

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 65, номер 5, 2020

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Исследование электромагнитного воздействия на человека внутри автомобиля методом вспомогательных источников

*В. Б. Джеладзе, Т. Р. Нозадзе, В. А. Табатадзе, И. А. Петоев-Дарсавелидзе,  
М. М. Пришвин, Р. С. Заридзе*

419

Измерение комплексной диэлектрической проницаемости материалов на основе гребневого волновода

*А. В. Донченко, Г. Ф. Заргано, В. В. Земляков, А. Б. Клещенков*

427

Численное моделирование прохождения волн очень низкой частоты через магнитоактивную плоскоструйную плазму нижней ионосферы Земли

*А. В. Мошков, В. Н. Пожидаев*

434

---

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Синтез электромагнитных импульсов с разной частотной полосой в свободном пространстве

*А. М. Ефремов, В. И. Кошелев, В. В. Плиско*

442

Рассеяние плоской волны на цилиндре с кусочно-аналитической формой сечения

*В. А. Калошин, Д. Т. Луу*

457

---

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Класс оптимальных весовых функций для спектрального анализа со скоростью спада лепестков спектра, кратной 12 децибел на октаву

*Г. В. Зайцев, А. Д. Хзмалян*

464

Нижняя граница Рао–Крамера дисперсий совместных оценок параметров смеси узкополосного и широкополосного сигналов с белым шумом

*В. Н. Жураковский, А. С. Логвиненко*

479

Дважды стохастическая фильтрация пространственно неоднородных изображений

*К. К. Васильев, В. Е. Дементьев*

487

---

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

Использование сверхвысокочастотной коаксиальной брэгговской структуры для измерения параметров диэлектриков

*Д. А. Усанов, С. А. Никитов, А. В. Скрипаль, Д. В. Пономарев,  
О. М. Рузанов, И. О. Тимофеев*

495

---

## **ЭЛЕКТРОНИКА СВЧ**

Дискретные составляющие амплитудных шумов усилительных клистронов

*Д. А. Комаров, С. П. Масленников, Е. П. Якушкин*

504

---

## **ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА**

О влиянии поперечных тепловых скоростей электронов в сходящихся ленточных электронных пучках, формируемых пушками с частичной магнитной экранировкой катода

*Ю. Г. Гамаюнов, Е. В. Патрушева*

507

---

## **ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

О возможности исследования феррожидкостей ядерно-магнитным магнитометром с текущим образцом

*В. В. Давыдов, В. И. Дудкин, Н. С. Мязин, Р. В. Давыдов*

513

---

---

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 537.874.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ  
НА ЧЕЛОВЕКА ВНУТРИ АВТОМОБИЛЯ  
МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ**

© 2020 г. В. Б. Джеладзе<sup>а</sup>, \*, Т. Р. Нозадзе<sup>а</sup>, В. А. Табатадзе<sup>а</sup>,  
И. А. Петоев-Дарсавелидзе<sup>а</sup>, М. М. Пришвин<sup>а</sup>, Р. С. Заридзе<sup>а</sup>

<sup>а</sup>*Тбилисский государственный университет, лаборатория прикладной электродинамики и радиотехники,  
просп. Чавчавадзе, 3, Тбилиси, 0128 Грузия*

*\*E-mail: veriko.jeladze001@ens.tsu.edu.ge*

Поступила в редакцию 27.11.2017 г.

После доработки 16.01.2018 г.

Принята к публикации 24.01.2018 г.

Исследовано влияние электромагнитного поля беспроводных средств связи на человека, находящегося внутри автомобиля, в диапазонах частот 450, 900 и 1800 МГц, соответствующих рабочему диапазону полицейских раций и современных мобильных телефонов. Приведен сравнительный анализ влияния поверхности земли под автомобилем. Результаты численных расчетов, проведенных с использованием метода вспомогательных источников, показывают наличие резонансных явлений и высокого реактивного поля внутри автомобиля, что ведет к нежелательному повышению уровня поглощаемой энергии в тканях человека.

DOI: 10.31857/S0033849420050034

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение воздействия электромагнитных полей от мобильных телефонов или от других средств беспроводной связи на человека является на сегодняшний день весьма актуальной задачей. Характер такого воздействия зависит от свойств источников поля, от способности тела поглощать и накапливать энергию, от расположения окружающих предметов, а также от ряда других факторов [1–6]. В работах [7–10] рассматривался характер воздействия поля в зависимости от положения руки и пальцев при удерживании мобильного телефона. Также важно учитывать, где находится пользователь — в закрытом или полужакрытом пространстве.

В работах [11, 12] были изучены ситуации, когда человек находился внутри комнаты с окном, а источником поля служил мобильный телефон или внешняя антенна от базовой станции. Применение метода вспомогательных источников (МВИ) при моделировании позволило имитировать различную прозрачность стен комнаты. Результаты показали наличие резонансных реактивных полей высокой амплитуды для комнаты с меньшей прозрачностью.

В данной работе рассмотрены ситуации, когда человек находится внутри автомобиля, а источник электромагнитного поля — мобильный теле-

фон, находящийся в непосредственной близости от головы. Как известно, автомобили изготавливаются из металлических и других проводящих материалов, которые менее прозрачны для электромагнитных волн. На некоторых частотах такая закрытая металлическая структура ведет себя как резонатор, что приводит к формированию резонансного поля высокой амплитуды. Такое поле может негативно влиять на человека, поэтому изучение рассматриваемой задачи для разных ситуаций и различных значений параметров системы весьма актуально. В работе исследованы свойства таких резонансных полей, а также влияние отражающей поверхности земли под автомобилем на их формирование.

Так же как и в предыдущих работах [11–14], задача решается с применением МВИ, а модель человека представляет собой однородный диэлектрик с усредненными значениями электродинамических параметров. В рассматриваемой модели автомобиля пренебрегается наличием колес, так как их влияние на формирование внутреннего поля несущественно.

Вопрос о формировании резонансного поля внутри автомобиля и о характере возбуждаемых поверхностных токов частично затрагивался в работе [14]. В ней не учитывались модель человека и влияние поверхности земли, однако был подробно описан алгоритм применения МВИ к неза-

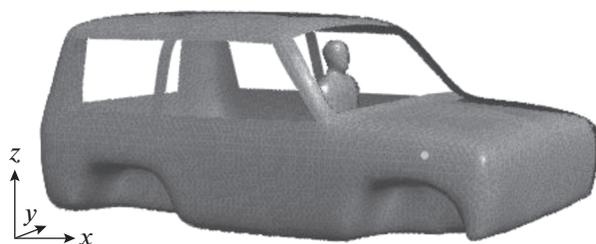


Рис. 1. Исследуемая модель.

мкнутым поверхностям, который находит свое применение и в данной работе. Следует отметить, что существует ряд других работ по рассматриваемой тематике, с использованием различных численных методов (см., например, [15, 16]). Однако вопрос о влиянии резонансного реактивного поля на человека полностью пока не изучен.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим модель системы, состоящей из автомобиля и находящегося внутри него человека (рис. 1). Падающее электромагнитное поле проникает во всю систему, и задача заключается в определении полей, формирующихся внутри и вне автомобиля, а также внутри человека. В данной модели (рис. 2) автомобиль представляет собой идеально проводящую поверхность  $S$ . На ней имеются открытые части  $\sigma_w$ ,  $w = 1, 2, \dots$  в виде окон. Модель человека представляет собой однородный диэлектрик с потерями, ограниченный замкнутой поверхностью  $S_0$ . Поле  $\vec{E}_{\text{пад}}, \vec{H}_{\text{пад}}$  от внутреннего источника считается заданным. Нам следует определить поля в трех областях: вне автомобиля (I), внутри автомобиля (II) и внутри модели человека (III). Более детальное описание применения МВИ к аналогичной задаче, приведено в работе [14].

Построим две пары вспомогательных поверхностей:  $S'_0, S''_0$  – вне и внутри человека, и  $S', S''$  – вне и внутри автомобиля, с распределенными на них вспомогательными источниками. В качестве вспомогательных источников используются два взаимно перпендикулярно ориентированных комбинированных диполя с неизвестными амплитудами, ориентированных вдоль касательных к соответствующей поверхности и создающих поля  $\vec{E}_{\text{комб}}, \vec{H}_{\text{комб}}$  и  $\vec{E}'_{\text{комб}}, \vec{H}'_{\text{комб}}$  [12, 17, 18]. Такие источники, как известно, обеспечивают направленное излучение. Количество вспомогательных источников на поверхностях  $S'_0$  и  $S''_0$  равно  $N_0$  числу точек коллокаций на поверхности  $S_0$ . Аналогично, количество вспомогательных источников на поверхностях  $S'$  и  $S''$  равно  $N$  числу точек коллока-

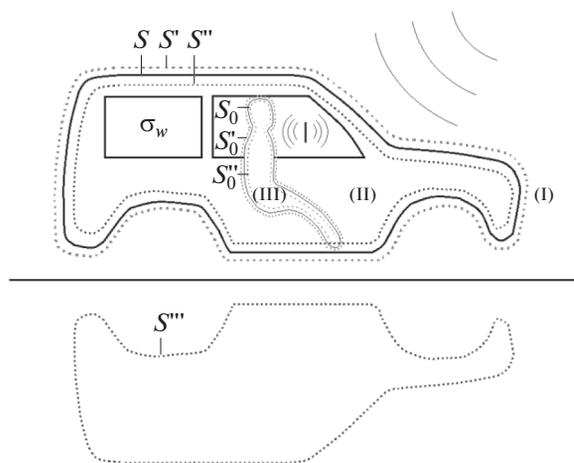


Рис. 2. Применение МВИ с учетом поверхности земли.

ций на поверхности  $S$ . Числа  $N_0$  и  $N$ , являющиеся вспомогательными параметрами, должны быть подобраны заранее, с учетом желаемой точности решения задачи. Другими вспомогательными параметрами являются удаления  $\delta'_0, \delta''_0$  и  $\delta', \delta''$  вспомогательных поверхностей от основных (см. рис. 2). Поскольку рассматриваемая структура имеет сложную, выпукло-вогнутую форму, то значения  $\delta'_0, \delta''_0$  и  $\delta', \delta''$  должны быть подобраны весьма тщательно, с учетом сингулярностей аналитических продолжений рассеянных и собственных полей.

Подробные исследования природы сингулярностей аналитических продолжений внутренних (включая и собственных) полей показали, что они формируются исключительно поверхностью тела и расположены во внешней области или вдоль края открытой части этой поверхности. Сингулярности аналитического продолжения внешнего рассеянного поля расположены внутри тела на каустической поверхности. Исследования также показали, что вспомогательные поверхности должны охватывать эти сингулярности, что минимизирует время и погрешность численных расчетов. При этом минимальный радиус кривизны поверхности тела определяет максимальное допустимое удаление вспомогательных поверхностей, оно находится в пределах  $0.2\lambda \dots 0.3\lambda$  [14, 18, 19].

Поле  $\vec{E}_{(1)}, \vec{H}_{(1)}$  в первой области определяется вспомогательными источниками на поверхности  $S''$ :

$$\vec{E}_{(1)} = \sum_{n=1}^N \left( a_n \vec{E}_{\text{комб}}^{(1)} + b_n \vec{E}'_{\text{комб}} \right) \Big|_{S''},$$

$$\vec{H}_{(1)} = \sum_{n=1}^N \left( a_n \vec{H}_{\text{комб}}^{(1)} + b_n \vec{H}'_{\text{комб}} \right) \Big|_{S''}.$$

Так как источник падающего поля  $\vec{E}_{\text{пад}}, \vec{H}_{\text{пад}}$  находится во второй области, то поле  $\vec{E}_{(II)}, \vec{H}_{(II)}$  в ней складывается из  $\vec{E}_{\text{пад}}, \vec{H}_{\text{пад}}$  и поля, определяемого источниками на поверхностях  $S'$  и  $S_0''$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(II)} &= \vec{E}_{\text{пад}} + \sum_{n=1}^N \left( c_n \vec{E}_{\text{комб}}^{(II)} + d_n \vec{E}'_{\text{комб}}^{(II)} \right) \Big|_{S'} + \\ &+ \sum_{m=1}^{N_0} \left( e_m \vec{E}_{\text{комб}}^{(II)} + f_m \vec{E}'_{\text{комб}}^{(II)} \right) \Big|_{S_0''}, \\ \vec{H}_{(II)} &= \vec{H}_{\text{пад}} + \sum_{n=1}^N \left( c_n \vec{H}_{\text{комб}}^{(II)} + d_n \vec{H}'_{\text{комб}}^{(II)} \right) \Big|_{S'} + \\ &+ \sum_{m=1}^{N_0} \left( e_m \vec{H}_{\text{комб}}^{(II)} + f_m \vec{H}'_{\text{комб}}^{(II)} \right) \Big|_{S_0''}.\end{aligned}$$

В третьей области поле  $\vec{E}_{(III)}, \vec{H}_{(III)}$  определяется источниками на поверхности  $S_0'$  (рис. 2).

$$\begin{aligned}\vec{E}_{(III)} &= \sum_{m=1}^{N_0} \left( g_m \vec{E}_{\text{комб}}^{(III)} + h_m \vec{E}'_{\text{комб}}^{(III)} \right) \Big|_{S_0'}, \\ \vec{H}_{(III)} &= \sum_{m=1}^{N_0} \left( g_m \vec{H}_{\text{комб}}^{(III)} + h_m \vec{H}'_{\text{комб}}^{(III)} \right) \Big|_{S_0'}.\end{aligned}$$

Неизвестные комплексные амплитуды  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_m, f_m, g_m, h_m$  вспомогательных источников, общее количество которых составляет  $4 \times (N + N_0)$ , определяются из граничных условий для искомым полей. На поверхности  $S$ , как на проводнике, должны выполняться равенства нулю касательных составляющих полей  $\vec{E}_{(I)}$  и  $\vec{E}_{(II)}$ :

$$\left( \vec{E}_{(I)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_S = 0, \quad \left( \vec{E}_{(II)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_S = 0.$$

На поверхностях окон  $\sigma_w$ , как на границе раздела двух диэлектрических сред (с одинаковыми параметрами), должны выполняться условия сшивания касательных составляющих полей  $\vec{E}_{(I)}, \vec{E}_{(II)}$  и  $\vec{H}_{(I)}, \vec{H}_{(II)}$ :

$$\begin{aligned}\left( \vec{E}_{(I)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{\sigma_w} &= \left( \vec{E}_{(II)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{\sigma_w}, \\ \left( \vec{H}_{(I)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{\sigma_w} &= \left( \vec{H}_{(II)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{\sigma_w}.\end{aligned}$$

На поверхности  $S_0$  должны выполняться условия сшивания касательных составляющих полей  $\vec{E}_{(II)}, \vec{E}_{(III)}$  и  $\vec{H}_{(II)}, \vec{H}_{(III)}$ :

$$\begin{aligned}\left( \vec{E}_{(II)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{S_0} &= \left( \vec{E}_{(III)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{S_0}, \\ \left( \vec{H}_{(II)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{S_0} &= \left( \vec{H}_{(III)} \cdot \vec{\tau} \right) \Big|_{S_0}.\end{aligned}$$

Выполнение приведенных выше граничных условий требуется вдоль двух независимых касательных векторов  $\vec{\tau}_1$  и  $\vec{\tau}_2$  к соответствующим поверхностям. В результате относительно неизвестных

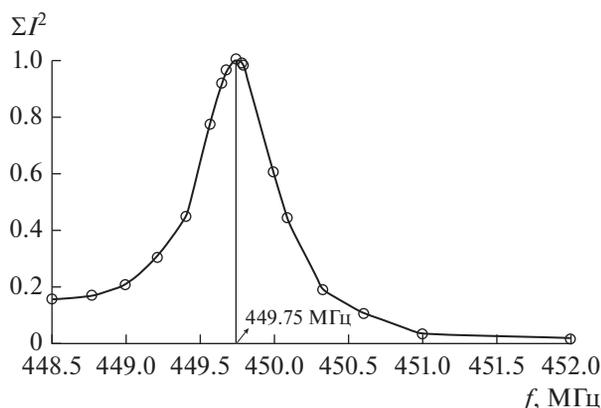
амплитуд получаем систему линейных алгебраических уравнений. После численного решения этой системы на компьютере (с использованием стандартной подпрограммы Math Kernel Library) определяются неизвестные поля во всех указанных областях.

Как отмечалось выше, особый интерес представляет изучение степени влияния поверхности земли на формирование резонансных полей. Будем считать, что поверхность земли является идеальным плоским проводником. Это дает право применить метод зеркальных отображений для описания отраженного поля. Согласно МВИ относительно земли строится зеркальное изображение  $S'''$  вспомогательной поверхности  $S''$  (см. рис. 2). Амплитуды вспомогательных источников на поверхности  $S'''$  отличаются от соответствующих амплитуд источников на  $S''$  лишь знаком. Другими словами, учет поверхности земли не приводит к изменению общего числа неизвестных амплитуд вспомогательных источников, определяемых из граничных условий.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На основе описанного алгоритма применения МВИ создан пакет программ, позволяющий менять параметры изучаемой системы и моделировать различные ситуации облучения. В численных экспериментах антенна от мобильного телефона, мощностью 1 Вт, находилась внутри автомобиля, на расстоянии 2.5 см слева от головы человека. Расчеты проводились в окрестностях частот 450, 900 и 1800 МГц. Были выбраны следующие размеры однородной модели человека: высота 1.67 м, ширина плеч 46 см, диаметр головы 17.5 см. Средние значения вещественной и мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости модели составляли соответственно 44 и 0.9. Размеры кузова автомобиля составляли  $4.10 \times 1.76 \times 1.57$  м; дорожный просвет – 21 см. Исследования проводили как с учетом, так и без учета отражения от поверхности земли. Результаты показали, что без учета отражения амплитуда внутреннего поля оказывается меньше, что можно объяснить способностью излучаемой энергии распределяться по всем направлениям, включая и область под автомобилем. В приведенных ниже результатах отражение от поверхности земли учтено, что ближе к реальной ситуации.

Были исследованы поля внутри и снаружи автомобиля, характер возбужденных поверхностных токов на автомобиле, а также распределение точечного коэффициента уровня поглощаемой мощности SAR (specific absorption rate) внутри модели человека. Большая величина диэлектрической проницаемости человеческого тела спо-



**Рис. 3.** Нормированная частотная характеристика суммы квадратов поверхностных токов в окрестности частоты 450 МГц.

способствует интенсивному замыканию силовых линий и формированию внутреннего поля высокой амплитуды, что приводит к нагреву тканей вследствие высокой проводимости тела.

Были построены зависимости от частоты суммы квадратов токов, определяющих поле внутри автомобиля. Эти частотные характеристики демонстрируют в окрестности изучаемых частот наличие ярко выраженных максимумов, что соответствует явлению резонанса. Очевидно, что малые изменения параметров системы (например, формы кузова автомобиля) приведут к некоторому смещению найденных резонансных частот. Однако значения SAR и амплитуд поля при резонансе, будут того же порядка.

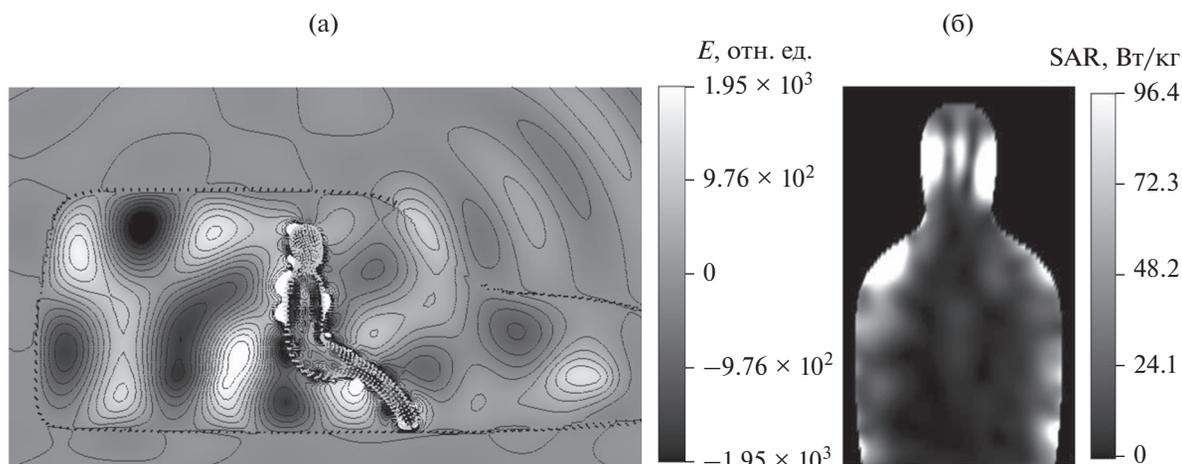
Отдельно изучали ситуации, когда источником падающего поля служит внешняя антенна от базовой станции, мощностью 80 Вт, которая расположена на расстоянии 20 м от автомобиля и на

высоте 15 м от земли. В этом случае амплитуда внутреннего поля оказалась на два порядка меньше, что можно объяснить низкими значениями поля антенны даже на таком расстоянии.

Точность проводимых расчетов определяется среднеквадратическим отклонением от выполнения граничных условий между точками коллокаций. Хотя в самих точках коллокаций эти условия выполняются с достаточно высокой точностью (порядка  $10^{-16}$ ), в промежутках между ними наблюдается отклонение, достигающее максимума, как правило, в срединных точках. Изменением значений вспомогательных параметров (числа точек коллокаций и удаления вспомогательных поверхностей) эту погрешность удается регулировать [14, 18]. Погрешность приведенных ниже численных результатов не превосходит 10%.

### 1.1. Результаты расчетов в окрестности частоты 450 МГц

На рис. 3 приведена частотная характеристика нормированной на максимум суммы квадратов токов, возбужденных на внутренней поверхности автомобиля вблизи частоты 450 МГц, соответствующей рабочему диапазону полицейских раций. При указанных выше параметрах системы резонанс наблюдается на частоте 449.8 МГц. Очевидно, в более широком диапазоне существуют и другие резонансы. На рис. 4а и 4б приведены распределения поля в продольном сечении и соответствующее распределение точечного SAR на указанной резонансной частоте. По сравнению с аналогичными распределениями, представленными на рис. 5а и 5б для нерезонансной частоты (451 МГц, см. рис. 3), значения амплитуды поля возрастают на порядок, а значения SAR увеличиваются в пять раз.



**Рис. 4.** Распределение ближнего поля (а) и распределение точечного SAR внутри человека (б) на резонансной частоте.

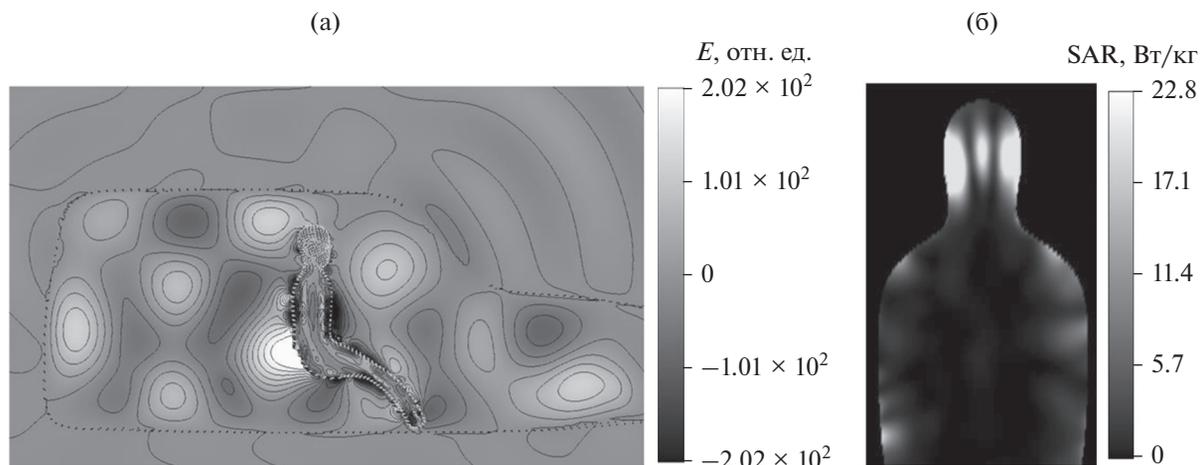


Рис. 5. Распределение ближнего поля (а) и распределение точечного SAR внутри человека (б) вне резонанса.

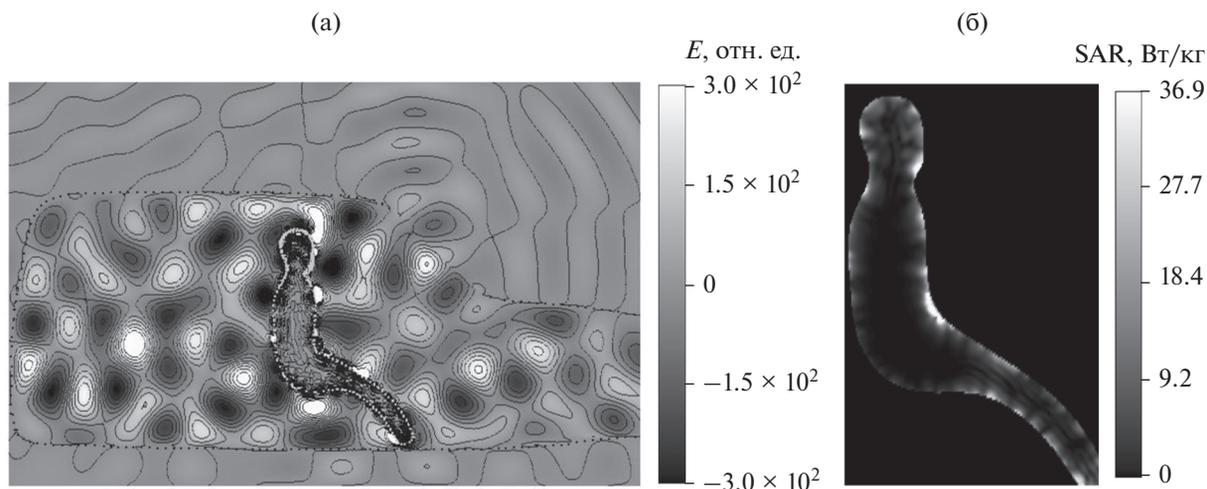


Рис. 6. Распределение ближнего поля (а) и распределение точечного SAR внутри человека (б) на частоте 900 МГц.

1.2. Результаты расчетов  
в окрестности частоты 900 МГц

На рис. 6а и 6б приведены распределения внутреннего поля и SAR для частоты 900 МГц. Как видно, поле проникает в тело человека на меньшую глубину и увеличению SAR подвергается лишь поверхностный слой. В окрестности частоты 900 МГц также построена частотная характеристика нормированной на максимум суммы квадратов токов (рис. 7), демонстрирующая наличие резонанса на частоте 899.9 МГц. Исследования показали, что на резонансной частоте значения амплитуд поля и SAR возрастают на порядок по сравнению с частотой, равной 900 МГц (рис. 8а и 8б).

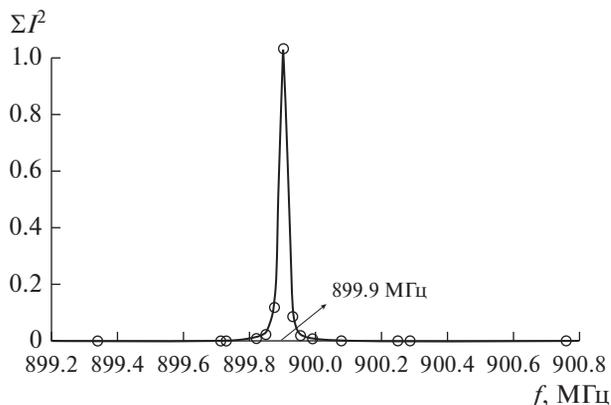


Рис. 7. Нормированная частотная характеристика суммы квадратов поверхностных токов в окрестности частоты 900 МГц.

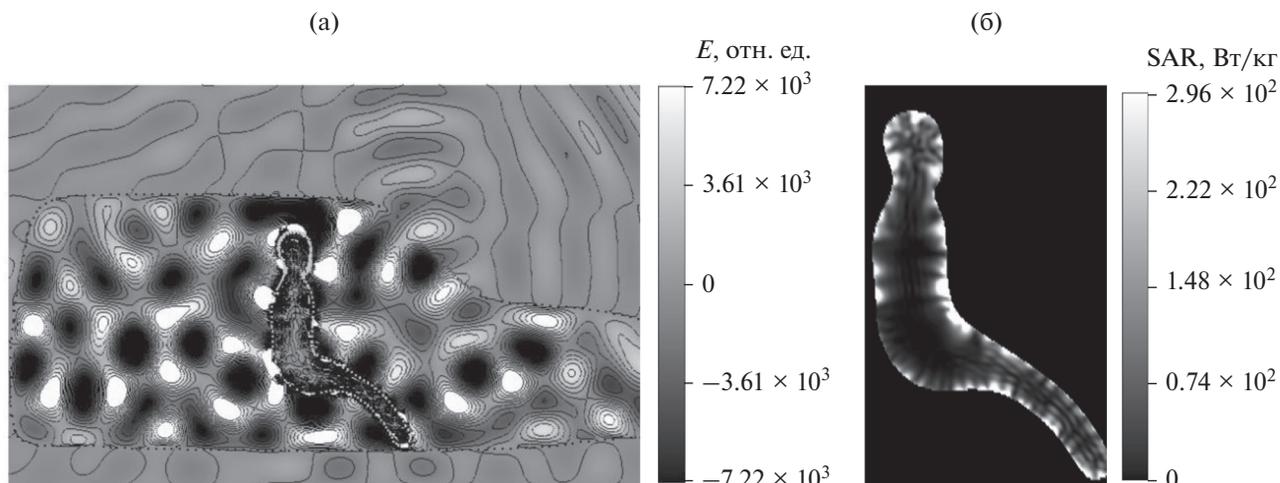


Рис. 8. Распределение ближнего поля (а) и распределение точечного SAR внутри человека (б) на резонансной частоте.

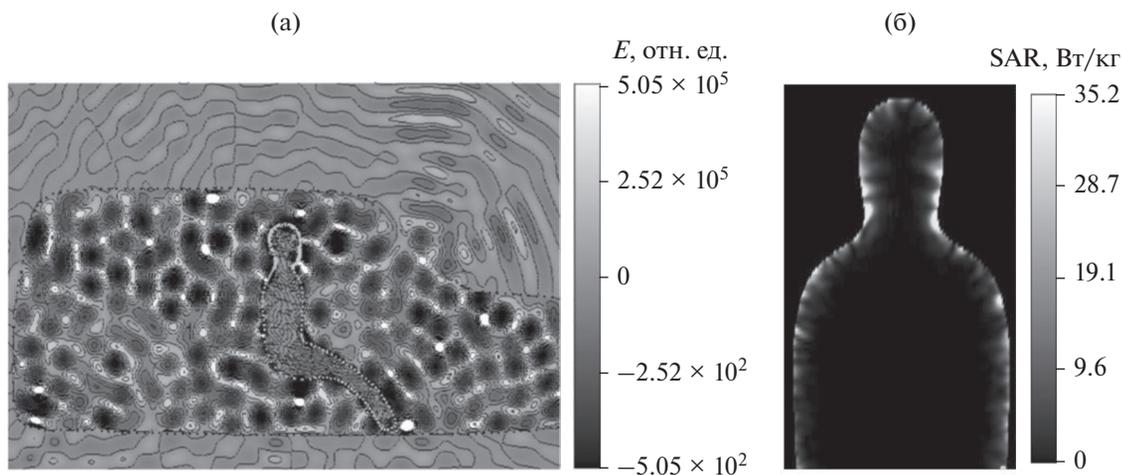


Рис. 9. Распределение ближнего поля (а) и распределение точечного SAR внутри человека (б) на частоте 1800 МГц.

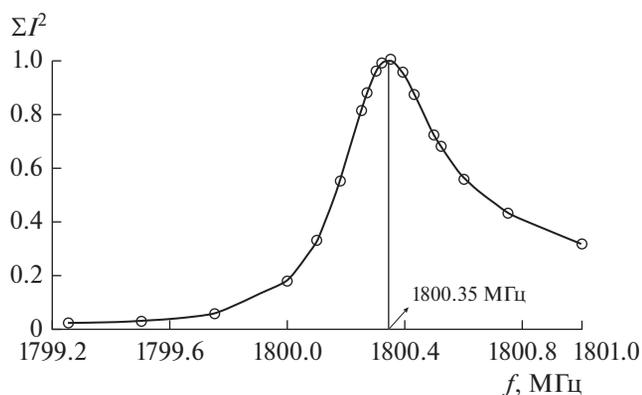


Рис. 10. Нормированная частотная характеристика суммы квадратов поверхностных токов в окрестности частоты 1800 МГц.

### 1.3. Результаты расчетов в окрестности частоты 1800 МГц

На рис. 9а и 9б приведены распределения ближнего поля и SAR на частоте 1800 МГц. В связи с высокими потерями глубина проникновения поля в тело человека оказывается меньше, чем в предыдущих случаях. На такой частоте поглощение электромагнитной энергии в основном будет происходить в коже. Частотная характеристика нормированной суммы квадратов токов, построенная в узком диапазоне вблизи рассматриваемой частоты, также демонстрирует наличие резонанса (рис. 10). Построенные распределения внутреннего поля и SAR (рис. 11а и 11б) показывают, что на резонансной частоте их значения возрастают соответственно в восемь и в четыре раза.

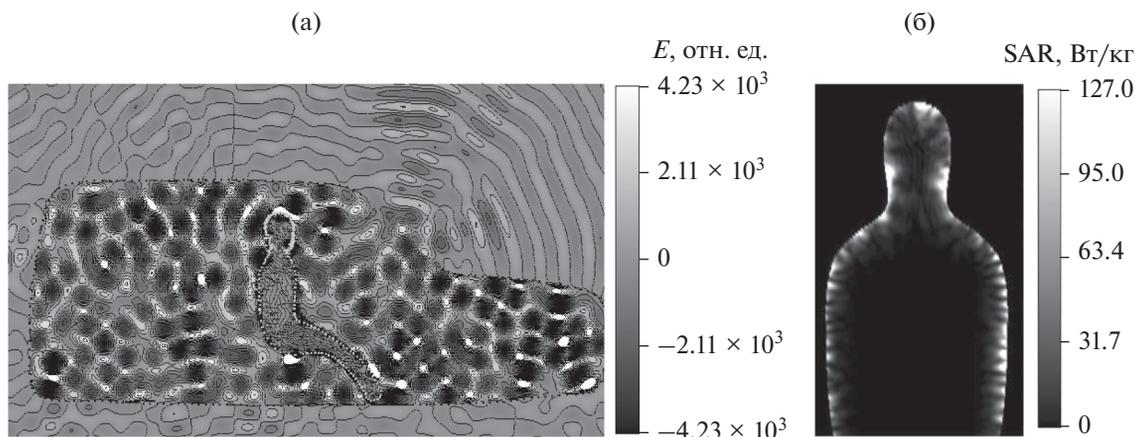


Рис. 11. Распределение ближнего поля (а) и распределение точечного SAR внутри человека (б) на резонансной частоте.

Для более наглядного представления влияния поверхности автомобиля как резонатора, было проведено сравнение значений точечного SAR для двух случаев: человек находится внутри автомобиля или в свободном пространстве. На рис. 12 приведена диаграмма сравнений значений SAR в окрестности трех изучаемых частот. Наивысшие значения соответствуют случаю, когда человек внутри автомобиля подвергается облучению при найденных резонансных частотах, средние значения соответствуют аналогичному случаю вне резонансных частот, наименьшие значения соответствуют случаю свободного пространства. Отсюда можно заключить, какое негативное влияние способна оказать резонансная поверхность автомобиля на находящегося внутри человека. Было проведено сравнение полученных результатов с аналогичными результатами работы [12], в которой изучалось влияние резонансных полей на человека, находящегося внутри помещения. Результаты такого сравнения представлены на рис. 13 в виде диаграммы значений SAR. Как видим, для частот 450 и 900 МГц значения SAR в случае автомобиля выше. Это можно объяснить тем, что поверхность автомобиля менее прозрачна, чем стены помещения (прозрачность которых в данном случае составляла 0.22), а длина волны соответствует размерам окон. В результате оказывается, что значения амплитуд резонансного поля и, соответственно, SAR внутри автомобиля выше. На частоте 1800 МГц значения SAR внутри автомобиля оказываются меньше, чем внутри комнаты. Это можно объяснить тем, что окна автомобиля на этой частоте оказываются более прозрачными (длина волны меньше их размеров), что препятствует формированию внутреннего поля высокой амплитуды.

Некоторые из приведенных в данной работе результатов (например, найденные точные значения резонансных частот) могут меняться в зави-

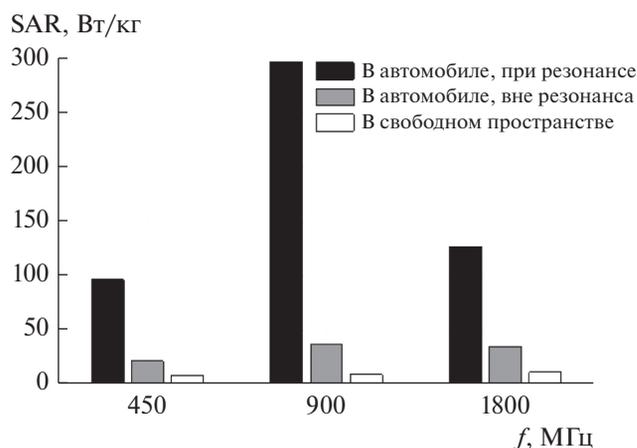


Рис. 12. Диаграмма сравнения значений SAR для человека внутри автомобиля и в свободном пространстве.

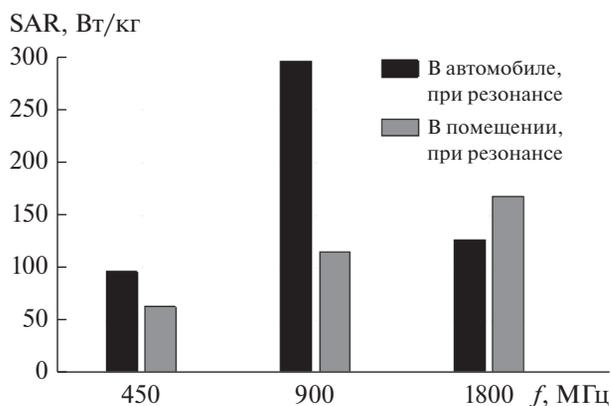


Рис. 13. Диаграмма сравнения значений SAR для человека внутри автомобиля и внутри помещения.

симости от формы, размеров автомобиля и других его характеристик. Очевидно, что при более высокой добротности автомобиля как резонатора значения амплитуд поля и SAR также увеличатся [12]. Поэтому необходимо сокращать до минимума продолжительность разговоров по мобильному телефону внутри автомобиля, поскольку это уменьшит риск возможного негативного влияния внутреннего резонансного поля на человека.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод вспомогательных источников был применен для исследования влияния электромагнитного поля антенны мобильного телефона на человека внутри автомобиля. В расчетах было учтено влияние отражающих поверхности земли под автомобилем. Результаты показали, что наличие внутри автомобиля реактивных полей высокой амплитуды способно привести к многократному увеличению значений коэффициента SAR в тканях человека по сравнению со значениями, полученными в свободном пространстве. Рекомендуется сокращать продолжительность разговоров по мобильному телефону внутри автомобиля.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Грузинского национального фонда имени Ш. Руставели (грант № YS15-2.12-56).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin J.C.* Electromagnetic Fields in Biological Systems. L.: CRC Press, 2011.
2. *Furse C., Christensen D.A., Durney C.H.* Basic Introduction to Bioelectromagnetics. L.: CRC Press, 2009.
3. *Faruque M.R.I.* // Frequenz. J. RF-Eng. and Telecommun. 2012. V. 66. № 3–4. P. 79.
4. *Keshvari J., Kivento M.* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2013. V. 44. P. 012017.
5. *Faruque M.R.I., Islam M.T., Misran N.* // Appl. Computational Electromagnetic Soc. J. 2010. V. 25. № 12. P. 1097.
6. *Wiaart J., Dale C., Bosisio A.V., Le Cornec A.* // IEEE Trans. 2000. V. EMC-42. № 4. P. 376.
7. *Krogerus J., Toivanen J., Icheln C., Vainikainen P.* // IEEE Trans. 2007. V. IM-56. № 6. P. 2375.
8. *Faruque M.R.I., Islam M.T., Misran N.* // Inform. MIDEEM. J. Microelectronics, Electronic Components and Materials. 2010. V. 40. № 3. P. 232.
9. *Iqbal-Faruque M.R., Aisyah-Husni N., Iqbal-Hossain Md. et al.* // J. Appl. Research and Technol. 2014. V. 12. № 5. P. 871.
10. *Iqbal Hossain Md., Iqbal Faruque M.R., Tariqul Islam M.* // J. Appl. Research and Technol. 2015. V. 13. № 4. P. 447.
11. *Jeladze V., Tsverava M., Nozadze T. et al.* // Proc. XXI Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2016). Tbilisi. 26–29 Sep. 2016. N.Y.: IEEE, 2016. P. 9.
12. *Джеладзе В.Б., Пришвин М.М., Табатадзе В.А. и др.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 3. С. 199.
13. *Jeladze V., Tabatadze V., Prishvin M. et al.* // J. Appl. Electromagnetism (JAE). 2016. V. 18. № 1. P. 1.
14. *Петоев И.М., Табатадзе В.А., Какулия Д.Г., Заридзе Р.С.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 4. С. 333.
15. *Anzaldi G., Silv F., Fernández M. et al.* // IEEE Trans. 2007. V. BioEng-54. № 5. P. 921.
16. *Dhami A.* // Int. J. Environment Research. 2015. V. 9. № 3. P. 977.
17. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. С. 221.
18. *Петоев И.М., Табатадзе В.А., Заридзе Р.С.* // РЭ. 2013. № 5. С. 451.
19. *Zaridze R., Kakulia D., Petoev I., Tabatadze V.* // Book of Abstracts III Annual Meeting of the Georgian Mechanical Union. Tbilisi. 19–21 Dec. 2012. Tbilisi: Univ. Press, 2012. P. 35.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.372.825

ИЗМЕРЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
ПРОНИЦАЕМОСТИ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ГРЕБНЕВОГО  
ВОЛНОВОДА

© 2020 г. А. В. Донченко<sup>а, \*</sup>, Г. Ф. Заргано<sup>а</sup>, В. В. Земляков<sup>а</sup>, А. Б. Клещенков<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Южный федеральный университет,  
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону, 344090 Российская Федерация

\*E-mail: engineer.donchenko@gmail.com

Поступила в редакцию 24.12.2018 г.

После доработки 24.12.2018 г.

Принята к публикации 17.01.2019 г.

Решена задача определения комплексной диэлектрической проницаемости материалов в сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн на основе волноводного метода с применением  $H$ -волновода. За счет использования отрезка  $H$ -волновода в качестве измерительной ячейки расширен рабочий диапазон частот, а также повышена точность измерений благодаря локализации энергии электромагнитного поля в пространстве между металлическими гребнями. Осуществлен расчет электромагнитных полей гибридных типов волн в  $H$ -волноводе методом частичных областей с учетом особенности электромагнитного поля на металлических и диэлектрических ребрах. Представлены результаты измерения комплексной диэлектрической проницаемости для образцов, выполненных из эбонита, тефлона и стеклотекстолита.

DOI: 10.31857/S0033849420050022

ВВЕДЕНИЕ

Стремительное развитие нанотехнологий и материаловедения открывает перспективы создания новых СВЧ-материалов, включая композитные и интеллектуальные [1]. Их применение существенно изменяет электродинамические характеристики элементов и устройств, позволяя создавать, в том числе, устройства с управляемыми характеристиками. Однако успешное применение новых материалов на СВЧ сталкивается на практике с рядом сложностей, одной из которых является необходимость высокоточного определения комплексной диэлектрической проницаемости, в том числе и ее частотной зависимости в максимально широком диапазоне.

В зависимости от топологии СВЧ-устройства диэлектрические материалы изготавливаются как в виде тонких пленок, так и в виде объемных образцов. Так, например, известно, что размещение объемного диэлектрика в волноводе позволяет изменить его критические частоты, постоянные распространения и структуры электромагнитных полей [2].

Диэлектрическую проницаемость материалов на частотах до 1 ГГц чаще всего определяют, используя диэлектрический резонатор в микрополосковой линии [3]. Однако открытость микрополосковой

линии приводит к значительным потерям электромагнитной энергии на более высоких частотах и, как следствие, не обеспечивают достаточную точность измерений. Для проведения измерений в диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн чаще всего используют волноводные методы измерения [4]. В этом случае образец исследуемого материала помещают внутрь волноводящей структуры, в основном прямоугольного поперечного сечения, и он, как правило, полностью заполняет ее поперечное сечение.

Недостатками применения прямоугольного волновода для измерения диэлектрической проницаемости являются узкий рабочий диапазон частот, а также существенные технологические трудности и заметная потеря точности измерений при работе с тонкими образцами и пленками.

Цель данной работы – создать новый метод волноводных измерений с использованием в качестве измерительной ячейки  $H$ -волновода, который обладает рядом преимуществ по сравнению с простым прямоугольным, в частности, позволяет расширить частотный диапазон измерений. Так, например, ширина полосы одномодового режима  $H$ -волновода WRD750 составляет 7.5...18 ГГц, а ширина полосы аналогичного прямоугольного волновода WR90 только 8.2...12.4 ГГц [5].

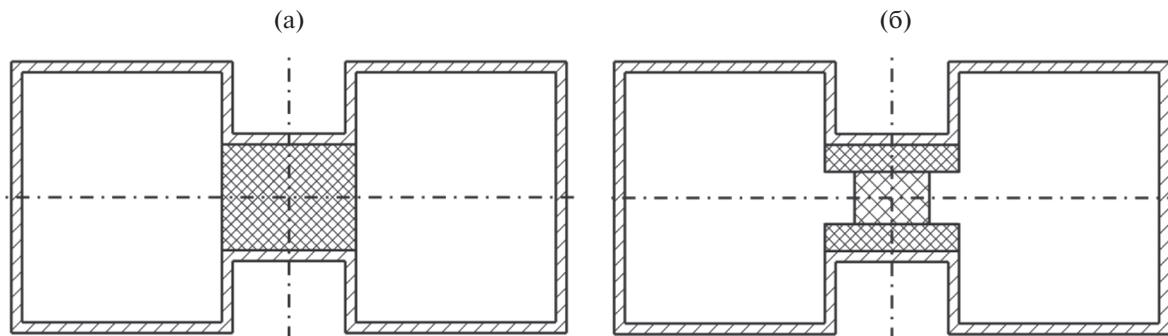


Рис. 1. Поперечное сечение  $H$ -волновода: а – с образцом, заполняющим пространство между гребнями; б – с диэлектрическим образцом, зажатым между двумя диэлектрическими подложками.

### 1. $H$ -ВОЛНОВОД КАК ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ЯЧЕЙКА

Поскольку электромагнитная энергия основной волны  $H$ -волновода сосредоточена в зазоре между металлическими гребнями [6], то исследуемые образцы диэлектрика помещали в эту область. Для проведения исследований были изготовлены два образца. Один образец заполнял зазор полностью (далее – образец 1) (рис. 1а), а второй образец зажимали с двух сторон подложками с малой диэлектрической проницаемостью и затем помещали в зазор (далее – образец 2) (рис. 1б). Размещение диэлектрического образца между гребнями позволяет существенно повысить чувствительность измерительного прибора и, как следствие, точность проводимых измерений по сравнению с точностью измерений в прямоугольном волноводе. Кроме того, благодаря возможности относительно свободно изменять размеры гребней  $H$ -волновода удается легко адаптировать измерительную ячейку для образцов материалов различной толщины, включая диэлектрические пленки.

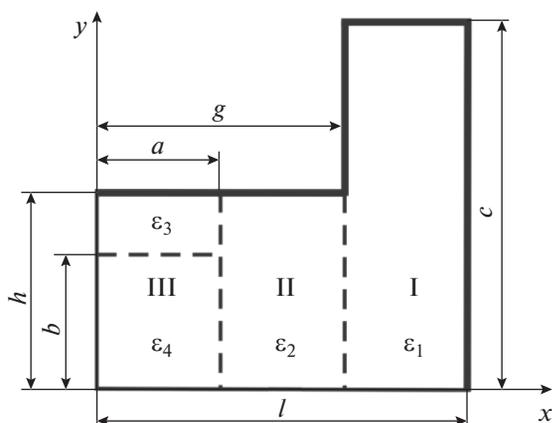


Рис. 2. Г-образная область с кусочно-слоистым диэлектриком.

Основная сложность использования  $H$ -волноводов в качестве измерительных ячеек – необходимость высокоточного расчета его электродинамических характеристик, как для волновода с воздушным заполнением, так и для волновода, частично заполненного диэлектриком (рис. 1).

Решение данной задачи обеспечивает метод частичных областей с учетом особенностей поведения электромагнитного поля вблизи диэлектрического и металлического ребер волновода [6]. Подробный ход проведенного электродинамического расчета для Г-образной структуры, изображенной на рис. 2, и анализ корректности получаемых результатов, в том числе при сравнении с известными численными методами, описан в работе [7]. На основе алгоритма работы [7] была создана программа для расчета критических частот, постоянных распространения и визуализации структур электромагнитных полей гибридных типов волн, распространяющихся в волноводах со слоистым и кусочно-слоистым диэлектрическим заполнением.

В качестве измерительной ячейки для проведения измерения комплексной диэлектрической проницаемости был выбран  $H$ -волновод WRD750 [8] с рабочей полосой частот 7.5...18 ГГц и размерами:  $l = 8.775$  мм,  $g = 2.195$  мм,  $h = 1.725$  мм,  $c = 4.075$  мм.

Проведен расчет первых двух критических частот  $f_c$   $HE$ -волн, распространяющихся в волноводе WRD750 с воздушным заполнением, с применением образца 1 и образца 2 ( $a = 1.32$  мм,  $b = 0.88$  мм). Последний вариант является гипотетическим и направлен на лучшее понимание влияния кусочно-слоистого диэлектрического заполнения на поведение электромагнитного поля внутри волновода сложного сечения. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Представленные в табл. 1 данные показывают, что диэлектрическая проницаемость образца влияет на критические частоты гибридных волн в волноводе: чем больше величина диэлектриче-

**Таблица 1.** Результаты расчета критических частот *HE*-волн (ГГц)

Тип волны	$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$	$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 2$	$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 2.4$	$\epsilon_4 = 2$	$\epsilon_4 = 2.4$
Основная	6.1943	4.9035	4.5723	5.8338	5.7495
Вторая	18.4487	17.2269	16.7174	18.3470	18.3133

ской проницаемости и чем больше геометрический размер образца, тем сильнее уменьшаются критические частоты *HE*-волн. Так, для образца 1 с  $\epsilon = 2$  уменьшение критической частоты основной *HE*-волны составляет 20.84% от ее значения для случая воздушного заполнения, а если величина повышается до  $\epsilon = 2.4$ , то критическая частота уменьшится на 26.19%. Но для образца 2 с  $\epsilon = 2.4$  ( $a = 1.32$  мм,  $b = 0.88$  мм) критическая частота уменьшится только на 7.18%.

Для расчета комплексной постоянной распространения  $\gamma = \beta - i\alpha$  ( $\alpha$  – коэффициент затухания,  $\beta$  – фазовая постоянная) использовали метод, изложенный в работе [9] для диэлектриков с малыми потерями. В этом случае  $\gamma$  представляется как функция от  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$  и раскладывается в ряд Тейлора:

$$\gamma(\epsilon' - i\epsilon'') \approx \gamma(\epsilon') - i\epsilon'' \frac{d\gamma(\epsilon')}{d\epsilon} - \frac{(\epsilon'')^2}{2} \frac{d^2\gamma(\epsilon')}{d\epsilon^2}. \quad (1)$$

Поскольку функция  $\gamma(\epsilon)$  аналитическая, производные не зависят от направления и могут быть заменены конечными разностями:

$$\begin{aligned} \epsilon'' \frac{d\gamma(\epsilon')}{d\epsilon} &\approx \gamma(\epsilon') - \gamma(\epsilon' - \epsilon''), \\ (\epsilon'')^2 \frac{d^2\gamma(\epsilon')}{d\epsilon^2} &\approx \gamma(\epsilon' + \epsilon'') + \gamma(\epsilon' - \epsilon'') - 2\gamma(\epsilon'), \\ \gamma(\epsilon' - i\epsilon'') &\approx \left[ 2\gamma(\epsilon') - \frac{\gamma(\epsilon' + \epsilon'') + \gamma(\epsilon' - \epsilon'')}{2} \right] - \\ &\quad - i[\gamma(\epsilon') - \gamma(\epsilon' - \epsilon'')], \\ \beta &= 2\gamma(\epsilon') - \frac{\gamma(\epsilon' + \epsilon'') + \gamma(\epsilon' - \epsilon'')}{2}; \\ \alpha &= \gamma(\epsilon' - \epsilon'') - \gamma(\epsilon'). \end{aligned} \quad (2)$$

Были рассчитаны постоянные распространения  $\gamma$  первой и второй *HE*-волн на рабочей частоте  $f = 10$  ГГц при отсутствии потерь ( $\alpha = 0$ ) и постоянные распространения  $\gamma_{\text{пот}}$  для материалов с потерями ( $\alpha \neq 0$ , тангенс угла диэлектрических потерь принят  $\text{tg}\delta = 5 \times 10^{-3}$ ). Результаты расчетов приведены в табл. 2. Эти данные показывают, что чем больше геометрические размеры образца и чем выше диэлектрическая проницаемость, тем больше величина постоянной распространения основной волны на рабочей частоте.

Для *H*-волновода с диэлектрическими образцами  $\epsilon = 2.4$  (см. рис. 1) была визуализирована струк-

тура электромагнитного поля основной *HE*-волны на рабочей частоте  $f = 10$  ГГц (рис. 3 и 4) при  $\beta = 225.2$  и  $185.06$  м<sup>-1</sup> соответственно.

Как видим из рис. 3 и 4, электрическое поле основной волны не только сосредоточено под гребнем волновода, но также испытывает искажение и “втягивается” в пространство диэлектрика (см. рис. 4). Эта особенность позволяет сделать вывод, что если использовать в качестве измерительной ячейки *H*-волновод и разместить образец между гребнями волновода – в максимуме электрической энергии основной волны, то можно существенно повысить чувствительность используемой для измерений первичной измерительной ячейки и, как следствие, точность всей измерительной установки.

С помощью разработанной программы были построены графики зависимостей (рис. 5) фазовой постоянной волны  $\beta$  от диэлектрической проницаемости материала для исследуемых образцов 1 (кривая 1) и 2 ( $a = 1.32$  мм,  $b = 0.88$  мм) (кривая 2). Расчеты проводились на рабочей частоте  $f = 10$  ГГц.

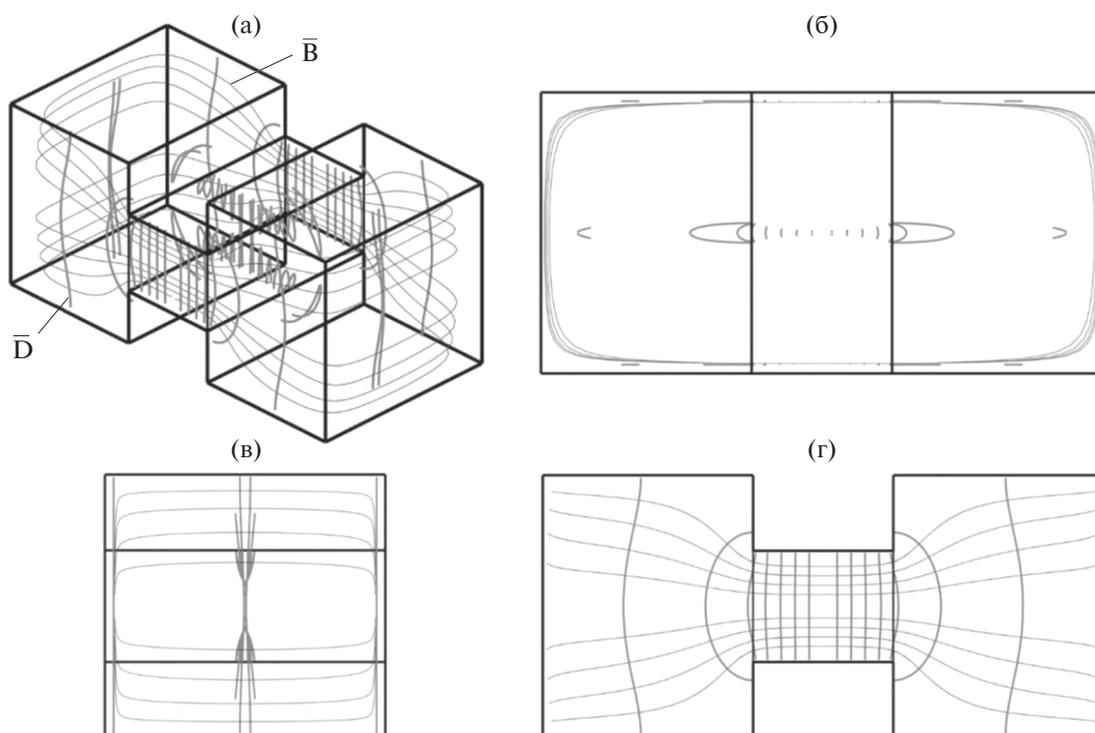
Графики показывают, что фазовая постоянная существенно зависит не только от величины диэлектрической проницаемости, но также от размеров самого образца. Поэтому при проведении измерений, если материал не является тонкой пластиной или пленкой, для повышения точности необходимо стремиться заполнить образцом все пространство между гребнями *H*-волновода (см. рис. 1а).

## 2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

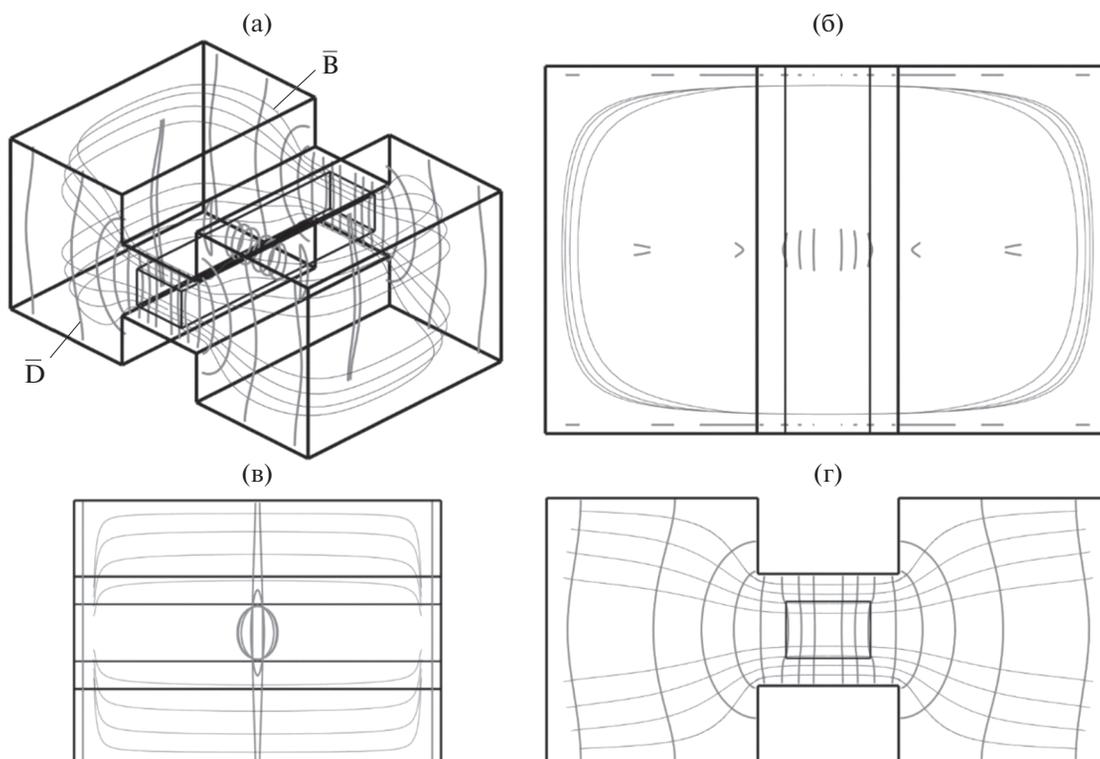
Предлагаемая измерительная установка состоит из векторного СВЧ-анализатора цепей, двух коаксиальных линий, двух коаксиально волно-

**Таблица 2.** Результаты расчета постоянных распространения *HE*-волн

Образец	$\epsilon$	$\gamma, \text{м}^{-1}$ ( $\alpha = 0$ )	$\gamma_{\text{пот}}, \text{м}^{-1}$ ( $\alpha \neq 0$ )
Образец 1	2	232.24	$232.24 + 0.593i$
	2.4	255.20	$255.23 + 0.672i$
Образец 2 ( $a = 1.32$ мм, $b = 0.88$ мм)	2	180.95	$180.95 + 0.114i$
	2.4	185.06	$185.08 + 0.114i$



**Рис. 3.** Трехмерная структура электромагнитного поля (а) и проекции на координатные плоскости (б)–(г) для основной  $HE$ -волны в  $H$ -волноводе с диэлектрическим образцом 1 при  $\beta = 255.2 \text{ м}^{-1}$  ( $D$  и  $B$  соответственно векторы электрической и магнитной индукции поля).



**Рис. 4.** Трехмерная структура электромагнитного поля (а) и проекции на координатные плоскости (б)–(г) для основной  $HE$ -волны в  $H$ -волноводе с диэлектрическим образцом 2 при  $\beta = 185.06 \text{ м}^{-1}$  ( $D$  и  $B$  соответственно векторы электрической и магнитной индукции поля).

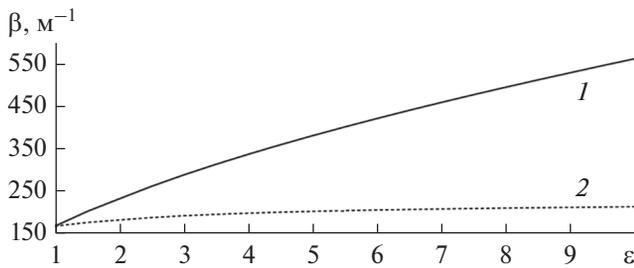


Рис. 5. Графики зависимостей фазовой постоянной волны от диэлектрической проницаемости материала для образцов 1 (1) и 2 (2).

водных переходов и измерительной ячейки, представляющей собой *H*-волновод (рис. 6а).

Для повышения точности измерений, чтобы убрать ошибку измерений, связанную с отражением электромагнитной волны от границы раздела воздух–диэлектрик, были использованы образцы различной длины.

