ трехагентной олигополии актуален для телекоммуникационных рынков, поскольку зачастую на таких рынках количество компаний мобильной связи равно трем, что подтверждают усредненные данные по 177 операторам мобильной связи из 45 стран мира [22]. В большинстве развивающихся стран на этих рынках менее четырех поставщиков услуг, около трети стран имеют менее трех поставщиков и 16% являются монопольными; только 18% стран имеют 5 или более операторов связи [23].

В данной статье исследуются равновесия на рынке триполии при различных предельных и постоянных издержках агентов в случае, если все агенты могут рефлексировать относительно стратегий окружения, имея нетождественные представления.

Оригинальность исследований в данной работе выражается в следующем. Во-первых, в отличие от ранее изученных моделей рефлексивных игр агентов олигополии, в которых рассматривалась рефлексия двух агентов [18] и рефлексия в случае совпадения представлений трех агентов [17], здесь исследуются ситуации с различными представлениями каждого из агентов. В результате описана полная группа рефлексивных представлений, что дало возможность выделить так называемые рефлексивные коалиции, т.е. группы ментально однотипных агентов. Во-вторых, если в модели с нелинейными функциями издержек [17] были найдены информационные равновесия по Нэшу только в случае первых двух рангов рефлексии, то здесь, на основе модели с линейными издержками, выведено аналитическое решение для произвольного ранга рефлексии. В-третьих, аналитическое решение позволило исследовать свойства игры с рефлексивными коалициями разных типов, для которых установлены пределы функции распределения выигрыша. В-четвертых, установлены свойства предположительных вариаций (отрицательность и ограниченность суммы), присущие любой агрегативной игре, в которой функция полезности есть комбинация линейных функций цены и затрат.

2. Методология

Рассматривается модель рынка олигополии, в которой задана обратная функция спроса в виде линейной функции общего объема предложения, функции издержек агентов линейные с различными для всех агентов коэффициентами предельных и постоянных издержек.

Агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$(1) \quad \Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \dots, n\},$$

при линейной обратной функции спроса

$$(2) \quad P(Q) = a - bQ, \quad a, b > 0,$$

где совокупный выпуск вычисляется по формуле

$$(3) \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

и линейных функциях издержек

$$(4) \quad C_i(Q_i) = d_i + c_i Q_i, \quad c_i, d_i > 0, \quad c_i < a, \quad i \in N,$$

где Q_i, Π_i – выпуск и прибыль i -го агента; N – множество агентов рынка; n – количество агентов; P, Q – равновесная цена и суммарный объем рынка; c_i, d_i – коэффициенты функций издержек агентов, d_i интерпретируется как постоянные издержки, c_i – предельные издержки; a, b – коэффициенты обратной функции рыночного спроса.

Модели выбора оптимальных (обозначены символом «*») действий агентов с учетом условий (1)–(4) запишем в виде

$$(5) \quad Q_i^* = \arg \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ) Q_i - d_i - c_i Q_i \right\}, \quad i \in N.$$

Равновесие Нэша в системе (5) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при заданном векторе предположительных вариаций):

$$(6) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $\rho_{ij} = Q'_j Q_i$ – предположительная вариация в уравнении реакции i -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j -го агента в ответ на единичный прирост выпуска i -го агента.

Предположительные вариации зависят от представляемой иерархии агентов, которая имеет вид множества

$$(7) \quad M = \{M_0, M_1, \dots, M_l\},$$

где l – количество уровней лидерства агентов; M_m ($m = 0, \dots, l$) – множества агентов; M_0 – множество ведомых агентов; M_m ($m = 1, \dots, l$) – множество лидеров m -го уровня. Множество (7) есть разбиение множества агентов, удовлетворяющее ограничениям

$$M_m \cap M_j = \emptyset, \quad m \neq j, \quad M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_l = N = \{1, \dots, n\}.$$

Возможны следующие модели поведения агентов, соответствующие различным уровням лидерства: ведомый агент (последователь), выбирающий стратегию независимо от стратегий окружения; лидер по Штакельбергу первого уровня, выбирающий стратегию исходя из предположения о том, что окружение реагирует как ведомый агент; лидер по Штакельбергу второго уровня, выбирающий стратегию исходя из предположения о том, что окружение реагирует как лидер по Штакельбергу первого уровня, и т.д.

С учетом терминологии [17] F -стратегией (стратегией ведомого агента) считается выбор агентом действия по (5) без учета действий окружения согласно гипотезе Курно (Cournot, 1960), в результате агент имеет уровень M_0 ; L -стратегия, т.е. стратегия лидера по Штакельбергу [3], – это выбор действия по модели (5) в предположении, что окружение придерживается F -стратегии, в результате агент имеет уровень M_1 .

Формально уровни лидерства определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0 -му агенту, имеет место, если в η_0 -м уравнении системы (6) полагается $\rho_{\eta_0 j}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus \eta_0$, где верхний индекс предположительной вариации обозначает уровень лидерства m . Первый уровень лидерства η_1 -го агента возникает, если в η_1 -м уравнении системы (6) вариации $\rho_{\eta_1 j}^1$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных

$(N - 1)$ уравнений (6), в которых полагается $\rho_{ij}^0 = 0 \forall j \in N \setminus i$. Произвольный m -й уровень лидерства η_m -го агента возникает, если в η_m -м уравнении системы (6) вариации $\rho_{\eta_m, j}^m$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_m} остальных $(N - 1)$ уравнений (6), в которых полагается $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{m-1} \forall j \in N \setminus i$.

Отметим различие между терминами «ранг рефлексии» и «уровень лидерства по Штакельбергу». Понятие «уровень лидерства по Штакельбергу» является расширением пионерской идеи Г. Штакельберга [3], который описал модель поведения лидера в дуополии, базирующуюся на известной предположительной вариации последователя¹. По аналогии в триполии называем некоторого агента лидером второго уровня, если ему известно, что хотя бы один из остальных агентов имеет модель поведения лидера. Как видно из определения множества (7), термин «уровень лидерства» синонимичен конкретной модели поведения агентов, приводящей к информационному равновесию, определяемому из уравнений (6). Поэтому структура множества уровней лидерства непосредственно вытекает из информированности агентов о стратегическом поведении окружения. Следовательно, информированность является фундаментальной проблемой, без решения которой множество уровней лидерства не может быть определено.

С другой стороны, анализируется игра триполии в условиях априорной неинформированности агентов о стратегиях окружения путем описания представляемых каждым агентом стратегий (представлений), оптимальных по критерию (5). Таким образом, вводится согласно трактовке [5] множество всевозможных структур информированности агентов, которое состоит из их представлений F или L на определенной глубине рефлексии (т.е. на конкретном ранге). Поэтому ранг рефлексии агента наряду с его представлением характеризуют его информированность, которая, в свою очередь, обуславливает его уровень лидерства. Обобщенно, уровень лидерства m агента есть некоторая функция двух аргументов — представления (F или L) и ранга рефлексии r этого агента. Например, если агент i имеет представление об F -стратегии окружения на ранге рефлексии $r = 1$ («я думаю о нем»), то его уровень лидерства $m = 1$; если на том же ранге рефлексии агент i имеет представление об L -стратегии окружения, то его уровень лидерства $m = 2$; при $r = 2$ («я думаю, что он думает обо мне») уровни лидерства в этих случаях будут равны $m = 2$ и $m = 3$ соответственно, что строго будет показано ниже.

Следовательно, ранг рефлексии не зависит от оптимальности стратегии агента по критерию (5), а является характеристикой объектов его представления, т.е. фантомных агентов окружения, существующих во мнении данного агента. Обозначим представление i -го агента об агентах окружения ($-i$) символом $G_{i(-i)}$, а фантомных агентов пронумеруем в следующей последовательности: j_1 — агент j , представляемый i -м агентом (такое представление обозначим как G_{j_1}); i_2 — агент i , представляемый агентом j по мнению i -го

¹ Заметим, что Генрих фон Штакельберг описал взаимодействие последователя (follower) и доминирующего продавца (supplier dominates), а термин «лидер» укоренился позднее [24].

агента (представление обозначим как $G_{j_1 i_2}$); j_3 – агент j , представляемый i -м агентом в сознании j -го агента по мнению i -го агента (представление обозначим как $G_{j_1 i_2 j_3}$), и т.д. Тогда по аналогии с определением [5, раздел 2.1] дадим формальное определение ранга рефлексии: это длина (т.е. число r) последовательности фантомных агентов в следующем рефлексивном представлении:

$$G_{i(-i)}^r = \left\{ G_{j_1 i_2 j_3 \dots i_r} \quad \forall r = 2k \vee G_{j_1 i_2 j_3 \dots j_r} \quad \forall r = 2k + 1, \quad j_1, i_2, j_3, \dots, i_r, j_r \in N \right\}, \\ i \in N, \quad k \in \aleph.$$

Используется следующий подход к анализу рефлексивного поведения агентов.

На первом этапе исследуются представления агентов о стратегиях окружения на первом ранге рефлексии, т.е. представления типа «агент думает, что окружение следует F -стратегии или L -стратегии». Такие представления можно назвать элементарными, поскольку они ограничивают мышление окружения первым рангом рефлексии: окружение либо игнорирует действия агента (F -стратегия), либо само выбирает оптимум (L -стратегия), считая, что агент игнорирует окружение. Поэтому на данном этапе агент не может представить окружение с уровнем выше M_1 ; например, представление об окружении как о лидере типа M_2 означало бы, что окружение думает, что агент выбрал оптимум, т.е. окружение имеет второй ранг рефлексии.

На втором этапе такая совокупность представлений экстраполируется на произвольный ранг рефлексии, т.е. на каждом ранге рефлексии представления агента выглядят, как на первом, а их цикличность («я думаю о нем», «я думаю, что он думает обо мне» и т.д.) учитывается через ранг. В результате можно вычислить уровень лидерства в иерархии (7), который приобретает каждый агент.

Обозначим представляемые i -м агентом стратегии окружения (т.е. всех агентов, кроме i -го) символом $G_{i(-i)}^r$, где первый нижний индекс обозначает рефлексирующего агента, второй нижний индекс показывает агента окружения, а верхний индекс обозначает ранг рефлексии. В случае трех агентов (табл. 1) система представлений о стратегиях окружения может иметь три варианта: $G_{i(-i)}^r = \{F, F\}$, $G_{i(-i)}^r = \{L, L\}$, $G_{i(-i)}^r = \{F, L\}$.

Поскольку рассматривается ситуация с различными представлениями $G_{i(-i)}^r$ всех агентов, то представляемая иерархия (7) индивидуальна для каждого агента, т.е. в общем игровая обстановка выражается тремя множествами (7). Для их обобщенной записи введем функцию представлений на первом ранге рефлексии $G[\tau]$, зависящую от порядкового номера τ пары агентов, один из которых представляет стратегию другого; содержательно, для первого из данной пары агентов функция $G[\tau]$ равна его уровню лидерства m относительно второго агента в этой паре. Функция $G[\tau]$, как будет показано ниже, вычисляется на основе следующей функции представлений на r -м ранге рефлексии.

Таблица 1. Характеристика возможных сочетаний представлений

t	$G_{1(-1)}^r$	$G_{2(-2)}^r$	$G_{3(-3)}^r$	Описание случая
1	FF (LL)	FF (LL)	FF (LL)	Все $n = 3$ агентов представляют одинаковую стратегию окружения F (или L)
2	FF (LL)	FF (LL)	LL (FF)	Два агента (i_1 -й и i_2 -й) имеют одинаковые представления о стратегии окружения FF (или LL), а i_3 -й агент – также одинаковые, но противоположные первым двум агентам, представления LL (или FF)
3	FF (LL) (FF) (LL)	FF (LL) (FF) (LL)	FL (LF) (LF) (FL)	Два агента (i_1 -й и i_2 -й) имеют одинаковые представления о стратегии окружения FF (или LL), а i_3 -й агент – различные представления FL , LF о j_1 -м и j_2 -м агентах
4	FF (LL) (FF) (LL)	LL (FF) (LL) (FF)	FL (LF) (LF) (FL)	Два агента (i_1 -й и i_2 -й) имеют противоположные представления о стратегии окружения (об одном агенте FF , о другом LL), а i_3 -й агент – различные представления FL , LF
5	FF (LL) (FF) (LL)	FL (LF) (LF) (FL)	FL (LF) (LF) (FL)	Один агент (i_1 -й) имеет одинаковые представления о стратегии окружения FF (или LL), а два других агента (i_2 -е) – различные представления FL , LF
6	FL (LF)	FL (LF)	FL (LF)	Все $n = 3$ агентов имеют различные представления о стратегиях окружения FL , LF

Определение 1. Функция представлений агентов на r -м ранге рефлексии $g^r [\tau(i, j)]$ ставит в соответствие представление i -го агента о стратегии j -го агента порядковому номеру τ пары агентов $(i, j) \in N$

$$(8) \quad g^r [\tau(i, j)] = \begin{cases} 0, & \text{если } G_{ij}^r = F, \\ 1, & \text{если } G_{ij}^r = L, \end{cases} \quad \tau(i, j) \neq \hat{\tau}, \quad i, j \in N, \quad i \neq j,$$

где порядковый номер τ пары рефлексирующих агентов $(i, j) \in N$ равен

$$(9) \quad \tau(i, j) = j + n(i - 1),$$

случай $\hat{\tau} = \tau(i = j) = j(1 + n) - n$ соответствует саморефлексивным представлениям, исключенным из рассмотрения; $G_{i(-i)}^r$ – представление i -го агента о стратегии окружения; символ « $-i$ » обозначает окружение.

Номер $\tau(i, j)$ однозначно определяет пару $(i, j) \in N$, поскольку если $(k - 1)n < \tau(i, j) \leq kn$, то из (9) следует, что $i = k$, $j = \tau(i, j) - k$.

Например, на рис. 1 показаны виды функции (8), описывающие игровые случаи, в которых а) все агенты имеют L -представление о стратегиях окружения; б) все агенты имеют L -представление о стратегии третьего агента и F -представление о стратегии первого и второго агентов; в) все агенты имеют L -представление о стратегии первого агента и F -представление о стратегии второго и третьего агентов.

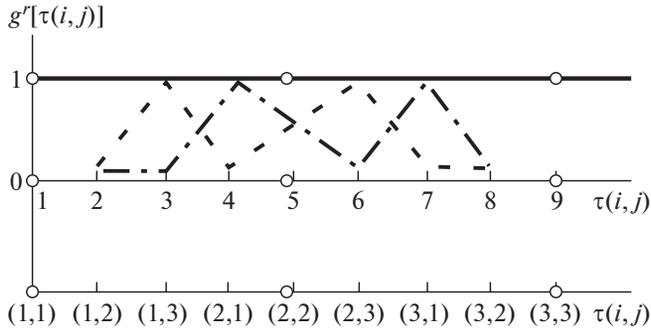


Рис. 1. Графическая интерпретация функции представлений агентов:

- а) — $g^r = 1 \forall i, j \in N$, б) — — — $g^r = \begin{cases} 1, & \tau = 3 + n(i-1), \\ 0, & \tau \neq 3 + n(i-1), \end{cases}$
 в) — · — $g^r = \begin{cases} 1, & \tau = 1 + n(i-1), \\ 0, & \tau \neq 1 + n(i-1). \end{cases}$

Как было показано [17], на основе анализа наилучших ответов множество возможных функций рефлексивных представлений агентов (8) может быть приведено к набору множеств уровней лидерства (7), формализованному в виде функции $G[\tau]$. Тем самым рефлексивная игра сводится к множеству игр с полной информированностью вида

$$(10) \quad \Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G[\tau] \rangle.$$

Поставим задачу нахождения всех информационных равновесий в игре (10) на произвольных, но совпадающих рангах рефлексии всех агентов.

3. Результаты

Для нахождения решения игры (10) в виде информационного равновесия необходимо определить функцию $G[\tau]$. Способ нахождения функции $G[\tau]$ по заданной функции (8) формулируется в виде следующего утверждения, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. Если представления агентов на r -м ранге рефлексии описываются функцией (8), то функция представлений агентов на первом ранге рефлексии вычисляется по формуле

$$(11) \quad G[\tau] = g^r[\tau(i, j)] + r, \quad i, j \in N.$$

Совокупность возможных сочетаний представлений (случаев), обозначенных символом « t », возникающих в рефлексивной игре трех агентов (см. табл. 1), опишем в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. В рефлексивной игре трех агентов система их представлений на r -м ранге рефлексии описывается функцией $g_t^r[\tau(i, j)]$, $i, j \in N$

одного из следующих видов

$$(12-1) \quad g_1^r[\tau] = 0 \vee 1, \quad i, j \in N, \quad i \neq j,$$

$$(12-2) \quad g_2^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j + n(\tilde{i} - 1), \tilde{i} = i_1, i_2\} \wedge \\ \wedge \{1 \vee 0, \tau = j + n(i_3 - 1), i_3 \in N \setminus \tilde{i}\},$$

$$(12-3) \quad g_3^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j + n(\tilde{i} - 1), \tilde{i} = i_1, i_2\} \wedge \\ \wedge \{0, \tau = j_1 + n(i_3 - 1) \wedge 1, \tau = j_2 + n(i_3 - 1), i_3 \in N \setminus \tilde{i}, j_1, j_2 \neq i_3\},$$

$$(12-4) \quad g_4^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j + n(i_1 - 1)\} \wedge \{1 \wedge 0, \tau = j + n(i_2 - 1)\} \wedge \\ \wedge \{(0 \vee 1, \tau = j_1 + n(i_3 - 1)) \vee (1 \vee 0, \tau = j_2 + n(i_3 - 1)), \\ i_3 \in N \setminus (j_1, j_2)\},$$

$$(12-5) \quad g_5^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j + n(i_1 - 1)\} \wedge \{(0 \vee 1, \tau = j_1 + n(\tilde{i} - 1)) \wedge \\ \wedge (1 \vee 0, \tau = j_2 + n(\tilde{i} - 1)), \tilde{i} \in N \setminus (j_1, j_2)\},$$

$$(12-6) \quad g_6^r[\tau] = \{0 \vee 1, \tau = j_1 + n(i - 1)\} \wedge \{1 \vee 0, \tau = j_2 + n(i - 1)\}, \\ i \in N \setminus (j_1, j_2).$$

Далее использовано обозначение: $\gamma_{\theta tr}$ – предположительная вариация окружения в уравнении реакции θ -го агента для t -го случая на r -м ранге рефлексии.

