

# Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 86. Iss. 6

---

## EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),  
**N.N. Bolotnik** (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**F.M. Borodich** (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),  
**A.B. Freidin** (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),  
**A.M. Gaifullin** (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),  
**M.L. Kachanov** (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),  
**Ju.D. Kaplunov** (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),  
**A.A. Korobkin** (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),  
**A.M. Kovalev** (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, DPR),  
**V.V. Kozlov** (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),  
**A.M. Krivtsov** (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),  
**A.G. Kulikovskii** (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),  
**Yu.Yu. Makhovskaya** (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**N.F. Morozov** (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),  
**T.J. Pedley** (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),  
**F. Pfeiffer** (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),  
**V.V. Pukhnachev** (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),  
**G. Rega** (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),  
**S.A. Reshmin** (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**V.A. Sabelnikov** (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),  
**Ye.I. Shifrin** (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**F.E. Udwardia** (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),  
**S.E. Yakush** (Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**V.F. Zhuravlev** (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**K. Zimmermann** (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

---

*Учредитель:* РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

*Редакция:*

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

*Адрес редакции:* 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

*Телефон редакции:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте [Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU](http://eLIBRARY.RU) доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

---

Founder: Russian Academy of Sciences

*The Editorial Staff:*

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

*The Editorial Board Address:* 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

*Phone:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

---

Николай Гурьевич Четаев (к 120-летию со дня рождения)	781
О нелинейных колебаниях трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости <i>А. П. Маркеев</i>	784
Прецессии гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента <i>Г. В. Горр, А. В. Мазнев</i>	801
Гиростат с электромотором: математическая модель и стационарные движения <i>Б. И. Коносевиц, Ю. Б. Коносевиц</i>	814
Об аналогах случая Гесса для гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил <i>А. А. Косов</i>	839
Об относительных равновесиях на поверхности сферической полости равномерно вращающегося гравитирующего шара <i>А. А. Буров, В. И. Никонов, Е. С. Шалимова</i>	857
Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей <i>В. Ю. Ольшанский</i>	872
Ориентация и кинематика вращения: кватернионные и четырехмерные матричные кососимметрические операторы, уравнения и алгоритмы <i>Ю. Н. Челноков</i>	887
О значении $Q$ -параметра в точке минимума давления на плоскости симметрии небаротропного течения <i>Г. Б. Сизых</i>	917
Устойчивость адвективного течения в горизонтальном теплоизолированном снизу слое жидкости с твердыми границами <i>К. Г. Шварц, Ю. А. Шварц</i>	926
Нелинейные монопольное и дипольное акустические излучения слабо заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле <i>А. И. Григорьев, Н. Ю. Колбнева, С. О. Ширяева</i>	938
Радиальное растекание нефтепродуктов по поверхности воды <i>А. В. Кистович, Т. О. Чаплина, В. П. Пахненко</i>	958
Аномальное прохождение упругой волны через тонкую перемычку, соединяющую два плоских изотропных волновода <i>С. А. Назаров</i>	977
Давление и дебит при переходных режимах работы скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва <i>Р. А. Башмаков, Н. О. Фокеева, В. Ш. Шагапов</i>	998

---

---

# CONTENTS

---

Chetaev N.G. (On his 120-th birthday)	781
On Nonlinear Oscillations of a Triaxial Ellipsoid on a Smooth Horizontal Plane	
<i>A. P. Markeev</i>	784
Precessions of a Gyrostat under the Action of Potential and Gyroscopic Forces in the Case of a Variable Gyrostatic Momentum	
<i>G. V. Gorr, A. V. Maznev</i>	801
Gyrostat with the Electric Motor: Mathematical Model and Stationary Motions	
<i>B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich</i>	814
On Analogues of the Hess Case for a Gyrostat under the Action of a Moment of Gyroscopic and Circular Forces	
<i>A. A. Kosov</i>	839
On Relative Equilibria on a Surface of Spherical Cavity Inside of a Uniformly Rotating Gravitating Ball	
<i>A. A. Burov, V. I. Nikonov, E. S. Shalimov</i>	857
Regular Precession of a Gyrostat in Three Uniform Fields	
<i>V. Yu. Ol'shanskii</i>	872
Orientation and Kinematics of Rotation: Quaternion and Four-dimensional Skew-symmetric Operators, Equations and Algorithms	
<i>Yu. N. Chelnokov</i>	887
On the Value of the Q Criteria at the Point of Minimum Pressure on the Plane of Symmetry of Non-Barotropic Flow	
<i>G. B. Sizykh</i>	917
Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer Insulated from below with Solid Boundaries	
<i>K. G. Shvarts, Yu. A. Shvarts</i>	926
Nonlinear Monopole and Dipole Acoustic Radiation of a Weakly Charged Drop, Which Oscillates in a Homogeneous Electrostatic Field	
<i>A. I. Grigor'ev, N. Yu. Kolbneva, S. O. Shiryayeva</i>	938
Radial Spreading of Petroleum Products on the Surface of the Water	
<i>A. V. Kistovich, T. O. Chaplina, V. P. Pakhnenko</i>	958
Abnormal Transmission of Elastic Waves through a Thin Ligament Connecting Two Planar Isotropic Waveguide	
<i>S. A. Nazarov</i>	977
Some Features of Fluid Filtration in a Hydraulic Fracture under Transient Conditions of Well Operation	
<i>R. A. Bashmakov, N. O. Fokeeva, V. Sh. Shagapov</i>	998

---

---

---

---

**НИКОЛАЙ ГУРЬЕВИЧ ЧЕТАЕВ**  
**(К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)**

DOI: 10.31857/S0032823522060042



Николай Гурьевич Четаев родился 6 декабря (23 ноября) 1902 г. в селе Карадули Лаишевского уезда Казанской губернии. В 1920 г. он поступает на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета, где, будучи студентом, публикует свою первую научную работу “Дифракция света в непрозрачных средах”. За время аспирантуры публикует две статьи: “Об одной задаче Стеклова” и “Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести”, содержащие решение проблемы звездной динамики об устойчивых фигурах равновесия вращающейся жидкости.

В феврале 1929 года по окончании аспирантуры он направляется на стажировку в Германию в Геттингенский университет, где знакомится с аэродинамической школой Л. Прандтля и продолжает свои исследования преимущественно в области устойчивости движения.

После окончания стажировки в 1930 году Николай Гурьевич начинает преподавательскую деятельность в родном Казанском университете и до переезда в Москву возглавляет кафедру механики физико-математического факультета Казанского университета (1930–1940) и кафедру аэродинамики Казанского авиационного института (1933–1937).

Получив в 1940 г. приглашение работать в Академии наук СССР, Н.Г. Четаев переезжает в Москву и создает отдел общей механики в Институте механики АН СССР. В июне 1944 года он становится заместителем директора, в январе 1946 года — директором института и проработает в этой должности до сентября 1953. В Москве он возвращается к преподавательской деятельности в 1944 году на кафедре теоретической механики Московского университета, и впоследствии становится ее заведующим. 29 декабря 1943 года Н.Г. Четаев избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению технических наук (специальность “Механика”).

Крупнейший специалист по общей механике, аналитической динамике, качественной теории дифференциальных уравнений, Н.Г. Четаев является автором более ста научных работ. Он глубоко развил теорию устойчивости движения А.М. Ляпунова. В частности, он получил важные результаты по проблеме обращения теоремы Лагранжа—Дирихле об устойчивости равновесия, доказал общую теорему о неустойчивости равновесия. Им обобщены две теоремы Пуанкаре о числе реальных ветвей кривой равновесия, проходящих через точку бифуркации, и о смене устойчивости, а также дано доказательство существования устойчивой последовательности фигур равновесия. Предложены методы решения задач об устойчивости неустановившихся движений, найдены достаточные условия устойчивости вращательных движений снаряда. В динамике системы твердых тел он предложил широко распространенный в настоящее время способ построения функции Ляпунова в виде связки первых интегралов уравнений движения.

В области аналитической динамики Н.Г. Четаевым также получены важные фундаментальные результаты. Он распространил принцип наименьшего принуждения немецкого математика К.Ф. Гаусса на случай неголомомной нелинейной дифференциальной связи. Он развил уравнения динамики Пуанкаре, для нелинейных связей нашел возможные перемещения, при которых принципы Лагранжа и Гаусса оказались совместимыми. Им введено важное понятие о циклических перемещениях системы и показано его использование для понижения порядка уравнений и их интегрирования, а также указано на возможность решения уравнений типа Гамильтона—Якоби в более общих функциях, чем функция действия. Таким образом, он ввел в аналитическую механику новый раздел — динамику систем в групповых переменных, что во многом определило направление дальнейших исследований в механике.

Блестящий педагог Николай Гурьевич Четаев воспитал немало учеников, внесших значительный вклад в развитие различных областей механики, многие из которых стали впоследствии членами-корреспондентами и академиками АН СССР и РАН.

С 1945 г. до конца жизни (1959 г.) Н.Г. Четаев был ответственным редактором журнала “Прикладная математика и механика” — журнала, в котором были опубликованы многие его работы периода наивысшей творческой активности.

Н.Г. Четаев был награжден орденом Трудового Красного Знамени (1945) и орденом Ленина (1953). За цикл работ по устойчивости движения и аналитической механике в 1960 г. ему была присуждена Ленинская премия (посмертно).

Несмотря на существенное развитие теории устойчивости, труды Н.Г. Четаева и в настоящее время не утратили своего значения. Они являются для ученых-механиков ценным научным руководством, содержащим компактное и ясное изложение основ теории устойчивости движения, а полученные в них результаты востребованы и развиваются в работах современных ученых.

#### ИЗБРАННЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. *Четаев Н.Г.* Об одной задаче Стеклова // Докл. АН СССР. 1926. № 11. С. 209–210.
2. *Четаев Н.Г.* Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. 1926. Т. 1. Вып. 3. С. 49–94.

3. Četjev N. Sur les Equation de Poincare // Докл. АН СССР. 1928. № 7.
4. Четаев Н.Г. Об устойчивости в смысле Пуассона // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. 1929. Т. 89. Кн. 2. С. 199–201.
5. Tschetaew N.G. Uber die von den Ellipsoiden abgele-iteten Gleichgewichtsfiguren // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 3. 1929. Т. 4. Вып. 1. С. 1–36.
6. Четаев Н.Г. О боковой устойчивости аэроплана // Учен. зап. Казан. ун-та. 1930. Т. 90. Кн. 6. С. 957–998.
7. Četjev N. Sur reciproque du theoreme de Lagrange// C.R. Acad. sci. Paris. 1930. V. 190. P. 360–362.
8. Четаев Н.Г. Об устойчивых траекториях динамики // Учен. зап. Казан. ун-та. 1931. Т. 91. Кн. 4. Математика. Вып. 1. С. 3–8.
9. Четаев Н.Г. Одна теорема неустойчивости // Докл. АН СССР. 1934. Т. 1. № 9. С. 529–531.
10. Четаев Н.Г. Об устойчивых траекториях динамики // Сб. научн. тр. КАИ. 1936. С. 3–18.
11. Четаев Н.Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функции не есть максимум // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. 1938. Т. 98. Кн. 9. Математика. Вып. 3. С. 43–58.
12. Четаев Н.Г. Одно видоизменение принципа Гаусса // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 11–12.
13. Четаев Н.Г. Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
14. Четаев Н.Г. Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. 1954. Т. 114. № 8. С. 5–7.
15. Четаев Н.Г. О продолжении оптико-механической аналогии // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 488–489.
16. Четаев Н.Г. О некоторых связях с трением // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 35–38.
17. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
18. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 207 с.
19. Четаев Н.Г. Теоретическая механика / Под ред. Румянцева В.В., Якимовой К.Ч. М.: Наука, 1987.

УДК 531.36

## О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИпсоИДА НА ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. А. П. Маркеев<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия

\*e-mail: anat-markeev@mail.ru

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

После доработки 20.07.2022 г.

Принята к публикации 20.07.2022 г.

Рассматривается движение однородного эллипсоида по неподвижной горизонтальной плоскости в однородном поле тяжести. Плоскость считается абсолютно гладкой, а полуоси эллипсоида различными. Существует положение устойчивого равновесия, когда эллипсоид опирается на плоскость наинижней точкой своей поверхности. Исследуются нелинейные колебания эллипсоида в окрестности этого равновесия. Анализ осуществляется при помощи методов классической теории возмущений, КАМ – теории и алгоритмов компьютерной алгебры. Получена нормальная форма функции Гамильтона возмущенного движения до членов шестой степени включительно относительно отклонений от положения равновесия. Дано приближенное аналитическое представление колмогоровского множества условно-периодических колебаний, указана оценка меры этого множества. Исследована задача о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивого равновесия в резонансном и нерезонансном случаях.

*Ключевые слова:* твердое тело, условно-периодические и периодические колебания, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522060108

Задача о движении твердого тела, соприкасающегося с твердой поверхностью, имеет почти трехсотлетнюю историю [1]. Эта задача интересна не только с общетеоретической точки зрения, она важна своими приложениями в машиностроении, приборостроении, транспорте. Интерес исследователей к этой задаче не ослабевает. Наоборот, в связи с бурным развитием работ по созданию робототехники этот интерес, по-видимому, возрастает все более и более.

Много исследований посвящено механико-математическим моделям, в которых предполагается, что твердое тело движется по плоскости, являющейся гладкой. В данной статье рассматривается динамика однородного трехосного эллипсоида на абсолютно гладкой плоскости в однородном поле тяжести. Этой задаче посвящено довольно много исследований. Отметим только основные из них.

В статье [2] получены условия, необходимые для устойчивости перманентного вращения эллипсоида вокруг его оси, направленной вдоль вертикали. Строгая нелинейная задача об устойчивости этого вращения исследована недавно в статье [3]; в этой же статье исследована устойчивость такого движения эллипсоида, в котором он касается плоскости одним из своих главных сечений, которое считалось близким к кругу. Общая задача о существовании и устойчивости перманентных вращений и регуляр-



ных прецессий тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости подробно изучена в [4–6].

В статьях [7, 8] при помощи КАМ-теории дан качественный анализ движения на неподвижной гладкой плоскости трехосного эллипсоида, мало отличающегося от шара.

Вопросы интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела на гладкой плоскости изучались в [9–12]. В частности, показано [10], что в задаче о движении близкого к шару однородного трехосного эллипсоида не существует необходимый для интегрируемости интеграл, дополнительный к интегралу энергии.

Ниже исследуются нелинейные колебания однородного трехосного эллипсоида в окрестности его устойчивого положения равновесия. Используются классические и современные методы исследования динамических систем, описываемых уравнениями Гамильтона [13–15]. Необходимые вычисления существенно опираются на преобразование Биркгофа [16] и его модификации [17], удобные для их компьютерной реализации.

**1. Введение. Уравнения движения.** Рассмотрим движение однородного эллипсоида по неподвижной абсолютно гладкой плоскости в однородном поле тяжести. Полуоси  $a, b$  и  $c$  эллипсоида считаем различными и полагаем, что  $a < b < c$ . В системе координат  $O\xi\eta\zeta$  с началом в центре тяжести  $O$  эллипсоида его поверхность задается уравнением

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \quad (1.1)$$

Ориентация эллипсоида относительно неподвижной системы координат  $O_*XYZ$  задается (см. рис. 1) углами Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$  или матрицей направляющих косинусов  $a_{ij}$ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\ a_{13} &= \sin \psi \sin \theta \\ a_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, & a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \\ a_{23} &= -\cos \psi \sin \theta \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, & a_{32} &= \cos \varphi \sin \theta, & a_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

На рис. 1 показана также система координат  $OXYZ$ , оси которой параллельны соответствующим осям системы  $O_*XYZ$ , через  $ON$ , как принято, обозначена линия узлов.

Координаты точки  $M$ , которой эллипсоид касается неподвижной опорной плоскости  $O_*XY$ , определяются [1] равенствами

$$\xi = -\frac{a^2}{f} a_{31}, \quad \eta = -\frac{b^2}{f} a_{32}, \quad \zeta = -\frac{c^2}{f} a_{33}, \quad (1.3)$$

где  $f$  – расстояние от центра тяжести эллипсоида до плоскости  $O_*XY$ ,

$$f = \sqrt{a^2 a_{31}^2 + b^2 a_{32}^2 + c^2 a_{33}^2} \quad (1.4)$$

Так как плоскость абсолютно гладкая, то проекция центра тяжести эллипсоида на плоскость  $O_*XY$  движется равномерно и прямолинейно. Не ограничивая общность, будем считать, что она неподвижна и, следовательно, точка  $O$  движется вдоль фиксированной прямой, параллельной вертикальной оси  $O_*Z$ . При этом координаты точки  $M$  на плоскости  $O_*XY$  вычисляются [1] по формулам

$$X_M = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \quad Y_M = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \quad (1.5)$$

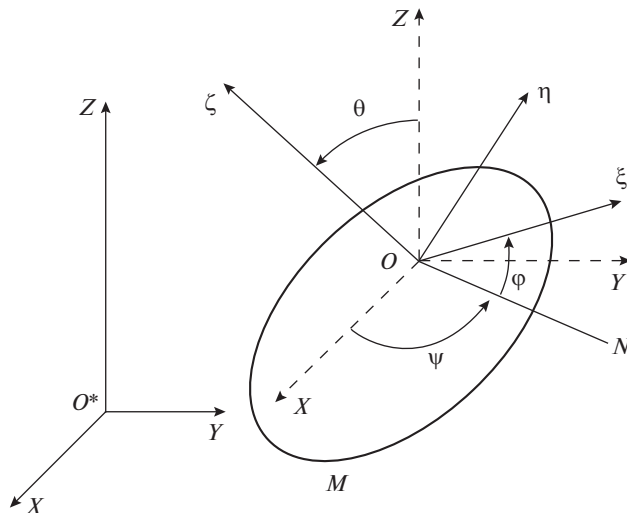


Рис. 1.

Пусть  $mg$  – вес эллипсоида, а  $A, B, C$  – его главные центральные моменты инерции,

$$A = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5}m(c^2 + a^2), \quad C = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \quad (1.6)$$

Обобщенные импульсы  $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ , соответствующие углам Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ , определяются [1] равенствами

$$\begin{aligned} p_\psi &= e_2\dot{\psi} + e_4\dot{\theta} + C \cos \theta \dot{\varphi}, & p_\theta &= e_4\dot{\psi} + e_3\dot{\theta} + mf_\theta f_\varphi \dot{\varphi} \\ p_\varphi &= C \cos \theta \dot{\psi} + mf_\theta f_\varphi \dot{\theta} + e_1\dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ ,  $f_\theta$  и  $f_\varphi$  – частные производные функции (1.4) по  $\theta$  и  $\varphi$  соответственно, а

$$\begin{aligned} e_1 &= C + mf_\varphi^2, & e_2 &= (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta \\ e_3 &= A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + mf_\theta^2, & e_4 &= (A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

Угол прецессии  $\psi$  является циклической координатой, поэтому импульс  $p_\psi$  постоянен во все время движения. Будем считать, что  $p_\psi = 0$ . Из (1.6)–(1.8) тогда следует, что при известных функциях  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  величина  $\dot{\psi}$  может быть найдена из равенства

$$\dot{\psi} = - \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta} + (a^2 + b^2) \cos \theta \dot{\varphi}}{\left[ (b^2 + c^2) \sin^2 \varphi + (c^2 + a^2) \cos^2 \varphi \right] \sin^2 \theta + (a^2 + b^2) \cos^2 \theta} \quad (1.9)$$

Изменение переменных  $\theta, \varphi$  со временем определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (1.10)$$

$$H = \frac{e_1 e_2 - C^2 \cos^2 \theta}{2\Delta} p_\theta^2 + \frac{e_2 e_3 - e_4^2}{2\Delta} p_\varphi^2 + \frac{C e_4 \cos \theta - e_2 m f_\theta f_\varphi}{\Delta} p_\theta p_\varphi + mgf \quad (1.11)$$

$$\Delta = e_1 e_2 e_3 - e_1 e_4^2 - C^2 e_3 \cos^2 \theta + 2 m f_\theta f_\varphi C e_4 \cos \theta - m^2 f_\theta^2 f_\varphi^2 e_2$$

Уравнения движения (1.10) допускают частное решение, в котором  $\theta \equiv \pi/2$ ,  $\varphi \equiv \pi/2$ . Это решение отвечает устойчивому положению равновесия эллипсоида, в котором он опирается на плоскость точкой  $M$  своей поверхности, лежащей на наименьшей оси эллипсоида. Цель статьи состоит в исследовании нелинейных колебаний эллипсоида в окрестности этого положения равновесия.