Измерения проводили в следующей последовательности. Вначале измеряли набег фазы основной волны  $\varphi_{\min}(f)$  в *H*-волноводе с диэлектриком малой длины  $z_{\min}$  в широком диапазоне частот. Диэлектрик размещали в волноводе, как показано на рис. 1. Затем в *H*-волновод помещали более протяженный образец диэлектрика с длиной  $z_{\max}$ . Измеряли набег фазы основной волны в волноводе с протяженным диэлектриком  $\varphi_{\max}(f)$  и находили разность фаз по формуле

$$d\varphi(f) = \varphi_{\max}(f) - \varphi_{\min}(f).$$

Учитывая, что

$$d\varphi = [\beta_{\text{возд}}(f) - \beta_{\epsilon}(f)] dz,$$

где  $\beta_{\text{возд}}(f)$  – фазовая постоянная в *H*-волноводе с воздушным заполнением,  $\beta_{\epsilon}(f)$  – фазовая постоянная в *H*-волноводе с образцом,  $dz = (z_{\max} - z_{\min})$ , приходим к формуле определения постоянной

распространения волны в волноводе с образцом диэлектрика:

$$\beta_{\epsilon}(f) = \frac{\beta_{\text{возд}} dz - d\varphi}{dz}. \quad (3)$$

Ошибку косвенных измерений  $\Delta\beta_{\epsilon}$  для формулы (3) находили по формуле

$$\Delta\beta_{\epsilon} = \pm \frac{2\Delta\varphi}{dz}, \quad (4)$$

где  $\Delta\varphi$  – абсолютная ошибка измерения набега фазы.

Анализируя формулу (4), приходим к выводу, что увеличить точность измерений можно, увеличив протяженность длинного образца  $z_{\max}$ . Если найдена  $\beta_{\epsilon}(f)$ , то с использованием разработанной программы находим величину  $\epsilon(f)$ .

Для измерения мнимой части диэлектрической проницаемости применяли следующую технику измерений. Сначала измеряли модули *S*-параметров  $S_{11}(f)$  и  $S_{12}(f)$  волны в измерительной линии с диэлектриком малой протяженности в широком диапазоне частот, затем измеряли модули *S*-параметров  $S'_{11}(f)$  и  $S'_{12}(f)$  волны в том же диапазоне частот в волноводе с диэлектриком большей протяженности. Затем была решена следующая система уравнений:

$$S_{11}(f)^2 + S_{12}(f)^2 + \Lambda(f) = 1 \quad (5)$$

$$S'_{11}(f)^2 + S'_{12}(f)^2 + \Lambda(f) = \exp(-2\alpha(f)dz),$$

где  $\Lambda(f)$  – прочие потери в измерительной линии. Из системы (5) получили систему определения коэффициента затухания волны  $\alpha(f)$ :

$$\alpha(f) = -\frac{\ln(1 + S'_{11}(f)^2 + S'_{12}(f)^2 - S_{11}(f)^2 - S_{12}(f)^2)}{2dz}. \quad (6)$$

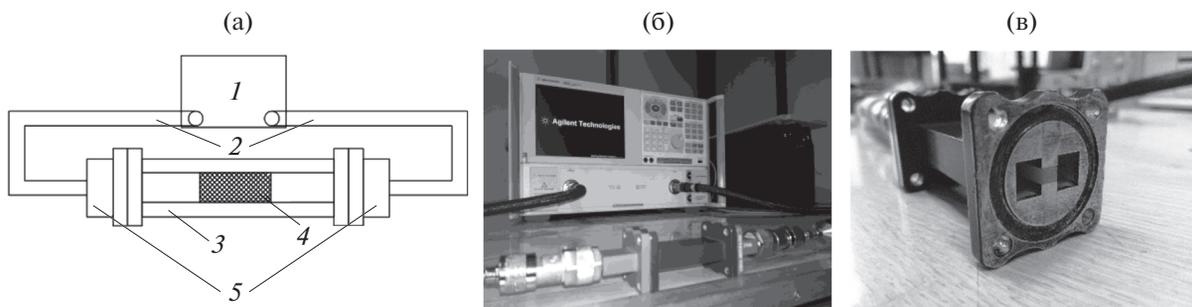


Рис. 6. Структурная схема измерительной установки (а): 1 – векторный анализатор, 2 – коаксиальные кабели, 3 – *H*-волновод, 4 – образец диэлектрика, 5 – коаксиально-волноводный переход; фото установки на векторном анализаторе цепей Agilent Technologies E8363В (б) и *H*-волновода с помещенным внутрь образцом диэлектрика (в).

**Таблица 3.** Результаты расчета фазовой постоянной  $\beta_\epsilon$  образцов из тефлона и эбонита

Материал	$\epsilon$	$\beta_{\text{эксп}}, \text{ м}^{-1}$	Диапазон $\beta_{\text{теор}}, \text{ м}^{-1}$
Тефлон	$2.0 \pm 0.1$	$228.34 \pm 1.41$	226.22...238.14
Эбонит	$2.4 \pm 0.1$	$259.35 \pm 1.41$	244.61...260.71

**Таблица 4.** Сравнение экспериментальных  $\epsilon_{\text{эксп}}$  и теоретических  $\epsilon_{\text{теор}}$  данных комплексной диэлектрической проницаемости материалов на частоте 10 ГГц

Материал	$\epsilon_{\text{теор}}$	$\epsilon_{\text{эксп}}$
Тефлон	$2 - 0.0006i$	$1.96 - 0.0005i$
Эбонит	$2.4 - 0.0012i$	$2.475 - 0.0013i$
Стеклотекстолит	$3.9 - 0.039i$	$3.715 - 0.036i$

Ошибку косвенных измерений при измерении  $\alpha$  определяли по формуле:

$$\Delta\alpha(f) = \frac{\Delta S(2S'_{11}(f) + 2S'_{12}(f) + 2S_{11}(f) + 2S_{12}(f))}{2dz(1 + S'_{11}(f)^2 + S'_{12}(f)^2 - S_{11}(f)^2 - S_{12}(f)^2)}, \quad (7)$$

где  $\Delta S$  – абсолютная ошибка измерения  $S$ -параметров.

Так же как и для формулы (4), повысить точность измерения коэффициента затухания можно, увеличив длину образца  $z_{\text{max}}$ .

Если найдена  $\alpha(f)$  и  $\beta(\epsilon')$ , то с использованием формулы (2) при помощи разработанной программы находится мнимая часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon''(f)$ .

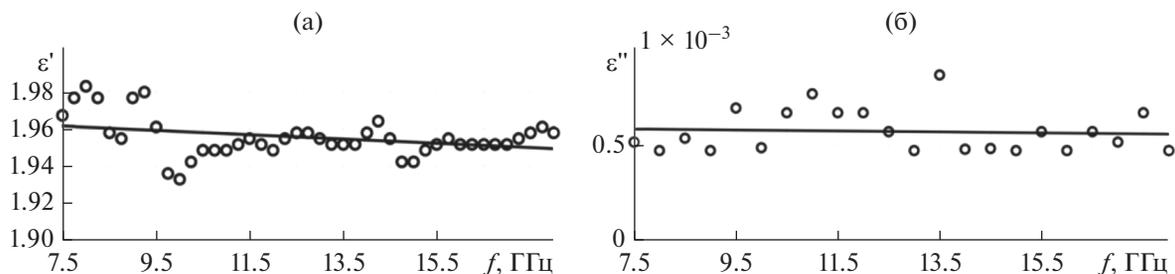
### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Для проведения измерений по описанной методике использовался векторный анализатор цепей Agilent Technologies E8363B (см. фото на рис. 6б). Абсолютная ошибка измерений набега фазы в диапазоне частот 1...20 ГГц для представленного векторного анализатора составляет  $\Delta\phi = \pm 0.035$  рад. Для измерений были изготовлены образцы протяженностями  $z_{\text{min}} = 15$  и 64.6 мм. Подставив эти вели-

чины в формулу (4), получили величину ошибки косвенных измерений  $\Delta\beta_{\text{эксп}} = \pm 1.41 \text{ м}^{-1}$ .

С помощью векторного анализатора была определена разность фаз  $d\phi$  на частоте 10 ГГц для образцов из эбонита и тефлона с известной диэлектрической проницаемостью [10, 11]  $\epsilon = 2.4 \pm 0.1$  и  $\epsilon = 2.0 \pm 0.1$  соответственно. Образцы полностью заполняли зазор  $H$ -волновода (см. рис. 1а). Подставив величину полученной разности фаз в формулу (3), рассчитали фазовую постоянную в волноводе для обоих образцов  $\Delta\beta_{\text{эксп}}$ . По разработанной программе был проведен также теоретический расчет фазовых постоянных  $\Delta\beta_{\text{теор}}$  для крайних значений диапазона известной диэлектрической проницаемости ( $\epsilon = 1.9$  и 2.1 для тефлона и  $\epsilon = 2.3$  и 2.5 для эбонита), что является диапазоном допустимых значений для образцов, изготовленных из рассматриваемых материалов. Полученные результаты приведены в табл. 3. Как видим, теоретические и экспериментальные данные хорошо согласуются. Значения измеренной постоянной распространения  $\Delta\beta_{\text{эксп}}$  для обоих образцов попали в диапазон допустимых значений  $\Delta\beta_{\text{теор}}$ , полученных теоретическим методом.

По представленной методике в рабочем диапазоне частот  $f = 7.5...18$  ГГц волновода WRD750 были проведены измерения действительной  $\epsilon'$  и



**Рис. 7.** Зависимости действительной  $\epsilon'$  (а) и мнимой  $\epsilon''$  (б) частей диэлектрической проницаемости тефлона от частоты: точки – результаты измерений, сплошные линии – линейная интерполяция.

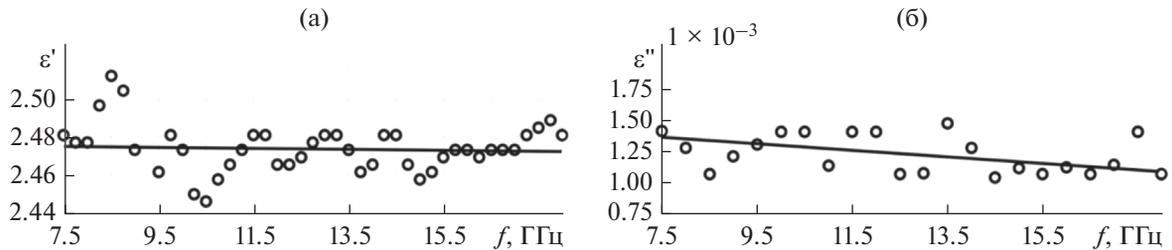


Рис. 8. Зависимости действительной  $\epsilon'$  (а) и мнимой  $\epsilon''$  (б) частей диэлектрической проницаемости эбонита от частоты: точки – результаты измерений, сплошные линии – линейная интерполяция.

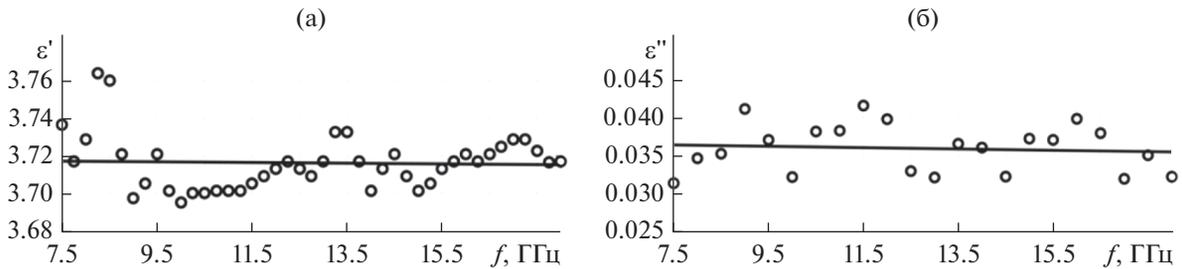


Рис. 9. Зависимости действительной  $\epsilon'$  (а) и мнимой  $\epsilon''$  (б) частей диэлектрической проницаемости стеклотекстолита от частоты: точки – результаты измерений, сплошные линии – линейная интерполяция.

мнимой  $\epsilon''$  части диэлектрической проницаемости образцов из эбонита, тефлона и стеклотекстолита. Полученные зависимости диэлектрической проницаемости от частоты для этих материалов приведены на рис. 7–9. В табл. 4 представлены полученные экспериментальные результаты и теоретические данные [10–12], которые хорошо согласуются между собой.

Анализ представленных на рис. 7–9 зависимостей позволяет утверждать, что действительная часть диэлектрической проницаемости всех трех образцов обладает относительной частотной стабильностью, ее изменение в приведенном диапазоне частот составляет менее 1%. Отметим, что с ростом частоты мнимая часть диэлектрической проницаемости для всех образцов также уменьшается. Результаты приведенных измерений комплексной диэлектрической проницаемости хорошо согласуются с известными табличными значениями и с данными, полученными другими авторами [10–12].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложена методика определения комплексной диэлектрической проницаемости материалов в СВЧ- и КВЧ-диапазонах, когда в качестве измерительной ячейки использовался  $H$ -волновод. Показано, что применение гребневого волновода позволяет не только расширить частотный диапазон измерений, но и заметно повысить точность, особенно для тонких диэлектрических образцов, благодаря их размещению между гребней – в максимуме электрического поля основной волны.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Южного федерального университета.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Narang S.B., Bahel S.* // J. Ceramic Processing Research. 2010. V. 11. № 3. P. 316.
2. *Донченко А.В., Заргано Г.Ф.* // Физ. основы приборостроения. 2016. Т. 5. № 5. С. 40.
3. *Беляев Б.А., Дрокин Н.А., Лексиков А.А.* // Изв. вузов. Физика. 2006. № 9. С. 4553.
4. *Faktorová D.* // Measurement Science Review. 2017. V. 7. № 2. P. 12.
5. *Заргано Г.Ф., Лерер А.М., Ляпин В.П., Синявский Г.П.* Линии передачи сложных сечений. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. ун-та, 1983.
6. *Заргано Г.Ф., Ляпин В.П., Михалевский В.С. и др.* Волноводы сложных сечений. М.: Радио и связь, 1986.
7. *Donchenko A.V., Zargano G.F., Zemlyakov V.V.* // J. Electromagn. Waves Appl. 2018. V. 32. № 6. P. 739.
8. Официальный сайт компании “Microtech Inc.”. URL: <http://www.microtech-inc.com>.
9. *Lerer A.M., Donets I.V., Kalinchenko G.A., Makhno P.V.* // Photonic Research. 2014. V. 2. № 1. P. 31.
10. *Вольман В.И.* Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств. М.: Радио и связь, 1982.
11. *Насыбуллин А.Р., Ишкаев Т.М.* // Инженерный вестник Дона. 2017. № 2. ([ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4232](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2017/4232))
12. *Bois K., Kirk B., Tsuk M., Quint D.* // Proc. Electronic Components and Technology Conf. N.Y.: IEEE, 2003. P. 1277.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.872.32

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛН  
ОЧЕНЬ НИЗКОЙ ЧАСТОТЫ ЧЕРЕЗ МАГНИТОАКТИВНУЮ  
ПЛОСКОСЛОИСТУЮ ПЛАЗМУ НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

© 2020 г. А. В. Мошков<sup>а</sup>, \*, В. Н. Пожидаев<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: kuzaf@inbox.ru

Поступила в редакцию 13.05.2019 г.

После доработки 13.05.2019 г.

Принята к публикации 18.07.2019 г.

Приведено описание алгоритма вычисления характеристик прохождения низкочастотных электромагнитных волн через магнитоактивную плоскостойкую нижнюю ионосферу. Алгоритм основан на процедуре численного интегрирования волновых уравнений для случая падения плоской волны на ионосферу снизу с учетом ионного состава плазмы. В качестве иллюстрации вычислены основные характеристики прохождения волн в интервале частот 0.05...1 кГц. Показано, что коэффициент прохождения по мощности указанных волн достаточно велик и находится в интервале 0.2...0.4 для большей части используемых частот. Показано, что в дневное время вблизи частоты ~300 Гц коэффициент прохождения в дневное время имеет максимум и превышает ночные значения примерно в два раза.

DOI: 10.31857/S0033849420050101

## ВВЕДЕНИЕ

Численному моделированию удаленной регистрации в магнитосфере и на земной поверхности низкочастотных волн от искусственных возмущений в ионосфере уделяется большое внимание (см., например, [1–3]). Это связано с вводом в строй ряда мощных наземных коротковолновых (КВ) передатчиков, излучение которых модулировано на низкой частоте (НЧ). Излучение таких передатчиков (“нагревных стендов”) интенсивно поглощается в нижней ионосфере, приводя к возникновению эффекта нелинейной демодуляции и излучению НЧ-волн в ионосферу и волновод “Земля-ионосфера” [4]. Во всем мире функционирует более десятка нагревных стендов, наиболее мощными и оснащенными научной аппаратурой из которых являются стенды EISCAT (Норвегия) и HAARP (Аляска) [5, 6].

К настоящему времени можно считать, что теория распространения волн очень и сверхнизких частот (ОНЧ и СНЧ) в околоземном пространстве, в частности в волноводе (резонаторе) “Земля–ионосфера”, в основном построена [7–10]. Соответствующие алгоритмы часто физически недостаточно наглядны и требуют значительных усилий для интерпретации результатов. По этой причине задачу можно разбить на связанные части, для каждой из которых строятся относительно простые

численные алгоритмы. Это относится, прежде всего, к алгоритмам построения лучевых траекторий в ионосфере, магнитосфере [11–14]. Даже в волноводе “Земля–ионосфера”, где на низких частотах приближение геометрической оптики формально не выполнимо вблизи верхней “стенки”, возможно построение эффективных численных алгоритмов в рамках “метода скачков” [15–17]. При этом коэффициенты отражения от нижней неоднородной анизотропной ионосферы необходимо вычислять независимо.

Вычисление подобных коэффициентов является частью общего решения задачи о прохождении электромагнитных волн через локально плоскостойкую анизотропную плазму нижней ионосферы.

Цель данной работы – представить описание одного из возможных алгоритмов решения такой задачи. В качестве иллюстрации проведены расчеты в случае СНЧ (50...1000 Гц), которым в последнее время уделяется повышенное внимание для диагностики состояния земной коры дистанционными методами и в задачах связи.

## 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Математически задача о прохождении электромагнитных (ЭМ) волн через локально плоскостойкую анизотропную плазму (ионосферу) бы-

ла сформулирована относительно давно [18]. Однако при попытках провести численные расчеты величины напряженности ЭМ-поля на трассе и соответствующих коэффициентов отражения и прохождения возникли некоторые трудности принципиального характера, связанные с интегрированием системы однородных дифференциальных уравнений при наличии экспоненциальной численной неустойчивости решения [18, 19]. Приведем здесь краткое описание эффективного алгоритма для решения данной задачи с учетом ионного состава плазмы.

Для расчетов напряженности поля используем уравнения Максвелла совместно с моделью среды в виде неоднородной холодной многокомпонентной магнитоактивной плазмы. Такая среда описывается тензором диэлектрической проницаемости  $\hat{\epsilon}$  (магнитная проницаемость ионосферной плазмы равна магнитной проницаемости вакуума  $\mu_0$ ). Тензор  $\hat{\epsilon}$  в системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль внешнего геомагнитного поля, имеет вид [20]

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}, \quad (1a)$$

где

$$\begin{aligned} R &= 1 + \sum X_k / (Y_k - U_k); \\ L &= 1 - \sum X_k / (Y_k + U_k); \\ P &= 1 - \sum X_k / U_k; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S &= (R + L)/2; \quad D = (R - L)/2; \\ U_k &= 1 - i\nu_k / \omega, \end{aligned} \quad (1b)$$

$\nu_k$  – эффективная частота соударений частиц сорта  $k$ ;  $f$  – частота волны,  $\omega = 2\pi f$ ,  $i$  – мнимая единица. Суммирование ведется по сорту  $k$  заряженных частиц, составляющих плазму, с учетом знака заряда в величинах  $Y_k$ :

$$Y_k \equiv f_{Hk} / f; \quad X_k \equiv (f_{pk} / f)^2, \quad (2)$$

где  $f_{Hk}$  и  $f_{pk}$  – гиро- и плазменная частота частицы сорта  $k$ :  $k = 1$  (электроны), 2, ... (ионы). Для электронов имеем

$$f_{pe} = (e^2 N_e / 4\pi^2 \epsilon_0 m_e)^{1/2} \approx 8.97 N_e^{1/2} \text{ кГц}, \quad (3)$$

где  $N_e$  измеряется в  $\text{см}^{-3}$ ;  $e$ ,  $m_e$  – заряд и масса электрона;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума. В максимуме слоя F2 ионосферы имеем днем  $f_{pe} \approx 10$  МГц, ночью  $f_{pe} \approx 2...5$  МГц в зависимости от условий (времени суток, сезона, географического положения и активности Солнца):

$$f_{He} = eB_0 / 2\pi m_e. \quad (4)$$

В пределах ионосферы пространственная структура вектора геомагнитного поля  $\vec{B}_0$  хорошо описывается моделью точечного магнитного диполя, расположенного вблизи центра Земли с осью, наклоненной под некоторым углом к оси вращения Земли [21]. По аналогии с географическими координатами вводятся понятия геомагнитной широты  $\Phi$  и долготы  $\Lambda$ . На высоте  $h$  и широте  $\Phi$  значение гирочастоты можно оценить так:

$$f_{He} \approx 876.0(1 + h/R_0)^{-3}(1 + 3\sin^2 \Phi)^{1/2} \text{ кГц}, \quad (5)$$

где  $R_0$  – средний радиус Земли (~6370 км). Для ионов сорта  $k$  в формулах (3), (4) следует использовать соответствующие значения концентрации  $N_k$  и массы  $m_k$ .

Пусть начало правой декартовой прямоугольной системы координат расположено в точке  $O$  на поверхности земли, а ось  $z$  направлена вертикально вверх. Плоская ЭМ-волна с волновым вектором  $\vec{k}$  падает снизу на горизонтальный неоднородный по оси  $z$  слой плазмы под углом  $\theta$  с вертикалью. Верхняя и нижняя границы слоя соответствуют высотам  $z_1$  и  $z_2$ . Направим ось  $x$  так, чтобы вектор  $\vec{k}$  находился в плоскости  $XZ$ . Направление локального геомагнитного поля определяется углом  $\psi$  вектора  $(-\vec{B}_0)$  с вертикалью и задаваемым углом азимута  $A$ , который отсчитывается от оси  $x$  до направления проекции  $\vec{B}_0$  на земную поверхность. Отсчет идет против часовой стрелки, если смотреть на поверхность сверху вниз. Величина угла  $\psi$  определяется из соотношения  $\text{ctg}\psi = 2\text{tg}\Phi$  [21]. Мы будем использовать для описания направления  $\vec{B}_0$  его направляющие косинусы  $\{l, m, n\}$ , где

$$\begin{aligned} l &= -\sin \psi \cos A, \quad m = -\sin \psi \sin A, \\ n &= -\cos \psi. \end{aligned}$$

Такой выбор системы отсчета позволяет записать любую переменную волновую величину  $\vec{V}(x, y, z, t)$  в виде

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \vec{V}(z) \exp(i\omega t - ik_0 \Gamma z),$$

где  $k_0 = \omega/c$  – волновое число в вакууме;  $\Gamma = \sin \theta$ . Опуская везде данный экспоненциальный множитель, мы можем превратить систему уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [18]:

$$d\vec{e}(z)/dz = -ik_0 \hat{T} \vec{e}(z), \quad (6)$$

где  $\vec{e}$  – вектор-столбец вида  $\{E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y\}$ , искусственно образованный из компонент  $E_x, E_y$  электрического, и компонент  $H_x, H_y$  магнитного поля волны, причем компоненты магнитного поля для уравнивания размерностей умножены на импеданс вакуума  $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 120\pi$ . Компоненты  $4 \times 4$  матрицы  $\hat{T}$  выражаются через компо-

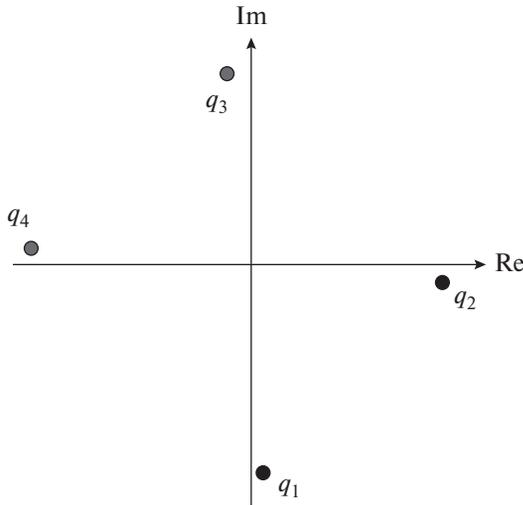


Рис. 1. Схема расположения корней  $q_j$  ( $j = 1...4$ ) на комплексной плоскости.

ненты  $3 \times 3$  матрицы электрической восприимчивости  $\hat{M} = \hat{\epsilon} - \hat{1}$  ( $\hat{1}$  – единичная матрица):

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\Gamma M_{31}/(1 + M_{33}); & T_{12} &= \Gamma M_{32}/(1 + M_{33}); \\ T_{14} &= (C^2 + M_{33})/(1 + M_{33}); \\ T_{31} &= -M_{21} + M_{23}M_{31}/(1 + M_{33}); \\ T_{32} &= C^2 + M_{22} - M_{23}M_{32}/(1 + M_{33}); \\ T_{34} &= \Gamma M_{23}/(1 + M_{33}); \\ T_{44} &= -\Gamma M_{13}/(1 + M_{33}); \\ T_{41} &= 1 + M_{11} - M_{13}M_{31}/(1 + M_{33}); \\ T_{42} &= -M_{12} + M_{13}M_{32}/(1 + M_{33}); \\ T_{13} &= T_{21} = T_{22} = T_{24} = T_{33} = T_{43} = 0; & T_{23} &= 1, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $C = \cos\theta$ .

В выбранной выше системе координат легко показать, что элементы матрицы  $\hat{M}$  имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11} &= (1 - l^2)S + l^2P - 1; \\ M_{12} &= lm(P - S) + inD; \\ M_{13} &= ln(P - S) - imD; \\ M_{21} &= lm(P - S) - inD; \\ M_{22} &= (1 - m^2)S + m^2P - 1; \\ M_{23} &= mn(P - S) + ilD; \\ M_{31} &= ln(P - S) + imD; \\ M_{32} &= mn(P - S) - ilD; \\ M_{33} &= (1 - n^2)S + n^2P - 1; \end{aligned} \quad (8)$$

где параметры  $S$ ,  $P$ ,  $D$  определены в уравнениях (1) с учетом ионного состава ионосферного слоя и эффективной частоты соударений частиц в слое.

Недостающие в уравнении (6) компоненты  $E_z$  и  $H_z$  находятся явно из уравнений Максвелла:

$$E_z = -(\Gamma Z_0 H_y + M_{31} E_x + M_{32} E_y)/(1 + M_{33}), \quad (9a)$$

$$H_z = \Gamma E_y/Z_0. \quad (9b)$$

Для выделения падающих и отраженных волн в волноводе при  $z < z_2$  запишем соотношения между компонентами полей в этой области:

$$\begin{aligned} H_x &= \mp C E_y; & H_y &= \pm E_x/(C Z_0); \\ H_z &= \mp \Gamma H_x/C = \Gamma E_y/Z_0; & E_z &= \mp C E_y; \end{aligned} \quad (10)$$

где верхний знак соответствует восходящей волне, а нижний – нисходящей.

Система (6) состоит из четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Система однородна, т.е. имеет четыре линейно независимых решения  $\vec{e}_j$  ( $j = 1...4$ ), причем любое другое решение (6) есть линейная комбинация этих решений. Легко показать, что решения  $\vec{e}_j$  в однородной среде соответствуют классическим магнитоионным модам, условно называемым обыкновенной и необыкновенной волнами, которые распространяются вверх и вниз [18].

Предположим, что при  $z > z_1$  параметры ионосферы мало меняются на длине волны. В этом случае при падении волны на слой снизу на верхней границе слоя возникают только обыкновенная и необыкновенная волны, направленные вверх. Пусть это будут волны  $j = 1, 2$ . При  $z = z_1$  решение (6) может быть представлено в виде  $\vec{e} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$ , где  $a_{1,2}$  – комплексные коэффициенты. В силу линейности и однородности системы (6) подобное представление решения справедливо для любой высоты  $z < z_1$ , т.е. коэффициенты  $a_{1,2}$  не зависят от  $z$ . Следовательно, необходимо найти только два линейно независимых решения (6), соответствующих восходящим обыкновенной и необыкновенной волнам. Для этого необходимо вычислить начальные значения  $\vec{e}_{1,2}(z_1)$  в однородной среде выше неоднородного слоя. Для существования таких решений требуется выполнение известного условия  $\det(\hat{T} - q\hat{1}) = 0$ , где коэффициент  $q$  описывает изменение плоской волны вдоль оси  $z$  как  $\exp(-ik_0 qz)$ . Зная значения  $q_{1,2}$  на высоте  $z_1$ , можем проинтегрировать (6) вниз для соответствующих собственных векторов  $\vec{e}_{1,2}(z)$  матрицы  $\hat{T}$ .

Раскрывая определитель с учетом значений элементов матрицы  $\hat{T}$  (7), получим известное комплексное алгебраическое уравнение четвертой степени относительно  $q$  (“квадрик Букера”) [18]. На рис. 1 схематически представлено расположение корней квадрата  $q_j$  ( $j = 1...4$ ) на комплексной плоскости в случае низких частот, ко-

гда различие корней для четырех магнитоионных мод наиболее наглядно. Для восходящих волн  $\text{Re}(q) > 0$ . Из рисунка видно, что для “обыкновенной” волны  $|\text{Im}(q_1)| \gg \text{Re}(q_1)$ , и эта волна относительно быстро затухает в неоднородной среде. Для “необыкновенной” волны, наоборот,  $|\text{Im}(q_2)| \ll \text{Re}(q_2)$ , затухание волны относительно невелико. По этой причине свистящие атмосферники распространяются на большие расстояния из полушария в полушарие в ионосфере и магнитосфере. Поэтому эту НЧ-моду часто называют “свистовой”.

Определение корней квадрата кажется несложной задачей, поскольку хорошо известно, что алгебраическое уравнение степени 4 с одним неизвестным имеет решение в аналитическом виде. Однако соответствующие формулы содержат вложенные квадратные и кубические корни, а также разности близких по значению величин. Кроме того, мнимые и вещественные части корней могут чрезвычайно сильно различаться по абсолютной величине, а сами корни могут приближаться к осям координат на расстояния, сравнимые с точностью вычислений, что на практике может привести к грубым вычислительным ошибкам. Нами предложен эффективный численный алгоритм вычисления корней квадрата, основанный на упрощенном варианте симплекс-метода, хорошо известного в линейном программировании.

1. На поверхности  $q$  в комплексном пространстве строим около начала координат правильный треугольник с характерным размером много меньше показателя преломления волны  $\vec{e}_2$  на высоте  $z_1$ . В качестве характерного размера выбира-

ем, например, величину радиуса описанной окружности.

2. Проверяем значения  $q$  в вершинах треугольника и находим наименьшее из них.

3. Переносим центр треугольника в эту вершину и уменьшаем его характерный размер.

При циклическом повторении процедуры 2, 3 треугольник неизбежно “падает” в один из корней, останавливаясь при достижении требуемой точности.

4. Степень полинома понижается на единицу, и процедуры 1–4 повторяются до вычисления всех четырех корней.

Этот простой алгоритм использовался нами в данной задаче продолжительное время и ни разу не выдал ошибочный результат.

Для численного интегрирования (6) используем стабильный метод численного интегрирования с переменным шагом и контролем ошибки интегрирования Рунге–Кутты–Мерсона [22], хотя возможно эффективное применение и других методов [23].

Начальные значения  $\vec{e}_{1,2}(z_1)$  для интегрирования системы уравнений (6) находим как собственные векторы матрицы  $\hat{T}$  на высоте  $z_1$  при известных собственных значениях  $q_j$ :

$$(\hat{T} - q_j \hat{I})\vec{e}_j = 0 \text{ при } j = 1, 2. \quad (11)$$

Линейная система уравнений (11) легко решается с точностью до постоянного множителя, например,  $E_y$ :

$$E_x = -\alpha E_y; \quad Z_0 H_x = -q E_y; \quad Z_0 H_y = -\beta E_y, \quad (12)$$

где индекс  $j$  не приводится,

$$\alpha = [T_{34}T_{42} + (q^2 - T_{32})(T_{44} - q)]/[T_{31}(T_{44} - q) - T_{34}T_{41}],$$

$$\beta = -[T_{12} + \alpha(T_{11} - q)]/T_{14}.$$

На низких частотах обыкновенная волна сильно затухает вдоль оси  $z$ , следовательно, при интегрировании сверху вниз обыкновенная волна  $\vec{e}_1(z)$  быстро нарастает в сравнении с необыкновенной волной  $\vec{e}_2(z)$  (рис. 1). Из-за конечного числа разрядов в мантиссе вещественных чисел на ЭВМ этот эффект сильного нарастания одного из решений может привести к потере их линейной независимости, поэтому ее необходимо периодически восстанавливать в процессе интегрирования уравнений (6), пользуясь тем фактом, что ортогональные векторы всегда линейно независимы [24]. При достижении амплитуды решения  $\vec{e}_1(z)$  некоторого заданного порога, образуем вектор  $\vec{e}_{20} = \vec{e}_2 + \xi \vec{e}_1$  и потре-

буем, чтобы скалярное произведение  $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_{20})$  было равно 0. Отсюда находим множитель

$$\xi = -(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2) / (\vec{e}_1^*, \vec{e}_1),$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Поскольку вектор  $\vec{e}_{20}$  есть линейная комбинация решений (6), то он тоже является решением, линейно независимым с  $\vec{e}_1$ . Отметим, что в сильно неоднородной среде понятие магнитоионной моды теряет свой изначальный физический смысл. В результате процедуры численного интегрирования, описанной выше, получаем при  $z = z_2$  два формально правильных линейно независимых решения (6). Однако в результате применения процедуры ортогонализации эти решения в сово-

купности не имеют какого-либо физического смысла. С их помощью можно сконструировать все характеристики волнового поля в пустом пространстве при  $z \leq z_2$  [23].

Во-первых, можно разделить волны ниже слоя на восходящие и нисходящие части. Из выражений (7) и (8) легко получить значения  $q = \pm C$ , причем, верхний знак соответствует волнам вверх ( $\vec{U}$ ), а нижний – вниз ( $\vec{D}$ ), т.е.

$$\vec{U} \sim \exp(-ik_0 Cz) \text{ и } \vec{D} \sim \exp(+ik_0 Cz).$$

Возьмем электрическое поле  $\vec{E}$ , тогда  $\vec{E} = \vec{U} + \vec{D}$  и  $d\vec{E}/dz = -ik_0 C\vec{U} + ik_0 C\vec{D}$ . Выражение для производной можно также получить из уравнения (6). Получаем с учетом соотношений (10):

$$\begin{aligned} U_x &= (E_x + CZ_0 H_y)/2; \\ U_y &= (E_y - Z_0 H_x/C)/2; \\ U_z &= -\Gamma U_x/C; \\ D_x &= (E_x - CZ_0 H_y)/2; \\ D_y &= (E_y + Z_0 H_x/C)/2; \\ D_z &= \Gamma D_x/C, \end{aligned}$$

где  $C = \cos\theta$ .

Во-вторых, можно показать, что линейная комбинация  $\vec{U}_n = \vec{U}_2 + \zeta \vec{U}_1$ , где  $\zeta = -(\vec{U}_1^* \vec{U}_2)/(\vec{U}_1^* \vec{U}_1)$  представляет собой “проникающую” волну, которая порождает наименее затухающую необыкновенную волну выше уровня  $z_1$ . У линейно независимых решений  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_n$  уравнения (6) ниже высоты  $z_2$  есть простой физический смысл: они имеют соответственно наименьший и наибольший коэффициенты прохождения по мощности через неоднородный плазменный слой  $z_2 - z_1$ , причем  $\vec{e}_n = \vec{e}_2 + \zeta \vec{e}_1$ .

В-третьих, векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_n$  можно использовать как базис для получения характеристик известной плоской волны, падающей на слой снизу (коэффициенты отражения, прохождения, в том числе по мощности). Традиционно рассматриваются падающие плоские волны двух независимых поляризации. *Вертикальная* поляризация означает, что вектор  $\vec{E}$  напряженности электрического поля волны лежит в плоскости  $(x, z)$ , в которой лежит и вектор  $\vec{k}$ . В случае *горизонтальной* поляризации вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен этой плоскости, т.е. параллелен оси  $y$ . Обозначим эти векторы как  $\vec{E}_\parallel$  и  $\vec{E}_\perp$  соответственно. Поскольку волны этих условно выбранных поляризаций должны быть линейными комбинациями базисных решений ( $\vec{e}_1, \vec{e}_n$ ), то из простейших геометрических соображений легко получить коэффициенты разложений  $\vec{E}_\parallel$  и  $\vec{E}_\perp$  для волн вверх ( $\uparrow$ ) и вниз ( $\downarrow$ ), кото-

рые будут, очевидно, одинаковы для этих

$$\begin{aligned} \vec{E}_\parallel^\uparrow &= A_\parallel \vec{U}_1 + B_\parallel \vec{U}_n, \\ \vec{E}_\parallel^\downarrow &= A_\parallel \vec{D}_1 + B_\parallel \vec{D}_n, \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} A_\parallel &= -E_\parallel C U_{ny} / (U_{1y} U_{nx} - U_{1x} U_{ny}); \\ B_\parallel &= E_\parallel C U_{1y} / (U_{1y} U_{nx} - U_{1x} U_{ny}). \end{aligned} \quad (13b)$$

Если задана амплитуда  $E_\parallel$  падающей волны вертикальной поляризации, то структуру поля ниже слоя можно определить из соотношений (13). Аналогично, если задана амплитуда поля  $E_\perp$  падающей волны горизонтальной поляризации, то

$$\vec{E}_\perp^\uparrow = A_\perp \vec{U}_1 + B_\perp \vec{U}_n, \quad \vec{E}_\perp^\downarrow = A_\perp \vec{D}_1 + B_\perp \vec{D}_n, \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} A_\perp &= -E_\perp U_{nx} / (U_{1y} U_{nx} - U_{1x} U_{ny}); \\ B_\perp &= -E_\perp U_{1x} / (U_{1y} U_{nx} - U_{1x} U_{ny}). \end{aligned} \quad (14b)$$

Если на анизотропный слой падает волна, например, горизонтальной поляризации, то отражаются волны и горизонтальной, и вертикальной поляризации. Поэтому принято представлять коэффициент отражения в виде  $2 \times 2$  матрицы  $\hat{R}$  [18]. Приведем определения элементов матрицы:

$$R_{11} = H_y^\downarrow / H_y^\uparrow \text{ при } E_\perp = 0; \quad (15a)$$

$$R_{12} = Z_0 H_y^\downarrow / E_y^\uparrow \text{ при } E_\parallel = 0;$$

$$R_{21} = E_y^\downarrow / H_y^\uparrow \text{ при } E_\perp = 0; \quad (15b)$$

$$R_{22} = E_y^\downarrow / E_y^\uparrow \text{ при } E_\parallel = 0.$$

Из соотношений (10), (13), (14) и (15) получим

$$R_{11} = (U_{1y} D_{nx} - U_{ny} D_{1x}) / (U_{1x} U_{ny} - U_{1y} U_{nx}), \quad (16a)$$

$$R_{12} = (D_{1x} U_{nx} - U_{1x} D_{nx}) / (U_{1x} U_{ny} - U_{1y} U_{nx}) C, \quad (16b)$$

$$R_{21} = C(U_{ny} D_{1y} - U_{1y} D_{ny}) / (U_{1x} U_{ny} - U_{1y} U_{nx}), \quad (16b)$$

$$R_{22} = (U_{1y} D_{nx} - U_{ny} D_{1x}) / (U_{1x} U_{ny} - U_{1y} U_{nx}). \quad (16g)$$

Определим поляризации  $\rho$  базовых решений:

$$\rho_n = E_{n\perp} / E_{n\parallel}, \quad \rho_1 = E_{1\perp} / E_{1\parallel}, \quad (17)$$

поскольку  $\vec{e}_1, \vec{e}_n$  ортогональны, то  $|\rho_n| |\rho_1| = 1$  и  $\arg \rho_1 = \arg \rho_n + \pi$ . Из разложений (13) и (14) получим

$$\rho_n = C U_{ny} / U_{nx}, \quad \rho_1 = C U_{1y} / U_{1x}. \quad (18)$$

Коэффициенты прохождения по напряженности электрического поля волны легко получить, учитывая тот факт, что на уровень  $z_1$  проходит только одна проникающая волна. Получаем два коэффициента:

$$\begin{aligned} t_\parallel &= E_{nx}(z_1) / E_\parallel \text{ при } E_\perp = 0; \\ t_\perp &= E_{nx}(z_1) / E_\perp \text{ при } E_\parallel = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти выражения можно переписать в более простом виде:

$$t_\perp = C E_{nx}(z_1) / U_{nx} (\rho_p - \rho_1) = -t_\parallel / \rho_1. \quad (20)$$

**Таблица 1.** Параметры дневной и ночной ионосферы

Ионы газа	Атомная масса	Дневная ионосфера			Ночная ионосфера		
		состав, %	$f_{pi}$ , кГц	$f_{Hi}$ , кГц	состав, %	$f_{pi}$ , кГц	$f_{Hi}$ , кГц
$N^+$	14	0.3	0.433	0.059	—	—	—
$O^+$	16	50.8	5.272	0.051	37.6	6.261	0.050
$N_2^+$	28	1.7	0.729	0.029	—	—	—
$NO^+$	30	31.5	3.032	0.027	10.0	2.358	0.027
$O_2^+$	32	15.1	2.033	0.026	37.0	4.392	0.025

В заключение описательной части приведем выражения для коэффициентов прохождения по мощности. Мощность падающей на слой проникающей волновой моды вдоль оси  $z$  составляет

$$P_{z2} = C (|U_{px}|^2 + |U_{py}|^2 + |U_{pz}|^2) / 2Z_0.$$

Выше слоя при  $z = z_1$  вертикальная часть мощности формируется начальным полем свистовой моды  $\vec{e}_n$ :

$$P_{z1} = \text{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) / 2.$$

Вертикальный коэффициент прохождения по мощности  $D_{pz}$  определяем так:

$$D_{pz} = P_{z1} / P_{z2} = Z_0 \text{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) / C (|U_{px}|^2 + |U_{py}|^2 + |U_{pz}|^2). \quad (21)$$

Определим полный коэффициент прохождения по мощности  $D_n$ :

$$D_n = CD_{pz} \sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}, \quad (22)$$

где относительные “боковые” потоки мощности  $s_{x,y}$  на высоте  $z_1$  вычисляются как отношения соответствующих компонент вектора Умова–Пойнтинга к его  $z$ -компоненте:

$$s_x = \text{Re} (E_y H_z^* - E_z H_y^*) / \text{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*),$$

$$s_y = \text{Re} (E_z H_x^* - E_x H_z^*) / \text{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*),$$

причем, компоненты напряженности поля волны  $E_z$  и  $H_z$  определяются из соотношений (9а) и (9б).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

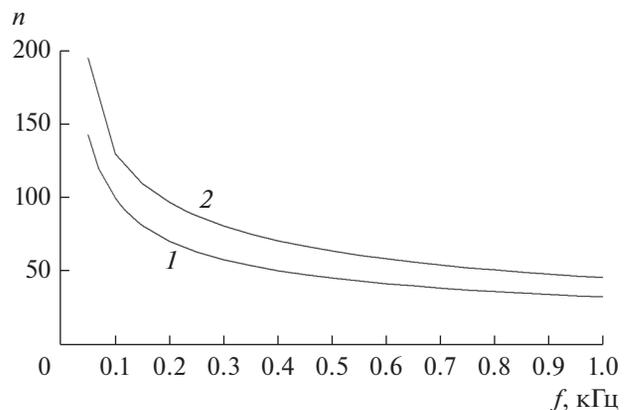
Далее везде будем использовать численные значения параметров плазмы, которые соответствуют приполярной ионосфере на широте  $60^\circ$  в равноденственный период при умеренной солнечной активности [25]. Процент ионных составляющих в слое  $[z_1, z_2]$  приведен в табл. 1.

Профили  $N_e(z)$  и  $\nu_e(z)$  аппроксимировались кубическими сплайнами. Такой метод гарантирует отсутствие “паразитных” частичных отражений в сильно неоднородном слое нижней ионосферы.

Для дневной ионосферы выбирали слой 50...100 км; для ночной ионосферы – 75...150 км. На верхней границе слоя плазменная частота для электронов днем равна 1268.2 кГц, ночью – 1750.6 кГц, gyro-частоты электронов составляют днем 1507.1 кГц, ночью – 1472.7 кГц. Для ионов соответствующие частоты приведены в табл. 1. Частоты нижнего гибридного резонанса  $f_{LHR}$  равны соответственно 4.95 и 5.15 кГц.

Расчеты проводились для значений  $\theta = 10^\circ$ ,  $A = 180^\circ$  (направление на магнитный юг) и частот в интервале 50...1000 Гц. Выбор этих величин определялся условиями работы станции HAARP. Однако следует учесть, что длина волны на частоте 50 Гц составляет в атмосфере 6000 км. При длине окружности экватора 40000 км на ней укладывается шесть целых длин волн. Такой волновой процесс можно лишь условно считать “локальным”, а дальнейшее понижение частоты требует рассмотрения сферической полости “Земля–ионосфера” в виде резонатора, а не волновода. Если учесть, однако, что в нижней ионосфере на высоте  $z_1$  показатель преломления волн относительно велик, то получим величину длины волны в среде  $\sim 30...40$  км. Такую величину вполне можно считать “локальной”.

На рис. 2 приведены расчетные зависимости показателя преломления  $n$  свистовой моды от частоты при  $z = z_1$  для дневной (кривая 1) и ночной (кривая 2) моделей ионосферы.



**Рис. 2.** Зависимости показателя преломления  $n$  свистовой моды от частоты при  $z = z_1$  для дневной (кривая 1) и ночной (кривая 2) моделей ионосферы.

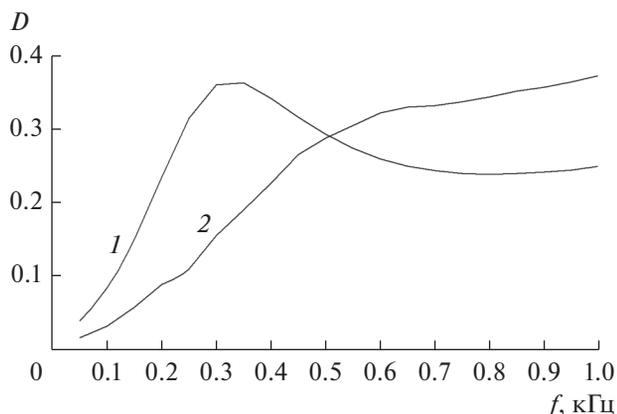


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения по мощности  $D$  от частоты  $f$  для дневной (кривая 1) и ночной (кривая 2) моделей ионосферы.

стоты при  $z = z_1$  для дневной и ночной моделей ионосферы. Величина  $n$  для ночи выше дневных значений, поскольку ночная высота  $z_1$  значительно больше дневной.

На рис. 3 представлена частотная зависимость полного коэффициента прохождения по мощности  $D$  (фактически соответствует величине  $D_{\Pi}$  в тексте) для дневной и ночной моделей ионосферы. Для диапазона сверхдлинных дневные значения  $D$ , как правило, заметно меньше ночных из-за столкновительного поглощения волн на высотах 50...70 км в дневное время. Из рис. 3 видно, что подобная закономерность начинает развиваться только на частотах  $f > 500$  Гц. На меньших частотах ионные резонансы в дневное время формируют характерный максимум прохождения на частотах  $f \sim 30$  Гц, что соответствует примерно половине gyro-частоты наилегчайшего иона  $N^+$ . Отметим, что величина  $D$  на частотах 0.2...1 кГц не мала ни днем, ни ночью, и почти достигает значения 0.4. Без учета влияния геомагнитного поля величина  $D$  равнялась бы нулю.

На рис. 4а приведены зависимости от частоты модулей компонентов матрицы  $\hat{R}$  коэффициента отражения (см. (15), (16)) для дня (сплошные кривые) и ночи (пунктир). Приведены зависимости от  $f$  величин  $R_{11}$  (кривые 1 и 4),  $R_{12}$  (кривые 2 и 5) и  $R_{22}$  для дня (кривая 3). Для выбранного значения азимута из рисунка видно (кривые 1, 3), что значения  $R_{11}$  и  $R_{22}$  очень близки, или практически совпадают (как и значения не диагональных элементов  $R_{12}$  и  $R_{21}$ , из которых кривая приведена только для величины  $R_{12}$ ). По этой причине на рис. 4б изображены только зависимости аргументов  $R_{11}(f)$  – кривые 1, 4; и аргументов  $R_{12}(f)$  – кривые 2 и 5.

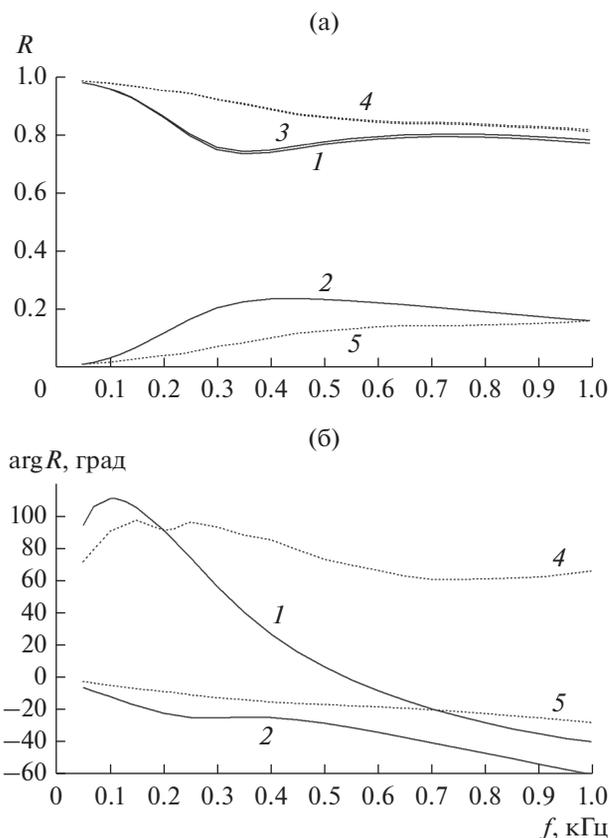


Рис. 4. Зависимости модулей (а) и аргументов (б) компонентов матрицы  $\hat{R}$  коэффициента отражения от частоты  $f$  для дня (сплошные кривые) и ночи (пунктир) для величин  $R_{11}$  (1, 4),  $R_{12}$  (2, 5),  $R_{22}$  (3).

Из рис. 4 видно, что в выбранном интервале частот преобладают диагональные элементы  $\hat{R}$ , причем в ночное время аргумент элементов матрицы относительно стабилен. В дневное время с ростом частоты при переходе из области ионных колебаний в область электронных волн аргумент диагональных элементов заметно меняется (кривая 1 на рис. 4б). Кривая 3 для аргумента  $R_{22}$  на рис. 4б отсутствует, поскольку практически совпадает с кривой 1. Мы не приводим аналогичные зависимости поляризации отраженной волны в целом, поскольку в используемом интервале частот ионосфера играет роль почти идеального поляризационного фильтра, поэтому поляризация отраженной волны является круговой.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено описание алгоритма вычисления характеристик прохождения низкочастотных электромагнитных волн через магнитоактивную плоскострустную нижнюю ионосферу с параметрами, аналогичными параметрам ионосферы над

станцией HAARP, Аляска. Алгоритм основан на процедуре численного интегрирования волновых уравнений для случая падения плоской волны на ионосферу снизу с учетом ионного состава плазмы. В качестве иллюстрации работы алгоритма вычислены основные характеристики прохождения волны через нижнюю ионосферу в интервале частот 0.05...1 кГц.

Коэффициент прохождения по мощности указанных НЧ-волн достаточно велик и находится в интервале 0.2...0.4 для большей части используемых частот. В дневное время вблизи частоты ~300 Гц коэффициент прохождения в дневное время имеет максимум и превышает ночные значения примерно в два раза. Во всем исследованном интервале частот поляризация отраженной волны является круговой с хорошей степенью точности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moore R.C., Inan U.S., Bell T.F., Kennedy E.J. // J. Geophys. Res. 2007. V. 112. P. A05309. <https://doi.org/10.1029/2006JA012063>
2. Мошков А.В., Пожидает В.Н. // РЭ. 2013. Т. 58. № 9. С. 965. <https://doi.org/10.7868/S0033849413090106>
3. Бова Ю.И., Крюковский А.С., Лукин Д.С. // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 3. <https://doi.org/10.1134/S0033849419010030>
4. Гуревич А.В. // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 11. С. 1145.
5. Белов А.С., Марков Г.А., Фролов В.Л. и др. // Совр. проблемы дист. зондирования Земли из космоса. 2008. Т. 5. № 1. С. 539.
6. Cohen M.B., Golkowski M., Inan U.S. // Geophys. Res. Lett. 2008. V. 35. P. L02806. <https://doi.org/10.1029/2007GL032424>
7. Budden K.G. The wave-guide mode theory of wave propagation. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1961.
8. Wait J.R. Electromagnetic waves in stratified media. Oxford: Pergamon press, 1970.
9. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение радиоволн в волновом канале Земли-ионосфера и в ионосфере. М.: Наука, 1994.
10. Sumner S.A. // IEEE Trans. 2000. V. AP-48. № 9. P. 1420.
11. Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г. // Космич. исслед. 1967. Т. 5. № 4. С. 593.
12. Лукин Д.С., Савченко П.П. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1981. Т. 21. № 2. С. 256.
13. Аксенов В.И., Мошков А.В. // Космич. исслед. 1981. Т. 19. № 6. С. 876.
14. Мошков А.В., Пожидает В.Н. // РЭ. 2018. Т. 63. № 2. С. 134. <https://doi.org/10.7868/S0033849418020043>
15. Макаров Г.И., Федорова Л.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 12. С. 1384.
16. Аксенов В.И., Мошков А.В. // РЭ. 1987. Т. 32. № 5. С. 913.
17. Мошков А.В., Пожидает В.Н. // РЭ. 2018. Т. 63. № 5. С. 409. <https://doi.org/10.7868/S0033849418050030>
18. Budden K.G. Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge: Unive. Press, 1961.
19. Аксенов В.И., Лишин И.В., Назарова М.В. // Распространение радиоволн. М.: Наука, 1975. С. 228.
20. Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965.
21. Дэвис К. Радиоволны в ионосфере. М.: Мир, 1973.
22. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во инстр. лит., 1962.
23. Scarabucci R.R. // Technical Report No. 3412-11 of the Stanford University Radioscience Lab. Stanford: Stanford Univ., 1969. 101 p. <https://vlf.stanford.edu/pubs/interpretation-vlf-signals-observed-ogo-4-satellite>.
24. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Высшая школа, 1966. Т. 1.
25. Фаткуллин М.Н., Зеленова Т.И., Козлов В.К. и др. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы. М.: Наука, 1981.

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ  
СИСТЕМЫ

УДК 621.373

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ  
С РАЗНОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОЛОСОЙ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ© 2020 г. А. М. Ефремов<sup>а</sup>, В. И. Кошелев<sup>а</sup> \*, В. В. Плиско<sup>а</sup><sup>а</sup>Институт сильноточной электроники СО РАН,  
просп. Академический, 2/3, Томск, 634055 Российская Федерация

\*E-mail: koshelev@lhfe.hcei.tsc.ru

Поступила в редакцию 01.07.2019 г.

После доработки 01.07.2019 г.

Принята к публикации 19.07.2019 г.

Исследован синтез электромагнитных импульсов с расширенным спектром сложением в свободном пространстве импульсов излучения с различным частотным диапазоном. Выполнена аналитическая оценка спектра излучения с максимальной шириной для решетки из комбинированных антенн, возбуждаемых биполярными импульсами длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс. Разработана комбинированная антенна с расширенной полосой согласования. Экспериментально показана возможность получения сверхширокополосного излучения с шириной спектра более четырех октав для решетки из комбинированных антенн, возбуждаемых биполярными импульсами длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс.

DOI: 10.31857/S0033849420050046

## ВВЕДЕНИЕ

Для исследований в таких областях [1], как радиолокация с распознаванием объектов, связь с высокой пропускной способностью, воздействие электромагнитных полей на объекты, включая биологические, необходимы источники сверхширокополосного (СШП) излучения с изменяемым спектром. Можно отметить несколько подходов к решению данной задачи [2–5].

Рассмотрим здесь только первый подход [2], который заключается в сложении СШП-импульсов с разным спектральным диапазоном в свободном пространстве при возбуждении элементов решетки биполярными импульсами разной длительности. Этот подход был развит в последующих работах [6–9]. Исследовали синтез электромагнитных импульсов в двух режимах: максимальная напряженность поля и максимальная ширина спектра излучения.

В экспериментах использовали решетки комбинированных антенн (КА) [10, 11]. Были созданы мощные источники синтезированного излучения на основе четырехэлементных решеток КА, возбуждаемых биполярными импульсами напряжения длительностью 2 и 3 нс [8], а также 0.5 и 1 нс [9]. Для получения симметричной диаграммы направленности (ДН) с максимумом поля на оси, антенны с одинаковой длительностью импульса располагали в решетке  $2 \times 2$  по диагонали.

Цель данной работы – исследование синтеза излучения при возбуждении четырехэлементной

решетки КА биполярными импульсами длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс, а также разработка мощного источника синтезированного СШП-излучения. Для этого требовалось разработать четырехканальный формирователь биполярных импульсов (ФБИ) с высокой амплитудой напряжения и стабильностью.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНТЕЗА  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Для того чтобы оценить характеристики синтезированных импульсов, были проведены численные расчеты. СШП-импульс, излученный КА, моделировался производной суммы двух гауссовых функций [6]:

$$E(t, \tau) = \frac{8}{\tau} \left( \frac{4t}{\tau} - 2 \right) \exp \left( - \left( \frac{4t}{\lambda} - 2 \right)^2 \right) - \frac{8}{\tau} \left( \frac{4t}{\tau} - 4 \right) \exp \left( - \left( \frac{4t}{\lambda} - 4 \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $\tau$  – длительность биполярного импульса напряжения, возбуждающего антенну, по уровню 0.1 амплитуды. Рассчитанные значения напряженности поля нормировались к единице. Выражение (1) хорошо моделирует реальные импульсы  $E(t)$ , излученные КА и их спектры  $S(f)$ . Импульсы, рассчитанные по формуле (1), приведены на рис. 1а, а их спектры показаны на рис. 1б.

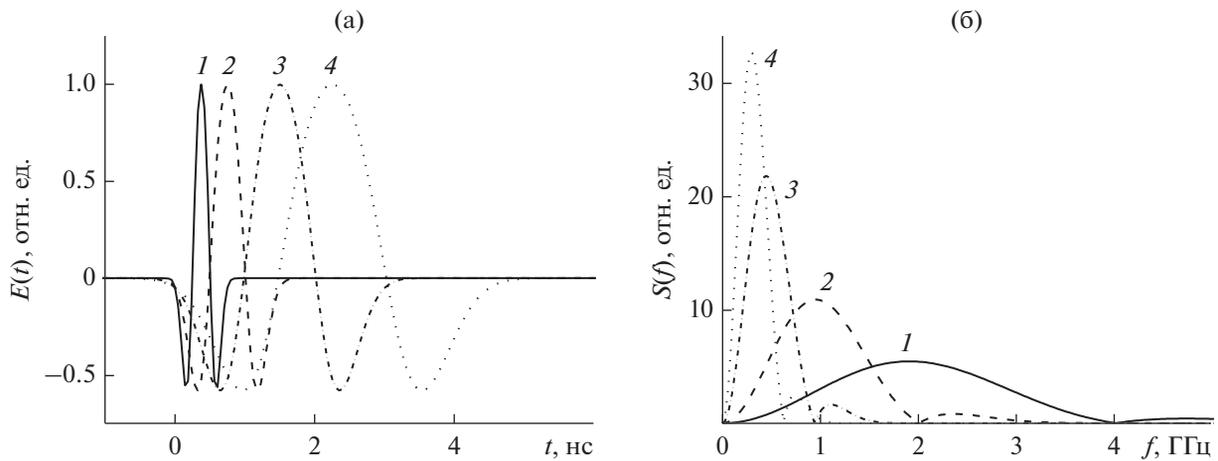


Рис. 1. Импульсы излучения (а), рассчитанные по формуле при возбуждении антенн биполярными импульсами на-пряжения длительностью 0.5 (1), 1 (2), 2 (3) и 3 нс (4), и их соответствующие спектры (б).

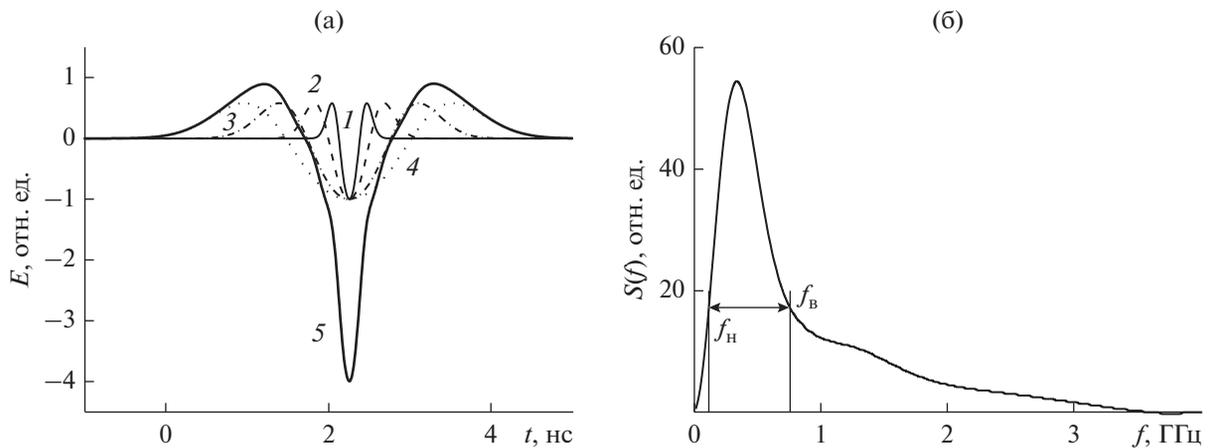


Рис. 2. Синхронизация импульсов по максимуму амплитуды: а) импульсы излучения от одиночных антенн длительностью 0.5 (1), 1 (2), 2 (3) и 3 нс (4) и суммарный импульс (5); б) спектр суммарного импульса излучения ( $f_B/f_H = 6.18$ ).