Утверждение 3. Информационное равновесие в игре трех рефлексизирующих агентов (10) для случаев (12) определяется по формулам

$$(13-1) \quad Q_\theta = \frac{\alpha_\theta \left(3 + 2 \sum_{j \in N \setminus \theta} \gamma_{jtr} + \prod_{j \in N \setminus \theta} \gamma_{jtr} \right) - \sum_{j \in N \setminus \theta} \alpha_j (1 + \gamma_{jtr})}{4 + 3 \sum_{j \in N} \gamma_{jtr} + 2 \sum_{\theta \in N} \prod_{j \in N \setminus \theta} \gamma_{jtr} + \prod_{j \in N} \gamma_{jtr}}, \quad \theta \in N,$$

где $\alpha_\theta = \frac{a-c_\theta}{b}$, $\theta \in N$, параметр $\gamma_{\theta tr}$ является элементом следующей матрицы:

$$(13-2) \quad (\gamma_{\theta tr}, \theta = 1, 2, 3, t = 1, \dots, 6) = \begin{pmatrix} \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \frac{\gamma_r^{01}}{2} \\ \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^\varphi & \gamma_r^{\bar{\varphi}} & \frac{\gamma_r^{01}}{2} & \frac{\gamma_r^{01}}{2} \\ \gamma_r^\varphi & \gamma_r^{\bar{\varphi}} & \frac{\gamma_r^{01}}{2} & \frac{\gamma_r^{01}}{2} & \frac{\gamma_r^{01}}{2} & \frac{\gamma_r^{01}}{2} \end{pmatrix}, \\ \varphi \in \mu = \{0, 1\}, \quad \bar{\varphi} \in \mu \setminus \varphi,$$

элементы которой вычисляются по формулам

$$(13-3) \quad \begin{aligned} \gamma_r^0 &= -\frac{1}{3 + 2\gamma_{r-1}^0}, \\ \gamma_0^0 &= 0, \\ \gamma_r^1 &= -\frac{1}{3 + 2\gamma_r^0}, \\ \gamma_r^{01} &= -\frac{2(1 + \gamma_r^0 + \gamma_{r-1}^0)}{4(1 + \gamma_{r-1}^0)(1 + \gamma_r^0)}, \end{aligned}$$

символом $\varphi = 0$ обозначено представление θ -го агента о L -стратегии окружения, символом $\varphi = 1$ — представление агента θ -го о F -стратегии окружения, символом μ — множество этих вариантов.

Утверждение 2 определяет следующий алгоритм расчета информационных равновесий для различных рефлексивных случаев и рангов рефлексии. Во-первых, для рассматриваемого случая t формируется вариант функции представления θ -го агента (12) либо для L -стратегии (т.е. рассматривается первый член $g_t^r[\tau] = 0$ дизъюнкции (12), следовательно, $\varphi = 0$), либо для F -стратегии (т.е. рассматривается второй член $g_t^r[\tau] = 1$ дизъюнкции (12), следовательно, $\varphi = 1$). Во-вторых, выбирается предположительная вариация θ -го агента $\gamma_{\theta tr}$, соответствующая θ -му элементу t -го столбца матрицы (13-2), и этот элемент вычисляется по формулам (13-3), где γ_r^0 соответствует $\varphi = 0$ и γ_r^1 соответствует $\varphi = 1$. В-третьих, θ -й компонент вектора информационного равновесия действий агентов вычисляется по формулам (13-1), т.е. определяются возможные состояния равновесия при произвольном ранге рефлексии всех агентов.

Далее, в общем случае линейной модели олигополии с произвольным числом агентов, исследуем предположительные вариации в уравнениях реакции (6). Введем следующие обозначения: для i -го агента множество агентов окружения обозначим через E ; количество агентов окружения обозначено через e , т.е. $e = n - 1$; сумма предположительных вариаций окружения i -го агента на r -м ранге обозначена через $S_i^r = \sum_{l \in N \setminus i} \rho_{il}^r$. В этом случае следующее утверждение описывает особенности предположительных вариаций.

Утверждение 4. В системе (6) для модели олигополии (5) с линейными функциями спроса и издержек в уравнении i -го агента при ранге r

а) предположительные вариации для l -го агента рассчитываются по формуле

$$(14-1) \quad \begin{aligned} \rho_{il}^r &= -\frac{\Delta_{il}^r}{\Delta_i^r}, \quad l \in E, \quad e = n - 1, \\ \text{если} \quad \sum_{j \in E} \frac{1}{z_j^r} &\neq 1 \quad \text{и} \quad z_j^r \neq 0 \quad \forall j \in E, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_i^r = \prod_{j=1 \setminus i}^e z_j^r + \sum_{\gamma=1 \setminus i}^e \prod_{j=1 \setminus (\gamma, i)}^e z_j^r,$$

$$\Delta_{il}^r = \prod_{j=1 \setminus (l, i)}^e z_j^r, \quad z_j^r = 1 + S_j^{r-1},$$

$$S_i^r = \sum_{l \in N \setminus i} \rho_{il}^r, \quad S_i^0 = 0;$$

б) сумма предположительных вариаций окружения рассчитывается по формуле

$$(14-2) \quad S_i^r = -\frac{1}{s_i^r + 1}, \quad s_i^r = \frac{1}{\sum_{j \in E} \frac{1}{z_j^r}}, \quad i \in N,$$

эта сумма отрицательна и ограничена по модулю:

$$(14-3) \quad S_i^r < 0, \quad |S_i^r| < 1 \quad \forall e \geq 1;$$

с) предположительная вариация l -го агента отрицательна:

$$(14-4) \quad \rho_{il}^r < 0, \quad l \in E.$$

Таким образом, сформулированы следующие особенности поведения агентов в модели линейной олигополии. Оптимальная реакция агента на предполагаемое увеличение действия окружения — это сокращение его собственного действия, т.е. предположительные вариации отрицательны. Такое поведение обусловлено убывающей кривой спроса на рынке олигополии. Следовательно, увеличение действий окружения побуждает агента к реакции, которая приводит к росту рыночной цены. В ответ на единичное приращение действия агента все агенты сокращают свои действия, но суммарно не более чем на единицу. Следовательно, сокращение действия каждого агента меньше единицы; кроме того, если количество агентов на рынке растет, то

Таблица 2. Коэффициенты функций издержек агентов и параметр $\Delta\alpha$

Коэффициент	Агент 1 (ПАО «МТС»)	Агент 2 (ПАО «Мегафон»)	Агент 3 (ПАО «Вымпелком»)
c , тыс. руб/ мин	0,0005	0,0003	0,0006
d , млрд. руб	20,42	86,11	49,61
α , млн. мин	1 496 536	1 496 716	1 496 470
$\Delta\alpha$, %	-0,003%	0,010%	-0,007%

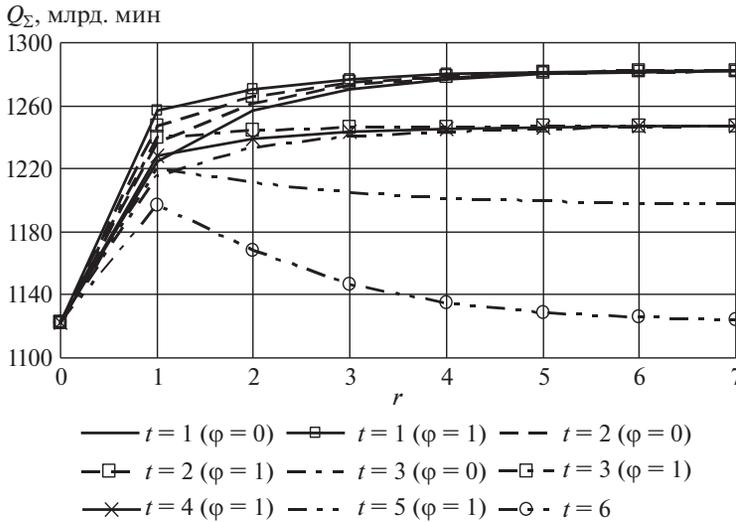


Рис. 2. Суммарное действие агентов (млрд. мин.) в зависимости от ранга рефлексии.

для каждого агента это сокращение уменьшается. Эти особенности описывают поведение агентов в любой агрегативной игре [25–27], если функции полезности игроков представляют собой комбинации линейных функций цены и затрат.

Рассмотрим модельный пример расчета информационных равновесий рынка олигополии на основе данных, полученных [28] для телекоммуникационного рынка России. Коэффициенты регрессионных моделей функции спроса (2) равны $a = 2,09$ руб, $b = 0,0000001$ руб/млн. мин; коэффициенты функций издержек агентов (4) приведены в табл. 2. В табл. 2 рассчитаны отклонения $\Delta\alpha$ значений параметра α от среднего значения, незначительность которых показывает, что для данного рынка различие в равновесных значениях выигрышей определяется, главным образом, значениями параметра $\gamma_{\theta tr}$. Поэтому при дальнейшем моделировании будем анализировать игровые случаи (табл. 1) для некоторого, соответствующего нумерации табл. 2, расположения агентов по выбранным ими стратегиям, игнорируя варианты с другими комбинациями агентов.

На рис. 2 показаны значения суммарного действия агентов при информационных равновесиях Q_Σ для различных игровых случаев ($t = 1, \dots, 6$) в зависимости от ранга рефлексии агентов, рассчитанные по формулам (13).

На рис. 3, 4 приведены значения показателя структуры равновесных действий в зависимости от ранга рефлексии агентов, рассчитанные по формуле $\psi_i = \frac{Q_i}{Q_\Sigma}$, $i \in N$; в дальнейшем будем считать, что ψ_i характеризует *относительный выигрыш* агента, поскольку по (1) полезность (прибыль) агента пропорциональна его выпуску при данном значении $P(Q_\Sigma)$, которое в равновесии согласно (2) одинаково для всех агентов, и затраты агентов также пропорциональны их выпуску.

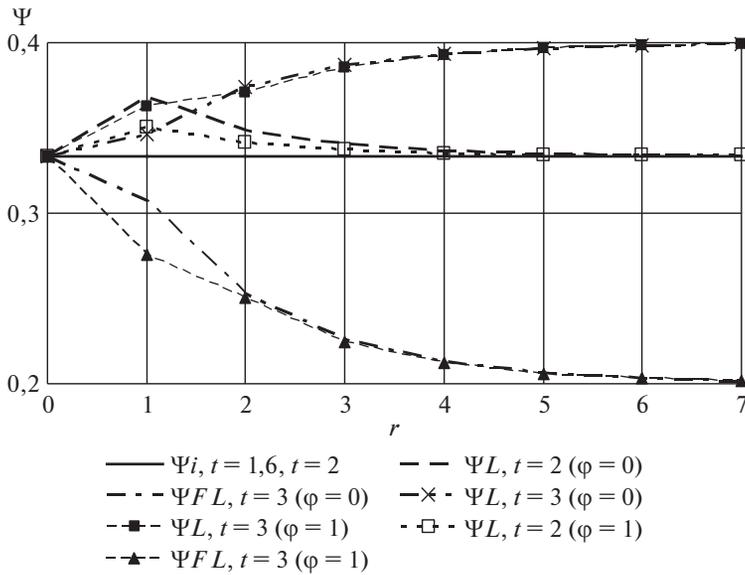


Рис. 3. Структура выигрыша в зависимости от ранга рефлексии ($t = 1, 2, 3, 6$).

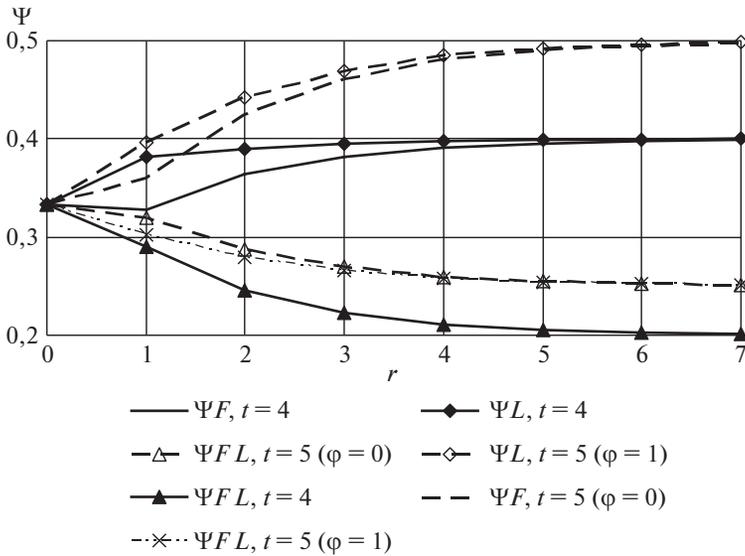


Рис. 4. Структура выигрыша в зависимости от ранга рефлексии ($t = 4, 5$).

4. Обсуждение

Как видно из (12), в игре трех агентов могут возникать группы (пары или тройки) агентов, имеющих одинаковые представления о стратегиях окружения или представляемые окружением как игроки с одинаковыми стратегиями. Такие группы агентов по аналогии с терминологией кооперативных игр будем называть «рефлексивными коалициями» (РК), поскольку их существо-

вание приводит к одинаковым выигрышам для членов этих групп. В рассмотренных случаях $t = 1, \dots, 6$ количество агентов, вовлеченных в РК, уменьшается с ростом номера t .

Анализ рис. 2 показывает, что если агенты имеют представление о L -стратегии окружения, то игровые случаи упорядочены по значению $Q_{\Sigma t}$ следующим образом:

$$Q_{\Sigma t'} > Q_{\Sigma t''}, \quad t' < t'',$$

т.е. чем больше агентов входят в РК, тем выше суммарное действие агентов, следовательно, по (2) ниже равновесная цена, значит, выше конкуренция. Если же агенты имеют представление о F -стратегии окружения, то порядок принимает вид

$$Q_{\Sigma 2} > Q_{\Sigma 1} > Q_{\Sigma 4} > Q_{\Sigma 3} > Q_{\Sigma 5} > Q_{\Sigma 6}$$

вследствие того, что наличие агента с представлением об L -стратегии окружения при $t = 2, 4$ приводит к более конкурентным состояниям, чем при $t = 1, 3$ при отсутствии такового.

Во-вторых, представление о L -стратегии окружения во всех случаях приводит к большему суммарному действию, чем представление о F -стратегии:

$$Q_{\Sigma t}^{\varphi=1} > Q_{\Sigma t}^{\varphi=0}.$$

В-третьих, влияние повышения ранга рефлексии агентов на суммарное действие зависит от количества агентов, вовлеченных в РК:

$$\frac{\partial Q_{\Sigma t}}{\partial r} \begin{cases} > 0, & t = 1, \dots, 4, \\ < 0, & t = 5, 6. \end{cases}$$

Анализ рис. 3, 4 приводит к следующим выводам. Во-первых, распределение выигрыша не зависит от ранга рефлексии и равномерно между агентами при полной РК ($t = 1$) и при отсутствии РК ($t = 6$), а именно

$$\psi_{it} = 1/3 \quad \forall i \in N, \quad t = 1, 6.$$

В остальных случаях распределение выигрыша зависит от ранга рефлексии, но в пределе равно

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{Lt}(r) &= \begin{cases} 1/3, & t = 2, \\ 0,4, & t = 3, 4, \\ 0,5, & t = 5, \end{cases} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{Ft}(r) &= \begin{cases} 0,4, & t = 4, \\ 0,5, & t = 5, \end{cases} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_{FLt}(r) &= \begin{cases} 0,2, & t = 3, 4, \\ 0,25, & t = 5, \end{cases} \end{aligned}$$

Таблица 3. Анализ рефлексии агентов телекоммуникационного рынка России

Агент	Факт, 2018 г.		Модель, $t = 4$	
	Q_i , млрд. мин	Ψ_i	Ψ_i	$\Delta\Psi_i$
ПАО «МТС»	380	0,43	0,39	10%
ПАО «Мегафон»	287	0,33	0,36	-11%
ПАО «Вымпелком»	210	0,24	0,25	-3%

следовательно, самые высокие выигрыши получают агенты, выдвигающие одинаковое (либо L , либо F) представление о стратегии окружения, достигающее половины общего выигрыша. Во-вторых, расширение состава РК, за исключением случая $t = 1$, приводит к сокращению доли L -агента, F -агента и FL -агента

$$\begin{aligned} \psi_{L5} > \psi_{L4} > \psi_{L3} > \psi_{L2} > \psi_{it}, \\ \psi_{F5} > \psi_{F4} > \psi_{F2} > \psi_{it} > \psi_{FL5} > \psi_{FL4} > \psi_{FL3}, \quad t = 1, 6. \end{aligned}$$

Сопоставление структуры выигрыша при $t = 4$, $r = 2$ и структуры рынка России в 2016 г. (табл. 3) показывает, что реальный рынок по типу и глубине рефлексии отличен не более чем на 7% от этого случая. Это означает, что агенты рассуждают следующим образом: ПАО «МТС» думает, что окружение считает остальных агентов (и его, в том числе) придерживающимися L -стратегии, агент ПАО «Мегафон» думает, что окружение считает остальных агентов (и его, в том числе) придерживающимися F -стратегии, агент ПАО «Вымпелком» думает, что окружение считает одного контрагента придерживающимся L -стратегии, а другого — F -стратегии. Поэтому в информационном равновесии согласно (11) ПАО «МТС» является лидером третьего уровня, ПАО «Мегафон» — лидером второго уровня, ПАО «Вымпелком» — лидером третьего (или второго) уровня по отношению к различным контрагентам. Эта эмпирическая закономерность в целом согласуется с ранее полученными оценками [17] глубины рефлексии агентов телекоммуникационного рынка России с использованием нелинейных моделей издержек, но дает более детализированную информацию, поскольку в нелинейном случае информационные равновесия были получены только для $r = 1, 2$.

Практически установленная эмпирическая закономерность может быть использована агентами следующим образом. ПАО «МТС» не может улучшить своего выигрыша, поскольку больший выигрыш он может получить только в случае $t = 5$, который не соответствует рефлексии ПАО «Мегафон». ПАО «Мегафон» и ПАО «Вымпелком», располагая этой информацией о контрагентах, становятся информированными, как лидер в случае $t = 3$, что позволит повысить их относительный выигрыш до $\psi_{L3} = 0,37$. Однако такое произойдет, только если каждый из них имеет это знание по отдельности; если же они информированы об этом совместно, то реализуется случай $t = 1$, когда у всех агентов относительный выигрыш составит $\psi_i = 0,33$, $i \in N$, что выгодно только для ПАО «Вымпелком».