**2. Функция Гамильтона возмущенного движения и ее предварительное преобразование.**

Введем возмущения  $q_1, q_2$  углов Эйлера  $\theta, \varphi$  и безразмерные импульсы  $p_1, p_2$  возмущенного движения по формулам

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + q_2, \quad p_\theta = m a^{3/2} g^{1/2} p_1, \quad p_\varphi = m a^{3/2} g^{1/2} p_2, \quad (2.1)$$

и перейдем еще к безразмерному времени  $\tau = (g/a)^{1/2} t$ . Функция Гамильтона возмущенного движения может быть представлена в виде сходящегося ряда по формам четных степеней относительно  $q_1, q_2, p_1, p_2$ . Отвечающая линеаризованным уравнениям возмущенного движения квадратичная форма имеет вид

$$H_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c^2 - a^2}{a^2} q_1^2 + \frac{5a^2}{c^2 + a^2} p_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{b^2 - a^2}{a^2} q_2^2 + \frac{5a^2}{a^2 + b^2} p_2^2 \right) \quad (2.2)$$

Соответствующие функции (2.2) канонические уравнения описывают малые линейные колебания эллипсоида с частотами  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ),

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5(c^2 - a^2)}{c^2 + a^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}} \quad (2.3)$$

При принятом ранее предположении  $a < b < c$  справедливо неравенство  $0 < \omega_2 < \omega_1 < \sqrt{5}$ .

Для исследования нелинейной задачи целесообразно предварительно перейти к переменным  $u_1, u_2, v_1, v_2$ , отвечающим нормальным координатам линейной задачи. Для этого сделаем каноническое унивалентное преобразование  $q_i, p_i \rightarrow u_i, v_i$  по формулам:

$$q_1 = a \sqrt{\frac{\omega_1}{c^2 - a^2}} u_1, \quad q_2 = a \sqrt{\frac{\omega_2}{b^2 - a^2}} u_2, \quad p_1 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{\omega_1}} v_1, \quad p_2 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\omega_2}} v_2 \quad (2.4)$$

В новых переменных возмущенное движение описывается уравнениями с функцией Гамильтона, задающейся рядом

$$H = \frac{1}{2} \omega_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (u_2^2 + v_2^2) + \sum_{s=2}^{\infty} H_{2s}, \quad H_{2s} = \sum_{v_1+v_2+\mu_1+\mu_2=2s} h_{v_1 v_2 \mu_1 \mu_2} u_1^{v_1} u_2^{v_2} v_1^{\mu_1} v_2^{\mu_2} \quad (2.5)$$

Отметим принципиально важное для дальнейшего анализа свойство разложения (2.5): в каждом его члене сумма показателей  $v_i + \mu_i$  ( $i = 1, 2$ ) является четным числом.

Коэффициенты форм четвертой и шестой степеней, после проведения довольно громоздких вычислений с привлечением алгоритмов компьютерной алгебры, можно выразить через частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Оказалось, что 27 из 35-ти коэффициентов формы  $H_4$  тождественно равны нулю. Остальные 8 коэффициентов имеют вид

$$h_{4000} = -\frac{5}{12} - \frac{1}{24} \omega_1^2, \quad h_{2200} = -\frac{5\omega_2}{4\omega_1}, \quad h_{2020} = -\frac{1}{2} \omega_1^4, \quad h_{2002} = -\frac{5\delta\delta_1^2 \omega_2}{4\omega_1}$$

$$h_{1111} = -\frac{1}{2} \delta \omega_2^2 \left[ 25 - 60\omega_1^2 + (1 + 2\omega_2^2) \omega_1^4 \right], \quad h_{0400} = -\frac{5}{12} - \frac{1}{24} \omega_2^2 \quad (2.6)$$

$$h_{0220} = \frac{1}{4} \delta \delta_1 \delta_2 \omega_1 \omega_2, \quad h_{0202} = -\frac{1}{2} \omega_2^4$$

Здесь приняты обозначения

$$\delta_i = \omega_i^2 - 5 \quad (i = 1, 2), \quad \delta = \frac{1}{\omega_1^2 \omega_2^2 - 25} \quad (2.7)$$

Из 84-х коэффициентов формы  $H_6$  тождественно равны нулю 72. Для остальных 12-ти коэффициентов можно получить следующие выражения:

$$h_{6000} = \frac{1}{720\omega_1} (100 + 110\omega_1^2 + 19\omega_1^4), \quad h_{4200} = \frac{\omega_2}{48\omega_1^2} (50 + 20\omega_1^2 + 3\omega_1^4)$$

$$h_{4020} = \frac{\omega_1^3}{6} (10 + \omega_1^2 + 3\omega_1^4), \quad h_{4002} = \frac{5\delta\delta_1^3\omega_2}{12\omega_1^2}$$

$$h_{3111} = \frac{\delta\omega_2^2}{12\omega_1} \left[ -25(5 + 17\omega_1^2) - 5(43 - 10\omega_2^2) \omega_1^4 - (329 - 2\omega_2^2) \omega_1^6 + 6(1 + 2\omega_2^2) \omega_1^8 \right]$$

$$h_{2400} = \frac{1}{48\omega_1} (50 + 20\omega_2^2 + 3\omega_2^2 \omega_1^2)$$

$$h_{2220} = \frac{\delta\omega_1^2\omega_2}{2} \left[ 25\delta_2 - 25(1 + \omega_2^2) \omega_1^2 + (5 + \omega_2^4) \omega_1^4 \right]$$

$$h_{2202} = \frac{\delta\omega_2^2}{8\omega_1} \left[ -125 + 5(15 - 20\omega_2^2 + 4\omega_2^4) \omega_1^2 - 15(1 + 8\omega_2^2) \omega_1^4 + (1 + 2\omega_2^2)^2 \omega_1^6 \right]$$

$$h_{311} = \frac{1}{6} \delta \omega_2 \left[ 5(25 - 60\omega_1^2 + \omega_1^4) + 2(-200 - 45\omega_1^2 + 12\omega_1^4) \omega_2^2 + \right. \\ \left. + (75 - 150\omega_1^2 + \omega_1^4) \omega_2^4 + 6\omega_1^4 \omega_2^6 \right]$$

$$h_{0600} = \frac{1}{720\omega_2} (100 + 110\omega_2^2 + 19\omega_2^4)$$

$$h_{0420} = \frac{1}{24} \delta \delta_1 \delta_2^2 \omega_1, \quad h_{0402} = \frac{1}{6} \omega_2^3 (10 + \omega_2^2 + 3\omega_2^4)$$

**3. О возможных резонансах.** Если для натуральных чисел  $l_1$  и  $l_2$  выполняется соотношение

$$l_1 \omega_1 = l_2 \omega_2, \quad (3.1)$$

то имеет место резонанс порядка  $l = l_1 + l_2$  (так как  $\omega_1 > \omega_2$ , то  $l_2 > l_1 \geq 1$ ).

Введем безразмерные параметры  $x, y$ , положив  $a^2 = xc^2, b^2 = yc^2$ . Область допустимых значений параметров  $x, y$  (в силу того, что  $a < b < c$ ) задается неравенством

$$0 < x < y < 1 \quad (3.2)$$

Частоты (2.3) выражаются через  $x, y$  по формулам

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5(1-x)}{1+x}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5(y-x)}{y+x}} \quad (3.3)$$

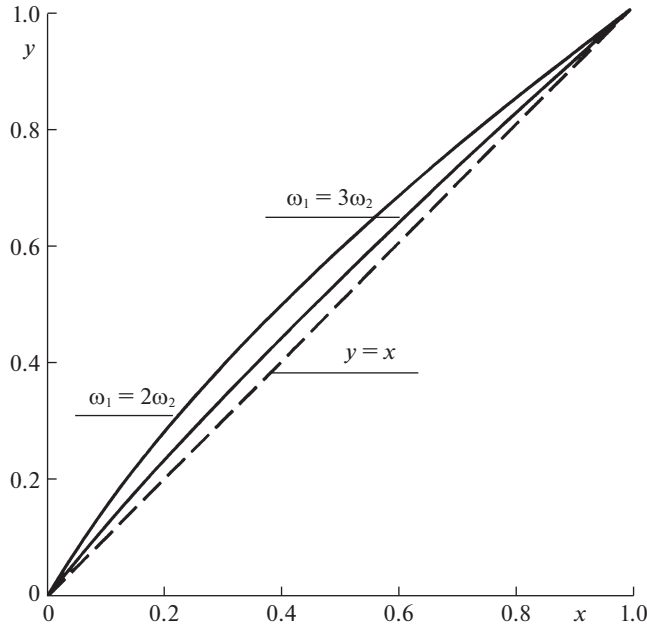


Рис. 2.

И из соотношения (3.1) следует уравнение соответствующей резонансной кривой

$$y = x \frac{(l_2^2 - l_1^2)x + l_2^2 + l_1^2}{(l_2^2 + l_1^2)x + l_2^2 - l_1^2} \tag{3.4}$$

На рис. 2 показаны кривые, отвечающие резонансам  $\omega_1 = 2\omega_2$  и  $\omega_1 = 3\omega_2$ .

Несложно проверить, что все резонансные кривые (3.4) лежат в области

$$\frac{x(3x + 5)}{5x + 3} \geq y > x \tag{3.5}$$

Левой границей этой области является кривая  $\omega_1 = 2\omega_2$ . В области

$$\frac{x(3x + 5)}{5x + 3} < y < 1, \tag{3.6}$$

лежащей на рис. 2 левее и выше кривой  $\omega_1 = 2\omega_2$  не реализуется ни один из резонансов (3.1).

**4. О нормализации функции Гамильтона (2.5).** Следуя [16, 17], введем вместо переменных  $u_i, v_i$  новые канонически сопряженные переменные  $Q_i, P_i$  при помощи производящей функции  $S$  вида

$$S = u_1 P_1 + u_2 P_2 + S_4 + S_6, \quad S_{2k} = \sum_{\nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 2k} s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2}, \quad (k = 2, 3) \tag{4.1}$$

Неявно замена  $u_i, v_i \rightarrow Q_i, P_i$  задается формулами

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad v_i = \frac{\partial S}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2) \tag{4.2}$$

Из (4.1), (4.2) следует, что старые переменные выражаются через новые при помощи сходящихся рядов по степеням  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$ :

$$u_i = Q_i - \frac{\partial S_4}{\partial P_i} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 S_4}{\partial P_i \partial Q_j} \frac{\partial S_4}{\partial P_j} - \frac{\partial S_6}{\partial P_i} + O_7, \quad v_i = P_i + \frac{\partial S_4}{\partial Q_i} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_i \partial Q_j} \frac{\partial S_4}{\partial P_j} + \frac{\partial S_6}{\partial Q_i} + O_7 \quad (4.3)$$

Здесь  $S_4$  и  $S_6$  – функции из (4.1), в которых аргументы  $u_1, u_2$  заменены на  $Q_1, Q_2$ . Символом  $O_n$  здесь и далее обозначается совокупность членов не ниже  $n$ -й степени относительно  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$ .

Подставив выражения (4.3) в функцию Гамильтона (2.5) и подобрав подходящим образом коэффициенты  $s_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2}$  форм  $S_4$  и  $S_6$ , можно упростить (нормализовать) формы четвертой и шестой степеней в новой функции Гамильтона (ее, как и старую функцию (2.5), будем обозначать через  $H$ ).

Так как в разложении (2.5) нет форм 3-й и 5-й степеней, а в форме 4-й степени суммы показателей  $\nu_1 + \mu_1$  и  $\nu_2 + \mu_2$  четны (см. п. 2), то все резонансы до пятого порядка включительно ( $\omega_1 = 2\omega_2$ ,  $\omega_1 = 3\omega_2$ ,  $\omega_1 = 4\omega_2$ ,  $2\omega_1 = 3\omega_2$ ) не препятствуют приведению функции Гамильтона (2.5) к нормальной форме вида

$$H = H^{(0)}(r_1, r_2) + O_6, \quad H^{(0)} = \omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \quad (4.4)$$

$$(Q_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \quad P_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i)$$

При этом

$$c_{20} = -\frac{1}{16}(4\omega_1^4 + \omega_1^2 + 10), \quad c_{02} = -\frac{1}{16}(4\omega_2^4 + \omega_2^2 + 10) \quad (4.5)$$

$$c_{11} = \frac{\omega_1 \omega_2 [75 - 10(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_1^2 \omega_2^2]}{4(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)},$$

а отличные от тождественного нуля коэффициенты формы  $S_4$  в производящей функции (4.1) вычисляются по следующим формулам:

$$s_{3010} = \frac{12\omega_1^4 - 5\omega_1^2 - 50}{192\omega_1}, \quad s_{0301} = \frac{12\omega_2^4 - 5\omega_2^2 - 50}{192\omega_2}$$

$$s_{1030} = -\frac{4\omega_1^4 + \omega_1^2 + 10}{64\omega_1}, \quad s_{0103} = -\frac{4\omega_2^4 + \omega_2^2 + 10}{64\omega_2}$$

$$s_{1012} = \frac{\omega_2 [25(\omega_2^2 - 10) + (100 - 120\omega_2^2 + \omega_2^4)\omega_1^2 + 2(-5 + \omega_2^2 + 2\omega_2^4)\omega_1^4]}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)} \quad (4.6)$$

$$s_{0121} = -\frac{\omega_1 [25(\omega_1^2 - 10) + (100 - 120\omega_1^2 + \omega_1^4)\omega_2^2 + 2(-5 + \omega_1^2 + 2\omega_1^4)\omega_2^4]}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)}$$

$$s_{1210} = \frac{\omega_2 [25(10 - 3\omega_2^2) + (-50 + 120\omega_2^2 + \omega_2^4)\omega_1^2 + 2(5 - 2\omega_2^2 - 2\omega_2^4)\omega_1^4]}{16(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)}$$

$$s_{2101} = \frac{-500\omega_2^2 + 10(25 + 15\omega_2^2 + \omega_2^4)\omega_1^2 - 5(5 + 28\omega_2^2)\omega_1^4 + \omega_2^2(3 + 4\omega_2^2)\omega_1^6}{16\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 \omega_2^2 - 25)}$$

После вычисления функции  $S_4$  и величин (4.5) можно, выбрав нужным образом форму  $S_6$ , максимально упростить (нормализовать) совокупность членов шестой степени в новой функции Гамильтона. Из двух возможных резонансов шестого порядка  $\omega_1 = 5\omega_2$  и  $2\omega_1 = 4\omega_2$  первый не скажется на виде нормальной формы членов шестой степени (из-за четности величин  $\nu_1 + \mu_1$  и  $\nu_2 + \mu_2$  в разложении (2.5)). Второй же резонанс (который на самом деле является резонансом третьего порядка, не повлиявшим на структуру нормальной формы (4.4)) существенен при нормализации членов шестой степени. Этот резонансный случай изучается в разд. 8 статьи.

**5. Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность системы с функцией Гамильтона  $H^{(0)}$ .** Рассмотрим определитель  $D_2$  второго порядка

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} \end{vmatrix} = 4c_{20}c_{02} - c_{11}^2 \quad (5.1)$$

Покажем, что система с функцией Гамильтона  $H^{(0)}$  из (4.4) является невырожденной. Это означает [14, 15], что  $D_2 \neq 0$ . Действительно, принимая во внимание (4.5) и (3.3), определитель (5.1) можно записать в виде функции от  $x, y$ :

$$D_2 = \frac{25}{64(1+x)^2(1+y)^2(x+y)^2} [(487x^2 - 828x + 525)y^4 - (724x^3 - 2270x^2 + 2516x - 1050)y^3 + (501x^4 - 2236x^3 + 3502x^2 - 2516x + 525)y^2 - 2x(16x^4 - 437x^3 + 1118x^2 - 1135x + 414)y - x^2(64x^4 + 32x^3 - 501x^2 + 724x - 487)] \quad (5.2)$$

На рис. 3 в плоскости  $x, y$  сплошными линиями показаны ветви кривой  $D_2 = 0$ , а серым цветом выделены области  $D_2 < 0$ . В остальной части рисунка величина  $D_2$  положительна. Область (3.2) допустимых значений параметров  $x, y$  попадает в область  $D_2 > 0$  рисунка. И, следовательно, система с функцией Гамильтона  $H^{(0)}$  является невырожденной.

Покажем еще, что выполнено также условие изоэнергетической невырожденности, означающее [14, 15] отличие от нуля определителя  $D_3$  третьего порядка,

$$D_3 = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1^2} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_1 \partial r_2} & \omega_1 \\ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2 \partial r_1} & \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial r_2^2} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{vmatrix} = -2(c_{20}\omega_2^2 - c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2) \quad (5.3)$$

В переменных  $x, y$  имеем

$$D_3 = \frac{25}{4(1+x)^2(1+y)(x+y)^2} [(x^2 - 18x + 21)y^3 + (26x^3 + x^2 - 44x + 21)y^2 - x(23x^3 - 36x^2 - x + 18)y - x^2(8x^3 + 23x^2 - 26x - 1)] \quad (5.4)$$

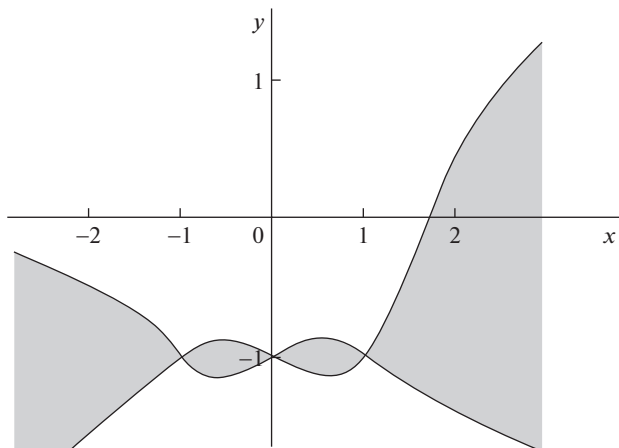


Рис. 3.

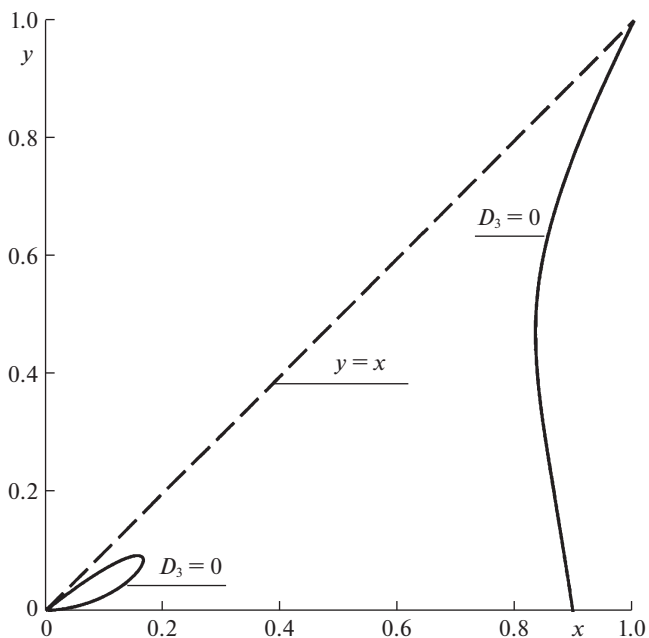


Рис. 4.

На рис. 4 сплошными линиями показаны ветви кривой  $D_3 = 0$ . Они лежат правее и ниже прямой  $y = x$ . В области же (3.2) допустимых значений  $x, y$  величина  $D_3$  отлична от нуля (там  $D_3 > 0$ ).