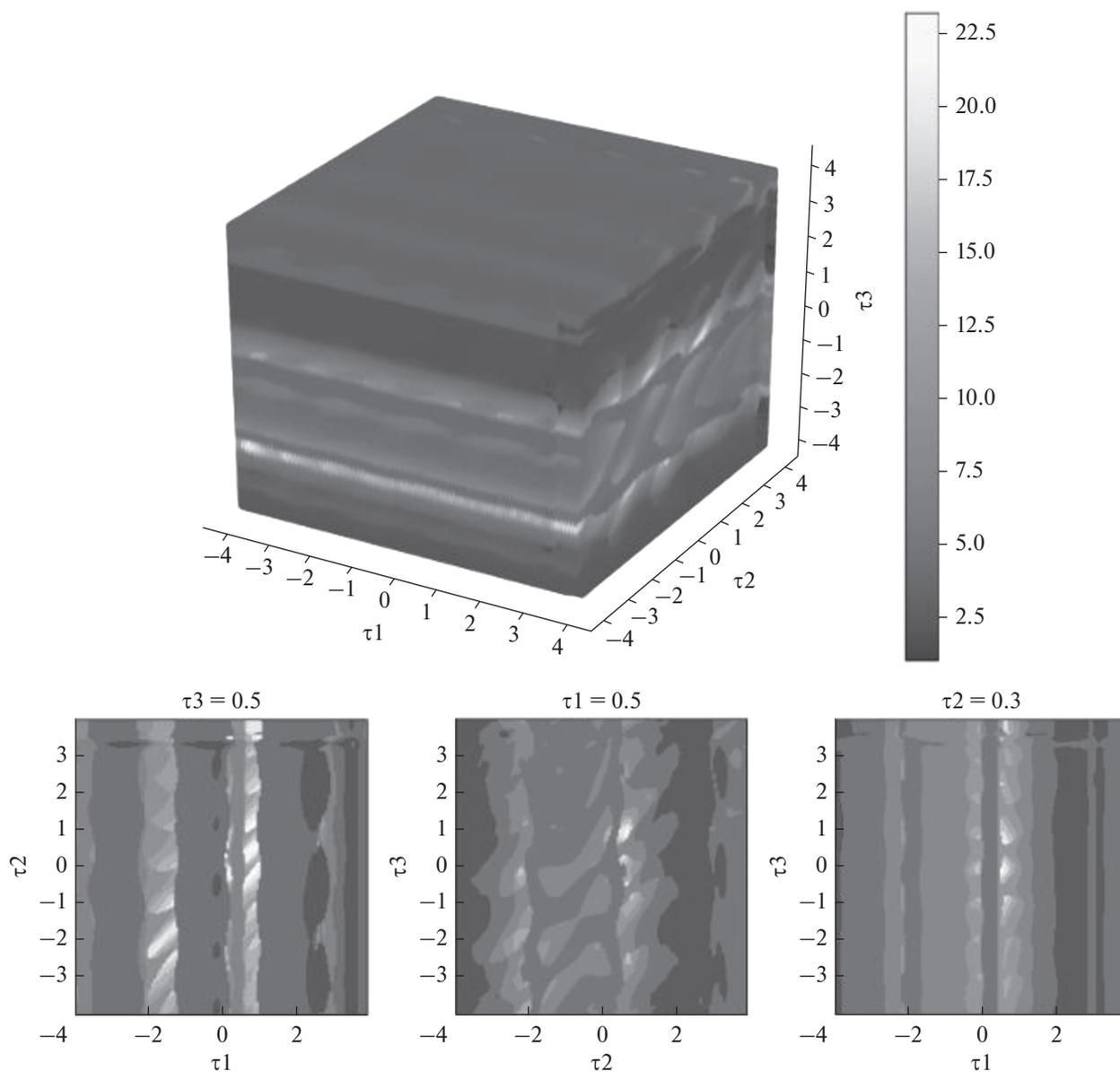
Результат сложения импульсов излучения зависит как от характеристик импульсов, так и от временных задержек между ними. Таким образом, изменяя задержку между импульсами излучения с разной длительностью (шириной спектра), можем получать импульсы с разными характеристиками: длительностью, амплитудой и шириной спектра. Спектр импульса характеризуется следующими параметрами [12]:

- 1) ширина спектра  $\Delta f = f_B - f_H$ , где  $f_H$  – нижняя, а  $f_B$  – верхняя граничные частоты спектра излучения, оцененные по уровню  $-10$  дБ;
- 2) относительная ширина спектра  $\Delta f/f_0$ , где  $f_0 = (f_B + f_H)/2$  – центральная частота спектра излучения;
- 3) отношение верхней и нижней граничных частот  $b = f_B/f_H$ .

В данной работе мы синтезировали импульсы излучения с максимальной амплитудой поля и максимальной шириной спектра. Ширину спектра импульса будем определять, в основном, по отношению верхней и нижней граничных частот  $b = f_B/f_H$ .

Максимальная пиковая напряженность поля соответствует синхронизации положительных максимумов импульсов (рис. 2) и реализуется при временных задержках  $\tau_1 = 1.882$  нс,  $\tau_2 = 1.505$  нс и  $\tau_3 = 0.752$  нс для биполярных импульсов длительностью 0.5, 1 и 2 нс соответственно, относительно импульса длительностью 3 нс. При этом амплитуды импульсов излучения складываются, а отношение верхней и нижней граничных частот суммарного импульса по сравнению с одиночными импульсами увеличивается примерно на 33%.

В опубликованных ранее исследованиях [8, 9] для анализа характеристик импульса излучения,



**Рис. 3.** Скриншот окна программы для визуализации зависимости отношения верхней и нижней граничных частот  $b(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = f_B/f_H$  от временных задержек.

синтезированного сложением двух импульсов с разной длительностью, мы строили зависимости пиковой напряженности поля и ширины спектра по уровню  $-10$  дБ от задержки между импульсами. В случае четырех импульсов с разной длительностью мы имеем дело с тремя задержками, поэтому визуальное отображение и анализ результатов становятся затруднительными. В этой связи была написана программа для расчета и отображения зависимости ширины спектра от задержек (рис. 3), которая позволяет в трехмерном массиве значений  $b(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = f_B/f_H$  выбирать сечения по одной из задержек.

Анализ данного массива значений показал, что он имеет сложную структуру с множеством

локальных экстремумов. Использование методов оптимизации *basin-hopping* [13], дифференциальной эволюции [14], симплицальной гомологической глобальной оптимизации [15] не позволило гарантированно находить глобальный максимум. Максимум ширины спектра находили методом перебора (равномерного поиска). Шаг перебора задержек был выбран равным  $0.05$  нс, так как это соответствует временной нестабильности источника высоковольтных импульсов. На рис. 4 показан результат сложения импульсов с задержками, найденными методом *basin-hopping*, а на рис. 5 — результат сложения импульсов с задержками, найденными методом перебора с шагом  $0.05$  нс. Уже с таким шагом метод перебора показал ре-

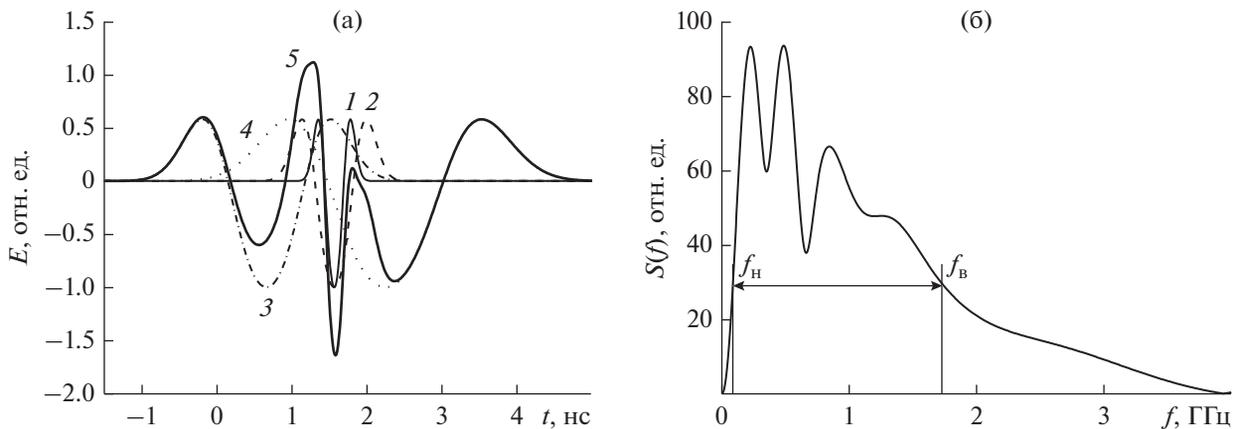


Рис. 4. Импульсы излучения от одиночных антенн (а) длительностью 0.5 (1), 1 (2), 2 нс (3) с соответствующими задержками 1.193, 0.817,  $-0.835$  нс относительно импульса длительностью 3 нс (4), рассчитанными методом basin-hopping, и суммарный импульс (кривая 5); а также спектр (б) суммарного импульса излучения ( $f_B/f_H = 20.47$ ).

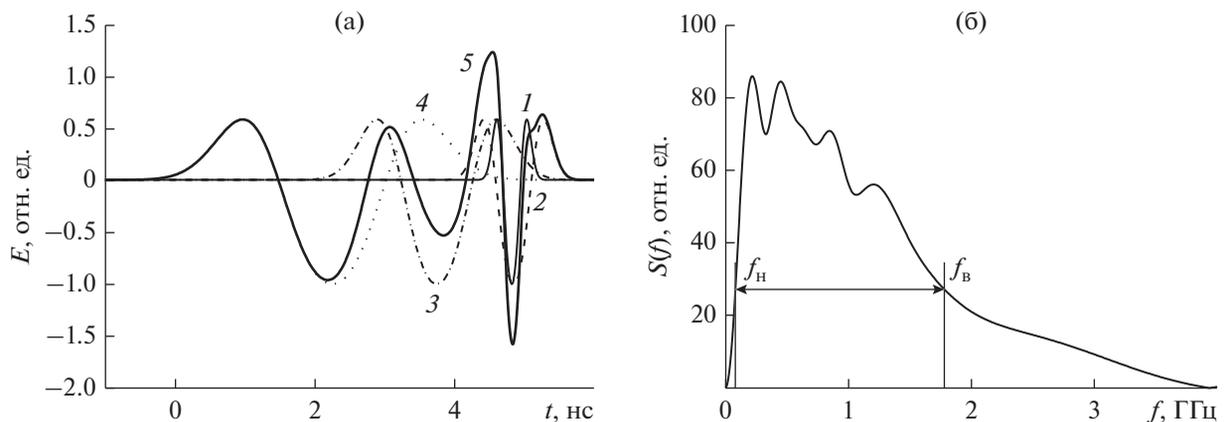


Рис. 5. Импульсы излучения от одиночных антенн (а) длительностью 0.5 (1), 1 (2), 2 нс (3) с соответствующими задержками 4.45, 4.1,  $-2.25$  нс относительно импульса длительностью 3 нс (4), рассчитанными методом перебора с шагом 0.05 нс, и суммарный импульс (кривая 5); а также спектр (б) суммарного импульса излучения ( $f_B/f_H = 22$ ).

зультат лучше, чем basin-hopping. По сравнению с одиночным импульсом отношение верхней и нижней граничных частот суммарного импульса увеличилось в 4.7 раза. В табл. 1 приведены частотные характеристики для одиночных импульсов (см. рис. 1) и суммарных импульсов для различных задержек.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕТКИ КОМБИНИРОВАННЫХ АНТЕНН

В качестве излучающей системы использовалась четырехэлементная решетка комбинированных антенн (КА) (рис. 6), оптимизированных для излучения биполярных импульсов длительностью 3 нс [16–18] и 2 нс [19]. Для излучения импульсов длительностью 1 и 0.5 нс была разработана новая КА (рис. 7), оптимизированная численным моделированием [20] для расширения полосы согласования в ВЧ-область. Эту антенну использовали для излучения биполярных импульсов длительностью как 1 нс, так и 0.5 нс. Ана-

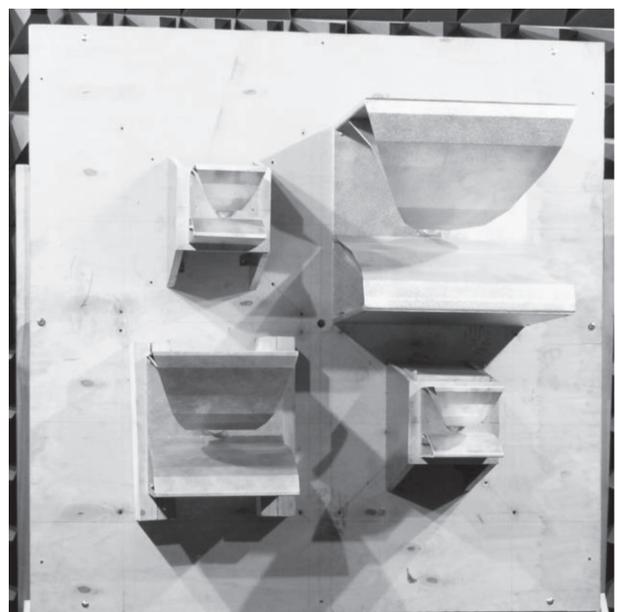


Рис. 6. Четырехэлементная антенная решетка.

**Таблица 1.** Параметры расчетных импульсов СШП-излучения

Импульс, нс	$f_H$	$f_B$	$f_0$	$\Delta f$	$\Delta f/f_0$	$b = f_B/f_H$
	ГГц					
0.5	0.664	3.074	1.869	2.41	1.289	4.632
1	0.332	1.537	0.934	1.205	1.29	4.632
2	0.166	0.769	0.467	0.603	1.290	4.636
3	0.11	0.512	0.312	0.402	1.291	4.643
Суммарный, макс. амплитуда	0.124	0.766	0.445	0.612	1.37	6.18
Суммарный, макс. спектр (basin–hopping)	0.084	1.728	0.906	1.64	1.81	20.47
Суммарный, макс. спектр (перебор)	0.081	1.78	0.93	1.7	1.83	22

логично [21] расширение полосы согласования удалось достичь уменьшением емкости в области коаксиально-полоскового перехода и изменением геометрии электродов антенны. На рис. 8 приведены рассчитанные и измеренные КСВН разработанной ранее КА [22] (далее – КА1), оптимизированной для излучения биполярных импульсов длительностью 1 нс, и новой антенны КА2 с расширенной полосой согласования.

Для исследования пространственно-временных характеристик антенн были использованы низковольтные биполярные импульсы напряжения. Для этих и последующих измерений излученных импульсов использовалась приемная *ТЕМ*-антенна, представляющая собой половину *ТЕМ*-рупора с высотой апертуры 8 см [23]. Сигнал с выхода приемной *ТЕМ*-антенны регистрировали осциллографом LeCroy WaveMaster 830Zi с полосой пропускания 16 ГГц.

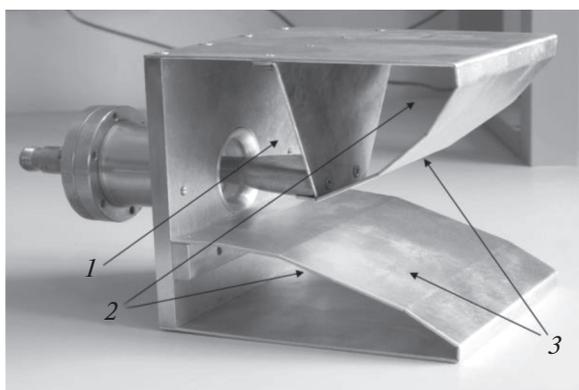
На рис. 9 показаны осциллограммы импульсов, излученных антеннами КА2 и КА1, возбуждаемыми биполярным импульсом длительностью

0.5 нс. Видно, что амплитуда импульса, излученного антенной КА2, увеличилась на 14%.

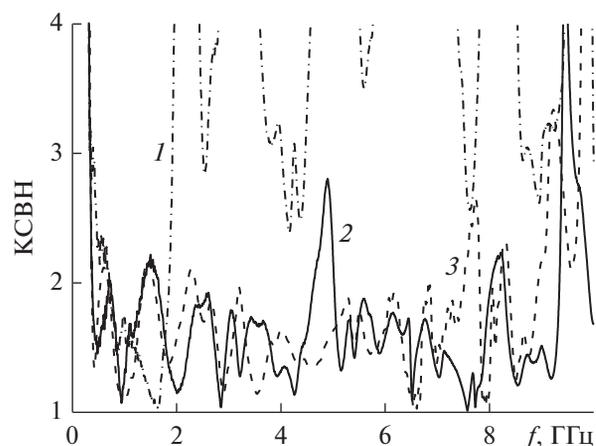
Для оценки энергетической эффективности антенны КА2 измерили отраженную от антенны энергию  $W_{отр}$  и рассчитали коэффициент по энергии  $K_3 = 1 - W_{отр}/W_r$ , где  $W_r$  – энергия импульса, подводимая к антенне от генератора. На вход антенны через согласованный ответвитель подавали биполярный импульс напряжения длительностью 1 или 0.5 нс и получили  $K_3 = 0.9$  и 0.94 соответственно. Отраженную энергию вычисляли также через КСВН и спектр возбуждающего импульса напряжения по соотношению

$$K_3 = 1 - \frac{W_{отр}}{W_r} = 1 - \frac{\int U_r^2(f) \left( \frac{K_H(f) - 1}{K_H(f) + 1} \right)^2 df}{\int U_r^2(f) df}, \quad (2)$$

( $U_r(f)$  – спектр импульса напряжения генератора,  $K_H$  – КСВН) и получили  $K_3 = 0.9$  и 0.91 для 1 и 0.5 нс соответственно, что близко к результатам измерений.



**Рис. 7.** Комбинированная антенна для излучения биполярных импульсов длительностью 1 и 0.5 нс: 1 – активный магнитный диполь, 2 – пассивные магнитные диполи, 3 – *ТЕМ*-рупор.



**Рис. 8.** Измеренные (1, 2) и рассчитанные (3) КСВН комбинированных антенн КА1 (1) и КА2 (2, 3).

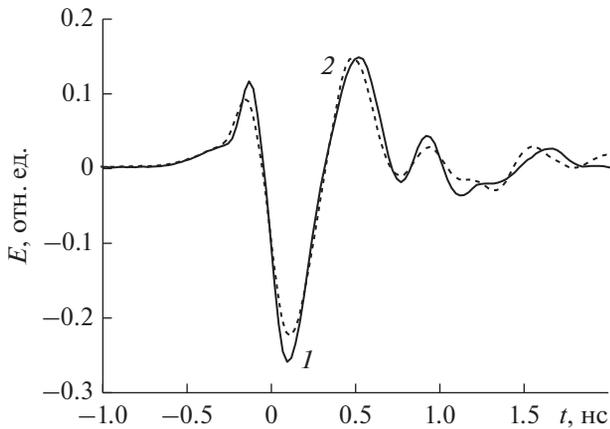


Рис. 9. Осциллограммы импульсов, излученных комбинированными антеннами КА2 (1) и КА1 (2) при возбуждении биполярным импульсом длительностью 0.5 нс.

Диаграмму направленности антенн в  $E$ - и  $H$ -плоскостях измеряли по пиковой мощности ( $E_p^2$ ) при возбуждении антенны биполярными импульсами длительностью 1 и 0.5 нс. При этом антенну КА2 вращали относительно ее геометрического центра, а неподвижная приемная ТЕМ-антенна находилась на расстоянии 4 м от нее. При возбуждении биполярным импульсом длительностью 1 нс ширина ДН на полувысоте у антенны КА2 была примерно такой же, как и у КА1:  $98^\circ$  в  $H$ -плоскости и  $108^\circ$  в  $E$ -плоскости (рис. 10а), а при возбуждении антенны КА2 импульсом дли-

тельностью 0.5 нс – составила  $83^\circ$  в  $H$ -плоскости и  $69^\circ$  в  $E$ -плоскости (рис. 10б).

Было проведено моделирование ДН по пиковой мощности  $E_p^2$  для различных конфигураций решетки. ДН элементов полагали кардиоидными. Геометрический центр решетки совпадал с началом координат. Лучший результат получен для конфигурации решетки, показанной на рис. 11. Для режима синтеза с максимальной пиковой напряженностью поля получили практически симметричную ДН с максимумом в главном направлении ( $\varphi = \delta = 0$ ) (рис. 12а). Для режима синтеза с максимальной шириной спектра получили несимметричные ДН в  $H$ - и  $E$ -плоскостях (рис. 12б, кривые 1 и 2) с отклонением максимума диаграммы от главного направления решетки. Зависимость отношения крайних частот спектра излученного импульса от угла для  $H$ -плоскости показана на рис. 12б (кривая 3). Среднеквадратичное отклонение формы импульсов относительно формы импульса в главном направлении в  $H$ -плоскости, не превышает 20% в пределах  $\pm 5.5^\circ$  для режима с максимальной амплитудой и  $\pm 2.7^\circ$  для режима с максимальным спектром. Расчеты проводились аналогично [21]. Изменение отношения крайних частот в спектре излученного импульса не превышает 20% в диапазоне углов  $\pm 25^\circ$  и от  $-4.7^\circ$  до  $+3.3^\circ$  для режимов с максимальной амплитудой и максимальным спектром соответственно. Для  $E$ -плоскости получены близкие результаты. Среднеквадратичное отклонение формы импульсов относительно формы импульса в главном направлении не превышает 20% в пределах  $\pm 4.8^\circ$  и  $\pm 2.6^\circ$  для режи-

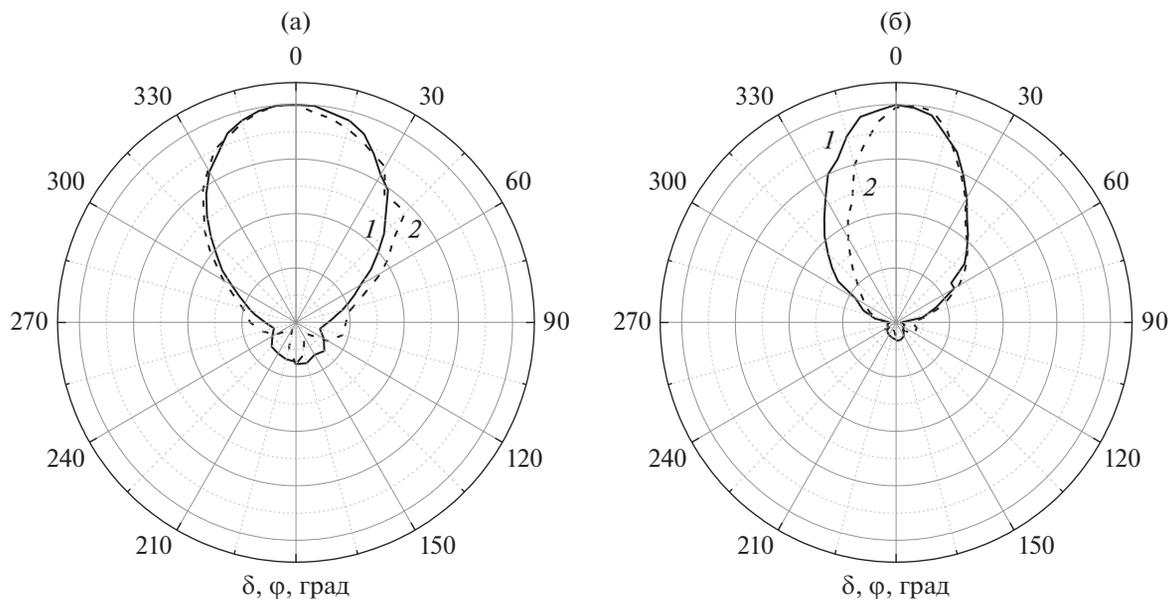
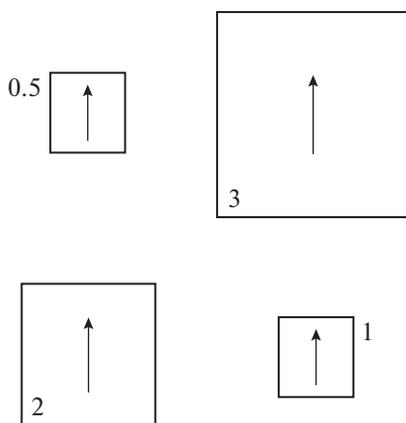


Рис. 10. Диаграммы направленности антенны КА2 в  $H$ - (кривые 1) и  $E$ -плоскостях (кривые 2) при возбуждении биполярным импульсом напряжения длительностью 1 (а) и 0.5 нс (б);  $\varphi$  – азимутальный угол,  $\delta$  – угол места, отсчитываемый от горизонтальной плоскости ( $\delta = 90^\circ - \theta$ ).



**Рис. 11.** Конфигурация решетки  $2 \times 2$ : стрелками показана плоскость поляризации вектора напряженности электрического поля, цифрами – длительность (в нс) биполярного импульса, возбуждающего элемент решетки.

мов с максимальной амплитудой и максимальным спектром соответственно. Изменение отношения крайних частот в спектре излученного импульса не превышает 20% в диапазоне углов  $\pm 22^\circ$  и от  $-6^\circ$  до  $+3.2^\circ$  для тех же режимов соответственно.

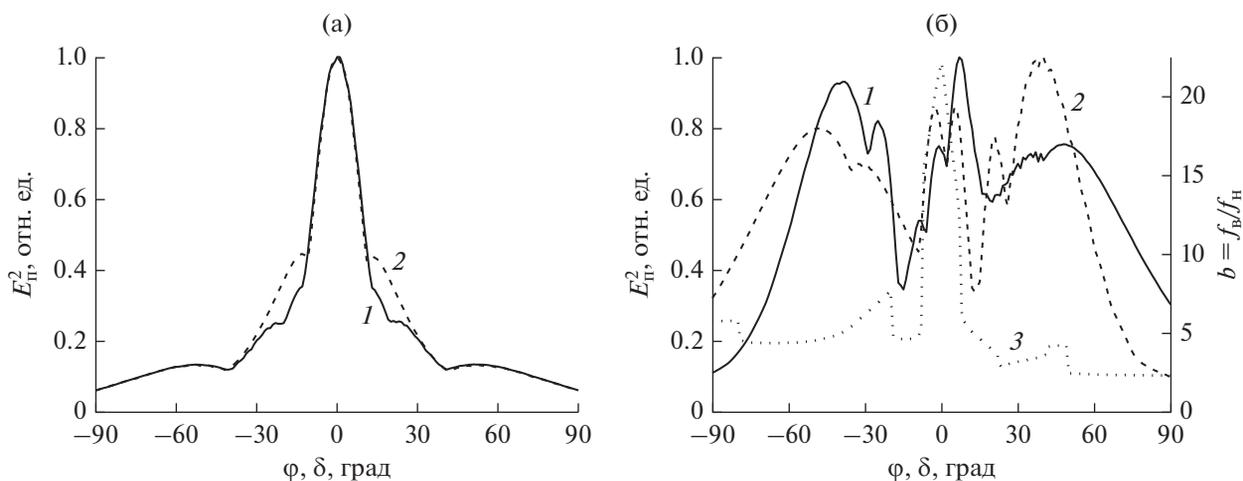
Моделирование показало, что для решетки  $2 \times 2$ , элементы которой возбуждаются биполярными импульсами разной длительности (0.5, 1, 2 и 3 нс), в режиме синтеза с максимальной шириной спектра невозможно получить ДН с максимумом в главном направлении решетки. Численные исследования показали, что разрешить эту проблему можно, используя большее количество элементов в решетке. Например, на рис. 13а показана конфигурация семиэлементной решетки КА и ее ДН (рис. 13б, кривая 1) для режима синтеза с макси-

мальной шириной спектра. Амплитуды импульсов излучения при возбуждении антенн биполярными импульсами длительностью 0.5, 1 и 2 нс составляли половину амплитуды импульса излучения при возбуждении антенны биполярным импульсом длительностью 3 нс. Так как решетка симметричная, то ДН в  $E$ - и  $H$ -плоскостях совпадают. Зависимость отношения крайних частот спектра излученного импульса от угла для обеих плоскостей показана на рис. 13б (кривая 2). Для семиэлементной решетки (см. рис. 13а) среднеквадратичное отклонение формы импульсов относительно формы импульса в главном направлении не превышает 20% в пределах  $\pm 4.5^\circ$  для режима с максимальной амплитудой и  $\pm 3^\circ$  для режима с максимальным спектром. Изменение отношения крайних частот в спектре излученного импульса не превышает 20% в диапазоне углов  $\pm 13^\circ$  и  $\pm 5^\circ$  для тех же режимов соответственно.

### 3. СИНТЕЗ ИМПУЛЬСОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Для исследования синтеза импульсов излучения на низком напряжении использовались генераторы и модуль запуска производства фирмы “Трим” (<http://trimcom.ru>). Модуль запуска позволяет управлять задержками запуска генераторов с временным шагом 10 пс. Были рассчитаны задержки запуска импульсов напряжения для получения синтезированных импульсов излучения с максимальной амплитудой и максимальным спектром.

Осциллограммы импульсов, излученных КА, возбуждаемыми низковольтными генераторами биполярных импульсов длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс, показаны на рис. 14а, а их спектры – на



**Рис. 12.** Диаграмма направленности для режима синтеза с максимальной пиковой напряженностью поля (а) и шириной спектра (б) в  $H$ - (кривые 1) и  $E$ -плоскостях (кривые 2), а также зависимость отношения граничных частот спектра от угла для  $H$ -плоскости (кривая 3).

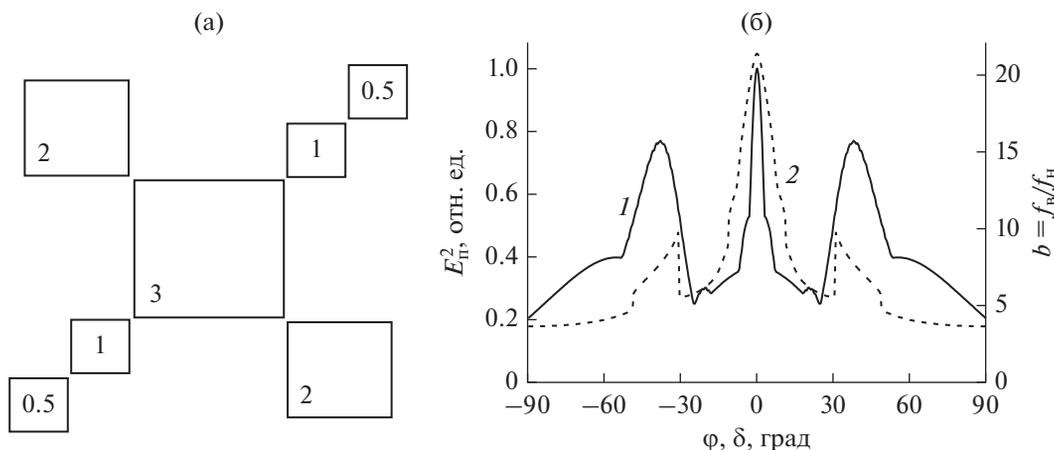


Рис. 13. Семиэлементная решетка: а – конфигурация, б – ДН в  $E$ - и  $H$ -плоскостях (кривая 1) и зависимость отношения граничных частот спектра излучения от угла (кривая 2) для режима синтеза с максимальной шириной спектра.

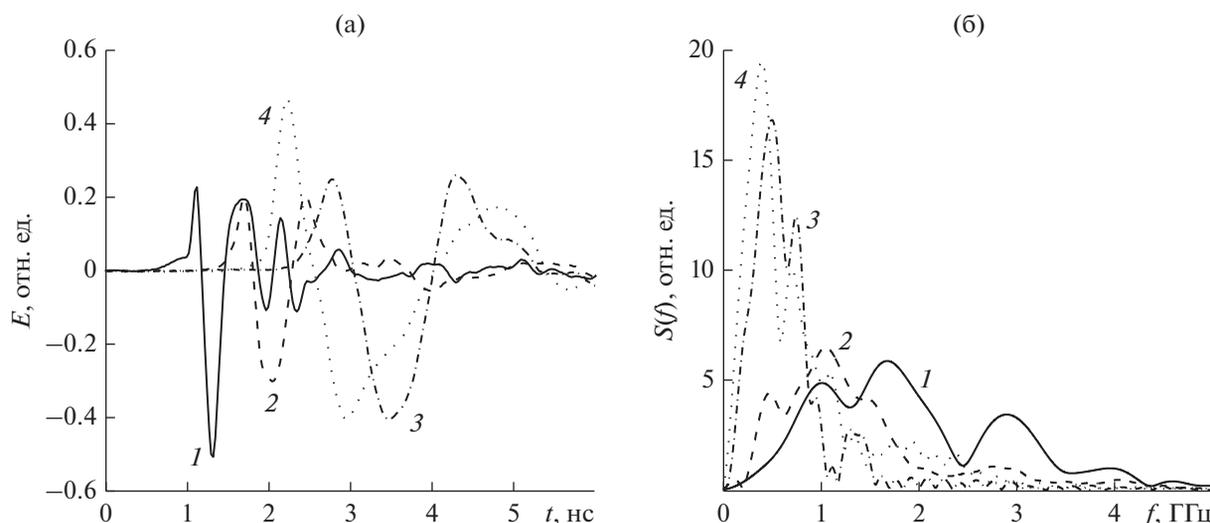


Рис. 14. Импульсы, излученные комбинируемыми антеннами при возбуждении антенн биполярными импульсами напряжения (а), длительностью 0.5 (1), 1 (2), 2 (3) и 3 нс (4), и их спектры (б).

рис. 146. Измерения проводили в главном направлении на расстоянии от решетки  $r = 4.4 \text{ м}$ .

На рис. 15 показана осциллограмма синтезированного импульса излучения с задержками, оптимизированными для получения максимальной амплитуды, и его спектр. Ширина спектра  $\Delta f$  такого импульса отличается от ширины спектра исходных импульсов в среднем в 1.8 раза. На рис. 16 представлена осциллограмма синтезированного импульса излучения с временными задержками, оптимизированными для получения максимальной ширины спектра, и его спектр. В этом случае ширина спектра  $\Delta f$  синтезированного импульса увеличена в 1.3–2 раза, а по отношению крайних частот в 4 раза. Частотные характеристики импульсов излучения низкой мощности приведены в табл. 2.

#### 4. ИЗЛУЧЕНИЕ МОЩНЫХ СИНТЕЗИРОВАННЫХ ИМПУЛЬСОВ

Ранее нами были созданы четырехканальные ФБИ с длительностью биполярных импульсов 3 и 2 нс [8] и 1 и 0.5 нс [9]. Эти формирователи, собранные по схеме с разомкнутой линией [24], способны работать при частоте повторения импульсов до 100 Гц с амплитудами до 80 кВ. Среднеквадратичные разбросы задержек моментов перехода биполярных импульсов через ноль между каналами не превышали 100 пс.

В данной работе для формирования биполярных импульсов длительностью 3, 2, 1 и 0.5 нс мы объединили в новом ФБИ обе схемы [8, 9].

Данный ФБИ (рис. 17) состоит из генератора высоковольтных монополярных импульсов

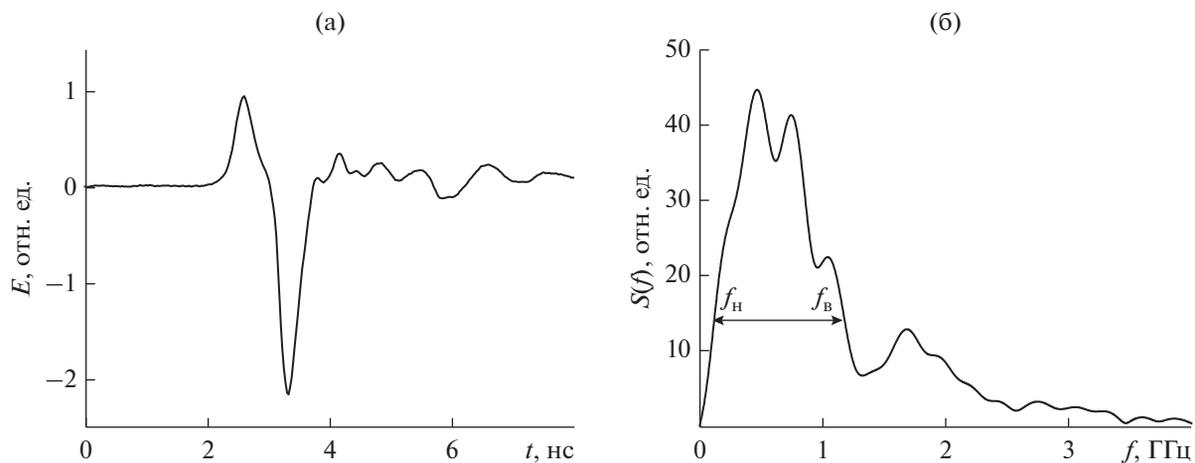


Рис. 15. Осциллограмма импульса, излученного решеткой с задержками, оптимизированными для получения максимальной амплитуды поля (а), и его спектр (б).

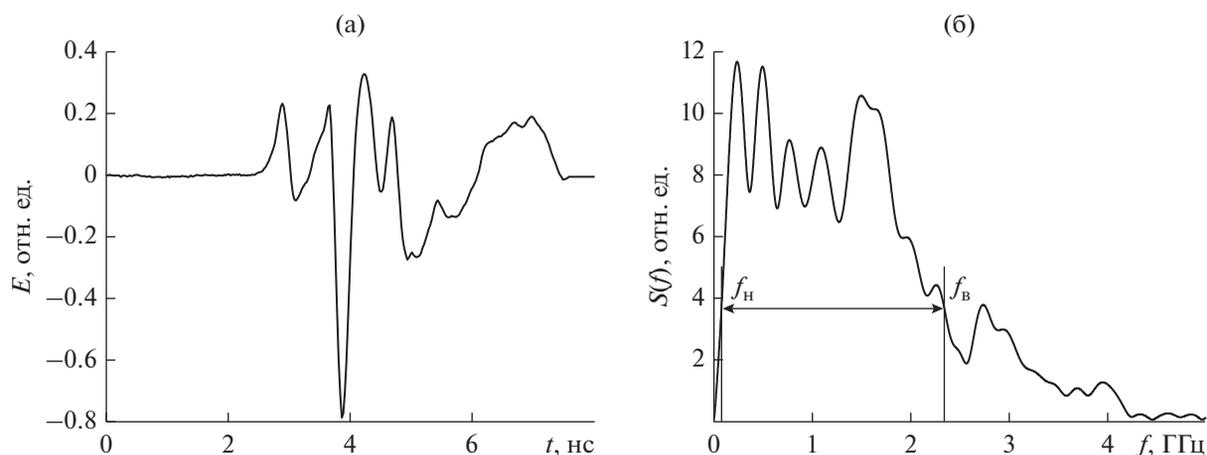


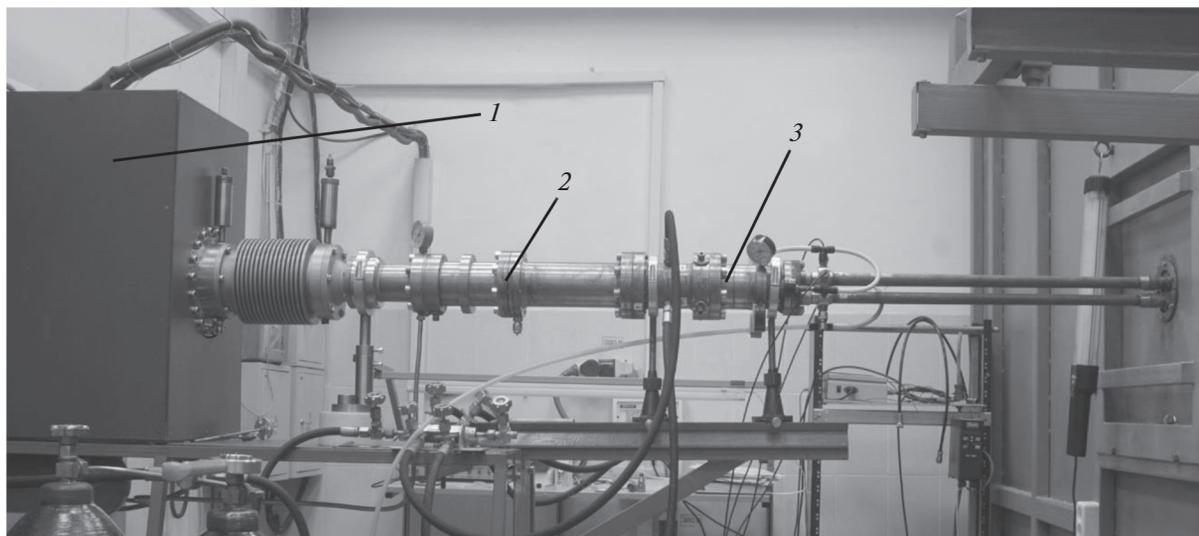
Рис. 16. Осциллограмма импульса, излученного решеткой с задержками, оптимизированными для получения максимальной ширины спектра (а), и его спектр (б).

СИНУС-160 (1), промежуточной ступени обострения (2) и четырех каналов ФБИ (3). На принципиальной схеме генератора биполярных импульсов напряжения (рис. 18) генератор СИНУС-160 представлен выходной формирующей линией FL

и разрядником S. Эта линия заряжалась от вторичной обмотки трансформатора Тесла до напряжения –360 кВ с частотой следования импульсов 100 Гц и коммутировалась разрядником S через разделительную линию FL<sub>1</sub> и ограничительное

Таблица 2. Параметры импульсов СШП-излучения низкой мощности

Импульс, нс	$f_H$	$f_B$	$f_0$	$\Delta f$	$\Delta f/f_0$	$b = f_B/f_H$
	ГГц					
0.5	0.569	2.32	1.444	1.751	1.21	4.08
1	0.31	1.77	1.04	1.46	1.4	5.71
2	0.17	0.86	0.515	0.69	1.34	5.06
3	0.117	0.9	0.508	0.783	1.54	7.69
Суммарный, макс. амплитуда	0.119	1.18	0.65	1.06	1.63	9.91
Суммарный, макс. спектр	0.074	2.34	1.133	2.266	2	31.6



**Рис. 17.** Четырехканальный генератор биполярных импульсов напряжения: 1 – генератор высоковольтных монополярных импульсов СИНУС-160, 2 – промежуточная ступень обострения, 3 – четыре канала формирователя биполярных импульсов.

сопротивление  $R$  на линию  $FL_2$  промежуточной ступени обострения.

Формирователи собраны по схеме с разомкнутой линией. Каналы  $F_0...F_3$  формируют биполярные импульсы напряжения с длительностями 0.5, 1, 2 и 3 нс на нагрузках  $R_{10}...R_{13}$  соответственно по 50 Ом каждая. Линия  $FL_2$  одновременно выполняет функцию формирующей линии для каналов  $F_2$  и  $F_3$  и как промежуточный накопитель для каналов  $F_0$  и  $F_1$ . При срабатывании разрядника  $S_1$  при напряжении, близком к максимальному по линии  $FL_3$  распространяется падающая волна напряжения, которая через четырехканальный делитель поступает в каналы  $F_0...F_3$ . При срабатывании срезающих разрядников  $S_{22}$  и  $S_{23}$  с задержками, равными двойным пробегам в линиях  $FL_{62}$  и  $FL_{63}$ , формируются биполярные импульсы длительностью 2 и 3 нс в нагрузках  $R_{12}$  и  $R_{13}$  соответственно. Фронты падающих волн в линиях  $FL_{40}$ ,  $FL_{41}$ ,  $FL_{50}$  и  $FL_{51}$  недостаточны для формирования биполярных импульсов длительностью 0.5 и 1 нс, поэтому в каналах  $F_0$  и  $F_1$  установлены обостряющие разрядники  $S_{10}$  и  $S_{11}$ . При срабатывании этих разрядников в нагрузках  $R_{10}$  и  $R_{11}$  формируются отрицательные полуволны биполярных импульсов длительностью 0.5 и 1 нс соответственно. Положительные полуволны этих импульсов формируются при коммутации срезающих разрядников  $S_{20}$  и  $S_{21}$  с относительными задержками времени, равными двойным пробегам по линиям  $FL_{60}$  и  $FL_{61}$  соответственно. Чтобы исключить взаимное влияние разрядников на формирование импульсов в соседних каналах, введены разделительные линии

$FL_{40}$  и  $FL_{41}$ . Волновые сопротивления и длительности разделительных линий подобраны таким образом, чтобы иметь более высокое зарядное напряжение линий  $FL_{50}$  и  $FL_{51}$  с расчетным фактором  $K = 1.3...1.5$  [25].

Конструкция промежуточной ступени обострения и каналов ФБИ  $F_0$  и  $F_3$  представлена на рис. 19. Оси четырех каналов  $F_0...F_3$  расположены в диаметрально противоположных точках на окружности с диаметром 53 мм. Конструкция каналов формирования  $F_1$  и  $F_2$  аналогична конструкции каналов  $F_0$  и  $F_3$  соответственно, однако величины электрических длин линий различаются (см. рис. 18).

Конструкция состоит из шести газовых объемов. В первом объеме с внутренним диаметром 78 мм в среде азота под давлением 40 атм размещены линии  $FL_1...FL_3$ , разрядник  $S_1$  и емкостный делитель зарядного напряжения  $D_1$ . В четырех идентичных независимых объемах с внутренними диаметрами 25 мм, ограниченных изоляторами 1 и 2, в среде азота под давлениями 23...45 атм расположены линии  $FL_{40}$ ,  $FL_{41}$ ,  $FL_{50}...FL_{53}$ ,  $FL_{60}...FL_{63}$ ,  $FL_{70}...FL_{73}$ , разрядники  $S_{10}$ ,  $S_{11}$  и  $S_{20}...S_{23}$ . Линии  $FL_{70}...FL_{73}$  имеют изоляцию из капролона. Electroдами кольцевого разрядника  $S_1$  являются концы внутренних проводников линий  $FL_2$  и  $FL_3$ . Межэлектродный зазор в разряднике  $S_1$  равен 1.4 мм. Electroды обостряющих разрядников  $S_{10}$  и  $S_{11}$  встроены в концы линий  $FL_{50}$ ,  $FL_{51}$ ,  $FL_{60}$ ,  $FL_{61}$ , межэлектродные расстояния равны 1...1.4 мм.

В отличие от четырехканального ФБИ длительностью 0.5 и 1 нс [9] кольцевые electroды разрядников  $S_{10}$  и  $S_{11}$  заменены здесь на полусфе-

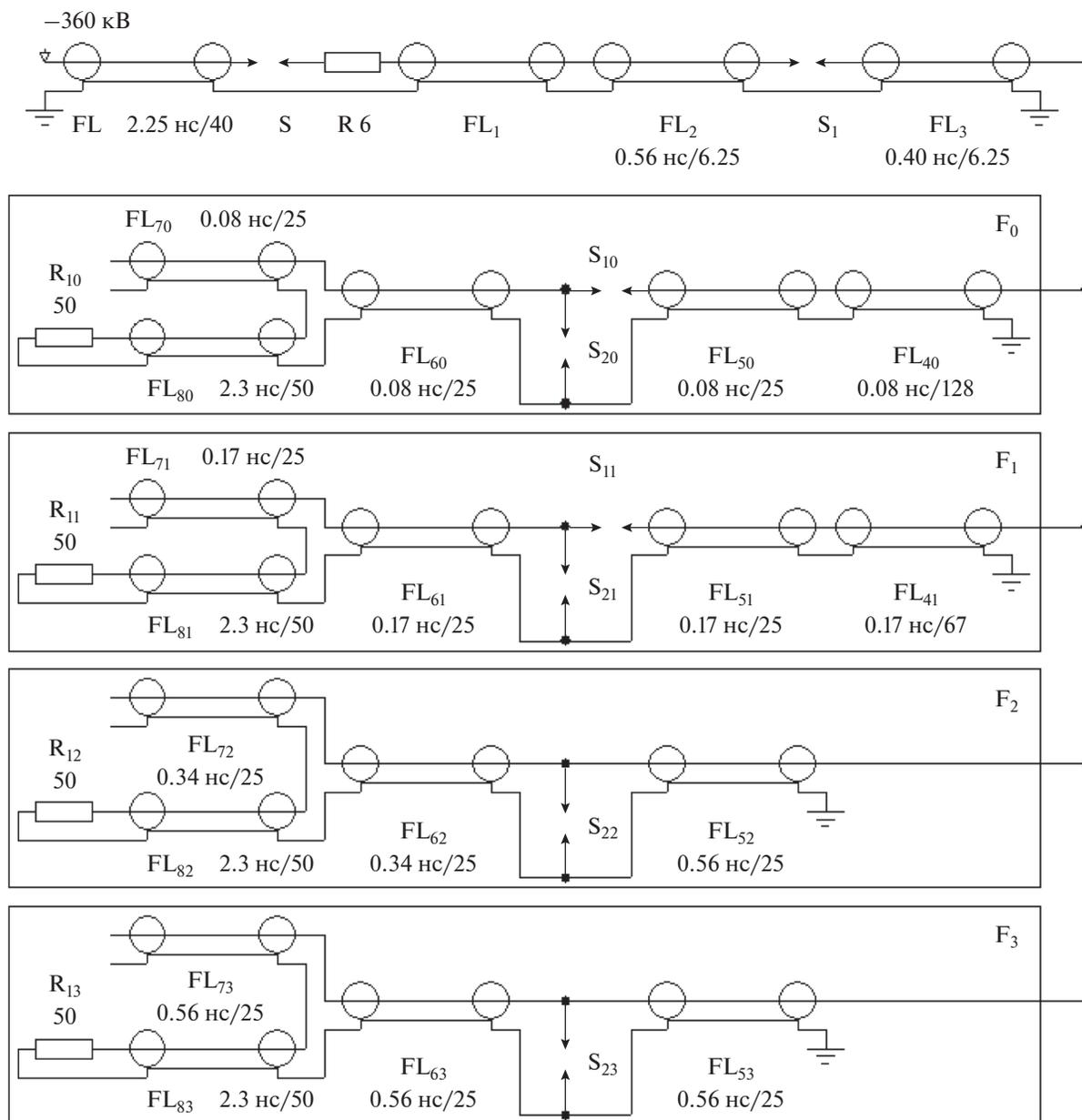


Рис. 18. Принципиальная комбинированная схема четырехканального генератора биполярных импульсов: FL – коаксиальные линии; S – разрядники; R – сопротивления.

рические, что позволило уменьшить проходные емкости этих разрядников и, как следствие, уменьшить амплитуды предимпульсов на выходе этих каналов. Electroдами срезающих разрядников  $S_{20} \dots S_{23}$  служат диски 3 толщиной 2 мм и цилиндрические вставки, установленные на наружных проводниках линий  $FL_{60} \dots FL_{63}$  с зазорами 0.7 мм. Материал электродов разрядников  $S_1, S_{10}, S_{11}$  и  $S_{20} \dots S_{23}$  – медь. Идентичные по конструкции передающие линии  $FL_{80} \dots FL_{83}$  с встроенными делителями напряжения на связанных линиях  $D_{20} \dots D_{23}$  имеют элазговую изоляцию под давле-

нием 5 атм. Система на основе программируемых датчиков давлений модели PSD-30 и десяти клапанов напуска и сброса осуществляла автоматический контроль и регулировку давлений азота в объеме промежуточной ступени обострения и объемах каналов  $F_0 \dots F_3$ .

Импульс зарядного напряжения на линию  $FL_2$  поступал от генератора СИНУС-160 по линии  $FL_1$ , а выходные биполярные импульсы после срабатывания разрядников  $S_1, S_{10}, S_{11}$  и  $S_{20} \dots S_{23}$  передавались по четырем передающим линиям  $FL_{80} \dots FL_{83}$  с волновым сопротивлением 50 Ом

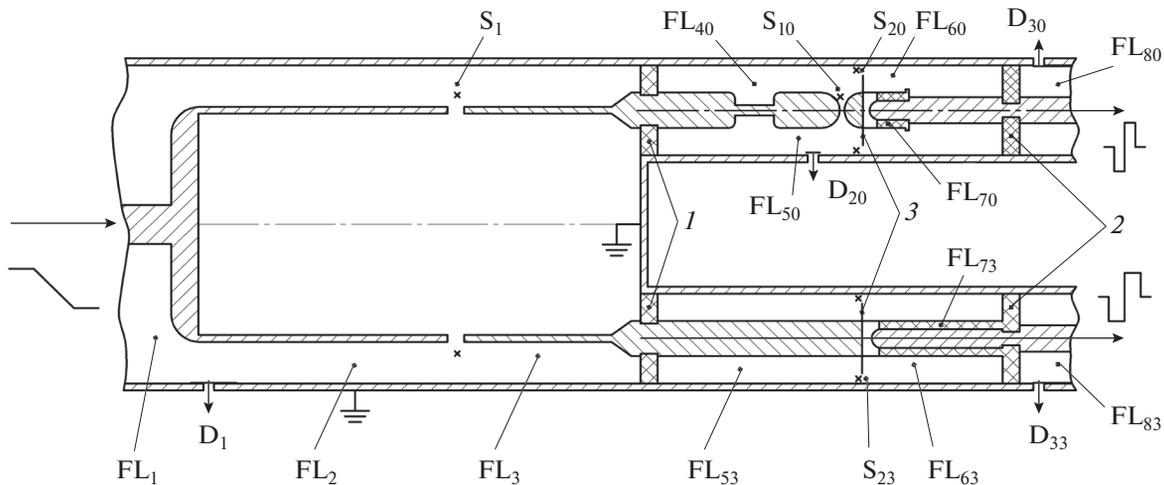


Рис. 19. Схема промежуточной ступени обострения и четырехканального формирования биполярных импульсов: 1, 2 – изоляторы, 3 – диск, FL – коаксиальные линии, S – разрядники, D – делители напряжения.

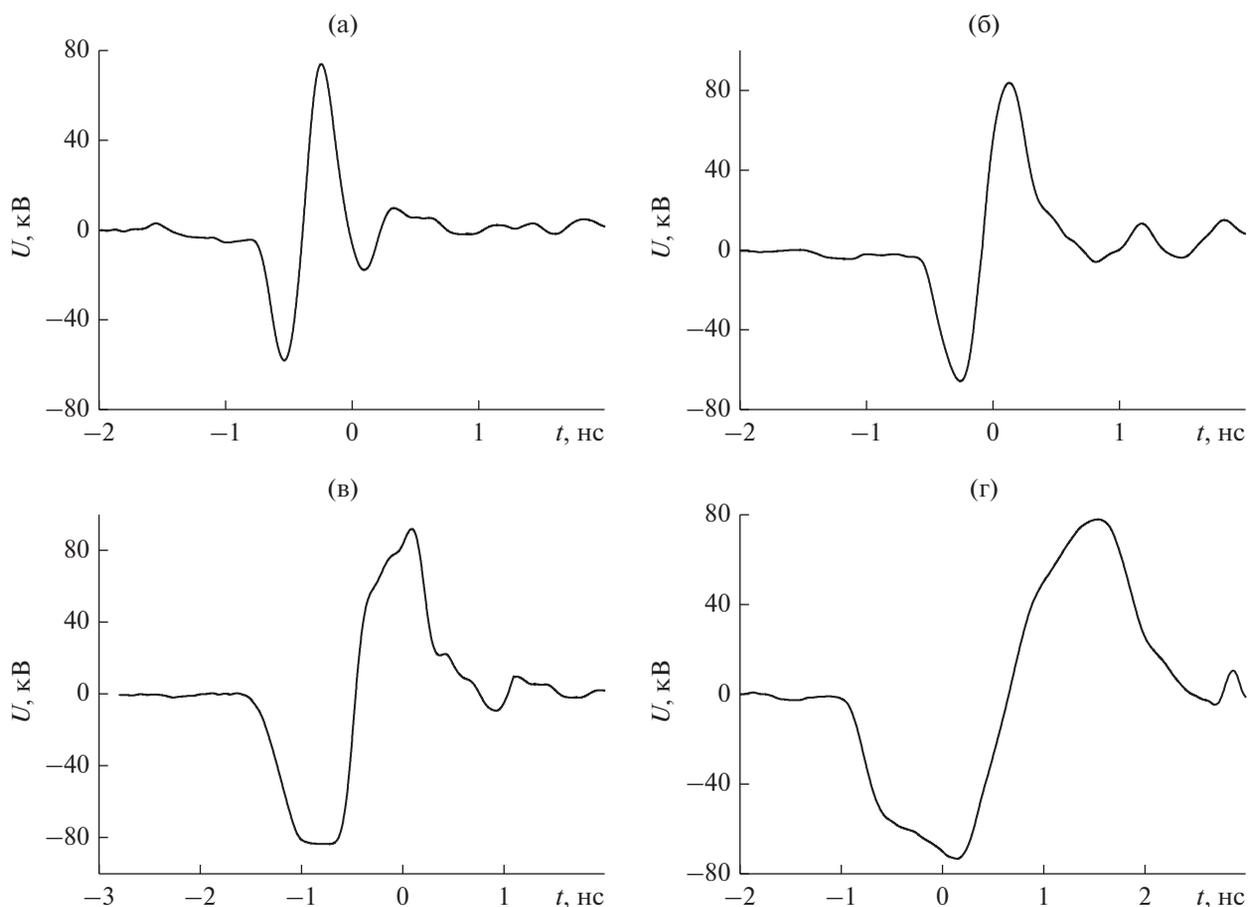


Рис. 20. Биполярные импульсы напряжения, полученные с делителей  $D_{30}$  (а),  $D_{31}$  (б),  $D_{32}$  (в),  $D_{33}$  (г).

каждая в согласованные резистивные нагрузки, либо в передающие антенны. Для регистрации выходных биполярных импульсов с делителей напряжения  $D_{30} \dots D_{33}$  и импульсов зарядных напряжений  $D_1, D_{20}, D_{21}$  на линиях  $FL_2, FL_{50}, FL_{51}$  соответственно использовался осциллограф TDS

6604 с частотной полосой до 6 ГГц. Делители  $D_{30} \dots D_{33}$  калибровались с помощью подачи биполярных импульсов напряжения с длительностями 0,5, 1, 2 и 3 нс на входы линий  $FL_{80} \dots FL_{83}$  от низковольтных генераторов. Эксперимент показал хорошее согласие форм импульсов на выходах линий

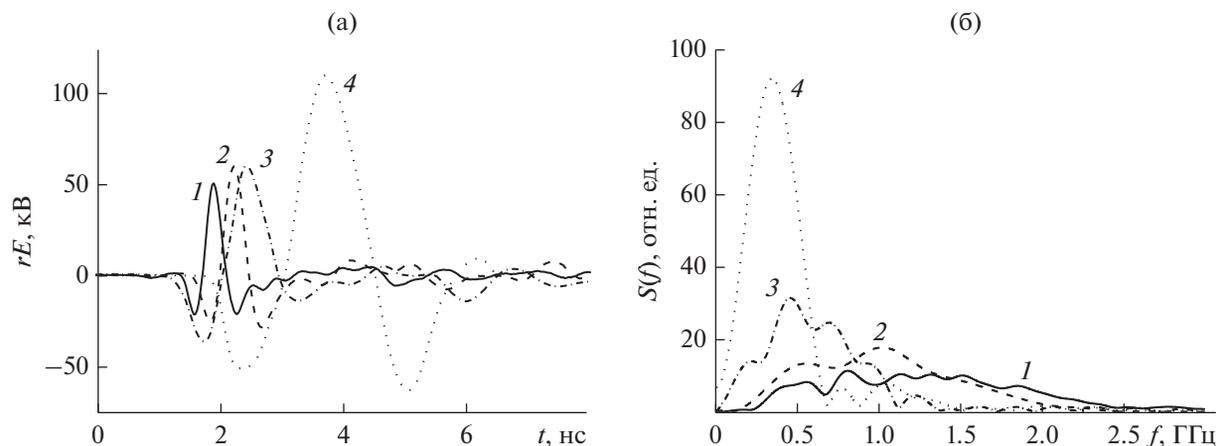


Рис. 21. Осциллограммы импульсов излучения (а) и их спектры (б) при возбуждении антенн биполярными импульсами напряжения длительностью 0.5 (1), 1 (2), 2 (3) и 3 нс (4).

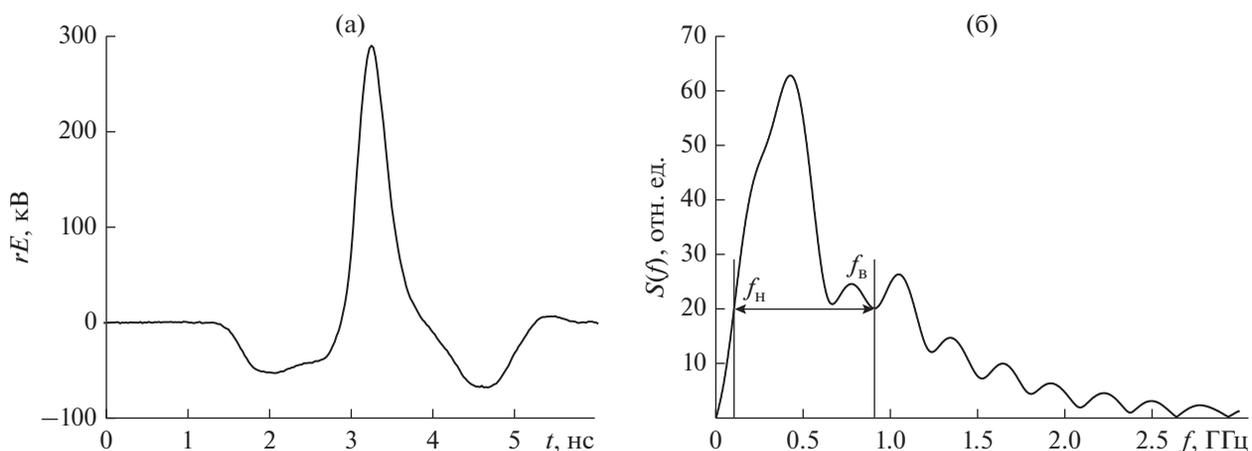


Рис. 22. Осциллограмма синтезированного импульса (а) при синхронизации по максимуму амплитуды поля и его спектр (б).

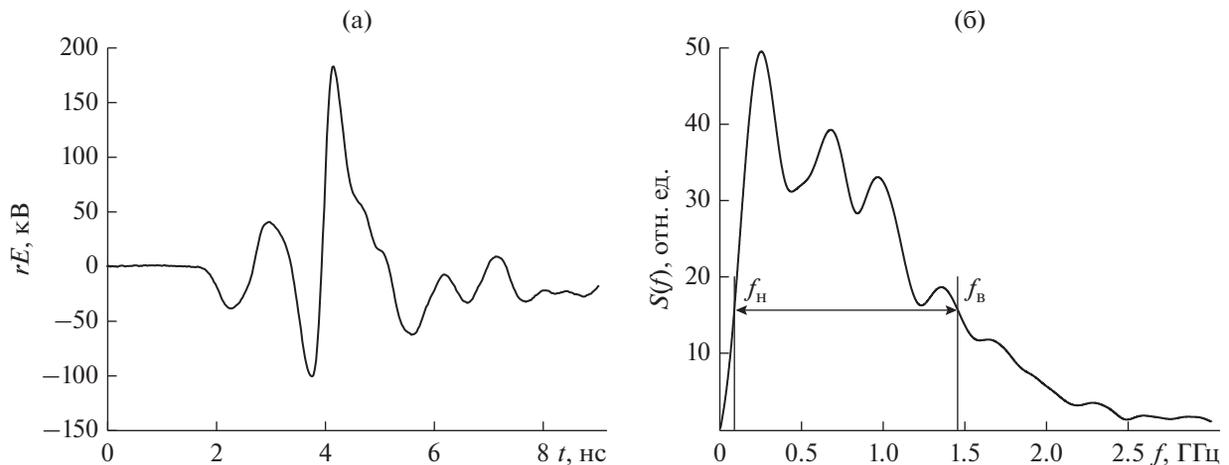
и восстановленных с коэффициентом ослабления 65 импульсов с делителей напряжения  $D_{30} \dots D_{33}$ . Емкостные делители  $D_{20}$  и  $D_{21}$  не калиброваны и служат для оценки времени зарядки напряжения на линиях  $FL_{50}$  и  $FL_{51}$  соответственно.

Разрядник  $S_1$  пробивался с задержкой 4.3 нс при зарядном напряжении 170 кВ. Регулировкой давлений и зазоров в разрядниках  $S_{10}$ ,  $S_{11}$  и  $S_{20} \dots S_{23}$  добивались симметричных форм биполярных импульсов напряжения с делителей  $D_{30} \dots D_{33}$ . При этом времена зарядки линий  $FL_{50}$ ,  $FL_{51}$  до моментов коммутации разрядников  $S_{10}$ ,  $S_{11}$  составили 800...950 пс. Выходные биполярные импульсы, полученные с делителей  $D_{30} \dots D_{33}$ , показаны на рис. 20. Импульсы имеют амплитуды до  $\pm 80$  кВ и длительности 0.5, 1, 2 и 3 нс при частоте следования 100 Гц. Длительность импульсов определялась путем аппроксимации передних и задних фронтов до пересечений с нулевыми линиями. Среднеквадратичные разбросы задержек момен-

тов перехода через ноль биполярных импульсов между каналами не превышает 50 пс. При среднеквадратичном разбросе амплитуды зарядного напряжения генератора СИНУС-160 относительно средней около 1% среднеквадратичный разброс амплитуд биполярных импульсов относительно средней для всех каналов  $F_0 \dots F_3$  составляет не более 4...5%.