5. Заключение

Исследована проблема поиска информационных равновесий в рефлексивной игре трех агентов рынка олигополии с учетом рефлексивного поведения всех агентов рынка, имеющих одинаковую глубину рефлексии, а также различия их функций издержек. Рефлексия агентов формализована в виде функции представлений на произвольном ранге рефлексии, для которой разработан способ нахождения множества уровней лидерства по Штакельбергу, позволяющего описать игру агентов в виде системы линейных уравнений реакций. Рефлексивные представления агентов сгруппированы в виде набора игровых случаев, среди которых в большей или меньшей степени проявляются совпадения представлений агентов об окружении — рефлексивные коалиции. Получено аналитическое решение системы уравнений реакций, определяющее информационное равновесие через матрицу предположительных вариаций, выражающую заданную функцию рефлексивных представлений агентов.

Моделирование информационных равновесий в зависимости от ранга рефлексии показало существенное влияние рефлексивных коалиций, во-первых, на суммарное действие агентов, во-вторых, на неравномерность распределения выигрыша между агентами. Сопоставление найденных равновесий с распределением реального телекоммуникационного рынка РФ показало, что на рынке при отсутствии рефлексивных коалиций сложилась иерархия представлений агентов типа « LL, FF, FL », т.е. один агент представляет окружения лидерами, другой — ведомыми, а третий имеет дифференцированное представление о контрагентах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Поскольку представления агентов на первом ранге рефлексии при известных представлениях агентов на r -м ранге определяются по формуле [18]

$$G_{i(-i)}^1 = (M_{m+r-1}) \forall G_{i(-i)}^r = (M_m), \quad i \in N,$$

то функция представлений на первом ранге рефлексии равна $g^r [\tau(i, j)] + r - 1$. По наилучшему ответу [18] $BR_i(G_{i(-i)}^1) \in M_{m+1}, \forall G_{i(-i)}^1 = (M_m)$, найденному при каждом значении этой функции, получим функцию (11).

Доказательство утверждения 2. Количество возможных вариантов представлений каждого агента об агентах окружения равно 4 (количество размещений из двух F, L по два), это варианты FF, LL, FL, FL . Поскольку каждый из n агентов может иметь любой из этих вариантов, то по основной формуле комбинаторики [29]

$$T = 4^n = 4^3 = 64,$$

где T — суммарное количество видов функции (14) в игре трех агентов.

Покажем, что 1) суммарное количество видов функции (8), описанных формулами (12), равно T ; 2) представления, описанные формулами (12), не повторяются, т.е.

$$\exists \bar{\tau} : g_{t'}^r[\bar{\tau}] \neq g_{t''}^r[\bar{\tau}], \quad t' \neq t'', \quad \bar{\tau} \in N^2 \setminus \hat{\tau}.$$

При $t = 1$ представления двух типов FF или LL одинаковы у всех агентов обо всех агентах, поэтому $T_1 = 2$.

При $t = 2$ у каждого из $n = 3$ агентов может быть два варианта представлений (FF или LL), причем у двух агентов из трех представления повторяются, поэтому из $k = 3$ объектов ($aa, aa, \bar{a}\bar{a}, a = F, L^2$) количество перестановок $P_k^m = \frac{k!}{m!}$ с $m = 2$ повторениями равно $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$. С учетом двух вариантов (FF или LL) получим $T_2 = 2P_3^2 = 6$. Сравнение (12-1) и (12-2) показывает, что $g_1^r[\bar{\tau}] \neq g_2^r[\bar{\tau}]$ при $\bar{\tau} = j + n(i_3 - 1)$.

При $t = 3, 4, 5, 6$ анализ проводится аналогично. Суммирование $\sum_{t=1}^6 T_t = 64$ подтверждает, что системой (12-1)–(12-6) описаны все возможные представления.

Доказательство утверждения 3. Система (6) для задачи (5) записывается в виде $a - bQ - bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}\right) - c_i = 0, i \in N$, т.е. при $\alpha_i = \frac{a - c_i}{b}$

$$(II.1) \quad f_i = \left(2 + \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}\right) Q_i + \sum_{j \in N \setminus i} Q_j - \alpha_i = 0, \quad i \in N.$$

Для нахождения вариаций ρ_{ij} решается система уравнений [30] следующего вида:

$$(II.2) \quad \sum_{j \in N \setminus i} \frac{\partial f_k}{\partial Q_j} \rho_{ij} + \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} = 0, \quad k \in N \setminus i.$$

В случае $t = 1$ при $g_1^r[\tau] = 0$ согласно (11) функция представлений имеет вид $G[\tau] = r$. При $r = 1$ для каждого i -го агента система (II.1) имеет вид

$$(II.3) \quad f_i = \begin{cases} \left(2 + \sum_{\lambda \in N \setminus i} \rho_{i\lambda}\right) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i \neq k, \\ 2Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i = k \in N, \end{cases}$$

что приводит к системе (II.2) вида

$$2\rho_{i\eta} + \rho_{i\varsigma} + 1 = 0, \quad \rho_{i\varsigma} + 2\rho_{i\eta} + 1 = 0, \quad \eta, \varsigma \in N \setminus i,$$

² Символом \bar{a} обозначен объект «не a ».

имеющей следующее решение:

$$\gamma_1^0 = \rho_{i\eta} = \rho_{i\varsigma} = -\frac{1}{3}, \quad \eta, \varsigma \in N \setminus i,$$

здесь и далее в обозначении $\gamma_{\theta tr}$ опущены индексы θ, t , нижний индекс означает ранг рефлексии r , верхний индекс равен значению функции $g_t^r[\tau]$.

При $r = 2$ для каждого i -го агента система (П.1) имеет вид

$$(П.4) \quad f_i = \begin{cases} \left(2 + \sum_{\lambda \in N \setminus i} \rho_{i\lambda}\right) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i \neq k, \\ (2 + 2\gamma_1^0) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i = k \in N, \end{cases}$$

поэтому получается следующая система (П.2)

$$2(1 + \gamma_1^0) \rho_{i\eta} + \rho_{i\varsigma} + 1 = 0, \quad \rho_{i\varsigma} + 2(1 + \gamma_1^0) \rho_{i\eta} + 1 = 0, \quad \eta, \varsigma \in N \setminus i,$$

имеющая решение

$$(П.5) \quad \gamma_2^0 = \rho_{i\varsigma} = \rho_{i\eta} = -\frac{1}{3 + 2\gamma_1^0}.$$

На r -м ранге рефлексии система (П.1) имеет вид

$$(П.6) \quad f_i = \begin{cases} 2(1 + \gamma_r^0) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i \neq k, \\ 2(1 + \gamma_{r-1}^0) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i = k \in N, \end{cases}$$

что по индукции дает

$$(П.7) \quad \gamma_r^0 = -\frac{1}{3 + 2\gamma_{r-1}^0}, \quad \gamma_0^0 = 0.$$

В случае $t = 1$ при $g_1^r[\tau] = 1$ согласно (11) функция представлений имеет вид $G[\tau] = r + 1$. При $r = 1$ для каждого i -го агента система (П.1) имеет вид (П.4), решение которой по аналогии с (П.5) следующее:

$$\gamma_1^1 = \rho_{i\varsigma} = \rho_{i\eta} = -\frac{1}{3 + 2\gamma_1^0}.$$

На r -м ранге рефлексии система (П.1) имеет вид, аналогичный (П.6),

$$(П.6') \quad f_i = \begin{cases} 2(1 + \gamma_r^1) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i \neq k, \\ 2(1 + \gamma_r^0) Q_i + \sum_{\lambda \in N \setminus i} Q_\lambda - \alpha_i = 0, & i = k \in N, \end{cases}$$

что по индукции дает

$$(II.8) \quad \gamma_r^1 = -\frac{1}{3 + 2\gamma_r^0}.$$

В случаях $t = 2, 3, 4, 5, 6$ проводятся аналогичные рассуждения. Обобщая эти случаи, получим, что равновесие определяется из системы уравнений $2(1 + \gamma_{\theta tr})Q_\theta + \sum_{j \in N \setminus \theta} Q_j - \alpha_\theta = 0$, $\theta \in N$, которая по методу Крамера имеет решение (13-1).

Доказательство утверждения 4. Предположительные вариации в уравнении (II.1) для i -го агента (далее i -е вариации) вычисляются из решения системы (II.2), которая записывается согласно уравнениям (6) для других агентов. Введем следующее обозначение: $\sigma_i^r = 2 + S_i^r$, где верхний индекс обозначает ранг рефлексии. Тогда систему (II.2) можно записать в следующем виде:

$$(II.9) \quad \begin{aligned} \sigma_1^{r-1} \rho_{i1}^r + \rho_{i2}^r + \dots + \rho_{ie}^r &= -1, \\ \rho_{i1}^r + \sigma_2^{r-1} \rho_{i2}^r + \dots + \rho_{ie}^r &= -1, \\ &\dots \\ \rho_{i1}^r + \rho_{i2}^r + \dots + \sigma_e^{r-1} \rho_{ie}^r &= -1. \end{aligned}$$

Выведем общую формулу главного определителя этой системы при $e = 3$. Преобразуем элементы первой строки как суммы двух слагаемых $(\sigma_1 - 1) + 1$, $0 + 1$, $0 + 1$; затем разлагаем полученный определитель на сумму двух определителей по этой строке; далее повторяем эти преобразования со второй и третьей строками соответственно. В итоге получим:

$$\Delta_i = (\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1) + (\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) + (\sigma_1 - 1)(\sigma_3 - 1) + (\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1).$$

В общем случае определителя порядка e , как и в предыдущем случае, разложим этот определитель по первой строке. Отсюда получаем равенство

$$\Delta_i^{(e)} = (\sigma_1 - 1) \Delta_i^{(e-1)} + (\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1) \dots (\sigma_e - 1),$$

где $\Delta_i^{(e-1)}$ – определитель матрицы $(e - 1)$ -го порядка

$$A^{(e-1)} = (a_{lj} = \sigma_{j+1} \forall l = j, \sigma_{lj} = 1 \forall l \neq j, l, j = 1, \dots, e - 1),$$

которая получается путем исключения первой строки и первого столбца из матрицы e -го порядка $A^{(e)}$; верхний индекс в круглых скобках указывает порядок определителя или матрицы. Поэтому по индукции для произвольного порядка e главный определитель системы (II.9) имеет следующую общую формулу:

$$\Delta_i = \prod_{j=1 \setminus i}^e (\sigma_j^{r-1} - 1) + \sum_{\gamma=1 \setminus i}^e \prod_{j=1 \setminus (\gamma, i)}^e (\sigma_j^{r-1} - 1).$$

Найдем вспомогательный определитель для системы (П.9). При $e = 3$ для $l = 1$ вычитаем (-1) из первого столбца; затем вычитаем первую строку из второй и третьей; в результате получаем определитель диагональной матрицы:

$$\Delta_{i1}^r = -(\sigma_2 - 1)(\sigma_3 - 1).$$

По индукции если для $e = \eta - 1$, $l = \nu - 1$, то формула этого определителя следующая: $\Delta_{i,\nu-1}^r = -(\sigma_1 - 1) \dots (\sigma_{\nu-2} - 1)(\sigma_\nu - 1) \dots (\sigma_{\eta-1} - 1)$. Следовательно, при $e = \eta$, $l = \eta$ эта формула имеет вид $\Delta_{i\nu}^r = -(\sigma_1 - 1) \dots (\sigma_{\nu-1} - 1)(\sigma_{\nu+1} - 1) \dots (\sigma_\eta - 1)$. Поэтому в общем случае вспомогательный определитель вычисляется по формуле $\Delta_{il}^r = \prod_{j=1 \setminus (l,i)}^e (\sigma_j^{r-1} - 1)$. Если обозначить $z_j^r = \sigma_j^{r-1} - 1 = 1 + S_i^{r-1}$, то получим формулу (14-1).

Система (П.9) имеет единственное решение (теорема Крамера [30]), если главный определитель $\Delta_i^r \neq 0$, т.е.

$$\frac{\Delta_i^r}{\sum_{j \in E} z_j^r} = 1 - \sum_{j \in E} \frac{1}{z_j^r},$$

когда $z_j^r \neq 0 \forall j \in E$.

Суммирование формул (14-1) по всем агентам окружения i -го агента приводит к формуле (14-2). Если $r = 1$, то формула (14-2) дает: $s_i^1 = \frac{1}{e}$, $S_i^1 = -\frac{e}{e+1} < 0$, $|S_i^1| < 1$. Если $r = 2$, то формула (14-2) дает: $s_i^2 > 0$, $S_i^2 < 0$, $|S_i^2| < 1$. По индукции если $|S_i^{r-1}| < 1$, то $|S_i^r| < 1$. Кроме того, по индукции получаем, что $z_j^r \in (0, 1)$. Формула (14-1) дает

$$\rho_{il}^r = -\frac{1}{z_l^r + 1 + \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^e \frac{z_l^r}{z_j^r}} = -\frac{1}{z_l^r \left(1 + \sum_{j=1 \setminus (l,i)}^e \frac{1}{z_j^r} \right) + 1}.$$

Принимая во внимание $z_j^r \in (0, 1)$, это подтверждает (14-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-cooperative Games. Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960 (Original 1838).
3. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer. 2011. (Original 1934).
4. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010.
5. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

6. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in mathematical models of decision-making // *Int. J. Parall., Emergent and Distribut. Syst.* 2018. No. 33 (3). P. 319–335.
7. *Nagel R.* Unraveling in guessing games: An experimental study // *Amer. Econ. Rev.* 1995. No. 85 (5). P. 1313–1326.
8. *Dixon H.D., Sbriglia P., Somma E.* Learning to collude: An experiment in convergence and equilibrium selection in oligopoly // *Res. Econ.* 2006. No. 60 (3). P. 155–167.
9. *Altavilla C., Luini L., Sbriglia P.* Social learning in market games // *J. Econ. Behav. Organiz.* 2006. No. 61 (4). P. 632–652.
10. *Nicklisch A.* Does collusive advertising facilitate collusive pricing? Evidence from experimental duopolies // *Eur. J. Law Econ.* 2012. No. 34 (3). P. 515–532.
11. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // *Advan. Syst. Sci. Appl.* 2014. No. 3. P. 254–277.
12. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // *IFAC-PapersOnLine.* 2016. No. 49 (32). P. 19–23.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // *АиТ.* 2017. № 9. С. 91–105.
Algazin G.I., Algazina D.G. Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information // *Autom. Remote Control.* 2017. No. 78 (9). P. 1619–1630.
14. *Gilpatric S.M., Li Y.* Information Value under Demand Uncertainty and Endogenous Market Leadership // *Econ. Inquiry.* 2015. No. 53 (1). P. 589–603.
15. *Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.* The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // *VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016).* 2016. P. 207–208.
16. *Chirco A., Colombo C., Scrimatore M.* Quantity competition, endogenous motives and behavioral heterogeneity // *Theor. Dec.* 2013. No. 74 (1). P. 55–74.
17. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии штакельберга для телекоммуникационного рынка России // *АиТ.* 2018. № 5. С. 83–106.
Geraskin M.I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // *Autom. Remote Control.* 2018. No. 79 (5). P. 841–860.
18. *Geraskin M.I.* Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // *Kyber.* 2017. No. 46 (6). P. 1052–1067.
19. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ.* 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2020. No. 81 (2). P. 287–301.
20. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *АиТ.* 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Autom. Remote Control.* 2020. No. 81 (7). P. 1258–1270.
21. *Korepanov V.* Strategic Thinking Models for Team Building // *Proc. 2019 1st Int. Conf. Control Syst. Mathem. Modell., Autom. Energy Eff., SUMMA 2019.* 2019. No. 8947593. P. 185–187.

22. *Andini C., Cabral R.* How do mobile-voice operators compete? IVQR estimates // *Appl. Econ. Lett.* 2013. No. 20 (1). P. 18–22.
23. *Matheson T., Petit P.* Taxing telecommunications in developing countries // *Int. Tax Public Finan.* 2021. No. 28 (1). P. 248–280.
24. *Fellner W.* *Competition Among the Few.* New York: Alfred A. Knopf, 1949.
25. *Mallozzi L., Messalli R.* Multi-leader multi-follower model with aggregative uncertainty // *Games.* 2017. No. 8 (3). P. 25.
26. *Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L.* Expectational stability in aggregative games // *J. Evolut. Econ.* 2021. No. 31 (1). P. 235–249.
27. *Gerasimov K., Prosvirkin N.* System of control of effectiveness of enterprise cooperation in industrial cluster // *Eur. Res. Stud. J.* 2015. No. 18 (3). P. 263–270.
28. *Geraskin M.I.* Equilibria in the Stackelberg Oligopoly Reflexive Games with Different Marginal Costs of Agents // *Int. Game Theory Rev.* 2019. No. 21 (4). P. 1950002.
29. *Lint van J.H., Wilson R.M.* *A Course in Combinatorics*, 2nd Edition. Cambridge University Press, 2001.
30. *Korn G., Korn T.* *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review.* N.-Y.: McGraw-Hill Book Company, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 13.04.2021

После доработки 22.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил
«Военно-Воздушная Академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
Воронеж»)

СРЕДНИЕ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

На основе средних систем нечетких чисел введен и изучен класс усредняющих функционалов для реализации задачи оценивания нечеткой информации. Показано, что они обладают рядом специальных свойств — идемпотентности, монотонности, непрерывности и др., характерных для скалярных агрегирующих функций.

Ключевые слова: нечеткие числа, усредняющие функционалы, оценивание нечеткой информации, агрегирование нечеткой информации.

DOI: 10.31857/S0005231022030096

1. Введение

Методы нечеткой математики представляют собой один из подходов к описанию понятия неопределенностей, возникающих в различных задачах математического моделирования (см., напр., [1–3]).

При агрегировании нечеткой информации широко используются так называемые t -нормы и t -конормы [3, гл. 3]. Другой широко распространенный подход состоит в привлечении взвешенного среднего, в более общей ситуации нечеткого интеграла Шоке [2, гл. 4; 4]. Отметим, что оба эти подхода связаны с построением результирующей (агрегирующей) функции принадлежности по заданным агрегируемым функциям принадлежности.