**6. Условно-периодические колебания.** 1. Общее решение дифференциальных уравнений приближенной системы с функцией Гамильтона  $H^{(0)}(r_1, r_2)$  из (4.4) описывается равенствами



$$Q_i = \sqrt{2r_{i0}} \sin \varphi_i, \quad P_i = \sqrt{2r_{i0}} \cos \varphi_i, \quad \varphi_i = \Omega_i \tau + \varphi_{i0} \quad (i = 1, 2) \quad (6.1)$$

$$\Omega_1 = \omega_1 + 2c_{20}r_{10} + c_{11}r_{20}, \quad \Omega_2 = \omega_2 + c_{11}r_{10} + 2c_{02}r_{20}, \quad (6.2)$$

где  $r_{i0}, \varphi_{i0}$  – постоянные, являющиеся начальными значениями переменных  $r_i, \varphi_i$ . Если полуоси эллипсоида таковы, что нет резонанса (3.1), то для малых значений  $r_{i0}$  движения в приближенной системе будут условно-периодическими колебаниями с рационально независимыми частотами (6.2).

Но в предыдущем разд. показано, что приближенная система невырождена. Поэтому, согласно КАМ-теории, движения в полной системе, описываемой функцией Гамильтона (4.4), для большинства начальных условий также будут условно-периодическими с частотами (6.2). Множество начальных условий, не принадлежащих упомянутому большинству (колмогоровскому множеству), имеет малую меру: в окрестности

$r_1 + r_2 < \mu$  его относительная мера имеет порядок  $\mu^{\frac{l-3}{4}}$ , где  $l$  – порядок, до которого отсутствуют резонансы вида (3.1) [14]. Согласно разд. 3, в области безразмерных параметров  $x, y$ , задаваемой неравенством (3.5), можно считать, что  $l = 5$ . Если же параметры  $x, y$  принадлежат области (3.6) (где отсутствуют резонансы (3.1)), то величина  $l$  может быть сколь угодно большой. Для области (3.6) относительная мера множества,

дополнительного к колмогоровскому множеству, имеет порядок  $\exp\left(-\frac{c_1}{\mu^{c_2}}\right)$ ,  $c_1, c_2 - \text{const} > 0$ .

2. Остановимся подробнее на приближенном описании движения эллипсоида при помощи уравнений с функцией  $H^{(0)}$  из (4.4). Из соотношений (4.3) имеем

$$u_i = Q_i - \frac{\partial S_4}{\partial P_i} + O_5, \quad v_i = P_i + \frac{\partial S_4}{\partial Q_i} + O_5 \quad (6.3)$$

Коэффициенты формы  $S_4$  вычисляются по формулам (4.6).

Из (6.3) и (2.4) получаем выражения для углов Эйлера  $\theta, \varphi$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1 = \frac{\pi}{2} + a\sqrt{\frac{\omega_1}{c^2 - a^2}}Q_1 + O_3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + q_2 = \frac{\pi}{2} + a\sqrt{\frac{\omega_2}{b^2 - a^2}}Q_2 + O_3 \quad (6.4)$$

Угол  $\psi$  может быть найден при помощи равенства (1.9), из которого (при учете (6.4)) следует, что производная  $\dot{\psi}$  имеет порядок  $O_2$ . Поэтому  $\psi$  совершает “мелкие дрожания” в окрестности его начального значения  $\psi_0$ . Пренебрегая этими дрожаниями, можно считать, что  $\psi = \psi_0 = 0$ . Из (1.2) тогда следует, что с погрешностью  $O_2$  направляющие косинусы  $a_{ij}$  определяются следующими равенствами:

$$a_{11} = a_{32} = -q_2, \quad a_{21} = a_{33} = -q_1, \quad a_{31} = -a_{12} = -a_{23} = 1, \quad a_{13} = a_{22} = 0 \quad (6.5)$$

3. Получим оценку реакции  $R$  опорной плоскости  $O_*XY$ . Из (6.5) и (1.4) следует, что для расстояния  $f$  центра тяжести эллипсоида до плоскости  $O_*XY$  имеет место равенство  $f = a + O_2$ . Поэтому из уравнения

$$m \frac{d^2 f}{dt^2} = -mg + R,$$

описывающего движение центра тяжести вдоль вертикали, следует, что  $R = mg + O_2$ . При малых отклонениях эллипсоида от положения равновесия реакция не обращается в нуль и эллипсоид не может оторваться от плоскости  $O_*XY$ .

4. Выпишем еще приближенные выражения (1.3) и (1.5) для траекторий точки касания  $M$  на поверхности эллипсоида и на опорной плоскости. Из (1.3), (1.4), (6.5) и (6.1) следуют приближенные (с погрешностью  $O_2$ ) формулы для координат точки  $M$  в системе  $O\xi\eta\zeta$ , жестко связанной с эллипсоидом:

$$\xi = -a, \quad \eta = A_\eta \sin \varphi_2, \quad \zeta = A_\zeta \sin \varphi_1 \quad \left( A_\eta = b^2 \sqrt{\frac{2\omega_2 r_{20}}{b^2 - a^2}}, \quad A_\zeta = c^2 \sqrt{\frac{2\omega_1 r_{10}}{c^2 - a^2}} \right) \quad (6.6)$$

Из (1.5), (6.5) и (6.6) с погрешностью  $O_2$  находим выражения для координат точки  $M$  на плоскости  $O_*XY$ :

$$\begin{aligned} X_M &= -A_X \sin \varphi_2, & Y_M &= -A_Y \sin \varphi_1 \\ \left( A_X &= \sqrt{2\omega_2 (b^2 - a^2)} r_{20}, \quad A_Y = \sqrt{2\omega_1 (c^2 - a^2)} r_{10} \right) \end{aligned}$$

При условно-периодических колебаниях проекция траектории точки  $M$  на плоскость  $O\eta\zeta$  всюду плотно заполняет прямоугольник со сторонами  $2A_\eta$  и  $2A_\zeta$ , а на опорной плоскости  $O_*XY$  траектория всюду плотно заполняет прямоугольник со сторонами  $2A_X$  и  $2A_Y$ .

В качестве примера возьмем эллипсоид, у которого  $b^2 = 11/9a^2$ ,  $c^2 = 3/2a^2$ . Для него  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{2}/2$ , а

$$A_\eta = \frac{11a}{3^4\sqrt{2}} \sqrt{r_{20}}, \quad A_\zeta = 3a\sqrt{r_{10}}, \quad A_X = \frac{2a}{3^4\sqrt{2}} \sqrt{r_{20}}, \quad A_Y = a\sqrt{r_{10}}$$

**7. О периодических колебаниях малой амплитуды.** Уравнения (1.10) допускают два типа частных решений, для которых эллипсоид касается плоскости одним из своих главных сечений. Для решений первого типа эллипсоид касается оси  $O_*Y$  главным сечением  $\eta = 0$ , которое во все время движения остается в вертикальной плоскости  $O_*YZ$ . В движениях второго типа эллипсоид касается оси  $O_*X$  главным сечением  $\zeta = 0$ , которое все время остается в плоскости  $O_*XZ$ .

Будем рассматривать эти движения, предполагая, что они представляют собой малые периодические колебания эллипсоида. Через  $\varepsilon$  обозначим малый параметр, характеризующий отклонение углов  $\theta$  и  $\varphi$  от их значений, отвечающих равновесию  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi/2$ . Зависимость углов  $\theta$  и  $\varphi$  от времени для этих колебаний может быть найдена из (6.1)–(6.4).

В колебаниях первого типа  $\theta \equiv \pi/2$ , а

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon a \sqrt{\frac{\omega_1}{c^2 - a^2}} U_1 + O(\varepsilon^4) \quad (7.1)$$

В колебаниях второго типа  $\theta \equiv \pi/2$ ,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon a \sqrt{\frac{\omega_2}{b^2 - a^2}} U_2 + O(\varepsilon^4) \quad (7.2)$$

В (7.1) и (7.2) приняты обозначения

$$U_i = \sin \varphi_i + \varepsilon^2 \frac{\sin \varphi_i}{192\omega_i} \left[ 9(4\omega_i^4 + \omega_i^2 + 10) - 4(12\omega_i^4 + \omega_i^2 + 10) \sin^2 \varphi_i \right]$$

$$\varphi_i = \Omega_i \tau + \varphi_{i0}, \quad (i = 1, 2), \quad \Omega_1 = \omega_1 + c_{20}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad \Omega_2 = \omega_2 + c_{02}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

Для исследования орбитальной устойчивости периодических колебаний (7.1) и (7.2) воспользуемся теоремой Мозера об инвариантных кривых. При малых  $\varepsilon$  достаточным

условием устойчивости будет условие изоэнергетической невырожденности  $D_3 \neq 0$  функции  $H^{(o)}$  из (4.4) [14, 15]. В разд. 4 показано, что это условие выполняется. И, следовательно, при малых амплитудах периодические колебания обоих типов орбитально устойчивы.

**8. О колебаниях при резонансе  $\omega_1 = 2\omega_2$ .** Сделав нормализующую замену переменных  $u_i, v_i \rightarrow Q_i, P_i$  по формулам (4.3) и введя симплектические полярные координаты  $r_i, \varphi_i$  (см. (4.4)), получим функцию Гамильтона возмущенного движения (2.5) в виде ряда

$$H = \omega_1 r_1 + \frac{1}{2} \omega_1 r_2^2 + \sum_{m+n=2}^3 c_{mn} r_1^m r_2^n + \alpha_{12} r_1 r_2^2 \cos(2\varphi_1 - 4\varphi_2) + O_{10} \quad (8.1)$$

Коэффициенты нормальной формы (8.1) можно записать в виде следующих функций от  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{1}{16} (10 + \omega_1^2 + 4\omega_1^4), & c_{02} &= -\frac{1}{64} (40 + \omega_1^2 + \omega_1^4) \\ c_{11} &= \frac{\omega_1^2 (300 - 50\omega_1^2 + \omega_1^4)}{8(\omega_1^4 - 100)}, & c_{30} &= \frac{48\omega_1^8 + 24\omega_1^6 + 255\omega_1^4 + 60\omega_1^2 - 100}{256\omega_1} \\ c_{03} &= \frac{3\omega_1^8 + 6\omega_1^6 + 255\omega_1^4 + 240\omega_1^2 - 1600}{2048\omega_1} \\ c_{21} &= \frac{1}{384\omega_1 (\omega_1^4 - 100)^2} (16\omega_1^{16} + 24\omega_1^{14} - 2681\omega_1^{12} - 3740\omega_1^{10} + \\ &+ 87\,500\omega_1^8 - 82\,000\omega_1^6 + 4\,440\,000\omega_1^4 - 2\,800\,000\omega_1^2 + 4\,000\,000) \\ c_{12} &= -\frac{1}{384\omega_1 (\omega_1^4 - 100)^2} (2\omega_1^{16} + 12\omega_1^{14} - 787\omega_1^{12} + 680\omega_1^{10} + \\ &+ 70\,000\omega_1^8 - 386\,000\omega_1^6 + 1\,230\,000\omega_1^4 - 4\,400\,000\omega_1^2 + 8\,000\,000) \\ \alpha_{12} &= \frac{3\omega_1^3 (\omega_1^4 - 89\omega_1^2 - 450)}{512(\omega_1^2 + 10)} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Для исследования периодических движений, обусловленных наличием резонанса  $\omega_1 = 2\omega_2$ , сделаем в (8.1) унивалентное каноническое преобразование  $\varphi_i, r_i \rightarrow \chi_i, R_i$  по формулам

$$r_1 = R_1, \quad r_2 = R_2 - 2R_1, \quad \varphi_1 = \chi_1 + 2\chi_2, \quad \varphi_2 = \chi_2 \quad (8.4)$$

Если в преобразованной функции (8.1) отбросить последнее слагаемое  $O_{10}$ , то придем к приближенной системе с циклической координатой  $\chi_2$ . Помимо интеграла энергии, эта система имеет еще интеграл  $R_2 = \tilde{c} = \text{const} > 0$ . Если вместо  $\chi_1, R_1$  ввести новые канонически сопряженные переменные  $\chi, \rho$  по формулам

$$\chi_1 = \chi, \quad R_1 = \tilde{c}\rho \quad (0 < \rho < 1/2), \quad (8.5)$$

а в качестве независимой переменной принять величину  $s = \tilde{c}\tau$ , то получим систему с одной степенью свободы, являющуюся приближенной моделью для описания рассматриваемого резонанса. Ее функция Гамильтона  $\Gamma(\chi, \rho; \tilde{c})$  будет такой:

$$\Gamma = [c_{11} - 4c_{02} + \tilde{c}(c_{12} - 6c_{03})]\rho + [c_{20} - 2c_{11} + 4c_{02} - \tilde{c}(4c_{12} - c_{21} - 12c_{03})]\rho^2 + \tilde{c}(c_{30} - 2c_{21} + 4c_{12} - 8c_{03})\rho^3 + \tilde{c}\alpha_{12}\rho(1 - 2\rho)^2 \cos 2\chi \quad (8.6)$$

Соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\chi} = \tilde{c}2\alpha_{12}\rho(1 - 2\rho)\sin 2\chi, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} \quad (8.7)$$

Эти уравнения допускают четыре отличающихся одно от другого равновесных решения  $\chi_*, \rho_*$ , в которых

$$\chi_* = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3), \quad (8.8)$$

а  $\rho_*$  – корень квадратного относительно  $\rho$  уравнения

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} = 0, \quad (8.9)$$

в левой части которого  $\cos 2\chi$  заменен на  $(-1)^k$ . При малых значениях параметра  $\tilde{c}$  этот корень можно представить в виде ряда по степеням  $\tilde{c}$ :  $\rho_* = \rho_0 + \tilde{c}\rho_1 + \dots$ . Из (8.6) и (8.9) следует, что для  $\rho_0$  можно получить такое выражение:

$$\rho_0 = \frac{c_{11} - 4c_{02}}{4D_3} \omega_1^2, \quad (8.10)$$

где  $D_3$  задается равенством (5.3).

Из выражений (8.2) для  $c_{mn}$  (с учетом того, что  $0 < \omega_1 < \sqrt{5}$ ) видно, что величина  $c_{11} - 4c_{02}$  положительна. Кроме того, согласно разд. 5, величина  $D_3 > 0$ . Вычисления показывают, что  $0 < \rho_0 < 0.406834$ , а своего максимального значения величина  $\rho_0$  достигает, когда  $b = 1.021617a$ ,  $c = 1.089528a$ .

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности равновесия  $\chi_*, \rho_*$  системы (8.7) имеет вид

$$\lambda^2 + (-1)^k 4\tilde{c}\rho_0\alpha_{12}\omega_1^2 \frac{(c_{11} - c_{20})^2}{D_3} + O(\tilde{c}^2) = 0 \quad (8.11)$$

Из (8.2) и (8.3) несложно усмотреть, что  $c_{11} \neq c_{20}$ , а  $\alpha_{12} < 0$ . И так как  $D_3 > 0$ , то при малых  $\tilde{c}$  найденным равновесиям в случае четных  $k$  в фазовой плоскости отвечают особые точки типа седло, а в случае нечетных  $k$  – точки типа центр.

Для иллюстрации сказанного на рис. 5 показан фазовый портрет системы (8.7) в плоскости  $q = \sqrt{2\rho} \sin \chi$ ,  $p = \sqrt{2\rho} \cos \chi$ .

Принято, что параметр  $\tilde{c} = 1/10$ , а форма эллипсоида такова, что  $b^2 = 3/2a^2$ ,  $c^2 = 9a^2$ .

Для такого эллипсоида  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1$ , а равновесное значение  $\rho_* = 0.268311$  для седла и  $\rho_* = 0.252613$  для центров.

При помощи метода Пуанкаре [13] можно показать, что в полной системе с функцией Гамильтона (8.1) существуют периодические движения, аналитические относи-

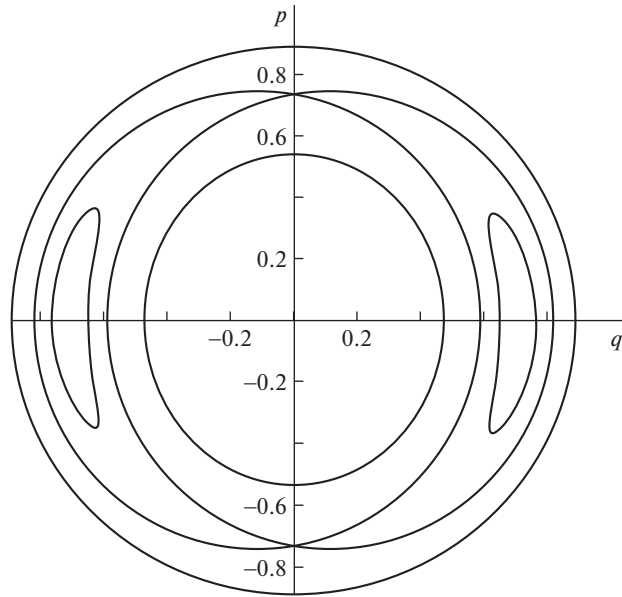


Рис. 5.

тельно  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  – порядок величин  $q_i, p_i$  в (2.1)), которые в переменных  $Q_1, Q_2$  записываются (с погрешностью  $O_2$ ) в виде

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \sqrt{2\tilde{c}\rho_*} \sin(k\pi/2 + 2\varphi_2), & Q_2 &= \sqrt{2\tilde{c}(1-2\rho_*)} \sin \varphi_2, & \varphi_2 &= \Omega_2\tau + \varphi_0 \\
 \Omega_2 &= \omega_2 + [c_{11}\rho_* + 2c_{02}(1-2\rho_*)]\tilde{c} + \\
 &+ \left\{ c_{21}\rho_*^2 + 2[c_{12} + (-1)^k \alpha_{12}] \rho_* (1-2\rho_*) + 3c_{03}(1-2\rho_*)^2 \right\} \tilde{c}^2 + O(\tilde{c}^3)
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

При четных  $k$  эти периодические движения орбитально неустойчивы, а при нечетных – устойчивы.

Для координат  $\xi, \eta, \zeta$  точки касания  $M$  на поверхности эллипсоида аналогично разд. 6 можно получить такие приближенные выражения:

$$\xi = -a, \quad \eta = b^2 \sqrt[4]{\frac{5}{b^4 - a^4}} Q_2, \quad \zeta = c^2 \sqrt[4]{\frac{5}{c^4 - a^4}} Q_1,
 \tag{8.13}$$

а для координат  $X_M, Y_M$  точки  $M$  на плоскости  $O_*XY$  – выражения

$$X_M = (a^2 - b^2) \sqrt[4]{\frac{5}{b^4 - a^4}} Q_2, \quad Y_M = (a^2 - c^2) \sqrt[4]{\frac{5}{c^4 - a^4}} Q_1
 \tag{8.14}$$

В (8.13), (8.14)  $Q_1$  и  $Q_2$  вычисляются по формулам (8.12).

Траектории проекции точки  $M$  на главную плоскость  $O\eta\zeta$  эллипсоида, как и траектории точки  $M$  на опорной плоскости  $O_*XY$ , существенно различны в случаях четных и нечетных значений  $k$ . При четных  $k$  (когда периодическое движение неустойчиво) они являются “лежащими восьмерками”, а при нечетных  $k$  (когда периодическое движение орбитально устойчиво) – дважды проходимыми за период параболами.