На рис. 21 показаны осциллограммы импульсов ( $rE$ ), излученных КА при возбуждении высоковольтными биполярными импульсами напряжения длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс, и их спектры. Измерения проводили в главном направлении на расстоянии от решетки  $r = 4$  м.

Получив осциллограммы импульсов излучения (см. рис. 21), мы рассчитали временные задержки, необходимые для получения синтезированных импульсов с максимальной амплитудой поля и максимальной шириной спектра излучения. На рис. 22 приведена осциллограмма синтезированного импульса с задержками, оптимизированными для



**Рис. 23.** Осциллограмма синтезированного импульса (а), излученного решеткой с задержками, оптимизированными для получения максимальной ширины спектра, и его спектр (б).

получения максимальной амплитуды поля, и его спектр. Получены импульсы излучения с произведением пиковой напряженности электрического поля  $E_n$  на расстояние  $r$ , равным  $rE_n = 290$  кВ. Отношение верхней и нижней граничных частот при этом составило 8.9. На рис. 23 приведена осциллограмма синтезированного импульса с задержками, оптимизированными для получения максимальной ширины спектра излучения, и его спектр. Величина  $rE_n$  для синтезированного излучения с расширенной полосой частот составляет 185 кВ, а нестабильность по максимуму амплитуды равна  $\sigma = 9\%$ . Отношение крайних частот по уровню  $-10$  дБ составило 16.9. Измеренные частотные характеристики импульсов приведены в табл. 3.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена численная модель синтеза импульсов излучения с помощью сложения в свободном пространстве импульсов с различной шириной спектра. По результатам расчетов выбрана оптимальная конфигурация четырехэлементной решетки, возбуждаемой биполярными импульсами длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс. Показана возможность увеличения отношения крайних частот в спектре импульса синтезированного излучения до 22.

В экспериментальных исследованиях синтеза излучения малой мощности получены импульсы с отношением крайних частот до 10 в режиме максимальной амплитуды поля. В режиме максималь-

**Таблица 3.** Параметры мощных импульсов СШП-излучения

Импульс, нс	$f_H$	$f_B$	$f_0$	$\Delta f$	$\Delta f/f_0$	$b = f_B/f_H$
	ГГц					
0.5	0.31	2.17	1.24	1.86	1.5	7
1	0.28	1.73	1	1.45	1.45	6.2
2	0.126	1.02	0.573	0.89	1.55	8.1
3	0.115	0.574	0.34	0.46	1.33	5
Суммарный, макс. амплитуда	0.102	0.907	0.5	0.805	1.6	8.9
Суммарный, макс. спектр	0.086	1.45	0.76	1.36	1.78	16.9

ной ширины спектра это отношение достигает 32. Различие между расчетными и экспериментальными значениями ширины спектра обусловлено отличием формы экспериментальных импульсов излучения от модельных.

Предложена и реализована комбинированная схема четырехканального формирователя биполярных импульсов напряжения амплитудой до  $\pm 80$  кВ и длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс с высокой стабильностью параметров при частоте повторения импульсов до 100 Гц.

Создан источник мощных импульсов синтезированного излучения на основе решетки  $2 \times 2$  комбинированных антенн, возбуждаемых биполярными импульсами напряжения длительностью 0.5, 1, 2 и 3 нс. Реализовано два режима синтеза излучения: максимальная напряженность поля и максимальная ширина спектра. В первом режиме получены импульсы излучения с эффективным потенциалом 290 кВ, а во втором — 185 кВ. Смену режимов осуществляли с помощью изменения времени задержки между импульсами. Отношение крайних частот спектра синтезированного импульса во втором режиме было увеличено в среднем в 2.6 раза по сравнению с импульсами, излученными комбинированными антеннами, возбуждаемыми биполярными импульсами одинаковой длительности.

Из полученных результатов численного моделирования следует, что перспективы развития данного метода синтеза импульсов излучения с расширенной полосой частот связаны с использованием многоэлементных антенных решеток.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Е.А. Севостьянова, Ю.А. Андреева и С.С. Смирнова за помощь в работе.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10081).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Koshelev V.I., Buyanov Yu.I., Belichenko V.P.* Ultrawideband Short-Pulse Radio Systems. Boston; London: Artech House, 2017.
2. *Andreev Yu.A., Buyanov Yu.A., Koshelev V.I. et al.* // Proc. Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 4. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999. P. 181.
3. *Chen V.C., Ling H.* Time-Frequency Transforms for Radar Imaging and Signal Analysis. Boston; London: Artech House, 2002.
4. *Андреев Ю.А., Кошелев В.И., Романченко И.В. и др.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 8. С. 337. <https://doi.org/10.7868/S0033849413040025>
5. *Стрелков П.С., Тараканов В.П., Диас-Михайлова Д.Е. и др.* // Физика плазмы. 2019. Т. 45. № 4. С. 335. <https://doi.org/10.1134/S0367292135030093>
6. *Koshelev V.I., Plisko V.V., Sevostyanov E.A.* // J. Phys.: Conf. Series. 2017. V. 830. P. 012012. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/830/1/012012>
7. *Кошелев В.И., Плиско В.В., Севостьянов Е.А.* // Изв. вузов. Физика. 2017. Т. 60. № 8. С. 98.
8. *Efremov A.M., Koshelev V.I., Plisko V.V., Sevostyanov E.A.* // Rev. Sci. Instrum. 2017. V. 88. № 9. P. 094705. <https://doi.org/10.1063/1.5003418>
9. *Ефремов А.М., Кошелев В.И., Плиско В.В., Севостьянов Е.А.* // ПТЭ. 2019. № 1. С. 36. <https://doi.org/10.1134/S003281621806006X>
10. *Koshelev V.I., Buyanov Yu.I., Andreev Yu.A. et al.* // Proc. IEEE Pulsed Power Plasma Science Conf., Las Vegas, USA, June 17–22, 2001 (IEEE Piscataway, N.J. 2001), V. 2. P. 1661.
11. *Андреев Ю.А., Буянов Ю.И., Кошелев В.И.* // РЭ. 2005. Т. 50. № 5. С. 585.
12. Federal Communication Commission USA (FCC) 02-48, ET Docket 98-153, First report and order, April 2002.
13. *Wales D.J., Doye J.P.K.* // J. Phys. Chem. 1997. V. 101. № 28. P. 5111. <https://doi.org/10.1021/jp970984n>
14. *Storn R., Price K.* // J. Global Optimization. 1997. V. 11. № 4. P. 341. <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
15. *Endres S.C., Sandrock C., Focke W.W.* // J. Global Optimization. 2018. V. 72. № 2. P. 181. <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0645-y>
16. *Koshelev V.I., Andreev Yu.A., Efremov A.M. et al.* // J. Energy and Power Engineering. 2012. V. 5. № 5. P. 771.
17. *Андреев Ю.А., Ефремов А.М., Кошелев В.И. и др.* // ПТЭ. 2011. № 6. С. 51.
18. *Ефремов А.М., Кошелев В.И., Ковальчук Б.М., Плиско В.В.* // ПТЭ. 2013. № 3. С. 61.
19. *Губанов В.П., Ефремов А.М., Кошелев В.И. и др.* // ПТЭ. 2017. № 2. С. 61.
20. *Зоркальцева М.Ю., Кошелев В.И., Петкун А.А.* // Изв. вузов. Физика. 2017. Т. 60. № 8. С. 26.
21. *Андреев Ю.А., Ефремов А.М., Кошелев В.И. и др.* // РЭ. 2011. Т. 56. № 12. С. 1457.
22. *Ефремов А.М., Кошелев В.И., Ковальчук Б.М. и др.* // РЭ. 2007. Т. 52. № 7. С. 813.
23. *Андреев Ю.А., Кошелев В.И., Плиско В.В.* // Докл. 5-й Всерос. научно-техн. конф. “Радиолокация и радиосвязь”. М., 2011. С. 77.
24. *Andreev Yu.A., Gubanov V.P., Efremov A.M., et al.* // Laser and Particle Beams. 2003. V. 21. № 2. P. 211. <https://doi.org/10.1017/S0263034603212088>
25. *Shpak V.G., Oulmascoulov V.R., Shunailov M.R., Yalandin M.I.* // Proc. 12th IEEE Inter. Pulsed Power Conf. 27–30 June, 1999. P. 692.

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ  
СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРЕ  
С КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ СЕЧЕНИЯ© 2020 г. В. А. Калошин<sup>а, \*</sup>, Д. Т. Луу<sup>б, \*\*</sup><sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 7, корп. 11, Москва, 125009 Российская Федерация<sup>б</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской обл., 141701 Российская Федерация

\*E-mail: vak@cplire.ru

\*\*E-mail: luuctho@phystech.edu

Поступила в редакцию 21.06.2019 г.

После доработки 21.06.2019 г.

Принята к публикации 01.07.2019 г.

Рассмотрена задача рассеяния плоской электромагнитной волны на идеально-проводящем цилиндре, поперечное сечение которого образовано прямыми и дугами окружностей. Для решения задачи использован гибридный метод, сочетающий метод собственных функций, последовательных дифракций и принцип эквивалентности. Проведено сравнение результатов расчета гибридным методом, методом моментов и методом Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа.

DOI: 10.31857/S0033849420050071

## ВВЕДЕНИЕ

При решении задач рассеяния акустических и электромагнитных волн на телах с кусочно-аналитической формой границы применяются как строгие численные методы: моментов, конечных элементов, Т-матриц, так и асимптотические: метод Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа (ГФК), геометрическая теория дифракции, метод параболического уравнения [1–5].

В случае когда все характерные электрические размеры задачи относительно небольшие эффективно применение численных методов. Однако если хотя бы один из характерных электрических размеров задачи велик, то использование численных методов требует больших размеров оперативной памяти компьютера.

В случае когда все характерные электрические размеры задачи, большие по сравнению с длиной волны, для ее решения можно эффективно использовать асимптотические методы, в частности метод ГФК. Если поверхность тела можно разбить на участки, являющиеся координатными поверхностями в одной из ортогональных систем координат, в которых волновое уравнение можно решить методом разделения переменных, то для вычисления интеграла Кирхгофа целесообразно применять метод функций Грина [5]. При этом поля на каждом таком участке, как и в приближении ГФК, полагаются равными падающему полю, а затем эти поля и функция Грина представляются в виде рядов по собственным функциям,

что облегчает процесс вычисления интеграла Кирхгофа. Однако, если хотя бы один из характерных электрических размеров задачи мал, такой подход приводит к серьезным погрешностям.

В данной работе для решения задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на бесконечном цилиндре, поперечное сечение которого образовано прямыми и дугами окружностей, использован новый гибридный метод решения подобных задач, предложенный в работе [6]. Он основан на сочетании метода собственных функций, последовательных дифракций и принципа эквивалентности (строгой формулировки метода ГФК). Проведено сравнение результатов расчета диаграмм рассеяния гибридным методом, гибридным методом без учета взаимодействия, методом моментов и методом ГФК для различных углов падения и двух типов поляризации падающей плоской волны.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим рассеяние плоской электромагнитной волны, падающей под углом  $\varphi_0$  на идеально-проводящий бесконечный цилиндр, поперечное сечение которого образовано прямыми и дугами окружностей (рис. 1), где  $a_1, a_2$  – радиусы окружностей,  $h$  – расстояние между центрами окружностей,  $l$  – длина прямых ( $l = h \sin(-\beta + \pi/2)$ ,  $\beta = \pi/2 - \arccos[(a_1 - a_2)/h]$ ).

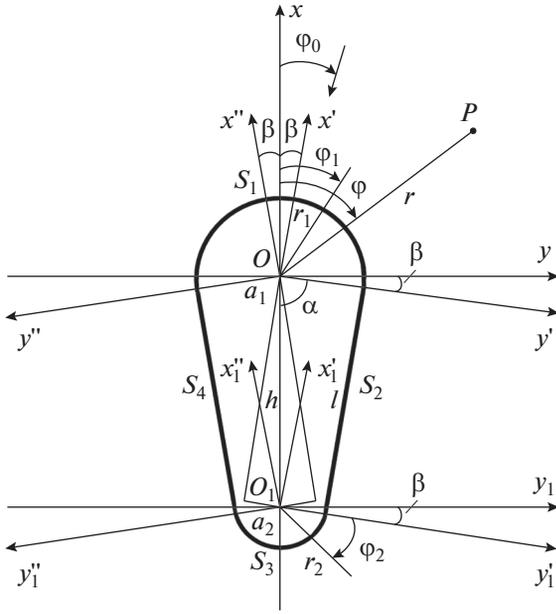


Рис. 1. Геометрия задачи.

В силу цилиндрической симметрии пластины задача рассеяния в общем случае сводится к двум двумерным задачам: для *E*-поляризации (электрическое поле параллельно образующей цилиндра) и *H*-поляризации (электрическое поле ортогонально образующей цилиндра). Будем искать решение этих задач в форме диаграммы рассеяния.

В силу наличия плоскости симметрии  $y = 0$  без ограничения общности будем рассматривать область углов падения  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$ .

### 2. ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ БЕЗ УЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Разобьем границу поперечного сечения цилиндра  $S$  на четыре участка:  $S_1$  и  $S_3$  – дуги окружности,  $S_2$  и  $S_4$  – отрезки прямых (см. рис. 1).

Решение задачи рассеяния плоской волны на идеально-проводящем цилиндре можно представить в виде ряда Рэлея [1]. Компоненты полного поля для случая *E*-поляризации в цилиндрических координатах  $(r_1, \varphi_1)$  с центром в точке  $O$  имеют вид

$$E_{z_1} = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m(\varphi_1 - \varphi_0)) [J_m(kr_1) - J'_m(ka_1)H_m^{(2)}(kr_1)/H_m^{(2)}(ka_1)], \quad (1)$$

$$H_{r_1} = \frac{i\omega\varepsilon_a}{k^2 r_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial \varphi_1}, \quad H_{\varphi_1} = \frac{-i\omega\varepsilon_a}{k^2} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial r_1},$$

где  $E_0$  – амплитуда падающего электрического поля,  $\varepsilon_0 = 1$  и  $\varepsilon_0 = 2$  при  $m \geq 1$ .

Компоненты полного поля для случая *H*-поляризации имеют вид

$$H_{z_1} = H_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m(\varphi_1 - \varphi_0)) [J_m(kr_1) - J'_m(ka_1)H_m^{(2)}(kr_1)/H_m^{(2)}(ka_1)], \quad (2)$$

$$E_{r_1} = \frac{-i\omega\mu_a}{k^2 r_1} \frac{\partial H_{z_1}}{\partial \varphi_1}, \quad E_{\varphi_1} = \frac{i\omega\mu_a}{k^2} \frac{\partial H_{z_1}}{\partial r_1},$$

где  $H_0$  – амплитуда падающего магнитного поля.

Ток на дуге  $S_1$  определяется по формуле  $j = [H, n]$ . Отсюда при  $r_1 = a_1$  получаем для случая *E*- и *H*-поляризации соответственно:

$$j_{z_1}^1 = -H_{\varphi_1}, \quad j_{\varphi_1}^1 = H_{z_1}. \quad (3)$$

При падении плоской волны под углом  $\varphi_0$ , лежащем в пределах  $\beta < \varphi_0 \leq \pi - \beta$ , как будет показано далее, можно пренебречь взаимодействием токов на разных участках образующей пластины в рамках гибридного метода. В этом случае токи на обеих дугах  $S_1$  и  $S_3$  полагаются равными токам на полных окружностях при рассеянии плоской волны, ток на освещенной прямой  $S_2$  находится по формуле  $j = 2[H^{пад}, n]$ , а ток на прямой  $S_4$  полагается равным нулю. В результате компоненты тока на прямой  $S_2$  в повернутой на угол  $\beta$  системе декартовых координат  $x' y'$  с центром в точке  $O$  (см. рис. 1) имеют вид:

$$j_{z'}^2 = -2E_0 \frac{\omega\varepsilon_a}{k} \sin(\varphi_0) \exp\left[ ik\sqrt{(x')^2 + (a_1)^2} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{x'}{a_1}\right) + \beta - \varphi_0\right) \right], \quad (4)$$

$$j_{x'}^2 = -2H_0 \exp\left[ ik\sqrt{(x')^2 + (a_1)^2} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{x'}{a_1}\right) + \beta - \varphi_0\right) \right].$$

Компоненты тока на дуге  $S_3$  в цилиндрической системе координат  $(r_2, \varphi_2)$  с центром в точке  $O_1$  имеют вид

$$j_{z_2}^3 = -\exp(-ikh \cos(\varphi_0)) H_{\varphi_2}, \quad (5)$$

$$j_{\varphi_2}^3 = \exp(-ikh \cos(\varphi_0)) H_{z_2},$$

где

$$H_{\varphi_2} = \frac{-i\omega\varepsilon_a}{k^2} \frac{\partial}{\partial r_2} \left[ E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m(\varphi_2 - \varphi_0)) \times [J_m(kr_2) - J'_m(ka_2)H_m^{(2)}(kr_2)/H_m^{(2)}(ka_2)] \right],$$

$$H_{z_2} = H_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m(\varphi_2 - \varphi_0)) \times [J_m(kr_2) - J'_m(ka_2)H_m^{(2)}(kr_2)/H_m^{(2)}(ka_2)].$$

Далее находим диаграмму рассеяния по известным формулам [1]:

$$E = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} [k^2 A^{\circ} + \text{grad div } A^{\circ}] - \text{rot } A^M, \quad (6)$$

$$H = \frac{1}{i\omega\mu_a} [k^2 A^M + \text{grad div } A^M] + \text{rot } A^{\circ},$$

где  $A^{\circ} = \oint_S j^{\circ} G ds$ ,  $A^M = \oint_S j^M G ds$ , соответственно, электрический и магнитный потенциалы,

$$G = -i \sqrt{\frac{8}{\pi k}} \frac{\exp(-ikr(P))}{\sqrt{r(P)}} \exp(i\pi/4) \times \exp[ikr(S) \cos(\varphi(P) - \varphi(S))]$$

– функция Грина свободного пространства,  $P$  – точка наблюдения в полярных координатах  $(r, \varphi)$  с центром в точке  $O$ .

При интегрировании по дугам  $S_1$  и  $S_3$  используем полярные координаты  $(r_1, \varphi_1)$  и  $(r_2, \varphi_2)$  соответственно, а при интегрировании по прямой  $S_2$  – декартовую систему координат  $x' y'$ .

В результате для диаграммы рассеяния в случае  $E$ - и  $H$ -поляризации получаем

$$E_z = \frac{k^2}{i\omega\epsilon_a} \left[ a_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{z_1}^1 G d\varphi_1 + \exp(ikh \cos(\pi - \varphi)) \times \right. \\ \left. \times a_2 \int_{\beta+\pi/2}^{\pi} j_{z_2}^3 G d\varphi_2 + \int_0^l j_x^2 G dx' + \int_{-\beta+3\pi/2}^{\pi} j_{z_2}^3 G d\varphi_2 \right] + \\ \exp(ikh \cos(\pi + \varphi)) a_2 \int_{\pi}^{\beta+\pi/2} j_{z_2}^3 G d\varphi_2, \quad (7)$$

$$H_z = -ik \left[ a_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{\varphi_1}^1 G \cos(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 + \right. \\ \left. + \exp(ikh \cos(\pi - \varphi)) a_2 \int_{\beta+\pi/2}^{\pi} j_{\varphi_2}^3 G \cos(\varphi - \varphi_2) d\varphi_2 - \right. \\ \left. - \sin(\varphi - \beta) \int_0^l j_x^2 G dx' + \exp(ikh \cos(\pi + \varphi)) \times \right. \\ \left. \times a_2 \int_{\pi}^{\beta+\pi/2} j_{\varphi_2}^3 G \cos(\varphi - \varphi_2) d\varphi_2 \right].$$

При падении плоской волны под малыми углами  $\varphi_0 \leq \beta$  компоненты тока на поверхности  $S_2, S_3, S_4$  полагаются равными нулю. В результате для диаграммы рассеяния в случае  $E$ - и  $H$ -поляризации получаем

$$E_z = \frac{k^2 a_1}{i\omega\epsilon_a} \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{z_1}^1 G d\varphi_1, \quad (8)$$

$$H_z = -ika_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{\varphi_1}^1 G \cos(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1.$$

При падении плоской волны под углами  $(\pi - \beta < \varphi_0)$  компоненты тока на прямой  $S_4$  в повернутой на угол  $\beta$  декартовой системе координат  $x'' y''$  (рис. 1) имеют вид

$$j_{z''}^4 = -2E_0 \frac{\omega\epsilon_a}{k} \sin(\varphi_0) \exp \left[ ik \sqrt{(x'')^2 + (a_1)^2} \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \text{arctg} \left( \frac{x''}{a_1} \right) - \beta - \varphi_0 \right) \right], \quad (9)$$

$$j_{x''}^4 = -2H_0 \exp \left[ ik \sqrt{(x'')^2 + (a_1)^2} \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \text{arctg} \left( \frac{x''}{a_1} \right) - \beta - \varphi_0 \right) \right].$$

При интегрировании по прямой  $S_4$  используем систему декартовых координат  $x'' y''$  центром в точке  $O$ .

В результате для диаграммы рассеяния в случае  $E$ - и  $H$ -поляризации получаем

$$E_z = \frac{k^2}{i\omega\epsilon_a} \left[ a_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{z_1}^1 G d\varphi_1 + \exp(ikh \cos(\pi - \varphi)) \times \right. \\ \left. \times a_2 \int_{\beta+\pi/2}^{\pi} j_{z_2}^3 G d\varphi_2 + \int_0^l j_z^2 G dx' + \int_{-\beta+3\pi/2}^0 j_{z''}^4 G dx'' + \right. \\ \left. + \exp(ikh \cos(\pi + \varphi)) a_2 \int_{\pi}^{\beta+\pi/2} j_{z_2}^3 G d\varphi_2 \right], \quad (10)$$

$$H_z = -ik \left[ a_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{\varphi_1}^1 G \cos(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 - \right. \\ \left. - \sin(\varphi - \beta) \int_0^l j_x^2 G dx' - \sin(\varphi + \beta) \int_{-\beta+3\pi/2}^0 j_{x''}^4 G dx'' + \right. \\ \left. + \exp(ikh \cos(\pi + \varphi)) a_2 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\pi} j_{\varphi_2}^3 G \cos(\varphi - \varphi_2) d\varphi_2 + \right. \\ \left. + \exp(ikh \cos(\pi - \varphi)) a_2 \int_{\beta+\pi/2}^{\pi} j_{\varphi_2}^3 G \cos(\varphi - \varphi_2) d\varphi_2 \right].$$

### 3. ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим случай падения плоской волны под углом  $\varphi_0 < \pi/2$ . Будем искать распределение токов на  $S_1, S_2, S_3, S_4$  последовательно. Сначала найдем поля на линиях  $x' = 0, y' > a_1$  и  $x'' = 0, y'' < -a_1$ . Для этого воспользуемся решением задачи рассеяния плоской волны на идеально-проводящем цилиндре по формулам (1) и (2).

Токи на дуге  $S_1$  определяется по формуле  $j = [H, n]$ . Отсюда при  $r_1 = a_1$  получаем для случая  $E$ - и  $H$ -поляризации соответственно:

$$j_{z_1}^1 = -H_{\varphi_1}, \quad j_{\varphi_1}^1 = H_{z_1}. \quad (11)$$

Запишем компоненты полного поля, выраженные формулами (1) и (2), в повернутых на угол  $\beta$  прямоугольных системах координат  $x' y'$  и  $x'' y''$  (см. рис. 1). В результате получаем

$$\begin{aligned} E_{z'} &= E_{z_1}, & H_{x'} &= -H_{\varphi_1}, & H_{y'} &= H_{r_1}, \\ H_{z'} &= H_{z_1}, & E_{x'} &= -E_{\varphi_1}, & E_{y'} &= E_{r_1}, \\ E_{z''} &= E_{z_1}, & H_{x''} &= H_{\varphi_1}, & H_{y''} &= -H_{r_1}, \\ H_{z''} &= H_{z_1}, & E_{x''} &= E_{\varphi_1}, & E_{y''} &= -E_{r_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее определим векторные потенциалы в области между прямыми  $x' = 0, y' > a_1$  и  $x'' = -l, y_1'' < -a_1$ , а также между прямыми  $x' = 0, y'' < -a_1$  и  $x' = -l, y_1' > a_1$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} A_{z'}^{\text{э}} &= \int_{-\infty}^{-a_1} -H_{y'} G_E dy'', & A_{z'}^{\text{м}} &= \int_{-\infty}^{a_1} -H_{y'} G_E dy', \\ A_{y''}^{\text{м}} &= \int_{-\infty}^{-a_1} -E_{z''} G_E dy'', & A_{y''}^{\text{э}} &= \int_{-\infty}^{a_1} -E_{z''} G_E dy', \\ A_{y''}^{\text{э}} &= \int_{-\infty}^{-a_1} H_{z''} G_H dy'', & A_{y''}^{\text{м}} &= \int_{-\infty}^{a_1} H_{z''} G_H dy', \\ A_{z''}^{\text{м}} &= \int_{-\infty}^{-a_1} E_{y''} G_H dy'', & A_{z''}^{\text{э}} &= \int_{-\infty}^{a_1} E_{y''} G_H dy'. \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} G_E &= \frac{-i}{4} [H_0^{(2)}(k\rho) - H_0^{(2)}(k\tilde{\rho})], \\ G_H &= \frac{-i}{4} [H_0^{(2)}(k\rho) + H_0^{(2)}(k\tilde{\rho})], \\ \rho &= \sqrt{(y' - y_1')^2 + (x')^2}, \\ \tilde{\rho} &= \sqrt{(y' + y_1' - 2a_1)^2 + (x')^2}, \\ \rho &= \sqrt{(y'' - y_1'')^2 + (x'')^2}, \\ \tilde{\rho} &= \sqrt{(y'' + y_1'' + 2a_1)^2 + (x'')^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $G_E$  и  $G_H$  — функции Грина для плоскости в случае  $E$ - и  $H$ -поляризации соответственно.

Компоненты полного поля выражаются через векторные потенциалы по формулам

$$\begin{aligned} E_{z'}^1 &= \frac{k^2 A_{z'}^{\text{э}}}{i\omega\epsilon_a} - \frac{\partial A_{y'}^{\text{м}}}{\partial x'}, & H_{x'}^1 &= \frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial^2 (A_{y'}^{\text{м}})}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial A_{z'}^{\text{э}}}{\partial y'}, \\ H_{y'}^1 &= \frac{1}{i\omega\mu_a} \left[ k^2 A_{y'}^{\text{м}} + \frac{\partial^2 (A_{y'}^{\text{м}})}{\partial y' \partial y'} \right] - \frac{\partial A_{z'}^{\text{э}}}{\partial x'}, \\ E_{y'}^1 &= \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left[ k^2 A_{y'}^{\text{э}} + \frac{\partial^2 (A_{y'}^{\text{э}})}{\partial y' \partial y'} \right] + \frac{\partial A_{z'}^{\text{м}}}{\partial x'}, \\ H_{z'}^1 &= \frac{k^2 A_{z'}^{\text{м}}}{i\omega\mu_a} + \frac{\partial A_{y'}^{\text{э}}}{\partial x'}, & E_{z''}^{11} &= \frac{k^2 A_{z''}^{\text{э}}}{i\omega\epsilon_a} - \frac{\partial A_{y''}^{\text{м}}}{\partial x''}, \\ H_{x''}^{11} &= \frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial^2 (A_{y''}^{\text{м}})}{\partial x'' \partial y''} + \frac{\partial A_{z''}^{\text{э}}}{\partial y''}, & H_{y''}^{11} &= \frac{1}{i\omega\mu_a} \times \\ &\times \left[ k^2 A_{y''}^{\text{м}} + \frac{\partial^2 (A_{y''}^{\text{м}})}{\partial y'' \partial y''} \right] - \frac{\partial A_{z''}^{\text{э}}}{\partial x''}, & E_{y''}^{11} &= \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \times \\ &\times \left[ k^2 A_{y''}^{\text{э}} + \frac{\partial^2 (A_{y''}^{\text{э}})}{\partial y'' \partial y''} \right] + \frac{\partial A_{z''}^{\text{м}}}{\partial x''}, & H_{z''}^{11} &= \frac{k^2 A_{z''}^{\text{м}}}{i\omega\mu_a} + \frac{\partial A_{y''}^{\text{э}}}{\partial x''}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в формулу (14) значения  $y' = a_1$  при  $-h\sin(-\beta + \pi/2) \leq x' \leq 0$  и  $y'' = -a_1$  при  $-h\sin(-\beta + \pi/2) \leq x'' \leq 0$ , находим компоненты магнитного поля и тока на прямых  $S_2$  и  $S_4$ :

$$\begin{aligned} j_{z'}^2 &= H_{x'}^1, & j_{x'}^2 &= -H_{z'}^1, \\ \text{и } j_{z''}^4 &= H_{x''}^{11}, & j_{x''}^4 &= -H_{z''}^{11}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в формулу (14) значения  $x' = -h\sin(-\beta + \pi/2)$  и  $x'' = -h\sin(-\beta + \pi/2)$ , находим компоненты полного поля на прямых  $x_1' = 0, y_1' > a_2$  и  $x_1'' = 0, y_1'' < -a_2$ .

Далее находим токи на дуге  $S_3$ . Векторные потенциалы при этом по-прежнему определены в формуле (6), где функции Грина окружности в полярной системе координат  $(r_2, \varphi_2)$  с центром в точке  $O_1$  имеют вид [2]

$$\begin{aligned} G_{E,H} &= \frac{-i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -im \left( \varphi_2 \mp \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \right) \right] \times \\ &\times \left[ J_m(kr_<) - \frac{\Omega J_m(ka_2)}{\Omega H_m^{(2)}(ka_2)} H_m^{(2)}(kr_<) \right] H_m^{(2)}(kr_>). \end{aligned} \quad (16)$$

Для электрической поляризации  $\Omega = 1$ , а для магнитной  $\Omega = \partial/\partial a_2, r_< = r_2', r_> = r_2$  при  $r_2 > r_2'$  и  $r_< = r_2, r_> = r_2'$  при  $r_2 < r_2'$ . Здесь  $r_2' = y_1'$  и  $r_2'' = y_1''$ .

В результате для компонент тока на дуге  $S_3$  получаем

$$j_{z_2}^3 = \frac{-1}{i\omega\mu_a} \times \left[ k^2 A_{\varphi_2}^M + \frac{1}{r_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left( \frac{1}{r_2} \frac{\partial (r_2 A_{r_2}^M)}{\partial r_2} + \frac{1}{r_2} \frac{\partial A_{\varphi_2}^M}{\partial \varphi_2} \right) \right] \right] - \frac{\partial A_{z_2}^3}{\partial r_2}, \quad (17)$$

$$j_{\varphi_2}^3 = \frac{k^2 A_{z_2}^M}{i\omega\mu_a} + \frac{1}{r_2} \left[ \frac{\partial (r_2 A_{\varphi_2}^3)}{\partial r_2} - \frac{\partial A_{r_2}^3}{\partial \varphi_2} \right],$$

где

$$A_{z_2}^3 = - \int_{-\infty}^{-a_2} H_y^{11} G_E dr_2' - \int_{a_2}^{\infty} H_y^1 G_E dr_2',$$

$$A_{z_2}^M = \int_{-\infty}^{-a_2} E_y^{11} G_H dr_2' + \int_{a_2}^{\infty} E_y^1 G_H dr_2',$$

$$A_{r_2}^M = -\sin(\varphi_2) \left[ \int_{-\infty}^{-a_2} E_z^{11} G_H dr_2' + \int_{a_2}^{\infty} E_z^1 G_H dr_2' \right],$$

$$A_{\varphi_2}^M = -\cos(\varphi_2) \left[ \int_{-\infty}^{-a_2} E_z^{11} G_H dr_2' + \int_{a_2}^{\infty} E_z^1 G_H dr_2' \right],$$

$$A_{r_2}^3 = \sin(\varphi_2) \left[ \int_{-\infty}^{-a_2} H_z^{11} G_E dr_2' + \int_{a_2}^{\infty} H_z^1 G_E dr_2' \right],$$

$$A_{\varphi_2}^3 = \cos(\varphi_2) \left[ \int_{-\infty}^{-a_2} H_z^{11} G_E dr_2' + \int_{a_2}^{\infty} H_z^1 G_E dr_2' \right].$$

Таким образом, мы нашли токи на  $S$ . В результате для диаграммы рассеяния в случае  $E$ - и  $H$ -поляризации получаем

$$E_z = \frac{k^2}{i\omega\epsilon_a} \left[ a_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{z_1}^1 G d\varphi_1 + \int_0^l j_{z_2}^2 G dx' + \right.$$

$$\left. + \exp(ikh \cos(\pi - \varphi)) a_2 \int_{\beta+\pi/2}^{\pi} j_{z_2}^3 G d\varphi_2 + \int_l^0 j_{z_2}^4 G dx'' + \exp(ikh \cos(\pi + \varphi)) a_2 \int_{\pi}^{-\beta+3\pi/2} j_{z_2}^3 G d\varphi_2 \right],$$

$$H_z = -ik \left[ a_1 \int_{-\beta+3\pi/2}^{\beta+\pi/2} j_{\varphi_1}^1 G \cos(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1 - \right.$$

$$\left. - \sin(\varphi - \beta) \int_0^l j_x^2 G dx' - \sin(\varphi + \beta) \int_l^0 j_x^4 G dx'' + \right.$$

$$\left. + \exp(ikh \cos(\pi - \varphi)) a_2 \int_{\beta+\pi/2}^{\pi} j_{\varphi_2}^3 G \cos(\varphi - \varphi_2) d\varphi_2 + \right.$$

$$\left. + \exp(ikh \cos(\pi + \varphi)) a_2 \int_{\pi}^{-\beta+3\pi/2} j_{\varphi_2}^3 G \cos(\varphi - \varphi_2) d\varphi_2 \right]. \quad (18)$$

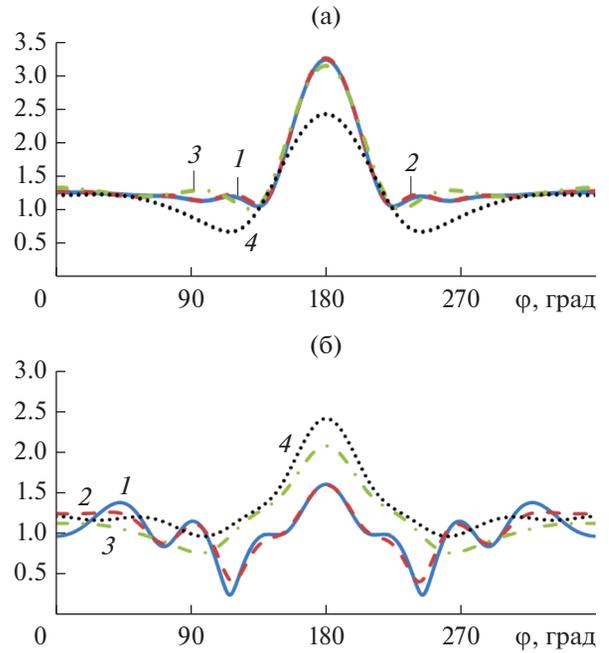


Рис. 2. Диаграммы рассеяния для  $E$ -поляризации (а) и  $H$ -поляризации (б) при  $\varphi_0 = 0, ka_1 = 3, ka_2 = 1$ .

Построение решения при падении плоской волны под углами  $\varphi_0 > \pi/2$  производится по аналогичной схеме.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2–9 приведены результаты расчета диаграмм рассеяния на цилиндре с параметрами  $kh = 5, ka_1 = 3, ka_2 = 1$  и  $0.1$  для  $E$ - и  $H$ -поляризации при четырех значениях угла падения плоской волны:  $\varphi_0 = 0, 20^\circ, 45^\circ, 180^\circ$ . На всех рисунках кривая 1 показывает результаты расчета методом моментов, 2 – гибридным методом с учетом взаимодействия, 3 – гибридным методом без учета взаимодействия, 4 – методом Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа.

На рис. 2–9 видно, что результаты расчета диаграмм рассеяния методом моментов (кривая 1) и гибридным методом с учетом взаимодействия (кривая 2) хорошо совпадают для всех углов падения и обоих значениях параметра  $ka_2$ . Результаты расчета гибридным методом без учета взаимодействия (кривая 3) совпадают с ними только при значениях угла  $\varphi_0$ , лежащих в пределах  $\beta < \varphi_0 \leq \pi - \beta$ . Результаты точного расчета и методом ГФК (кривая 4) совпали только для одного угла падения  $\varphi_0 = \pi/4$  для  $E$ -поляризации и только в области главного лепестка диаграммы рассеяния.

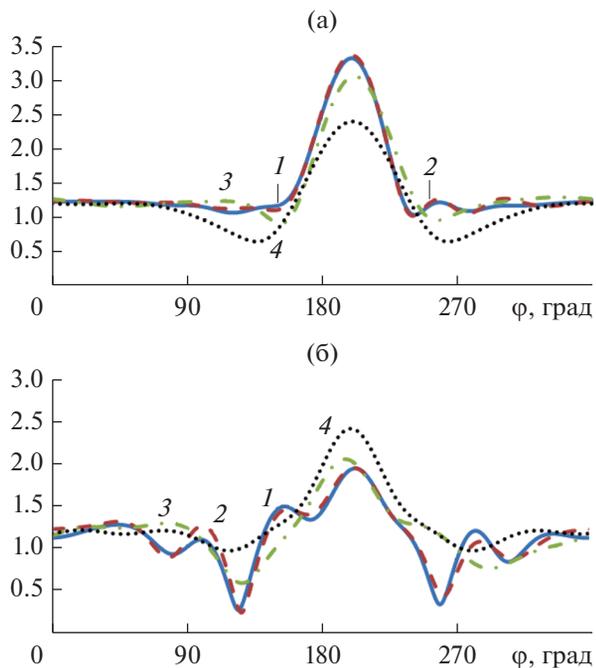


Рис. 3. Диаграммы рассеяния для *E*-поляризации (а) и *H*-поляризации (б) при  $\varphi_0 = 20^\circ, ka_1 = 3, ka_2 = 1$ .

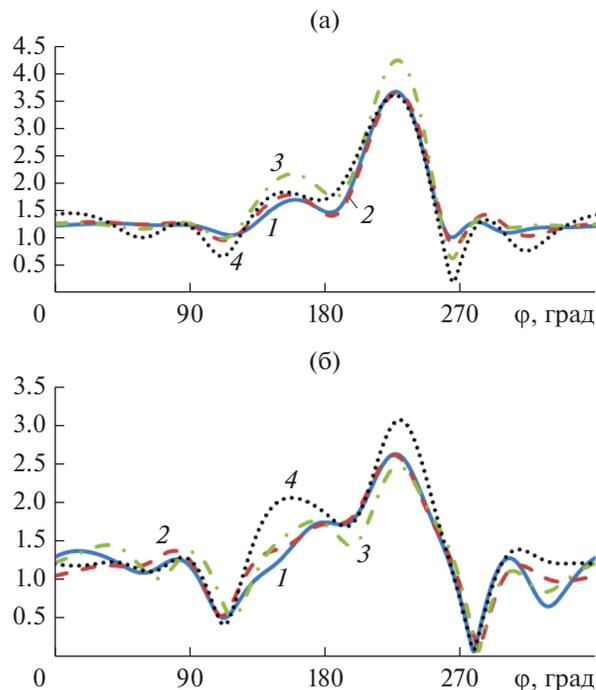


Рис. 4. Диаграммы рассеяния для *E*-поляризации (а) и *H*-поляризации (б) при  $\varphi_0 = 45^\circ, ka_1 = 3, ka_2 = 1$ .

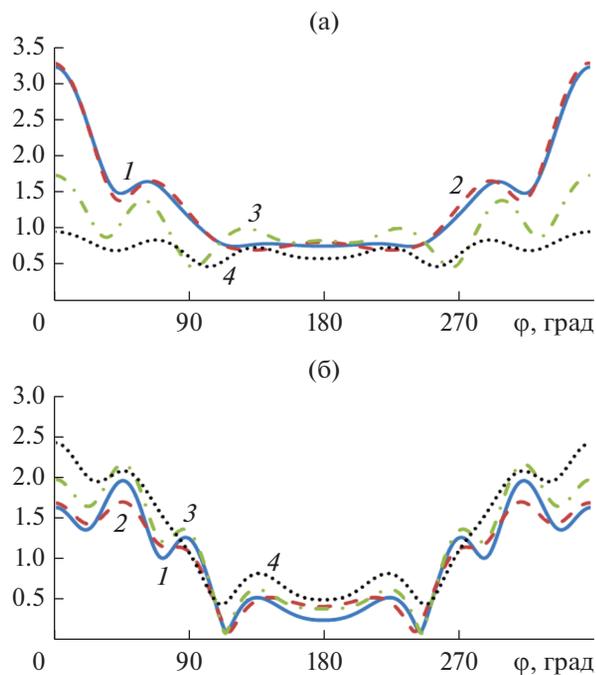


Рис. 5. Диаграммы рассеяния для *E*-поляризации (а) и *H*-поляризации (б) при  $\varphi_0 = 180^\circ, ka_1 = 3, ka_2 = 1$ .

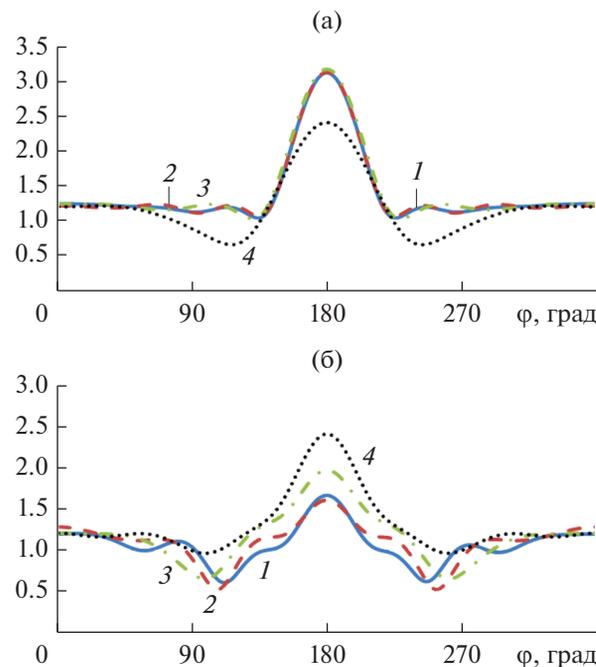


Рис. 6. Диаграммы рассеяния для *E*-поляризации (а) и *H*-поляризации (б) при  $\varphi_0 = 0^\circ, ka_1 = 3, ka_2 = 0.1$ .

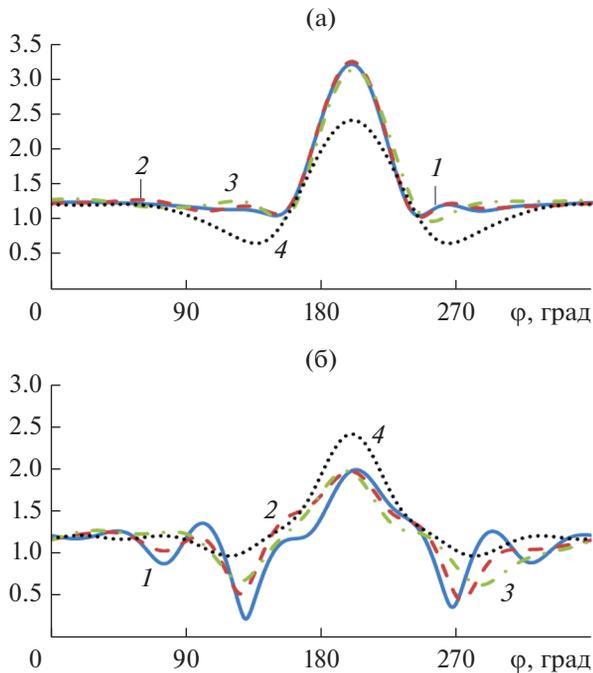


Рис. 7. Диаграммы рассеяния для  $E$ -поляризации (а) и  $H$ -поляризации (б) при  $\varphi_0 = 20^\circ$ ,  $ka_1 = 3$ ,  $ka_2 = 0.1$ .

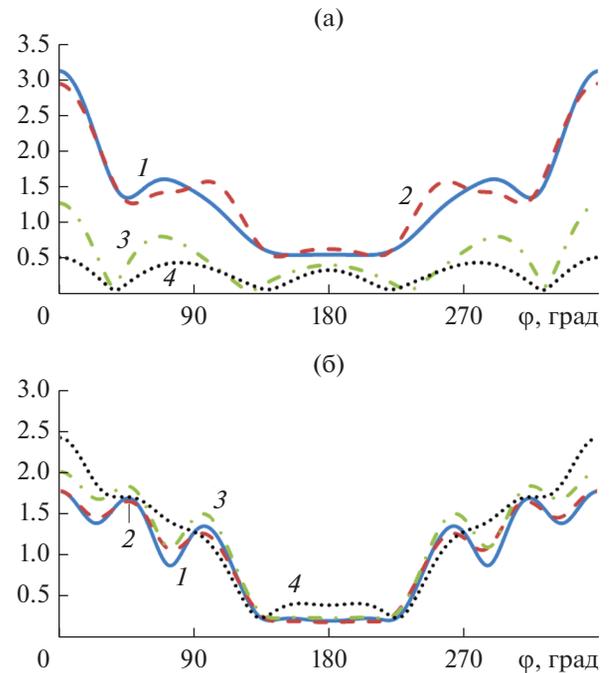


Рис. 9. Диаграммы рассеяния для  $E$ -поляризации (а) и  $H$ -поляризации (б) при  $\varphi_0 = 180^\circ$ ,  $ka_1 = 3$ ,  $ka_2 = 0.1$ .

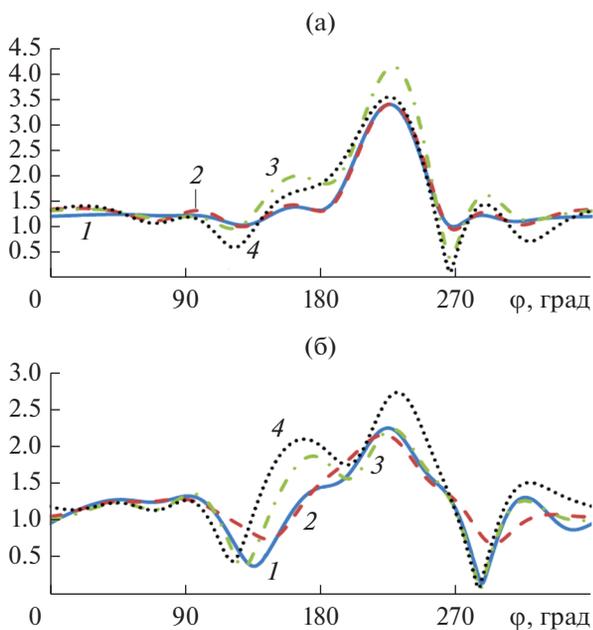


Рис. 8. Диаграммы рассеяния для  $E$ -поляризации (а) и  $H$ -поляризации (б) при  $\varphi_0 = 45^\circ$ ,  $ka_1 = 3$ ,  $ka_2 = 0.1$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в результате сравнения результатов расчета четырьмя методами можно сделать следующие выводы:

1. Предложенный гибридный метод с учетом взаимодействия позволяет решать задачи рассеяния

плоской электромагнитной волны на цилиндрических телах с кусочно-аналитической формой образующей и произвольными характерными электрическими размерами при любых углах падения.

2. Гибридный метод без учета взаимодействия позволяет решать задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на цилиндрических телах с кусочно-аналитической формой образующей с произвольными характерными электрическими размерами для углов падения, не близких к скользким.

3. Метод Гюйгенса–Френеля–Кирхгофа даже качественно не описывает диаграмму рассеяния плоской волны на цилиндре при радиусах кривизны границы поперечного сечения цилиндра менее половины длины волны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967.
2. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978.
3. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978.
4. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
5. Kleshchev A.A. // J. Acoust. 2016. V. 6. P. 45.
6. Kaloshin V.A., Luu D.T. // Intern. Sci. Conf. "Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves RSEMW-2019", Divnomorskoe, Russia. June, 2019. P. 232.

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.391

## КЛАСС ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА СО СКОРОСТЬЮ СПАДА ЛЕПЕСТКОВ СПЕКТРА, КРАТНОЙ 12 ДЕЦИБЕЛ НА ОКТАВУ

© 2020 г. Г. В. Зайцев<sup>а</sup>, \*, А. Д. Хзмалян<sup>а</sup><sup>а</sup>НПО “Алмаз”,

Ленинградский просп., 80, корп. 16, Москва, 125190 Российская Федерация

\*E-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.02.2019 г.

После доработки 03.04.2019 г.

Принята к публикации 12.06.2019 г.

Решена задача синтеза весовых функций малого порядка со скоростью спада лепестков спектра  $12n$  дБ/окт ( $n$  — целое) оптимальных по критерию минимума максимального бокового лепестка на заданном отрезке частотной оси вне главного лепестка. Для получения указанной скорости спада лепестков предложено синтезировать функции в виде суммы отрезка ряда Фурье по системе косинусоидальных функций с нечетным числом полуволн на интервале наблюдения. Разработан метод синтеза оптимальных функций с верификацией найденного решения. Синтезированы весовые функции порядков 3...6 со скоростью спада лепестков 12, 24 и 36 дБ/окт и табулированы их параметры.

DOI: 10.31857/S0033849420050137

### ВВЕДЕНИЕ

Цифровой спектральный анализ сигналов, выполняемый, как правило, с помощью алгоритмов дискретного преобразования Фурье, широко используется в различных областях науки и техники. Перед вычислением спектра анализируемый сигнал умножают на действительную положительную функцию  $w(t)$ , называемую весовой, или оконной, для повышения качества выделения полезной информации. Весовая функция сглаживает разрывы сигнала на границах интервала наблюдения и снижает эффект размывания спектральных линий.

Обзор известных весовых функций можно найти в [1, 2]. Требования к весовым функциям зависят от конкретной решаемой задачи. В различных приложениях могут доминировать требования обеспечения малого среднеквадратичного уровня боковых лепестков спектра, высокой скорости спада лепестков, максимально плоской вершины главного лепестка и другие.

В данной работе предложены новые семейства весовых функций, оптимальных по минимаксному критерию качества, при котором минимизируется уровень максимального бокового лепестка в заданной области частот вне главного лепестка. Работа направлена на приложения, в которых необходимы высокий уровень подавления боковых лепестков при малом расширении главного ле-

пестка и возможность вычисления функции в реальном масштабе времени.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть анализируемый сигнал представлен  $N$  временными отсчетами, взятыми с шагом  $\delta$ . Для упрощения формул удобно вместо размерных величин времени  $t_{\text{разм}}$  и частоты  $f_{\text{разм}}$  использовать безразмерные  $t$  и  $f$ :  $t = t_{\text{разм}}/\delta$ ,  $f = f_{\text{разм}} \delta$ . Начало временной оси расположим в центре между крайними отсчетами. Тогда моменты выборок равны  $t_p = -0.5(N-1) + p$  ( $p = 0, 1, \dots, N-1$ ). Спектр такого сигнала периодичен с периодом 1, и его достаточно анализировать на периоде  $f \in [-0.5, 0.5]$ . Для расчета спектра взвешенного дискретного сигнала необходимы только отсчеты весовой функции в точках  $t_p$ , однако при теоретическом анализе и практическом применении весовую функцию  $w(t)$  удобно рассматривать как непрерывную, а необходимые дискретные отсчеты — как значения этой непрерывной функции в точках  $t_p$ .

К весовым функциям  $w(t)$ , рассматриваемым в данной работе, предъявляются два требования. Во-первых, для подавления эффекта размывания спектральной линии уровень боковых лепестков их спектра в заданной области частот должен быть минимально возможным по рассматриваемому ниже критерию. Во-вторых, они должны просто вычисляться для использования в реаль-

ном масштабе времени. Рассмотрим эти требования подробнее.

Большинство весовых функций с простым вычислением имеют вид начального отрезка традиционного ряда Фурье по косинусоидальным функциям с четным числом полувольт на интервале наблюдения [1, 2]:

$$w(\mathbf{a}, t) = \sum_{k=0}^m a_k \cos(2\pi kt/N), \quad -0.5N \leq t \leq 0.5N, \quad (1)$$

где  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$  – вектор коэффициентов, а число  $m$  называется порядком весовой функции.

Замечательно, что весовые функции с высокими характеристиками можно получить при малом числе  $m$  коэффициентов [1], что обеспечивает простоту вычисления функции. Уже для функций порядков 3...7 можно получить уровень боковых лепестков, достаточно низкий для большинства приложений. Многие классические весовые функции имеют указанное представление [1, 2], и именно такие функции наиболее востребованы на практике.

Требование максимального подавления боковых лепестков трактуется в данной работе в чебышевском смысле и состоит в следующем. Спектр  $W(f)$  функции  $w(t)$ , используемой при гармоническом анализе дискретного сигнала, определяется формулой дискретного по времени преобразования Фурье [3]:

$$W(\mathbf{a}, f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(\mathbf{a}, t_p) \exp(-j2\pi t_p f), \quad (2)$$

$$f \in [-0.5, 0.5].$$

Пусть  $W_{\max}$  – максимальное значение модуля спектра (2). Определим функцию качества  $\varphi(\mathbf{a})$  как максимальное значение нормированного модуля спектра  $|W(\mathbf{a}, f)/W_{\max}|$  вне области  $[-\beta, \beta]$ , где  $\beta$  – задаваемая максимально допустимая полуширина главного лепестка по уровню максимального бокового лепестка:

$$\varphi(\mathbf{a}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0.5} |W(\mathbf{a}, f)/W_{\max}|. \quad (3)$$

Построение оптимальной весовой функции заключается в отыскании вектора коэффициентов  $\mathbf{a}$ , минимизирующего функцию  $\varphi(\mathbf{a})$ , т.е. в решении задачи

$$\varphi(\mathbf{a}) \rightarrow \min_{\mathbf{a}}. \quad (4)$$

Поставленная задача относится к задачам чебышевского приближения [4]. Известны отдельные функции вида (1), являющиеся ее решениями: функции Хэмминга [1], Наталла [5], Альбрехта [6]. В статьях [7–9] был разработан регулярный метод синтеза, позволяющий получить для функций вида (1) континуальное семейство оптимальных функций с заданной скоростью спада боковых

лепестков и приведены сводки оптимальных функций.

Заметим, однако, что свойства функций, представленных конечным отрезком ряда Фурье (1), ограничены. Для иллюстрации этого положения рассмотрим один из основных параметров весовых функций – асимптотическую при увеличении частоты скорость спада боковых лепестков спектра, определяемую как величина  $V$  снижения модуля лепестков при увеличении частоты вдвое и измеряемую в децибелах на октаву (сокращенно – дБ/окт). Этот параметр характеризует непрерывную функцию  $w(t)$ , однако используется и для дискретных весовых функций в предположении, что число выборок  $N$  велико. (Далее для краткости “асимптотическая” опускаем.)

Из теории преобразования Фурье известно, что этот параметр определяется порядком разрыва весовой функции на границах отрезка наблюдения. Если на границах этого отрезка  $n$ -я производная функции  $w(t)$  имеет разрыв первого рода ( $n = 1, 2, \dots$ ), а производные меньшего порядка непрерывны, то скорость спада лепестков составляет  $6(n + 1)$  дБ/окт. Нулевую производную будем считать совпадающей с самой функцией.

Для функций традиционного представления (1) нечетные производные равны нулю на концах отрезка наблюдения, поэтому эти функции могут иметь скорость спада лепестков вида  $6(2k + 1)$  дБ/окт ( $k = 0, 1, \dots$ ), однако промежуточные скорости спада спектра получить невозможно.

Для восполнения этого пробела в данной работе синтезируются весовые функции в виде начального отрезка обобщенного ряда Фурье по системе косинусоидальных функций с нечетным числом полувольт на интервале наблюдения:

$$w(t) = \sum_{k=0}^m a_k \cos[(2k + 1)\pi t/N]. \quad (5)$$

Система функций, использованная в (5), полна в классе непрерывных действительных четных функций на отрезке  $[-N/2, N/2]$  [10]. При малом порядке  $m$  вычисление функции (5) столь же просто, как и вычисление функции (1).

Функции вида (5) в отличие от функций вида (1) имеют на концах отрезка наблюдения нулевые четные производные. Поэтому они могут иметь скорости спада лепестков спектра вида  $12k$  дБ/окт ( $k = 1, 2, \dots$ ), т.е. величины, промежуточные по отношению к функциям (1). Ниже синтезируются весовые функции вида (5), оптимальные по критерию (3), (4).

Отметим, что весовые функции (5) допускают альтернативное представление. Действительно, функцию  $\cos[(2k + 1)x]$  в (5) можно преобразовать в линейную комбинацию функций  $\cos^{2n+1}x$

( $n = 0, 1, \dots, k$ ), воспользовавшись известной формулой [11]:

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= 2^{n-1} \cos^n(x) - \frac{n}{1} 2^{n-3} \cos^{n-2}(x) + \\ &+ \frac{n}{2} C_{n-3}^1 2^{n-5} \cos^{n-4}(x) - \frac{n}{3} C_{n-4}^2 2^{n-7} \cos^{n-6}(x) + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_u^v$  – биномиальные коэффициенты. Тогда формулу (5) можно переписать в эквивалентной альтернативной форме:

$$w(t) = \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2k+1}(\pi t/N), \quad (7)$$

где коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_m$ , являются линейными комбинациями коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .

Представление (7) имеет следующие достоинства. Во-первых, количество алгебраических операций при расчете весовой функции по формуле (7) меньше, чем по формуле (5). Во-вторых, на краях интервала наблюдения каждая базисная функция  $\cos^{2k+1}x$  имеет нулевые производные порядков от 0 до  $2k$ , и, следовательно, лепестки ее спектра асимптотически спадают со своей индивидуальной скоростью  $V = 12(k+1)$  дБ/окт ( $k = 0, 1, \dots, m$ ). Поэтому при синтезе функции со скоростью спада лепестков  $12n$  дБ/окт необходимо и достаточно обнулить коэффициенты  $b_k$  при  $k < n-1$  в формуле (7), что упрощает решение задачи оптимизации (3), (4).

При разработке алгоритма синтеза в основном будем использовать более традиционное представление (5), отмечая особенности решения при представлении (7).

## 2. ФУНКЦИЯ КАЧЕСТВА

Спектр функции (5) с точностью до несущественной константы имеет вид

$$W(\mathbf{a}, f) = \sum_{k=0}^m a_k \Delta_k(f), \quad (8)$$

где функция  $\Delta_k(f)$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} \Delta_k(f) &= D_{2k+1}(f) + D_{-(2k+1)}(f), \quad k = 0, 1, \dots, \\ D_s(f) &= \frac{\sin \pi N[f - s/2N]}{N \sin \pi[f - s/2N]}. \end{aligned} \quad (9)$$

Синтез функции (5), оптимальной по описанному выше чебышевскому критерию (3)–(4), состоит в нахождении оптимальных коэффициентов  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ), образующих вектор  $\mathbf{a}$ .

Рассмотрим свойства оптимальной функции, являющейся решением задачи (3), (4). Во-первых, максимум спектра весовой функции достигается при  $f = 0$ . В самом деле, спектр (2) весовой функции (5) в силу ее положительности и сим-

метричности относительно оси ординат не имеет мнимой части и поэтому равен

$$W(\mathbf{a}, f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(\mathbf{a}, t_p) \cos(2\pi t_p f), \quad f \in [-0.5, 0.5].$$

В этом выражении суммируются неотрицательные числа  $w(\mathbf{a}, t_p)$  с весом  $\cos(2\pi t_p f) \leq 1$ . Очевидно, максимум достигается, если все веса равны единице, что реализуется только при  $f = 0$ .

Далее, умножение всех коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  на фиксированный множитель не изменяет функцию качества (3). Для обеспечения единственности решения задачи зафиксируем масштаб функции путем фиксации максимального значения спектра  $W_{\max} = W(\mathbf{a}, 0) = 1$ , т.е. примем

$$\sum_{k=0}^m d_k a_k = 1, \quad (10)$$

где  $d_k = \Delta_k(0)$  – постоянные коэффициенты.

Тогда функция качества (3), нелинейная относительно коэффициентов  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ), может быть переписана в линейном виде с линейным условием (10):

$$\varphi(\mathbf{a}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0.5} |W(\mathbf{a}, f)|. \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^m d_k a_k = 1$$

Рассмотрим условия, которым должна удовлетворять весовая функция (5), чтобы скорость спада лепестков была равна  $12n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Для этого, как сказано выше, необходимо и достаточно, чтобы в граничных точках интервала наблюдения  $f = \pm 0.5$  производные функции были равны нулю, вплоть до производной порядка  $2(n-1)$ .

Нетрудно проверить, что для функции вида (5) четные производные при  $f = \pm 0.5$  равны нулю; нечетные производные порядка  $2i+1$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) имеют выражение

$$\begin{aligned} w^{(2i+1)}(\mathbf{a}, t) &= (-1)^{i+1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^m [\pi(2k+1)/N]^{2i+1} a_k \sin[(2k+1)\pi t/N], \quad (12) \\ &-0.5N \leq t \leq 0.5N, \end{aligned}$$

поэтому скорость спада лепестков  $12$  дБ/окт обеспечивается при любых коэффициентах, а для скорости спада лепестков  $12n$  дБ/окт ( $n = 2, 3, \dots$ ) требуется выполнение  $n-1$  соотношений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k (2k+1)^{2i+1} a_k &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad (13) \\ n &\geq 2. \end{aligned}$$

При выполнении условий (10), (13) из  $m+1$  коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  только  $M = m-n+1$  явля-

ются независимыми, а остальные  $n$  могут быть выражены через независимые коэффициенты путем решения системы линейных уравнений (10), (13).

Выберем в качестве независимых переменных коэффициенты с младшими индексами  $a_k, k = 0, 1, \dots, M - 1$ . Можно показать, что система линейных уравнений (10), (13) относительно зависимых коэффициентов имеет единственное решение, выражающее их в виде линейной комбинации независимых:

$$a_k = \sum_{i=0}^{M-1} h_{ki} a_i, \quad k = M, \dots, m, \quad (14)$$

где  $h_{ki}$  – числовые множители.

Подставляя (14) в (8), получим выражение, описывающее спектр весовой функции через независимые коэффициенты. Для наглядного описания получаемого выражения введем следующие обозначения:  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{M-1})$  – усеченный вектор из независимых коэффициентов;  $W_0(\mathbf{a}, f)$  – спектр  $W(\mathbf{a}, f)$  для случая, в котором вектор  $\mathbf{a}$  удовлетворяет соотношениям (10) и (13), а коэффициенты,  $a_M, \dots, a_m$  выражены формулой (14). В этих обозначениях описываемое выражение имеет вид

$$W_0(\mathbf{a}, f) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k u_k(f), \quad (15)$$

где  $u_i(f)$  – следующие функции:

$$u_i(f) = \Delta_i(f) + \sum_{k=M}^m h_{ki} \Delta_k(f), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (16)$$

Теперь задача минимизации (3),(4) может быть переписана с уменьшением размерности вектора коэффициентов до  $M = m - n + 1$ :

$$\varphi(\mathbf{a}) \rightarrow \min_{\mathbf{a}}, \quad \varphi(\mathbf{a}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0.5} |W_0(\mathbf{a}, f)|, \quad (17)$$

где функция  $W_0(\mathbf{a}, f)$  определяется формулой (15). В такой формулировке задача приведена к стандартному виду, и можно воспользоваться общей теорией линейных чебышевских приближений [4], где, в частности, показано, что решение поставленной задачи существует и единственно.