С другой стороны, в задачах агрегирования «четкой» информации важную роль играют функции агрегирования или агрегаторы [5–7], которые векторной оценке объекта $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n)$, где x_1, \dots, x_n — вещественные параметры, ставят в соответствие скалярную величину $A(\bar{X}) = A(x_1, \dots, x_n)$, характеризующую объект в целом (обобщенную оценку). Они обладают рядом специальных свойств: идемпотентности, непрерывности, монотонности, симметричности и др. При этом идемпотентность понимается как $A(x, \dots, x) = x$. Свойство монотонности означает, что $A(\bar{X}) \leq A(\bar{Y})$ для любых векторов $\bar{X} \leq \bar{Y}$, где последнее неравенство понимается покомпонентно ($x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$). Свойство симметричности состоит в том, что произвольная перестановка компонентов вектора \bar{X} не меняет значение $A(\bar{X})$.

Важный класс функций агрегирования составляют разнообразные средние, в частности среднее арифметическое, среднее показательное, среднее геометрическое, среднее гармоническое [8, гл. 1].

В данной работе под оцениванием (агрегированием) нечеткой информации будем понимать обобщенную скалярную оценку совокупности нечетких параметров (нечеткой информации), характеризующих объект исследования. Фактически речь идет о свертке критериев в многокритериальной задаче, когда в качестве оценок критериев выступают нечеткие числа.

Целью настоящей работы является модификация метода агрегирующих функций (в частности средних) на нечеткие числа и обоснование адекватности такого подхода.

Для этого рассматриваются средние систем нечетких чисел и на их основе вводятся и изучаются усредняющие функционалы, решающие задачу оценивания (агрегирования) нечеткой информации.

Вводятся нелинейные средние систем нечетких чисел и изучаются связанные с ними нелинейные усредняющие функционалы оценивания нечеткой информации.

Будем рассматривать интервальное представление нечетких чисел [1]. А именно, каждому нечеткому числу \tilde{z} с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ поставим в соответствие интервал α -уровня, который определяется соотношением

$$Z_{\alpha} = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad Z_0 = cl \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где символ cl означает замыкание множества.

Будем считать, что все α -уровни нечеткого числа есть замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Множество таких нечетких чисел обозначим J .

Обозначим левую границу α -интервала через $z^{-}(\alpha)$, а правую — $z^{+}(\alpha)$. Иногда $z^{-}(\alpha)$ и $z^{+}(\alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа.

Равенства между нечеткими числами и арифметические операции над ними ниже понимаются в смысле интервального подхода.

2. Средние нечетких чисел. Регулярная дефазификация

Как известно [9], среднее значение нечеткого числа \tilde{z} , используя интервальное представление, можно определить следующим способом:

$$(1) \quad m(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^{-}(\alpha) + z^{+}(\alpha)) d\alpha.$$

Отметим, что среднее (1) является аддитивным и однородным (квазилинейным). Это следует из определения интервальных действий над нечеткими

числами. Однако линейным его назвать нельзя, поскольку множество нечетких чисел не обладает структурой линейного пространства.

Пример 1. Рассмотрим нечеткое треугольное число \tilde{z} , характеризуемое тройкой (a, b, c) при $a < b < c$, определяющей функцию принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и соответственно верхняя границы α -интервала имеют вид соответственно

$$z^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

Тогда среднее (1) для нечеткого треугольного числа подсчитывается по формуле $m(A) = \frac{1}{4}(a + 2b + c)$.

Предлагается определить нелинейное среднее нечеткого числа посредством заданной непрерывной строго монотонной функции $\varphi : R \rightarrow R$ по формуле

$$(2) \quad m_{\varphi}(\tilde{z}) = \varphi^{-1} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi(z^-(\alpha)) + \varphi(z^+(\alpha))) d\alpha \right).$$

Например, случай $\varphi(x) = x^p$ ($p > 1$) соответствует среднему степенному, $\varphi(x) = \lg(x)$ – среднему геометрическому, $\varphi(x) = x^{-1}$ – среднему гармоническому.

Отметим, что выражение, являющееся аргументом функции φ^{-1} в определении (2), фактически является средним нечеткого числа $\varphi(\tilde{z})$ (см. приведенную ниже лемму 2).

Пример 2. Для нечеткого треугольного числа $\tilde{z} = (a, b, c)$ в случае степенной функции $\varphi_p(x) = x^p$ ($p \neq -1$) функционал (2) подсчитывается по формуле

$$m_p(a, b, c) = \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{b-a} (b^{p+1} - a^{p+1}) + \frac{1}{c-b} (c^{p+1} - b^{p+1}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $\varphi_H(x) = x^{-1}$ – по формуле

$$m_H(a, b, c) = 2 \left(\frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{c-b} \ln \frac{c}{b} \right)^{-1}.$$

Ниже будем писать $\tilde{z} \prec \tilde{w}$ для нечетких чисел \tilde{z} и \tilde{w} , если [10, гл. 5] одновременно

$$(3) \quad z^-(\alpha) \leq w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leq w^+(\alpha) \quad (\forall \alpha \in (0, 1]).$$

Отметим, что (3) вводит отношение частичной упорядоченности на множестве нечетких чисел.

Обозначим через \bar{z} четкое число, которое при дефазификации ставится в соответствие нечеткому числу \tilde{z} . Дефазификацию называют регулярной при выполнении следующих условий:

- 1) если $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, то $\bar{z} \leq \bar{w}$ (монотонность);
- 2) если z – четкая величина (число), то $\bar{z} = z$ (согласованность);
- 3) если $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, то $\overline{z+v} \leq \overline{w+v}$ для любого нечеткого числа \tilde{v} .

Согласно определению среднее (1) есть регулярная дефазификация. А также справедливо

Утверждение 1. Пусть функция φ в определении нелинейного среднего (2) непрерывна и строго монотонна. Тогда (2) представляет собой регулярную дефазификацию \tilde{z} .

Средние (1) и (2) обладают определенными экстремальными свойствами. Они отмечены в работе [11].

3. Нечеткие средние систем нечетких чисел. Усредняющие линейные функционалы в задаче оценивания нечеткой информации

Пусть заданы вещественные числа $\beta_i \in R$ ($i = 1, \dots, n$) такие, что $\beta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ [12, гл. 7; 13]

$$(4) \quad \tilde{z}_{\text{cp}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i.$$

Обозначим через $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ соответственно левые и правые индексы нечетких чисел \tilde{z}_i , фигурирующих в (4). Имеет место

Лемма 1. Левый индекс нечеткого среднего \tilde{z}_{cp} , определяемого формулой (4), равен $z_{\text{cp}}^-(\alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^-(\alpha)$, а правый индекс – $z_{\text{cp}}^+(\alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^+(\alpha)$.

Эта лемма вытекает из определения интервальной арифметики нечетких чисел.

Рассмотрим совокупность J^n векторов с нечеткими компонентами (нечетких векторов) вида $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$, где $\tilde{z}_i \in J$ ($i = 1, \dots, n$) – нечеткие числа. Их сумму и умножение на число будем понимать покоординатно. Неравенства нечетких векторов $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$ также будем понимать покоординатно в смысле определения (3).

Введем в рассмотрение для $\tilde{Z} \in J^n$ функционал $l_\beta(\tilde{Z})$ как среднее (1) от нечеткого числа \tilde{z}_{cp} , задаваемого формулой (4). Согласно лемме 1 он имеет вид

$$(5) \quad l_\beta(\tilde{Z}) = m(\tilde{z}_{\text{cp}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha)) d\alpha.$$

Утверждение 2. Усредняющий функционал (5) аддитивен и однороден, т.е.

$$l_\beta(\tilde{Z} + \tilde{W}) = l_\beta(\tilde{Z}) + l_\beta(\tilde{W}) \quad \text{и} \quad l_\beta(k\tilde{Z}) = kl_\beta(\tilde{Z}) \quad (\forall \tilde{Z}, \tilde{W} \in J^n; \forall k \in R).$$

Справедливость утверждения 2 вытекает из представления

$$(6) \quad l_\beta(\tilde{Z}) = \sum_{i=1}^n \beta_i m(\tilde{z}_i),$$

а также аддитивности и однородности каждого выражения $m(\tilde{z}_i)$.

Рассмотрим на множестве нечетких чисел метрику [14]

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \max \{ |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|, |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| \},$$

где $z^\pm(\alpha)$ и $w^\pm(\alpha)$ – правые и левые индексы нечетких чисел \tilde{z} и \tilde{w} соответственно.

Для нечетких векторов $\tilde{Z}, \tilde{W} \in J^n$ с компонентами $\tilde{z}_i, \tilde{w}_i \in J$ ($i = 1, \dots, n$) зададим метрику формулой $\rho_n(\tilde{Z}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^n \rho(\tilde{z}_i, \tilde{w}_i)$.

Теорема 1. Усредняющий функционал, определяемый совокупностью β_i на множестве J^n формулой (5), удовлетворяет следующим условиям регулярности:

- 1) $l_\beta(\tilde{z}, \dots, \tilde{z}) = m(\tilde{z})$, где $m(\tilde{z})$ определено формулой (1) (идемпотентность);
- 2) если Z – вектор с «четкими» вещественными компонентами, то $l_\beta(Z) = z_{\text{ср}}$ (согласованность);
- 3) если $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$, то $l_\beta(\tilde{Z}) \leq l_\beta(\tilde{W})$ (монотонность);
- 4) функционал $l_\beta : J^n \rightarrow R$ – непрерывен (непрерывность);
- 5) если $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$, то $l_\beta(\tilde{Z} + \tilde{V}) \leq l_\beta(\tilde{W} + \tilde{V})$ для любого $\tilde{V} \in J^n$ (эффективность).

Подчеркнем, что усредняющий функционал (5) служит для оценки нечеткой информации, заданной набором нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ при фиксированном наборе весов β_i .

Свойства 1)–5) включают в себя как аналоги свойств операторов агрегаторов (см. введение), так и аналоги свойств регулярной операции дефазификации (см. п. 1).

Отметим экстремальное свойство функционала (5). Фиксируем нечеткий вектор $\tilde{Z} \in J^n$ с компонентами \tilde{z}_i ($i = 1, \dots, n$) и набор чисел $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$). Рассмотрим экстремальную задачу

$$(7) \quad \beta_n(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 \left((z_i^-(\alpha) - y)^2 + (z_i^+(\alpha) - y)^2 \right) d\alpha \rightarrow \min (\forall y \in R).$$

Здесь $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ – соответственно левые и правые индексы нечетких чисел \tilde{z}_i .

Утверждение 3. Число $l_\beta(\tilde{Z})$ является решением экстремальной задачи (7), причем единственным.

Действительно, производная $\delta'_n(y)$ имеет следующий вид:

$$\delta'_n(y) = -2 \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha) - 2y) d\alpha.$$

Приравнивая это выражение к нулю, согласно (5) получим $y = l_\beta(\tilde{Z})$. При этом вторая производная $\delta''_n(y) = 4$. Так что выполнены достаточные условия минимума для функции $\delta_n(y)$.

Утверждение 3 является обобщением известного экстремального свойства среднего арифметического n вещественных чисел [8, гл. 1]. Оно обеспечивает определенную (взвешенную) равноудаленность результата оценивания (агрегирования) от исходных данных $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$.

Отметим, что в случае равенства всех весов $\beta_i = 1/n$ ($i = 1, \dots, n$) соответствующий функционал (5) обладает свойством симметричности, т.е. любая перестановка элементов вектора \tilde{Z} не меняет значения функционала.

Замечание 1. Можно показать, что близкие результаты справедливы, если вместо числовых весов β_i рассматривать весовые функции $\beta_i(\alpha)$ ($\alpha \in [0, 1]$) со свойствами непрерывности и $\beta_i(\alpha) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \beta_i(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Функционал (5) в этом случае приобретает вид

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \beta_i(\alpha) (z_i^-(\alpha) + z_i^+(\alpha)) d\alpha.$$

Это обобщение случая взвешенного среднего нечеткого числа [15].

Пример 3. Рассмотрим задачу агрегирования нечетких суждений экспертов. Пусть мнения n экспертов о некотором объекте заданы нечеткими треугольными числами $\tilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i)$ ($i = 1, \dots, n$) и характеризуются функциями принадлежности $\mu_i(x)$. Один из общепринятых подходов к решению данной задачи состоит [16] в использовании агрегирующей функции принадлежности вида $\mu(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mu_i(x)$, где весовые коэффициенты $\beta_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$.

Другой известный подход [16] предполагает использовать нечеткое взвешенное среднее с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \sup_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \\ \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = x}} \left(\min_i \mu_i(x_i) \right).$$

После этого производится дефазификация по методу центроидной дефазификации посредством формулы $\bar{z} = \frac{\int_a^b x \mu(x) dx}{\int_a^b \mu(x) dx}$, где $[a, b]$ – носитель нечеткого числа \tilde{z} .

Наш подход в рассматриваемом случае для величины $\tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i$ дает нечеткое треугольное число, характеризуемое тройкой $(\sum_{i=1}^n \beta_i a_i, \sum_{i=1}^n \beta_i b_i, \sum_{i=1}^n \beta_i c_i)$. Дефазификация этого числа по формуле (5) с учетом (6) и примера 1 дает выражение $l_{\beta}(\tilde{Z}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \beta_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i b_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \beta_i c_i$.

Эти подходы дополняют друг друга, также как дефазификация нечеткого числа методом центроидной дефазификации и методом средних.

4. Нелинейные нечеткие средние и нелинейные усредняющие функционалы в задаче оценивания нечеткой информации

Перейдем к рассмотрению нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел. Определим понятие функции от нечеткого числа, используя интервальный подход.

Пусть задана непрерывная строго монотонная вещественная функция $\varphi : R \rightarrow R$.

Сформулируем в удобном здесь виде результат из [17].

Лемма 2. Если \tilde{z} – нечеткое число с левым и правым индексами $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ и $\varphi : R \rightarrow R$ непрерывная монотонно возрастающая функция, то $\varphi(z^-(\alpha))$ и $\varphi(z^+(\alpha))$ – соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\varphi(\tilde{z})$. Если $\varphi(x)$ – непрерывная монотонно убывающая функция, то $\varphi(z^+(\alpha))$ и $\varphi(z^-(\alpha))$ – левый и правый индексы $\varphi(\tilde{z})$ соответственно.

Пусть заданы нечеткие числа $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$, а также действительные числа $\beta_i \in R$ ($\beta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$). Рассмотрим нелинейные нечеткие средние общего вида для заданной непрерывной строго монотонной функции $\varphi : R \rightarrow R$:

$$(8) \quad \tilde{z}_{\varphi} = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(\tilde{z}_i) \right).$$

Для системы вещественных чисел z_1, \dots, z_n формула (8) есть классическое определение нелинейного ассоциативного среднего общего вида [8, гл. 1].

Если в (8) $\varphi_p(x) = x^p$ ($p > 1$) (или $0 < p < 1$), то получаем нечеткий аналог взвешенной средней степенной, если $\varphi_G(x) = \log_a x$ ($a > 1$) – нечеткий аналог взвешенной средней геометрической, если $\varphi_H(x) = \frac{1}{x}$ – нечеткий аналог взвешенной средней гармонической.

В частности, как и в классической статистике, для описания аддитивных нечетких моделей можно использовать нечеткие средние арифметические, для описания мультипликативных нечетких моделей – нечеткие средние геометрические.

Отметим, что в случае определяющих функций φ_p и φ_G , учитывая их области определения, следует рассматривать совокупности положительных нечетких чисел \tilde{z}_i ($i = 1, \dots, n$) в том смысле, что $\tilde{z}_i^-(\alpha) > 0$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Нелинейному нечеткому среднему (8) предлагается поставить в соответствие функционал $f_\varphi : J^n \rightarrow R$ по формуле

$$(9) \quad f_\varphi(\tilde{Z}) = \varphi^{-1} \left(1/2 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \beta_i (\varphi_i(z^-(\alpha)) + \varphi_i(z^+(\alpha))) d\alpha \right).$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\varphi : R \rightarrow R$ – непрерывная и строго монотонная функция. Тогда для функционала (9) выполнены следующие свойства регулярности:

1) $f_\varphi(\tilde{z}, \dots, \tilde{z}) = m_\varphi(\tilde{z})$, где $m_\varphi(\tilde{z})$ определяется формулой (2) (идемпотентность);

2) если Z – вектор с «четкими» компонентами, то $f_\varphi(Z) = z_\varphi$, где z_φ определяется формулой, аналогичной (8) в вещественном случае (согласованность);

3) если $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$, то $f_\varphi(\tilde{Z}) \leq f_\varphi(\tilde{W})$ (монотонность);

4) функционал $f_\varphi : J^n \rightarrow R$ – непрерывен (непрерывность);

5) если $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$, то $f_\varphi(\tilde{Z} + \tilde{V}) \leq f_\varphi(\tilde{W} + \tilde{V})$ для любых $\tilde{V} \in J^n$ (эффективность).

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(10) \quad \delta_\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 ((\varphi(z_i^+(\alpha)) - y)^2 + (\varphi(z_i^-(\alpha)) - y)^2) d\alpha \rightarrow \min \quad \forall y \in R.$$

Утверждение 4. Для заданного нечеткого вектора \tilde{Z} число $\varphi(f_\varphi(\tilde{Z}))$ является решением экстремальной задачи (10), причем единственным.

Доказательство аналогично утверждению 3 получается применением критерия минимума для дифференцируемой функции $\delta_\varphi(y)$.

Отметим, что в случае равенства всех весовых коэффициентов $\beta_i = 1/n$ любая перестановка компонент вектора \tilde{Z} не меняет значение соответствующего функционала (9) (симметричность).

Замечание 2. Наряду с функционалом (9) предлагается рассматривать функционал

$$(11) \quad f_\varphi(\tilde{Z}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i(z^-(\alpha)) \right) + \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i(z^+(\alpha)) \right) \right) d\alpha.$$

Можно показать, что он обладает свойствами, аналогичными функционалу (9). Подчеркнем, что в (11) слагаемые, стоящие под знаком интеграла, являются индексами нечеткого среднего (8).