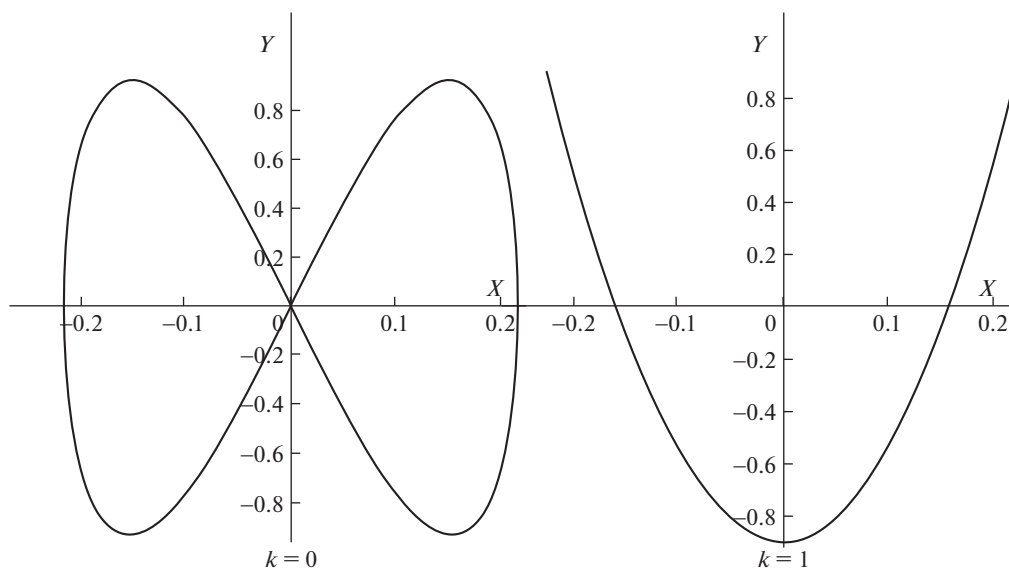


Рис. 6.

На рис. 6 показаны траектории точки касания  $M$  на плоскости  $O_*XY$  для случаев  $k = 0$  и  $k = 1$ . Как и на рис. 5, принято, что  $b^2 = 3/2a^2$ ,  $c^2 = 9a^2$ , а  $\tilde{c} = 1/10$ . В качестве единицы длины принята длина полуоси  $a$  эллипсоида. При таком выборе параметров для  $k = 0$

$$X_M = -0.215262 \sin \varphi_2, \quad Y_M = -0.926605 \sin 2\varphi_2,$$

а для  $k = 1$

$$X_M = -0.222435 \sin \varphi_2, \quad Y_M = -0.899089 \cos 2\varphi_2$$

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2014. 496 с.
2. Poiseux V. Solution de quelques question relatives au mouvement d'un corps solide pesant pos'e sur un plan horizontale // J. des math'ematiques pures et appliqu'ees. 1852. Т. 17. Р. 1–30.
3. Маркеев А.П., Мошук Н.К. Об устойчивости движения эллипсоида на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // Механика твердого тела. Киев, 1984. Вып. 16. С. 56–64.
4. Карпетян А.В. Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 504–511.
5. Карпетян А.В., Рубановский В.Н. О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой плоскости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 260–267.
6. Карпетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983. 132 с.

7. Маркеев А.П. О движении тяжелого однородного эллипсоида на неподвижной горизонтальной плоскости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 553–567.
8. Маркеев А.П., Мошук Н.К. Качественный анализ движения тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 37–42.
9. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 118–121.
10. Буров А.А., Карапетян А.В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 501–503.
11. Сальникова Т.В. О существовании дополнительных аналитических интегралов в динамике твердого тела. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985. 101 с.
12. Сумбатов А.С. Некоторые инвариантные соотношения в задаче о движении тела по горизонтальной гладкой плоскости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 34–41.
13. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
14. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
15. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
16. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
17. Джакаль Г.Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

## On Nonlinear Oscillations of a Triaxial Ellipsoid on a Smooth Horizontal Plane

A. P. Markeev<sup>a,b,#</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The motion of a homogeneous ellipsoid along a fixed horizontal plane in a homogeneous gravitational field is considered. The plane is assumed to be absolutely smooth, and the semi-axes of the ellipsoid are different. There is a position of stable equilibrium, when the ellipsoid rests on the plane with the lowest point of its surface. Nonlinear oscillations of the ellipsoid in the vicinity of this equilibrium are investigated. The analysis is carried out using the methods of classical perturbation theory, KAM-theory, and computer algebra algorithms. The normal form of the Hamilton function of perturbed motion up to terms of the sixth degree inclusive with respect to deviations from the equilibrium position is obtained. An approximate analytical representation of the Kolmogorov set of conditionally periodic oscillations is given, an estimate of the measure of this set is indicated. The problem of the existence and orbital stability of periodic motions arising from stable equilibrium in the resonant and nonresonant cases is studied.

*Keywords:* rigid body, conditionally periodic and periodic oscillations, stability

## REFERENCES

1. Markeev A.P. Dynamics of a body in contact with a solid surface. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res.; Nauka, 2014. 496 p. (in Russian)
2. Poiseux V. Solution de quelques question relatives au mouvement d'un corps solide pesant pos'e sur un plan horizontale // J. des math'ematiques pures et applique'es, 1852. T. 17, pp. 1–30.
3. Markeev A.P., Moshchuk N.K. On the stability of the motion of an ellipsoid on an absolutely smooth horizontal plane // Solid mechanics. Kiev, 1984. Iss. 16. pp. 56–64. (in Russian)
4. Karapetyan A.V. On the stability of stationary movements of a heavy solid body on an absolutely smooth horizontal plane // JAMM, 1981, vol. 45, no. 3, pp. 504–511. (in Russian)

5. *Karapetyan A.V., Rubanovsky V.N.* On bifurcation and stability of permanent rotations of a heavy tri-axial ellipsoid on a smooth plane // JAMM, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 260–267. (in Russian)
6. *Karapetyan A.V., Rumyantsev V.V.* Stability of conservative and dissipative systems // Itogi Nauki i Tekhniki (Gen. Mech.), vol. 6. Moscow: VINITI, 1983. 132 p. (in Russian)
7. *Markeev A.P.* On the motion of a heavy homogeneous ellipsoid on a fixed horizontal plane // JAMM, 1982, vol. 46, no. 4, pp. 553–567. (in Russian)
8. *Markeev A.P., Moshchuk N.K.* Qualitative analysis of the motion of a heavy solid body on a smooth horizontal plane // JAMM, 1983, vol. 47, no. 1, pp. 37–42. (in Russian)
9. *Burov A.A.* On partial integrals of equations of motion of a solid body along a smooth horizontal plane // in: Probl. Stabil.&Stabil. of Motion Res. Moscow: Comput. Center of the USSR AS, 1985, pp. 118–121. (in Russian)
10. *Burov A.A., Karapetyan A.V.* On the non-existence of an additional integral in the problem of the motion of a heavy solid ellipsoid on a smooth plane // JAMM, 1985, vol. 49, no. 3, pp. 501–503. (in Russian)
11. *Salnikova T.V.* On the existence of additional analytical integrals in the dynamics of a solid. Dis. Cand. Phys.&Math. Sci. Moscow: MSU, 1985. 101 p.
12. *Sumbatov A.S.* Some invariant relations in the problem of the motion of a body along a horizontal smooth plane // JAMM, 1988, vol. 52, no. 4, pp. 34–41. (in Russian)
13. *Malkin I.G.* Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations: In 2 Vols., Germantown, Md.: US Atom. Energy Commis., Techn. Inform. Serv., 1959.
14. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Encyclopedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
15. *Moser J.K.* Lectures on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc., no. 81, Providence, R.I.: AMS, 1968.
16. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems, AMS Coll. Publ., vol. 9, Providence, R. I.: AMS, 1966.
17. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.



УДК 531.38531.39

## ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

© 2022 г. Г. В. Горр<sup>1,\*</sup>, А. В. Мазнев<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Государственное бюджетное учреждение “Институт прикладной математики и механики”,  
Донецк, ДНР

\*e-mail: [vgorr@gmail.com](mailto:vgorr@gmail.com)

\*\*e-mail: [aleksandr\\_maznev@rambler.ru](mailto:aleksandr_maznev@rambler.ru)

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

После доработки 11.07.2022 г.

Принята к публикации 25.07.2022 г.

Рассмотрен новый метод исследования прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Построено решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, описывающее регулярные прецессии гиростата относительно оси симметрии силовых полей.

*Ключевые слова:* гиростат, гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы, прецессии

DOI: 10.31857/S0032823522060054

**1. Введение.** Понятие “гиростат” возникло в результате моделирования движения либо системы связанных твердых тел (У. Томсон [1], А. Грей [2], распределение масс которой не изменяется в течение времени), либо движения твердых тел, содержащих идеальную жидкость (Н.Е. Жуковский [3]). Дальнейшее развитие исследований движения гиростата получено в статьях В.В. Румянцева [4], Й. Виттенбурга [5] и П.В. Харламова [6]. В.В. Румянцев полагал, что гиростат можно трактовать как систему связанных твердых тел, которая содержит динамически и статически уравновешенные роторы. П.В. Харламов рассматривал систему связанных твердых тел, несомые тела которых вращаются вокруг своих осей динамической симметрии, несущих центры масс роторов. Задачу о движении гиростата более общего вида исследовал Й. Виттенбург. Тематика динамики гиростата рассмотрена во многих публикациях (см., например, [7–12]).

В силу того, что уравнения движения гиростата, имеющего неподвижную точку, являются неавтономными дифференциальными уравнениями, то их интегрирование целесообразно проводить с помощью методов инвариантных соотношений (ИС), предложенных Т. Леви-Чивитой [13] и П.В. Харламовым [14] (особенности этих методов изучены в монографии автора статьи [15]). В монографии [10] показано, что они наиболее эффективны в задачах об условиях существования прецессионных движений твердого тела и гиростата. Понятие таких движений в динамике твердого тела введено Д. Гриоли [16], а обзор результатов, установленных в задачах о движении гиростата в полях сложной структуры, указан в [17, 18]. Основной особенностью проведенных ранее исследований условий существования прецессий является подход, основанный на применении прецессионной подвижной системы координат [19]. В статье [20] при изучении прецессий гиростата использована главная система координат.

Данная статья посвящена рассмотрению более общего класса прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил по сравнению с [11], так как, в отличие от [11], здесь предполагается, что вектор, который образует в процессе движения гиростата постоянный угол с осью симметрии силовых полей, занимает произвольное положение в главной системе координат. Построено новое решение уравнений класса Кирхгофа–Пуассона, описывающее регулярную прецессию гиростата.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента:  $\lambda(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(t))$ . Параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  полагаем постоянными;  $\lambda_3(t)$  – функция, зависящая от времени  $t$ . В гиростате введем главную систему координат  $Oxyz$ ;  $O$  – неподвижная точка тела-носителя;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3(t)$  – компоненты гиростатического момента  $\lambda$  в этой системе координат;  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  – единичные векторы осей  $Ox, Oy, Oz$ . Уравнения движения гиростата запишем в векторной форме [20–23]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\lambda}(t) = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (C\mathbf{v} - \mathbf{s}), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости гиростата;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции;  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  – матрица, характеризующая гироскопические силы;  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  – матрица, определяющая нелинейные по  $v_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) потенциальные силы;  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор обобщенного центра масс гиростата; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени. Применение ссылок перед формулами (2.1) связано с аналогией задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении твердого тела в жидкости. Запишем первые интегралы уравнений (2.1)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k, \quad (2.2)$$

где  $k$  – произвольная постоянная.

Система (2.1), (2.2) является неавтономной системой дифференциальных уравнений относительно переменных  $\omega_i(t), v_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $\lambda_3(t)$ . Поэтому ее интегрирование может быть основано на нескольких подходах. В данной статье применяется подход [23]. Он состоит в том, чтобы уравнения (2.1), (2.2) рассматривать совместно с уравнениями

$$\dot{\lambda}_3(t) = L(t), \quad \lambda_3(t) = D_3[\omega(t) \cdot \mathbf{i}_3 + \dot{\kappa}(t)], \quad (2.3)$$

где  $D_3$  – момент инерции ротора  $S_3$  относительно оси вращения  $Oz$ ;  $\dot{\kappa}(t)$  – угловая скорость  $S_3$ ;  $L(t)$  – проекция сил и моментов, действующих на ротор  $S_3$  со стороны тела-носителя.

Следуя [24], зададим для уравнений (2.1), (2.2) три инвариантных соотношения (ИС):

$$\omega_i = v_i \varepsilon(v_3) + \beta_i g(v_3) \quad (i = \overline{1,3}), \quad (2.4)$$

где  $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ , то есть вектор  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  является единичным вектором;  $\varepsilon(v_3)$ ,  $g(v_3)$  – дифференцируемые функции переменной  $v_3$ . В векторном виде уравнения (2.4) можно записать так:

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon(v_3)\mathbf{v} + g(v_3)\boldsymbol{\beta} \quad (2.5)$$

При выполнении равенства (2.5) уравнение Пуассона из (2.1) таково:  $\dot{\mathbf{v}} = g(v_3)(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\beta})$ . Отсюда в скалярном виде имеем:

$$\dot{v}_1 = g(v_3)(\beta_3 v_2 - \beta_2 v_3), \quad \dot{v}_2 = g(v_3)(\beta_1 v_3 - \beta_3 v_1), \quad \dot{v}_3 = g(v_3)(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) \quad (2.6)$$

Система дифференциальных уравнений (2.6) допускает два первых интеграла

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = c_0, \quad (2.7)$$

где  $c_0$  – произвольная постоянная. Отметим, что случай  $\beta_3 = 0$  рассмотрен в [11]. Из второго соотношения системы (2.7) следует, что  $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} = c_0$ . В силу  $|\boldsymbol{\beta}| = 1$ ,  $|\mathbf{v}| = 1$  параметр  $|c_0| < 1$ . Примем  $v_3$  за независимую вспомогательную переменную. Тогда из системы (2.7) получим

$$\begin{aligned} v_1(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0^2} [\beta_1(c_0 - \beta_3 v_3) + \beta_2 \sqrt{F(v_3)}] \\ v_2(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0^2} [\beta_2(c_0 - \beta_3 v_3) - \beta_1 \sqrt{F(v_3)}], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$ , а функция  $F(v_3)$  является квадратичной функцией переменной  $v_3$ :

$$F(v_3) = -v_3^2 + 2c_0\beta_3 v_3 + (\kappa_0^2 - c_0^2) \quad (2.9)$$

Подставляя  $v_1(v_3)$ ,  $v_2(v_3)$  из (2.8) в третье уравнение системы (2.6), устанавливаем, что функция  $v_3(t)$  находится путем обращения интеграла

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{g(v_3)\sqrt{F(v_3)}} = t - t_0 \quad (2.10)$$

Функции  $\omega_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ) определяются из системы (2.4) на основании равенств (2.8).

Покажем, что при выполнении условия  $c_0 < 1$  решение (2.8)–(2.10) действительно. Из равенства (2.9) следует, что  $F(v_3) < 0$  при  $|v_3| \geq 1$ . Обозначив  $\mu_0 = \sqrt{1 - c_0^2}$ , из уравнения  $F(v_3) = 0$  имеем его корни в виде

$$(v_3)_{1,2} = c_0\beta_3 \pm \mu_0\kappa_0, \quad (2.11)$$

которые принадлежат промежутку  $v_3 \in (-1; 1)$ . То есть при изменении  $v_3$  на отрезке  $[(v_3)_2, (v_3)_1]$ , исключая его концы, функция  $F(v_3)$  положительна.

Рассмотрим случай  $\varepsilon(v_3) = \varepsilon_0$ ,  $g(v_3) = g_0$ . Из равенств (2.4) получим

$$\omega_i = \varepsilon_0 v_i + g_0 \beta_i, \quad (2.12)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $g_0$  – постоянные параметры. Введем обозначения

$$\begin{aligned} h_0 &= c_0\beta_1, & h_1 &= \frac{\mu_0\beta_2}{\kappa_0}, & h_2 &= -\frac{\beta_1\beta_3\mu_0}{\kappa_0} \\ r_0 &= c_0\beta_2, & r_1 &= -\frac{\mu_0\beta_1}{\kappa_0}, & r_2 &= -\frac{\beta_2\beta_3\mu_0}{\kappa_0} \\ a_0 &= c_0\beta_3, & a_2 &= \kappa_0\mu_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда из соотношений (2.8)–(2.10) получим

$$\begin{aligned} v_1(\psi) &= h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi \\ v_2(\psi) &= r_0 + r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi \\ v_3(\psi) &= a_0 + a_2 \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\psi = g_0 t$  (в силу периодичности (2.14) начальное значение  $t_0$  положено равным нулю). Отметим вид обозначений (2.13) и соотношений при  $\beta_3 = 0$ , которые рассмотрены в [11] (очевидно  $\kappa_0 = 1$ ):

$$h_0 = c_0 \beta_1, \quad h_1 = \mu_0 \beta_2, \quad h_2 = 0, \quad r_0 = c_0 \beta_2 \quad (2.15)$$

$$r_1 = -\mu_0 \beta_1, \quad r_2 = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_2 = \mu_0$$

$$v_1(\psi) = h_0 + h_1 \cos \psi, \quad v_2(\psi) = r_0 + r_1 \cos \psi, \quad v_3(\psi) = a_2 \sin \psi \quad (2.16)$$

Постановка задачи, которая исследуется в данной статье, состоит в изучении условий существования решения (2.12), (2.14) у динамического уравнения из (2.1).

Отметим, что отличие данной задачи от задачи, которая рассматривалась в статье [11], заключается в том, что здесь полагается  $\beta_3 \neq 0$ , а  $\lambda_1, \lambda_2$  — постоянные параметры. В статье [11] указанные параметры приняты равными нулю.