Используемый в данной работе подход к решению поставленной минимаксной задачи состоит в непосредственной минимизации функции  $\varphi(\mathbf{a})$  (17) с помощью численных методов. Для выбора эффективного алгоритма поиска экстремума необходимо исследовать прежде всего характер поведения оптимизируемой функции. Изучение функции качества подобного вида проведено в [7]. Аналогичный анализ функции (17) приводит к следующим выводам о свойствах функции качества:

– функция качества  $\varphi(\mathbf{a})$  является выпуклой функцией в пространстве коэффициентов и в силу единственности решения имеет единственный

минимум, который является ее глобальным минимумом;

– функция  $\varphi(\mathbf{a})$  в любой точке  $\mathbf{a}$  является непрерывной и имеет производные по всем направлениям, однако имеются точки, в которых функция недифференцируема.

Анализ функции  $\varphi(\mathbf{a})$  показал, что, во-первых, она имеет регулярные области, в которых прева­лирует один из лепестков. В таких областях функция  $\varphi(\mathbf{a})$  определяется величиной этого лепестка и является дифференцируемой. Во-вторых, там, где происходит перескок прева­лирования с одного лепестка на другой, эти области соприкасаются по линиям (областям), в которых функция имеет излом и является недифференцируемой. В результате рельеф функции качества имеет вид системы оврагов, на пологом дне которых она недифференцируема, причем размерность овражной области может достигать  $M - 1$ . Это делает неэффективным непосредственное применение традиционных численных методов минимизации для поиска экстремума рассматриваемой функции.

Ранее [7, 8] для минимизации функционала, сходного с (17), был разработан численный метод нахождения экстремума на основе алгоритмов случайного поиска. Однако число операций в таких алгоритмах с ростом размерности задачи становится чрезмерно большим. Для того чтобы алгоритм оптимизации был эффективным, он должен в максимальной степени использовать свойства функции качества. Поэтому был разработан следующий численный алгоритм, который учитывает ее многомерную овражную структуру и недифференцируемость.

### 3. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА

Численный алгоритм минимизации функции качества (17) содержит следующие этапы.

*Шаг 1.* Задать начальное приближение  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{M-1})$ . Например,  $a_i = 1/M$ .

*Шаг 2.* Выполнить поиск минимума функции с помощью любого традиционного алгоритма, например, можно использовать многомерную версию поиска с равномерным шагом с последующим делением отрезка пополам. При этом алгоритм остановится в некоторой точке с координатами  $\xi_0$  на дне оврага.

*Шаг 3.* Выполнить оценку базиса овражной области. Поскольку размерность области может достигать  $M - 1$ , сделать  $M - 1$  малых случайных приращений  $\delta_k$  для вектора  $\xi_0, k = 1, \dots, M - 1$ . Величины приращений выбрать такими, чтобы приращение целевой функции было соизмеримо с заданной относительной погрешностью. Взяв точки  $\xi_k = \xi_0 + \delta_k$  в качестве начальных приближений, осуществить из них, как из начальных приближений, поиск минимумов аналогично ша-

гу 2. При этом будет найдено  $M - 1$  точек с координатами  $\mathbf{v}_k$  на дне овражной области. Векторы  $\mathbf{v}_k - \xi_0$  считать базисом овражной области.

**Шаг 4.** В пространстве, натянутом на  $M - 1$  векторов  $\mathbf{v}_k - \xi_0$ , найти минимум с помощью одного из традиционных методов аналогично шагу 2. Принять найденную точку  $\mathbf{a}_c$  в качестве очередного приближения для оптимального вектора  $\tilde{\mathbf{a}}$ .

**Шаг 5.** Определить, насколько близко полученное приближение  $\varphi(\mathbf{a}_c)$  к минимуму  $\varphi(\tilde{\mathbf{a}})$  с помощью описанного далее алгоритма. Если отклонение от оптимума  $\varphi(\mathbf{a}_c) - \varphi(\tilde{\mathbf{a}})$  меньше, чем заданная точность приближения, прекратить вычисления, считая  $\mathbf{a}_c$  полученным решением. Иначе перейти к шагу 2.

Оценка близости полученного решения к оптимальному на шаге 5 производится с использованием общей теории линейных чебышевских приближений [4]. Согласно этой теории точка  $\tilde{\mathbf{a}}$  является точкой глобального минимума функции  $\varphi(\mathbf{a})$  (17) тогда и только тогда, когда существует  $l \leq M + 1$  точек  $f_1, f_2, \dots, f_l \in [\beta, 0.5]$  и ненулевые числа  $c_1, c_2, \dots, c_l$ , для которых выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^l c_k u_j(f_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (18)$$

$$W(\tilde{\mathbf{a}}, f_k) = \varphi(\tilde{\mathbf{a}}) \cdot \text{sign } c_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (19)$$

Из условия (19) следует, что в указанных точках функция  $W(\tilde{\mathbf{a}}, f)$  имеет максимальные и равные по модулю экстремумы. Отметим также, что случай  $l < M + 1$  является довольно редким: для всех синтезированных функций, описанных ниже,  $l = M + 1$ .

Из условий (18), (19) следует нижняя граница для величины минимума  $\varphi(\tilde{\mathbf{a}})$  при  $l = M + 1$  [4]:

$$\varphi(\tilde{\mathbf{a}}) \geq \left| \sum_{k=1}^l c_k W(\tilde{\mathbf{a}}, f_k) \right| / \sum_{k=1}^l |c_k|, \quad (20)$$

где  $c_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) – решение системы линейных уравнений (18) для  $l = M + 1$  различных произвольных точек  $f_1, f_2, \dots, f_l$ .

Методика оценки близости полученного уровня бокового лепестка к оптимальному значению сводится к следующему. После нахождения вектора коэффициентов  $\mathbf{a}_c$  на шаге 5 алгоритма синтеза вычисляются экстремумы функции  $|W(\mathbf{a}_c, f)|$  по  $f \in [\beta, 0.5]$  и выбираются  $\mu \geq M + 1$  экстремумов с максимальным уровнем. Далее проводится оценка  $\varphi(\tilde{\mathbf{a}})$  по формуле (20) для каждого сочетания из  $\mu$  по  $M + 1$  этих экстремумов. Выбирая наибольшую из этих оценок  $\rho$ , имеем

$$\rho \leq \varphi(\tilde{\mathbf{a}}) \leq \varphi(\mathbf{a}_c).$$

Если верхняя и нижняя границы в этой формуле отличаются не более, чем на заданную величину  $\epsilon$ , то достигнутый уровень лепестков отличается от оптимального не более чем на  $\epsilon$ , и задача считается решенной, в противном случае повторяется поиск из точки  $\mathbf{a}_c$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ СИНТЕЗА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

С помощью разработанной методики могут быть синтезированы оптимальные весовые функции по заданным параметрам  $m, N, V$  и  $\beta$ . Далее приводим полученные функции со скоростями спада лепестков 12, 24 и 36 дБ/окт.

Для компактного и наглядного представления результатов приняты во внимание следующие соображения.

1. Главный лепесток функции  $W(\mathbf{a}, f)$  (8) занимает область не менее  $[0, 1.5/N]$ . При  $\beta > (m + 1.5)/N$  в отрезок  $[0, \beta]$  всегда попадает неконтролируемый боковой лепесток, так как при  $f = (m + 1.5)/N$  все слагаемые функции  $W(\mathbf{a}, f)$  (8) имеют нуль. Поэтому параметры  $m$  и  $\beta$  следует задавать так, чтобы выполнялось соотношение  $\beta \in [1.5/N, (m + 1.5)/N]$ . Следовательно, при фиксированном  $\beta$  величина  $m$ , минимально необходимая для того, чтобы в области  $[0, \beta]$  не было боковых лепестков, должна удовлетворять соотношению  $m \geq \beta N - 1.5$ . Увеличение  $m$  сверх минимально необходимого весьма слабо улучшает характеристики весовой функции, поэтому далее они приводятся в основном лишь для  $m = \lceil \beta N - 1.5 \rceil$ , где  $\lceil x \rceil = p$  – наименьшее целое, такое, что  $p \geq x$ . Функции, удовлетворяющие этому условию, будем называть регулярными, не удовлетворяющие – нерегулярными. Не при всяком значении  $\beta$  возможно построение регулярной оптимальной функции. Это связано с тем, что количество независимых переменных  $M = m - n + 1$  должно быть положительным, иными словами,  $m \geq n$ . Поэтому минимальная величина  $m$  выбирается из соотношения  $m = \max\{\lceil \beta N - 1.5 \rceil, n\}$ . Для малых значений  $\beta$  ( $\beta < (n + 1.5)/N$ ) возможно построение только нерегулярных функций.

Отметим также, что ширина главного лепестка обратно пропорциональна  $N$ , поэтому параметры ширины главного лепестка, включая  $\beta$ , удобно выражать в относительном масштабе, умножая их на  $N$ . Ширина полосы  $1/N$  называется бином [1]. Таким образом, приводимые ниже ширины полос выражаются в бинах.

2. Характеристики оптимальных весовых функций слабо зависят от величины  $N$ . При изменении  $N$  в диапазоне  $2^4 \dots 2^{14}$  разница в уровне максимального лепестка, как правило, не превышает долей децибела и тем меньше, чем больше сравниваемые значения  $N$ . Поэтому ниже приводятся характеристики оптимальных функций только

для одного значения  $N = 1024$ , часто используемого в приложениях. При таком значении  $N$  как коэффициенты, так и характеристики весовых функций практически совпадают с соответствующими значениями для непрерывных функций.

При синтезе функций со скоростью спада  $V = 12$  дБ/окт имеется всего один зависимый коэффициент, вычисляемый через независимые с помощью соотношения (10). Коэффициенты представлений (5) и (7) и параметры рассчитанных весовых функций со скоростью спада лепестков  $V = 12$  дБ/окт приведены в табл. 1 для  $N = 1024$ , минимально необходимых  $m$  и шага 0.25 бин по параметру  $\beta$ . Величина  $\beta$  изменяется в диапазоне 1.5...7.5 бин, перекрывающем диапазон уровней максимального лепестка примерно до  $-200$  дБ.

Нормировка коэффициентов в табл. 1–3 выполнена таким образом, чтобы максимальный коэффициент был равен единице. Для представления (5) это эквивалентно соотношению  $a_0 = 1$ , поэтому для краткости этот коэффициент в таблицах не приводится.

В табл. 1 приведены следующие стандартные параметры весовых функций [1]: уровень  $P$  максимального бокового лепестка по отношению к главному лепестку; потери  $\Pi_w$  в отношении сигнал/шум за счет использования весовой функции; потери  $\Pi_s$  за счет рельефа; эквивалентная шумовая полоса  $L_n$ , ширины главного лепестка по уровням  $-3$  и  $-6$  дБ, обозначаемые  $L_3$  и  $L_6$  соответственно. Все полосы приведены в бинах. Потери за счет рельефа определяются как максимальный относительный спад огибающей амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) гребенки полосовых фильтров, расставленных через интервал  $1/N$ , АЧХ каждого из которых определяется функцией  $|W(f)|$ . Эквивалентная шумовая полоса — это ширина АЧХ идеального прямоугольного фильтра, который пропускает такую же мощность шума, что и фильтр с АЧХ  $|W(f)|$  при равных максимальных амплитудах АЧХ этих фильтров.

Для функции табл. 1 с  $m = 0$  в (5) содержится только один коэффициент  $a_0$ , и получаемый при синтезе результат соответствует известной весовой функции  $\cos(\pi t/N)$ . Остальные функции, насколько известно авторам, в литературе не описывались.

Особый интерес в табл. 1 представляют те строки, в которых  $\beta$  принимает наибольшее значение для каждого  $m$ , так как они дают ответ на вопрос о наименьшем значении уровня бокового лепестка, достижимом для весовой функции заданного порядка со скоростью спада лепестков 12 дБ/окт.

Разрядность коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) выбрана следующим образом. Сначала определялась необходимая разрядность для того, чтобы величины максимальных лепестков, приведенные в

таблице, и точного решения совпадали во всех приводимых цифрах. Затем разрядность увеличилась на 1 для снижения ошибок округления в случае пересчета коэффициентов при изменении нормировки.

При синтезе функции со скоростью спада лепестков  $V = 24$  дБ необходимо обеспечить выполнение соотношений (10) и (13) при  $n = 2, i = 0$ .

Числовые параметры синтезированных оптимальных весовых функций со скоростью спада 24 дБ/окт для  $N = 1024$ , минимально необходимого  $m$  и шага 0.25 бин по параметру  $\beta$  в диапазоне 1.5...7.5 бин приведены в табл. 2. Округление коэффициентов  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) выполнено с точным соблюдением соотношений (10) и (13), что позволяет сохранить скорость спада лепестков.

Для коэффициентов  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) представления (7) проблемы сохранения скорости спада при округлении не возникает, так как этот параметр не изменяется при любом способе округления. По этой причине необходимая разрядность коэффициентов  $b_i$  несколько меньше, чем коэффициентов  $a_i$ . Поэтому при использовании весовых функций во временной области представления (7) предпочтительнее представления (5).

Значение  $m = 1$  в табл. 2 описывает вырожденный случай,  $m = 1$ , для которого коэффициенты определены аналитически. Полученная функция является известной весовой функцией  $\cos^3(\pi t/N)$ . Остальные функции являются новыми.

Звездочкой в табл. 2 отмечены нерегулярные функции. Их свойства несколько необычны: коэффициент  $a_2$  является отрицательным, а во временной области некоторые из них имеют раздвоенный максимум.

При скорости спада лепестков  $V = 36$  дБ/окт система уравнений для зависимых коэффициентов содержит соотношение (10) и два соотношения (13). В табл. 3 приведены параметры оптимальных весовых функций со скоростью спада 36 дБ/окт для  $m = 3...6$  и  $\beta$  в диапазоне 3.5...7.5 бин с шагом 0.25 бин при  $N = 1024$ .

В этом случае округление коэффициентов  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) с сохранением соотношений (10), (13) затруднительно. При этом возникает ошибка округления  $\epsilon_k$  коэффициента  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), что дает в спектре (8) аддитивный паразитный член вида  $\epsilon_k \Delta_k(f)$ , имеющий медленно спадающие лепестки со скоростью  $V = 6$  дБ/окт. Для снижения степени влияния этого члена на уровень лепестков разрядность коэффициентов  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) в табл. 3 выбрана достаточно большой, равной 12, что позволяет пренебречь влиянием ошибки до уровня лепестков порядка  $-300$  дБ.

Также в табл. 3 включен вырожденный случай  $m = 2$ , при котором коэффициенты определяются аналитически. Эта функция соответствует из-

Таблица 1. Параметры синтезированных весовых функций со скоростью спада 12 дБ/окт

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$a_1, a_2, \dots, a_m$ ( $a_0 = 1$ )	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_{пр}$ , дБ	$\Pi_{св}$ , дБ	$L_n$ , дБ	$L_3$ , дБ	$L_6$ , дБ
0	1.352	-23.0	—	1.0	0.912	2.098	1.234	1.189	1.639
	1.5	-27.1	0.05514	1.0; 0.2643	1.086	1.937	1.284	1.237	1.711
	1.75	-35.1	0.12211	1.0; 0.77078	1.337	1.737	1.361	1.306	1.814
	2.0	-40.4	0.17652	0.66630; 1.0	1.572	1.571	1.436	1.374	1.913
	2.25	-46.5	0.21803	0.39661; 1.0	1.769	1.443	1.503	1.434	2.001
1	2.435	-54.3	0.25873	0.21625; 1.0	1.977	1.315	1.576	1.503	2.099
	2.5	-56.0	0.268959; 0.001834	0.19467; 1.0; 0.02823	2.028	1.286	1.595	1.520	2.124
	2.75	-62.3	0.306796; 0.010612	0.13072; 1.0; 0.16728	2.220	1.182	1.667	1.586	2.219
	3.0	-69.5	0.341554; 0.021288	0.08696; 1.0; 0.36218	2.401	1.090	1.738	1.652	2.314
	3.25	-75.2	0.367484; 0.031505	0.06557; 1.0; 0.60019	2.539	1.025	1.794	1.704	2.388
2	3.458	-82.8	0.398041; 0.045113	0.04356; 0.95577; 1.0	2.705	0.952	1.864	1.769	2.480
	3.5	-84.0	0.40277899; 0.04748434; 0.00006996	0.03803; 0.88492; 1.0; 0.00595	2.731	0.941	1.875	1.779	2.495
	3.75	-90.3	0.42773860; 0.06129859; 0.00081501	0.019757; 0.596572; 1.0; 0.058635	2.870	0.884	1.936	1.835	2.576
	4.0	-96.6	0.45086131; 0.07559469; 0.00211074	0.010909; 0.421097; 1.0; 0.138808	3.001	0.834	1.996	1.890	2.655
	4.25	-104.0	0.47350915; 0.09084447; 0.00397573	0.005817; 0.297347; 1.0; 0.252359	3.132	0.786	2.057	1.948	2.736
3	4.468	-110.3	0.49282384; 0.10522761; 0.00631417	0.003551; 0.225639; 1.0; 0.413876	3.247	0.746	2.112	1.999	2.809
	4.5	-111.3	0.495313376; 0.107158668; 0.006666335; 0.00002975	0.0033179; 0.2177466; 1.0; 0.4384317; 0.0007850	3.262	0.741	2.119	2.006	2.819
	4.75	-118.3	0.514792633; 0.122929690; 0.009863478; 0.000060250	0.00199133; 0.16405424; 1.0; 0.67159198; 0.01735968	3.380	0.703	2.178	2.060	2.896
	5.0	-124.4	0.530699562; 0.136789705; 0.013214709; 0.000189080	0.00132698; 0.13203449; 1.0; 0.93231327; 0.06123674	3.479	0.672	2.228	2.107	2.963
	5.25	-132.0	0.548698943; 0.153320562; 0.017706135; 0.000441607	0.00061157; 0.07616160; 0.75191907; 1.0; 0.12863633	3.594	0.638	2.288	2.163	3.042
4	5.474	-138.1	0.562647130; 0.166934261; 0.021915544; 0.000776821	0.00032712; 0.04810769; 0.57787656; 1.0; 0.20822929	3.685	0.613	2.336	2.208	3.106

Таблица 1. Окончание

$m$	$\beta N$	$P, \text{дБ}$	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_{\text{ш}}, \text{дБ}$	$\Pi_{\text{с}}, \text{дБ}$	$L_{\text{ш}}, N$	$L_{\text{с}}, N$	$L_6, N$
5	5.5	-138.7	0.5640743405; 0.1683730741; 0.0223905928; 0.0008210451; 0.0000001253	0.00030849; 0.04603945; 0.56308740; 1.0; 0.21844773; 0.00013329	3.694	0.610	2.341	2.212	3.113
	5.75	-145.2	0.5780904914; 0.1827938589; 0.0273609750; 0.0013376416; 0.0000041759	0.00016513; 0.02932924; 0.43635220; 1.0; 0.33317217; 0.00430657	3.787	0.585	2.392	2.260	3.180
	6.0	-152.5	0.5916983844; 0.1973890578; 0.0328241565; 0.0020205863; 0.0000164449	0.00008689; 0.01862753; 0.34029045; 1.0; 0.47896201; 0.01712107	3.880	0.561	2.444	2.308	3.249
	6.25	-158.6	0.6037580553; 0.2109347564; 0.0383618118; 0.0028495882; 0.0000422596	0.000051874; 0.012808508; 0.275968070; 1.0; 0.654374767; 0.046372402;	3.964	0.540	2.491	2.353	3.312
	6.479	-165.9	0.6159424941; 0.2250726221; 0.0445075887; 0.0038892163; 0.0000873430	0.000028885; 0.008487562; 0.221042494; 1.0; 0.877705148; 0.104735383	4.051	0.519	2.541	2.400	3.379
6	6.5	-166.5	0.616967309632; 0.226286992394; 0.045056176493; 0.003988936926; 0.000092455793; 0.00000005028	0.000027518; 0.008203692; 0.217008245; 1.0; 0.898998507; 0.111754782; 0.000024203	4.058	0.517	2.546	2.404	3.385
	6.75	-172.6	0.627353475820; 0.238871309260; 0.050979723660; 0.005152604250; 0.000163813680; 0.000000277780	0.0000152560; 0.0051935310; 0.1590400257; 0.8736336883; 1.0; 0.1901895797; 0.0013182214	4.134	0.500	2.590	2.445	3.444
	7.0	-180.0	0.638537680580; 0.252811254900; 0.057886280590; 0.006642547720; 0.000275760170; 0.000001363660	0.0000069338; 0.0027702675; 0.1009150757; 0.6776972773; 1.0; 0.2791150840; 0.0058998071	4.217	0.481	2.641	2.492	3.511
	7.25	-186.2	0.647521501514; 0.264372986204; 0.063951605021; 0.008090468632; 0.000408991852; 0.000003780598	0.0000037132; 0.0016923187; 0.0708666732; 0.5566583001; 1.0; 0.3750355528; 0.0157552123	4.285	0.467	2.682	2.531	3.566
	7.482	-192.9	0.657184295044; 0.277146794694; 0.070974687248; 0.009906885954; 0.000603159543; 0.000008955106	0.00000193847; 0.00100633047; 0.04859141577; 0.4511741059; 1.0; 0.50514735610; 0.03717395392	4.360	0.451	2.729	2.575	3.628

Таблица 2. Параметры синтезированных весовых функций со скоростью спада 24 дБ/окт

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_{\text{в}}, \text{дБ}$	$\Pi_{\text{с}}, \text{дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2.383	-39.3	1/3	0.0, 1.0	2.393	1.075	1.735	1.658	2.312
	1.5	-19.1	0.13115; -0.12131	0.0, 1.0; -0.6578	1.660	1.487	1.466	1.405	1.933
2*	1.75	-24.1	0.21378; -0.07172	0.0, 1.0; -0.5012	1.905	1.321	1.551	1.492	2.063
	2.0+	-29.6	0.27245; -0.03653	0.0, 1.0; -0.3211	2.126	1.201	1.631	1.566	2.175
	2.25	-35.7	0.31520; -0.01088	0.0, 1.0; -0.1176	2.309	1.113	1.702	1.629	2.269
	2.5	-42.7	0.347155; 0.008293	0.0; 1.0; 0.1085	2.458	1.046	1.761	1.682	2.347
2	2.75	-50.9	0.371500; 0.022900	0.0; 1.0; 0.3564	2.579	0.995	1.811	1.726	2.411
	3.0	-58.7	0.392015; 0.035209	0.0; 1.0; 0.6521	2.684	0.952	1.855	1.765	2.470
	3.25	-64.1	0.412220; 0.047332	0.0; 0.9273; 1.0	2.791	0.909	1.902	1.807	2.531
	3.447	-73.6	0.433925; 0.060355	0.0; 0.5473; 1.0	2.910	0.863	1.954	1.856	2.601
	3.5	-74.9	0.4386662; 0.0634786; 0.0001992	0.0; 0.49959; 1.0; 0.01283	2.936	0.853	1.966	1.867	2.617
	3.75	-81.6	0.4589009; 0.0774523; 0.0015084	0.0; 0.34666; 1.0; 0.09020	3.050	0.811	2.019	1.915	2.686
3	4.0	-88.9	0.4784857; 0.0918216; 0.0033787	0.0; 0.244531; 1.0; 0.198246	3.164	0.772	2.072	1.964	2.756
	4.25	-96.2	0.4952532; 0.1048802; 0.0055202	0.0; 0.18167; 1.0; 0.33334	3.263	0.739	2.120	2.008	2.820
	4.463	-103.2	0.5132429; 0.1197903; 0.0084604	0.0; 0.13512; 1.0; 0.55877	3.371	0.704	2.173	2.058	2.891
	4.5	-104.3	0.51567560; 0.12188832; 0.00892486; 0.00000658	0.0; 0.129988; 1.0; 0.595085; 0.001764	3.386	0.699	2.181	2.065	2.901
4	4.75	-112.1	0.532413207; 0.136726737; 0.012468238; 0.000098178	0.0; 0.0978396; 1.0; 0.8893966; 0.0301475	3.490	0.667	2.234	2.114	2.971
	5.0	-117.7	0.54640970; 0.14997284; 0.01617152; 0.00028506	0.0; 0.066132; 0.817136; 1.0; 0.083795	3.579	0.641	2.280	2.157	3.032
	5.25	-126.8	0.56300585; 0.16618507; 0.02106291; 0.00061473	0.0; 0.034286; 0.568937; 1.0; 0.158321	3.687	0.611	2.337	2.210	3.108
	5.472	-132.1	0.57477664; 0.17841108; 0.02526703; 0.00101597	0.0; 0.023184; 0.449254; 1.0; 0.252038	3.765	0.590	2.379	2.249	3.164

Таблица 2. Окончание

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$a_1, a_2, \dots, a_m (a_0 = 1)$	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$P_{\text{ш}}$ , дБ	$P_{\text{с}}$ , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$																																				
5	5.5	-132.9	0.576230078; 0.179948061; 0.025816580; 0.001074296; 0.000000243	0.0; 0.0220742; 0.4366251; 1.0; 0.2652463; 0.0002404	3.775	0.587	2.385	2.254	3.171																																				
										5.75	-140.3	0.589272170; 0.193981047; 0.031024258; 0.001683438; 0.000006351	0.0; 0.0137489; 0.3370448; 1.0; 0.3995320; 0.0062886	3.863	0.564	2.434	2.300	3.236																											
																			6.0	-146.8	0.601238182; 0.207405456; 0.036436947; 0.002444615; 0.000023240	0.0; 0.0091698; 0.2678560; 1.0; 0.5664229; 0.0240530	3.946	0.544	2.481	2.344	3.299																		
																												6.25	-154.1	0.6129045592; 0.2209501360; 0.0422786211; 0.0033933431; 0.0000569766	0.0; 0.00608961; 0.21467906; 1.0; 0.77683500; 0.06399407;	4.028	0.524	2.528	2.388	3.362									
																																					6.478	-161.4	0.624145570; 0.234426168; 0.048453274; 0.004523944; 0.000112428	0.0; 0.0039253; 0.1662332; 0.9647070; 1.0; 0.1368005;	4.110	0.505	2.576	2.433	3.425
6.75	-167.9	0.634660290466; 0.247526404675; 0.054900752862; 0.005876844417; 0.000203890436; 0.000000408700	0.00217850; 0.10708344; 0.74561794; 1.0; 0.21695245; 0.00178504	4.187	0.488	2.623	2.476	3.487																																					
									7.0	-176.2	0.645364209784; 0.261183943259; 0.061923792636; 0.007476676661; 0.000334065756; 0.000001853452	0.0; 0.001124650; 0.066970236; 0.576473909; 1.0; 0.316049202; 0.007557358	4.268	0.470	2.672	2.522	3.552																												
																		7.25	-181.5	0.653629587532; 0.272098252146; 0.067889411889; 0.008989487657; 0.000486120437; 0.000005024691	0.0; 0.000727915; 0.048383473; 0.478127735; 1.0; 0.424043351; 0.020247489	4.332	0.457	2.711	2.559	3.605																			
																											7.481	-189.0	0.662871463055; 0.284541970881; 0.074932122970; 0.010889024835; 0.000701737192; 0.000011329319	0.0; 0.000420654; 0.032783258; 0.386554350; 1.0; 0.567745382; 0.046402495	4.404	0.442	2.757	2.601	3.665										

Таблица 3. Параметры синтезированных весовых функций со скоростью спада 36 дБ/окт

$m$	$\beta N$	$P, \text{дБ}$	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_{\text{в}}, \text{дБ}$	$\Pi_{\text{с}}, \text{дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
2	3.397	-53.9	0.5; 0.1	0.0; 0.0; 1.0	3.293	0.721	2.135	2.029	2.842
	1.5	-15.2	0.20087; -0.19913; -0.08547	0.0; 0.0; 1.0; -0.8565	2.139	1.235	1.636	1.534	2.103
	1.75	-19.1	0.28406; -0.11594; -0.06170	0.0; 0.0; 1.0; -0.7811	2.321	1.095	1.706	1.632	2.249
	2.0	-23.3	0.34526; -0.05474; -0.04421	0.0; 0.0; 1.0; -0.6942	2.528	0.991	1.790	1.719	2.379
	2.25	-27.8	0.39108; -0.00892; -0.03112	0.0; 0.0; 1.0; -0.5958	2.721	0.912	1.871	1.796	2.493
	2.5	-32.6	0.426; 0.026; -0.02114	0.0; 0.0; 1.0; -0.48605	2.888	0.851	1.944	1.861	2.592
	2.75	-37.8	0.45309; 0.05309; -0.0134	0.0; 0.0; 1.0; -0.3649	3.029	0.803	2.008	1.918	2.677
	3.0	-43.5	0.47444; 0.07444; -0.0073	0.0; 0.0; 1.0; -0.23265	3.146	0.766	2.063	1.966	2.749
	3.25	-49.8	0.49152; 0.09152; -0.00242	0.0; 0.0; 1.0; -0.0894	3.244	0.736	2.110	2.008	2.810
	3.5	-57.0	0.505347407357; 0.105347407357; 0.001527830673	0.0; 0.0; 1.0; 0.0646	3.325	0.711	2.150	2.043	2.862
3	3.75	-65.5	0.516668206703; 0.116668206703; 0.004762344772	0.0; 0.0; 1.0; 0.2286	3.393	0.691	2.184	2.074	2.907
	4.0	-75.3	0.526255006384; 0.126255006384; 0.007501430395	0.0; 0.0; 1.0; 0.4069	3.452	0.674	2.214	2.100	2.946
	4.25	-80.3	0.536813458776; 0.136813458776; 0.010518131079	0.0; 0.0; 1.0; 0.6659	3.518	0.655	2.248	2.131	2.991
	4.455	-91.3	0.548519778485; 0.148519778485; 0.013862793853	0.0; 0.0; 0.9284; 1.0	3.592	0.634	2.287	2.167	3.042
	4.5	-92.3	0.550939245959; 0.151001558938; 0.014631961498; 0.000025963741	0.85564; 1.0; 0.00721	3.608	0.630	2.295	2.174	3.053
	4.75	-98.7	0.563203740676; 0.163807351359; 0.018812724975; 0.000251504451	0.0; 0.0; 0.58778; 1.0; 0.06079	3.687	0.608	2.337	2.213	3.109
	5.0	-106.9	0.574102067700; 0.175490351995; 0.022907374712; 0.000578451790;	0.0; 0.0; 0.43439; 1.00000; 0.13071	3.759	0.589	2.377	2.249	3.161
	5.25	-114.5	0.585765946848; 0.188268221877; 0.027632400028; 0.001042614595	0.0; 0.0; 0.31498; 1.0; 0.22853	3.838	0.569	2.420	2.289	3.218
	5.467	-121.9	0.596431521455; 0.200359607270; 0.032461970541; 0.001636702423	0.0; 0.0; 0.244151; 1.0; 0.369216	3.911	0.551	2.461	2.327	3.273
	3*	3.397	-53.9	0.5; 0.1	0.0; 0.0; 1.0	3.293	0.721	2.135	2.029
1.5		-15.2	0.20087; -0.19913; -0.08547	0.0; 0.0; 1.0; -0.8565	2.139	1.235	1.636	1.534	2.103
1.75		-19.1	0.28406; -0.11594; -0.06170	0.0; 0.0; 1.0; -0.7811	2.321	1.095	1.706	1.632	2.249
2.0		-23.3	0.34526; -0.05474; -0.04421	0.0; 0.0; 1.0; -0.6942	2.528	0.991	1.790	1.719	2.379
2.25		-27.8	0.39108; -0.00892; -0.03112	0.0; 0.0; 1.0; -0.5958	2.721	0.912	1.871	1.796	2.493
2.5		-32.6	0.426; 0.026; -0.02114	0.0; 0.0; 1.0; -0.48605	2.888	0.851	1.944	1.861	2.592
2.75		-37.8	0.45309; 0.05309; -0.0134	0.0; 0.0; 1.0; -0.3649	3.029	0.803	2.008	1.918	2.677
3.0		-43.5	0.47444; 0.07444; -0.0073	0.0; 0.0; 1.0; -0.23265	3.146	0.766	2.063	1.966	2.749
3.25		-49.8	0.49152; 0.09152; -0.00242	0.0; 0.0; 1.0; -0.0894	3.244	0.736	2.110	2.008	2.810
3.5		-57.0	0.505347407357; 0.105347407357; 0.001527830673	0.0; 0.0; 1.0; 0.0646	3.325	0.711	2.150	2.043	2.862

Таблица 3. Окончание

$m$	$\beta N$	$P, \text{ дБ}$	$a_1, a_2, \dots, a_m, (a_0 = 1)$	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_{\text{вр}}, \text{ дБ}$	$\Pi_{\text{сп}}, \text{ дБ}$	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
5	5.5	-122.8	0.597938951700; 0.2020950595904; 0.033179258659; 0.001733855837; 0.000000774213	0.0; 0.0; 0.2356059; 1.0; 0.3919306; 0.0007035	3.922	0.548	2.467	2.333	3.281
			0.608708478312; 0.214684664621; 0.038556866781; 0.002527973758; 0.000013780411	0.0; 0.0; 0.1825068; 1.0; 0.5792031; 0.0134349	3.997	0.530	2.510	2.373	3.338
	6.0	-137.0	0.618285580334; 0.226242294827; 0.043826782661; 0.003434310934; 0.000043277537	0.0; 0.0; 0.1492498; 1.0; 0.7983319; 0.0467165	4.066	0.514	2.550	2.410	3.391
			0.629076744455; 0.239554448126; 0.050169523055; 0.004636362933; 0.000098419298	0.0; 0.0; 0.105018; 0.898537; 1.0; 0.110778	4.145	0.496	2.597	2.454	3.453
	6.475	-152.3	0.637673313868; 0.250478662198; 0.055680899516; 0.005810136002; 0.000172572436	0.0; 0.0; 0.068669; 0.701899; 1.0; 0.176462	4.209	0.482	2.636	2.489	3.504
			0.638544551881; 0.251604214434; 0.056266558304; 0.005942518708; 0.000182226006; 0.000000023792	0.0; 0.0; 0.0659848; 0.6852333; 1.0; 0.1847067; 0.0000966	4.215	0.481	2.640	2.493	3.510
	6.75	-159.8	0.647616884736; 0.263440584994; 0.062543100551; 0.007416726274; 0.000301059220; 0.000000811389	0.0; 0.0; 0.0429403; 0.5358940; 1.0; 0.2794844; 0.0031224	4.284	0.466	2.682	2.532	3.566
			0.656541320103; 0.275344257363; 0.069119057918; 0.009085115791; 0.000461050581; 0.000003199476	0.0; 0.0; 0.0279873; 0.4228402; 1.0; 0.3974463; 0.0121263	4.353	0.452	2.725	2.573	3.623
	7.25	-174.0	0.664395291371; 0.286096213998; 0.075344390566; 0.010803678448; 0.000656741431; 0.000008199061	0.0; 0.0; 0.0198776; 0.3482618; 1.0; 0.5351088; 0.0318994	4.415	0.439	2.764	2.609	3.675
			0.672625719233; 0.297566975689; 0.082202541632; 0.012807960164; 0.000912209741; 0.000017133566	0.0; 0.0; 0.01354186; 0.28266748; 1.0; 0.70945614; 0.07052057	4.481	0.426	2.806	2.649	3.731

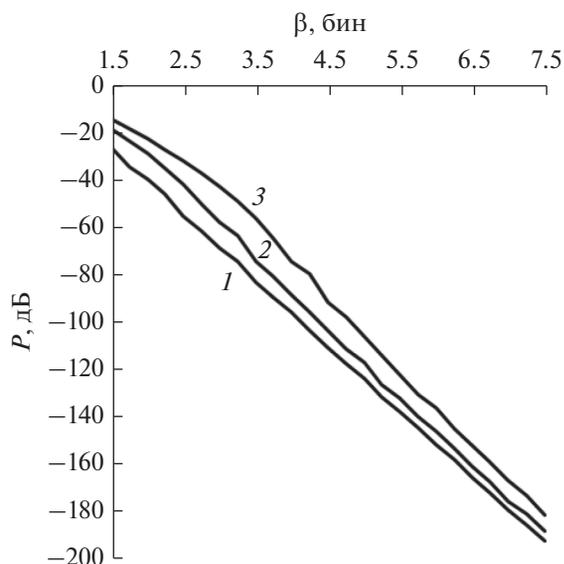


Рис. 1. Зависимости уровня  $P$  максимального бокового лепестка от параметра  $\beta$  для оптимальных функций со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3).

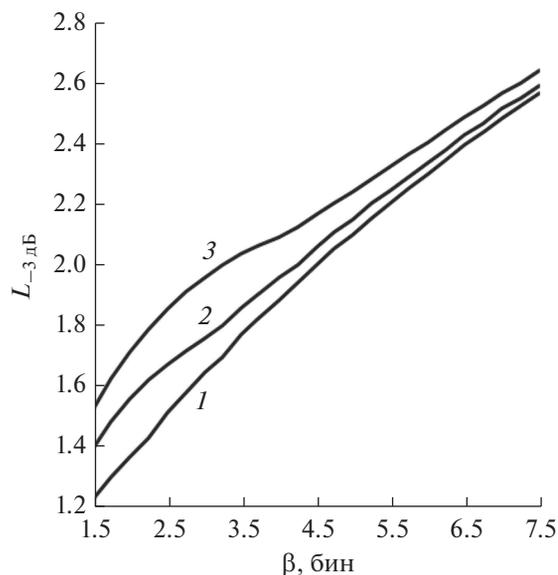


Рис. 2. Зависимость ширины главного лепестка по уровню  $-3$  дБ от параметра  $\beta$  для оптимальных функций со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3).

вестной весовой функции  $\cos^5(\pi t/N)$ . Функции с параметром  $m = 3^*$  являются нерегулярными.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СИНТЕЗА

Проанализируем характеристики синтезированных оптимальных весовых функций. На рис. 1 приведена зависимость уровня  $P$  максимального бокового лепестка от параметра  $\beta$  для функций с разными скоростями спада лепестков. Как и следовало ожидать, при прочих равных условиях увеличение скорости спада лепестков приводит к увеличению уровня максимального бокового лепестка. Области кривых с сильной нелинейностью соответствуют нерегулярным функциям.

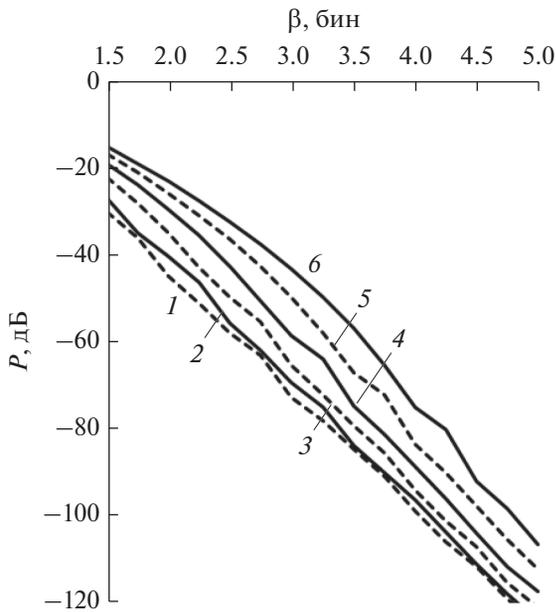
При увеличении  $\beta$  происходит сближение рассматриваемых зависимостей. В области регулярных функций все три кривые могут быть хорошо аппроксимированы прямыми линиями, отклонения от которых имеют случайный вид. Средний наклон аппроксимирующих прямых для представленных зависимостей составляет для функций со спадом 12, 24 и 36 дБ/окт соответственно 26.7, 28.4 и 30.4 дБ на 1 бин параметра  $\beta$ . Различный наклон приводит к тому, что линии сближаются по мере увеличения  $\beta$ . Например, для функций со скоростью спада лепестков 12 и 36 дБ/окт разница в уровнях максимального лепестка при  $\beta = 3.0$  бин составляет 27 дБ, а при  $\beta = 7.0$  бин – всего 11 дБ.

Сближение кривых по мере увеличения  $\beta$  наблюдается и для других параметров анализируемых функций. На рис. 2 для рассматриваемых се-

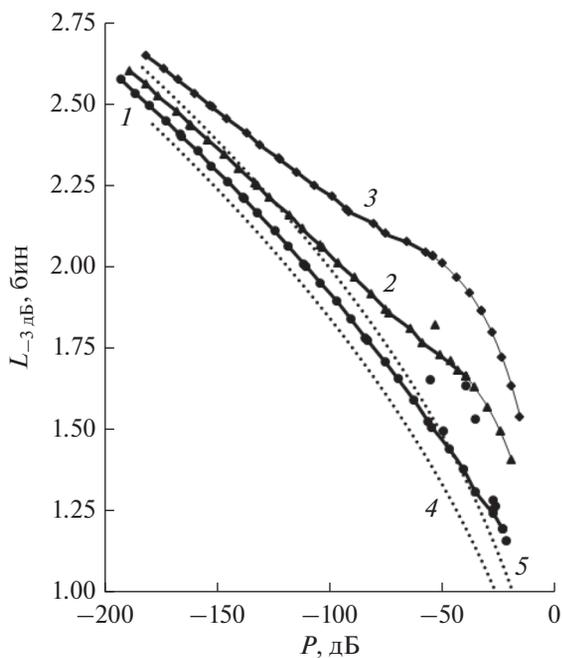
мейств приведена зависимость ширины главного лепестка по уровню  $-3$  дБ от параметра  $\beta$ . Здесь также участки кривых с сильной нелинейностью соответствуют нерегулярным функциям, а кривые сближаются по мере увеличения  $\beta$ , поэтому при низких уровнях боковых лепестков “плата” за увеличение скорости спада довольно мала.

В данной статье разработаны оптимальные функции, имеющие в представлении (7) вид отрезка ряда по нечетным степеням функции  $\cos(\pi t/N)$  со скоростями спада лепестков спектра  $V = 12n$  дБ/окт ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ранее [7–9] были разработаны оптимальные по рассматриваемому чебышевскому критерию весовые функции вида (1), имеющие в альтернативной записи вид отрезка ряда по четным степеням той же функции  $\cos(\pi t/N)$  со скоростями спада лепестков спектра  $V = (12n - 6)$  дБ/окт ( $n = 1, 2, \dots$ ). На рис. 3 приведены зависимости уровня максимального лепестка от параметра  $\beta$  для функций, полученных в данной работе (сплошные линии) и в работах [7–9] (пунктир). На рисунке представлен ограниченный диапазон изменения параметров с целью увеличения масштаба во избежание слияния линий. Кривые для одной системы функций расположены посередине между кривыми для другой системы. Таким образом, указанные семейства оптимальных функций дополняют друг друга и могут рассматриваться как одна система, дающая возможность выбрать наиболее подходящее для конкретной задачи сочетание параметров и  $V$ ,  $P$  и  $\beta$ .

Для определения места синтезированных функций среди известных аналогичных функций



**Рис. 3.** Зависимости уровня  $P$  максимального бокового лепестка от параметра  $\beta$  для оптимальных функций, представленных суммой четных (пунктир) и нечетных (сплошные линии) степеней функции  $\cos(\pi/N)$  и имеющих скорость спада лепестков 6 (1), 12 (2), 18 (3), 24 (4), 30 (5) и 36 дБ/окт (6).



**Рис. 4.** Сравнение зависимостей ширины главного лепестка по уровню  $-3$  дБ от уровня  $P$  максимального бокового лепестка для синтезированных (сплошные кривые 1–3) и известных весовых функций [1, 2] (точки 1–3) со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3), а также для функций Дольфа–Чебышева, 0 дБ/окт, (4) и Кайзера–Бесселя, 6 дБ/окт (5).

необходимо сравнить их характеристики. Однако рассматриваемые скорости спада лепестков являются довольно редкими. Тем не менее на рис. 4 приводятся зависимости ширины главного лепестка от уровня максимального бокового для функций данной работы (сплошные линии 1–3) и для функций из работ [1, 2] (отдельные точки 1–3) со скоростями спада лепестков 12 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3). Более тонкие части непрерывных линий соответствуют нерегулярным функциям. Как видим, точки 1–3 известных функций находятся выше соответствующих кривых для новых функций и, следовательно, их характеристики ниже. Там же приведены соответствующие зависимости для функций Дольфа–Чебышева (кривая 4) и Кайзера–Бесселя (5) [1, 2]. Эти функции не принадлежат к рассматриваемому классу функций с высокой скоростью спада лепестков и приведены лишь для ориентировки. Их асимптотическая скорость спада составляет 0 дБ/окт для кривой 4 и 6 дБ/окт для кривой 5, поэтому эти функции должны обладать более высокими характеристиками по сравнению с функциями данной работы. Однако это превосходство невелико, а для кривой 5 при малом уровне лепестков характеристики даже ниже, чем для синтезированных функций со скоростями спада 12 и 24 дБ/окт.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимо сделать несколько замечаний по использованию рассматриваемых весовых функций. Введение весовой функции может осуществляться как во временной, так и в частотной областях. При введении во временной области перед вычислением спектра с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [3] выборки анализируемого сигнала умножаются на выборки весовой функции. При этом в ряде приложений необходимо произвести вычисление выборок весовой функции в реальном масштабе времени. Такими приложениями обусловлена необходимость простого представления весовой функции, реализованная в данной работе. В этих случаях представление (7) имеет преимущество перед представлением (5), так как требует меньшего числа арифметических операций. Количественно это преимущество зависит от используемой аппаратной платформы. Например, если тригонометрические функции необходимо вычислять, то выигрыш значительный. Если же в устройстве хранится таблица гармонических функций большого объема, то выигрыш невелик.

Так как перемножение во временной области перед ДПФ эквивалентно круговой свертке их спектров [3], то введение весовой функции можно осуществить в частотной области. Рассмотрим сначала ДПФ с количеством точек вычисления спектра, увеличенным до  $sN$ , где  $s$  – четное целое

число. Увеличение числа точек является стандартным методом для более точной обрисовки спектра. При этом  $N$  выборок сигнала дополняются необходимым количеством нулевых отсчетов. Количество отсчетов весовой функции также увеличим до  $sN$  путем ее продолжения по формуле (5). Тогда частоты базовых функций в (5) совпадут с частотами ортогональных дискретных гармонических функций, по которым ведется разложение при ДПФ. Поэтому каждая базисная функция из (5) с номером  $k$  будет иметь в дискретном спектре всего два ненулевых отсчета с номерами  $s(k + 0.5)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , а полное число ненулевых отсчетов составит  $2(m + 1)$ . При малом порядке весовой функции  $m \ll N$  вычисление свертки оказывается весьма эффективным.

Отметим теперь, что группы отсчетов с одинаковыми номерами по модулю  $s$  обрабатываются при вычислении свертки независимо. Группа с нулевым номером представляет отсчеты ДПФ порядка  $N$ . Поэтому описанная операция реализуема и без увеличения порядка ДПФ.

Таким образом, разработанный в данной статье метод синтеза оптимальных весовых функций с достаточно редкими скоростями спада лепестков позволяет не только существенно расширить диапазон параметров  $V$ ,  $P$  и  $\beta$  для выбора наиболее подходящей функции для конкретного примене-

ния, но и обеспечить эффективное вычисление предложенных весовых функций как во временной, так и в частотной областях в реальном масштабе времени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэррис Ф.Дж. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 60.
2. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
3. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
4. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978.
5. Nuttall A.H. // IEEE Trans. 1981. V. ASSP-29. № 1. P. 84.
6. Albrecht H.-H. // Proc. Conf. ICASSP-01. Salt Lake City, 2001. N.Y.: IEEE, 2001. V. 5. P. 3081.
7. Зайцев Г.В. // Радиотехника. 2011. № 3. С. 21.
8. Зайцев Г.В. // Радиотехника. 2012. № 1. С. 55.
9. Хзмалян А.Д. // Вестник ВКО. 2018. № 4. С. 90.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.37,621.391.82

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА РАО–КРАМЕРА ДИСПЕРСИЙ  
СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СМЕСИ УЗКОПОЛОСНОГО  
И ШИРОКОПОЛОСНОГО СИГНАЛОВ С БЕЛЫМ ШУМОМ

© 2020 г. В. Н. Жураковский<sup>а</sup>, \*, А. С. Логвиненко<sup>а</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Москва, Российская Федерация

\*E-mail: vnzh521@yandex.ru

\*\*E-mail: anna.logvinenko.bmstu@mail.ru

Поступила в редакцию 07.09.2018 г.

После доработки 27.11.2018 г.

Принята к публикации 17.01.2019 г.

Решена задача определения минимума дисперсий совместных оценок параметров сигнала, представляющего смесь узкополосного и широкополосного сигналов и белого гауссовского шума, представленных в виде комплексного суммарного сигнала. Получено выражение для расчета элементов матрицы Фишера, необходимой для установления нижней границы Рао–Крамера. Приведены графики зависимости среднеквадратических отклонений оценок (СКО) от отношения сигнал/шум, длины выборки и от исходных параметров сигнала – центральных частот составляющих сигнала, ширины широкополосной составляющей. Проведено сравнение с минимальными СКО, полученными для модели сигнала, включающей только широкополосную составляющую. Проведен анализ полученных результатов, позволяющий оценить требования, которые могут быть предъявлены к разрабатываемым алгоритмам совместной оценки параметров смеси сигналов рассматриваемого типа, в зависимости от установленных значений частоты дискретизации и объема выборки.

DOI: 10.31857/S0033849420040129

ВВЕДЕНИЕ

При синтезе различных алгоритмов цифровой обработки сигналов, разработчикам часто приходится сталкиваться с проблемой определения параметров смеси узкополосного (УП) и широкополосного (ШП) сигналов [1, 2]. В радиолокации, в частности, к таким алгоритмам можно отнести спектральные алгоритмы селекции движущихся целей (СДЦ) на фоне пассивных широкополосных помех [3–9]. Среди многообразия таких алгоритмов СДЦ существует класс адаптивных [6–9], составляющей частью которых в том или ином виде является оценка параметров сигнала со спектром Доплера от точечной цели (спектр Доплера которой – узкополосный сигнал на частоте, соответствующей скорости цели) и широкополосной помехи. В зависимости от типа радиолокационных систем (РЛС) (обзора, обнаружения, целеуказания) и их назначения в вектор оцениваемых информативных параметров включаются разные составляющие и предъявляются различные требования к точности его оценки [10–13].

С развитием информационных технологий для решения перечисленных типов задач продолжают разрабатываться новые, более совершен-

ные алгоритмы оценки. Однако для выдвижения корректных требований к синтезируемым алгоритмам необходимо знать потенциальную точность оценки параметров сигналов рассматриваемого типа. Одним из методов установления предела достижимой точности оценок является нахождение границ Рао–Крамера (ГРК) [14].

В отечественной и зарубежной литературе выражения нижней границы Рао–Крамера для рассматриваемых типов сигналов приводятся для различных комбинаций составляющих вектора оцениваемых параметров, однако, как правило, ГРК вычисляется либо для узкополосных, либо для широкополосных сигналов в отдельности [15–18]. Также в приведенных статьях часто в качестве модели сигналов используются вещественные сигналы, вычисление же ГРК для комплексных сигналов приводится редко в виду более сложной процедуры вывода итоговых выражений. В связи с этим целью данной работы являлось установление нижней границы Рао–Крамера совместных оценок смеси узкополосного и широкополосного сигналов, представленных в комплексном виде. В качестве информационных параметров были вы-

браны: центральная частота и ширина спектра ШП сигнала и частота УП сигнала.

## 1. МОДЕЛЬ СИГНАЛА

Модель рассматриваемого сигнала представляет собой широкополосный сигнал:

$$s(n) = s_B(n) + s_N(n),$$

где  $n$  – номер дискретного отсчета сигнала,

$$s_B(n) = A_B \int_{-W_B/2}^{W_B/2} \exp(j2\pi t_d n (F_B + w)) dw \quad (1)$$

– модель ШП-сигнала ( $A_B$  – спектральная плотность ШП-сигнала,  $F_B$  – центральная частота спектра ШП-сигнала,  $\Gamma_c$ ,  $W_B$  – ширина спектра сигнала,  $\Gamma_c$ ,  $t_d$  – период дискретизации,  $c$ ),

$$s_N(n) = A_N \exp(j2\pi t_d n F_N),$$

– модель УП-сигнала ( $A_N$  – амплитуда УП-сигнала,  $F_N$  – частота УП-сигнала,  $\Gamma_c$ ).

Модель наблюдения имеет вид

$$x(n) = s(n) + w(n),$$

где  $x(n)$  – наблюдаемый комплексный сигнал,  $w(n)$  – комплексный белый гауссовый шум. Представим модель наблюдения в векторном виде

$$\vec{x} = \vec{s} + \vec{w}, \quad (2)$$

где  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_K]^T$ ,  $\vec{s} = [s_1, \dots, s_K]^T$ ,  $\vec{w} = [w_1, \dots, w_K]^T$ ,  $K$  – длина выборки.

## 2. ВЫВОД НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ РАО–КРАМЕРА

Для определения потенциальной точности совместной оценки центральной частоты и ширины спектра ШП-сигнала и частоты УП-сигнала (2) воспользуемся многомерным неравенством Рао–Крамера, устанавливающим нижнюю границу для матрицы ковариаций несмещенной оценки [15]:

$$\mathbf{cov}_{\vec{\xi}}(\vec{\xi}) \geq [\mathbf{I}(\vec{\xi})]^{-1},$$

где  $\vec{\xi}$  – вектор оцениваемых параметров,  $\vec{\xi}$  – несмещенная оценка вектора параметров  $\vec{\xi}$ ,  $\mathbf{I}(\vec{\xi})$  – информационная матрица Фишера,  $[\mathbf{I}(\vec{\xi})]^{-1}$  – матрица, обратная к матрице Фишера.

Для случая совместной оценки центральной частоты широкополосного сигнала ( $F_B$ ), ширины его спектра ( $W_B$ ) и частоты УП-сигнала ( $F_N$ ) ниж-

няя граница ковариационной матрицы рассчитывается следующим образом:

$$\mathbf{cov}_{\vec{\xi}_{\min}}(\vec{\xi}) = [\mathbf{I}(\vec{\xi})]^{-1}, \quad (3)$$

где

$$\vec{\xi} = [F_B, W_B, F_N]^T. \quad (4)$$

Соответственно, минимальные дисперсии оценок являются элементами главной диагонали матрицы, определяемой выражением (3):

$$D_{\min}(\vec{\xi}_m) = [\mathbf{cov}_{\vec{\xi}_{\min}}(\vec{\xi})]_{mm} = [\mathbf{I}(\vec{\xi})]_{mm}^{-1}, \quad (5)$$

где  $m = 1, \dots, M$  ( $M$  – размерность вектора параметров).

Найдем информационную матрицу Фишера  $\mathbf{I}(\vec{\xi})$ . Элементы матрицы Фишера для комплексного сигнала  $\vec{x}$ , представленного моделью (2), и для вектора оцениваемых параметров  $\vec{\xi}$  (4) рассчитываются следующим образом [15]:

$$[\mathbf{I}(\vec{\xi})]_{ij} = \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^K \frac{\partial s^*(n)}{\partial \xi_i} \frac{\partial s(n)}{\partial \xi_j} \right], \quad (6)$$

где  $\operatorname{Re}$  – знак вещественной части,  $s^*(n)$  – сопряженное к  $s(n)$  выражение.

Найдем частные производные от  $s(n)$  по составляющим вектора параметров  $\vec{\xi}$ .

Перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} s_B(n) &= A_B \int_{-W_B/2}^{W_B/2} \exp(j2\pi t_d n (F_B + w)) dw = \\ &= \frac{-2A_B j}{C_n} \exp(jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right), \end{aligned}$$

где  $C_n = 2\pi t_d n$ .

Частные производные от  $s(n)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s(n)}{\partial F_B} &= \frac{\partial s_B(n)}{\partial F_B} = 2A_B \exp(jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right), \\ \frac{\partial s(n)}{\partial W_B} &= \frac{\partial s_B(n)}{\partial W_B} = -A_B j \exp(jC_n F_B) \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right), \\ \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} &= \frac{\partial s_N(n)}{\partial F_N} = jC_n A_N [\exp(jC_n F_N)]. \end{aligned}$$

Теперь найдем частные производные от  $s^*(n)$ . Выражение для  $s^*(n)$  имеет вид

$$s^*(n) = s_B^*(n) + s_N^*(n),$$

где

$$s_B^*(n) = \frac{2A_B j}{C_n} \exp(-jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right),$$

$$s_N^*(n) = A_N \exp(-jC_n F_N).$$

Далее находим частные производные от  $s^*(n)$ :

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} = \frac{\partial s_B^*(n)}{\partial F_B} = 2A_B \exp(-jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right),$$

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial W_B} = \frac{\partial s_B^*(n)}{\partial W_B} = A_B j \exp(-jC_n F_B) \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right),$$

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial F_N} = \frac{\partial s_N^*(n)}{\partial F_N} = -jC_n A_N \exp(-jC_n F_N).$$

Таким образом, можем найти произведения соответствующих производных, использующихся для расчета элементов матрицы Фишера (6):

1) для элементов главной диагонали матрицы Фишера –

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} \frac{\partial s(n)}{\partial F_B} = 2A_B \exp(-jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \times$$

$$\times 2A_B \exp(jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) = 4A_B^2 \left[ \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \right]^2,$$

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial W_B} \frac{\partial s(n)}{\partial W_B} = jA_B \exp(-jC_n F_B) \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \times$$

$$\times jC_n A_N \exp(jC_n F_N) \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) =$$

$$= A_B^2 \left[ \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \right]^2,$$

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial F_N} \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} = -jC_n A_N \exp(-jC_n F_N) \times$$

$$\times jC_n A_N \exp(jC_n F_N) = C_n^2 A_N^2$$

2) для остальных элементов матрицы Фишера –

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} \frac{\partial s(n)}{\partial W_B} = 2A_B \exp(-jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \times$$

$$\times A_B j \exp(jC_n F_B) \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) = A_B^2 j \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right),$$

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} = 2A_B \exp(-jC_n F_B) \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \times$$

$$\times jC_n A_N \exp(jC_n F_N) =$$

$$= jC_n A_N A_B \exp[jC_n (F_N - F_B)] \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right),$$

$$\frac{\partial s^*(n)}{\partial W_B} \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} = A_B j \exp(-jC_n F_B) \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \times$$

$$\times jC_n A_N \exp(jC_n F_N) =$$

$$= -C_n A_N A_B \exp[jC_n (F_N - F_B)] \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right).$$

Тогда элементы главной диагонали матрицы Фишера (6) соответственно будут равны:

$$[\mathbf{I}(\xi)]_{11} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} \frac{\partial s(n)}{\partial F_B} \right] =$$

$$= \frac{8A_B^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \left[ \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \right]^2,$$

$$[\mathbf{I}(\xi)]_{22} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial s^*(n)}{\partial W_B} \frac{\partial s(n)}{\partial W_B} \right] =$$

$$= \frac{2A_B^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \left[ \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \right]^2,$$

$$[\mathbf{I}(\xi)]_{33} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial s^*(n)}{\partial F_N} \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} \right] = \frac{2A_N^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n^2,$$

остальные элементы матрицы Фишера:

$$[\mathbf{I}(\xi)]_{12} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} \frac{\partial s(n)}{\partial W_B} \right] = 0,$$

$$[\mathbf{I}(\xi)]_{13} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial s^*(n)}{\partial F_B} \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} \right] =$$

$$= \frac{-2A_N A_B}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n \sin[C_n (F_N - F_B)] \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right),$$

$$[\mathbf{I}(\xi)]_{23} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial s^*(n)}{\partial W_B} \frac{\partial s(n)}{\partial F_N} \right] = \frac{-2A_N A_B}{\sigma^2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^K C_n \cos[C_n (F_N - F_B)] \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right).$$

Матрица Фишера имеет вид

$$[\mathbf{I}(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{8A_B^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \left[ \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \right]^2 & 0 & \frac{-2A_N A_B}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n \sin[C_n (F_N - F_B)] \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \\ 0 & \frac{-2A_B^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K \left[ \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \right]^2 & \frac{-2A_N A_B}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n \cos[C_n (F_N - F_B)] \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) \\ \frac{-2A_N A_B}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n \sin[C_n (F_N - F_B)] \sin\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) & \frac{-2A_N A_B}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n \cos[C_n (F_N - F_B)] \cos\left(C_n \frac{W_B}{2}\right) & \frac{2A_N^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^K C_n^2 \end{bmatrix}$$

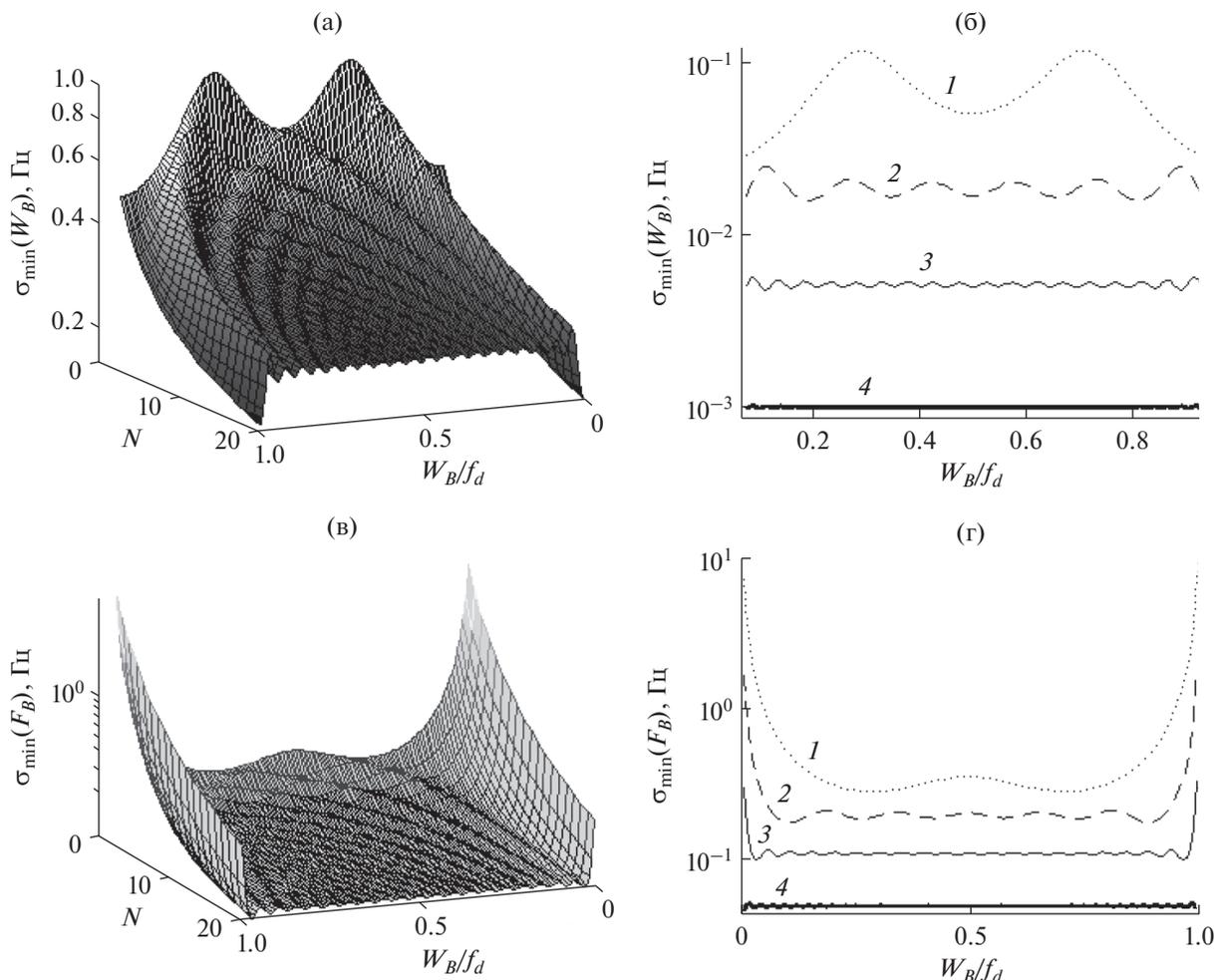


Рис. 1. Зависимость ГРК оценки ширины помехи (а, б) и центральной частоты (в, г) от объема выборки и отношения ширины помехи к частоте дискретизации выборки при  $K = 2$  (1), 6 (2), 20 (3) и 100 (4).