Пример 4. Пусть мнение экспертов описывается нечеткими треугольными числами $\tilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i)$ при $i = 1, \dots, n$. Значение усредняющего функционала (9) для степенной функции $\varphi(x) = x^p$ с учетом примера 2 выписывается в виде:

при $p \neq -1$

$$f_\varphi(\tilde{Z}) = \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{1}{b_i - a_i} (b_i^{p+1} - a_i^{p+1}) + \frac{1}{c_i - b_i} (c_i^{p+1} - b_i^{p+1}) \right) \right)^{\frac{1}{p}};$$

при $p = -1$

$$f_\varphi(\tilde{Z}) = 2 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{1}{b_i - a_i} \ln \frac{b_i}{a_i} + \frac{1}{c_i - b_i} \ln \frac{c_i}{b_i} \right) \right)^{-1}.$$

5. Заключение

Результаты утверждений 1–4 и теорем 1, 2 настоящей статьи, как представляется автору, ранее не отмечались. Они показывают естественность и адекватность применения введенных в статье усредняющих функционалов вида (5) и (9) в задаче оценивания нечеткой информации, определяемой набором нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ при заданных весах β_i .

Подход, предлагаемый в данной статье, близок к подходу Смоляка [10, гл. 4, 5], где рассмотрены аддитивные монотонные интегральные функционалы общего вида в качестве критериев эффективности инвестиционных проектов с нечеткими данными. Однако другие свойства, характерные для агрегаторов и приведенные в теоремах 1, 2 и утверждениях 1–4, в работе [10] не отмечаются.

Усредняющие функционалы (5) и (9) могут быть, в частности, использованы для оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (ср. [10, гл. 5; 18, гл. 11, 12]).

Наибольший интерес и перспективы развития представляет, на наш взгляд, раздел 4. Кроме того, перспективные направления дальнейшего развития обозначены в замечаниях 1, 2. Примеры 3, 4 иллюстрируют возможности практического применения предложенных методик. Они могут быть распространены, в частности, на случай трапециевидальных нечетких чисел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1.

Рассмотрим случай монотонного возрастания функции φ . Проверим свойство 1). Если $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, то согласно (3) и в силу монотонного возрастания функции φ при каждом $\alpha \in (0, 1]$ имеем

$$\varphi(z^-(\alpha)) + \varphi(z^+(\alpha)) \leq \varphi(w^-(\alpha)) + \varphi(w^+(\alpha)).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi(z^-(\alpha)) + \varphi(z^+(\alpha))) d\alpha \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi(w^-(\alpha)) + \varphi(w^+(\alpha))) d\alpha.$$

Тогда свойство 1) следует из монотонного возрастания функции φ^{-1} .

Свойство 2) обусловлено тем, что четкая величина (число) трактуется как нечеткая, имеющая одинаковые индексы, совпадающие с этим числом.

Свойство 3) следует из того, что если $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, то согласно определению интервального сложения и в силу (3) $\tilde{z} + \tilde{v} \prec \tilde{w} + \tilde{v}$ для $\forall \tilde{v} \in J$. Остается воспользоваться свойством 1).

Аналогично рассматривается случай, когда функция φ монотонно убывает.

Доказательство теоремы 1.

Свойство 1) вытекает из представления (6).

Свойство 2) обусловлено тем, что для «четких» векторов Z левый и правый индексы его компонент z_i совпадают с z_i .

Покажем свойство 3). Заметим, что условие $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$ означает, что $\tilde{z}_i \prec \tilde{w}_i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда для любого $\alpha \in (0, 1]$ имеем $\tilde{z}_i^-(\alpha) \leq \tilde{w}_i^-(\alpha)$ и $\tilde{z}_i^+(\alpha) \leq \tilde{w}_i^+(\alpha)$. Поэтому для всех $i = 1, \dots, n$ можем записать

$$\int_0^1 (\tilde{z}_i^-(\alpha) + \tilde{z}_i^+(\alpha)) d\alpha \leq \int_0^1 (\tilde{w}_i^-(\alpha) + \tilde{w}_i^+(\alpha)) d\alpha.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\beta_i \geq 0$ и складывая полученные выражения по i от 1 до n , получим $l_\beta(\tilde{Z}) \leq l_\beta(\tilde{W})$.

Свойство 4) (непрерывность) вытекает из следующего. Пусть нечеткие векторы $\tilde{Z}, \tilde{W} \in J^n$ имеют компоненты $\tilde{z}_i, \tilde{w}_i \in J$ ($i = 1, \dots, n$) соответственно. Тогда согласно (5) и определениям метрик ρ и ρ_n имеем

$$\begin{aligned} |l_\beta(\tilde{Z}) - l_\beta(\tilde{W})| &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (|z_i^-(\alpha) - w_i^-(\alpha)| + |z_i^+(\alpha) - w_i^+(\alpha)|) d\alpha \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \beta_i \rho(\tilde{z}_i, \tilde{w}_i) \leq \rho_n(\tilde{Z}, \tilde{W}). \end{aligned}$$

Покажем свойство 5). По определению и на основании утверждения 2 $l_\beta(\tilde{Z} + \tilde{V}) = l_\beta(\tilde{Z}) + l_\beta(\tilde{V})$. Тогда заключение свойства 5) приобретает вид $m(\tilde{z}_{cp}) + m(\tilde{v}_{cp}) \leq m(\tilde{w}_{cp}) + m(\tilde{v}_{cp})$. То есть $m(\tilde{z}_{cp}) \leq m(\tilde{w}_{cp})$. А это следует из условия $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$ по свойству 3).

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим случай монотонного возрастания функции φ .

Свойства 1), 2) вытекают из определения (9).

Покажем свойство 3). Пусть $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$. Тогда при всех $\alpha \in (0, 1]$ справедливы неравенства $\tilde{z}_i^-(\alpha) \leq \tilde{w}_i^-(\alpha)$ и $\tilde{z}_i^+(\alpha) \leq \tilde{w}_i^+(\alpha)$ ($i = 1, \dots, n$). Отсюда в силу монотонного возрастания функции φ имеем

$$\int_0^1 (\varphi(\tilde{z}_i^-(\alpha)) + \varphi(\tilde{z}_i^+(\alpha))) d\alpha \leq \int_0^1 (\varphi(\tilde{w}_i^-(\alpha)) + \varphi(\tilde{w}_i^+(\alpha))) d\alpha.$$

Тогда поскольку $\beta_i > 0$, то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (\varphi(\tilde{z}_i^-(\alpha)) + \varphi(\tilde{z}_i^+(\alpha))) d\alpha \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (\varphi(\tilde{w}_i^-(\alpha)) + \varphi(\tilde{w}_i^+(\alpha))) d\alpha. \end{aligned}$$

Так как функция φ^{-1} монотонно возрастает вместе с φ , то это влечет свойство 3).

Свойство 4) в силу непрерывности функции φ проверяется рассуждениями, близкими к доказательству свойства непрерывности в теореме 1.

Поясним свойство 5). Оно обеспечивается тем, что если $\tilde{Z} \prec \tilde{W}$, то $\tilde{Z} + \tilde{V} \prec \tilde{W} + \tilde{V}$ для любого $\tilde{V} \in \mathcal{J}^n$. Затем применяется свойство 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: Бином, 2015.
2. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
3. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.
4. *Bustince H., Mesiar R., Fernandez J., et al.* d-Choquet integrals: Choquet integrals based on dissimilarities // *Fuzzy Sets and Systems*. V. 414. 2021. P. 1–27.
5. *Mesiar R., Kolesarova A., Calvo T., Komornikova M.* A Review of Aggregation Functions. *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models* // *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer. 2008. V. 220. P. 121–144.
6. *Леденева Т.М., Подвальный С.Л.* Агрегирование информации в оценочных системах // *Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии*. 2016. № 4. С. 155–164.
7. *Lopez de Hierro A.F.R., Roldin C., Bustince H., et al.* Affine construction methodology of aggregation functions // *Fuzzy Sets and Systems*. V. 414. 2021. P. 146–164.
8. *Джусни К.* Средние величины. М.: Статистика, 1970.
9. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // *Fuzzy Sets and Systems*. 1987. V. 24. P. 279–300.

10. *Смоляк С.А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. М.: Наука, 2002.
11. *Хацкевич В.Л.* О средних значениях нечетких чисел и их систем // «Нечеткие системы и мягкие вычисления», НСМВ. 2021. Т. 16. № 1. С. 5–20.
12. *Nguyen H.T., Wu B.* Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin: Springer, 2006.
13. *De la Rosa de Saa S., Lubiano M.A., Sinova B., Filzmoser P.* Location-free robust scale estimates for fuzzy data // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. 2020. P. 1–14.
14. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. 1984. Vol. 12. P. 215–229.
15. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. 2003. V. 136. P. 363–374.
16. *Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А.* Агрегирование нечетких суждений экспертов // Препринт ИПМ № 101. Москва. 2019. С. 1–12.
17. *Nguyen H.T.* A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 64. P. 369–380.
18. *Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика. М.: Поли Принт Сервис, 2015. 1300 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 18.05.2021

После доработки 21.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. А.М. МИХАЙЛОВ, канд. техн. наук (alxmikh@gmail.com),
М.Ф. КАРАВАЙ, д-р техн. наук (mkaravay@yandex.ru),
В.А. СИВЦОВ (TheDeGe@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МГНОВЕННОЕ ОБУЧЕНИЕ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ

Одним из основных недостатков искусственных нейронных сетей является медленное обучение, связанное с необходимостью вычисления большого количества коэффициентов. В статье показано, что обучение можно намного ускорить. Ускорение достигается за счет резкого сокращения числа обучающих образов. Кроме того, как для формирования признаков, так и для последующего распознавания объектов использован метод обратных образов, позволяющий обойтись без коэффициентов, что существенно сокращает объемы вычислений. При мгновенном обучении, как и при глубоком обучении, признаки формируются автоматически. Проведенные вычислительные эксперименты показали инвариантность предложенного метода не только к масштабированию и вращениям, но и к значительным деформациям распознаваемых объектов.

Ключевые слова: распознавание образов, машинное обучение, глубокое обучение, обратные образы, многомерное индексирование.

DOI: 10.31857/S0005231022030102

1. Введение

Традиционно, в задачах распознавания неизвестный образ \vec{x} классифицируется как принадлежащий к одному из N классов. Для этого вычисляются вероятности этих классов $p_1(\vec{x}), p_2(\vec{x}), \dots, p_N(\vec{x})$, после чего образ \vec{x} относится к классу с максимальной вероятностью. Существует много способов нахождения вероятностей классов, например байесовские классификаторы, нейронные сети и т.д. В частности, в нейронных сетях вероятности классов пропорциональны активностям выходных узлов. Поэтому на класс объекта указывает максимально активный узел. В отличие от нейронных сетей, где активность узлов определяется значениями коэффициентов, найденными при обучении, в данной статье коэффициенты не используются. Это становится возможным в результате использования метода обратных образов (МОО) [1], позволяющего находить сходство входного образа с заданными классами образов. Систему распознавания на основе метода МОО будем называть индекстроном.

Идея обратных образов аналогична идее обратных списков, используемых в методе TF-IDF [2]. Другими словами, если признак встречается во всех классах, то роль этого признака для оценки релевантности образа равна нулю. Однако веса признаков в предложенном в статье методе не вычисляются вообще. Также существуют другие отличия, в частности, отметим следующие моменты:

а) В то время как в поисковиках на вход поступает текст, в данной статье поиск проводится по числам-признакам, каждое из которых может изменяться в широком диапазоне в условиях шумов.

б) В поисковиках адреса, т.е. числа, в которые переводятся слова — это адреса единой адресной области. В данной статье создаются несколько адресных областей, число которых равно размерности вектора признаков, представляющего образ.

в) В поисковиках отсутствует понятие радиуса обобщения, который регулирует степень генерализации. В результате в поисковиках автоматически не создаются классы документов, а модели векторного пространства требуют использования дополнительных средств кластеризации. В данной статье в зависимости от радиуса обобщения число классов образов определяется автоматически в зависимости от заданной степени обобщения.

г) Поисковики автоматически не решают задачи предсказания. В данной статье предложенный метод обращения образов позволяет единообразно решать как задачу поиска ближайшего образа, так и задачу предсказания времени событий.

В данной статье при классификации объектов изображений с произвольным задним планом использован двухуровневый классификатор. На первом уровне в качестве признаков используются пиксели, а на втором уровне — частоты классов выделенных пикселей. При этом использование частотного порога переводит классы в разряд бинарных объектов — либо класс присутствует в описании объекта, либо отсутствует. При распознавании для выделения пикселей объектов на изображениях с произвольным задним планом используются гистограммы классов пикселей объектов, которые создаются при обучении. В таких гистограммах представлены существенные классы, т.е. классы пикселей с частотами выше пороговой. При распознавании порог частоты может понижаться в 2 раза, если существенных классов не найдено при верхнем значении порога. Критерием выделения пикселя является его принадлежность к существенному классу. Такие пиксели группируются в кластеры с помощью алгоритма окраски связанных объектов, т.е. объектов, пиксели которых отстоят друг от друга не более чем на заданный радиус.

Кластеры последовательно распознаются на 2-м уровне, входными признаками которого служат существенные классы в бинарной форме. Выходом 2-го уровня служит гистограмма классов второго уровня, где класс второго уровня — это идентифицированное имя неизвестного объекта, представленного кластером выделенных точек. Если на изображении без объекта был ошибочно найден объект, то классы пикселей, приведшие к ошибке, ингиби-

руются, т.е. удаляются из гистограммы классов пикселей, представляющих ошибочно найденный объект.

Это возможно, так как для обучения каждому классу достаточно одного разностного изображения. Под разностным изображением, называемым также подписью объекта, понимается изображение с объектом минус изображение без объекта. Для получения разностного изображения исходные кадры 800×600 редуцируются в кадры 400×300 с помощью фильтра (см. подраздел 2.8), позволяющего компенсировать возможное смещение сравниваемых изображений, возникающее из-за малых сдвигов камеры. Если объект движется, то для получения разностного изображения достаточно двух кадров. Такой подход позволяет обойтись при обучении без сотен и тысяч изображений объекта одного класса — объекта, снятого при разных ракурсах и масштабах. Одного кадра достаточно во многих приложениях, когда цветовая гамма пикселей объекта мало зависит от ориентации, например от вида кошки сзади, спереди или сбоку. Очевидно, что при использовании разностного изображения задний план пропадает и обучение ведется только по пикселям объекта.

В статье описывается эксперимент с изображениями цветов и кошек с произвольным задним планом. Результаты представлены и аннотированы в разделе 3, п. 1.

Для сравнения производительности МОО и искусственных нейронных сетей было выбрано еще одно приложение, в котором использован набор данных CIFAR-10 [3]. (См. раздел 3, п. 2). Комментарии представлены в разделе Заключение. Подробно МОО рассмотрен в разделе 2.

2. Материалы и методы

2.1. Извлечение признаков

В приложении, связанном с распознаванием трехмерных объектов, использовались признаки 2 уровней. На первом уровне признаками служили красная, зеленая и синяя составляющие цвета каждого пикселя, образующие трехмерный вектор. Каждый такой вектор использовался для классификации пикселя. На втором уровне признаками служили классы пикселей, а именно: классы, выделяемые с помощью гистограммы классов пикселей распознаваемого объекта. При этом класс включался в множество признаков второго уровня, если его частота превышала установленный порог.

2.2. Классификация образов

При классификации образов, как правило [4], неизвестный вектор \vec{x} относится к классу с наибольшей условной вероятностью $p_1(\vec{x}), p_2(\vec{x}), \dots, p_N(\vec{x})$. В настоящей статье для нахождения сходства входного образа с заданными классами используется понятие обратных образов, введенное в [5] и рассмотренное также в [1]. Этот метод напоминает технологию обратных файлов, используемую в поисковой системе Google [6] и в подходе “bag of words” [7].

В то время как в подходе [6, 7] для поиска объектов информация преобразуется в текст, индексстрон оценивает сходство классов, анализируя обратные образы числовых признаков.

В задачах классификации обратный образ признака x — это множество $\{n\}_x$ классов n , связанных с этим признаком. Класс n связан с признаком x , если x является элементом образа из этого класса. Например, для двух классов А, А, А и Т, Т признак “горизонтальная линия” участвует как в А-, так и в Т-классе, тогда как признак “вертикальная линия” участвует только в классе Т:

$$\{A, T\}_{0^\circ}, \quad \{T\}_{90^\circ}.$$

Пусть N классов образов представлены строками матрицы, где индексы строк n указывают на классы образа, а элементы строки x_{nm} — это признаки образа:

$$[x_{nm}]_{N \times M}.$$

Определение 1. Обратный образ $\{n\}_{x,m}$ признака x_{nm} — это множество классов n , связанных с этим признаком, т.е.

$$(1) \quad \{n\}_{x,m} = \{n : |x_{nm} - x| \leq R\}.$$

Здесь R — радиус обобщения, обсуждаемый в подразделе 2.5.

Распределение связей образа $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_M)$ с классами — суперпозиция

$$(2) \quad F_n^{(R)}(\vec{x}) = \sum_{m=1}^M f_n^{(R)}(x_m), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $f_n^{(R)}(x_m) = 1$, если $n \in \{n\}_{x,m}$, и $f_n^{(R)}(x_m) = 0$, если $n \notin \{n\}_{x,m}$, — функция связанности признака x_m с классом n .

2.3. Определение класса

Можно определить класс с помощью обобщенного расстояния Хэмминга между векторами \vec{x} и \vec{y} . Такое расстояние определяется как количество позиций, где соответствующие координаты отличаются более чем на радиус обобщения R . Например, $H_{R=1}(\vec{x}, \vec{y}) = 1$, если $\vec{x} = (1, 2, 3)$, $\vec{y} = (2, 2, 5)$.

По определению класс образа, который представлен вектором \vec{x}_n , включает все векторы \vec{y} такие, что $H_R(\vec{x}_n, \vec{y}) = 0$. Следовательно, любые две строки x_n, x_m матрицы $[x_{n,k}]_{N \times K}$ принадлежат разным классам, если $H_R(\vec{x}_n, \vec{x}_m) > 0$.

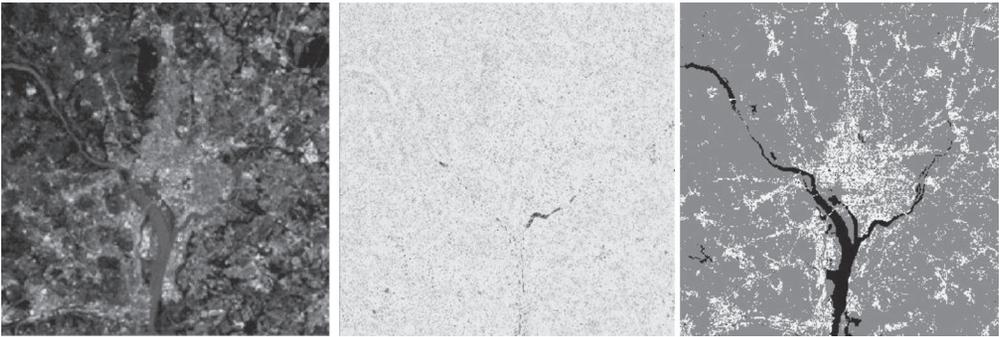


Рис. 1. Пример сегментации изображения.