**3. Редукция первого уравнения (2.1) на ИС (2.4), (2.8).** Запишем это уравнение в скалярной форме

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3(t) \omega_2 + \omega_2 B_3 v_3 - \omega_3 B_2 v_2 + \\ + s_2 v_3 - s_3 v_2 + (C_3 - C_2) v_2 v_3 \quad (3.1)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + \lambda_3(t) \omega_1 - \lambda_1 \omega_3 + \omega_3 B_1 v_1 - \omega_1 B_3 v_3 + \\ + s_3 v_1 - s_1 v_3 + (C_1 - C_3) v_3 v_1 \quad (3.2)$$

$$\dot{\lambda}_3 + A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1 + \omega_1 B_2 v_2 - \omega_2 B_1 v_1 + \\ + s_1 v_2 - s_2 v_1 + (C_2 - C_1) v_1 v_2 \quad (3.3)$$

Подставим значения (2.4) в уравнения (3.1)–(3.3). Принимая во внимание уравнения (2.6), получим

$$A_1 \varepsilon(v_3) g(v_3) (\beta_2 v_3 - \beta_3 v_2) + A_1 (v_1 \varepsilon'(v_3) + \beta_1 g'(v_3)) g(v_3) (\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + \\ + v_2 v_3 [\varepsilon^2(v_3) (A_2 - A_3) + \varepsilon(v_3) (B_3 - B_2) + C_3 - C_2] + \\ + v_2 [\beta_3 \varepsilon(v_3) g(v_3) (A_2 - A_3) - \beta_3 B_2 g(v_3) - s_3] + \\ + v_3 [\beta_2 \varepsilon(v_3) g(v_3) (A_2 - A_3) + \lambda_2 \varepsilon(v_3) + \beta_2 B_3 g(v_3) + s_2] + \\ + \beta_2 \beta_3 g^2(v_3) (A_2 - A_3) + \beta_3 \lambda_2 g(v_3) = \lambda_3(t) (v_2 \varepsilon(v_3) + \beta_2 g(v_3)) \quad (3.4)$$

$$A_2 \varepsilon(v_3) g(v_3) (\beta_3 v_1 - \beta_1 v_3) + A_2 (v_2 \varepsilon'(v_3) + \beta_2 g'(v_3)) g(v_3) (\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + \\ + v_1 v_3 [\varepsilon^2(v_3) (A_3 - A_1) + \varepsilon(v_3) (B_1 - B_3) + C_1 - C_3] + \\ + v_1 [\beta_3 \varepsilon(v_3) g(v_3) (A_3 - A_1) + \beta_3 B_1 g(v_3) + s_3] + \\ + v_3 [\beta_1 \varepsilon(v_3) g(v_3) (A_3 - A_1) - \beta_1 B_3 g(v_3) - \lambda_1 \varepsilon(v_3) - s_1] + \\ + \beta_1 \beta_3 g^2(v_3) (A_3 - A_1) - \beta_3 \lambda_1 g(v_3) = -\lambda_3(t) (v_1 \varepsilon(v_3) + \beta_1 g(v_3)) \quad (3.5)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = A_3 \varepsilon(v_3) g(v_3) (\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + A_3 (v_3 \varepsilon'(v_3) + \beta_3 g'(v_3)) (\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) + \\ + v_1 v_2 [\varepsilon^2(v_3) (A_1 - A_2) + \varepsilon(v_3) (B_2 - B_1) + C_2 - C_1] +$$

$$\begin{aligned}
 & + v_1 \left[ \beta_2 \varepsilon(v_3) g(v_3) (A_1 - A_2) - \beta_2 B_1 g(v_3) - \lambda_2 \varepsilon(v_3) - s_2 \right] + \\
 & + v_2 \left[ \beta_1 \varepsilon(v_3) g(v_3) (A_1 - A_2) + \lambda_1 \varepsilon(v_3) + \beta_1 B_2 g(v_3) + s_1 \right] + \\
 & + \beta_1 \beta_2 g^2(v_3) (A_1 - A_2) + (\beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_2) g(v_3)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Рассмотрим случай (2.12), (2.14), исключая производные  $\dot{\omega}_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ), с учетом (2.6), представим уравнения (3.1)–(3.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \lambda_3(t) = \frac{1}{\omega_2} \left[ A_1 \varepsilon_0 g_0 (\beta_2 v_3 - \beta_3 v_2) + (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + \omega_3 (\lambda_2 - B_2 v_2) + \right. \\
 \left. + \omega_2 B_3 v_3 + s_2 v_3 - s_3 v_2 + (C_3 - C_2) v_2 v_3 \right]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_3(t) = \frac{1}{\omega_1} \left[ A_2 \varepsilon_0 g_0 (\beta_1 v_3 - \beta_3 v_1) + (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 + \omega_3 (\lambda_1 - B_1 v_1) + \right. \\
 \left. + \omega_1 B_3 v_3 + s_1 v_3 - s_3 v_1 + (C_3 - C_1) v_3 v_1 \right]
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_3 = -A_3 \varepsilon_0 g_0 (\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) + (A_1 - A_2) \left[ \varepsilon_0^2 v_1 v_2 + \varepsilon_0 g_0 (\beta_2 v_1 + \beta_1 v_2) + \beta_1 \beta_2 g_0^2 \right] + \\
 + (\lambda_1 - B_1 v_1) (\varepsilon_0 v_2 + g_0 \beta_2) - (\lambda_2 - B_2 v_2) (\varepsilon_0 v_1 + g_0 \beta_1) + s_1 v_2 - \\
 - s_2 v_1 + (C_2 - C_1) v_1 v_2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из второго соотношения системы (2.2) следует

$$\begin{aligned}
 \lambda_3(t) = \frac{1}{v_3} \left\{ k_* - v_1^2 (2\varepsilon_0 A_1 - B_1 + B_3) - v_2^2 (2\varepsilon_0 A_2 - B_2 + B_3) - 2\varepsilon_0 A_3 v_3^2 - \right. \\
 \left. - 2 \left[ v_1 (\lambda_1 + \beta_1 g_0 A_1) + v_2 (\lambda_2 + \beta_2 g_0 A_2) + \beta_3 g_0 A_3 v_3 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

где  $k_* = 2k_0 + B_3$ . Исключим в (3.7), (3.8) функцию  $\lambda_3(t)$ :

$$\begin{aligned}
 (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 + \omega_1 \left[ \varepsilon_0 g_0 A_1 (\beta_2 v_3 - \beta_3 v_2) + s_2 v_3 - s_3 v_2 \right] + \\
 + \omega_2 \left[ \varepsilon_0 g_0 A_2 (\beta_3 v_1 - \beta_1 v_3) + s_3 v_1 - s_1 v_3 \right] + v_3 \left[ (C_3 - C_2) \omega_1 v_2 + (C_1 - C_3) \omega_2 v_1 \right] + \\
 + \omega_3 \left[ \omega_1 (\lambda_2 - B_2 v_2) - \omega_2 (\lambda_1 - B_1 v_1) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставим в уравнение (3.11)  $\omega_i$  из (2.12),  $v_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) из (2.14) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по  $\psi$ . Рассмотрим общий вид данного равенства:

$$D a_2 \left[ (h_1 r_2 + h_2 r_1) \sin 3\psi + (h_2 r_2 - h_1 r_1) \cos 3\psi \right] + \dots, \tag{3.12}$$

где

$$D = \varepsilon_0^2 (A_2 - A_1) + \varepsilon_0 (B_1 - B_2) + (C_1 - C_2), \tag{3.13}$$

а многоточием обозначены члены, которые содержат тригонометрические функции меньших аргументов ( $2\psi, \psi$ ). В силу  $a_2 \neq 0, h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$  (см. формулы (2.13)), из (3.12) следует  $D = 0$ . На основании (3.13) найдем первое условие на параметры задачи

$$\varepsilon_0^2 (A_2 - A_1) + \varepsilon_0 (B_1 - B_2) + (C_1 - C_2) = 0 \tag{3.14}$$

Очевидно, что условие (3.14) имеет место и в случае  $\beta_3 = 0$  [11], для которого справедливы формулы (2.15), (2.16). Как показано ниже, рассмотрение уравнения (3.14) носит вспомогательный характер. Но главным итогом такого подхода является получение условия (3.14), которое в значительной степени упрощает исследование уравнений (3.4)–(3.6) на решении (2.12), (2.14) с обозначениями (2.13).

Запишем уравнение (3.9) на ИС (2.14). Вначале введем обозначения

$$\begin{aligned} H_1 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_2 (A_1 - A_2 - A_3) - B_1 g_0 \beta_1 - \lambda_2 \varepsilon_0 - s_2 \\ H_2 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_1 (A_1 - A_2 + A_3) + B_2 g_0 \beta_2 + \lambda_1 \varepsilon_0 + s_1 \\ H_0 &= g_0 [\beta_1 \beta_2 g_0 (A_1 - A_2) + \lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тогда из (3.9) на основе указанного подхода и обозначений (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3(t) &= (h_1 H_1 + r_1 H_2) \cos(g_0 t) + (h_2 H_1 + r_2 H_2) \sin(g_0 t) + \\ &+ (h_0 H_1 + r_0 H_2 + H_0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

В силу ограниченности функции  $\lambda_3(t)$  (см. формулы (2.11), (2.14), (3.7), (3.8)) из формулы (3.16) следует равенство  $h_0 H_1 + r_0 H_2 + H_0 = 0$ , или, в силу (2.13), (3.15), условие на параметры

$$\begin{aligned} c_0 \{ g_0 \beta_1 \beta_2 [2\varepsilon_0 (A_1 - A_2) + B_2 - B_1] + \varepsilon_0 (\lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1) + s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 \} + \\ + g_0 [g_0 \beta_1 \beta_2 (A_1 - A_2) + \lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1] = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда из уравнения (3.16) получим

$$\lambda_3(t) = L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0, \quad (3.18)$$

где  $\lambda_0$  – постоянный параметр, а параметры  $L_1, L_2$  имеют вид

$$L_1 = \frac{h_1 H_1 + r_1 H_2}{g_0}, \quad L_2 = -\frac{h_2 H_1 + r_2 H_2}{g_0} \quad (3.19)$$

Учтем в уравнениях (3.4), (3.5) равенства  $\varepsilon(v_3) = \varepsilon_0$ ,  $g(v_3) = g_0$ , функции  $v_i(t)$  ( $i = \overline{1,3}$ ) из (2.14) и для их преобразования воспользуемся условием (3.14). Введем обозначения

$$\begin{aligned} G_{23} &= C_3 - C_1 + \varepsilon_0^2 (A_1 - A_3) + \varepsilon_0 (B_3 - B_1) \\ G_2 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_3 (A_2 - A_1 - A_3) - s_3 - B_2 \beta_3 g_0 \\ R_1 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_3 (A_1 - A_2 - A_3) - s_3 - B_1 \beta_3 g_0 \\ G_3 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_2 (A_1 + A_2 - A_3) + s_2 + \varepsilon_0 \lambda_2 + \beta_2 g_0 B_3 \\ R_3 &= \varepsilon_0 g_0 \beta_1 (A_1 + A_2 - A_3) + s_1 + \varepsilon_0 \lambda_1 + \beta_1 g_0 B_3 \\ G_0 &= \beta_3 g_0 [\lambda_2 + \beta_2 g_0 (A_2 - A_3)] \\ R_0 &= \beta_3 g_0 [\lambda_1 + \beta_1 g_0 (A_1 - A_3)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отметим, что при  $\beta_3 = 0$  [11] первое, четвертое, пятое равенства из (3.20) не изменяются, а остальные равенства таковы:

$$G_2 = -s_3, \quad R_1 = -s_3, \quad G_0 = 0, \quad R_0 = 0 \quad (3.21)$$

Подставим в уравнения (3.4), (3.5) ИС (2.14) и учтем равенства  $\varepsilon(v_3) = \varepsilon_0$ ,  $g(v_3) = g_0$  и значение  $\lambda_3(\psi)$  из (3.18):

$$\begin{aligned} & -\left(L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0\right)\left[\left(\varepsilon_0 r_0 + \beta_2 g_0\right) + \varepsilon_0\left(r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi\right)\right] + \\ & + \left(r_0 + r_1 \cos \psi + r_2 \sin \psi\right)\left[G_{23}\left(a_0 + a_2 \sin \psi\right) + G_2\right] + \\ & + G_3\left(a_0 + a_2 \sin \psi\right) + G_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & -\left(L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi + \lambda_0\right)\left[\left(\varepsilon_0 h_0 + \beta_1 g_0\right) + \varepsilon_0\left(h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi\right)\right] + \\ & + \left(h_0 + h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi\right)\left[G_{23}\left(a_0 + a_2 \sin \psi\right) + R_1\right] + \\ & + R_3\left(a_0 + a_2 \sin \psi\right) + R_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Рассмотрим равенство нулю коэффициентов при функции  $\sin 2\psi$ , которые следуют из (3.22), (3.23):

$$r_1\left(a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1\right) - \varepsilon_0 r_2 L_2 = 0, \quad h_1\left(a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1\right) - \varepsilon_0 h_2 L_2 = 0 \quad (3.24)$$

Из системы алгебраических уравнений (3.24) в силу  $r_1 \neq 0$ ,  $r_2 \neq 0$ ,  $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 \neq 0$  находим (полагаем  $\beta_3 \neq 0$ )

$$L_2 = 0, \quad a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1 = 0 \quad (3.25)$$

Запишем первое равенство из (3.25) на основании (2.13), (3.15), (3.19)

$$\beta_3\left\{\beta_1 \beta_2 g_0\left[2 \varepsilon_0\left(A_1 - A_2\right) + B_2 - B_1\right] + s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 + \varepsilon_0\left(\beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_2\right)\right\} = 0 \quad (3.26)$$

При выполнении условия (3.26) при  $\beta_3 \neq 0$  равенство (3.17) упрощается:

$$g_0 \beta_1 \beta_2\left(A_1 - A_2\right) + \lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1 = 0 \quad (3.27)$$

Отметим, что при  $\beta_3 = 0$ , в силу  $r_2 = 0$  и  $h_2 = 0$ , имеет место только второе условие из (3.25), то есть в этом случае  $L_2$  из системы (3.19) также равно нулю. Из (3.19) находим

$$\begin{aligned} L_1 = & \frac{\mu_0}{\kappa_0 g_0}\left\{\varepsilon_0 g_0\left[\beta_1^2\left(A_1 - A_2 - A_3\right) - \beta_2^2\left(A_1 - A_2 + A_3\right)\right] - \right. \\ & \left. - g_0\left(B_1 \beta_2^2 + B_2 \beta_1^2\right) - s_1 \beta_1 - s_2 \beta_2 - \varepsilon_0\left(\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

С помощью значений  $a_2$  из (2.13),  $G_{23}$  из (3.20) и  $L_1$  из (3.28) равенство  $a_2 G_{23} - \varepsilon_0 L_1 = 0$  запишем в виде

$$\begin{aligned} & g_0\left\{\kappa_0^2\left(C_3 - C_1\right) + \varepsilon_0^2\left[\beta_1^2\left(2 A_1 - A_2\right) + \beta_2^2 A_2\right] + \varepsilon_0\left(B_1 \beta_2^2 + B_2 \beta_1^2\right)\right\} + \\ & + \varepsilon_0\left[\beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \varepsilon_0\left(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1\right)\right] = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Таким образом, равенство (3.29) является четвертым условием на параметры задачи (при  $\beta_3 \neq 0$ ). Первые три условия – равенства (3.14), (3.26), (3.27). Если  $\beta_3 = 0$ , то условия существования – равенства (3.17), (3.29).

Рассмотрим уравнения (3.22), (3.23). Запишем равенство нулю коэффициентов при  $\cos \psi$ :

$$\lambda_0 \varepsilon_0 - \left( G_2 + \frac{a_0 \varepsilon_0}{a_2} L_1 \right) = 0, \quad \lambda_0 \varepsilon_0 - \left( R_1 + \frac{a_0 \varepsilon_0}{a_2} L_1 \right) = 0 \quad (3.30)$$

Вычитая левые части уравнений (3.30), получим

$$\beta_3 \left[ 2\varepsilon_0 (A_1 - A_2) + (B_2 - B_1) \right] = 0 \quad (3.31)$$

При  $\beta_3 = 0$  из (3.31) имеем тождество, а из (3.30), в силу (2.13), (3.20), устанавливаем значение параметра  $\lambda_0$ :

$$\lambda_0 = -\frac{s_3}{\varepsilon_0} \quad (3.32)$$

В случае  $\beta_3 \neq 0$  из (3.31) следует

$$2\varepsilon_0 (A_1 - A_2) + (B_2 - B_1) = 0, \quad (3.33)$$

а из первого равенства системы (3.30) найдем

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 g_0 \kappa_0^2} \{ & \kappa_0^2 g_0 \left[ \varepsilon_0 g_0 \beta_3 (A_2 - A_1 - A_3) - s_3 - B_2 \beta_3 g_0 \right] + \\ & + \varepsilon_0 c_0 \beta_3 \left[ \varepsilon_0 g_0 (\beta_1^2 (A_1 - A_2 - A_3) - \beta_2^2 (A_1 - A_2 + A_3) - \right. \\ & \left. - g_0 (B_1 \beta_2^2 + B_2 \beta_1^2) - s_1 \beta_1 - s_2 \beta_2 - \varepsilon_0 (\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2) \right] \} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Условие (3.33) позволяет упростить равенство (3.26)

$$s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 + \varepsilon_0 (\lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1) = 0 \quad (3.35)$$

Запишем равенство нулю коэффициентов при  $\sin \psi$  и свободных членах в уравнениях (3.22), (3.23):

$$\beta_2 g_0 L_1 - a_2 G_3 = 0, \quad \beta_1 g_0 L_1 - a_2 R_3 = 0 \quad (3.36)$$

$$\lambda_0 \beta_2 g_0 - a_0 G_3 - G_0 = 0, \quad \lambda_0 \beta_1 g_0 L_1 - a_0 R_3 - R_0 = 0 \quad (3.37)$$

На основании обозначений (2.13), (3.20), (3.28) из уравнений (3.36) устанавливаем условие (3.35) и равенство

$$\begin{aligned} g_0 \left[ 2\varepsilon_0 (\beta_1^2 A_1 + \beta_2^2 A_2) + \beta_1^2 (B_2 + B_3) + \beta_2^2 (B_1 + B_3) \right] + \\ + 2 \left[ s_1 \beta_1 + s_2 \beta_2 + \varepsilon_0 (\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из уравнений (3.37) в результате линейной комбинации получим

$$\beta_3 \left[ \beta_1 \beta_2 g_0 (A_2 - A_1) + \lambda_2 \beta_1 - \lambda_1 \beta_2 \right] = 0 \quad (3.39)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{g_0 \kappa_0^2} \left[ a_0 (\beta_2 G_3 + \beta_1 R_3) + \beta_2 G_0 + \beta_1 R_0 \right] \quad (3.40)$$

Отметим, что при  $\beta_3 = 0$  из (3.39) имеем тождество, а из уравнения (3.40), в силу  $a_0 = 0$ ,  $G_0 = 0$ ,  $R_0 = 0$ , находим  $\lambda_0 = 0$ . Тогда из равенства (3.32) устанавливаем условие

$$s_3 = 0 \quad (3.41)$$

Если в (3.39)  $\beta_3 \neq 0$ , то получим условие (3.27).



Распишем значение  $\lambda_0$  из (3.40), используя значения  $a_0$  из (2.13),  $G_3$ ,  $R_3$ ,  $G_0$ ,  $R_0$  из (3.20):

$$\lambda_0 = \frac{\beta_3}{g_0 \kappa_0^2} \left\{ c_0 \left[ \varepsilon_0 g_0 \kappa_0^2 (A_1 + A_2 - A_3) + g_0 \kappa_0^2 B_3 + s_1 \beta_1 + s_2 \beta_2 + \varepsilon_0 (\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2) \right] + \right. \\ \left. + g_0 \left[ \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + g_0 \beta_2^2 (A_2 - A_3) + g_0 \beta_1^2 (A_1 - A_3) \right] \right\} \quad (3.42)$$

Приравняем правые части равенств (3.34) и (3.42):

$$s_3 = \frac{\beta_3}{\kappa_0^2} \left\{ \varepsilon_0 g_0 \left[ \beta_1^2 (A_2 - 2A_1) - \beta_2^2 A_1 \right] - \kappa_0^2 g_0 B_2 - \varepsilon_0 (\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2) \right\} \quad (3.43)$$

Перечислим все условия существования решения (2.12), (2.14) уравнений (2.1) при  $\beta_3 \neq 0$ : (3.14), (3.25), (3.27), (3.29), (3.33), (3.35), (3.37), (3.38), (3.43). Для удобства исследования запишем их вместе (кроме равенства (3.43))

$$\varepsilon_0^2 (A_2 - A_1) + \varepsilon_0 (B_1 - B_2) + C_1 - C_2 = 0 \quad (3.44)$$

$$s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 + \varepsilon_0 (\beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_2) = 0 \quad (3.45)$$

$$\beta_1 \beta_2 g_0 (A_1 - A_2) + \lambda_1 \beta_2 - \lambda_2 \beta_1 = 0, \quad 2\varepsilon_0 (A_1 - A_2) + B_2 - B_1 = 0 \quad (3.46)$$

$$g_0 \left[ 2\varepsilon_0 (\beta_1^2 A_2 + \beta_2^2 A_1) + \beta_1^2 (B_2 + B_3) + \beta_2^2 (B_1 + B_3) \right] + \\ + 2 \left[ s_1 \beta_1 + s_2 \beta_2 + \varepsilon_0 (\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2) \right] = 0 \quad (3.47)$$

$$g_0 \left\{ \kappa_0^2 (C_3 - C_1) + \varepsilon_0^2 \left[ \beta_1^2 (2A_1 - A_2) + \beta_2^2 A_2 \right] + \varepsilon_0 (\beta_1^2 B_2 + \beta_2^2 B_1) \right\} + \\ + \varepsilon_0 \left[ \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \varepsilon_0 (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \right] = 0 \quad (3.48)$$

Для сравнения результатов, полученных в данной статье, приведем условия [11], найденные при  $\beta_3 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Условие (3.44) сохраняется, условие (3.45) преобразуется к виду

$$s_1 \beta_2 - s_2 \beta_1 = 0, \quad (3.49)$$

а параметры  $s_3$  и  $\lambda_0$  равны нулю. Условия (3.46) необходимо опустить. Равенство (3.17) принимает вид

$$c_0 \beta_1 \beta_2 \left[ 2\varepsilon_0 (A_1 - A_2) + B_2 - B_1 \right] + g_0 \beta_1 \beta_2 (A_1 - A_2) = 0 \quad (3.50)$$

В равенствах (3.47), (3.48) необходимо положить  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Функция  $\lambda_3(\psi)$  при  $L_2 = 0$  имеет вид

$$\lambda_3(\psi) = L_1 \sin \psi, \quad (3.51)$$

а в случае (3.43)–(3.48) она такова

$$\lambda_3(\psi) = L_1 \sin \psi + \lambda_0 \quad (3.52)$$

**4. Анализ условий (3.43)–(3.48). Случай 1.** Положим, что выполняются равенства

$$\beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_2 = 0, \quad \beta_2 s_1 - \beta_1 s_2 = 0 \quad (4.1)$$

Введем параметры  $l_1$  и  $l_2$  по формулам

$$\lambda_1 = \beta_1 l_1, \quad \lambda_2 = \beta_2 l_1, \quad s_1 = \beta_1 l_2, \quad s_2 = \beta_2 l_2 \quad (4.2)$$

В силу (4.1) уравнение (3.45) становится тождеством. Из системы (3.46) и уравнения (3.44) получим

$$A_2 = A_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \quad (4.3)$$

На основании условий (4.2), (4.3) из (3.43), (3.47), (3.48) установим окончательные условия

$$s_3 = -\beta_3 \left[ g_0 (A_1 \varepsilon_0 + B_1) + \varepsilon_0 l_1 \right], \quad g_0 = -\frac{2(\varepsilon_0 l_1 + l_2)}{2\varepsilon_0 A_1 + B_1 + B_3} \quad (4.4)$$

$$g_0 \left[ \varepsilon_0 (\varepsilon_0 A_1 + B_1) + C_3 - C_1 \right] + \varepsilon_0 (\varepsilon_0 l_1 + l_2) = 0$$

При наличии равенств (4.2)–(4.4) параметр  $\lambda_0$  из (3.42) примет вид

$$\lambda_0 = \frac{\beta_3}{g_0} \left\{ c_0 \left[ g_0 (\varepsilon_0 (2A_1 - A_3) + B_3) + l_2 + \varepsilon_0 l_1 \right] + g_0 (A_1 - A_2) \right\} \quad (4.5)$$

Из формулы (3.28) следует

$$L_1 = -\frac{\mu_0 \kappa_0}{g_0} \left[ g_0 (\varepsilon_0 A_3 + B_1) + l_2 + \varepsilon_0 l_1 \right] \quad (4.6)$$

То есть в формуле (3.52) параметры  $\lambda_0$ ,  $L_1$  имеют значения (4.5), (4.6). Из условий (4.1) следует, что векторы, которые являются проекциями векторов  $\mathbf{\beta}$ ,  $\mathbf{\lambda}$ ,  $\mathbf{s}$ , коллинеарны друг другу и лежат в плоскости равных главных моментов инерции, то есть векторы  $\mathbf{\beta}$ ,  $\mathbf{\lambda}$ ,  $\mathbf{s}$  принадлежат этой плоскости.