Используя полученное выражение, а также (4), (5), можем рассчитать минимальные среднеквадратические отклонения (СКО) оценок параметров:

$$\sigma_{\theta_{\min}}(F_B) = [\mathbf{I}(\bar{\xi})]_{11}^{-1} = \sqrt{\frac{M_{11}}{\det(\mathbf{I}(\bar{\xi}))}},$$

$$\sigma_{\theta_{\min}}(W_B) = [\mathbf{I}(\bar{\xi})]_{22}^{-1} = \sqrt{\frac{M_{22}}{\det(\mathbf{I}(\bar{\xi}))}},$$

$$\sigma_{\theta_{\min}}(F_N) = [\mathbf{I}(\bar{\xi})]_{33}^{-1} = \sqrt{\frac{M_{33}}{\det(\mathbf{I}(\bar{\xi}))}}.$$

Для проверки правильности выведенных формул были сделаны аналогичные описанным выше преобразования в среде MATLAB с использованием пакета символьных вычислений [19]. Однако скорость вычислений в символьном виде значительно ниже. Поэтому путем численного моделирования было проведено сравнение результатов двух способов вычисления и была подтверждена корректность полученных аналитически формул.

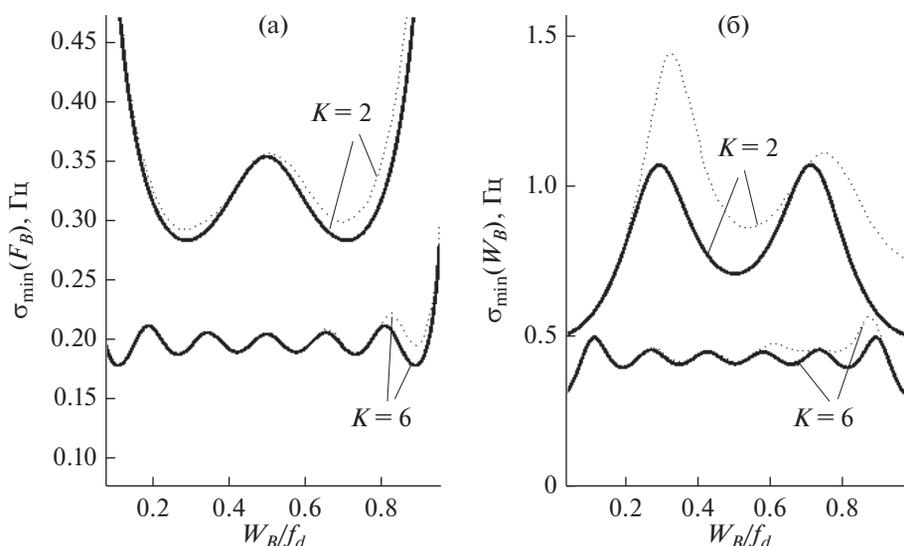
### 3. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ГРК ОТ ПАРАМЕТРОВ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Для упрощения понимания влияния различных параметров входного сигнала на значения минимальных СКО оценок сначала рассмотрим ГРК ШП-составляющей отдельно, а затем совместную ГРК с учетом наличия УП-составляющей в смеси.

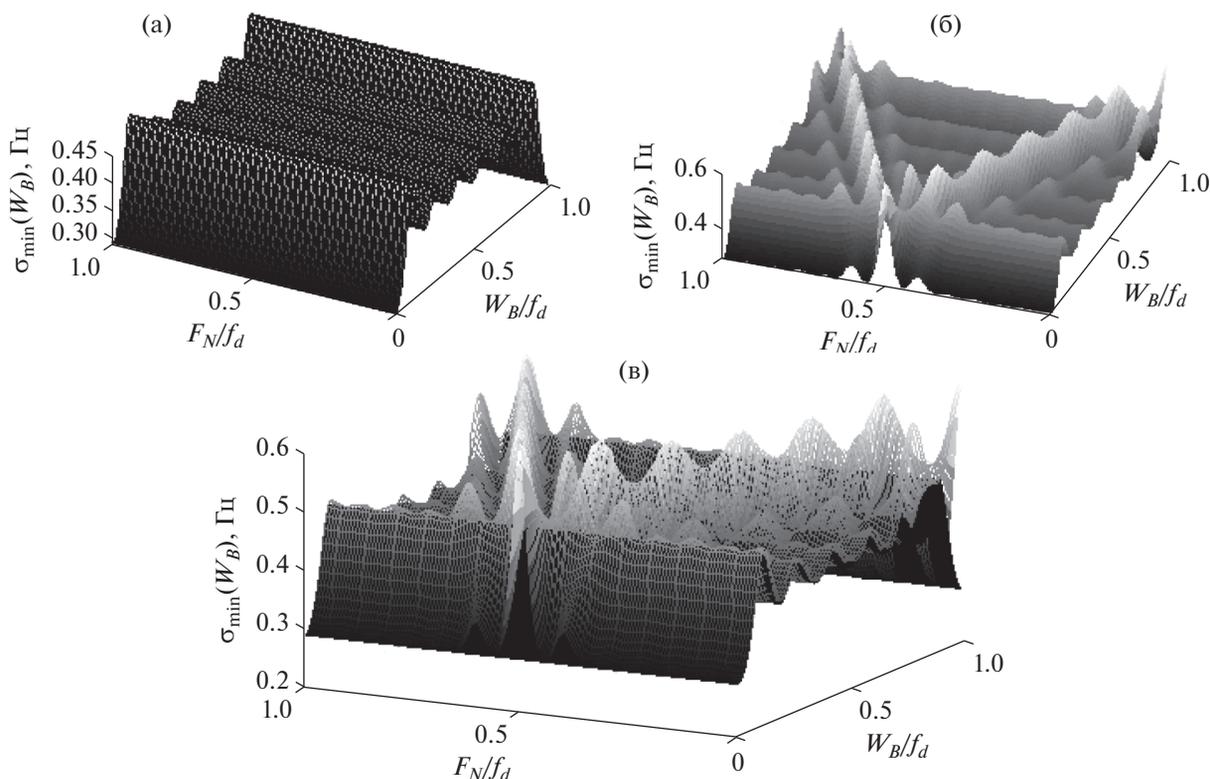
Рассмотрим ГРК оценки параметров помехи. Минимальные СКО оценок ширины и центральной частоты помехи для этого случая определяются следующими выражениями [20]:

$$\sigma_{\min}(F_B) = \frac{1}{2q^* \sqrt{\left[ K - \sum_{n=1}^K (\cos(2\pi n W_B / f_d)) \right]}},$$

$$\sigma_{\min}(W_B) = \frac{1}{q^* \sqrt{\left[ K + \sum_{n=1}^K (\cos(2\pi n W_B / f_d)) \right]}}.$$



**Рис. 2.** Зависимость ГРК параметров помехи от  $W/f_d$  при малых объемах выборки в случае совместной оценки как только параметров помехи (сплошные кривые), так и параметров суммарного сигнала (пунктирные) при  $q = 1$ ,  $F_N = 100$  Гц,  $F_B = 700$  Гц. На правом рисунке – увеличенный масштаб оси ординат.



**Рис. 3.** Зависимость ГРК оценки от  $W_B/f_d$  при малых объемах выборки в случае совместной оценки только параметров помехи (а), и параметров суммарного сигнала (б) при  $q = 1$ ,  $K = 6$ ,  $F_B/f_d = 0.5$ , (в) – совместный график зависимостей, изображенных на рис. (а) – черный фон и рис. (б) – серый фон.

Таким образом, можем рассмотреть зависимости от трех параметров исходного сигнала:  $q$  – отношения сигнал/шум,  $K$  – объема выборки,  $W_B/f_d$  – отношения ширины сигнала к частоте дискретизации.

На рис. 1а–1г приведены полученные в среде MATLAB зависимости минимальных СКО оцен-

ки параметров помехи ( $\sigma_{\min}(F_B)$  и  $\sigma_{\min}(W_B)$ ) от  $K$  и  $W_B/f_d$  при  $q = 1$ .

Как видно из рисунков, влияние отношения ширины помехи к частоте дискретизации ( $W_B/f_d$ ) на величину минимального значения СКО оценки параметров помехи незначительно

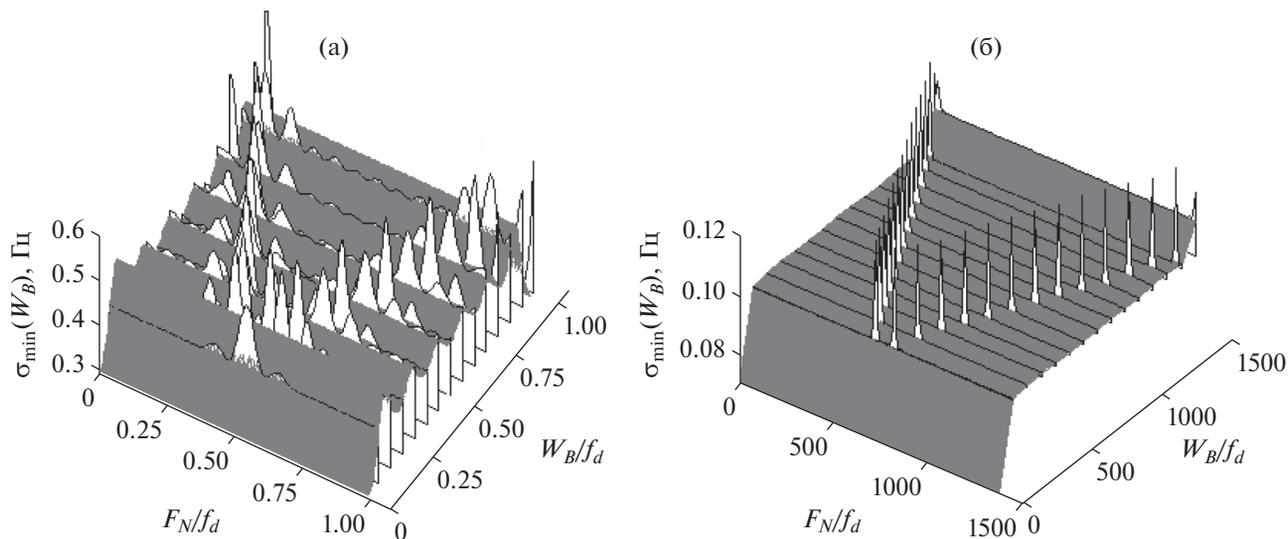


Рис. 4. Зависимость ГРК оценки от  $W_B/f_d$  и  $F_N/f_d$  при  $N = 6$  (а) и  $100$  (б) в случае совместной оценки как только параметров помехи (темный фон), так и параметров суммарного сигнала (светлый фон).

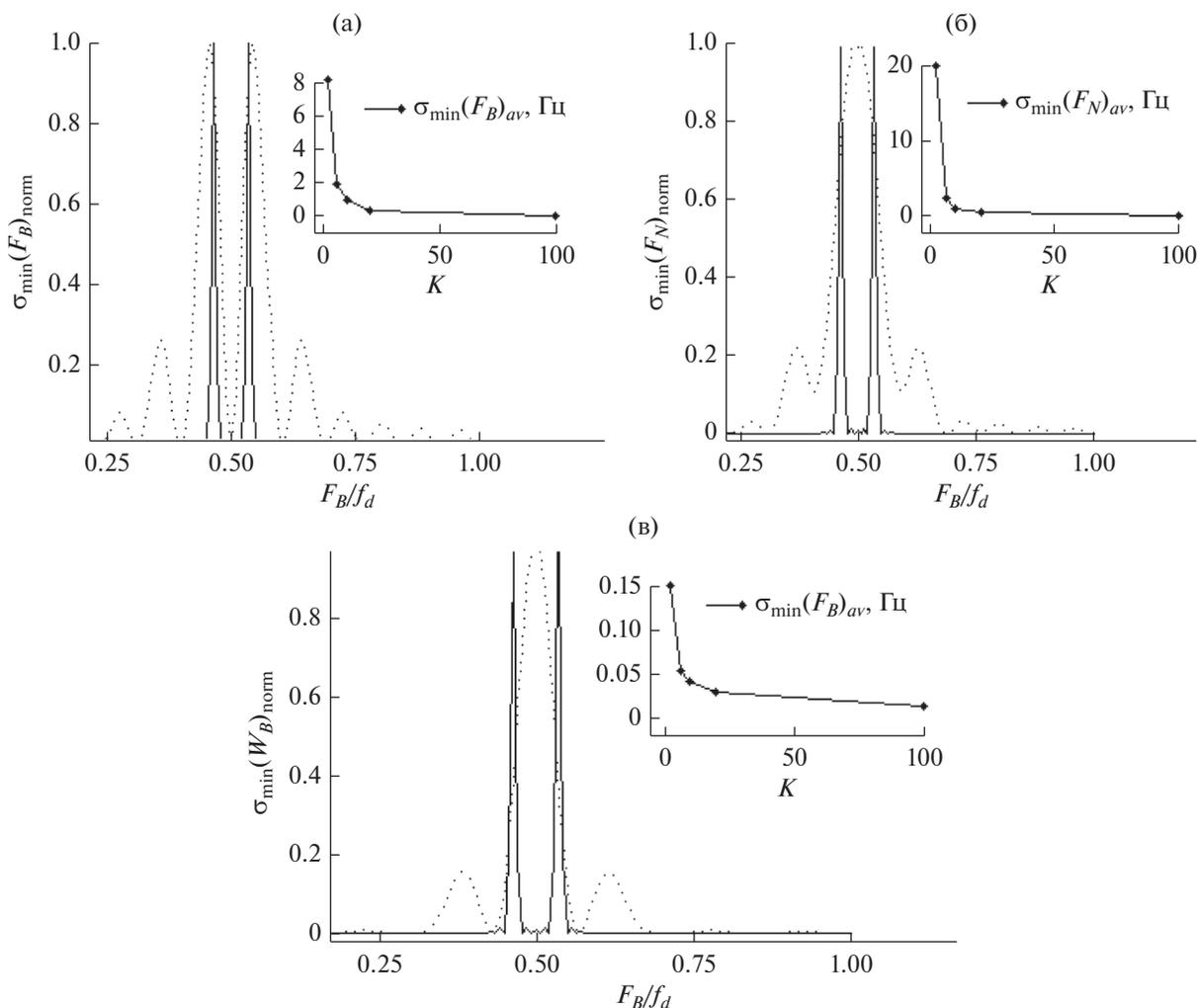
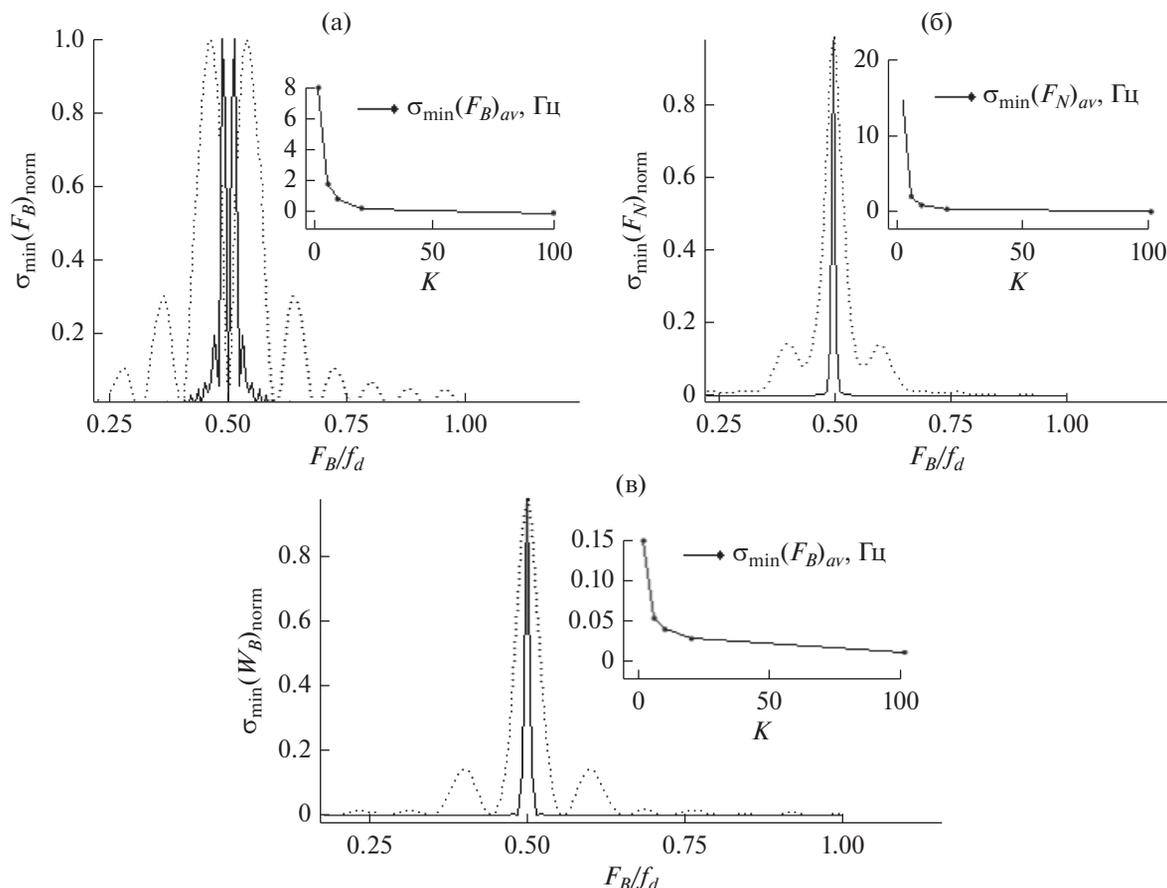


Рис. 5. Зависимость ГРК оценки вектора параметров  $\xi = [F_B W_B F_N]^T$  от  $F_B/f_d$  при  $W_B = 100$  Гц и  $K = 6$  (пунктирная кривая) и  $100$  (сплошная);  $F_N = 700$  Гц,  $A_N = 1$ ,  $A_B = 1$ ,  $f_d = 1400$  Гц,  $q = 10$ . На вставках – зависимость ГРК оценки параметров от длины выборки  $K$ .



**Рис. 6.** Зависимость ГРК оценки вектора параметров  $\xi = [F_B W_B F_N]^T$  от  $F_B/f_d$  при  $W_B = 1$  Гц и  $K = 6$  (пунктирная кривая) и 100 (сплошная);  $F_N = 700$  Гц,  $A_N = 1$ ,  $A_B = 1$ ,  $f_d = 1400$  Гц,  $q = 10$ . На вставках – зависимость ГРК оценки параметров от длины выборки  $K$ .

при больших объемах выборок (20 и более отсчетов), и им можно пренебречь при составлении требований к алгоритмам оценки параметров помехи и при сравнении разработанных алгоритмов с ГРК. Однако в случае маленьких выборок (от двух до десяти отсчетов) влияние величины  $W_B/f_d$  на минимальные СКО оценок необходимо учитывать.

Теперь рассмотрим изменение вида данных зависимостей при добавлении к широкополосной помехе узкополосного сигнала от цели. Рассмотрим случай равенства амплитуд сигналов от цели и помехи. При следующих параметрах сигнала:  $q = 1$ ,  $F_N = 100$  Гц,  $F_B = 700$  Гц,  $f_d = 1400$  Гц были получены зависимости ГРК оценок помехи при малых объемах выборок ( $K = 2$  и  $K = 10$  отсчетов) для случаев совместной оценки только параметров помехи (два параметра –  $F_B$ ,  $W_B$ ) и параметров суммарного сигнала от цели и помехи (три параметра –  $F_B$ ,  $W_B$ ,  $F_N$ ) (рис. 2). Из графиков, представленных на рис. 2, можно сделать вывод о том, насколько сильно зависит минимум

СКО оценки выбранного параметра от значения  $W_B/f_d$ .

Проанализируем зависимость ГРК оценок от  $W_B/f_d$  при различных значениях  $F_N/f_d$  и при фиксированных  $q = 1$ ,  $K = 6$ ,  $F_B/f_d = 0.5$  (рис. 3).

Приведены зависимости ГРК оценки  $W_B$  отдельно для случая оценки только параметров помехи (рис. 3а), параметров смеси помехи с целью (рис. 3б), и совместный график, отражающий изменение характера зависимости ГРК оценки ширины помехи при добавлении к широкополосной помехе сигнала от цели (рис. 3в). Видно, что в целом зависимости на рис. 3а и 3б одинаковы, за исключением областей, расположенных возле прямых, которые можно описать уравнением

$$W_B/f_d = 2|F_N/f_d - F_B/f_d|. \quad (7)$$

Вблизи значений, удовлетворяющих решению данного уравнения минимальные СКО оценок начинают бесконечно возрастать. Ширина данных областей определяется в свою очередь объемом выборки (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что по мере увеличения объема выборки зависимости ГРК оценки ширины помехи для двух и трех параметров все больше совпадают, за исключением узких областей вблизи решений уравнения (7). Зависимости ГРК оценки центральной частоты ШП составляющей и частоты УП составляющей от  $W_B/f_d$  и  $F_N/f_d$  по характеру аналогичны, поэтому в статье не приводятся.

Далее рассмотрим зависимость ГРК оценки всех трех составляющих вектора параметров от центральной частоты помехи для случая маленькой ( $K = 6$ ) и большой выборки ( $K = 100$ ) при фиксированных значениях  $W_B/f_d$ ,  $F_B/f_d$  и  $q$  (рис. 5 и 6).

На рис. 5 и 6,  $\sigma_{\min}(F_B)_{av}$  (а),  $\sigma_{\min}(F_N)_{av}$  (б),  $\sigma_{\min}(W_B)_{av}$  (в) – усредненные по  $F_B/f_d$ , а  $\sigma_{\min}(F_B)_{norm}$  (а),  $\sigma_{\min}(F_N)_{norm}$  (б),  $\sigma_{\min}(W_B)_{norm}$  (в) – соответственно нормированные значения  $\sigma_{\min}(F_B)$ ,  $\sigma_{\min}(F_N)$ ,  $\sigma_{\min}(W_B)$ . Из рис. 5 и 6 видим, что с увеличением объема выборки влияние  $F_B/f_d$  на ГРК параметров проявляется лишь в узких областях относительно всего диапазона значений. Также можно видеть, как ширина помехи  $W_B$  влияет на характер данных зависимостей.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено выражение для расчета элементов матрицы Фишера, необходимой для установления минимальных значений СКО совместных оценок параметров смеси узкополосного и широкополосного сигналов и белого гауссовского шума, представленных в виде комплексного суммарного сигнала, с помощью многомерного неравенства Крамера–Рао. Приведены графики зависимости СКО оценок от отношения сигнал/шум, длины выборки и от исходных параметров сигнала – центральных частот составляющих сигнала, ширины широкополосной составляющей. Проведено сравнение с минимальными СКО, полученными для модели сигнала, включающей только широкополосную составляющую. Проведен анализ полученных результатов, позволяющий оценить требования, которые могут быть предъявлены к разрабатываемым алгоритмам совместной оценки параметров смеси сигналов рассматриваемого типа, в зависимости от установленных значений частоты дискретизации и объема выборки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Principles of Modern Radar: Basic Principles / Eds. by Richards M.A., Scheer J.A., Holm W.A. Edison: Sci-Tech Publishing Inc., 2010.
2. Van Trees H.L. Detection, Estimation and Modulation Theory, N.Y.: Wiley, 2001. Pt 3.
3. Горбунов Ю.Н. // Сборник научных трудов Междунар. научно-техн. конф. “Научно-технические проблемы построения систем и комплексов землеобзора, дозора и управления и комплексов с беспилотными ЛА”, Москва, 23 мая 2013 г. С. 55.
4. Бакулев П.А., Степин В.М. Методы и устройства селекции движущихся целей. М.: Радио и связь, 1986.
5. Гордеев А.Ю., Яцышен В.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. Т. 20. № 3. С. 40.
6. Горбунов Ю.Н. Цифровые системы СДЦ и их оптимизация. М.: МИРЭА, 2008.
7. Бартнев В.Г. // 10-я Междунар. конф. DSPA-2008. Москва, 26–28 марта, 2008. С. 26.
8. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989.
9. Adve R.S., Wicks M., Hale T., Antonik P. // Record 2000 IEEE Intern. Radar Conf. Alexandria USA, May 2000. P. 735.
10. Попов Д.И. // Изв. вузов. Радиотехника. 2003. № 3. С. 71.
11. Артюшенко В.М., Воловач В.И. // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. № 9. С. 62.
12. Соболев В.С., Журавель Ф.А. // РЭ. 2014. Т. 59. № 4. С. 322.
13. Жураковский В.Н., Логвиненко А.С. // Радиотехника. 2017. № 11. С. 78.
14. Турчин В.И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005.
15. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, V. I: Estimation Theory. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1993.
16. Novak L.M. On the Estimation of Spectral Parameters Using Burst Waveforms. MIT Lincoln Laboratory Technical Report 672. Lexington: Defense Technical Information Center, 1983. 60 p.
17. Frelich R.G. // IEEE Trans. 1993. V. GRS-31. № 6. P. 1123.
18. Sobolev V.S., Feshenko A.A. // IEEE Trans. 2006. V. IM-55. № 2. P. 659.
19. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Спец. справочник. СПб.: Питер, 2001.
20. Жураковский В.Н., Логвиненко А.С. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2018. № 5. С. 26.  
<https://doi.org/10.18698/0236-3933-2018-5-26-35>

ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ  
ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ© 2020 г. К. К. Васильев<sup>а</sup>, В. Е. Дементьев<sup>а</sup>, \*<sup>а</sup>Ульяновский государственный технический университет,  
ул. Сев. Венец, 32, Ульяновск, 432027 Российская Федерация

\*E-mail: dve@ulntc.ru

Поступила в редакцию 15.04.2019 г.

После доработки 26.07.2019 г.

Принята к публикации 26.07.2019 г.

Рассмотрено представление пространственно неоднородных изображений на основе дважды стохастических авторегрессионных моделей. Показана возможность синтеза полукаузальных дважды стохастических алгоритмов фильтрации изображений на базе таких моделей. Рассмотрены варианты сокращения вычислительных затрат, необходимых для реализации дважды стохастических фильтров, на основе использования каскадов скользящих окон. Проведен сравнительный анализ предлагаемых алгоритмов с известными аналогами, подтверждающий практическую возможность использования дважды стохастических фильтров для обработки реальных двумерных изображений.

DOI: 10.31857/S0033849420040105

## ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на достигнутые успехи при разработке систем обработки изображений, в настоящее время остается ряд значимых нерешенных проблем, препятствующих дальнейшему развитию методов машинного зрения. Среди этих проблем можно выделить вопросы описания многомерных массивов неоднородных коррелированных данных и их оптимальной и квазиоптимальной обработки.

Математические модели многомерных сигналов можно разделить на два класса [1]. К случайным полям (СП), заданным в непрерывном пространстве–времени, можно отнести гауссовские и марковские СП, полученные либо с помощью спектральных преобразований, либо с использованием методов формирующего фильтра [1–5]. Второй класс представляют СП на многомерных пространственно-временных сетках [2–9]. Наиболее общего описания при этом можно добиться, если использовать тензорные разностные стохастические уравнения [7, 8]. Частным случаем тензорных моделей случайных полей являются каузальные авторегрессионные (АР) [2, 5, 7, 8] и некаузальные гиббсовские модели [2, 5, 10]. Существенным недостатком таких моделей является сложности описания пространственно неоднородного материала, например, спутниковых изображений поверхности Земли.

В связи с этим представляет особый интерес поиск механизмов, позволяющих выполнять имитацию изображений с изменяющимися статистическими и корреляционными характери-

стиками. Примером может служить аппликативно-сплайновая модель [11]. Однако на основе таких моделей затруднительно выполнять синтез алгоритмов обработки изображений. Еще одним вариантом имитации неоднородных СП является моделирование изображений с заданным энергетическим спектром, в том числе и фрактальным [7, 12–14]. Недостатком данной модели является ограниченное число реальных изображений, которые могут быть рассмотрены как фрактальные. В работе [13] моделирование многоспектральных пространственно неоднородных динамических полей яркости осуществляется на основании использования методов синтеза случайных текстур. Недостатком этого подхода являются сложности идентификации параметров модели по реальным изображениям и временным последовательностям таких изображений.

Приведенный краткий анализ показывает, что в настоящее время удовлетворительного описания неоднородных изображений не получено. В связи с этим целью данной работы является синтез математических моделей, адекватных реальному материалу и позволяющих формировать на своей основе эффективные алгоритмы обработки.

1. ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКАЯ  
МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Для решения поставленной задачи будем считать многомерное изображение реализацией СП  $x_{\vec{i}} = F(x_{\vec{j}}, \alpha_{\vec{i}}, \xi_{\vec{i}})$ ,  $\vec{i} \in \Omega$ ,  $\vec{j} \in D$ , заданного на пря-

моугольной сетке  $\Omega$ , где  $D$  – окрестность точки  $x_{\bar{i}}$ ;  $\xi_{\bar{i}}$  – вспомогательное гауссовское СП;  $F(\dots)$  – некоторое преобразование;  $\alpha_{\bar{i}}$  – параметры модели, представляющие собой реализации независимого от  $\xi_{\bar{i}}$  СП. Математические модели, параметрами которых являются реализации вспомогательных СП, называют смешанными или дважды стохастическими (ДС) [5, 16]. Их важное преимущество заключается в том, что совокупность СП параметров  $\{\alpha_{\bar{i}}\}$  позволяет формировать разнообразные, в том числе и близкие по свойствам к неоднородным, реализации СП  $\{x_{\bar{i}}\}$ , оказывающиеся адекватными реальным многомерным наблюдениям [17].

В качестве важного примера рассмотрим следующую авторегрессионную ДС-модель СП, заданного на прямоугольной  $N$ -мерной сетке  $\Omega = \{\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N) : (i_k = 1, 2, \dots, M_k), k = 1, 2, \dots, N\}$ :

$$x_{\bar{i}} = \alpha_{\bar{i}} + \sum_{\bar{j} \in D_{\bar{i}}} \rho_{\bar{i}, \bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} + \beta_{\bar{i}} \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i}, \bar{j} \in \Omega, \quad (1)$$

где  $\{x_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$  – моделируемое СП, определенное на  $\Omega$ ,  $\{\rho_{\bar{i}, \bar{j}}, \alpha_{\bar{i}}, \beta_{\bar{i}} : \bar{i} \in \Omega, \bar{j} \in D_{\bar{i}}\}$  – коэффициенты модели;  $\Xi = \{\xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$  – порождающее белое СП;  $D_{\bar{i}}$  – каузальная область локальных состояний [8] для точки  $\bar{i}$ .

Предположим, что коэффициенты  $\rho_{\bar{i}, \bar{j}}$  и  $\alpha_{\bar{i}}, \beta_{\bar{i}}$  являются СП, определяемыми следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{i}, \bar{j}} &= \sum_{\bar{l} \in D_{\bar{i}, \bar{j}}} r_{\bar{l}, \bar{j}} \rho_{\bar{i}-\bar{l}, \bar{j}} + \gamma_{\bar{l}, \bar{j}} \zeta_{\bar{l}, \bar{j}} \alpha_{\bar{i}} = \\ &= \sum_{\bar{l} \in D_{\alpha \bar{i}}} r_{\alpha \bar{l}} \alpha_{\bar{i}-\bar{l}} + \gamma_{\alpha \bar{l}} \zeta_{\alpha \bar{l}}; \\ \beta_{\bar{i}} &= \sum_{\bar{l} \in D_{\beta \bar{i}}} r_{\beta \bar{l}} \beta_{\bar{i}-\bar{l}} + \gamma_{\beta \bar{l}} \zeta_{\beta \bar{l}}, \quad \bar{i}, \bar{j} \in \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\{r_{\bar{l}, \bar{j}}, \gamma_{\bar{l}, \bar{j}}, r_{\alpha \bar{l}}, \gamma_{\alpha \bar{l}}, r_{\beta \bar{l}}, \gamma_{\beta \bar{l}} : \bar{l} \in \Omega, \bar{l} \in D_{\bar{i}}\}$  – постоянные коэффициенты;  $D_{\rho_{\bar{i}, \bar{j}}}, D_{\alpha \bar{i}}, D_{\beta \bar{i}}$  – области локальных состояний СП  $\{\rho_{\bar{i}, \bar{j}}\}$ ,  $\{\alpha_{\bar{i}}\}$  и  $\{\beta_{\bar{i}}\}$ ;  $\{\zeta_{\bar{l}, \bar{j}}, \bar{l}, \bar{j} \in \Omega\}$ ,  $\{\zeta_{\alpha \bar{l}}, \bar{l} \in \Omega\}$ ,  $\Sigma_{\beta} = \{\zeta_{\beta \bar{l}}, \bar{l} \in \Omega\}$  – вспомогательные белые СП.

Недостатком модели (1), определяемым ее АР-природой, является анизотропность порождаемых СП. Кроме того, специфическим для предложенной модели является наличие большого количества параметров, определяющих поведение имитируемых СП. Однако анализ показал, что из всего многообразия порождающих многомерных АР-моделей возможно выделить группу, позволяющую формировать СП, близкие к изотропным. Такой группой являются АР-модели с кратными корнями характеристических уравнений (АРКК-модели). Для многомерной сетки  $\Omega$  в оператор-

ной форме такие модели будут иметь следующий вид [8, 18]:

$$\prod_{k=1}^N (1 - \rho_k z_k^{-1})^{n_k} x_{\bar{i}} = \beta \xi_{\bar{i}}, \quad \bar{i} \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\rho_k, \beta$  – коэффициенты модели;  $n_k$  – кратность корней характеристических уравнений по  $k$ -му измерению;  $z_k^{-1}$  – оператор сдвига:  $z_k^{-1}(x_{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_N}) = x_{i_1, i_2, \dots, i_k-l, \dots, i_N}$ .

Ковариационная функция (КФ) для рассматриваемой модели является разделимой, т.е.

$$B(i_1, i_2, \dots, i_N) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^N B_k(i_k),$$

где  $B_k(i_k)$  – КФ соответствующих одномерных АР:

$$\begin{aligned} B_k(i_k) &= \sum_{l=0}^{n_k-1} g(n_k, l, i_k) \frac{\rho_k^{2(n_k-l-1)}}{(1-\rho_k^2)^{2k-l-1}}; \\ g(n_k, l, i_k) &= \\ &= \frac{(n_k + i_k - 1)!(2n_k - l - 2)!}{l!(n_k - 1)!(n_k - l - 1)!(n_k + i_k - l - 1)!}. \end{aligned}$$

Например, для важного случая  $n$ -мерной АРКК модели кратности 2 получим

$$B(i_1, i_2, \dots, i_N) = \sigma_x^2 \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{1 - \rho_k^2}{1 + \rho_k^2} |i_k|\right) \rho_k^{|i_k|}. \quad (4)$$

Можно показать [18], что при  $1 - \rho_i \ll 1$  такая КФ может быть описана уравнениями, близкими к эллиптическим. При этом ее сечения высоких уровней  $B(i_1, i_2, \dots, i_N) \sim \sigma_x^2$  имеют вид

$$\begin{aligned} B(i_1, i_2, \dots, i_N) &= \\ &= \sigma_x^2 \left[ 1 - \sum_{k=1}^N \frac{i_k^2}{a_k} + \prod_{k=1}^N i_k^2 (1 - \rho_k)^{n_k} A(\rho_k) \right], \end{aligned}$$

где  $a_k = \sqrt{\frac{1 + \rho_k^2}{(1 - \rho_k^2)(1 - \rho_k)}}$ ;  $A(\rho_k) = \frac{1 + \rho_k}{1 + \rho_k^2}$ .

Очевидно, сечения  $B(i_1, i_2, \dots, i_k)$  близкого к  $B(i_1, i_2, \dots, i_k) = 1$  уровня асимптотически, при  $1 - \rho_i \rightarrow 0$  и больших значениях кратности  $n_1$  и  $n_2$ , являются гиперэллипсоидами. Практика показывает, что близости к изотропности можно достичь уже при  $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 2$ . Также обратим внимание, что любая АРКК-модель определяется всего  $3N$ -параметрами, где  $N$  – размерность описываемого СП. Для сравнения отметим, чтобы описать стандартную многомерную АР-модель требуется  $\sum_{k=1}^N (K_k + 1)$ -параметр, где  $K_k$  – размер каузального окна по каждому измерению. При

использовании АРКК-модели (3) в качестве основы для ДС-модели (1) в случае, если  $D_{\bar{i}} = D_{\rho_{\bar{i},\bar{j}}} = D_{\alpha_{\bar{i}}} = D_{\beta_{\bar{i}}}$  для всех  $\bar{i}, \bar{j} \in \Omega$ , число параметров ДС-модели составит всего  $10 + 3N$  и не будет зависеть от количества элементов в  $D_{\bar{i}}$ .

Следует отметить еще одно достоинство моделей с кратными корнями характеристических уравнений – простоту идентификации параметров СП любой размерности. Действительно, для идентификации можно использовать двухэтапную процедуру, проводимую независимо по каждой из осей. На первом этапе необходимо определить значения кратности характеристических корней АР-уравнений. Эта задача может быть решена на основе методики определения порядка одномерной АР-последовательности. На втором этапе определяются значения параметра  $\rho_k$ , например, на основе выборочных значений КФ [8].

## 2. ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Использование ДС-модели на базе АРКК-модели позволяет формировать эффективные алгоритмы фильтрации реальных изображений. Действительно, пусть двумерное изображение может быть описано с помощью ДС-модели (1), так что и основное, и вспомогательное СП может быть опи-

сано двумерными АРКК-моделями (3) кратности 2. Такая модель может быть записана в виде

$$x_{i,j} = F_{АРКК(2,2)}(P_1 + \rho_{1i,j}, P_2 + \rho_{2i,j}, B\xi_{i,j}), \quad (5)$$

где  $A, P_1, P_2, B$  – некоторые числа, характеризующие среднее математическое ожидание, корреляционные свойства и дисперсию изображения;  $F_{АРКК(K_1, K_2)}(\rho_1, \rho_2, b)$  – преобразование, соответствующее двумерной АРКК-модели (3);  $K_1 = 2, K_2 = 2$  – коэффициенты, определяющие кратность модели;  $\beta$  – нормирующий коэффициент;  $\rho_{1i,j} = F_{АРМР(2,2)}(r_{11}, r_{12}, \gamma_1 \xi_{1i,j}), \rho_{2i,j} = F_{АРКК(2,2)}(r_{21}, r_{22}, \gamma_2 \xi_{2i,j})$  – случайные величины, определяемые АРКК-моделью;  $\xi_{i,j}, \xi_{1i,j}, \xi_{2i,j}$  – гауссовские белые СП;  $i = 1, \dots, M_1, j = 1, \dots, M_2$ .

Пусть производятся наблюдения смеси  $z_{i,j} = x_{i,j} + n_{i,j}$  информационного СП и аддитивного белого гауссовского СП  $\{n_{i,j}\}$  с дисперсией  $\sigma_n^2$ . Решим задачу восстановления отчетов  $\{x_{i,j}\}$  по наблюдениям  $\{z_{i,j}\}$ . Для этого составим следующий вектор элементов длиной  $6M_1 + 6$ :

$$\bar{x}_{i,j} = (\bar{x}_{xi,j}, \bar{\rho}_{xi,j}, \bar{\rho}_{yi,j}),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_{xi,j} &= (x_{i,j}x_{i,j-1} \dots x_{i,1}x_{i-1,M_1} \dots x_{i-1,1}x_{i-2,M_1} \dots x_{i-2,j-2})^T, \\ \bar{\rho}_{1i,j} &= (\rho_{1i,j}\rho_{1i,j-1} \dots \rho_{1i,1}\rho_{1i-1,M_1} \dots \rho_{1i-1,1}\rho_{1i-2,M_1} \dots \rho_{1i-2,j-2})^T, \\ \bar{\rho}_{2ij} &= (\rho_{2i,j}\rho_{2i,j-1} \dots \rho_{2i,1}\rho_{2i-1,M_1} \dots \rho_{2i-1,1}\rho_{2i-2,M_1} \dots \rho_{2i-2,j-2})^T. \end{aligned}$$

Тогда модель (5) можно записать в компактном векторном виде

$$\bar{x}_{i,j} = \Phi_{i,j}(\bar{x}_{i,j}) + \bar{\xi}_{i,j},$$

где  $\Phi_{i,j}(\bar{x}_{i,j})$  – матричное нелинейное преобразование [17];  $\bar{\xi}_{i,j} = (\xi_{i,j}, \xi_{\rho 1i,j}, \xi_{\rho 2i,j})$ .

Обратим внимание, что к такой форме можно привести любую модель (1). Варьируя сложность ДС-модели, можно получить необходимую точность оценивания.

Используя эти соотношения и методы рекуррентной нелинейной фильтрации [9], можно получить следующий двумерный ДС-фильтр:

$$\hat{\hat{x}}_{i,j} = \hat{\hat{x}}_{\Delta i,j} + \mathbf{B}_{i,j}(z_{i,j} - \hat{x}_{\Delta i,j}), \quad (6)$$

где  $\hat{x}_{\Delta i,j}$  – первый элемент вектора  $\hat{\hat{x}}_{\Delta i,j}$ , соответствующий прогнозу в точку  $(i, j)$  по всем предшествующим элементам;  $\mathbf{B}_{i,j} = \mathbf{P}_{\Delta i,j} C^T \mathbf{D}_{i,j}^{-1}$ ;  $C = (1, 0, \dots, 0)$ ;

$$\mathbf{D}_{i,j} = C \mathbf{P}_{\Delta i,j} C^T + \sigma_n^2; \mathbf{P}_{\Delta i,j} = \Phi'_{i,j-1}(\hat{\hat{x}}_{i,j-1}) \mathbf{P}_{i,j-1} \Phi'_{i,j-1} \times \times (\hat{\hat{x}}_{i,j-1})^T + \mathbf{V}_{\xi i,j}.$$

Ошибки фильтрации на каждом шаге определяются матрицей  $\mathbf{P}_{i,j} = (\mathbf{E} - \mathbf{B}_{i,j} C) \mathbf{P}_{Ei,j}$  размером  $(6M_1 + 6) \times (6M_1 + 6)$ . Состоятельность и сходимость подобных нелинейных фильтров исследована в работах [9, 17]. Полученный алгоритм обладает важными особенностями. Во-первых, не смотря на внешнюю громоздкость, он не требует обращения матриц большого размера, как при построчном калмановском оценивании [17]. Во-вторых, при формировании оценки в точке  $(i, j)$  используются все элементы слева и сверху от этой точки, а входящие в вектор  $\bar{\hat{x}}_{i,j}$  элементы, предшествующие  $\hat{\hat{x}}_{i,j}$ , переоцениваются. Таким образом, это нивелирует недостаток каузальности авторегрессионной конструкции, используемой в

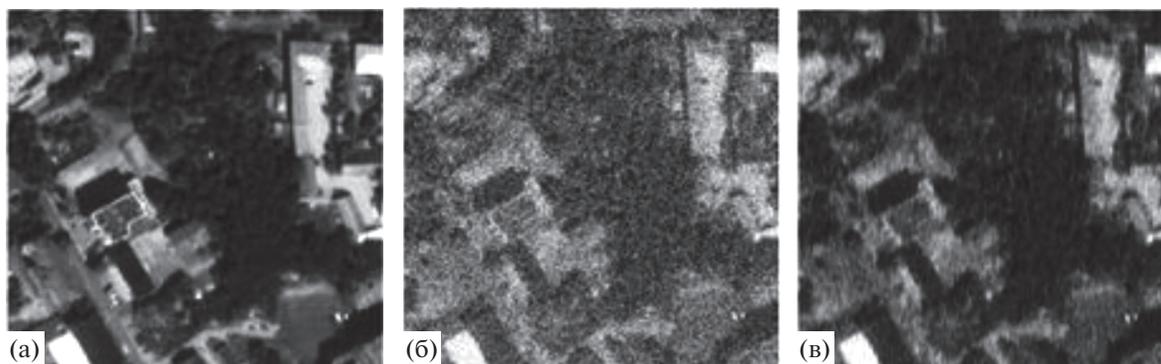


Рис. 1. Фильтрация спутниковых изображений: а – исходное изображение; б – искаженное изображение; в – результат фильтрации.

ДС-модели (2). В-третьих, результатом фильтрации является не только совокупность оценок  $\hat{x}_{i,j}$ , но и оценки корреляционных связей  $\hat{\rho}_{1i,j}$  и  $\hat{\rho}_{2i,j}$ . Такая особенность позволяет использовать ДС-фильтр и для компенсации шума и как элемент алгоритмов текстурно-корреляционного анализа, например, при сегментации изображений. Кроме этого, использование полученных значений  $\hat{\rho}_{1i,j}$  и  $\hat{\rho}_{2i,j}$  для расчета и уточнения последующих оценок  $\hat{x}_{i,j}$  наделяет ДС-фильтр ярко выраженными адаптивными свойствами, схожими со свойствами фильтров, предложенных в работах [19, 20]. На рис. 1 представлены примеры фильтрации искусственно зашумленного спутникового изображения.

На рис. 2 представлены зависимости дисперсии ошибки фильтрации изображения  $D_e$  от дисперсии шума  $D_n$ , полученные с использованием векторного фильтра Калмана без интерполяции [5] и с интерполяцией [9], дискретного фильтра Винера [8] и ДС-фильтра.

Анализ кривых показывает эффективность предложенного метода фильтрации, выигрыш

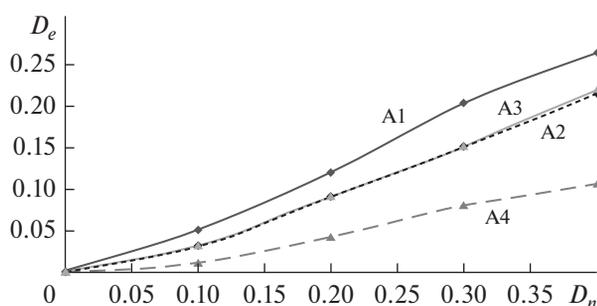


Рис. 2. Эффективность фильтрации спутникового изображения: А1 – векторный фильтр Калмана без интерполяции [5]; А2 – дискретный фильтр Винера [8]; А3 – фильтр Калмана с интерполяцией [9]; А4 – ДС-фильтр.

которого по сравнению с остальными фильтрами составляет до 120% по уровню дисперсии ошибки оценивания. Более того, имеет место еще более сильный результат. ДС-фильтр в среднем выигрывает до 15...20% по уровню дисперсии ошибки оценивания у фильтров А1-А3 даже в том случае, если последние применяются уже к сегментированному человеком изображению. Это объясняется возможностью адаптивной подстройки параметров ДС-фильтра под изменяющиеся вероятностные и корреляционные параметры изображения.

### 3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Предложенное выше решение задачи фильтрации пространственно неоднородных изображений на фоне белого шума представляется незаключенным, поскольку предполагает полукачественный характер фильтрации и значительное количество операций, необходимых для реализации фильтра. В связи с этим рассмотрим возможности построения ДС-моделей и алгоритмов фильтрации поля  $\{\bar{x}_i\}$  на фоне аддитивной помехи в скользящих по сетке  $\Omega$  окнах. Для определенности будем считать вначале, что сетка  $\Omega$  является двумерной размером  $M_1 \times M_2$  элементов, а используемые окна прямоугольными одинаковыми размерами  $W_1 \times W_2$ . Окно, геометрический центр которого располагается в точке  $(i, j)$ , будем обозначать через  $\bar{X}_{i,j}$ . Также будем считать, что в результате перемещения этого окна на одну позицию по вертикали и по горизонтали область  $D_{i+1,j+1}$ , построенная для точки  $(i+1, j+1)$ , состоит из элементов  $\bar{X}_{ij} \cup \bar{X}_{i-1,j} \cup \bar{X}_{i,j-1}$  для любых пар  $(i, j)$ . Очевидно, всегда можно выбрать  $W_1$  и  $W_2$  таким образом, что указанные условия будут выполняться.

Предположим, что определены  $W_1 \times W_2$  элементов вектора  $\bar{X}_{i,j-1} = (\bar{x}_{i,j-1}^1, \bar{x}_{i,j-1}^2, \dots, \bar{x}_{i,j-1}^{W_2})$ , входящие в окно на позиции  $(i, j - 1)$ . Будем также считать, что порядок заполнения элементов вектора  $\bar{X}_{i,j-1}$  определяется линейной разверткой (построчно) в пределах текущего расположения окна. Сдвинем окно на одну позицию и сформируем вектор  $\bar{X}_{i,j} = (\bar{x}_{i,j}^1, \bar{x}_{i,j}^2, \dots, \bar{x}_{i,j}^{W_2})$ . Обратим внимание, что в силу особенностей ДС-модели, элементами  $\bar{X}_{i,j}$  являются векторы, вообще говоря, разной длины. Также отметим, что позиции, на которые сдвигается окно по каждому измерению, не обязательно соответствуют отсчетам самого СП. Так можно описать перемещение окна на любое целое количество отсчетов вдоль каждого из измерений.

Используя предлагаемую выше методику, трудно записать следующее выражение, определяющее поведение произвольного  $\bar{X}_{i,j}$ :

$$\bar{X}_{i,j} = \mathbf{P}_{i,j-1} \bar{X}_{i,j-1} + \mathbf{P}_{i-1,j} \bar{X}_{i-1,j} + \mathfrak{D}_{ij} \xi_{ij}. \quad (7)$$

Обратим особое внимание, что в выражении (7) вектор  $\xi_{ij}$  составлен только из случайных величин, принадлежащих точке  $(i + \lfloor \frac{W_1}{2} \rfloor, j + \lfloor \frac{W_2}{2} \rfloor)$ , поскольку

$$\bar{X}_{i,j} - (\bar{X}_{i,j-1} \cup \bar{X}_{i-1,j} \cup \bar{X}_{i-1,j-1}) = \bar{x}_{i+\lfloor \frac{W_1}{2} \rfloor, j+\lfloor \frac{W_2}{2} \rfloor}.$$

Среди различных вариантов обработки двумерного изображения на основе соотношения (7) особое место занимает фильтрация в параллельно скользящих окнах. При этом начальные параметры фильтрации каждой последующей строки определяются результатами фильтрации предыдущей строки. Подобная фильтрация представляется весьма перспективной, поскольку она может быть очень просто распараллелена на процедуры построчной оконной рекуррентной фильтрации. Так как каждая такая процедура включает в себя значительный объем повторяющихся тензорных вычислений, ее удобно реализовывать на графических процессорах с параллельной архитектурой (дискретных графических ускорителях, поддерживающих архитектуру Compute Unified Device Architecture (CUDA) и последующих).

Для иллюстрации указанного способа обработки предположим, что изображение может быть описано моделью (5). Для определенности будем считать, что фильтрация осуществляется в скользящих окнах размером  $3 \times 3$  элемента. Тогда не сложно показать, что четырехмерный тензор  $\mathbf{P}_{i,j}$  в формуле (7) можно представить в виде матрицы размером  $9 \times 9$ , элементами которой в свою очередь являются матрицы размером  $3 \times 3$ . При

этом почти все эти вложенные матрицы являются нулевыми, за исключением

$$\mathbf{P}_{i,j}(7,8) = \mathbf{P}_{i,j}(8,7) = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{P}_{i,j}(9,8) = -\mathbf{A}_{12}(i,j),$$

$$\mathbf{P}_{i,j}(9,9) = 2\mathbf{A}_{11}(i,j), \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{11}(i,j) = - \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{1i,j-1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{21} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{1i,j-2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_{21}^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\rho}_{1,2i,j} = \rho_0 + \rho_{1,2i,j}.$$

Тензор  $\mathbf{Q}_{i,j}$  можно представить аналогичным образом. При этом

$$\mathbf{Q}_{1,2} = \mathbf{Q}_{2,3} = \mathbf{Q}_{3,4} = \mathbf{Q}_{4,5} = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{Q}_{9,4} = -\mathbf{A}_{28}(i,j), \quad \mathbf{Q}_{9,5} = \mathbf{A}_{27}(i,j),$$

$$\mathbf{Q}_{9,6} = -\mathbf{A}_{26}(i,j), \quad \mathbf{Q}_{9,7} = \mathbf{A}_{25}(i,j),$$

$$\mathbf{Q}_{9,8} = -4\mathbf{A}_{24}(i,j), \quad \mathbf{Q}_{9,9} = 2\mathbf{A}_{23}(i,j);$$

$$\mathbf{A}_{24}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{1i-1,j-1} \tilde{\rho}_{2i-1,j-1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & r_{21} r_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{23}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{2i-1,j} & 0 & 0 \\ 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & r_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{25}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{1i-1,j-2}^2 \tilde{\rho}_{2i-1,j-2} & 0 & 0 \\ 0 & r_{11}^2 r_{12} & 0 \\ 0 & 0 & r_{21}^2 r_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{26}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{2i-2,j}^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{27}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{2i-2,j-1} \tilde{\rho}_{1i-2,j-1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{12}^2 r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{22}^2 r_{21} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{28}(i,j) = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{1i-1,j-2}^2 \tilde{\rho}_{2i-1,j-2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_{11}^2 r_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_{21}^2 r_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Указанные соотношения позволяют реализовать построчную процедуру фильтрации. При этом

$$\hat{X}_{i,j} = \hat{X}_{\mathcal{E}i,j} + \mathbf{P}_{Dij} \mathbf{V}_n^{-1} \left( z_{i+1,j+1} - \mathbf{Y} \hat{X}_{\mathcal{E}ij} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\hat{X}_{\mathcal{E}i,j} = \mathbf{P}_{i,j} \bar{X}_{i-1,j} + \mathbf{Q}_{i,j} \bar{X}_{i,j-1}$ ,  $\mathbf{P}_{Di,j} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}i,j} \left( \mathbf{E} + \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{P}_{\mathcal{E}i,j} \right)^{-1}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}i,j} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}1i,j} + \mathbf{P}_{\mathcal{E}2i,j} + \mathbf{V}_{\xi i,j}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}1i,j} = \mathbf{P}_{i,j} \mathbf{P}_{Di,j-1} \mathbf{P}_{i,j}^T$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}2i,j} = \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{P}_{Di-1,j} \mathbf{Q}_{i,j}^T$ , где  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}ij}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}1ij}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}2ij}$ ,  $\mathbf{P}_{Di,j-1} - 9 \times 9 \times 3 \times 3$ -тензоры;  $\mathbf{V}_n^{-1} = 1/\sigma_n^2$ ;  $\mathbf{Y} - 9 \times 3 \times 3$ -тензор, первый слой которого

$$\mathbf{Y}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а второй и третий слои тензора  $\mathbf{Y}$  являются нулевыми. Выражение (8) предполагает переоценку всех элементов вектора  $\bar{X}_{i,j}$ , за исключением последнего, на каждой итерации по результатам обработки одного-единственного наблюдения  $z_{i+1,j+1}$ . При этом важно, что выражение (8) дает возможность простого распараллеливания процессов обработки. Действительно, для оценки  $\hat{X}_{i,j}$  требуется только оценка, сделанная на предыдущем шаге  $\hat{X}_{i,j-1}$  и в предыдущей строке  $\hat{X}_{i-1,j}$ . Соответственно, возможно организовать параллельную обработку "строк" изображения с задержкой на условной такт каждой последующей строки.

Основные сложности применения рассмотренных фильтров, связаны с необходимостью осуществления тензорных операций. Рассмотрим возможности упрощения процедур. Для этого будем считать, что корреляционные характеристики одинаковы во всех направлениях, в том числе по условным вертикали и горизонтали изображения. Будем также полагать, что скорость изменения корреляционных характеристик незначительна и в пределах окна фильтрации эти корреляционные характеристики можно считать одинаковыми. Тогда рассмотрим следующие векторы:

$$\bar{X}_{i,j} = \left( x_{i-1,j-1}, x_{i-1,j}, x_{i-1,j+1}, x_{i,j-1}, x_{i,j}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j-1}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j+1}, \rho_{i,j} \right)^T,$$

и построим для них соотношение вида

$$\bar{X}_{i,j} = \mathbf{P}_{i-1,j} \bar{X}_{i-1,j} + \mathbf{Q}_{i,j-1} \bar{X}_{i,j-1} + \Sigma_{i,j},$$

где  $\mathbf{P}_{i-1,j}$  и  $\mathbf{Q}_{i,j-1}$  — двумерные матрицы размером  $10 \times 10$ , элементы которых равны нулю почти всюду, за исключением

$$\mathbf{P}_{i-1,j}(7,8) = \mathbf{P}_{i-1,j}(8,9) = 1,$$

$$\mathbf{P}_{i-1,j}(9,6) = \mathbf{P}_{i-1,j}(9,9) = -\bar{X}_{i-1,j}(10)^2, \\ \mathbf{P}_{i-1,j}(10,10) = r,$$

$$\mathbf{Q}_{i,j-1}(1,4) = \mathbf{Q}_{i,j-1}(2,5) = \mathbf{Q}_{i,j-1}(3,6) = 1,$$

$$\mathbf{Q}_{i,j-1}(4,7) = \mathbf{Q}_{i,j-1}(5,8) = \mathbf{Q}_{i,j-1}(6,9) = 1,$$

$$\mathbf{Q}_{i,j-1}(9,2) = \mathbf{Q}_{i,j-1}(9,3) = \\ = \mathbf{Q}_{i,j-1}(9,5) = \bar{X}_{i-1,j}(10)^3,$$

$$\mathbf{Q}_{i,j-1}(9,6) = \mathbf{Q}_{i,j-1}(9,8) = -4\bar{X}_{i,1}(10)^2,$$

$$\mathbf{Q}_{i,j-1}(9,9) = 2\bar{X}_{i,1}(10), \quad \mathbf{Q}_{i,j-1}(10,10) = r(1-r),$$

$$\Sigma_{i,j} = \left( 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \xi_{i,j} \ \xi_{\rho i,j} \right)^T.$$

Использование такого подхода позволяет реализовать построчную процедуру фильтрации. При этом

$$\hat{X}_{i,j} = \hat{X}_{\mathcal{E}i,j} + \mathbf{P}_{Dij} \mathbf{V}_n^{-1} \left( z_{i+1,j+1} - \mathbf{Y} \hat{X}_{\mathcal{E}ij} \right), \quad (9)$$

где  $\hat{X}_{\mathcal{E}i,j} = \mathbf{P}_{i,j} \bar{X}_{i-1,j} + \mathbf{Q}_{i,j} \bar{X}_{i,j-1}$ ,  $\mathbf{P}_{Di,j} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}i,j} \times \left( \mathbf{E} + \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{P}_{\mathcal{E}i,j} \right)^{-1}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}i,j} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}1i,j} + \mathbf{P}_{\mathcal{E}2i,j} + \mathbf{V}_{\xi i,j}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}1i,j} = \mathbf{P}_{i,j} \mathbf{P}_{Di,j-1} \mathbf{P}_{i,j}^T$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}2i,j} = \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{P}_{Di-1,j} \mathbf{Q}_{i,j}^T$ . Здесь  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}ij}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}1ij}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}2ij}$ ,  $\mathbf{P}_{Di,j-1}$  — матрицы размером  $10 \times 10$ ;

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найденные процедуры несложно обобщить на произвольный размер окна фильтрации. Например, для размера окна  $5 \times 5$  длина вектора  $\bar{X}_{i,j}$  увеличится с 10 элементов до 26. Соответственно, размер матриц  $\mathbf{P}_{i,j}$ ,  $\mathbf{Q}_{i,j}$ ,  $\mathbf{P}_{\mathcal{E}ij}$ ,  $\mathbf{P}_{Di,j}$  составит  $26 \times 26$ , матрица  $\mathbf{Y}$  будет иметь размер  $5 \times 26$ , однако структура всех этих матриц останется без каких-либо изменений.

Обратим внимание, что все перечисленные фильтры позволяют на каждом шаге получать в том числе локальную оценку корреляционных характеристик изображения. Например, для последнего фильтра такой характеристикой является элемент  $\bar{X}_{i,j}(10)$  для каждой точки  $(i, j)$ . Это дает возможность адаптировать размер окна фильтрации под оцененные локальные корреляционные характеристики в процессе самой фильтрации. Такую адаптацию можно интерпретировать как определение для каждой точки  $(i, j)$  некаузальной области, определяющей значение СП в данной точке.

На рис. 3 представлены фрагменты отдельных кадров трех тестовых спутниковых изображений, полученных с космического аппарата Landsat-8. С целью анализа эффективности найденных ал-

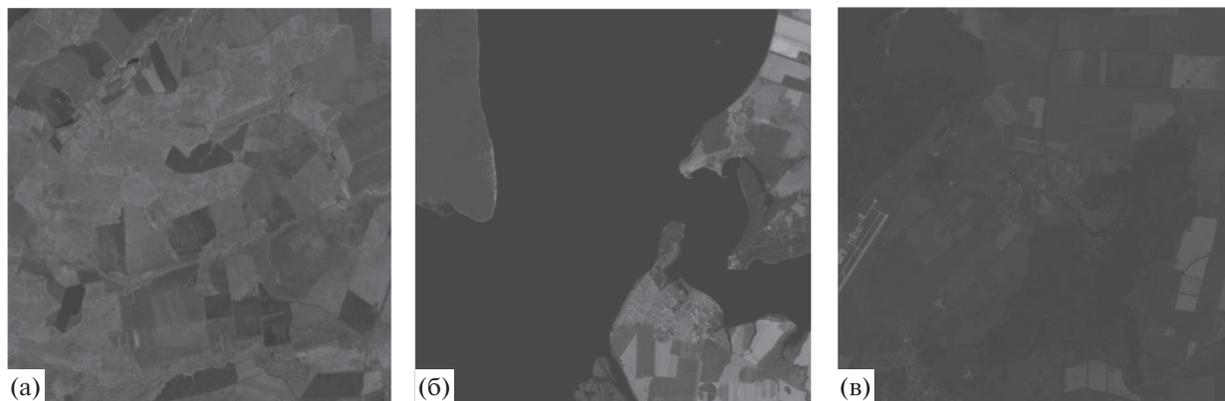


Рис. 3. Фрагменты многозональных изображений.

горитмов изображения были смешаны с белым шумом разной интенсивности так, что отношение сигнал/шум  $q = \sigma_x^2 / \sigma_n^2$  изменялось в диапазоне от 2 до 10, и была выполнена фильтрация.

В табл. 1 представлены результаты анализа эффективности описанных процедур в сравнении с LPA/ICI-алгоритмом (Local Polynomial Approximation/Intersection Confidence Interval) [21], вейвлет-фильтром с SURE (Stein’s Unbiased Risk Estimation)

порогом [22, 23], разделимым билатеральным фильтром [24] и дважды стохастическим фильтром (б) по относительной дисперсии ошибки фильтрации  $(\sum_{i,j \in D} (x_{i,j} - \hat{x}_{i,j})^2 / \sigma_x^2)$ .