2.4. Обучение

Чтобы получить распределение связей образа, его признаки x_m , $m = 1, 2, \dots, M$, использовались в качестве адресов списков классов, называемых колонками. Распределение (2) рассчитывается как гистограмма классов, находящихся в колонках. При обучении если $F_n^{(R)}(\vec{x}) < M$, то вектор \vec{x} не может быть классифицирован и должен рассматриваться как представитель нового класса N^+ . При этом обратные образы обновляются как $\{n\}_{xm} = \{n\}_{x,m} \cup N^+$, $m = 1, 2, \dots, M$, $N^+ = N + 1$.

Если в процессе обучения N превышает предел N_{\max} , то память обнуляется и значение радиуса обобщения увеличивается. Обычно $R = 5\text{--}20\%$ от диапазона признаков X . При этом степень обобщения растет с ростом R .

2.5. Радиус обобщения

Влияние радиуса обобщения R проиллюстрировано на рис. 1. В этой задаче сегментации требуется пиксели левого изображения разделить на три класса (вода, растительность, городские строения) и раскрасить так, как показано на правом изображении. Каждый пиксель на левом рисунке представлен 4-мерным вектором, компоненты которого принадлежат 256-уровневым диапазонам красного, зеленого, синего и инфракрасного спектров (показан только один компонент, исходные изображения см. в [8]). (По техническим причинам на рисунке красному, зеленому, синему цветам соответствуют белый, серый, черный цвета).

На изображении в центре результат сегментации при $R = 0$. При этом большинство пикселей остаются неклассифицированными. На правом изображении показана качественная сегментация, достигнутая при $R = 10\%$.

2.6. Алгоритм индекстрона

Обучение начинается с распознавания. Если входной вектор $\vec{x}(m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, не распознан, то он в инверсном виде включается в обратные множества, становясь представителем нового класса. Поэтому сначала рассмотрим алгоритм распознавания.

Алгоритм распознавания. Значения компонент входного вектора $\vec{x}(m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, используются в качестве адресов обратных образов — образов, являющихся множествами классов. Адресация к обратным образам производится для вычисления частот f_n , $n = 1, 2, \dots, N$, встречаемости классов в обратных образах $\{n\}_{x_m}$. Вычисление выполняется в следующем цикле:

$m = 1, 2, \dots, M$ для всех r из $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и для всех n из $\{n\}_{x_{m+r}, m}$: $f_n = f_n + 1$.

Критерий принятия решения о классе i входного образа:

$$i : f_i = TM,$$

где T ($0 < T \leq 1$) — порог распознавания.

Если критерий не выполнен, то входной вектор инверсируется и вводится в обратные образы в качестве нового класса. Введение выполняется следующим образом. Если уже были созданы N классов, то запускается следующий *алгоритм* обновления обратных множеств:

1) если $N < N_{\max}$, то $N = N + 1$. В противном случае СТОП.

2) $m = 1, 2, \dots, M$: $\{n\}_{x(m), m} = \{n\}_{x(m), m} \cup N$.

Пример. Сначала набор обратных множеств пуст, т.е. $N = 0$. Затем, при поступлении 1-го вектора $\vec{x}(m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, на первом шаге увеличивается на единицу число созданных классов: $N = 1$. На втором шаге это новое число добавляется в соответствующие обратные множества. В результате будет создан первый набор, содержащий M обратных множеств $\{1\}_{x(m), m}$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Предположим, что при поступлении второго вектора $\vec{y}(m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, значения всех его координат, за исключением первой, совпадают по абсолютной величине с координатами первого вектора с точностью до R . Тогда набор обратных множеств на второй итерации принимает вид: $\{1\}_{x(m), 1}$, $\{2\}_{y(m), 1}$, $\{1, 2\}_{y(m), m}$, $m = 2, \dots, M$. В этом наборе множество $\{1\}_{x(m), 1}$ осталось от первой итерации, множество $\{2\}_{y(m), 1}$ появилось впервые, а $M - 1$ множеств $\{1, 2\}_{y(m), m}$, $m = 2, \dots, M$, обновились, включив в свой состав второй элемент.

2.7. Архитектура индекстрона

Основными параметрами индекстрона являются размерность образа M , диапазон признаков X и максимальное количество классов N , которые могут быть им созданы. Другими словами, индекстрон содержит M групп адресов, где каждая группа t содержит X адресов в диапазоне от 0 до $X - 1$. Каждый адрес (x, t) указывает на колонку или обратный образ $\{n\}_{x, m}$. Каждая колонка содержит имена классов n , а ее высота равна мощности соответствующего обратного образа. Макроколонка определяется радиусом обобщения R и содержит соседние колонки с адресами из интервала $[x - R, x + r]$.

Параллельная обработка M групп колонок может быть реализована в микросхеме ПЛИС, что приводит к практически мгновенному обучению. Память,

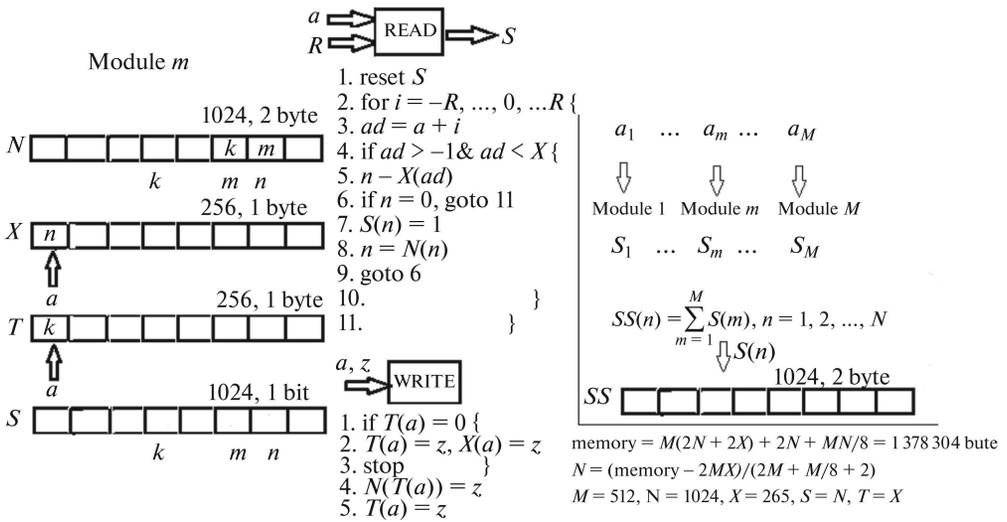


Рис. 2. Концептуальная схема индекстрона.

которая должна быть выделена для групп колонок, может быть организована тремя способами: (а) статические колонки, (б) динамически выделяемые колонки, (в) итерированные одномерные карты [9]. Для этих трех методов потребуется следующее количество ячеек памяти MXN , $2MN$ и MN соответственно. Здесь метод (в) выигрывает и делает возможной ПЛИС-реализацию индекстрона $(M, X, N) = (512, 256, 1024)$ на микросхеме с памятью в 1,44 МБ (рис. 2).

На схеме показан один модуль из M , содержащий четыре массива (N, X, T, S) плюс общий выходной массив SS , в котором суммируется информация всех модулей. Заметим, что количество доступных классов N обратно пропорционально M , т.е. длине входного вектора \vec{x} : $N = (\text{память} - MX - MT)/(2M + M/8 + 2)$.

Нормализованный диапазон дискретных признаков $X = 256$ часто достаточен для многих приложений распознавания образов. При этом как признаки с плавающей запятой, так и целочисленные признаки могут быть преобразованы в 256 дискретных уровней без ущерба для общей точности.

В этой схеме параллельно работают M идентичных модулей, где в m -й модуль поступает m -й компонент a_m вектора признаков $a_1, \dots, a_m, \dots, a_M$. Компонент a_m служит адресом ячейки 256-байтового массива X .

При идентификации вектора выполняется READ-код (см. рис. 2). Выход модуля — это 1024-битное слово S_m . Затем выходы M модулей суммируются в массиве SS , содержащем 1024 ячейки памяти, элементы которой представлены 2-байтовыми словами $SS(n) = \sum_{m=1}^M S(m), n = 1, 2, \dots, N$. Массив SS содержит распределение связей образа $a_1, \dots, a_m, \dots, a_M$.

Если образ не идентифицирован, то после завершения цикла обучения выполняется WRITE-код. Для этого в m -й модуль поступает m -й компонент a_m вектора признаков $a_1, \dots, a_m, \dots, a_M$, а также имя создаваемого клас-

са z . Компонент a_m служит адресом 256-байтового массива T . Например, при $M = 512$, $N = 1024$, $X = 256$, $T = 256$, $S = 1024$ и $SS = 2N$ общая память составит 1 378 304 байта.

2.8. Свойства преобразования образов

Каждая группа колонок, $m = 1, 2, \dots, M$, содержит N различных классов:

$$\sum_{x=0}^{X-1} |\{n\}_{x,m}| = N.$$

Колонки группы не пересекаются: $\{n\}_{x,m} \cap \{n\}_{y,m} = \emptyset$ ($x \neq y$).

Из этих свойств следует, что для вектора \vec{x} максимум распределения связей $F_n^{(R)}(\vec{x}) = M$ достигается тогда и только тогда, когда $H_R(\vec{x}_n, \vec{x}) = 0$.

2.9. Получение разностного изображения

Для получения разностного изображения объекта использовалась функция, которая проводила сравнение каждого пикселя изображения с объектом, со всеми пикселями в определенном радиусе (окне), равном 31×31 пикселям, вокруг соответствующего пикселя изображения без объекта. Результатом сравнения была сумма разницы соответствующих каналов цветов двух пикселей. Если после сравнения всех пикселей в окне наименьшая сумма в этом окне превышала пороговую величину 32, то текущий пиксель изображения с объектом добавлялся в подпись.

3. Результаты

1. Индекстрон был обучен на 2 разных объектах (цветок и кошка). Для тестирования те же объекты были показаны под другими ракурсами и при



Рис. 3. Сравнение гистограмм подписей изображений объекта цветок с разных сторон при порогах 32 и 16. Количество общих признаков равно семи.

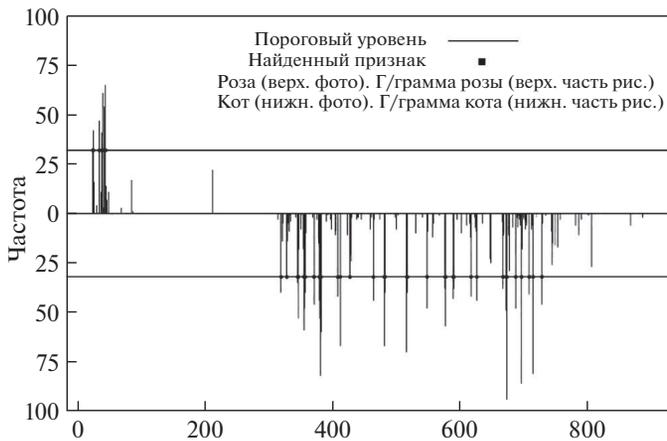


Рис. 4. Сравнение гистограмм подписей изображений объектов цветов и кошки. Общих признаков не найдено.

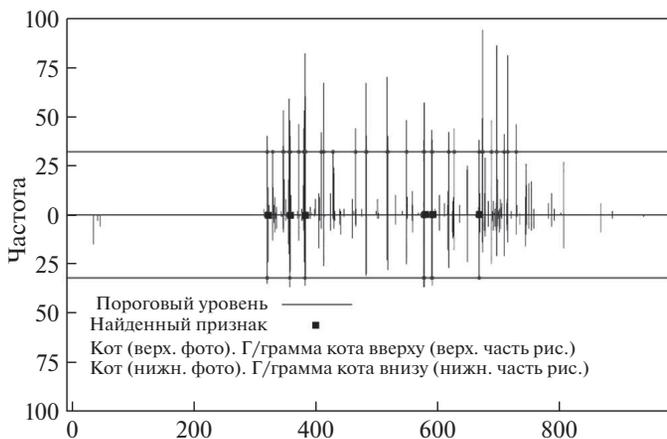


Рис. 5. Сравнение гистограмм подписей изображений объектов кошка (вид спереди) и кошки (вид сбоку). Количество общих признаков равно шести.

других задних планах. Все объекты были успешно распознаны. (В связи с техническими трудностями при публикации цветные фотографии заменены на черно-белые, которые не показывают полную картину. При этом реальный эксперимент проводился с цветными фотографиями.) На рис. 3 показаны гистограмма классов выделенных пикселей 1-го объекта и гистограмма классов выделенных пикселей того же объекта в другом ракурсе. При частотных порогах 32 и 16 соответственно найдены 7 общих признаков, выделенных жирными точками. Для сравнения на рис. 4 показаны гистограммы 1-го объекта и 2-го объекта, где видно, что число общих признаков равно нулю. Следовательно, объект в нижней части рис. 3 должен быть идентифицирован как объект 1. Аналогично объекты в нижней части рис. 5 и рис. 6 должны быть идентифицированы как объект 2, так как число общих признаков равно ше-

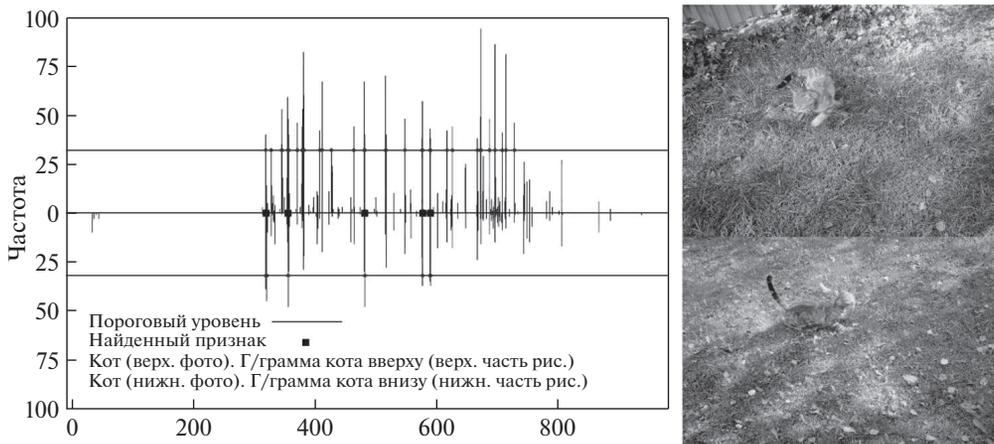


Рис. 6. Сравнение гистограмм подписей изображений объектов кошка (вид спереди) и кошка (другое расположение). Количество общих признаков равно пяти.

сти и пяти соответственно, что больше числа 0, возникающего при сравнении с 1-м объектом. Отметим, что обучение было проведено с использованием только 2 изображений.

2. Набор данных CIFAR-10 [3] использовался для тестирования индекстрона на данных для искусственных нейронных сетей. Для извлечения признаков сверточная нейронная сеть VGG16 с веб-сайта KERAS [10] была предварительно обучена в базе данных ImageNet [11]. Затем VGG16 была обучена на 50 тысячах черно-белых изображений 32×32 (10 категорий) из набора данных CIFAR-10, обеспечивающих 512 признаков на изображение. Наконец, признаки $512 \times 50\,000$ использовались для обучения как 4-слойной нейронной сети, так и индекстрона (таблица, столбец 1). Время обучения указано в столбце 3 таблицы. При тестировании 10 000 изображений ($512 \times 10\,000$ признаков) из вышеуказанного набора данных были классифицированы с использованием как четырехслойной нейронной сети, так и индекстрона. Результаты приведены в столбце 2 таблицы.

Таблица. Нейронная сеть в сравнении с индексным классификатором

Классификатор	Точность %	Обучение (сек)	Оборудование и библиотеки
1	2	3	4
Четырехслойная нейронная сеть Слой: Flatten, Dropout, Dense (256 нейронов, ReLu функция активации), Dense (10 нейронов, softmax)	85,3	900	AMD Ryzen 5 3600, Python, Nvidia GeForce GTX 1660 Super, TensorFlow, Keras, cuDNN
Индекстрон	82,87	16	AMD Ryzen 5 3600, Python

4. Заключение

1. Общей чертой как индекстрона, так и глубокого обучения является автоматическое формирование признаков, что существенно снижает трудоемкость проектирования систем распознавания образов. Вместе с тем производительность индекстрона при обучении намного выше, что связано с используемым в нем методом обратных образов. Этот метод является аналогом индексных поисковиков типа Google, чем в значительной степени и определяется обеспечиваемая методом обратных образов мгновенность обучения каждому новому объекту. Однако если поисковики работают с символьными запросами, то индекстрон — с численными данными.

2. Один из вопросов, стоящих перед машинным обучением, — существуют ли некоторые фундаментальные законы, которым должны следовать оптимальные системы распознавания [12]. Возможно, что ответ на этот вопрос связан с простотой и параллелизмом обратных классификаторов, которые могут работать как индексаторы образов. Перспективным направлением исследований был бы анализ, могут ли описания биологических нейронных сетей быть основаны на обратных множествах. Такой анализ мог бы подсказать эксперименты для проверки гипотетического предположения, что индексация образов, а не вычисления лежат в основе биологических распознающих систем.

3. Время обучения и энергозатраты, требуемые для обучения систем распознавания при решении крупных задач, приводят к необходимости использования облачных технологий и высокопроизводительных машинных станций. Однако простота алгоритма индекстрона позволяет реализовать его всего на одной программируемой логической интегральной микросхеме (ПЛИС) даже в случае таких крупномасштабных задач, как, например, прогнозирование времени отказов авиадвигателей. Аппаратная реализация индекстрона делает возможным его использование для различных автономных устройств, где требуется мгновенная реакция, в том числе мгновенное обучение при возникновении новых ситуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mikhailov A., Karavay M.* Pattern Recognition by Pattern Inversion // Proc. 2nd Int. Conf. on Image, Video Processing and Artificial Intelligence, Shanghai, China, 2019 SPIE Digital Library, V. 11321.
<https://spie.org/Publications/Proceedings/Volume/11321>,
<https://doi.org/10.1117/12.2539069>
2. <https://monkeylearn.com/blog/what-is-tf-idf/>
3. *Krizhevsky A., Nair V., Hinton G.* CIFAR-10. 2009.
Retrieved from <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html>
4. *Theodoridis S., Koutroumbas K.* Pattern Recognition, Academic Press (3rd edition), 2006.
5. *Mikhailov A., Karavay M., Farkhadov M.* Inverse Sets in Big Data Processing // 11th IEEE Int. Conf. on Application of Information and Communication Technology (AICT2017, placeCityMoscow, 2017). M.: IEEE, V. 1.

https://www.researchgate.net/publication/321309177_Inverse_Sets_in_Big_Data_Processing.