*Общий случай.* Очевидно, что в этом случае выполняется условие  $A_2 \neq A_1$ . Данное ограничение позволяет из уравнения (3.44) и второго уравнения из (3.46) определить значение параметра  $\varepsilon_0$  и условие на параметры, характеризующие матрицы  $A, B, C$ :

$$\varepsilon_0 = -\frac{B_1 - B_2}{2(A_1 - A_2)}, \quad (B_1 - B_2)^2 - 4(A_1 - A_2)(C_2 - C_1) = 0 \quad (4.7)$$

Уравнение (3.45) параметризуем следующим образом:

$$s_1 = \beta_2 d_0 - \varepsilon_0 \lambda_1, \quad s_2 = \beta_1 d_0 - \varepsilon_0 \lambda_2, \quad (4.8)$$

где  $d_0$  – параметр. Из первого уравнения системы (3.46) найдем значение  $g_0$ :

$$g_0 = \frac{\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1}{\beta_1 \beta_2 (A_1 - A_2)} \quad (4.9)$$

Равенства (4.8), в силу (4.7), (4.9), можно применять для нахождения параметра  $d_0$ :

$$d_0 = \frac{\kappa_0^2 (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)}{4\beta_1 \beta_2 (A_2 - A_1)} \left[ A_1 (B_1 + B_3) - A_2 (B_2 + B_3) \right] \quad (4.10)$$

Если проведем анализ равенств (4.7)–(4.10), то приходим к выводу о том, что они не содержат параметры  $\beta_3$  и  $c_0$ . Поэтому условие (3.43), в силу (4.7)–(4.10), можно ис-

пользовать для определения этого параметра через параметры уравнений движения гиростата и параметры  $\beta_1, \beta_2$ . Выписывать значение  $\beta_3$  нецелесообразно, так как окончательный результат имеет достаточно громоздкий вид. Уравнение (3.48) можно интерпретировать как условие на  $C_1$  и  $C_3$ .

Рассмотрим значение параметра  $\lambda_0$  из равенства (3.42). Очевидно, что он зависит от уже найденных значений (3.47)–(3.50) и параметра  $\beta_3$ , а также от постоянной  $c_0$ , которая характеризует ИС из (2.11). То есть в построенном решении (2.12), (2.14) уравнений (2.1) параметр  $c_0$  можно считать произвольной постоянной, то есть данное ИС является первым интегралом уравнения Пуассона из (2.1). Функция  $\lambda_3(\psi)$  и в общем случае имеет вид (3.52), а значения параметров  $L_1$  и  $\lambda_0$  выражаются по формулам (4.5), (4.6).

Рассмотрим уравнения (2.3). Подставим в них функцию (3.52):

$$L(t) = L_1 g_0 \cos(g_0 t) \tag{4.11}$$

$$\dot{\kappa}(t) = \frac{1}{D_3} \left[ (L_1 - a_2 \varepsilon_0 D_3) \sin(\beta_0 g_0 t) - a_0 \varepsilon_0 D_3 g_0 \beta_3 \right] \tag{4.12}$$

Из формулы (4.11) определяется проекция сил и моментов, действующих на ротор  $S_3$  со стороны тела-носителя. Соотношение (4.12) служит для нахождения скорости вращения этого ротора. Таким образом, уравнения (2.1) проинтегрированы на решения (2.12), (2.14).

**Заключение.** Установлено новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое описывает регулярную прецессию гиростата с переменным гиростатическим моментом. Оно получено при более общих условиях, чем решение в [11]. В силу этого в данной статье проведен сравнительный анализ указанных решений, что позволило упростить и получение решения [11].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson W. On the motion of rigid sonds in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy Soc. Edinburg. 1872. V. 7. P. 668–674.
2. Gray A.A. Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. New York: Repr. by Dover Publ., 1959. 530 p.
3. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. М., 1949. С. 31–152.
4. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат., мех. 1970. № 2. С. 83–96.
5. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
6. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
7. Kane T.R., Fowler R.C. Equivalence of two gyrostatic stability problems // J. Appl. Mech. 1970. V. 37 (4). P. 1146–1147.
8. Roberson R.E. The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // J. Appl. Mech. 1971. V. 38 (3). P. 707–708.
9. Асланов В.С., Дорошин А.В. Движение системы соосных тел переменной массы // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 999–1009.
10. Горп Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ “Институт прикладной математики и механики”, 2017. 250 с.
11. Горп Г.В., Белоконь Т.В. О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 2. С. 139–151.

12. *Gorr G.V.* Об одном подходе в исследовании движения гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. 2021. Т. 31. Вып. 1. С. 1–14.
13. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х тт. Т. 2., ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
14. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
15. *Gorr G.V.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2017. 421 с.
16. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26. fasc. 3–4. P. 271–281.
17. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: Дон-НУ, 2010. 394 с.
18. *Gorr G.V., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
19. *Gorr G.V., Балаклицкая Т.В.* О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. Вып. 49. С. 55–65.
20. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotation Körpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math. 1870. 71. S. 237–262.
21. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Mèc. Thèor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 755–762.
22. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: 1893. 234 с.
23. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
24. *Gorr G.V.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
25. *Gorr G.V.* On Three Invariant of the Equations of Motion of a Body in a Potential Field of Force // Mech. Solids. 2019. V. 54. Suppl. 2. P. S104–S114.

### **Precessions of a Gyrostat under the Action of Potential and Gyroscopic Forces in the Case of a Variable Gyrostatic Momentum**

**G. V. Gorr<sup>a,#</sup> and A. V. Maznev<sup>a,##</sup>**

<sup>a</sup>*State Budgetary Institution “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”, Donetsk, DPR*

<sup>#</sup>*e-mail: gvgorr@gmail.com*

<sup>##</sup>*e-mail: aleksandr\_maznev@rambler.ru*

A new method for investigations of gyrostat precessions under the action of potential and gyroscopic forces in the case of a variable gyrostatic momentum is presented. The solution of Kirchhoff–Poisson equations, which describes the regular precessions of the gyrostat about the symmetry axis of the force fields, is constructed.

*Keywords:* gyrostat, gyrostatic momentum, potential and gyroscopic forces, precessions

### REFERENCES

1. *Thomson W.* On the motion of rigid sonds in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1872, no. 7, P. 668–674.
2. *Gray A.A.* Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. N.Y.: Repr. by Dover Publ., 1959. 530 p.
3. *Zhukovsky N.E.* On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid // in: Coll. works. Vol. 1. Moscow: 1949. P. 31–152. (in Russian)
4. *Rumyantsev V.V.* About orientation control and satellite stabilization by rotors // Moscow Univ. Bull. Ser. Math., Mech., 1970, iss. 2, pp. 83–96. (in Russian)

5. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Moscow: Mir, 1980. 292 p. (in Russian)
6. *Kharlamov P.V.* On the equations of motion of a system of solids // *Mech. Rigid Body*, 1972, vol. 4, pp. 52–73. (in Russian)
7. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // *JAMM*, 1970, vol. 37 (4), pp. 1146–1147.
8. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // *JAMM*, 1971, vol. 38 (3), pp. 707–708.
9. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* The motion of a system of coaxial bodies of variable mass // *JAMM*, 2004, vol. 68, iss. 6, pp. 999–100. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.11.012>
10. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The Movement of the Gyrostat with a Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Gov. Inst. “Institute of Applied Mathematics and Mechanics”, 2017. 250 p. (in Russian)
11. *Gorr G.V., Belokon T.V.* On solutions of equations of motion of a gyrostat with variable gyrostatic moment // *JAMM*, 2021, vol. 85, iss. 2, pp. 139–151.
12. *Gorr G.V.* An approach in studying gyrostat motion with variable gyrostatic moment // *Vestn. Udmurt. univ. Matem. Mekh. Komp’ut. Nauki*, 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 1–14.
13. *Levy-Civita T., Amaldi W.* Course in Theoretical Mechanics. 2 vols, Vol. 2, Pt. 2. Moscow: Inostr. Lit., 1951. 555 p. (in Russian)
14. *Kharlamov P.V.* On invariant relations of a system of differential equations // *Mech. Rigid Body*, 1974, iss. 6, pp. 15–24. (in Russian)
15. *Gorr G.V.* Invariant Relations of Equations of Rigid Body Dynamics (Theory, Results, Comments). Moscow; Izhevsk: Inst. for Comput. Res., 2017. 421 c. (in Russian)
16. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. di matem. pura ed appl.*, 1947, ser. 4, vol. 24, fasc. 3–4, pp. 271–281.
17. *Gorr G.V., Maznev A.V.* The Dynamics of a Gyrostat Having a Fixed Point. Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
18. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukiva Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
19. *Gorr G.V., Balaklitskaya T.V.* On motion of the principal axes of inertia of a rigid body, having a fixed point, in the case of precession relative to the vertical // *Mech. Rigid Body*, 2019, vol. 49, pp. 55–65.
20. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // *J. für die reine und angew. Math.*, 1870, Bd. 71. S. 237–262.
21. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // *J. Mekan. Theor. Appl.*, 1986, vol. 5, no. 5, pp. 755–762.
22. *Steklov V.A.* On Motion of a Solid Body in the Liquid. Kharkov: 1893. 234 p. (in Russian)
23. *Kharlamov P.V.* On motion in the fluid of a body bounded by a multiply connected surface // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 1963, no. 4, pp. 17–29. (in Russian)
24. *Gorr G.V.* On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // *JAMM*, 2019, vol. 83, iss. 2, pp. 202–214. (in Russian)
25. *Gorr G.V.* On three invariant of the equations of motion of a body in a potential field of force // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, Suppl. 2. pp. S104–S114.

УДК 531.38

## ГИРОСТАТ С ЭЛЕКТРОМОТОРОМ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

© 2022 г. Б. И. Коносеви<sup>1,\*</sup>, Ю. Б. Коносеви<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики и механики, Донецк, ДНР

\*e-mail: konos.donetsk@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.01.2022 г.

После доработки 08.07.2022 г.

Принята к публикации 15.07.2022 г.

Предложена математическая модель однороторного гиростата с неподвижной точкой, находящегося в поле силы тяжести и снабженного электромотором, который поддерживает вращение ротора при наличии момента сил трения относительно его оси. Трение в сферическом шарнире, реализующем неподвижную точку, предполагается отсутствующим. Рассмотрены бестоковые модели асинхронного и синхронного электромоторов, многофазная модель синхронного электромотора.

Для гиростата с электромотором получены две формы уравнений движения, которые соответствуют двум определениям тензора инерции. Проанализированы условия существования стационарных решений этих уравнений. Такие решения описывают стационарные движения гиростата — перманентные вращения вокруг вертикали и состояния покоя тела-носителя. Проведено сравнение найденных условий с аналогичными условиями для двух известных моделей гиростата — с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью, и с ротором, вращающимся по инерции без трения. Установлено, что в общем случае направления полуосей равномерного вращения гиростата с электромотором образуют в теле-носителе конус, совпадающий с конусом полуосей равномерного вращения для гиростата с равномерно вращающимся ротором.

*Ключевые слова:* гиростат, тензор инерции, асинхронный и синхронный электромотор, стационарное движение, конус полуосей равномерного вращения

DOI: 10.31857/S003282352206008X

**1. Введение.** Гиростатом называют механическую систему, состоящую из твердого тела, которое содержит массы, циклически движущиеся таким образом, что не изменяется распределение масс во всей системе [1]. Часто под гиростатом понимают систему твердых тел, состоящую из тела-носителя, в котором вокруг фиксированных в нем осей вращаются роторы, являющиеся динамически и статически уравновешенными относительно этих осей [2, 3]. История формирования понятия “гиростат” отражена в [4].

Задача о движении в поле силы тяжести гиростата с постоянным гиростатическим моментом, имеющего неподвижную точку, является непосредственным обобщением классической задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой. В книге [4] для гиростата приведены аналоги общих случаев интегрируемости этой классической задачи и ее точных частных решений. Здесь также представлены неклассические постановки задачи о движении гиростата с неподвижной точкой, в которых рассматривает-

сы его движение не только в поле силы тяжести, но и в поле потенциальных и гироскопических сил, в ньютоновском, кулоновском и магнитном полях.

Еще одна неклассическая постановка задачи о гиростате относится к случаю переменного гиростатического момента, явно зависящего от времени [3]. Расширение постановки задачи о гиростате позволяет получить для этой задачи большое число точных частных решений [4–8]. Такие решения находят путем задания класса инвариантных соотношений для системы уравнений движения или заданием структуры решения этих уравнений. При этом в случае гиростатического момента, явно зависящего от времени, эта зависимость определяется аналитической структурой получаемых решений, а не физическими свойствами момента сил, действующего со стороны статора на ротор относительно его оси.

Для получения точных частных решений используются различные редуцированные формы уравнений движения гиростата. В [9] отмечены случаи, когда редукция с использованием первых интегралов некорректна вследствие функциональной зависимости этих интегралов.

Кроме движений, определяемых формальным заданием класса решений уравнений движения, для гиростата с постоянным или явно зависящим от времени гиростатическим моментом выделяются и анализируются движения, обладающие определенными свойствами – это стационарные движения [2, 10–13], прецессионные, маятниковые, прецессионно-изоконические, асимптотические [14–18], а также хаотические движения [19–22]. Большое развитие получили топологические методы исследования движения гиростата [23–26].

В [27] получены условия устойчивости равномерных вращений тяжелого гиростата с неподвижной точкой. Для симметричного гиростата, закрепленного на оси симметрии, в [28] найдены условия устойчивости его регулярной прецессии в центральном ньютоновском поле. В [29] рассмотрена устойчивость стационарных движений гиростата в идеальной жидкости, а в [30] изучен вопрос о стабилизации программных движений гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью.

Современные исследования динамики гиростата, не имеющего неподвижной точки, посвящены, в основном, изучению вращательного движения спутника-гиростата, движущегося по орбите. В [31–34] проведен анализ достаточных и необходимых условий устойчивости относительных равновесий орбитального гиростата. Для спутника-гиростата, движущегося в центральном ньютоновском силовом поле по круговой орбите, в [35] предложен метод определения всех его равновесных ориентаций и проведен анализ достаточных условий их устойчивости. Периодические движения такого гиростата рассмотрены в [36–38]. В [39–41] изучаются динамика и устойчивость стационарных движений космических систем, в том числе и гиростатов, с тросовыми и шарнирными соединениями. Для однороторного спутника-гиростата, содержащего сферическую полость с жидкостью большой вязкости, в [42] получено приближенное решение уравнений его движения относительно центра масс. В [43, 44] рассмотрены вопросы устойчивости и стабилизации относительных равновесий спутника-гиростата с упругим стержнем. В [45] предложен алгоритм структурно-параметрической идентификации модели демпфированных колебаний упругого элемента спутника-гиростата.

При изучении большинства как прикладных, так и теоретических задач, гиростатический момент, часто даже не оговаривая это, предполагают постоянным, то есть полагают, что роторы либо вращаются по инерции без трения, либо они вращаются с постоянными относительными угловыми скоростями. Случай переменного гиростатического момента, не являющегося явно заданной функцией времени, имеет место при исследовании задач ориентации гиростата с помощью управляющих моментов, приложенных к роторам со стороны тела-носителя и зависящих от компонент вектора угловой скорости [46–48].

На практике быстро вращающийся ротор испытывает значительное тормозящее воздействие сил трения, и поэтому предположение о вращении роторов по инерции без трения нереализуемо для длительно работающих аппаратов с быстро вращающимися роторами, выполненных по схеме гиростата. Что касается предположения о вращении роторов с постоянными относительными угловыми скоростями, то устройством, которое с той или иной точностью обеспечивает реализацию этого предположения, является электромотор. Поэтому для обоснования правомерности применения модели гиростата с равномерно вращающимися роторами следует изучить модель гиростата, в которой роторы гиростата являются роторами электромоторов, а статоры электромоторов являются частью тела-носителя гиростата. Два основных типа электромоторов – асинхронный и синхронный.

После выхода статьи [49] явные модели электромоторов используются при изучении динамики гироскопа в кардановом подвесе. До недавнего времени в публикациях на эту тему рассматривались упрощенные модели электромоторов, которые явно не содержат электрических токов [49–56]. Поэтому их уместно назвать бестоковыми. В таких моделях суммарный момент  $M$ , создаваемый электромотором и силами трения относительно оси ротора (гироскопа), зависит от угловой скорости вращения ротора относительно статора в случае асинхронного электромотора, а в случае синхронного электромотора он зависит также от угла поворота ротора относительно вращающегося магнитного поля статора. В простейшем случае  $M = -k_1\gamma - k_2\dot{\gamma}$  ( $k_1, k_2 > 0$ ), где  $\gamma = \varphi' - \Omega t$ ,  $\varphi'$  – угол поворота ротора электромотора  $S'$  относительно его статора,  $\Omega > 0$  – постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре. Для асинхронного электромотора в простейшем случае применяется линейная формула  $M = -k_0\dot{\gamma}$  ( $k_0 > 0$ ), где  $\dot{\gamma} = \dot{\varphi}' - \Omega'$ ,  $\Omega'$  – угловая скорость вращения ротора, при которой вращающий момент электромотора уравнивает момент трения ( $0 < \Omega' < \Omega$ ). В [49–56] для гироскопа в кардановом подвесе используются бестоковые модели электромоторов, основанные на нелинейных аналогах этих формул.