Представленные результаты свидетельствуют о меньших значениях относительной дисперсии ошибок предложенных алгоритмов фильтрации при различных уровнях сигнал/шум  $q$ . Это связано с наличием протяженных областей на зашумлен-

Таблица 1. Сравнительные результаты качества фильтрации спутниковых изображений

Алгоритм фильтрации	Номер изображения	Время обработки	$q$		
			2	5	10
LPA/ICI фильтр	1	23 с	0.076	0.042	0.031
	2	18 с	0.067	0.036	0.028
	3	28 с	0.083	0.045	0.032
Вейвлет-фильтрация с SURE-порогом	1	14 с	0.083	0.065	0.053
	2	13.5 с	0.081	0.061	0.049
	3	14 с	0.087	0.064	0.051
Билатеральный фильтр (на основе параллельной декомпозиции на пространственные фильтры)	1	0.8 с	0.112	0.091	0.071
	2	0.7 с	0.097	0.083	0.063
	3	0.8 с	0.107	0.089	0.076
Дважды стохастический фильтр	1	17 мин 56 с	0.089	0.048	0.036
	2	17 мин 39 с	0.083	0.042	0.033
	3	18 мин 19 с	0.092	0.051	0.041
Дважды стохастический фильтр с интерполяцией	1	6 ч 3 мин 9 с	0.071	0.038	0.027
	2	6 ч 1 мин 11 с	0.063	0.033	0.024
	3	6 ч 4 мин 53 с	0.079	0.043	0.030
Дважды стохастическая фильтрация в параллельно скользящих окнах в соответствии с соотношением (8)	1	16 с	0.068	0.035	0.027
	2	15 с	0.059	0.033	0.025
	3	16 с	0.074	0.04	0.028
Дважды стохастическая фильтрация в параллельно скользящих окнах в соответствии с соотношением (9)	1	4.4 с	0.076	0.04	0.03
	2	4.3 с	0.064	0.035	0.026
	3	4.4 с	0.083	0.045	0.031

ном изображении, в пределах которых ДС-фильтры адаптируются к локальным особенностям. При этом качество обработки при использовании параллельно скользящих и взаимосвязанных окон оказывается даже выше, чем у формально оптимальных ДС-фильтров. Проведенные исследования показывают, что это связано с наличием четких границ на исходных изображениях, приводящих к локальному рассогласованию оптимального ДС-фильтра. Его аналог для обработки в некаузальных окнах имеет существенно более компактную рабочую область и быстрее адаптируется к резким изменениям свойств изображения. Кроме того, имеется значительный выигрыш в количестве требуемых на реализацию вычислительных ресурсов (на два-три порядка). В результате реализованные на CUDA-архитектуре алгоритмы оказываются существенно быстрее, чем процедуры, применяемые в графических редакторах. При этом выигрыш может быть намного увеличен в случае использования специальных методик оптимизации тензорных операций с учетом разреженности используемых тензоров.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрена модификация ДС-фильтра, основанная на применении скользящих окон фильтрации. Такая модификация выгодно отличается от обычного ДС-фильтра существенно более высокой скоростью обработки и некаузальными свойствами, позволяющими уменьшить время адаптации при переходе границ между объектами. Отмеченные свойства позволяют рекомендовать предложенную модификацию ДС-фильтра для обработки реальных пространственно неоднородных сигналов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-47-730009 и №19-29-09048).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981.
2. *Винклер Г.* Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло. Новосибирск: Гео, 2002.
3. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2012.
4. *Шовенгердт Р.А.* Дистанционное зондирование. Методы и модели обработки изображений. М.: Техносфера, 2013.
5. *Vouman С.А.* Model Based Imaging Processing. West Lafayette: Purdue Univ., 2013.
6. *Jensen J.* Introductory Digital Image Processing: a remote sensing perspective. London: Pearson Education, 2015.
7. *Потапов А.А.* Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008.
8. *Васильев К.К., Крашенинников В.Р.* Статистический анализ последовательностей изображений. М.: Радиотехника, 2017.
9. *Васильев К.К.* Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени: учебное пособие. М.: Радиотехника, 2016.
10. *Петюшко А.А.* // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2010. Т. 14. № 1. С. 225.
11. *Бондур Н.И., Аржененко В.Н., Линник В.Г. и др.* // Исследование Земли из космоса. 2003. № 2. С. 3.
12. *Сергеев В.В., Денисова А.Ю.* // Компьютерная оптика. 2013. Т. 37. № 2. С. 239.
13. *Болгов А.Н.* // Вестник Сибирского гос. аэрокосмического ун-та. 2014. № 5. С. 44.
14. *Грудин Б.Н., Плотников В.С., Смольянинов Н.А.* // Автометрия. 2010. Т. 46. № 3. С. 13.
15. *Vasil'ev K.K., Dement'ev V.E., Andriyanov N.A.* // Pattern Recognition and Image Analysis. 2016. V. 26. № 1. P. 240.
16. *Vasiliev K.K., Dementiev V.E., Andriyanov N.A.* // CEUR Workshop Proc. 2017. V. 1814. P. 10.
17. *Дементьев В.Е.* // Радиотехника. 2017. № 6. С. 18.
18. *Vasil'ev K.K., Popov O.V.* // Pattern Recognition and Image Analysis. 1999. V. 9. № 2. P. 327.
19. *Котов В.М., Шкердин Г.Н., Шкердин Д.Г. и др.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 333.
20. *Самойлин Е.А.* // РЭ. 2007. Т. 52. № 7. С. 831.
21. *Paliy D., Katkovnik V., Bilcu R. et al.* // Int. J. Imaging Sys. Tech., Sp. Iss. Appl. Color Image Process. 2008. V. 17. № 3. P. 105.
22. *Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В.* // Автометрия. 2011. № 1. С. 17.
23. *Ясин А.С., Павлов А.Н., Храмов А.Е.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 2. С. 149.
24. *Беляева О.В., Пащенко О.Б., Филиппов М.В.* // Труды МАИ. 2017. № 94. С. 1.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОЙ КООКСИАЛЬНОЙ БРЭГГОВСКОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИЭЛЕКТРИКОВ

© 2020 г. **Д. А. Усанов<sup>а</sup>, С. А. Никитов<sup>б</sup>, А. В. Скрипаль<sup>а, \*</sup>,  
Д. В. Пономарев<sup>а</sup>, О. М. Рузанов<sup>а</sup>, И. О. Тимофеев<sup>а</sup>**

<sup>а</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012 Российская Федерация

<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: skripala\_v@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 24.04.2019 г.

После доработки 25.05.2019 г.

Принята к публикации 30.05.2019 г.

Предложена и реализована методика измерения комплексной диэлектрической проницаемости ряда диэлектриков с использованием СВЧ коаксиального фотонного кристалла. В основу метода измерения положено решение обратной задачи, основанное на минимизации разности экспериментальных и расчетных частотных зависимостей коэффициента пропускания и отражения на частоте дефектной моды в запрещенной зоне фотонного СВЧ-кристалла, содержащего структуру с искомыми параметрами. Установлено, что для обеспечения однозначного решения обратной задачи следует выбирать дефектную моду в запрещенной зоне, на частоте которой в области расположения измеряемой структуры наблюдается максимум стоячей волны.

DOI: 10.31857/S0033849420040099

### ВВЕДЕНИЕ

Периодические СВЧ-структуры, называемые брэгговскими СВЧ-структурами или фотонными СВЧ-кристаллами, привлекают интерес исследователей в связи с перспективой создания устройств с уникальными характеристиками в СВЧ-диапазоне: измерительных устройств, согласованных нагрузок, различного типа фильтров и других [1]. К настоящему времени такие структуры созданы на основе прямоугольных волноводов, микрополосковых, копланарных, щелевых и волноводно-щелевых линий передачи [2–8]. Однако наиболее распространенными типами волноводных систем, используемых в технике СВЧ, являются коаксиальные кабели.

Коаксиальные брэгговские структуры могут быть использованы для работы как в СВЧ-, так и ВЧ-диапазонах. Для создания коаксиальных брэгговских структур, работающих в ВЧ-диапазоне и в низкочастотной части сантиметрового диапазона, могут быть использованы как серийные коаксиальные коннекторы (соединители в виде “тройников” и “бочек”) [9], так и длинные отрезки коаксиального кабеля с различным характеристическим сопротивлением [10].

В настоящее время для реализации СВЧ коаксиальной брэгговской структуры периодическая модуляция постоянной распространения электромагнитной волны вдоль длины отрезка СВЧ-коаксиала в ряде случаев осуществляется посредством создания отверстий [11–14] или поперечных разрывов [15] в диэлектрическом заполнении и металлической оболочке коаксиала.

Такие коаксиальные брэгговские структуры используются в качестве сенсоров физических величин и параметров материальных сред.

Авторами [11, 12] рассмотрены коаксиальные брэгговские структуры, изготовленные путем сверления отверстий в кабеле на равных расстояниях друг от друга вдоль осевого направления. При этом размер отверстий был существенно меньше расстояния между ними, что приводило к возникновению резонансных пиков на дискретных частотах в спектрах отражения и пропускания коаксиальных структур. На основе брэгговских структур были созданы датчики деформаций.

Авторы [13, 14] использовали отрезок коаксиального кабеля с периодически расположенными отверстиями во внешнем проводнике для измерения диэлектрической проницаемости исследуемых веществ, заполняющих отверстия коаксиаль-

ного кабеля, и температуры при использовании специальных типов коаксиальных решеток, изготовленных из материалов с известными температурными и диэлектрическими свойствами.

В работе [15] были успешно реализованы длиннопериодные брэгговские решетки в коаксиальных линиях передачи, посредством удаления коротких участков диэлектрического заполнения и металлической оболочки коаксиала, что позволило создавать сенсоры, чувствительные к механическим напряжениям в широком диапазоне значений.

Для расчета коэффициентов прохождения и отражения брэгговских структур одним из наиболее часто применяемых методов является метод матриц передачи, при использовании которого брэгговская структура представляется в виде последовательно чередующихся участков с различными значениями волновых сопротивлений и постоянных распространения электромагнитной волны. Такой подход к описанию характеристик брэгговских структур обеспечивает возможность реализации методов многопараметровых измерений характеристик материалов и структур, в том числе нанометровых размеров, с использованием одномерных фотонных кристаллов (ФК) [1, 16, 17]. При этом в основу методов измерения характеристик материалов и структур может быть положено решение обратной задачи, основанное на минимизации разности экспериментальных и расчетных спектров отражения и пропускания СВЧ фотонных кристаллов, включающих структуры с искомыми параметрами.

Для успешной реализации такого способа измерений необходимо решение “прямой” задачи, обеспечивающее как можно более высокоточное согласование теории с экспериментом. Возможность использования достаточно простых, но строгих моделей для описания элементов ФК резко сокращает время, требуемое для реализации прямой задачи. В противном случае этап нахождения искомым измеряемых параметров при решении обратной задачи может быть практически не реализуем из-за погрешностей при расчете или требования нереально высоких затрат машинного времени.

Отметим, что для описания структур, создаваемых с использованием отрезков с нарушениями в диэлектрическом заполнении и металлической оболочке коаксиала, необходимо получить матрицу передачи, описывающую данный элемент как четырехполюсник с известными характеристиками. Однако это невозможно сделать без привлечения методов трехмерного электродинамического моделирования [11, 12, 15].

Отметим, что поскольку коаксиальная линия широко используется при создании твердотельных СВЧ-устройств, то измерения параметров материалов и структур, которые предполагается

применять совместно с коаксиальной линией, полезно производить с использованием коаксиальных трактов.

В данной работе в качестве СВЧ коаксиальной брэгговской структуры, применение которой в качестве сенсора обеспечивает реализацию методики измерения комплексной диэлектрической проницаемости материалов и структур, рассмотрена измерительная секция в виде разборного отрезка коаксиальной линии передачи, внутри которого формируется коаксиальный фотонный кристалл (КФК) в виде периодически изменяющейся диэлектрической проницаемости диэлектрического наполнения. При этом измеряемый образец выполняет роль нарушения периодичности брэгговской структуры, что приводит к возникновению дефектной моды в запрещенной зоне на его амплитудно-частотной характеристике.

Использование предлагаемой брэгговской структуры в качестве сенсора позволяет получить аналитическое описание электродинамических характеристик измеряемой структуры и определить параметры измеряемого образца на основе строгого решения обратной задачи без привлечения методов трехмерного электродинамического моделирования. Поскольку при таком подходе резко упрощается расчет спектров отражения и пропускания СВЧ ФК, содержащих измеряемые образцы, то становится возможным использование брэгговских сенсорных структур, образованных элементами, параметрами которых могут варьироваться в широком диапазоне значений в зависимости от типа измеряемых образцов.

Отметим, что в известных публикациях исследования, как правило, проводились для длинноволновой части СВЧ-диапазона. В данной работе поставленная задача решалась для наиболее часто используемого на практике трехсантиметрового диапазона длин волн.

## 1. МОДЕЛЬ ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА НА ОСНОВЕ КОАКСИАЛА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

В качестве КФК был выбран отрезок коаксиала со структурой, представляющей собой периодически чередующиеся слои двух типов диэлектриков с различными значениями толщины и диэлектрической проницаемости.

Были рассмотрены одномерные КФК (рис. 1), составленные из 11 слоев, в диапазоне частот 1...12 ГГц. Нечетные слои ФК представляли собой отрезки с диэлектрическим наполнением из тефлона ( $\epsilon = 2.1$ ), четные – отрезки с воздушным наполнением ( $\epsilon = 1$ ). Длина нечетных отрезков 8 мм, четных 22.56 мм. У внешнего проводника  $d_{\text{внеш}}$  внутренний диаметр составлял 7 мм, у внутреннего проводника  $d_{\text{внутр}}$  внешний диаметр равен 3 мм.

Для расчета коэффициента прохождения и отражения электромагнитной волны в КФК использовалась матрица передачи  $\mathbf{T}$  четырехполюсника сложной структуры, представляющего собой каскадное соединение элементарных четырехполюсников с известными матрицами передачи, которые имеют вид:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T[1,1] & T[1,2] \\ T[2,1] & T[2,2] \end{pmatrix} = \mathbf{T}'_N \times \prod_{i=1}^{N-1} (\mathbf{T}''_{i,i+1} \times \mathbf{T}'_i), \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}'_i$  и  $\mathbf{T}''_{i,i+1}$  – матрицы передачи четырехполюсников, описывающих соответственно  $i$ -й отрезок и прямое соединение  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го отрезков коаксиальной линии передачи.

Выражения для матриц передачи  $\mathbf{T}'_i$  и  $\mathbf{T}''_{i,i+1}$  соответствующих элементарных четырехполюсников имеют вид [18, 19]

$$\mathbf{T}'_i = \begin{pmatrix} \exp(\gamma_i l_i) & 0 \\ 0 & \exp(-\gamma_i l_i) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{T}''_{i,i+1} = \begin{pmatrix} \frac{r_{i,i+1} + 1}{2\sqrt{r_{i,i+1}}} & \frac{r_{i,i+1} - 1}{2\sqrt{r_{i,i+1}}} \\ \frac{r_{i,i+1} - 1}{2\sqrt{r_{i,i+1}}} & \frac{r_{i,i+1} + 1}{2\sqrt{r_{i,i+1}}} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $l_i$  – длина  $i$ -го отрезка,  $\gamma_i$  – постоянная распространения электромагнитной волны в  $i$ -м отрезке,  $r_{i,i+1} = \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i}$ , где  $\rho_i$  – волновое сопротивление  $i$ -го отрезка коаксиальной линии передачи с диэлектрической проницаемостью заполнения  $\epsilon$ , рассчитываемое по формуле

$$\rho = \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \lg \left( \frac{d_{\text{внеш}}}{d_{\text{внутр}}} \right). \quad (4)$$

Постоянная распространения  $\gamma_i$  имеет вид

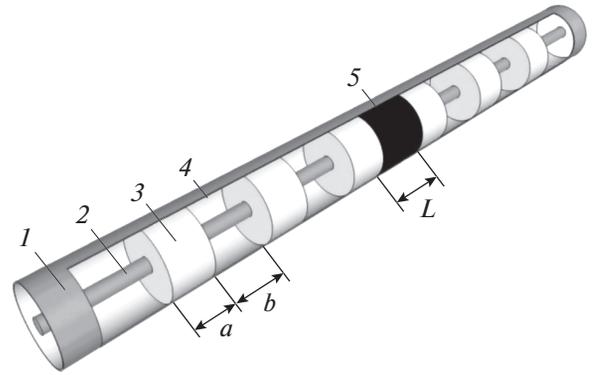
$$\gamma_i = \alpha_i + j\beta_i, \quad (5)$$

где  $\alpha_i = \alpha_{mi} + \alpha_{di}$  – постоянная затухания  $i$ -го отрезка коаксиальной линии [18], равная сумме постоянных затухания в металлических проводниках  $\alpha_{mi}$  и в диэлектрическом наполнении  $\alpha_{di}$ ;  $\beta_i = 2\pi/\lambda_i$  – фазовая постоянная, где  $\lambda_i$  – длина электромагнитной волны в  $i$ -м отрезке коаксиальной линии.

Постоянные затухания  $\alpha_{mi}$ ,  $\alpha_{di}$  имеют вид

$$\alpha_{mi} = \frac{0.023 R_s (d_{\text{внеш}} + d_{\text{внутр}}) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}{d_{\text{внеш}} d_{\text{внутр}} \ln \left( \frac{d_{\text{внеш}}}{d_{\text{внутр}}} \right)}, \quad (6)$$

$$\alpha_{di} = \frac{27.3 \text{tg} \delta \sqrt{\epsilon}}{\lambda}, \quad (7)$$



**Рис. 1.** Конструкция одномерного СВЧ КФК с нарушением периодичности: 1 и 2 – внешний и внутренний проводники, 3 и 4 – элементы, образующие периодическую структуру, 5 – нарушение;  $a$ ,  $b$ ,  $L$  – длины нечетных, четных отрезков КФК и отрезка с нарушением соответственно.

где  $\mu$  – магнитная проницаемость диэлектрического наполнения,  $R_s$  – удельное поверхностное сопротивление проводника,  $\text{tg} \delta$  – тангенс угла диэлектрических потерь.

Коэффициенты прохождения и отражения СВЧ-мощности определяются через элементы матрицы передачи  $\mathbf{T}$  по известным соотношениям [19]:

$$D = \frac{1}{|T[1,1]|^2}, \quad (8)$$

$$R = \frac{|T[2,1]|^2}{|T[1,1]|^2}. \quad (9)$$

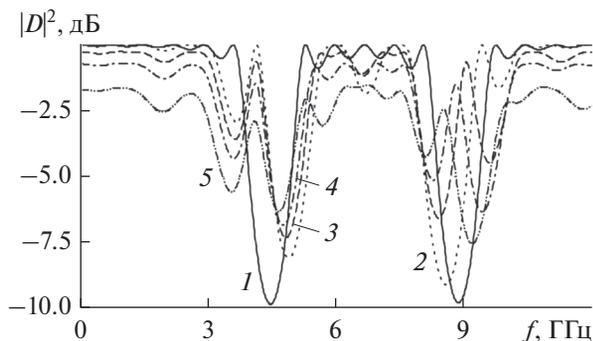
Сопротивление нагрузки на входе и выходе фотонной структуры составляло 50 Ом.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения 11-слойного СВЧ КФК были рассчитаны для двух вариантов: без нарушения периодичности и с нарушением периодичности в виде центрального (6-го слоя) (см. рис. 1), с различными значениями комплексной диэлектрической проницаемости в диапазоне 0...12 ГГц. Результаты приведены на рис. 2.

Параметры структуры фотонного кристалла были выбраны таким образом, что электрические длины четных элементов, составляющих фотонный кристалл, оказывались кратными длинам нечетных элементов (кратность равна 2).

Как следует из результатов расчета, при выбранных параметрах структуры фотонного кристалла в диапазоне частот 0...12 ГГц на АЧХ наблюдались



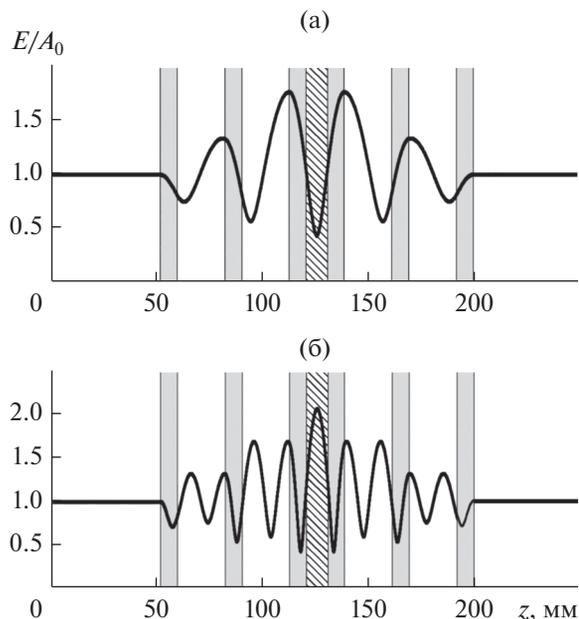
**Рис. 2.** Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения СВЧ КФК без нарушения периодичности (1) и с нарушением периодичности в виде центрального (6-го слоя) с различными значениями комплексной диэлектрической проницаемости (отн. ед.):  $\epsilon = 1$  (2),  $1.5 - 0.02i$  (3),  $2 - 0.06i$  (4),  $3 - 0.17i$  (5);  $L = 10$  мм.

две запрещенные зоны равной глубины, разделенные разрешенной зоной (см. кривая 1 на рис. 2).

При создании нарушения периодичности в виде измененной длины и диэлектрической проницаемости центрального, 6-го слоя, в первой и второй запрещенных зонах возникают дефектные моды, форма которых и частотное положение  $f_1$  и  $f_2$  зависят от значения диэлектрической проницаемости вносимого нарушения. При этом оказывается, что изменения резонансной частоты  $\Delta f_1$  и  $\Delta f_2$  дефектных мод при изменении диэлектрической проницаемости образца, выполняющего роль нарушения в центральном слое, различны. Для выяснения причин различной чувствительности дефектных мод к изменению диэлектрической проницаемости были выполнены расчеты распределения напряженности электрического поля  $E(z)$  электромагнитной волны вдоль структуры ФК на резонансных частотах  $f_1$  и  $f_2$  дефектных мод с использованием программы трехмерного электродинамического моделирования HFSS. Результаты расчета распределения напряженности электрического поля  $E(z)$  электромагнитной волны вдоль структуры одномерного СВЧ КФК представлены на рис. 3.

Как следует из результатов расчета, на частоте дефектной моды  $f_1 = 4.113$  ГГц в области расположения дефекта наблюдается узел стоячей волны, а на частоте дефектной моды  $f_2 = 9.382$  ГГц в области расположения дефекта наблюдается пучность стоячей волны. Данная ситуация обусловлена следующими двумя причинами.

1. Для рассматриваемой брэгговской структуры на частоте  $f_1$  длина электромагнитной волны  $\lambda_1$  значительно больше электрической длины нарушения  $\epsilon^{1/2}L$ , поэтому на длине нарушения не



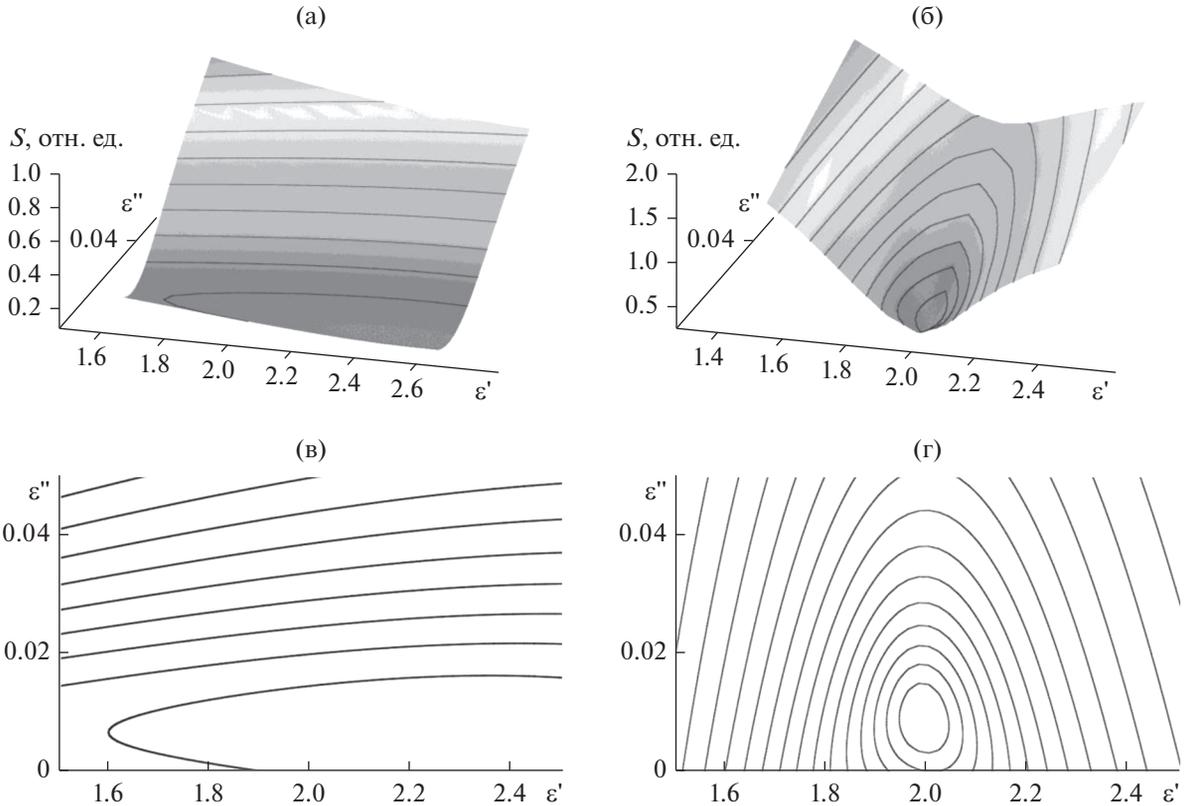
**Рис. 3.** Распределение напряженности электрического поля  $E$  электромагнитной волны вдоль структуры фотонного кристалла на резонансных частотах:  $f_1 = 4.113$  ГГц (а) и  $f_2 = 9.382$  ГГц (б) дефектных мод. Области серого цвета соответствуют слою фторопласта, белым областям – воздушные слои; штрихованная область – область дефекта;  $A_0$  – амплитуда падающей электромагнитной волны.

может уложиться ни одна полуволна, и в области нарушения наблюдается узел стоячей волны.

2. На частоте  $f_2 > f_1$  длина электромагнитной волны  $\lambda_2 < \lambda_1$  и в пределах неоднородности реализуется условие, необходимое для существования полуволнового резонанса, т.е. на длине неоднородности укладывается половина длины электромагнитной волны  $\lambda_2$  на этой частоте, и в области нарушения наблюдается пучность стоячей волны.

Известно, что в ФК для повышения чувствительности, например полупроводникового детектора, добиваются возникновения пучности стоячей волны в области расположения детектора [20]. Анализируя распределение электрического поля на частотах дефектных мод  $f_1$  и  $f_2$  внутри ФК, можно сделать следующий вывод. Аналогично ситуации, описанной в [20], здесь также причиной слабой чувствительности дефектной моды в первой запрещенной зоне на частоте  $f_1$  и высокой чувствительности дефектной моды во второй запрещенной зоне на частоте  $f_2$  к изменению диэлектрической проницаемости вносимого нарушения является возникновение в области расположения дефекта на частоте  $f_1$  узла стоячей волны и на частоте  $f_2$  пучности стоячей волны.

В данной работе была реализована методика измерения комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$  ряда диэлектриков по ча-



**Рис. 4.** Вид функции невязок  $S(\epsilon', \epsilon'')$  в пространстве  $(\epsilon', \epsilon'', S(\epsilon', \epsilon''))$  и контурные карты в плоскости искоемых параметров  $(\epsilon', \epsilon'')$  для образца с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2 - 0.01i$  на частотах  $f_1 = 4.094$  ГГц (а, в) и  $f_2 = 8.786$  ГГц (б, г), соответствующих дефектным модам в первой и второй запрещенных зонах.

стотным зависимостям  $D(\epsilon', \epsilon'', f)$  и  $R(\epsilon', \epsilon'', f)$  с использованием метода наименьших квадратов. При реализации этого метода находится такое значение параметров  $\epsilon'_{иск}$  и  $\epsilon''_{иск}$ , при котором сумма квадратов разностей  $S(\epsilon', \epsilon'')$  расчетных  $|D(\epsilon', \epsilon'', f)|^2$ ,  $|R(\epsilon', \epsilon'', f)|^2$  и экспериментальных (исходных)  $|D_{эксп}|^2$  и  $|R_{эксп}|^2$  значений квадратов модулей коэффициентов прохождения и отражения

$$S(\epsilon', \epsilon'') = \sum_{i=1}^K \left[ \left( |D(\epsilon', \epsilon'', f_{эксп_i})|^2 - |D_{эксп_i}|^2 \right)^2 + \left( |R(\epsilon', \epsilon'', f_{эксп_i})|^2 - |R_{эксп_i}|^2 \right)^2 \right] \quad (10)$$

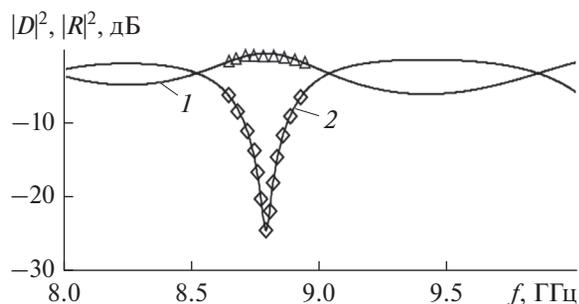
становится минимальной. Здесь  $K$  – число измеренных значений коэффициентов прохождения и отражения.

Искомые значения параметров исследуемого образца определяются численным методом в результате решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S(\epsilon', \epsilon'')}{\partial \epsilon'} = 0 \\ \frac{\partial S(\epsilon', \epsilon'')}{\partial \epsilon''} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Для отработки метода измерений решалась следующая тестовая задача: задавались действительная  $\epsilon'$  и мнимая  $\epsilon''$  части комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого диэлектрика и рассчитывались частотные зависимости коэффициентов пропускания и отражения исследуемой структуры с использованием выражений (8) и (9), т.е. решалась прямая задача. Эти частотные зависимости с погрешностью  $\pm 5\%$  выбирались в качестве исходных при решении обратной задачи по нахождению комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого диэлектрика, считающейся в этом случае неизвестной величиной, подлежащей определению. Сравнение результатов решения обратной задачи с исходными значениями комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого диэлектрика позволяет оценить погрешность предложенного метода измерений.

Как следует из результатов расчета, функции невязок  $S(\epsilon', \epsilon'', f)$ , определяемые выражением (10) и представленные на рис. 4а, 4б на резонансных частотах  $f_1 = 4.094$  ГГц и  $f_2 = 8.786$  ГГц, соответствующих дефектным модам в первой и второй запрещенных зонах, для образца длиной  $L = 10$  мм с комплексной диэлектрической проницаемо-



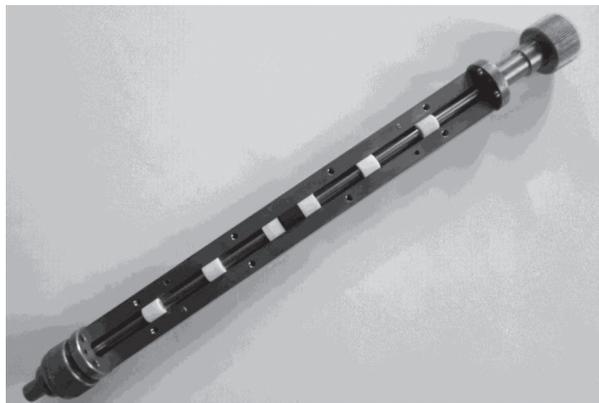
**Рис. 5.** Исходные тестовые (точки) и рассчитанные (кривые) с использованием результатов решения обратной задачи частотные зависимости  $|D|^2$  (кривая 1) и  $|R|^2$  (кривая 2) на резонансной частоте  $f_2 = 8.786$  ГГц, соответствующей дефектной моде во второй запрещенной зоне.

стью  $\epsilon = 2 - 0.01i$ , обладают глобальным минимумом в пространстве координат  $(\epsilon', \epsilon'', S(\epsilon', \epsilon''))$ , а контурные карты (рис. 4в, 4г) характеризуются наличием замкнутых траекторий вблизи минимума. Это подтверждает возможность однозначно определять действительную и мнимую части комплексной диэлектрической проницаемости из решения системы уравнений (11). Из результатов расчета также следует, что градиент функции невязок в направлении координаты  $\epsilon'$  на резонансной частоте дефектной моды во второй разрешенной зоне на порядок превышает градиент функции невязок на резонансной частоте дефектной моды в первой разрешенной зоне. При этом в направлении координаты  $\epsilon''$  градиенты функции невязок на резонансных частотах дефектной моды в первой и второй разрешенных зонах примерно одинаковы.

Значения действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости, определенные из решения обратной задачи с использованием системы уравнений (11), составили  $\epsilon = 1.896 - 0.014i$  и  $\epsilon = 1.994 - 0.012i$  на резонансной частоте дефектной моды соответственно в первой и второй разрешенных зонах.

На рис. 5 представлены тестовые (исходные) и рассчитанные с использованием результатов решения обратной задачи частотные зависимости квадратов коэффициентов отражения и прохождения на резонансных частотах дефектной моды в первой и второй разрешенных зонах.

Относительная погрешность определения действительной части комплексной диэлектрической проницаемости на резонансной частоте дефектной моды в первой разрешенной зоне составила 10.1 и 0.7% на резонансной частоте дефектной моды во второй разрешенной зоне. При этом относительные погрешности определения



**Рис. 6.** Секция СВЧ КФК с измеряемым образцом в центральном слое.

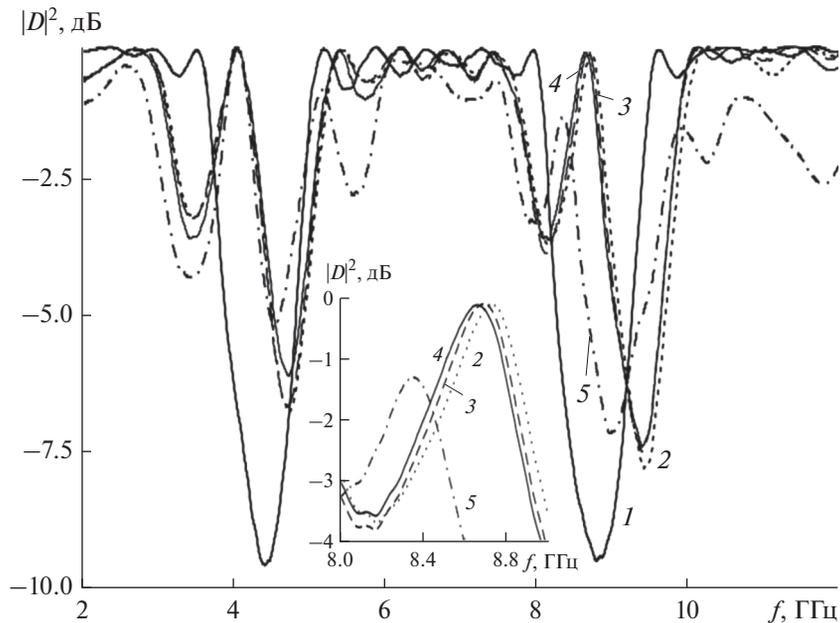
мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости на резонансных частотах дефектной моды в первой и второй разрешенных зонах примерно одинаковы и составляют 40 и 20%, соответственно.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для проведения экспериментальных исследований была создана измерительная секция в виде разборного отрезка коаксиальной линии передачи, внутри которого формируется КФК, и двух коаксиальных разъемов для подключения к внешним коаксиальным линиям передачи (рис. 6). Длина разборной части измерительной секции составляла 200 мм, внутренний диаметр внешнего проводника коаксиальной линии 7 мм, внешний диаметр внутреннего проводника 3 мм. Измерительную секцию, содержащую исследуемые КФК, подключали к векторному анализатору цепей Agilent PNA-X Network Analyzer N5242A с помощью 50-омной коаксиальной линии передачи.

Измеряли амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) коэффициентов отражения и прохождения СВЧ-излучения, взаимодействующего с 11-слойным КФК, нечетные слои которого были выполнены из коаксиальных отрезков с диэлектрическим заполнением (фторопласт, длина 8 мм), а четные — коаксиальных отрезков с воздушным заполнением (длина 22.56 мм). Результаты измерений демонстрируют наличие на АЧХ КФК двух запрещенных зон равной глубины, разделенных разрешенной зоной в диапазоне частот 0...12 ГГц (кривая 1 на рис. 7).

Исследуемые диэлектрические образцы, выполненные в виде цилиндрических втулок (внешний диаметр 7 мм, внутренний диаметр 3 мм), помещали в КФК в качестве центрального (шестого) слоя. Исследуемые образцы были выполнены из



**Рис. 7.** Частотные зависимости коэффициентов прохождения СВЧ КФК без нарушения периодичности (1) и с нарушением периодичности в виде центрального (6-го слоя) с различными значениями комплексной диэлектрической проницаемости: 2 – фторопласт; 3 – капролон; 4 – эбонит; 5 – текстолит;  $L = 10$  мм. На вставке – АЧХ КФК в окрестности дефектной моды.

фторопласта (длина 10.47 мм), капролона (10.65 мм), эбонита (10.16 мм) и текстолита (10.25 мм).

Из результатов эксперимента, представленных на рис. 7, следует, что дефектные моды в первой и второй запрещенных зонах КФК появляются соответственно на частотах 4.066 и 8.716 ГГц (фторопласт), 4.049 и 8.677 ГГц (капролон), 4.074 и 8.651 ГГц (эбонит), 4.016 8.378 ГГц (текстолит).

Полученные экспериментальные результаты подтверждают данные компьютерного моделирования: изменение резонансной частоты  $f_1$  дефектной моды в первой запрещенной зоне при изменении действительной части комплексной диэлектрической проницаемости нарушенного слоя является незначительным по сравнению с изменением дефектной моды во второй запрещенной зоне. В связи с этим для реализации описанного выше метода измерения диэлектрической проницаемости исследуемых в эксперименте диэлектриков была выбрана дефектная мода во второй запрещенной зоне.

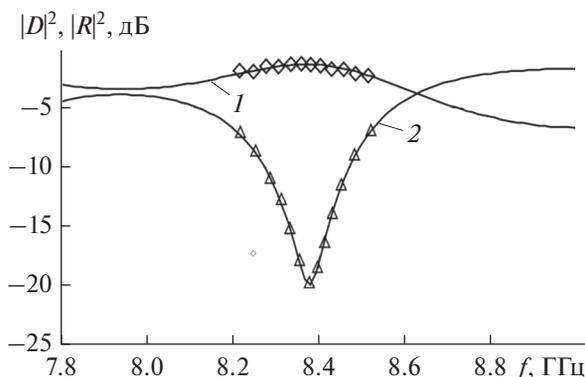
С использованием приведенной выше методики измерений на основе решения обратной задачи были определены значения мнимой и действительной частей комплексной диэлектрической проницаемости образцов из фторопласта, капролона, эбонита и текстолита (табл. 1).

На рис. 8 представлены АЧХ коэффициентов прохождения и отражения, измеренные и рассчитанные с использованием соотношений (8) и (9)

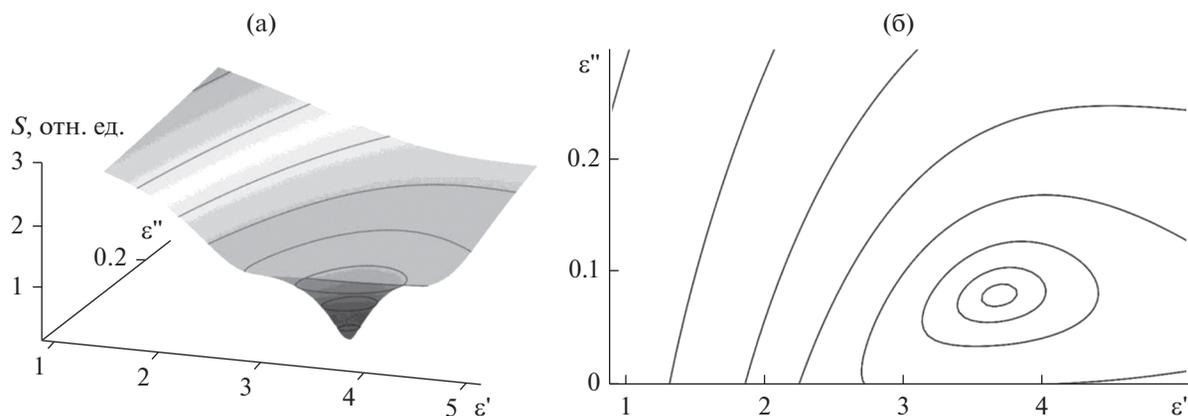
при значениях  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$ , приведенных в табл. 1 для образца из текстолита, которые были определены при решении обратной задачи из системы уравнений (11) на частоте, соответствующей дефектной моде во второй фотонной запрещенной зоне. Сравнение результатов теоретического расчета и эксперимента демонстрирует их качественное и количественное совпадение. На рис. 9 представлена функция невязок  $S(\epsilon', \epsilon'')$ , определяемая выражением (10), и ее контурная карта для случая измерения образца, выполненного из текстолита, со значениями действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon' = 3.682$  и  $\epsilon'' = 0.08$ . Функция невязок обладает ярко выраженным глобальным минимумом в пространстве координат  $(\epsilon', \epsilon'')$ , а контурная карта характеризуется наличием замкнутых траекторий вблизи минимума, что подтверждает возможность однозначно определять действитель-

**Таблица 1.** Результаты измерений

Материал	$\epsilon'$	$\epsilon''$	$f_{\text{эксп}}$ , ГГц
Фторопласт	2.034	$<10^{-4}$	8.716
Капролон	2.053	0.0035	8.677
Эбонит	2.326	0.01	8.651
Текстолит	3.682	0.08	8.378



**Рис. 8.** Экспериментальные (точки) и рассчитанные (кривые) с использованием результатов решения обратной задачи частотные зависимости  $|D|^2$  (кривая 1) и  $|R|^2$  (кривая 2) для образца из текстолита на резонансной частоте  $f_2 = 8.378$  ГГц во второй запрещенной зоне.



**Рис. 9.** Вид функции невязок  $S(\epsilon', \epsilon'')$  в пространстве  $(\epsilon', \epsilon'', S(\epsilon', \epsilon''))$  (а) и контурные карты в плоскости искомых параметров  $(\epsilon', \epsilon'')$  (б) для образца из текстолита на резонансной частоте  $f_2 = 8.378$  ГГц, соответствующей дефектной моде во второй запрещенной зоне.

ную и мнимую части комплексной диэлектрической проницаемости исследуемого образца из решения системы уравнений (11).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложена и реализована методика измерения комплексной диэлектрической проницаемости ряда диэлектриков с использованием КФК, основанная на решении обратной задачи при использовании измеренных частотных зависимостей коэффициента пропускания и отражения на частоте дефектной моды в запрещенной зоне. Обоснована методика выбора запрещенной зоны с дефектной модой, обеспечивающей однозначное решение обратной задачи. Показано, что в качестве запрещенной зоны с дефектной модой при решении обратной задачи следует выбирать дефектную моду, на частоте ко-

торой в области расположения дефекта наблюдается максимум стоячей волны.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усанов Д.А., Никитов С.А., Скрипаль А.В., Пономарев Д.В. Одномерные СВЧ фотонные кристаллы. Новые области применения. М.: Физматлит, 2018.
2. Беляев Б.А., Ходенков С.А., Шабанов В.Ф. // ДАН. 2016. Т. 467. № 4. С. 400.
3. Gomez A., Vegas A., Solano M.A., Lakhtakia A. // Electromagnetics. 2005. V. 25. № 5. P. 437.
4. Мухортов В.М., Масычев С.И., Маматов А.А., Мухортов Вас.М. // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. № 20. С. 70.

5. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В. и др. // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 8. С. 143.
6. Никитин Ал.А., Никитин Ан.А., Устинов А.Б. и др. // ЖТФ. 2016, Т. 86. № 6. С. 115.
7. Усанов Д.А., Никитов С.А., Скрипаль А.В., Рязанов Д.С. // РЭ. 2016. Т. 61. № 4. С. 321.
8. Усанов Д.А., Никитов С.А., Скрипаль А.В. и др. // РЭ. 2018. № 1. С. 65.
9. Pradhan R.D., Watson G.H. // Phys. Rev. B. 1999. V. 60. № 4. P. 2410.
10. Schneider G.J., Hanna S., Davis J.L., Watson G.H. // J. Appl. Phys. 2001. V. 90. № 6. P. 2642.
11. Wei Tao, Wu Songping, Huang Jie et al. // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 99. № 11. P. 113517.
12. Huang Jie // Proc. Conf. Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2012, San Diego, California, 11–15 March 2012. Bellingham: SPIE Press, 2012. V. 8345. P. 83452Z-1.
13. Насыбуллин А.Р., Морозов О.Г., Севастьянов А.А. // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 3. С. 1. <http://jre.cplire.ru/jre/contents.html>.
14. Морозов Г.А., Морозов О.Г., Насыбуллин А.Р. и др. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 3. С. 65.
15. Stevan S.L., Jr., Mendes J.J.A., Jr., Janzen F.C. et al. // J. Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications. 2015. V. 14. № 1. P. 28.
16. Никитов С.А., Гуляев Ю.В., Усанов Д.А. и др. // ДАН. 2013. Т. 448. № 1. С. 35.
17. Усанов Д.А., Никитов С.А., Скрипаль А.В. и др. // РЭ. 2016. Т. 61. № 1. С. 45.
18. Сазонов Д.М. Антенны и устройства СВЧ: учеб. для радиотехнич. спец. вузов. М.: Высшая школа, 1988.
19. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р., Смирнов В.П. Справочник по элементам волноводной техники. 2-е изд. М: Сов. радио, 1967.
20. Ozbay E., Temelkuran B., Bayindir M. // Progress in Electromagnetics Research. 2003. V. 41. P. 185.

## ДИСКРЕТНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ АМПЛИТУДНЫХ ШУМОВ УСИЛИТЕЛЬНЫХ КЛИСТРОНОВ

© 2020 г. Д. А. Комаров<sup>а, \*</sup>, С. П. Масленников<sup>б</sup>, Е. П. Якушкин<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Научно-производственное предприятие “Торий”,  
ул. Обручева, 52, Москва, 117393 Российская Федерация

<sup>б</sup> Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,  
Каширское шоссе, 31, Москва, 115409 Российская Федерация

\*E-mail: npp@toriy.ru

Поступила в редакцию 22.10.2018 г.

После доработки 25.11.2018 г.

Принята к публикации 11.01.2019 г.

Представлена кинематическая теория дискретных шумов клистронов, связанная с пульсациями выпрямленного напряжения источников питания. Дано сопоставление результатов теории с экспериментальными данными и рекомендации по выбору коэффициента пульсаций.

DOI: 10.31857/S003384942004004X

### ВВЕДЕНИЕ

Теория шумов в СВЧ-усилителях достаточно детально разработана и является предметом многочисленных монографий (см., например, [1]). Успехи в этой области позволили разработать сверхмалозумящие приборы СВЧ. Основное направление исследований касалось теории случайных флуктуаций, к которым относятся тепловые, ионно-плазменные, фликкер-шумы и т.д. Однако помимо случайных шумовых процессов немаловажным аспектом работы усилителей СВЧ является дискретный шум, связанный не со случайными явлениями, а с детерминированными составляющими в спектре сигнала вблизи несущей. Причиной появления подобных составляющих являются прежде всего пульсации источников питания. Важная особенность этих шумовых компонент — их непосредственная близость к частоте несущей (вплоть до 10 Гц), что для доплеровских радиолокационных станций (РЛС) представляет известные трудности при определении скорости объектов. Известен экспериментальный критерий достижения уровня дискретных составляющих в спектре сигнала: при коэффициенте пульсации выпрямленного напряжения не больше  $10^{-5}$  при отстройке частоты от несущей до 1 кГц уровень шумов не более  $-100$  дБ [2]. Однако теоретического обоснования этой величины нет до настоящего времени, что вызывает порой дискуссии как у разработчиков РЛС, так и у разработчиков усилителей СВЧ. В связи с современными требованиями, предъявляемыми к разрабатываемым

РЛС, задача существенного снижения дискретных составляющих является весьма актуальной.

В данной работе на основе элементарной кинематической теории клистроновых усилителей получена связь величины дискретных составляющих амплитудных шумов с пульсациями выпрямленного напряжения источника питания. Обоснованы рекомендации, обеспечивающие запас по уровню шумов, связанных с источником питания, на уровне 5...7 дБ от требуемых 100 дБ за счет уменьшения коэффициента пульсации выпрямленного напряжения до  $0.5 \times 10^{-5}$ .

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую модель клистронового усилителя: электронная пушка, находящаяся под отрицательным выпрямленным напряжением, резонатор-модулятор (входной резонатор клистрона), пространство взаимодействия (произвольное), выходной резонатор, в котором осуществляется энергоотбор СВЧ-мощности от электронного потока.

Примем следующие упрощающие анализ предположения:

— в пульсации выпрямленного напряжения катода ограничимся первой гармоникой;

— фаза пролета в резонаторе-модуляторе не зависит от пульсаций выпрямленного напряжения.

Первое приближение позволяет рассмотреть только область частот вблизи несущей, не превышающей значения частоты питания, и оправдано тем, что высшие гармоники выпрямленного на-

пряжения менее первой в 10 и более раз. Второе приближение дает возможность представить помеху в виде аддитивного шума и оценить верхний предел дискретных составляющих.

С учетом введенных упрощающих приближений выпрямленное напряжение катода представимо в виде

$$U_k = U_0 (1 + A_n \cos(\omega_c t)), \quad (1)$$

где  $U_0$  – постоянная составляющая катодного напряжения,  $A_n$  – коэффициент пульсаций по первой гармонике,  $\omega_c$  – циклическая частота переменного тока питающей сети.

Первичная модуляция скорости электронного потока, вызванная напряжением (1), может быть определена как:

$$v_n \cong v_0 \left( 1 + \frac{A_n}{2} \cos(\omega_c t) \right), \quad (2)$$

где  $v_0$  – скорость невозмущенного электрона, а  $v_n$  – скорость после прохождения модулятора. Решение уравнения движения электронов с начальной скоростью (2) для зазора резонатора-модулятора может быть записано в следующем виде:

$$v(\tau, t) = v_0 (1 + \mu [\cos(\omega\tau) - \cos(\omega t)]) + \frac{v_0 A_n}{2} \cos(\omega_c t), \quad (3)$$

где  $\omega$  – циклическая частота источника входного сигнала в резонаторе-модуляторе,  $\mu$  – параметр малости теории СВЧ-диода [3],  $\tau$  – время влета электрона в зазор резонатора-модулятора.

Следует отметить, что выражение (3) содержит два слагаемых: первое – классическое выражение теории СВЧ-диода, а второе – возмущение скорости под действием модуляции в пушке. Используя предположение о независимости угла пролета в зазоре резонатора-модулятора от пульсаций и теорему Шокли-Рамо, в соответствии с [3] можно получить выражение для переменной составляющей наведенного тока в цепи входного резонатора:

$$I_n(t) = a \cos(\omega t) + b \cos(\omega_c t - \theta_0), \quad (4)$$

где  $a = 2\mu^2 A_4 \frac{I_k}{\varphi_0}$ ,  $b = \frac{I_k A_n}{\varphi_0 2k} \sin(\theta_0)$ ,  $A_4 = 2 \sin(\varphi_0) - \varphi_0 (1 + \cos(\varphi_0))$ ,  $\theta_0 = \frac{k\varphi_0}{2}$ , ( $\varphi_0$  – невозмущенная фаза пролета,  $k$  – отношение частоты сигнала к частоте переменного тока питающей сети,  $I_k$  – ток катода).

В выражении (4) рассмотрение ограничено первой гармоникой наведенного тока. Наведенное напряжение в цепи входного резонатора можно принять равным:

$$U_c(t) = I_n(t) r_k, \quad (5)$$

**Таблица 1.** Амплитуды сигнала от частоты спектральной составляющей наведенного тока

Амплитуда составляющей	Частота
$0.5\beta(a^2 + b^2)$	0
$\alpha a$	$\Omega$
$\alpha b$	$\omega_c$
$0.5\beta ab$	$\omega - \omega_c$
$0.5\beta ab$	$\omega + \omega_c$
$0.5\beta a^2$	$2\omega$
$0.5\beta b^2$	$2\omega_c$

где  $r_k$  определяет активное сопротивление резонатора-модулятора.

Используя эквивалентное представление пространства группировки клистрона в виде триода [4], нелинейное группирование электронного потока можем записать в следующем виде:

$$I_r(t) = \alpha U_c(t) + \beta U_c^2(t), \quad (6)$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяют крутизну вольт-амперной характеристики и могут быть заранее выбраны исходя из условия получения максимума первой гармоники тока. Подстановка выражений (4) и (5) в соотношение (6) позволяет получить явное представление функции тока во временной области с учетом высших гармонических составляющих и составляющих спектра вблизи несущей частоты. Ввиду громоздкости выражения, зависимости амплитуд сигнала в выходном резонаторе от частоты спектральной составляющей представлены в виде табл. 1.

Обращает внимание тот факт, что амплитуда тока на частоте вблизи несущей зависит от первой гармоники усиленного сигнала. Таким образом, обеспечение оптимальных условий группировки увеличивает и субгармонические составляющие.

Представляя выходной резонатор клистрона эквивалентной схемой и следуя теории линейных электрических цепей периодического несинусоидального тока [5], выражение для комплексной амплитуды тока в резонаторе для произвольной гармонической составляющей, с учетом постоянной составляющей, можем записать в следующем виде:

$$I_p(\omega_i, I_i) = I_i \frac{Z_1(\omega_i)}{Z_2(\omega_i)},$$

$$Z_1(\omega_i) = \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{j\omega_i L} + j\omega_i C \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$Z_2(\omega_i) = r,$$

**Таблица 2.** Зависимость коэффициента шума от коэффициента пульсаций

$A_p, 10^{-5}$	$K_{ш}, \text{дБ}$
0.5	107
0.6	106
0.7	104
0.8	103
0.9	102
1.0	101
1.1	100
1.2	99
1.3	98

где  $I_i$  – ток гармоники,  $i$  – номер соответствующей гармоники табл. 1, а  $r, L, C$  – первичные параметры контура, легко определяемые из значения резонансной частоты, волнового сопротивления и добротности.

Действующее значение полного тока в нагрузке  $I_d$  может быть записано в следующем виде:

$$I_d = \sqrt{I_p^2(0, I_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_p^2(\omega_i, I_i)}, \quad (8)$$

а коэффициент шума в обычном виде [1]:

$$K_{ш} = 10 \lg(P_r/P), \quad (9)$$

где  $P_r$  – активная мощность в нагрузке от гармоники сигнала,  $P$  – полная мощность.

## 2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для вычисления соотношения (9) необходимо определить значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в аппроксимации (6). Это может быть сделано исходя из известной первой гармоники конвекционного тока (т.е. фактически по известной мощности выходного сигнала клистрона) и из экспериментальных данных по величине второй гармоники, всегда на 30 дБ меньшей, чем амплитуда основной гармоники.

Для коэффициента пульсации, равного  $10^{-5}$ , по соотношениям табл. 1 и формулам (7)–(9), расчетная величина коэффициента шума (при отстройке до 1 кГц) составила 101.2 дБ и хорошо соответствовала экспериментальным данным [2].

Однако необходимо отметить, что это значение находится на пределе технических требований к величине дискретных составляющих амплитудных

шумов и при этом теоретически служит верхней границей значений. Улучшение ситуации с помощью пространства взаимодействия за счет подавления амплитуды второй гармоники конвекционного тока принципиально возможно, но это приведет и к снижению электронного коэффициента полезного действия прибора. Из представленного рассмотрения очевидно, что единственным путем снижения дискретных составляющих амплитудных шумов является уменьшение коэффициента пульсаций выпрямленного напряжения. В табл. 2 приведены результаты расчета коэффициента шума (9) от коэффициента пульсаций. Представленные результаты расчета показывают, что обеспечение запаса по уровню шумов, связанных с источником питания, на уровне 5...7 дБ от требуемых 100 дБ может быть обеспечено при коэффициенте пульсации  $0.5 \times 10^{-5}$ . Очевидно, что этот же запас будет сохраняться при иных отстройках от частоты несущей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрена элементарная кинематическая теория дискретных составляющих амплитудных шумов клистронных усилителей вблизи рабочей частоты, связанная с пульсацией выпрямленного напряжения. Результаты расчета находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Рассмотрение ограничено только случаем пульсаций напряжения катода, хотя очевидно, что для приборов с сеточным управлением важны пульсации управляющего напряжения. Кроме того, учет высших гармонических составляющих пульсаций заметно ухудшит ситуацию с шумами. В связи с этим на основании анализа результатов расчета следует держать уровень пульсаций выпрямленного напряжения не более  $0.5 \times 10^{-5}$ , что обеспечит значимый запас (на уровне 5...7 дБ) по величине дискретных составляющих амплитудных шумов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букингер М. Шумы в электронных приборах и системах. М.: Мир, 1986.
2. Мирошников Ю.А. Техника тренировки и динамических испытаний СВЧ ЭВП. М.: изд. МИРЭА, 1991.
3. Гвоздовер С.Д. Теория электронных приборов сверхвысоких частот. М.: Гостехтеориздат, 1956.
4. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Гостехтеориздат, 1957.
5. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. СПб.: Лань, 2009.

## О ВЛИЯНИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ТЕПЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В СХОДЯЩИХСЯ ЛЕНТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ, ФОРМИРУЕМЫХ ПУШКАМИ С ЧАСТИЧНОЙ МАГНИТНОЙ ЭКРАНИРОВКОЙ КАТОДА

© 2020 г. Ю. Г. Гамаюнов<sup>а</sup>, \*, Е. В. Патрушева<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012 Российская Федерация

\*E-mail: [GamaunovYG@info.sgu.ru](mailto:GamaunovYG@info.sgu.ru)

Поступила в редакцию 14.06.2019 г.

После доработки 10.07.2019 г.

Принята к публикации 20.07.2019 г.

Представлены результаты исследований влияния начальных тепловых скоростей электронов в сходящихся ленточных электронных пучках, формируемых пушками с частичной магнитной экранировкой катода. Результаты представлены в виде обобщенных графических зависимостей, которые применимы как для контроля конфигурации теплового пучка при различных его параметрах и уровнях фокусирующего магнитного поля, так и для моделирования электронно-оптических систем, обеспечивающих необходимый уровень токопрохождения таких пучков в пролетном канале.

DOI: 10.31857/S0033849420050058

### ВВЕДЕНИЕ

Продвижение источников излучения *O*-типа в коротковолновый диапазон предъявляет жесткие требования к величине токопрохождения электронного пучка в пролетном канале малых поперечных размеров. Высокое токопрохождение пучка необходимо, чтобы избежать возможного разрушения мелкоструктурных элементов электродинамической системы в случае попадания на них даже небольшой части пучка, имеющего большую плотность тока и удельную мощность. Помимо чисто технических причин, осложняющих формирование и транспортировку таких пучков, появляются факторы, которые в источниках излучения длинноволнового диапазона не имели решающего значения. К ним следует отнести влияние начальных тепловых скоростей электронов на конфигурацию и структуру пучка, приводящее к расплыванию пучка, перераспределению плотности тока по сечению, ограничению по предельному сжатию. Это характерно как для аксиально-симметричных пучков, так и ленточных пучков. Уже в ранних работах (см., например, [1, 2] и ссылки в них) были получены формулы, проведены расчеты и построены графики, иллюстрирующие влияние тепловых скоростей электронов в пучках, формируемых электростатическими пушками. Но фактором, уменьшающим расплывание теплового пучка, когда невозможно перейти к мень-

шим компрессиям пучка из-за ограниченной термозмиссии катода, является магнитное поле в области пушки и его величина на катоде, что не учитывалось в указанных работах. Поэтому в [3] изложен метод учета влияния начальных скоростей электронов в ленточных электронных пучках, который является дальнейшим развитием метода для анализа тепловых пучков, представленного в [4]. Метод основан на параксиальном приближении, но, тем не менее, позволяет получить достаточно полную информацию о характеристиках теплового пучка.

В данной работе метод [3] применен для исследования влияния начальных скоростей электронов в сходящихся ленточных пучках, формируемых пушками с частичной магнитной экранировкой катода и транспортируемых в однородном магнитном поле. Результаты представлены в виде обобщенных графических зависимостей, которые можно использовать для оценки этого влияния в электронно-оптических системах (ЭОС) с различными параметрами электронного пучка, а также для моделирования ЭОС с учетом теплового движения электронов.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Эффективность взаимодействия теплового электронного пучка с высокочастотным полем электродинамической структуры и его токопро-

хождение в пролетном канале во многом зависит от распределения плотности тока по сечению пучка и его конфигурации. Разработанный в работе [3] метод и полученные уравнения позволяют определить условную границу с заданным токо содержанием и распределение плотности тока по сечению в тепловом пучке при максвелловском распределении начальных поперечных скоростей электронов. Уравнения получены с применением криволинейной системы координат, используемой в методе синтеза ЭОС сходящихся ленточных электронных пучков [5], и их решение дает информацию о том, в какой мере тепловой пучок отличается от ламинарного. Суть метода заключается в определении траекторий двух характерных электронов, один из которых покидает кромку катода с нулевой начальной скоростью (нетепловой электрон), а второй вылетает из центра катода, имея начальную поперечную скорость (тепловой электрон). В параксиальном приближении траектории любых электронов, вылетающих из произвольных точек катода с произвольными поперечными скоростями, выражаются через траектории характерных электронов, что позволяет, используя максвелловское распределение начальных скоростей, определить основные интегральные характеристики теплового пучка. Уравнения имеют вид [4]

$$q_n'' + \frac{1}{2} q_n' \left( \frac{u'}{u} + 4 \frac{\varphi'}{\varphi} \right) + \frac{in(x_1)(n_0^2 - 1)}{2\varphi u n_0} (q_n - 1) = \frac{iq_n}{2\varphi u} \left[ \frac{1}{q_n} \operatorname{erf} \left( \frac{q_n}{q_T} \right) - 1 \right], \quad (1)$$

$$q_T'' + \frac{1}{2} q_T' \left( \frac{u'}{u} + 4 \frac{\varphi'}{\varphi} \right) + \frac{in(x_1)(n_0^2 - 1)}{2\varphi u n_0} q_T = \frac{iq_T}{2\varphi u} \left[ \frac{1}{q_T} \operatorname{erf} \left( \frac{q_n}{q_T} \right) - 1 \right], \quad (2)$$

$$\varphi'' + \frac{u'}{2u} \varphi' + \frac{u''}{2u} \varphi + \frac{in(x_1)}{2u} \left[ n(x_1) \frac{\varphi}{\varphi_0} - \frac{n_0^2 - 1}{n_0} \right] = \frac{i}{2u^{3/2}}, \quad (3)$$

где  $q_n(x_1)$ ,  $q_T(x_1)$  – функции, описывающие траектории нетеплового и теплового электронов соответственно,  $x_1$  – нормированная продольная криволинейная координата;  $\varphi(x_1)$  – нормированная функция, описывающая граничную траекторию ламинарного пучка,  $\varphi_0$  – значение этой функции в кроссовере пушки;  $n_0$  – превышение рабочего магнитного поля над бриллюэновским полем  $B_{\text{бр}} = 1.04 \times 10^{-3} \sqrt{p_\mu U_0/ds}$ , Тл,  $p_\mu$  – микропервеанс, мкА/В<sup>3/2</sup>,  $U_0$  – ускоряющее напряжение, В,  $d$  и  $s$  – толщина и ширина пучка, мм;  $n(x_1)$  – текущее превышение;  $u(x_1)$  – нормированное к  $U_0$  осевое

распределение потенциала;  $i = 0.0952 p_\mu / \mu_1$ ,  $\mu = \Phi_0/l$ ,  $\mu_1 = s/l$ ,  $\varphi_0 = d/2\Phi_0$  ( $\Phi_0$  и  $l$  – нормировочные величины поперечных и продольных размеров).