6. *Brin S., Page L.* The Anatomy of a Large-scale Hypotextual web Search Engine // Computer Networks and ISDN Syst. 1998. V. 30. Iss. 1–7. Stanford, CA, 94305, USA. Retrieved from [https://doi.org/10.1016/S0169-7552\(98\)00110-X](https://doi.org/10.1016/S0169-7552(98)00110-X)
7. *Sivic J., Zisserman A.* Efficient Visual Search of Videos Cast as Text Retrieval // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2009. V. 31. Iss. 4. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2008.111>
8. *Gonzales R., Woods R.* Digital Image Processing. Pearson Prentice Hall (3rd edition). 2008. http://www.imageprocessingplace.com/root_files_V3/image_databases.htm
9. *Dmitriev A., Panas A., Starkov S.* Storing and Recognizing Information Based on Stable cycles of One-dimensional Maps // Phys. Lett. 1991.
10. Keras. Retrieved from <https://keras.io>. 2019.
11. Imagenet. Retrieved from <http://image-net.org>. 2016.
12. *Jordan M., Mitchell T.* Machine learning: Trends, perspectives, and prospects // Science. 2015. V. 349. Iss. 6245.

Статъа представена к публикации членом редколегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 05.06.2021

После доработки 22.11.2021

Принята к публикации 24.12.2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. Е.Л. КУЛИДА, канд. техн. наук (elena-kulida@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ВРЕМЕН ПОСАДОК ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Рассматривается NP-трудная задача оптимизации последовательности и времен посадок воздушных судов с соблюдением необходимых ограничений. В режиме реального времени получить точное решение задачи не представляется возможным из-за большого объема вычислений. Для получения приближенного решения предлагается комплексный подход: на первом этапе применяется генетический алгоритм для получения начального решения, которое затем улучшается на основе эвристического алгоритма. Предлагаемый подход позволяет получить оптимальные или близкие к оптимальным решения за приемлемое время. Для исследования разработанных алгоритмов использовалось программное средство имитационного моделирования. Обширные вычислительные эксперименты подтвердили эффективность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: управление воздушным движением, последовательность посадок воздушных судов, оптимизация, генетический алгоритм, эвристический алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231022030114

1. Введение

В настоящее время управление воздушными судами (ВС) в районе аэропорта в значительной степени базируется на решениях диспетчеров, которые разрабатывают расписания движения ВС в аэропортах, основываясь на своем опыте, интуиции и некоторых правилах планирования. Однако в последнее время по мере развития научно-исследовательской программы модернизации Европейской системы организации воздушного движения SESAR (Single European Sky ATM Research Programme) возникает необходимость автоматизации систем для обеспечения координации принятия решений в аэропортах [1]. Из-за высокой интенсивности движения в зоне аэропорта и ограниченной пропускной способности взлетно-посадочных полос решения о траектории движения каждого ВС должны приниматься с высокой точностью и за минимальное время [2]. В [3] рассматривается задача планирования траекто-

рий в зоне аэропорта с учетом жестких ограничений по разделению ВС и их бесконфликтному сближению вблизи взлетно-посадочной полосы. Поскольку взлетно-посадочные полосы являются одними из самых жестких узких мест в глобальных узловых аэропортах, одним из путей повышения эффективности аэропортов является построение оптимальных очередей ВС на посадку с целью минимизации задержек рейсов, максимизации пропускной способности аэропорта и минимизации выбросов загрязняющих веществ [4].

В [5] задача формирования оптимальных очередей ВС на посадку была формализована в виде задачи смешанного целочисленного линейного или квадратичного программирования (в зависимости от выбранной целевой функции) с использованием $\sim P^2$ целочисленных переменных, принимающих значения 0 или 1, для учета необходимых ограничений на минимальное время разделения между ВС, где P – количество ВС. Применение стандартных методов оптимизации для получения точного решения приводит к экспоненциальному росту времени счета с ростом P . Для решения задачи в режиме реального времени, когда решение необходимо пересчитывать постоянно и очень быстро, в течение нескольких секунд, становится неизбежным применение эвристических алгоритмов для сокращения перебора с учетом знаний об особенностях данной задачи.

В обзоре [6] рассматриваются различные методы приближенного решения задачи оптимизации очередей ВС на посадку: метод рассеивания и бионический метод, метод искусственных иммунных систем, табу-поиск, меметические алгоритмы и др. Для решения задачи предпринимались попытки разработать эффективные генетические алгоритмы на основе перестановок [7]. Особенность заключается в том, что для перестановок стандартные операторы скрещивания неприменимы. В [8] предложен генетический алгоритм, в котором хромосома из перестановки номеров ВС преобразуется в двоичную матрицу, которая позволяет использовать равномерный оператор скрещивания. Однако этот оператор включает матричные операции, требующие значительных вычислительных затрат, при этом оператор скрещивания в процессе генетического алгоритма выполняется многократно.

В настоящей статье предлагаются генетический алгоритм, требующий меньших вычислительных затрат, с оригинальным оператором скрещивания на основе векторов времен посадок ВС и гибридный алгоритм решения задачи, который позволяет повысить эффективность генетического алгоритма на завершающем этапе. Вычислительные эксперименты показали, что предлагаемый подход позволяет получить оптимальные или близкие к оптимальным решения за приемлемое время.

2. Постановка задачи

Задача оптимизации последовательности и времен посадок прибывающих ВС заключается в оптимизации глобальной целевой функции для группы ВС, которые находятся в зоне аэропорта с целью совершить посадку, P – число ВС, ожидающих посадки.

Для каждого ВС определено временное окно, в течение которого ВС с номером i может совершить посадку в соответствии с его летно-техническими характеристиками, наличием топлива, длительностью полета и т.д. E_i – самое раннее возможное время приземления i -го ВС; L_i – самое позднее возможное время приземления i -го ВС. Для каждого ВС известно также время T_i – оптимальное время прибытия i -го ВС при условии свободной взлетно-посадочной полосы, $E_i < T_i < L_i$, $i = \overline{1, P}$.

Требуется определить последовательность ВС при посадке и для каждого ВС назначить x_i – время приземления i -го ВС в течение заданного интервала времени $[T_0, T_k]$.

В зависимости от решаемой задачи могут формироваться различные целевые функции. В настоящей статье рассматривается нелинейная целевая функция – сумма квадратов отклонений от оптимальных времен посадок:

$$(1) \quad F(X) = \sum_{i=1}^P (T_i - x_i)^2, \quad X = \{x_i, i = \overline{1, P}\}.$$

В связи с образованием струйно-вихревого следа необходимо обеспечить некоторый минимальный временной интервал между посадками ВС, зависящий от типов следующих друг за другом ВС.

Известна матрица S размера $P \cdot P$, где $S_{c_i c_j}$ – минимальный интервал между посадкой ВС типа c_j после ВС типа c_i , $i, j = \overline{1, P}$, $i \neq j$, c_i – тип i -го ВС.

Решение является допустимым, если для него выполнены два ограничения.

1. Приземление ВС с номером i происходит внутри временного окна $[E_i, L_i]$:

$$(2) \quad E_i \leq x_i \leq L_i, \quad i = \overline{1, P}.$$

2. Соблюдаются необходимые временные интервалы, зависящие от типов ВС, при посадке следующих друг за другом ВС:

$$(3) \quad x_j \geq x_i + S_{c_i c_j}, \quad i \neq j, \quad x_j > x_i, \quad i, j = \overline{1, P}.$$

3. Описание генетического алгоритма

Для задачи оптимизации последовательности и времен посадок группы из P ВС, занумерованных от 1 до P , особь в генетическом алгоритме представляется в виде двух целочисленных векторов $R = \{Y, X\}$.

Вектор $Y = \{y_i, i = \overline{1, P}\}$ представляет собой перестановку номеров ВС и определяет последовательность посадок ВС. Вектор $X = \{x_i, i = \overline{1, P}\}$ представляет собой упорядоченную по возрастанию последовательность смещений времен посадок ВС в секундах относительно начального времени T_0 . Время посадки ВС с номером i равно $T_0 + x_{y_i}$.

3.1. Алгоритм формирования особи случайным образом

Шаг 1. Генерируется вектор Z длины P . Компоненты вектора генерируются при помощи датчика случайных чисел в диапазоне от T_0 до T_K . Этот вектор используется для формирования последовательности посадок ВС.

Шаг 2. Вектор \bar{Y} полагается равным упорядоченной по возрастанию номеров последовательности от 1 до P : $\bar{Y} = \{1, \dots, P\}$.

Шаг 3. Векторы Z и \bar{Y} параллельно сортируются в порядке возрастания z_i , при этом формируется новый вектор Y , который является искомой перестановкой номеров ВС при посадке.

Шаг 4. Полученному вектору Y ставится в соответствие новый вектор X одним из следующих двух способов.

Способ 1. Сохранив последовательность посадок, определяемую вектором Y , вектор X формируем так:

$$(4) \quad x_{y_0} = \max(T_0, E_{y_0}), \quad \max(x_{y_{i-1}} + S_{C_{y_i}, C_{y_{i-1}}}, E_{y_i}), \quad i = \overline{2, P}.$$

В силу такого формирования вектора X , особь $R = \{Y, X\}$ будет удовлетворять ограничению (3), при этом ограничение (2) может быть нарушено. Величина нарушения рассчитывается по формуле:

$$W_1(R) = \sum_{i=1}^P \max(0, x_{y_i} - L_{y_i}).$$

Способ 2. Сохранив последовательность посадок, определяемую вектором Y , вектор X формируем так:

$$x_{y_0} = \max(T_0, E_{y_0}), \quad x_{y_i} = \min\left(\max(x_{y_{i-1}} + S_{C_{y_i}, C_{y_{i-1}}}, E_{y_i}), L_{y_i}\right), \quad i = \overline{2, P}.$$

В силу такого формирования вектора X особь $R = \{Y, X\}$ будет удовлетворять ограничению (2), при этом ограничение (3) может быть нарушено. Величина нарушения рассчитывается по формуле:

$$W_2(R) = \sum_{i=1}^P \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, x_j > x_i}}^P \max(0, S_{C_i C_j} - (x_j - x_i)).$$

Если $W(R) = W_1(R) + W_2(R) = 0$, то R является решением задачи.

3.2. Создание начальной популяции

Начальная популяция $\{R\}$ состоит из N особей, созданных по алгоритму формирования особи случайным образом. Размер популяции N является параметром алгоритма.

Особенностью рассматриваемой задачи является наличие исходного решения $R = \{Y, X\}$, в котором компоненты вектора Y упорядочены в порядке

возрастания времен T_i . Такая последовательность называется *FCFS*-последовательностью (*First-Come, First-Served* – первым пришел, первым обслужен). Вектор X исходного решения формируется на основе *FCFS*-последовательности по процедуре, описанной в шаге 4 алгоритма формирования особи случайным образом. Для повышения эффективности алгоритма исходное решение добавляется в начальную популяцию вместо одного из случайных решений.

3.3. Оценка и упорядочение решений

Особи оцениваются и сравниваются по значениям целевой функции (1) и величинам нарушения $W(R)$.

Сравнение решений.

Решения $R_1 = \{Y_1, X_1\}$ и $R_2 = \{Y_2, X_2\}$ сравниваются следующим образом.

Если $W(R_1) < W(R_2)$, то R_1 лучше, чем R_2 .

Если $W(R_1) = W(R_2)$ и $F(X_1) < F(X_2)$, то R_1 лучше, чем R_2 .

Все решения популяции оцениваются и упорядочиваются от лучших к худшим.

3.4. Операторы скрещивания и мутации

Особенностью генетического алгоритма решения задачи оптимизации последовательности и времен посадок прибывающих ВС является нестандартный оператор скрещивания. Стандартный оператор скрещивания в данном случае применить нельзя, поскольку полученные в результате векторы могут не являться перестановками номеров ВС. Рисунок 1 демонстрирует это на примере одноточечного скрещивания.

Алгоритм модифицированного оператора скрещивания.

Шаг 1. На первом шаге алгоритма для выбранной пары особей-родителей $R_1 = \{Y_1, X_1\}$ и $R_2 = \{Y_2, X_2\}$ выполняется стандартный оператор скрещивания над векторами X_1 и X_2 , в результате формируются вспомогательные векторы Z_1 и Z_2 .

Шаг 2. Формируются векторы $\overline{\overline{Y}}_1$ и $\overline{\overline{Y}}_2$, равные упорядоченным по возрастанию последовательностям номеров от 1 до P : $\overline{\overline{Y}}_1 = \overline{\overline{Y}}_2 = \{1, \dots, P\}$.

Шаг 3. Векторы Z_1 и $\overline{\overline{Y}}_1$ параллельно сортируются в порядке возрастания компонент вектора Z_1 , при этом формируется новый вектор \overline{Y}_1 , который является искомой перестановкой номеров ВС первой особи-потомка. Аналогично при помощи векторов Z_2 и $\overline{\overline{Y}}_2$ формируется вектор \overline{Y}_2 , который является искомой перестановкой номеров ВС второй особи-потомка.

$$\begin{array}{l} y^1 = \{1, 2, 3, \uparrow 4, 5\} \\ y^2 = \{5, 4, 3, \downarrow 2, 1\} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \tilde{y}^1 = \{1, 2, 3, 2, 1\} \\ \tilde{y}^2 = \{5, 4, 3, 4, 5\} \end{array}$$

Рис. 1. Стандартный оператор одноточечного скрещивания.

Шаг 4. Вектору \bar{Y}_1 ставится в соответствие вектор \bar{X}_1 способом, описанным в шаге 4 алгоритма формирования особи случайным образом, приведенного в подразделе 3.1. В процессе формирования над каждым компонентом \bar{x}_i особи-потомка с заданным параметром алгоритма вероятностью p_m выполняется оператор мутации. Оператор мутации заключается в замене значения \bar{x}_i случайно сгенерированным числом в диапазоне от T_0 до T_K . Таким образом, формируется особь-потомок $\bar{R}_1 = \{\bar{Y}_1, \bar{X}_1\}$.

На основе вектора \bar{Y}_2 аналогично формируется особь-потомок $\bar{R}_2 = \{\bar{Y}_2, \bar{X}_2\}$.

3.5. Формирование новой популяции

Выбор решений-родителей выполняется с учетом значений их целевых функций следующим образом.

- Из популяции $\{R\}$ случайным образом выбирается решение $\hat{R} = \{\bar{X}, \bar{Y}\}$.
- Для выбранного решения рассчитывается величина

$$retF = 1 - F(\bar{X}) / \max_{\{R\}} F(X).$$

- Генерируется случайное вещественное число rnd в диапазоне от 0 до 1.
- Если $rnd < retF$, то решение $\bar{R} = \{\bar{X}, \bar{Y}\}$ выбирается в качестве решения-родителя, в противном случае процедура повторяется.

После выбора двух решений-родителей над ними выполняется оператор скрещивания и формируются два решения-потомка. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет сформировано P решений-потомков. Затем все $2P$ решений оцениваются и упорядочиваются. Из P лучших решений формируется новая популяция.

Процесс формирования новой популяции повторяется циклически. Количество повторений определяется параметром алгоритма — количеством поколений M .

3.6. Завершение алгоритма

Работа алгоритма завершается либо после формирования заданного количества поколений M , либо в случае, если популяция стала однородной. Популяция считается однородной, если близко к единице отношение:

$$\min_{X \in \{R\}} F(X) / \max_{X \in \{R\}} F(X) > 0,98.$$

В качестве решения задачи выбирается лучшее решение из последней популяции.

Поскольку исходное решение добавляется в начальную популяцию, то достаточным условием существования решения задачи является условие $W(X) = 0$ для исходного решения.

Отметим, что задача может не иметь решения, если недостаточна пропускная способность взлетно-посадочной полосы. Для фиксированной группы ВС существует минимальное время T_{\min} , которое при посадке этих ВС с соблюдением минимальных временных интервалов уменьшить нельзя ни при какой последовательности посадок. Необходимым условием существования решения является условие $T_k - T_0 \geq T_{\min}$.

4. Организация вычислительных экспериментов

Для исследования зависимости результата от параметров алгоритма разработано программное средство имитационного моделирования.

Программное средство позволяет:

- генерировать тесты с заданными параметрами, главным из которых является интенсивность потока ВС на посадку, зависящая от P и величины временного интервала $Time = T_k - T_0$,
- выбирать целевую функцию (1) или (2),
- выбирать алгоритм решения и задавать параметры алгоритма,
- в автоматическом режиме набирать статистику по заданному количеству тестов и сохранять ее в файле.

Тесты генерируются следующим образом.

Тип ВС определяется при помощи функции генерации случайного целого числа из заданного диапазона $1, \dots, K$: $C_i = rnd.Next(K)$, $i = \overline{1, P}$.

Времена $0 \leq E_i \leq T_i \leq L_i \leq Time$, $i = \overline{1, P}$, для всех ВС формируются при помощи датчика случайных вещественных чисел.

$T_i = rnd.Next(T_0, T_0 + Time)$ – оптимальное время прибытия i -го ВС – случайное число в диапазоне $(T_0, T_0 + Time)$, $i = \overline{1, P}$. Интенсивность потока ВС варьируется параметром $Time$.

$E_i = T_0 - t - rnd.Next(2t)$ – самое раннее возможное время приземления i -го ВС, $i = \overline{1, P}$, t – ориентировочная минимальная длительность окна посадки, например $t = 300$ с, $rnd.Next(t)$ – случайный разброс времени окна посадки в диапазоне $0, 2t$.

$L_i = T_0 + t + rnd.Next(2t)$ – самое позднее возможное время приземления i -го ВС, $i = \overline{1, P}$.

Подробно программное средство моделирования описано в [9].