В [57] рассмотрена двухтоковая модель синхронного электромотора, частным случаем которой является двухтоковая модель асинхронного электромотора. В [58] предложена достаточно общая многотоковая модель синхронного электромотора в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей уравнения для электрических токов. На основе этой модели в [59] получено условие глобальной устойчивости такого электромотора, а в [60, 61] установлен необходимый и достаточный критерий устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного синхронным электромотором. Этот результат обобщает на случай многотоковой модели синхронного электромотора результат работ [54, 55].

Представляет интерес явно учесть наличие электромотора и при изучении динамики гиростата. Этому посвящена данная работа. В ней рассматривается тяжелый однороторный гиростат с неподвижной точкой, снабженный электромотором. Ротор электромотора является ротором гиростата, а статор электромотора является частью тела-носителя. Трение в сферическом шарнире, реализующем неподвижную точку, предполагается отсутствующим, а относительно оси ротора на него со стороны тела-носителя действуют момент сил трения и момент, создаваемый электромотором. Рассматриваются три модели электромотора: бестоковые модели асинхронного и синхронного электромотора и многотоковая модель синхронного электромотора.

Получены две формы дифференциальных уравнений движения гиростата, соответствующие двум определениям его тензора инерции для неподвижной точки. Дано сравнение условий существования стационарных вращений гиростата с электромотором с такими условиями для двух известных моделей гиростата без электромотора – с равномерно вращающимся ротором и с ротором, вращающимся по инерции без трения [2, 10].



**2. Основные соотношения для механической части гиростата.** При выводе уравнений движения гиростата с электромотором за основу взят подход, принятый в [2, 3].

*2.1. Механическая часть гиростата.* Рассматривается система двух твердых тел  $S^0$  и  $S'$ . Тело  $S^0$  с произвольным распределением масс имеет неподвижную точку  $O$ . Предполагается, что связь, реализующая неподвижную точку, является идеальной. В теле  $S^0$  вокруг фиксированной в нем оси  $l$  вращается твердое тело  $S'$  (ротор), которое является статически и динамически уравновешенным относительно этой оси.

Система тел  $S^0$  и  $S'$  находится в поле силы тяжести. Со стороны тела-носителя  $S^0$  к ротору  $S'$  приложены равнодействующие сил реакции в подшипниках, на которых установлена ось  $l$ . Кроме того, относительно оси  $l$  действует момент сил трения  $M_2$ , зависящий от угловой скорости  $\dot{\varphi}'$  вращения ротора  $S'$  относительно тела-носителя  $S^0$ . Для поддержания вращения ротора при наличии трения используется электромотор, так что тело  $S'$  является ротором электромотора, а статор электромотора составляет часть тела-носителя  $S^0$ . Момент, создаваемый электромотором относительно оси  $l$ , обозначается через  $M_1$ . Далее, через  $m^0$  и  $m'$  обозначаются массы тел  $S^0$  и  $S'$ , а через  $C^0$  и  $C'$  – их центры масс. Точка  $C'$  лежит на оси  $l$ .

С телом  $S^0$  неизменно связана правая декартова система координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  с началом в неподвижной точке, а с ротором  $S'$  неизменно связана система координат  $C'\xi'_1\xi'_2\xi'_3$  с началом в его центре масс и осью  $C'\xi'_1$ , направленной вдоль оси  $l$  вращения ротора. Единичные векторы осей координат  $O\xi_1$ ,  $C'\xi'_1$  и т. д. обозначаются через  $\xi_1$ ,  $\xi'_1$  и т. д. Вектор  $\mathbf{h} = \mathbf{OC}'$  проведен из неподвижной точки  $O$  в центр масс  $C'$  ротора  $S'$ , а вектор  $\mathbf{c}^0 = \mathbf{OC}^0$  указывает положение центра масс  $C^0$  тела-носителя  $S^0$ .

Пусть  $\boldsymbol{\omega}$  – абсолютная угловая скорость тела  $S^0$ ,  $\mathbf{v}$  – единичный вектор направления силы тяжести,  $\varphi'$  – угол поворота ротора  $S'$  вокруг оси  $l$  относительно тела  $S^0$ . Единичный вектор оси  $l$  обозначается через  $\mathbf{l}$ , так что  $\mathbf{l} = \xi'_1$ . Векторы  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{c}^0$  задаются своими компонентами в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_1\xi_1 + \omega_2\xi_2 + \omega_3\xi_3, & \mathbf{v} &= v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 \\ \mathbf{l} &= l_1\xi_1 + l_2\xi_2 + l_3\xi_3, & \mathbf{h} &= h_1\xi_1 + h_2\xi_2 + h_3\xi_3 \\ \mathbf{c}^0 &= c_1^0\xi_1 + c_2^0\xi_2 + c_3^0\xi_3\end{aligned}\quad (2.1)$$

Величины  $\omega_i$ ,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\varphi'$  являются функциями времени  $t$  и входят в число фазовых переменных системы дифференциальных уравнений движения рассматриваемой электромеханической системы, а величины  $l_i$ ,  $h_i$ ,  $c_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются постоянными параметрами этой системы.

*2.2. Момент количества движения и тензор инерции гиростата в неподвижной точке.* Следуя [2, 3], получаем для вектора  $\mathbf{x}$  момента количества движения гиростата относительно неподвижной точки выражение

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m'\mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + A'(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} + \dot{\varphi}')\mathbf{l} + B'\mathbf{l} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}) \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{A}^0$  – тензор инерции тела  $S^0$  в точке  $O$ ,  $A'$  – момент инерции ротора  $S'$  относительно оси  $l$ ,  $B'$  – момент инерции ротора относительно любой оси, проведенной из его центра масс  $C'$  ортогонально  $l$ .

Выражение (2.2) записывают в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\omega} + A' \dot{\phi} \mathbf{l}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{A}^*$  – тензор инерции гиристора, определенный формулой

$$\mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m' \mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + A' (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{l} + B' \mathbf{l} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}) \quad (2.4)$$

Выражение (2.2) записывают также в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + A' p' \mathbf{l} \quad (2.5)$$

Здесь тензор  $\mathbf{A}$  определен формулой

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + m' \mathbf{h} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}) + B' \mathbf{l} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}), \quad (2.6)$$

а величина  $p'$  является проекцией вектора  $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + \dot{\phi} \mathbf{l}$  абсолютной угловой скорости ротора  $S'$  на направление оси  $l$ :

$$p' = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} + \dot{\phi} = \omega_1 l_1 + \omega_2 l_2 + \omega_3 l_3 + \dot{\phi} \quad (2.7)$$

Согласно (2.4), компоненты тензора  $\mathbf{A}^*$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  выражаются по формулам

$$\begin{aligned} A_{11}^* &= A_{11}^0 + m' (h_2^2 + h_3^2) + B' (l_2^2 + l_3^2) + A' l_1^2 \\ A_{12}^* &= A_{12}^0 - m' h_1 h_2 + (A' - B') l_1 l_2 \quad (1\ 2\ 3) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь символ  $(1\ 2\ 3)$  означает, что формулы для  $A_{22}^*$ ,  $A_{33}^*$ ,  $A_{23}^*$ ,  $A_{31}^*$  получаются из формул (2.8) путем круговой перестановки индексов 1, 2, 3. Остальные три компоненты  $A_{21}^*$ ,  $A_{32}^*$ ,  $A_{13}^*$  тензора  $\mathbf{A}^*$  равны его соответствующим компонентам с переставленными индексами.

Формула (2.6), определяющая тензор  $\mathbf{A}$ , отличается от формулы (2.4), определяющей тензор  $\mathbf{A}^*$ , отсутствием члена с  $A'$ . Поэтому компоненты  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) тензора  $\mathbf{A}$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  выражаются по формулам, которые получаются из формул (2.8) путем отбрасывания членов, содержащих  $A'$ .

**2.3. Уравнение вращения ротора.** Для вывода дифференциального уравнения, описывающего вращение ротора  $S'$  вокруг оси  $l$ , воспользуемся векторным уравнением  $d(\mathbf{A}' \cdot \boldsymbol{\omega}')/dt = \mathbf{M}$ , которое выражает теорему об изменении момента количества движения ротора относительно его центра масс  $C'$ . Здесь  $\mathbf{A}'$  – тензор инерции ротора в точке  $C'$ ,  $\mathbf{M}$  – момент, создаваемый относительно точки  $C'$  силами, действующими на ротор со стороны тела-носителя  $S^0$ .

Момент  $\mathbf{M}$  равен сумме момента  $\mathbf{M}_1 = M_1 \mathbf{l}$ , создаваемого электромотором относительно оси ротора  $l$ , момента  $\mathbf{M}_2 = M_2 \mathbf{l}$ , создаваемого относительно этой оси силами трения, а также момента  $\mathbf{M}_3$ , создаваемого относительно точки  $C'$  равнодействующими сил реакций в цилиндрических шарнирах, с помощью которых ось  $l$  закреплена в теле  $S^0$ . В проекции на направление единичного вектора  $\mathbf{l}$  получаем уравнение вращения ротора

$$A' \dot{p}' = M, \quad (2.9)$$

где  $M = M_1 + M_2$ . С учетом (2.7) оно записывается следующим образом

$$A' (\dot{\omega}_1 l_1 + \dot{\omega}_2 l_2 + \dot{\omega}_3 l_3 + \ddot{\phi}) = M \quad (2.10)$$

**3. Модели электромотора.** Дадим краткие описания используемых в данной работе бестоковых моделей асинхронного и синхронного электромоторов [52, 62], а также многотоковой модели синхронного электромотора [58], и приведем соответствующие им выражения для момента  $M$  на оси ротора гиристора.

Для всех этих моделей электромотора момент, создаваемый силами трения вокруг оси ротора, предполагается монотонно убывающей и непрерывно дифференцируемой нечетной функцией  $M_2(\dot{\varphi}')$  относительной угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}'$ . Предполагается также, что в статоре электромотора имеются обмотки провода, на которые подается переменный электрический ток. В результате этого создается магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого  $\mathbf{B}$  постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью  $\Omega > 0$ .

*3.1. Бестоковая модель асинхронного электромотора.* В случае асинхронного электромотора вращающееся магнитное поле статора индуцирует магнитное поле в роторе, и в результате взаимодействия этих двух полей возникает момент  $M_1(\dot{\varphi}')$ , увлекающий ротор во вращение. Знак этого момента противоположен знаку разности  $\dot{\varphi}' - \Omega$ .

При  $M_1(0) > -M_2(0)$  существует значение  $\Omega' \in (0, \Omega)$  угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}'$ , при котором момент трения уравнивает вращающий момент асинхронного электромотора, то есть суммарный момент  $M(\dot{\varphi}') = M_1(\dot{\varphi}') + M_2(\dot{\varphi}')$  для такого электромотора равен нулю при  $\dot{\varphi}' = \Omega' < \Omega$ . Вместо угловой скорости  $\dot{\varphi}'$  удобно ввести переменную  $\dot{\gamma} = \dot{\varphi}' - \Omega'$ . Тогда суммарный момент  $M$  для бестоковой модели асинхронного электромотора становится функцией  $M(\dot{\gamma})$  такой, что  $\dot{\gamma}M(\dot{\gamma}) < 0$  ( $\dot{\gamma} \neq 0$ ),  $M(0) = 0$ .

*3.2. Бестоковая модель синхронного электромотора.* В рамках упрощенного подхода предполагается, что ротор  $S$  синхронного электромотора имеет неизменно связанное с ним магнитное поле, вектор напряженности которого  $\mathbf{B}'$  постоянен по модулю и ортогонален оси ротора. В результате взаимодействия магнитных полей статора и ротора возникает сила, которая стремится совместить концы векторов  $\mathbf{B}$  и  $-\mathbf{B}'$ . Момент  $M_1$ , создаваемый этой силой относительно оси ротора, является синусоидальной функцией  $M_1(\gamma) = -b_0 \sin \gamma$  ( $b_0 > 0$ ) угла  $\gamma = \varphi' - \Omega t$  между векторами  $\mathbf{B}$  и  $-\mathbf{B}'$ . В результате для суммарного момента  $M = M_1 + M_2$  получаем формулу  $M = M_2(\dot{\varphi}') - b_0 \sin \gamma$ .

Поскольку функция  $M_2(\dot{\varphi}')$  – нечетная и монотонно убывающая, при  $\dot{\varphi}' = \Omega > 0$  она отрицательна, и поэтому, вводя обозначение  $c_0 = -M_2(\Omega)$ , имеем  $c_0 > 0$ . Пользуясь этим обозначением, запишем полученную формулу в виде

$$M = M(\gamma, \dot{\gamma}) = \Delta M_2(\dot{\gamma}) - b_0 \sin \gamma - c_0, \quad (3.1)$$

где  $\Delta M_2(\dot{\gamma}) = M_2(\dot{\gamma} + \Omega) + c_0$ . Момент  $\Delta M_2(\dot{\gamma})$  – диссипативный, так как

$$\dot{\gamma} \Delta M_2(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M_2(0) = 0 \quad (3.2)$$

*3.3. Многотоковая модель синхронного электромотора.* Рассмотрим многотоковую модель синхронного электромотора, предложенную в [58] и откорректированную в [59]. Так же, как и в п. 3.2, предполагаем, что в статоре электромотора создано магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\Omega > 0$ .

В роторе синхронного электромотора имеются две обмотки – демпферная обмотка и обмотка возбуждения. Демпферная обмотка обычно выполнена в виде “беличьего колеса”, то есть в виде двух металлических колец, соединенных металлическими стержнями, ортогональными плоскости каждого из этих колец. Обмотка возбуждения содержит большое число витков электрического провода, и на ее концы через угольные щетки подается постоянное напряжение.

Многотоковая модель синхронного электромотора [58] определяется системой дифференциальных уравнений [59]

$$\begin{aligned} A'\dot{\gamma} &= -\mu\dot{\gamma} + \Delta M_2(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - \\ &\quad - b_0 \sin \gamma - c_0 \\ L_1 \dot{x} &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \\ L_2 \dot{i}_n &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right); \quad n = 1, 2, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

с фазовым вектором  $(\gamma, \dot{\gamma}, x, \dot{x}, i_1, \dots, i_{n_2})$ , где  $x, i_1, \dots, i_{n_2}$  — электрические токи,  $n_2$  — число стержней в демпферной обмотке. Здесь  $A'$  — осевой момент инерции ротора,  $R_1$  и  $L_1$  — активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения, а  $R_2$  и  $L_2$  — активное и индуктивное сопротивления стержней демпферной обмотки. В уравнения (3.3) также входят диссипативный момент  $\Delta M_2(\dot{\gamma})$ , постоянная  $c_0 > 0$  и постоянные параметры  $\mu, a_1, a_2, b_0 > 0$ .

Для многотоковой модели синхронного электромотора правая часть первого из уравнений (3.3) представляет собой суммарный момент  $M$ , создаваемый относительно оси ротора силами, действующими на ротор со стороны статора:

$$\begin{aligned} M &= M(\gamma, \dot{\gamma}, x, \dot{x}, i_1, \dots, i_{n_2}) = -\mu\dot{\gamma} + \Delta M_2(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - \\ &\quad - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - b_0 \sin \gamma - c_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

**4. Первая форма уравнений движения гиростата с электромотором.** В этом разделе получена система дифференциальных уравнений движения гиростата с электромотором. Она включает динамические и кинематические уравнения движения системы тел  $S^0$  и  $S'$ , в которых в качестве переменных взяты проекции  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $v_1, v_2, v_3$  векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{v}$  на главные оси тензора инерции  $\mathbf{A}$ , определенного формулой (2.6). Кроме того, эта система включает уравнение вращения ротора, а в случае многотоковой модели электромотора — и уравнения для электрических токов.

**4.1. Уравнения движения тела-носителя с ротором.** Чтобы вывести уравнения движения системы тел  $S^0, S'$ , воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения этой системы относительно неподвижной точки:  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{M}_O$ . Здесь  $\mathbf{x}$  — суммарный момент количества движения тел  $S^0, S'$  относительно неподвижной точки  $O$ ,  $\mathbf{M}_O$  — момент относительно точки  $O$  внешних сил, действующих на систему тел  $S^0$  и  $S'$ . Момент  $\mathbf{M}_O$  равен моменту, создаваемому относительно точки  $O$  силой  $(m^0 + m')g\mathbf{v}$  веса обоих тел, приложенной в их общем центре масс  $C$ . Этот центр масс определяется вектором  $\mathbf{c} = \mathbf{OC} = (m^0 \mathbf{c}^0 + m' \mathbf{h})/m$ , где  $m = m^0 + m'$  — масса всей системы,  $\mathbf{c}^0 = \mathbf{OC}^0$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{OC}'$ . Следовательно,  $\mathbf{M}_O = mg\mathbf{c} \times \mathbf{v}$ , и теорема об изменении момента количества движения выражается векторным уравнением

$$d'\mathbf{x}/dt = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma \mathbf{e} \times \mathbf{v}, \quad (4.1)$$

где  $d'/dt$  — относительная производная по времени в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$ ,  $\Gamma = mg|\mathbf{c}|$ . Компоненты единичного вектора  $\mathbf{e}$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  обозначаются через  $e_1, e_2, e_3$ :

$$\mathbf{e} = e_1 \boldsymbol{\xi}_1 + e_2 \boldsymbol{\xi}_2 + e_3 \boldsymbol{\xi}_3 \quad (4.2)$$

Запишем векторное уравнение (4.1) в проекциях на оси системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , связанной с телом-носителем  $S^0$ . В качестве этой системы координат выберем главные оси тензора инерции  $\mathbf{A}$ , определенного формулой (2.6). В таких осях для внедиагональных компонент этого тензора имеем  $A_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ), а для его диагональных компонент примем обозначения  $A_1 = A_{11}$ ,  $A_2 = A_{22}$ ,  $A_3 = A_{33}$ . С помощью этих обозначений формула (2.5) записывается в виде

$$\mathbf{x} = (A_1\omega_1 + A'p'l_1)\xi_1 + (A_2\omega_2 + A'p'l_2)\xi_2 + (A_3\omega_3 + A'p'l_3)\xi_3$$

Тогда, принимая во внимание, что  $A'p' = M$  согласно (2.9), и пользуясь разложениями (2.1), (4.2), получаем из (4.1) три дифференциальных уравнения

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + A'p'(l_2\omega_3 - l_3\omega_2) + \Gamma(e_2v_3 - e_3v_2) - l_1M \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (4.3)$$

4.2. *Вывод первой формы уравнений движения гиригистата с электромотором.* Величина  $p'$  в уравнениях (4.3) выражается через переменные  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dot{\phi}'$  по формуле (2.7). В случае бестоковой модели асинхронного электромотора вместо  $\dot{\phi}'$  в п. 2.1 введена переменная  $\dot{\gamma} = \dot{\phi}' - \Omega'$ , и тогда  $p' = \omega_1l_1 + \omega_2l_2 + \omega_3l_3 + \dot{\gamma} + \Omega'$ . Для бестоковой и многофазовой моделей синхронного электромотора в п. 2.2, 2.3 введена переменная  $\gamma = \phi' - \Omega t$ , пользуясь которой имеем для величины  $p'$  выражение  $p' = \omega_1l_1 + \omega_2l_2 + \omega_3l_3 + \dot{\gamma} + \Omega$ .

Рассматривая случай синхронного электромотора как основной, подставляем это выражение в уравнения (4.3) и получаем следующие динамические уравнения для системы тел  $S^0, S'$

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + A'(\omega_1l_1 + \omega_2l_2 + \omega_3l_3 + \dot{\gamma} + \Omega) \times (l_2\omega_3 - l_3\omega_2) + \Gamma(e_2v_3 - e_3v_2) - l_1M \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (4.4)$$

Они определяют изменение фазовых переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

Изменение фазовых переменных  $\gamma, \dot{\gamma}$  определяет уравнение вращения ротора (2.10). Поскольку  $\dot{\phi}' = \dot{\gamma}$ , это уравнение записывается в виде

$$A'\ddot{\gamma} = -A'(l_1\dot{\omega}_1 + l_2\dot{\omega}_2 + l_3\dot{\omega}_3) + M \quad (4.5)$$

Чтобы получить уравнения движения гиригистата в нормальном виде, следует подставить в правую часть уравнения (4.5) выражения производных  $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$  через фазовые переменные, определяемые формулами (4.4).