Уравнение (3) является уравнением внутренней задачи синтеза сходящихся ленточных электронных пучков и описывает формирование ламинарных пучков при частичной магнитной экранировке катода [5]. Распределение плотности тока по поперечной криволинейной координате  $q_2$ , т.е. по сечению теплового пучка, дается формулой

$$j(x_1, q_2) = \frac{1}{2} j_k \frac{\varphi_k}{q_n \varphi} \times \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{q_n}{q_T} \left( \frac{q_2}{q_n} + 1 \right) \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{q_n}{q_T} \left( \frac{q_2}{q_n} - 1 \right) \right) \right], \quad (4)$$

где  $\operatorname{erf}(u)$  – интеграл вероятности,  $j_k$  – плотность тока на катоде,  $\varphi_k = \varphi(0)$ , в расчетах полагается  $\varphi_k = 1$ , что можно сделать выбором нормирующей величины  $\Phi_0$ . Долю тока в пределах условных границ теплового пучка, отстоящих симметрично от плоскости  $q_2 = 0$  на величину  $q$ , определяем по формуле

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{q}{q_n} + 1 \right) \operatorname{erf} \left( \frac{q_n}{q_T} \left( \frac{q}{q_n} + 1 \right) \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{q}{q_n} - 1 \right) \times \operatorname{erf} \left( \frac{q_n}{q_T} \left( \frac{q}{q_n} - 1 \right) \right) + \frac{q_T}{2\sqrt{\pi} q_n} \times \exp \left( -\frac{q_n^2}{q_T^2} \left( \frac{q}{q_n} + 1 \right)^2 \right) - \frac{q_T}{2\sqrt{\pi} q_n} \exp \left( -\frac{q_n^2}{q_T^2} \left( \frac{q}{q_n} - 1 \right)^2 \right). \quad (5)$$

Интегрирование уравнений (1), (2) проводим от плоскости  $x_1$  вблизи катода с начальными условиями  $q_n(x_1) = 1$ ,  $q_T'(x_1) = 0$ :

$$q_T(x_1) = \frac{n_0 p}{n_0^2 - 1} \sin \left[ \left( 18 \frac{i \varphi_0^3}{\varphi_k^4} \right)^{1/6} \frac{(n_0^2 - 1)}{n_0} x_1^{1/3} \right], \quad (6)$$

$$q_T'(x_1) = \frac{p}{3} \left( 18 \frac{i \varphi_0^3}{\varphi_k^4} \right)^{1/6} x_1^{-2/3} \times \cos \left[ \left( 18 \frac{i \varphi_0^3}{\varphi_k^4} \right)^{1/6} \frac{(n_0^2 - 1)}{n_0} x_1^{1/3} \right], \quad (7)$$

где  $p = 0.06 \sqrt{s/d\lambda}$  – параметр теплового пучка,  $\lambda = \sqrt{p_\mu U_0/T}$  – параметр тепловых скоростей. При расчетах тепловой электрон, двигаясь в верхней полуплоскости, может при некоторых значениях продольной координаты  $x_1$  достигать центральной плоскости и пересекать ее. Так как движение электронов пучка симметрично относительно этой плоскости, то в программе предусмотрено “отражение” электрона от плоскости  $q_2 = 0$ .

## 2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В уравнениях (1)–(3) и формулах (6), (7) параметры электронного пучка входят в комплексы  $i$ ,  $n_0$ ,  $p$ , а распределение потенциала  $u(x_1)$  и магнитного поля  $n(x_1)$  представлены в нормированном виде. Поэтому решение уравнений не требует задания конкретных электрических и геометрических параметров электронного пучка. Это означает, что электронные пучки, имея различные параметры, но одинаковые значения указанных комплексов и формируемые ЭОС, в которых нормированные распределения потенциала и магнитного поля также одинаковы, будут подобны как по конфигурации, так и по распределению плотности тока в сечении. Иначе говоря, указанные комплексы следует рассматривать как критерии подобия для теплового пучка, придавая которым определенные значения можно моделировать системы формирования электронных пучков с разными параметрами. Так, например, нормированной полуширине  $\phi_0$  ламинарного пучка в кроссовере, входящей в уравнения (1)–(3) и формулы (6), (7), соответствует линейная компрессия  $S_0 = 1/\phi_0$ , если катод плоский, и несколько меньшая компрессия с точностью до величины  $\mu^2 \ll 1$ , если катод цилиндрический (см. [5, с. 1129]). Тем самым выбор значения  $\phi_0$  означает выбор компрессии пушки, но не конкретных размеров катода или толщины пучка.

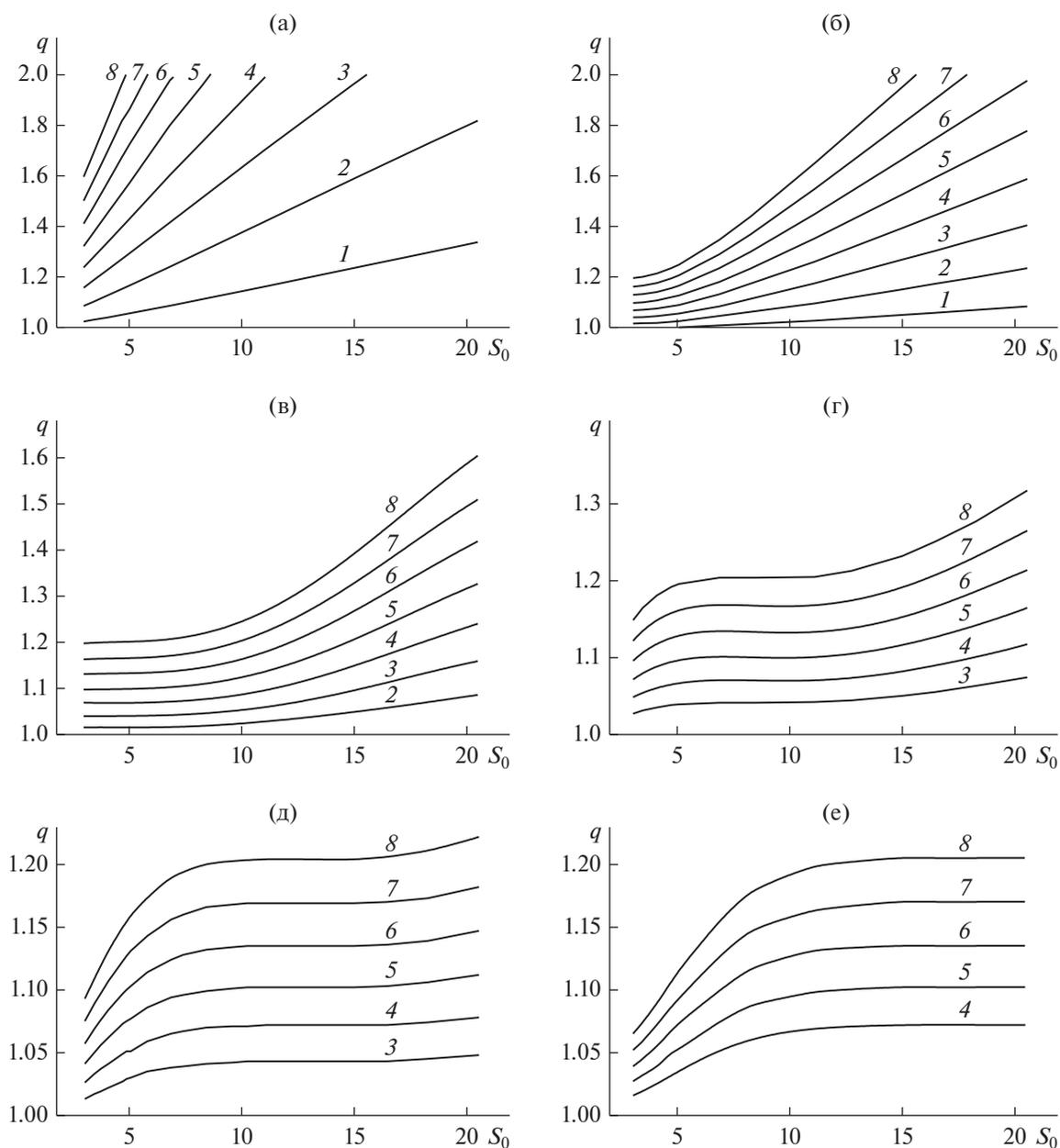
Исследование влияния тепловых скоростей электронов в электронных пучках, формируемых пушками с частичной магнитной экранировкой катода, проводили поэтапно. На первом этапе для выбранных нормированных параметров ламинарного пучка (превышение  $n_0$  магнитного поля над бриллюэновским полем, линейная компрессия  $S_0$ , значение параметра  $i$ ) интегрировали уравнения (3) так, как это изложено в [5]. Определяем функцию  $\phi(x_1)$ , описывающую граничную траекторию ламинарного пучка, распределения потенциала  $u(x_1)$  и магнитного поля  $n(x_1)$ , которые обеспечивают формирование электронного пучка с нормированной полутолщиной  $\phi_0$  в кроссовере, согласованно входящего в область рабочего магнитного поля. На втором этапе интегрировали уравнения (1), (2), используя найденные функции  $\phi(x_1)$ ,  $u(x_1)$ ,  $n(x_1)$ , и для выбранного значения  $p$  параметра теплового пучка находили функции  $q_n(x_1)$ ,  $q_r(x_1)$ . Затем по формуле (4) определяли распределение плотности тока по сечению теплового пучка, т.е. по координате  $q_2$ , а по формуле (5) – конфигурацию  $q(x_1)$  теплового пучка для заданной величины токосодержания в его границах. Эти характеристики теплового пучка наиболее важны в области пролетного канала, где величины  $q_2$  и  $q(x_1)$  имеют простой смысл. В про-

летном канале функция  $\phi(x_1)$ , описывающая граничную траекторию ламинарного пучка, принимает постоянное значение  $\phi_0$ , и криволинейная система координат, связанная с этой функцией, переходит в декартовую систему координат<sup>1</sup>. Поэтому значению поперечной криволинейной координаты  $q_2$ , входящей в формулу (4), будет соответствовать декартова поперечная координата  $y = q_2 \phi_0 \Phi_0$ , а значению  $q(x_1)$  в формуле (5) – условная полутолщина теплового пучка  $d_r/2 = q(x_1) \phi_0 \Phi_0$ . Учитывая, что ламинарный пучок в пролетном канале имеет полутолщину  $d/2 = \phi_0 \Phi_0$ , получаем  $q_2 = 2y/d$  (т.е.  $q_2$  совпадает с текущей координатой  $y$ , нормированной к полутолщине пучка), а величина  $q(x_1) = d_r/d$ , т.е. показывает во сколько раз поперечные размеры  $d_r$  теплового пучка при заданном токосодержании в его границах отличаются от размеров ламинарного пучка.

В отличие от ламинарного пучка тепловой пучок в пролетном канале пульсирует с чередованием узлов и пучностей. Поперечные размеры теплового пучка в пучностях определяют уровень его заполнения и токопрохождения в пролетном канале. Поэтому важно знать, в какой мере реальный тепловой пучок будет отличаться от соответствующего ламинарного пучка и какие условия должны быть выполнены, чтобы отличие в конфигурации пучков было в допустимых пределах. Расчеты относительных поперечных размеров  $q$  в пучностях теплового пучка от линейной компрессии  $S_0$  ламинарного пучка были проведены при различных значениях величин  $p$  и  $n_0$  для случая, когда электронный пучок формируется электронной пушкой с цилиндрическим катодом. Результаты представлены на рис. 1, где величины  $p$  и  $n_0$  выступают как параметры.

Зависимости рис. 1 хорошо подтверждают факт сдерживающего влияния магнитного поля и влияния компрессии  $S_0$  ламинарного пучка на распыление соответствующего теплового пучка. Видно, что с увеличением магнитного поля возмущение теплового пучка уменьшается, а увеличение компрессии приводит к большему распылению пучка при том же отношении рабочего магнитного поля к бриллюэновскому полю и неизменном параметре  $p$  теплового пучка (в этом случае увеличение компрессии связано с увеличением высоты катода). Увеличение же параметра  $p$  при неизменном  $n_0$  также приводит к больше-

<sup>1</sup> Формулы перехода от криволинейной системы координат к декартовой имеют вид [5]:  $\frac{x}{l} = x_1 - \mu^2 q_2^2 \frac{\phi(x_1) \phi'(x_1)}{2}$ ,  $\frac{y}{l} = \mu q_2 \phi(x_1) \left[ 1 - \mu^2 q_2^2 \frac{\phi'^2(x_1)}{2} \right]$ . В пролетном канале  $\phi'(x_1) = 0$ ,  $\phi(x_1) = \phi_0$ ,  $x = x_1 l$ ,  $y = q_2 \phi_0 \Phi_0$ .



**Рис. 1.** Зависимость в пролетном канале относительных поперечных размеров в пучках теплового пучка от линейной компрессии ламинарного пучка для нескольких значений превышения рабочего магнитного поля:  $n_0 = 2$  (а), 3 (б), 4 (в), 5 (г), 6 (д), 7 (е), и различных значений параметра теплового пучка:  $p = 0.06$  (1), 0.12 (2), 0.18 (3), 0.24 (4), 0.3 (5), 0.36 (6), 0.42 (7), 0.48 (8). Величина токосодержания в границах теплового пучка 0.99.

му расплыванию пучка. Величина этого параметра зависит от значения параметра тепловых скоростей  $\lambda = p_{\mu} U_0/T$  и отношения  $s/d$  ширины пучка к его толщине. Меньшим значениям  $\lambda$  соответствуют меньшие ускоряющие напряжения и большие температуры катода, что только усиливает влияние тепловых скоростей электронов на структуру пучка. К этому приводит также и уменьшение первеанса пучка. Физически последнее объясняется тем, что в пучках с большим пер-

веансом конфигурация пучка в большей мере определяется пространственным зарядом пучка, а не тепловым движением электронов. Если же увеличивается ширина пучка  $s$ , то это проявится в уменьшении линейной (на единицу ширины пучка) плотности тока и к проявлению эффекта, аналогичному эффекту в низкопервеансных пучках, т.е. к большему влиянию начальных скоростей электронов на конфигурацию пучка. Если же возрастание отношения  $s/d$  связано с уменьшением толщины пучка, то ясно, что возмущение пучка

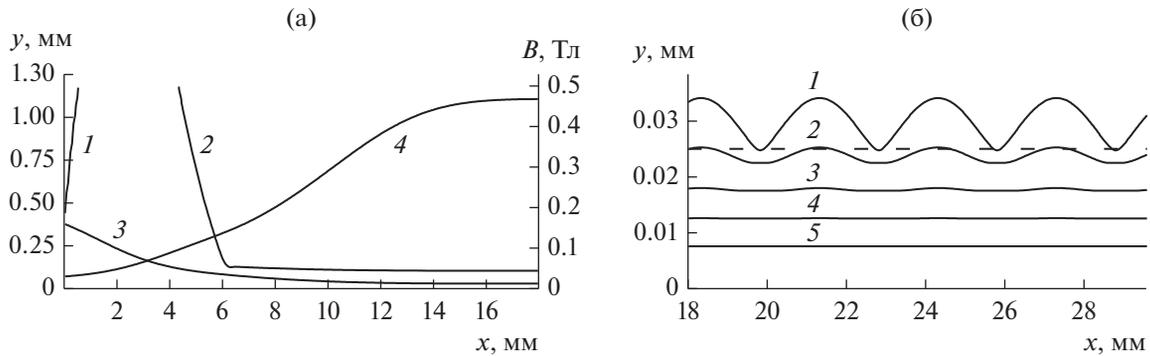


Рис. 2. Геометрия электродов пушки: фокусирующий электрод (1), анод (2), граничная траектория ламинарного пучка (3), распределение магнитного поля (4), радиус кривизны катода  $R_{кр} \approx 5.7$  мм, высота катода  $H \approx 0.75$  мм (а); конфигурация теплового пучка в области транспортировки при токосодержании 0.99 (1), 0.9 (2), 0.7 (3), 0.5 (4), 0.3 (5) в его границах. Штриховой линией показана граница ламинарного пучка (б).

проявится сильнее в ЭОС с тонким пучком, чем в ЭОС, у которых толщина пучка больше. В большинстве случаев при расчетах конкретных ЭОС параметры  $p$  и  $n_0$  не будут совпадать со значениями на рис. 1. Поэтому для более точной оценки расплывания теплового пучка, можно провести дополнительные несложные вычисления. Так, если компрессия ламинарного пучка есть  $\tilde{S}_0$ , превышение фокусирующего поля  $\tilde{n}_0$  и параметр теплового пучка  $\tilde{p}$ , то справедлива приближенная формула для условной границы  $\tilde{q}(\tilde{p}, \tilde{n})$  теплового пучка

$$\tilde{q}(\tilde{p}, \tilde{n}_0) \approx q(p, n_0) + \left( \frac{\nabla q}{\nabla p} \right)_{n_0} (\tilde{p} - p) + \left( \frac{\nabla q}{\nabla n_0} \right)_p (\tilde{n}_0 - n_0), \quad (8)$$

в которой функции  $q(p, n_0)$ ,  $\left( \frac{\nabla q}{\nabla p} \right)_{n_0}$ ,  $\left( \frac{\nabla q}{\nabla n_0} \right)_p$  следует определять из графиков рис. 1, используя значения  $p$ , близкие к  $\tilde{p}$ , и значения  $n_0$ , близкие к  $\tilde{n}_0$ .

Зависимости рис. 1 позволяют также целенаправленно выбирать параметры ламинарного пучка, при которых соответствующий тепловой пучок будет уверенно транспортироваться в пролетном канале. При этом следует помнить, что всегда должно быть выполнено условие  $s/d \gg 1$ , так как при выводе рабочих уравнений использована модель бесконечно широкого пучка<sup>2</sup>. В качестве примера проведем моделирование ЭОС с параметрами: микропереванс  $p_\mu = 0.05$ , ускоряющее напряжение  $U_0 = 16000$  В, толщина ламинарного пучка  $d = 0.05$  мм, ширина  $s = 1$  мм. Плотность тока ламинарного пучка достигает  $\sim 200$  А/см<sup>2</sup>. Та-

кую плотность тока может обеспечить только компрессионная оптика. Примем, что эмиссионная способность катода такова, что необходимый ток пучка может быть получен, если компрессия пучка будет не менее  $S_0 \sim 15$ . Пусть температура катода  $T = 1300$  К, тогда в этой ЭОС параметр тепловых скоростей  $\lambda \approx 0.615$  и параметр теплового пучка  $\tilde{p} \approx 0.34$ . Если принять, что тепловой пучок по уровню токосодержания 0.99 не должен превышать в пучностях поперечные размеры ламинарного пучка в  $\tilde{q} \approx 1.4$  раз, то это может быть достигнуто при соответствующем уровне  $\tilde{n}_0$  рабочего магнитного поля. Для определения уровня магнитного поля  $\tilde{n}_0$  воспользуемся зависимостями рис. 1 и формулой (8). Из рис. 1б для компрессии  $S_0 = 15$  и для значения параметра  $p = 0.36$ , близкого к параметру  $\tilde{p}$  при  $n_0 = 3$ , находим входящую в формулу (8) величину  $q(p, n_0) \approx 1.66$ . Величину  $(\Delta q / \Delta p) n_0 \approx 2.17$  вычисляем по значениям величин  $q(p, n_0)$  при  $p = 0.3$  и  $p = 0.36$  на рис. 1б. Аналогично определяем величину  $(\Delta q / n_0)_p \approx 0.39$ , используя значения величин  $q(p, n_0)$  на рис. 1б и 1в для превышений магнитного поля  $n_0 = 3$  и  $n_0 = 4$  при  $p = 0.36$ . Подставляя эти значения в приближенную формулу (8), определяем превышение рабочего магнитного поля над бриллюэновским полем, оно равно  $\tilde{n}_0 \approx 3.55$ . При указанных выше параметрах пучка и найденном  $\tilde{n}_0$  методом синтеза [5] рассчитываем электронную пушку с частичной магнитной экранировкой катода, а по уравнениям (1)–(3) и формулам (4), (5) – конфигурацию теплового пучка для ряда значений токосодержания в его условных границах<sup>3</sup>.

Геометрия пушки, осевое распределение магнитного поля, конфигурация теплового пучка в

<sup>2</sup> Более строго для модели бесконечно широкого пучка должно быть выполнено в области пушки условие  $s/(dS_0) \gg 1$ . Но, по видимому, это условие можно для сходящего пучка ослабить, так как текущая толщина пучка в пушке уменьшается.

<sup>3</sup> Расчеты по уравнениям (1)–(3) при  $\tilde{n}_0 \approx 3.55$  и токосодержании 0.99 дают превышение условной границы теплового пучка в пучностях над ламинарным пучком в  $\sim 1.37$  раза.

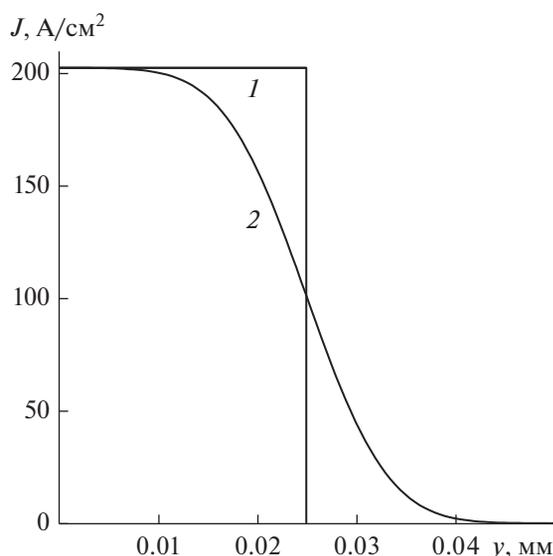


Рис. 3. Распределение плотности тока по сечению теплового пучка в узлах (1) и пучностях (2).

пролетном канале представлены на рис. 2. Из рисунка видно, что в узлах тепловой пучок не отличается от ламинарного пучка по толщине при одних и тех же значениях токосодержания, в пучностях же условная граница теплового пучка тем заметнее отходит от соответствующей границы ламинарного пучка, чем больше величина токосодержания. При малых величинах токосодержания границы ламинарного и теплового пучка совпадают. На рис. 3 представлено распределение плотности тока по сечению пучка в узлах и пучностях. Отношение  $q_n/q_t$ , от которого зависит распределение плотности тока, в узлах и пучностях имеют значение  $q_n/q_t \rightarrow \infty$  и  $q_n/q_t \approx 2.7$  соответственно. Поэтому плотность тока в сечении пучка постоянна в первом случае и изменяется во втором. Темп изменения плотности тока различен по мере удаления от центральной плоскости пучка  $y = 0$ , но до значений  $y \approx 0.01$  мм плотности тока в ламинарном и тепловом пучках почти совпадают. Это объясняет совпадение границ этих пучков на рис. 2 при малых значениях токосодержания.

Ранее отмечалось, что все расчеты были проведены для электронно-оптических систем с цилиндрическим катодом. Для сопоставления был проведен расчет электронно-оптической системы с плоским катодом и теми же самыми параметрами, которые были у ЭОС на рис. 2. Получено хорошее совпадение по конфигурации теплового пучка и распределению плотности тока по его сечению. Геометрия пушек и распределение магнитного поля в пушках различаются незначительно, осевая длина пушки с плоским катодом несколько больше.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования влияния поперечных тепловых скоростей электронов в сходящихся ленточных электронных пучках показали, что использованный для этих исследований метод дает возможность оперативно и достаточно полно получать информацию о характеристиках теплового пучка. Этот метод совместно с методом синтеза и уточняющими расчетами ЭОС по программам анализа целесообразно применять при разработке электронно-оптических систем для источников излучения *O*-типа коротковолнового диапазона.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-02-00666).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алямовский И.В. Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.
2. Молоковский С.И., Сушков Ф.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991.
3. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В. // РЭ. 2019. Т. 64. № 5. С. 498.
4. Кириштейн П., Кайно Г., Уотерс У. Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970.
5. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1126.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 53.082.79

### О ВОЗМОЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ФЕРРОЖИДКОСТЕЙ ЯДЕРНО-МАГНИТНЫМ МАГНИТОМЕТРОМ С ТЕКУЩИМ ОБРАЗЦОМ

© 2020 г. В. В. Давыдов<sup>a, b, \*</sup>, В. И. Дудкин<sup>c</sup>, Н. С. Мязин<sup>a</sup>, Р. В. Давыдов<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация

<sup>b</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт фитопатологии,  
ул. Институт, вл. 5, р.п. Большие Вяземы, Московской обл., 143050 Российская Федерация

<sup>c</sup>Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,  
пр. Большевиков, 22, Санкт-Петербург, 193232 Российская Федерация

\*E-mail: davydov\_vadim66@mail.ru

Поступила в редакцию 26.12.2018 г.

После доработки 04.03.2019 г.

Принята к публикации 25.03.2019 г.

Рассмотрена новая методика, использующая высокочувствительный ядерно-магнитный магнитометр с текущей водой для определения магнитной восприимчивости и константы Кюри магнитных жидкостей с погрешностью не хуже 1.0%. Показано, что в диапазоне температур 283...323 К, при которых применяются феррофлюидные ячейки, закон Кюри выполняется, дальнейшее увеличение температуры ферромагнитной жидкости приводит к незначительному изменению константы Кюри. Представлены результаты экспериментальных исследований.

DOI: 10.31857/S0033849420050010

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время постоянно повышается интерес к применению магнитных жидкостей (феррожидкостей) в различных измерительных устройствах, системах контроля, медицине и т.д. [1–6]. В ряде случаев (например, в датчиках угла наклона, акселерометрах, термомагнитных системах охлаждения термоядерных реакторов и т.д.) требуется знание намагниченности насыщения  $M_n$ , зависимости магнитной восприимчивости  $\chi_k$  от температуры  $T$  и константы Кюри  $C$  этого материала [4–9]. Для измерения  $C$  и  $\chi_k$  с погрешностью не выше 1% разработано большое число методов [1, 5, 8, 10, 11], однако с некоторыми недостатками. Один из них в случае конкретного прибора [5, 6] связан с тем, что размеры некоторых феррофлюидных ячеек не соответствуют размерам его кювет, в которых размещается ферромагнитная жидкость во время измерений.

В различных практических задачах [4, 12] необходимо установить диапазон изменения индукции магнитного поля  $B_0$ , в котором выполняется закон Кюри [13–15]:

$$\chi = C/T. \quad (1)$$

В работах [5, 6] было обосновано необходимое условие (в предположении близких размеров наночастиц), выполнение которого позволяет при-

менять для расчета константы Кюри следующее соотношение:

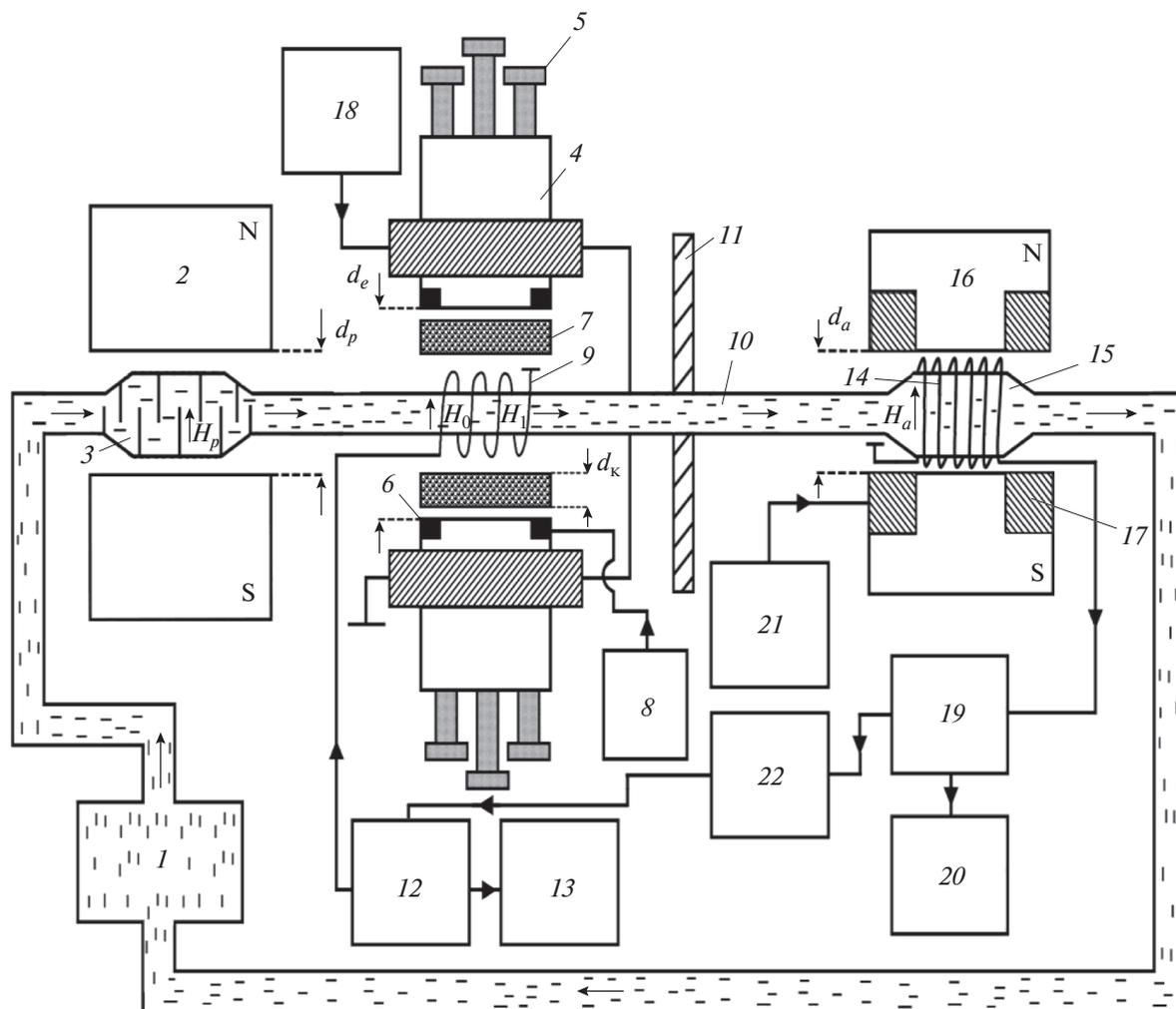
$$C = nP^2\mu_0/3k$$

( $n$  – концентрация магнитных наночастиц,  $P$  – их магнитный момент), полученное из формулы Ланжевена [14]. Это дает возможность проводить теоретическую оценку значений  $\chi_k$  с использованием (1).

Для изготовления большинства феррофлюидных ячеек применяются различные феррожидкости, но данные о растворах (например, о концентрации  $n$ ) со временем могут быть утрачены. Поэтому разработка надежного и универсального метода измерения параметров ферромагнитной жидкости, размещенной в закрытой феррофлюидной ячейке, является актуальной задачей. Одним из возможных ее решений может быть разработанный нами метод с применением высокочувствительного ядерно-магнитного магнитометра с текущим образцом.

#### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Разработанные нами ранее конструкции магнитометров на основе явления ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в текущей жидкости показали высокую точность и надежность при измерении



**Рис. 1.** Структурная схема экспериментальной установки: 1 – помпа; 2 – магнит-поляризатор; 3 – сосуд-поляризатор; 4 – электромагнит; 5 – регулировочные винты; 6 – корректирующие катушки; 7 – контейнер с коллоидным раствором; 8 – источник питания корректирующих катушек; 9 – катушка нутации; 10 – соединительный участок трубопровода; 11 – магнитный экран; 12 – радиочастотный генератор; 13 – частотомер; 14 – катушка регистрации; 15 – сосуд-анализатор; 16 – магнит-анализатор; 17 – катушки модуляции поля магнита-анализатора; 18 – источник питания электромагнита; 19 – устройство регистрации сигнала ЯМР; 20 – осциллограф; 21 – радиочастотный генератор; 22 – устройство управления и обработки сигнала ЯМР.

магнитных полей [15–18]. На рис. 1 представлена схема созданной нами экспериментальной установки для измерения  $\chi_k$  магнитной жидкости с использованием ЯМР-магнитометра на текущей воде. Дистиллированная вода из сосуда поляризатора, расположенного в зазоре магнита-поляризатора 2, поступает по соединительному участку трубопровода в катушку нутации 9. Она размещена в электромагните, индукция  $B_0$  которого могла изменяться от 0.0081 до 1.4072 Тл. Степень неоднородности поля была не хуже  $10^{-3} \text{ см}^{-1}$  при расстоянии между полюсами  $d_e$ , которое могло изменяться от 40 до 160 мм (диаметр полюсов  $d_n = 150 \text{ мм}$ ). Для управления степенью неоднородности магнитного поля в области между полюсами применялись регулировочные винты 5 и корректирующие катушки 6.

В катушке нутации 9 под действием радиочастотного поля  $H_1$  происходит изменение ориентации вектора намагниченности  $M_p$  ядерных моментов протонов текущей жидкости относительно направления постоянного магнитного поля  $H_p$  [1, 16–19]. После прохождения жидкостью соединительного участка трубопровода 10 это изменение фиксируется катушкой регистрации сигнала ЯМР 14 с использованием модуляционной методики [17–19]. Амплитуда  $U_s$  регистрируемого сигнала ЯМР достигает своего максимального значения, когда частота  $f_n$  радиочастотного поля (нутации) совпадает с частотой  $f_0$ :

$$f_0 = \gamma B_0, \quad (2)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение ядер.

Точность измерения резонансной частоты  $f_n = f_0$ , по которой в соответствии с (2) определяется значение  $B_0$ , зависит от величины отношения сигнал/шум (С/Ш), регистрируемого сигнала ЯМР и ширины линии нутации  $\Delta f_n$  (неоднородности магнитного поля в зоне размещения катушки нутации) [17–20]. Длина катушки нутации  $l_n$  составляла 3 мм, диаметр  $d_n = 6$  мм. Для размещения между полюсами электромагнита феррофлюидных ячеек контейнеров 7с ферромагнитной жидкостью (см. рис. 1), предварительно разогретыми до определенной температуры, в данной работе была применена специальная конструкция термостата из немагнитного материала с низкой теплопроводностью. Верхняя и нижняя грани конструкции термостата плотно соприкасались с полюсами магнита. При изменении расстояний между полюсами магнита эти грани могли перемещаться (расстояние между ними изменяется) таким образом, чтобы держатель ячейки был зафиксирован полюсами магнита. Между гранями были установлены две специальные подставки для размещения на них феррофлюидных ячеек, которые могли перемещаться вдоль оси соединяющей полюса магнитной системы. Перемещение подставок позволяло обеспечить симметричное расположение образца толщиной  $d_k$  (см. рис. 1) относительно катушки нутации 9.

Необходимо отметить, что использование описанной конструкции между феррофлюидными ячейками, полюсами магнитной системы и катушкой нутации позволяет установить термоизолирующие прокладки, изготовленные из высокотемпературных керамических волокон толщиной 3 мм [21]. Эксперименты показали, что использование прокладок позволяет надежно изолировать магнитную систему от разогретого образца. Например, для случая применения кювет цилиндрической формы с диаметром основания  $d_{\text{ц}} = 150$  мм, высотой  $h_{\text{ц}} = 30$  мм, толщиной стенок контейнера 1 мм изменение температура  $\Delta T_n$  между полюсами магнита в зоне размещения катушки нутации составило примерно 1.5 град. Для контроля температуры использовался стандартный термометрический датчик и инфракрасный дистанционный измеритель температуры Testo 845 (фирма Testo AG, Германия).

Кюветы с ферромагнитной жидкостью (феррофлюидная ячейка) в данной конструкции были расположены так, чтобы их основания были параллельны полюсам электромагнита, а также оси катушки нутации 9, по которой направлено поле  $H_1$  (см. рис. 1). Центры полюсов магнита, оснований контейнеров и катушки нутации находились на одной прямой.

При размещении кювет с ферромагнитной жидкостью в электромагните магнитное поле в зоне расположения катушки нутации изменяло

**Таблица 1.** Значения ширины линии нутации  $\Delta f_n$ , при которых измеряются\* резонансные частоты  $f_0$  и  $f_0^M$  для различных величин  $d_k$

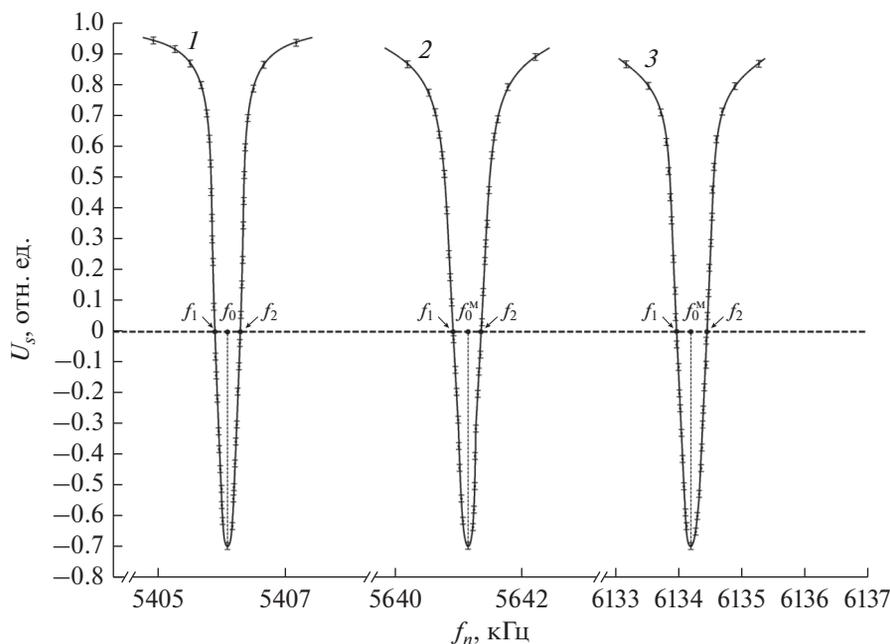
$d_k$ , мм	$f_k$ , Гц	$\Delta f_n$ , Гц
0	5406147	291
0.5	5459051	308
1.0	5516408	332
2.0	5641218	352
3.0	5747294	378
4.0	5868211	402
6.0	6134297	446

\* Условия проведения измерений: контейнер коллоидного раствора в воде однодоменных наночастиц гематита с объемной концентрацией 0.054 с ПАВ – гидроксид тетраметиламмония – при  $T = 289.2$  К,  $B_0 = 0.127$  Тл,  $H_1 = 11.26$  А/м,  $f_0 = 5406147$  Гц.

свое значение на некоторую величину  $\delta B$ , которая зависела как от  $d_k$ , так и от  $\chi_k$ . Регулируемыми винтами и корректирующими катушками неоднородность магнитного поля в этой зоне компенсировалась по минимуму ширины линии нутации  $\Delta f_n = f_2 - f_1$ . На рис. 2 представлена (линии нутации) зависимость амплитуды  $U_s$  регистрируемого сигнала ЯМР от частоты  $f_n$  при размещении между полюсами электромагнита кювет с различным значением  $d_k$  ферромагнитной жидкости. Кювета представляла собой цилиндр с  $d_{\text{ц}} = 150$  мм,  $h_{\text{ц}} = 10$  мм, толщина стенок – 1 мм.

В табл. 1 представлены измеренные значения  $\Delta f_n$ . Как видим, погрешности измерения резонансных частот нутации  $f_n$ , равных  $f_0$  и  $f_0^M$ , (индекс м относится к магнитной жидкости) которые используются для определения  $\chi_k$ , одинаковы. Измеряя резонансные частоты нутации в зоне размещения катушки нутации  $f_0$  и  $f_0^M$ , можно определить величину  $\delta B$ . Изменение индукции магнитного поля в зазоре между полюсами магнитной системы 4 было рассчитано с использованием методики, разработанной для П-образных одноосных магнитных систем [22–24].

Для феррофлюидной ячейки, которая представляет собой контейнер с диаметром  $d_{\text{ц}} = 150$  мм, с применением методики, рассмотренной в [22–24], была получена зависимость изменения  $\delta B_m$  в зоне размещения катушки нутации в зависимости от  $\chi_k$  и  $d_k$  ферромагнитной жидкости. Это позволило определить магнитную восприим-



**Рис. 2.** Форма линии нутации регистрируемого сигнала ЯМР при размещении между полюсами электромагнита двух контейнеров с различной толщиной слоя  $d_k$  коллоидного раствора в воде однодоменных наночастиц гематита с объемной концентрацией 0.054 с ПАВ – гидроксид тетраметиламмония при температуре  $T = 289.2$  К,  $H_1 = 11.26$  А/м;  $d_k = 0$  (1), 2 (2), 6 мм (3).

чивость ферромагнитной жидкости  $\chi_k$  с помощью следующего соотношения:

$$\chi_k = (f_0^M - f_0)/(f_0 - f_0^M(1 - 2d_k/d_e)). \quad (3)$$

Экспериментами было установлено, что нарушение симметричного расположения контейнеров по отношению к полюсам электромагнита и оси катушки нутации приводит к изменению значения  $f_0^M$ , а также к уширению линии нутации ( $\Delta f_n$  увеличивается), что ведет к повышению погрешности измерения  $f_0^M$ . В случае смещения центров основания контейнеров по отношению к прямой, проходящей через центры полюсов магнита перпендикулярно их плоскостям, происходит значительное уширение линии нутации по сравнению с ранее рассмотренным случаем (полной центровки контейнеров и полюсов). Кроме того, изменяется само значение  $f_0^M$ , которое изменяется с другой погрешностью по сравнению с  $f_0$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 3 представлены экспериментальные зависимости обратной магнитной восприимчивости  $\chi_k^{-1}$  от температуры для двух магнитных жидкостей. Значения  $\chi_k$  на графиках 1 и 2 получены с использованием (3) по измерениям двух резонансных

частот магнитного поля в зоне размещения катушки нутации. Измерения проводились при индукции магнитного поля  $B_0 = 238$  мТл с неоднородностью  $10^{-4}$  см $^{-1}$ . Ячейки с ферромагнитными жидкостями перед измерением  $\chi_k$  хранились в неподвижном состоянии более 10 сут (имитация длительного хранения).

При проведении измерения  $f_0$  и  $f_0^M$  температура в области размещения образца могла изменяться в пределах 283...363 К. При  $T = 293.1$  К по измеренным значениям  $\chi_k$  для двух феррожидкостей (водный раствор однодоменных наночастиц магнетита размером 12 нм с объемной концентрацией 0.027 с ПАВ – олеиновая кислота, и гематита размером 14 нм с объемной концентрацией 0.054 с ПАВ – гидроксид тетраметиламмония) были определены константы Кюри  $C$ , которые составили 135.1 и 188.6 К соответственно. Сравнение констант Кюри, полученных нами и определенных в [5, 6, 9] для веществ с теми же параметрами, а также рассчитанными с использованием формул в [14, 15] для определения  $\chi_k$ , подтвердили достоверность полученных результатов и корректность предложенного метода определения  $\chi_k$ .

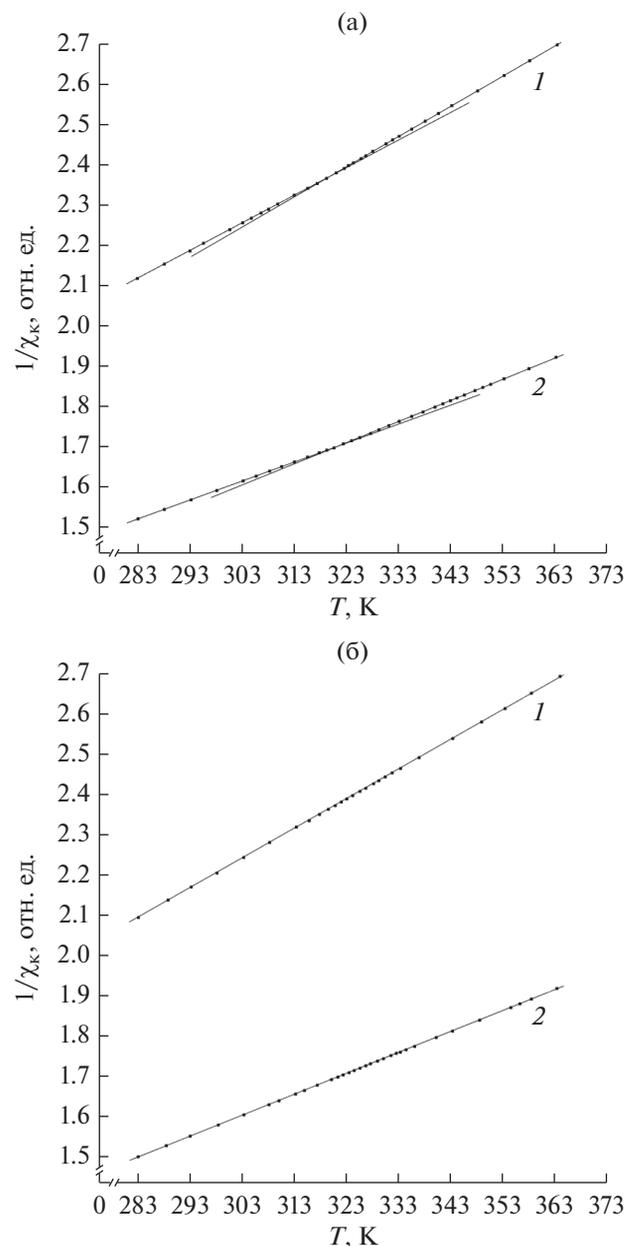
Температура ферромагнитной жидкости после перемещения феррофлюидной ячейки из области нагрева в межполюсное пространство магнитной системы контролировалась инфракрасным дистанционным измерителем температуры Testo 845 по

торцу феррофлюидной ячейки (чувствительность 0.1 К). Также с его помощью контролировалась температура ферромагнитной жидкости в момент проведения измерения резонансной частоты магнитного поля.

Проведенные эксперименты показали, что при нагревании ферромагнитных жидкостей в ячейке до температуры порядка 323 К происходит изменение угла наклона зависимостей  $\chi_k^{-1}$  от  $T$ , который при дальнейшем разогреве жидкости не изменяется (см. рис. 3а). Для того чтобы показать изменение угла наклона на рис. 3а построены продолженные прямые. При интенсивном перемешивании ферромагнитной жидкости из осадка поднимаются более крупные агломераты, которые не разрушаются при разогреве феррофлюидной ячейки в исследуемом диапазоне температур, так как их энергия связи порядка 0.03 эВ [15]. Поэтому изменение угла наклона зависимостей  $\chi_k^{-1}$  от  $T$  в этом случае в диапазоне температуры разогрева феррофлюидной ячейки от 283 до 363 К не происходит (рис. 3б).

Для подтверждения обоснованности предложенной нами методики измерения  $\chi_k$  было проведено сравнение результатов, полученных нами с использованием разработанной экспериментальной установки, и результатов измерения  $\chi_k$  на промышленных приборах высокого класса. Измерения  $\chi_k$  образцов ферромагнитной жидкости, использованных нами для изготовления феррофлюидных ячеек, выполнялись на ЭПР спектрометре "ER-100M" (компании Bruker), в дополнительную комплектацию которого входит система для измерения динамической и статической магнитной восприимчивости на частотах 0.1...5.0 МГц и вибрационном магнитометре VSM model 7410 (компания Lake Shore Cryotronics Inc.). При измерении значений  $\chi_k$  температура образцов ферромагнитной жидкости, изготовленных из гематита и магнетита, изменялась в диапазоне 283...363 К. Результаты сравнения выполненных измерений  $\chi_k$  представлены в табл. 2.

Кроме того, предлагаемая нами методика определения  $\chi_k$  была проверена на еще двух образцах также при  $T = 283...363$  К: 1) образец на основе ранее используемого водного раствора однодоменных частиц магнетита с добавлением в него наночастиц самария размером 14 нм, 2) образец на основе гематита с добавлением в него наночастиц кобальта размером 14 нм; в качестве ПАВ использовалась лимонная кислота. Эти образцы также были исследованы на низкочастотном ЭПР-спектрометре ER-100M (компании Bruker) с криостатом для проведения измерений в диапазоне температур 213...400 К и на вибрационном магнитометре VSM model 7410 (компания Lake Shore Cryotronics Inc.). Результаты сравне-



**Рис. 3.** Зависимость магнитной восприимчивости  $\chi_k$  от температуры  $T$  коллоидного раствора в случае длительного хранения феррофлюидной ячейки (а) и после его интенсивного перемешивания (б); кривые 1 – раствор в воде однодоменных наночастиц магнетита с объемной концентрацией 0.027 с ПАВ – олеиновая кислота, кривые 2 – органический растворитель гематит с объемной концентрацией 0.054 с ПАВ – гидроксид тетраметиламмония.

ния выполненных измерений  $\chi_k$  на этих образцах представлены в табл. 3.

Анализ полученных результатов на четырех образцах (см. табл. 2 и 3) показал, что значения  $\chi_k$ , измеренные различными методами, совпадают в пределах погрешности измерения.

**Таблица 2.** Значения магнитной восприимчивости  $\chi$  для ферромагнитных жидкостей, изготовленных из наночастиц магнетита (М) и гематита (Г) от температуры  $T$ , измеренные на экспериментальной установке и промышленными приборами

$T$ , К	Ядерно-магнитный магнитометр на текущей жидкости	ЭПР-спектрометр "ER-100M" (компания Bruker)	Вибрационный магнитометр VSM model 7410 (компания Lake Shore Cryotronics Inc.)
283.2	М. $2.0957 \pm 0.0158$ Г. $1.5012 \pm 0.0116$	М. $2.0898 \pm 0.0104$ Г. $1.4974 \pm 0.0075$	М. $2.0892 \pm 0.0065$ Г. $1.4967 \pm 0.0047$
288.3	М. $2.1334 \pm 0.0160$ Г. $1.5021 \pm 0.0117$	М. $2.1278 \pm 0.0105$ Г. $1.4989 \pm 0.0076$	М. $2.1271 \pm 0.0065$ Г. $1.4983 \pm 0.0047$
293.1	М. $2.1695 \pm 0.0162$ Г. $1.5540 \pm 0.0117$	М. $2.1648 \pm 0.0106$ Г. $1.5509 \pm 0.0077$	М. $2.1641 \pm 0.0066$ Г. $1.5502 \pm 0.0048$
298.2	М. $2.2072 \pm 0.0165$ Г. $1.5844 \pm 0.0118$	М. $2.2027 \pm 0.0107$ Г. $1.5815 \pm 0.0079$	М. $2.2021 \pm 0.0066$ Г. $1.5804 \pm 0.0049$
303.3	М. $2.2450 \pm 0.0168$ Г. $1.6081 \pm 0.0119$	М. $2.2408 \pm 0.0109$ Г. $1.6039 \pm 0.0080$	М. $2.2402 \pm 0.0067$ Г. $1.6030 \pm 0.0049$
308.1	М. $2.2805 \pm 0.0170$ Г. $1.6336 \pm 0.0122$	М. $2.2761 \pm 0.0113$ Г. $1.6297 \pm 0.0081$	М. $2.2754 \pm 0.0068$ Г. $1.6291 \pm 0.0049$
313.2	М. $2.3182 \pm 0.0173$ Г. $1.6606 \pm 0.0124$	М. $2.3145 \pm 0.0115$ Г. $1.6552 \pm 0.0082$	М. $2.3137 \pm 0.0069$ Г. $1.6543 \pm 0.0050$
317.5	М. $2.3501 \pm 0.0176$ Г. $1.6834 \pm 0.0126$	М. $2.3465 \pm 0.0117$ Г. $1.6786 \pm 0.0083$	М. $2.3457 \pm 0.0070$ Г. $1.6777 \pm 0.0050$
323.3	М. $2.3930 \pm 0.0179$ Г. $1.7142 \pm 0.0128$	М. $2.3878 \pm 0.0119$ Г. $1.7077 \pm 0.0085$	М. $2.3867 \pm 0.0071$ Г. $1.7059 \pm 0.0051$
328.1	М. $2.4285 \pm 0.0182$ Г. $1.7396 \pm 0.0130$	М. $2.4237 \pm 0.0121$ Г. $1.7349 \pm 0.0087$	М. $2.4227 \pm 0.0072$ Г. $1.7340 \pm 0.0052$
333.1	М. $2.4655 \pm 0.0185$ Г. $1.7661 \pm 0.0132$	М. $2.4609 \pm 0.0123$ Г. $1.7619 \pm 0.0088$	М. $2.4601 \pm 0.0173$ Г. $1.7608 \pm 0.0053$
338.1	М. $2.5025 \pm 0.0193$ Г. $1.7926 \pm 0.0138$	М. $2.4975 \pm 0.0125$ Г. $1.7877 \pm 0.0089$	М. $2.4966 \pm 0.0075$ Г. $1.7863 \pm 0.0054$
343.1	М. $2.5396 \pm 0.0199$ Г. $1.8191 \pm 0.0143$	М. $2.5345 \pm 0.0126$ Г. $1.8146 \pm 0.0091$	М. $2.5336 \pm 0.0076$ Г. $1.8134 \pm 0.0055$
348.4	М. $2.5788 \pm 0.0206$ Г. $1.8472 \pm 0.0147$	М. $2.5742 \pm 0.0128$ Г. $1.8431 \pm 0.0092$	М. $2.5734 \pm 0.0077$ Г. $1.8422 \pm 0.0056$
353.1	М. $2.6136 \pm 0.0209$ Г. $1.8722 \pm 0.0149$	М. $2.6083 \pm 0.0130$ Г. $1.8681 \pm 0.0093$	М. $2.6071 \pm 0.0078$ Г. $1.8669 \pm 0.0057$
358.2	М. $2.6513 \pm 0.0212$ Г. $1.8992 \pm 0.0151$	М. $2.6466 \pm 0.0132$ Г. $1.8922 \pm 0.0095$	М. $2.6453 \pm 0.0079$ Г. $1.8910 \pm 0.0057$
363.2	М. $2.6901 \pm 0.0215$ Г. $1.9252 \pm 0.0154$	М. $2.6857 \pm 0.0134$ Г. $1.9209 \pm 0.0096$	М. $2.6844 \pm 0.0080$ Г. $1.9192 \pm 0.0058$

**Таблица 3.** Значения магнитной восприимчивости  $\chi$  от температуры  $T$  образцов ферромагнитных жидкостей, изготовленных из наночастиц магнетита и самария (МС) и гематита и кобальта (ГК), измеренные на экспериментальной установке и промышленными приборами

$T, K$	Ядерно-магнитный магнитометр на текущей жидкости	ЭПР-спектрометр "ER-100M" (компания BRUKER)	Вибрационный магнитометр VSM model 7410 (компания Lake Shore Cryotronics Inc.)
283.1	МС. $1.2870 \pm 0.0096$ ГК. $1.1607 \pm 0.0087$	МС. $1.2842 \pm 0.0064$ ГК. $1.1579 \pm 0.0056$	МС. $1.2836 \pm 0.0038$ ГК. $1.1572 \pm 0.0035$
288.1	МС. $1.3098 \pm 0.0098$ ГК. $1.1812 \pm 0.0088$	МС. $1.3067 \pm 0.0065$ ГК. $1.1782 \pm 0.0059$	МС. $1.3060 \pm 0.0039$ ГК. $1.1774 \pm 0.0035$
293.2	МС. $1.3452 \pm 0.0101$ ГК. $1.2021 \pm 0.0090$	МС. $1.3419 \pm 0.0067$ ГК. $1.1989 \pm 0.0060$	МС. $1.3411 \pm 0.0040$ ГК. $1.1981 \pm 0.0036$
298.1	МС. $1.3553 \pm 0.0102$ ГК. $1.2221 \pm 0.0092$	МС. $1.3521 \pm 0.0068$ ГК. $1.2189 \pm 0.0061$	МС. $1.3516 \pm 0.0041$ ГК. $1.2181 \pm 0.0036$
303.0	МС. $1.3781 \pm 0.0103$ ГК. $1.2423 \pm 0.0093$	МС. $1.3750 \pm 0.0069$ ГК. $1.2396 \pm 0.0062$	МС. $1.3743 \pm 0.0041$ ГК. $1.2390 \pm 0.0037$
308.3	МС. $1.4016 \pm 0.0105$ ГК. $1.2640 \pm 0.0095$	МС. $1.3984 \pm 0.0070$ ГК. $1.2609 \pm 0.0063$	МС. $1.3978 \pm 0.0042$ ГК. $1.2602 \pm 0.0038$
313.3	МС. $1.4243 \pm 0.0107$ ГК. $1.2845 \pm 0.0096$	МС. $1.4211 \pm 0.0071$ ГК. $1.2813 \pm 0.0064$	МС. $1.4205 \pm 0.0043$ ГК. $1.2806 \pm 0.0039$
317.1	МС. $1.4416 \pm 0.0108$ ГК. $1.3001 \pm 0.0098$	МС. $1.4383 \pm 0.0072$ ГК. $1.2969 \pm 0.0065$	МС. $1.4376 \pm 0.0043$ ГК. $1.2962 \pm 0.0039$
323.2	МС. $1.4693 \pm 0.0110$ ГК. $1.3251 \pm 0.0099$	МС. $1.4661 \pm 0.0073$ ГК. $1.3209 \pm 0.0066$	МС. $1.4653 \pm 0.0044$ ГК. $1.3201 \pm 0.0040$
328.4	МС. $1.4929 \pm 0.0111$ ГК. $1.3464 \pm 0.0103$	МС. $1.4897 \pm 0.0074$ ГК. $1.3430 \pm 0.0067$	МС. $1.4889 \pm 0.0044$ ГК. $1.3422 \pm 0.0041$
333.2	МС. $1.5148 \pm 0.0114$ ГК. $1.3660 \pm 0.0106$	МС. $1.5114 \pm 0.0075$ ГК. $1.3627 \pm 0.0068$	МС. $1.5104 \pm 0.0045$ ГК. $1.3620 \pm 0.0042$
338.2	МС. $1.5375 \pm 0.0117$ ГК. $1.3866 \pm 0.0109$	МС. $1.5340 \pm 0.0076$ ГК. $1.3833 \pm 0.0069$	МС. $1.5333 \pm 0.0046$ ГК. $1.3825 \pm 0.0042$
343.3	МС. $1.5607 \pm 0.0122$ ГК. $1.4075 \pm 0.0112$	МС. $1.5574 \pm 0.0078$ ГК. $1.4039 \pm 0.0070$	МС. $1.5567 \pm 0.0047$ ГК. $1.4033 \pm 0.0043$
348.0	МС. $1.5821 \pm 0.0126$ ГК. $1.4267 \pm 0.0114$	МС. $1.5774 \pm 0.0079$ ГК. $1.4230 \pm 0.0071$	МС. $1.5769 \pm 0.0047$ ГК. $1.4222 \pm 0.0043$
353.3	МС. $1.6062 \pm 0.0128$ ГК. $1.4485 \pm 0.0116$	МС. $1.6028 \pm 0.0080$ ГК. $1.4451 \pm 0.0072$	МС. $1.6022 \pm 0.0048$ ГК. $1.4445 \pm 0.0044$
358.1	МС. $1.6280 \pm 0.0130$ ГК. $1.4681 \pm 0.0117$	МС. $1.6263 \pm 0.0081$ ГК. $1.4646 \pm 0.0073$	МС. $1.6254 \pm 0.0049$ ГК. $1.4639 \pm 0.0044$
363.3	МС. $1.6517 \pm 0.0132$ ГК. $1.4894 \pm 0.0119$	МС. $1.6481 \pm 0.0082$ ГК. $1.4858 \pm 0.0074$	МС. $1.6474 \pm 0.0050$ ГК. $1.4850 \pm 0.0045$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные экспериментальные результаты показывают, что в диапазоне изменения температур от 283 до 363 К разработанный нами метод позволяет определять  $\chi_k$  и константу Кюри ферромагнитной жидкости внутри феррофлюидной ячейки с погрешностью не выше 1.0% даже при образцах малого размера и слабом изменении вносимой образцом неоднородности магнитного поля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудкин В.И., Пахомов Л.Н. Квантовая электроника. СПб.: Политехн. Ун-т, 2012.
2. Nepomnyashchaya E.K., Prokofiev A.V., Velichko E.N. et al. // J. Magnetism and Magnetic Mater. V. 431. P. 24.
3. Nepomnyashchaya E.K., Velichko E.N., Pleshakov I.V. et al. // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 841. № 1. P. 012020.
4. Logunov S.E., Koshkin A. Yu., Davydov V.V., Petrov A.A. // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 741. № 1. P. 012092.
5. Жерновой А.И., Дьяченко С.И. // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 1. С. 119.
6. Жерновой А.И., Комлев А.А., Дьяченко С.В. // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 2. С. 146.
7. Ryzhov V.A., Pleshakov I.V., Nechitailov A.A. et al. // Appl. Magnetic Resonance. 2014. V. 45. № 4. P. 339.
8. Pshenichnikov A.F., Lebedev A.V. // Colloid J. 2005. V. 67. № 2. P. 189.
9. Agruzov P.M., Pleshakov I.V., Bibik E.E. et al. // Europhys. Lett. 2015. V. 111. № 5. P. 57003-5.
10. Кабардина С.И., Шеффер Н.И. Измерения физических величин. М.: Бином, 2009.
11. Чертов А.Г. Физические величины. М.: Высшая школа, 1990.
12. Logunov S.E., Davydov V.V., Vysoczky M.G., Mazing M.S. // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1038. № 1. P. 012093.
13. Agruzov P.M., Pleshakov I.V., Bibik E.E., Shamray A.V. // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 104. № 7. P. 071108-4.
14. Леше А. Ядерная индукция. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
15. Давыдов В.В., Дудкин В.И. // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 7. С. 154.
16. Davydov V.V., Dudkin V.I. // Russ. Phys. J. 2015. V. 58. № 2. P. 146.
17. Davydov V.V., Dudkin V.I., Eleseev A.I. // Techn. Phys. Lett. 2015. V. 41. № 5. P. 469.
18. Davydov V.V., Dudkin V.I., Karseev A. Yu. // Instruments and Experimental Techniques. 2015. V. 58. № 6. P. 787.
19. Davydov V.V., Dudkin V.I., Petrov A.A., Myazin N.S. // Techn. Phys. Lett. 2016. V. 42. № 7. P. 692.
20. Давыдов В.В., Дудкин В.И., Мязин Н.С. // РЭ. 2016. Т. 61. № 10. С. 1026.
21. Афанасов И.М., Лазорьяк Б.И. Высокотемпературные керамические волокна. М.: Изд-во МГУ, 2010.
22. Буль Б.К. Основы теории и расчета магнитных цепей. М.: Энергия, 1970.
23. Буль Б.К. Расчет магнитных проводимостей воздушных зазоров для круглых и прямоугольных полюсов. М.: МЭИ, 1961.
24. Гордон А.В., Сливинская А.Г. Электромагниты постоянного тока. М.: Энергоиздат, 1980.