Для оценки эффективности решения, полученного при помощи генетического алгоритма, это решение на большом количестве тестов сравнивалось с исходным решением, а для задач небольшой размерности – до 20 ВС – еще и с оптимальным решением.

Рассматриваемая задача сводится к задаче смешанного целочисленного линейного или квадратичного программирования (в зависимости от выбранной целевой функции) при помощи введения дополнительных переменных [5]:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ВС } i \text{ приземляется раньше ВС } j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i, j = \overline{1, P}, \quad i \neq j.$$

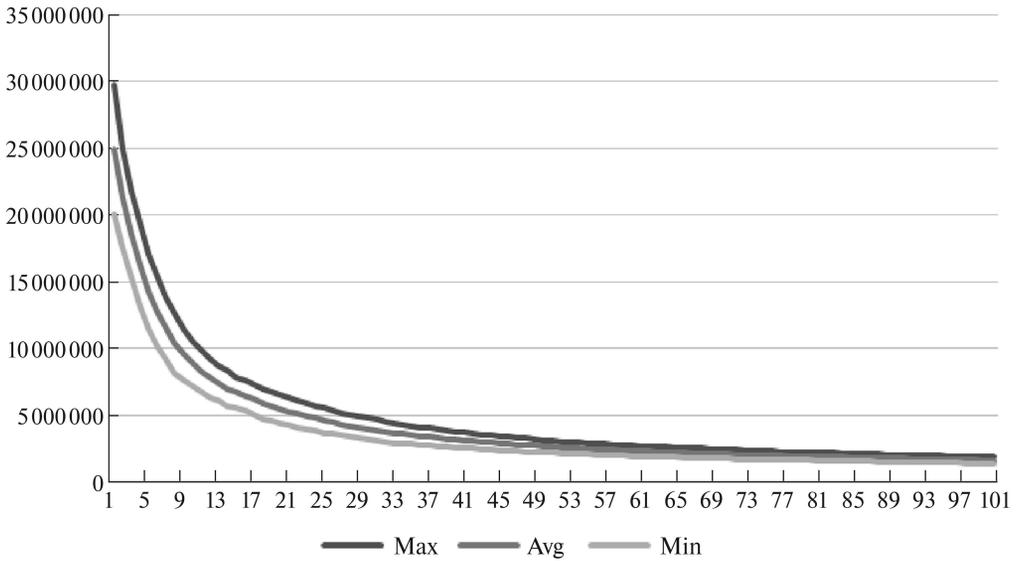


Рис. 2. Пример изменения значений целевой функции для последовательных поколений.

Для задач большой размерности получить точное решение не удастся из-за большого объема вычислений. Для получения оптимального решения для задач небольшой размерности использовалась стандартная библиотека CPLEX. Возможность получения точного решения, его визуализация, анализ и сравнение с приближенными решениями задачи принесли большую пользу в процессе разработки и анализа алгоритмов.

Недостатками генетических алгоритмов являются снижение скорости сходимости по мере приближения к решению и возможное получение однородной популяции вблизи локального минимума. На рис. 2 представлены графики типичного изменения максимального Max, среднего Avg и минимального Min значений целевой функции для последовательных поколений. На нескольких первых поколениях целевая функция улучшается стремительно, затем скорость изменения резко снижается. В этой связи предлагается использовать комплексный подход: на первом этапе использовать генетический алгоритм для быстрого получения начального решения, а затем при помощи эвристического алгоритма улучшить это решение.

Параметры алгоритма – размер популяции N , количество поколений M – необходимо корректировать в зависимости от размерности задачи P . В [7] предлагается следующий способ расчета параметров:

$$N = 30 + 10 \left(\text{round} \left(\frac{\max(0, P - 10)}{5} \right) \right),$$

$$M = 20 + 10 \left(\text{round} \left(\frac{\max(0, P - 10)}{5} \right) \right).$$

5. Исследование эффективности комплексного алгоритма

Ранее был разработан и реализован эвристический алгоритм на основе перестановок для решения поставленной задачи на основе улучшения некоторого начального решения [9].

В основе алгоритма лежат сравнение решений с переставленными близко расположенными в последовательности посадок ВС разных типов и выбор лучшего решения. Пример представлен на рис. 3 — в результате трех перестановок значение целевой функции (2) уменьшилось с 589 512 до 306 912.

Первый шаг эвристического алгоритма заключается в итерационном процессе формирования, сравнения и выбора лучшего из двух решений, в которых переставлены два рядом стоящих компонента вектора Y , если им соответствуют ВС разных типов:

$$Y = \{y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_P\}, \quad j = \overline{1, P-1},$$

$$\tilde{Y} = \{y_1, \dots, y_{j+1}, y_j, \dots, y_P\},$$

Для векторов Y и \tilde{Y} строятся векторы X и \tilde{X} описанным выше способом (4), полученные решения сравниваются и для дальнейших итераций выбирается лучшее из них.

Второй шаг эвристического алгоритма заключается в итерационном процессе формирования, сравнения и выбора лучшего из трех решений, в которых переставлены три рядом стоящих компонента вектора Y , если им соответствуют ВС разных типов:

$$\{y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_P\},$$

$$\{y_1, \dots, y_{j+1}, y_{j+2}, y_j, \dots, y_P\}, \quad j = \overline{1, P-2},$$

$$\{y_1, \dots, y_{j+2}, y_j, y_{j+1}, \dots, y_P\},$$

На каждом шаге алгоритма для дальнейших итераций выбирается лучшее решение.

Этот алгоритм работает тем эффективнее, чем лучше взятое за основу начальное решение. Подробное описание и результаты исследования эффективности эвристического алгоритма приводятся в [10].

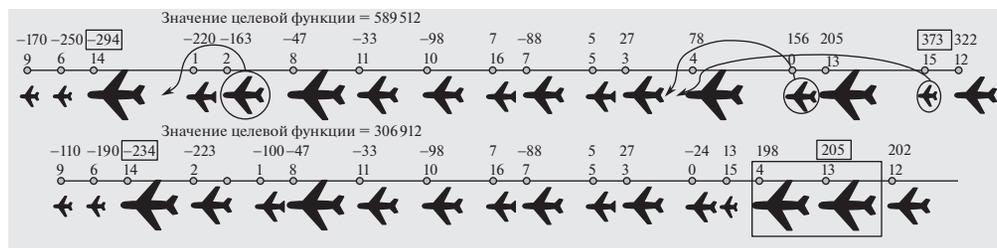


Рис. 3. Пример перестановок в последовательности посадок ВС.

Таблица 1. Значения целевой функции для разных решений для 17 ВС

Тест №	Исходное решение	Генетический алгоритм	Комплексный алгоритм, 1-й шаг	Комплексный алгоритм, 2-й шаг	Точное решение, CPLEX
1	704 400	403 068	391 788	307 564	293 100
2	633 057	361 836	297 801	234 696	171 687
3	279 885	220 277	212 469	212 469	166 424
4	286 196	157 848	155 688	141 035	141 035
5	544 427	244 942	158 362	158 362	158 362
6	261 039	109 815	74 370	74 370	74 370
7	233 146	127 655	100 882	100 882	100 882
8	232 913	212 217	210 177	175 292	162 332
9	162 565	162 485	150 013	150 013	150 013
10	211 737	206 756	206 756	206 756	206 756
11	430 268	173 584	122 384	119 752	119 752
12	323 899	259 419	243 954	243 954	230 094
13	462 540	322 080	266 424	266 424	211 584
14	220 370	181 586	135 566	130 446	130 446
15	345 061	195 525	158 253	152 916	134 212

Таблица 2. Значения целевой функции для разных решений для 50 ВС

Тест №	Исходное решение	Генетический алгоритм	Комплексный алгоритм, 1-й шаг	Комплексный алгоритм, 2-й шаг
1	2 904 778	1 745 359	1 039 215	1 035 355
2	1 887 645	999 401	426 044	426 044
3	2 354 880	1 231 366	1 024 269	940 472
4	1 805 502	1 768 538	1 126 340	955 292
5	3 193 848	797 364	592 548	534 562
6	1 158 859	591 509	506 445	461 345
7	2 571 624	2 417 078	1 596 856	1 364 057
8	2 310 212	589 444	427 588	403 588
9	747 182	437 120	378 117	378 117
10	3 347 467	1 150 929	878 921	775 345
11	2 462 607	2 177 331	1 619 727	1 424 103
12	3 332 179	1 353 453	648 310	629 647
13	1 989 415	1 729 610	1 070 057	961 849
14	1 395 464	1 104 507	601 173	569 085
15	2 848 916	2 219 743	1 384 726	1 375 948

Предлагается использовать комплексный алгоритм, состоящий из двух этапов.

1. Получить начальное решение при помощи предлагаемого генетического алгоритма.

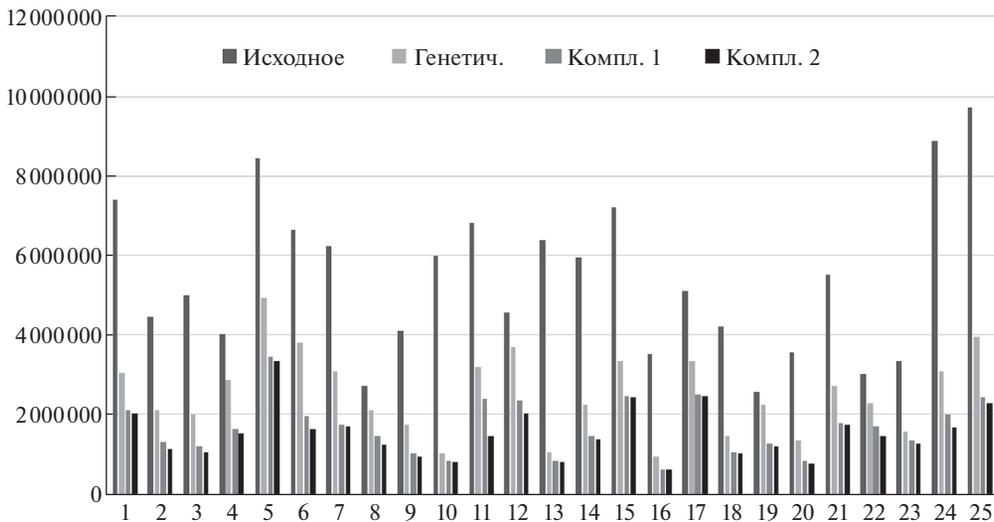


Рис. 4. Сравнение значений целевых функций, полученных на основе разных алгоритмов.

2. Получить решение при помощи эвристического алгоритма на основе перестановок, используя начальное решение, полученное на первом этапе.

В табл. 1 приводится пример сравнения значений целевых функций (2), полученных при помощи разных алгоритмов, для 15 тестовых задач для 17 ВС. Оптимальные значения целевых функций выделены жирным шрифтом.

Для задач большой размерности получить точное решение не удастся из-за вычислительной сложности. Для определения эффективности алгоритмов сравниваются значения целевой функции для исходного и полученных решений.

В табл. 2 приводится пример значений целевых функций (2), полученных при помощи разных алгоритмов, для 15 тестовых задач для 50 ВС.

На рис. 4 значения целевых функций, полученных на основе разных алгоритмов для тестов из 100 ВС, представлены в форме диаграммы.

В процессе вычислительных экспериментов выигрыш вычислялся по формуле:

$$\left(\frac{F(X) - F(\bar{X})}{F(X)} \right) 100\%,$$

где X – исходное решение, \bar{X} – исследуемое решение. В табл. 3 представлены средние выигрыши, полученные после применения генетического алгоритма,

Таблица 3. Выигрыш в результате применения алгоритмов

Количество ВС	ГА	ГА + ЭА шаг 1	ГА + ЭА шаг 2
17	≈46,2%	≈54,1%	≈56,4%
50	≈51,5%	≈67,8%	≈70,1%
100	≈53,5%	≈70,2%	≈72,4%

после первого шага эвристического алгоритма и после второго шага эвристического алгоритма.

Основной вклад в уменьшение значения целевой функции вносит применение генетического алгоритма, 1-й шаг эвристического алгоритма позволяет значительно улучшить полученное решение, уменьшение значения целевой функции после 2-го шага эвристического алгоритма менее существенно.

6. Заключение

В Российской Федерации в полном объеме автоматизированное регулирование потоков воздушного движения не внедрено, поэтому развитие теории, методов и алгоритмов для поддержки систем планирования и регулирования потоков воздушного движения в условиях увеличивающейся интенсивности воздушного движения является актуальной проблемой.

Проведенные исследования подтвердили целесообразность применения в реальных условиях, для задач оптимизации последовательности и времен посадок ВС большой размерности (более 20 ВС), методов приближенного решения, которые позволяют получить за приемлемое время (за несколько секунд) хорошее, хотя не всегда оптимальное решение.

Представлены три оригинальных алгоритма формирования очередей ВС на посадку: генетический, эвристический и комплексный, в котором решение, полученное на основе генетического алгоритма, используется в качестве начального решения для эвристического алгоритма. Разработанные алгоритмы реализованы в виде библиотеки программ.

Для исследования эффективности и обоснования методов и алгоритмов построения оптимальных очередей ВС на посадку разработан инструментальный программный комплекс, который включает средства моделирования различных ситуаций воздушного движения, сбора статистического материала на основе большого числа экспериментов и анализа результатов.

Описаны вычислительные эксперименты с целью оценки эффективности и быстродействия программ, реализованных на основе разработанных алгоритмов. Для оценки эффективности использовались оптимальные результаты, полученные при помощи стандартного пакета CPLEX. Подтверждены эффективность и достаточное быстродействие реализованных программ формирования очередей ВС на посадку для задач разной размерности при интенсивном потоке ВС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samà M., D'Ariano A., Corman F., Pacciarellia D. Coordination of Scheduling Decisions in the Management of Airport Airspace and Taxiway Operations // Transportation Research. Part A: Policy and Practice. 2018. V. 114. Part B. P. 398–411.
2. Samà M., D'Ariano A., Palagachev K., Gerdtts M. Integration Methods for Aircraft Scheduling and Trajectory Optimization at a Busy Terminal Manoeuvring Area // OR Spectrum. 2019. V. 41. P. 641–681.

3. *Ng K.K.H., Lee C.K.M., Chan F.T.S., Chen C.H., Qin Y.* A Two-stage Robust Optimisation for Terminal Traffic Flow Problem // *Applied Soft Computing*. 2020. V. 89. 106048.
4. *Yin J., Ma Y., Hu Y., et al.* Delay, Throughput and Emission Tradeoffs in Airport Runway Scheduling with Uncertainty Considerations // *Netw Spat Econ*. 2021. 21. P. 85–122.
5. *Beasley J.E., Krishnamoorthy M., Sharaiha Y.M., Abramson D.* Scheduling Aircraft Landings – the Static Case // *Transportation Science*. 2000. V. 34. No. 2. P. 180–197.
6. *Вересников Г.С., Егоров Н.А., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.* Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку. Ч. 2. Методы приближенного решения // *Проблемы управления*. 2018. № 5. С. 2–13.
Veresnikov G.S., Egorov N.A., Kulida E.L., Lebedev V.G. Methods for Solving of the Aircraft Landing Problem. II. Approximate Solution Methods // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 8. P. 1502–1518.
7. *Hu X.B., Chen W.H.* Genetic Algorithm Based on Receding Horizon Control for Arrival Sequencing and Scheduling // *Eng. Appl. Artif. Intell*. 2005. V. 18. No. 5. P. 633–642.
8. *Hu X.B., Di Paolo E.* Binary-representation-based Genetic Algorithm for Aircraft Arrival Sequencing and Scheduling // *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Syst*. 2008. V. 9. No. 2. P. 301–310.
9. *Kulida E.L.* Analysis of Algorithms for Solving the Aircraft Landing Problem // *Proc. 13th Int. Conf. “Management of Large-Scale System Development” (MLSD)*. Moscow: IEEE, 2020. С. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9247839>.
10. *Кулида Е.Л., Лебедев В.Г., Егоров Н.А.* Исследование эффективности алгоритма оптимизации потока воздушных судов на посадку // *Проблемы управления*. 2019. № 6. С. 63–69.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 19.04.2021

После доработки 21.10.2021

Принята к публикации 20.11.2021

СОДЕРЖАНИЕ

К 70-летию со дня рождения Б.М. Миллера 3

Линейные системы

Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации 7

Нелинейные системы

Муницына М.А. Динамика кельтского камня на плоскости с вязким трением . . 33

Тхай В.Н. Агрегирование автономной системы с притягивающим циклом 41

Стохастические системы

Шайкин М.Е. Анализ динамического регулятора по выходному сигналу для стохастических систем мультипликативного типа 54

Управление в технических системах

Краснянский М.Н., Обухов А.Д., Дедев Д.Л. Система управления адаптивной беговой платформой для перемещения в виртуальной реальности 69

Управление в социально-экономических системах

Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г. К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии 84

Гераськин М.И. Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов 110

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

Хацкевич В.Л. Средние нечетких чисел в задаче оценивания нечеткой информации 132

Михайлов А.М., Каравай М.Ф., Сивцов В.А. Мгновенное обучение при распознавании образов 144

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Кулида Е.Л. Генетический алгоритм решения задачи оптимизации последовательности и времен посадок воздушных судов 156

C O N T E N T S

To the 70th Anniversary of B.M. Miller 3

Linear Systems

Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Output Feedback Design Using Observers as an Optimization Problem 7

Nonlinear Systems

Munitsyna M.A. Dynamics of the Celt on a Horizontal Plane with Viscous Friction.. 33

Tkhai V.N. Aggregation of an Autonomous System with an Attractive Cycle 41

Stochastic Systems

Shaykin M.Ye. Analysis of Dynamical Output Regulator for Stochastic Multiplicative Type Systems 54

Control in Technical Systems

Krasnyanskiy M.N., Obukhov A.D., Dedov D.L. Adaptive Running Platform Control System for Moving in Virtual Reality 69

Control in Social Economic Systems

Algazin G.I., Algazina J.G. To the Analytical Study of Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models 84

Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in Tripolia Game with Agents' Linear Cost Functions 110

Intellectual Control Systems, Data Analysis

Khatskevich V.L. Means of Fuzzy Numbers in the Problem of Estimating of Fuzzy Information..... 132

Mikhailov A.M., Karavay M.F., Sivtsov V.A. Instant Learning with Applications to Pattern Recognition 144

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Kulida E.L. The Genetic Algorithm for Solving the Problem of Aircraft Arrival Sequencing and Scheduling 156