Изменение компонент единичного вектора  $\mathbf{v}$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  определяют известные кинематические уравнения

$$\dot{v}_1 = \omega_3v_2 - \omega_2v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1v_3 - \omega_3v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2v_1 - \omega_1v_2 \quad (4.6)$$

В случае бестоковой модели синхронного электромотора момент  $M$  является функцией  $M = M(\gamma, \dot{\gamma})$  переменных  $\gamma, \dot{\gamma}$  и представляется по формуле (3.1). В этом случае уравнения (4.4), (4.5), (4.6) эквивалентны замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовым вектором  $y = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, v_1, v_2, v_3, \gamma, \dot{\gamma})$ , которая описывает движение тяжелого однороторного гиригистата с синхронным электроприводом ротора.

При использовании многофазовой модели синхронного электромотора момент  $M$  в (4.5) является функцией (3.4):  $M(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2})$  не только переменных  $\gamma, \dot{\gamma}$ , но и электрических токов  $x, i_1, \dots, i_{n_2}$ . Поэтому в случае многофазовой модели синхронного

электромотора первая форма уравнений движения гиростата определяется уравнениями (4.4), (4.5), (4.6), к которым добавляются уравнения системы (3.3), описывающие изменение электрических токов  $x, i_1, \dots, i_{n_2}$ :

$$\begin{aligned} L_1 \dot{x} &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma \\ L_2 \dot{i}_n &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right); \quad n = 1, 2, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Она имеет фазовый вектор  $y = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, v_1, v_2, v_3, \gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ .

**5. Вторая форма уравнений движения гиростата с электромотором.** Выведем уравнения движения тяжелого гиростата с электромотором, в которых динамические и кинематические уравнения движения системы тел  $S^0$  и  $S'$  записаны в проекциях на главные оси тензора инерции  $A^*$ , определенного формулой (2.4).

*5.1. Вывод второй формы уравнений движения гиростата с электромотором.* С помощью тензора  $A^*$  момент количества движения гиростата выражается по формуле (2.3).

В качестве осей системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , связанной с телом  $S^0$ , выберем главные оси тензора  $A^*$ . Тогда для внедиагональных компонент этого тензора имеем  $A_{ij}^* = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ), а для его диагональных компонент принимаем обозначения  $A_1^* = A_{11}^*$ ,  $A_2^* = A_{22}^*$ ,  $A_3^* = A_{33}^*$ . Проекции векторов  $\omega, v$  на главные оси тензора  $A^*$  обозначим через  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $v_1, v_2, v_3$ . Формула (2.3) в этом случае записывается следующим образом

$$x = (A_1^* \omega_1 + A' \dot{\phi}' l_1) \xi_1 + (A_2^* \omega_2 + A' \dot{\phi}' l_2) \xi_2 + (A_3^* \omega_3 + A' \dot{\phi}' l_3) \xi_3 \quad (5.1)$$

Подставив выражение (5.1) в векторное уравнение (4.1) и воспользовавшись разложениями (2.1), (4.2), получаем вторую форму динамических уравнений

$$\begin{aligned} A_1^* \dot{\omega}_1 + A' \dot{\gamma} l_1 &= (A_2^* - A_3^*) \omega_2 \omega_3 + A' (\dot{\gamma} + \Omega) (l_2 \omega_3 - l_3 \omega_2) + \\ &+ \Gamma (e_2 v_3 - e_3 v_2) \quad (1 \ 2 \ 3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Вращение ротора описывается дифференциальным уравнением (4.5). После подстановки в него выражений производных  $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ , определяемых уравнениями (5.2), приходим к следующему уравнению вращения ротора

$$\begin{aligned} A' \left( 1 - \frac{A' l_1^2}{A_1^*} - \frac{A' l_2^2}{A_2^*} - \frac{A' l_3^2}{A_3^*} \right) \dot{\gamma} &= -A' \left[ \frac{l_1}{A_1^*} (A_2^* - A_3^*) \omega_2 \omega_3 + \right. \\ &+ \left. \frac{l_2}{A_2^*} (A_3^* - A_1^*) \omega_3 \omega_1 + \frac{l_3}{A_3^*} (A_1^* - A_2^*) \omega_1 \omega_2 \right] - A'^2 (\dot{\gamma} + \Omega) \times \\ &\times \left[ \frac{l_1}{A_1^*} (l_2 \omega_3 - l_3 \omega_2) + \frac{l_2}{A_2^*} (l_3 \omega_1 - l_1 \omega_3) + \frac{l_3}{A_3^*} (l_1 \omega_2 - l_2 \omega_1) \right] - \\ &- A' \Gamma \left[ \frac{l_1}{A_1^*} (e_2 v_3 - e_3 v_2) + \frac{l_2}{A_2^*} (e_3 v_1 - e_1 v_3) + \frac{l_3}{A_3^*} (e_1 v_2 - e_2 v_1) \right] + M \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ниже доказана нереализуемость сингулярного случая, когда коэффициент при  $\dot{\gamma}$  в уравнении (5.3) равен нулю. Подставив определяемое этим уравнением выражение  $\dot{\gamma}$  в уравнения (5.2), получим уравнения нормального вида, определяющие изменение переменных  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , которые не приводим из-за их громоздкости.

Изменение переменных  $v_1, v_2, v_3$  описывается уравнениями (4.6).

Итак, вторая форма уравнений движения гиростата с электромотором определяется системой уравнений (5.2), (5.3), (4.6) с добавлением уравнений (4.7) в случае многофазовой модели электромотора.

5.2. *Доказательство нереализуемости условия сингулярности.* Коэффициент при  $\ddot{\gamma}$  в уравнении (5.3) запишем в виде  $A'D$ , где

$$D = 1 - \frac{A'l_1^2}{A_1^*} - \frac{A'l_2^2}{A_2^*} - \frac{A'l_3^2}{A_3^*} \quad (5.4)$$

Равенство  $D = 0$  является условием сингулярности второй формы уравнений движения гиростата с электромотором.

В качестве системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , связанной с телом-носителем  $S^0$ , пользуемся системой координат, оси которой являются главными осями тензора  $\mathbf{A}^*$ . Диагональные компоненты  $A_{ii}^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) тензора  $\mathbf{A}^*$  в этой системе координат обозначены через  $A_i^*$ , а его внедиагональные компоненты равны нулю. Компоненты тензора  $\mathbf{A}$  в неглавной для него системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  обозначим через  $\tilde{A}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Согласно определениям (2.4), (2.6) тензоров  $\mathbf{A}^*, \mathbf{A}$ , величины  $\tilde{A}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) выражаются по формулам, которые получаются из формул (2.8) для компонент  $A_{ij}^*$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) тензора  $\mathbf{A}^*$  путем отбрасывания членов, содержащих  $A'l_i l_j$ . Следовательно,  $\tilde{A}_{ii} = A_i^* - A'l_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji} = -A'l_i l_j$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ). Поэтому определитель матрицы  $\tilde{A}$  с элементами  $\tilde{A}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) представляется в виде

$$\det \tilde{A} = A_1^* A_2^* A_3^* \begin{vmatrix} 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^*} & -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{A_1^*} & -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{A_1^*} \\ -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{A_2^*} & 1 - \frac{\varepsilon_2^2}{A_2^*} & -\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{A_2^*} \\ -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{A_3^*} & -\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{A_3^*} & 1 - \frac{\varepsilon_3^2}{A_3^*} \end{vmatrix},$$

где  $\varepsilon_i = l_i \sqrt{A'}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Вычислив здесь определитель, с учетом формулы (5.4) для  $D$  получаем

$$\det \tilde{A} = A_1^* A_2^* A_3^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{A_1^*} - \frac{\varepsilon_2^2}{A_2^*} - \frac{\varepsilon_3^2}{A_3^*} \right) = A_1^* A_2^* A_3^* D$$

Таким образом, равенство  $D = 0$ , являющееся условием сингулярности второй формы уравнений движения гиростата с электромотором, означает вырожденность матрицы  $\tilde{A}$ , элементами которой служат компоненты тензора инерции  $\mathbf{A}$  в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ , главной для тензора  $\mathbf{A}^*$ . Свойство вырожденности матрицы, составленной из компонент тензора  $\mathbf{A}$ , сохраняется при ортогональных преобразованиях координат. Поэтому при  $D = 0$  после перехода к главным осям тензора  $\mathbf{A}$  должно равняться нулю произведение его главных диагональных компонент, которые положительны согласно их определению. Следовательно, условие  $D = 0$  нереализуемо.

**6. Условия существования стационарных движений гиростата с электромотором.** В этом разделе найдены условия, при которых система дифференциальных уравнений

движения тяжелого однороторного гиростата с электромотором имеет стационарные решения. Они описывают стационарные движения гиростата – состояния покоя и равномерные вращения тела-носителя  $S^0$  вокруг вертикали. Если для вывода таких условий воспользоваться первой формой уравнений движения гиростата (п. 4.2), то это приведет к труднообозримым соотношениям из-за наличия большого числа членов с  $A^i \omega_j$  в правых частях динамических уравнений (4.4). Поэтому удобнее вывести такие условия на основе второй формы уравнений движения гиростата.

В качестве основной будем рассматривать модель гиростата, включающую много-токовую модель синхронного электромотора. Она описывается системой дифференциальных уравнений (4.5), (4.6), (4.7), (5.2). Стационарные решения этой системы определяются набором постоянных значений фазовых переменных

$$\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \gamma^0, \dot{\gamma}^0, x^0, i_1^0, \dots, i_{n_2}^0$$

Поскольку  $\dot{\gamma}^0 = d\gamma^0/dt = 0$ , из уравнений (4.7) для электрических токов следует, что

$$x^0, i_1^0, \dots, i_{n_2}^0 = 0 \quad (6.1)$$

Поэтому в случае многотоковой модели синхронного электромотора стационарные решения уравнений движения гиростата определяются фазовым вектором

$$y^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \gamma^0, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad (6.2)$$

компоненты которого – постоянные величины.

При таких значениях фазовых переменных уравнение вращения ротора (4.5) удовлетворяется при условии  $M = 0$ , которое с учетом определения (3.4) момента  $M$  и отмеченного в (3.2) равенства  $\Delta M_2(0) = 0$  эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$b_0 \sin \gamma^0 + c_0 = 0 \quad (b_0, c_0 > 0) \quad (6.3)$$

Далее предполагается, что  $c_0/b_0 < 1$ . Тогда уравнение (6.3) определяет два счетных набора стационарных значений  $\gamma^0$  угла  $\gamma$  для многотоковой модели синхронного электромотора:

$$\gamma^0 = \gamma_{1s} = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad \gamma^0 = \gamma_{2s} = \gamma^{(1)} + 2\pi s \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2)$$

Рассмотрим теперь кинематические уравнения (4.6). При постоянных значениях фазовых переменных они принимают вид соотношений

$$\omega_3^0 v_2^0 - \omega_2^0 v_3^0 = 0, \quad \omega_1^0 v_3^0 - \omega_3^0 v_1^0 = 0, \quad \omega_2^0 v_1^0 - \omega_1^0 v_2^0 = 0,$$

которые означают равенство нулю векторного произведения  $\omega \times v$ , то есть выполнение условий

$$\omega_1^0 = \omega^0 v_1^0, \quad \omega_2^0 = \omega^0 v_2^0, \quad \omega_3^0 = \omega^0 v_3^0 \quad (\omega^0 = \text{const}) \quad (6.4)$$

Отсюда следует

*Утверждение 1.* Стационарное решение (6.2) дифференциальных уравнений движения тяжелого однороторного гиростата с синхронным электромотором либо соответствует состоянию покоя тела-носителя  $S^0$  (при  $\omega^0 = 0$ ), либо оно описывает равномерное вращение тела  $S^0$  в неподвижном пространстве с некоторой угловой скоростью



стью  $\omega^0 \neq 0$  вокруг неизменно связанной с этим телом и установленной по вертикали вниз полуоси, направление которой в теле  $S^0$  определяет единичный вектор с компонентами  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ .

Обратившись, наконец, к динамическим уравнениям (5.2), потребуем, чтобы они выполнялись при постоянном значении  $\gamma^0$  угла  $\gamma$ , постоянных значениях  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  компонент единичного вектора вертикали и постоянных значениях (6.4) компонент вектора угловой скорости. В результате получаем три соотношения

$$\begin{aligned} (A_2^* - A_3^*)\omega^{02} v_2^0 v_3^0 + A'\Omega\omega^0 (l_2 v_3^0 - l_3 v_2^0) + \Gamma(e_2 v_3^0 - e_3 v_2^0) &= 0 \\ (A_3^* - A_1^*)\omega^{02} v_3^0 v_1^0 + A'\Omega\omega^0 (l_3 v_1^0 - l_1 v_3^0) + \Gamma(e_3 v_1^0 - e_1 v_3^0) &= 0 \\ (A_1^* - A_2^*)\omega^{02} v_1^0 v_2^0 + A'\Omega\omega^0 (l_1 v_2^0 - l_2 v_1^0) + \Gamma(e_1 v_2^0 - e_2 v_1^0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Таким образом, приходим к следующему выводу.

*Утверждение 2.* Пусть  $y = y^0$  – стационарное решение второй формы уравнений движения однороторного тяжелого гиростата в случае многотоковой модели синхронного электромотора, определенное формулой (6.2). Условиями существования такого решения являются соотношения (6.1), (6.3), (6.4), (6.5).

*Замечание 1.* При использовании бестоковой модели синхронного электромотора уравнения движения гиростата получаются из уравнений его многотоковой модели, если отбросить уравнения для электрических токов, а в формуле (3.4) для момента  $M$  положить  $\mu, a_1, a_2 = 0$ . Условиями существования стационарных решений таких уравнений являются соотношения (6.3), (6.4), (6.5).

*Замечание 2.* Уравнения движения гиростата при использовании бестоковой модели асинхронного электромотора формально следуют из уравнений для многотоковой модели синхронного электромотора, если отбросить уравнения для электрических токов, в выражении (3.4) для момента  $M$  положить  $\mu, a_1, a_2, b_0, c_0 = 0$  и заменить в формулах величину  $\Omega$  на  $\Omega'$ . Стационарные решения в этом случае существуют при условии (6.4) и условии (6.5), где вместо  $\Omega$  используется  $\Omega'$ .

Соотношения (6.4), (6.5) совпадают с условиями существования стационарных решений уравнений движения тяжелого гиростата с неподвижной точкой, у которого ротор вращается с постоянной относительной угловой скоростью  $\Omega$ , но здесь они получены для модели гиростата с электромотором, включающей дифференциальные уравнения для электрических токов.

Основными условиями существования стационарных решений являются соотношения (6.5).

*Замечание 3.* Легко проверить, что скалярное произведение вектора, компонентами которого служат правые части соотношений (6.5), на вектор с компонентами  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  тождественно равно нулю. Поэтому одно из соотношений (6.5) выполняется при выполнении двух других.

Отсюда следует, что для описания структуры множества стационарных движений гиростата достаточно получить из трех соотношений (6.5) два независимых соотношения, одно из которых определяет направления полуосей равномерного вращения в теле  $S^0$ , то есть величины  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , а другое определяет соответствующие этим направлениям угловые скорости  $\omega^0$  равномерных вращений.

**7. Анализ основных условий существования стационарных движений гиростата с электромотором.** Анализ соотношений (6.5) проводится известными методами, и его результаты сформулированы ниже в виде утверждений 3–7. Сначала рассмотрен случай,

когда  $\Gamma = 0$ , то есть центр масс гиригостата совпадает с неподвижной точкой, а затем рассмотрен случай, когда  $\Gamma \neq 0$ .

7.1. Случай, когда  $\Gamma = 0$ . Пусть функции  $V^*$ ,  $\Delta^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)$  определены формулами

$$\begin{aligned} V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) &= (A_2^* - A_3^*)l_1 v_2^0 v_3^0 + (A_3^* - A_1^*)l_2 v_3^0 v_1^0 + (A_1^* - A_2^*)l_3 v_1^0 v_2^0 \\ \Delta^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) &= (A_2^* - A_3^*)^2 v_2^0 v_3^0 + (A_3^* - A_1^*)^2 v_3^0 v_1^0 + (A_1^* - A_2^*)^2 v_1^0 v_2^0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

При  $\Gamma = 0$  соотношения (6.5) переходят в условия равенства нулю трех выражений, которые содержат  $\omega^0$  в качестве множителя. Поэтому при  $\Gamma = 0$  соотношения (6.5) выполняются в случае, когда  $\omega^0 = 0$ , а величины  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  — любые, а также в случае, когда величины  $v_1^0, v_2^0, v_3^0, \omega^0$  удовлетворяют трем равенствам  $(A_2^* - A_3^*)\omega^0 v_2^0 v_3^0 + A'\Omega(l_2 v_3^0 - l_3 v_2^0) = 0$  (1 2 3). Умножив эти равенства на  $l_1, l_2, l_3$  и сложив, получаем  $\omega^0 V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0$ , здесь функция  $V^*$  определена в (7.1). Таким образом, при  $\Gamma = 0$  существуют два варианта выполнения соотношений (6.5): вариант 1, когда  $\omega^0 = 0$ , и вариант 2, когда, вообще говоря,  $\omega^0 \neq 0$ , а величины  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  удовлетворяют условию  $V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0$ . Дальнейший анализ приводит к следующим выводам.

*Утверждение 3.* Пусть  $\Gamma = 0$ . Тогда

А) Имеются два варианта выполнения условий (6.5) существования стационарных движений гиригостата с электромотором. Вариант 1, когда  $\omega^0 = 0$ , соответствует состояниям покоя тела  $S^0$  при любых значениях величин  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , определяющих ориентацию этого тела в неподвижном пространстве. Вариант 2 соответствует равномерному вращению тела  $S^0$  с ненулевой, вообще говоря, угловой скоростью  $\omega^0$  вокруг установленной по вертикали вниз полуоси, направление которой в теле  $S^0$  определяют направляющие косинусы  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , удовлетворяющие условию

$$V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0 \quad (7.2)$$

В) Если для варианта 2 выполнены равенства

$$(A_2^* - A_3^*)l_1 = 0, \quad (A_3^* - A_1^*)l_2 = 0, \quad (A_1^* - A_2^*)l_3 = 0, \quad (7.3)$$

то  $V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \equiv 0$  согласно (7.1), и тогда направление полуоси равномерного вращения в теле  $S^0$  может быть любым.

С) Если для варианта 2 не выполнено хотя бы одно из равенств (7.3), то условие (7.2) определяет в теле  $S^0$  конус второго порядка — конус осей (пар противоположно направленных полуосей), вокруг которых может происходить вертикальное равномерное вращение этого тела с угловой скоростью  $\omega^0$ , вообще говоря, отличной от нуля.

Д) Для каждого набора значений  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , удовлетворяющих условию (7.2), угловая скорость  $\omega^0$  равномерного вращения при  $\Delta^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \neq 0$  определена однозначно и выражается по формуле

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \frac{A'\Omega}{\Delta^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)} [(A_2^* - A_3^*)v_2^0 v_3^0 (l_2 v_3^0 - l_3 v_2^0) + \\ &+ (A_3^* - A_1^*)v_3^0 v_1^0 (l_3 v_1^0 - l_1 v_3^0) + (A_1^* - A_2^*)v_1^0 v_2^0 (l_1 v_2^0 - l_2 v_1^0)], \end{aligned}$$

при этом для соответствующего набора значений  $-v_1^0, -v_2^0, -v_3^0$ , согласно этой формуле, угловая скорость равномерного вращения имеет противоположный знак.

Е) В случае, когда для набора значений  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , удовлетворяющего соотношению (7.2), выполнено равенство  $\Delta^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0$ , равномерное вращение существует при  $l_2 v_3^0 - l_3 v_2^0 = 0$ ,  $l_3 v_1^0 - l_1 v_3^0 = 0$ ,  $l_1 v_2^0 - l_2 v_1^0 = 0$ , то есть при  $\mathbf{l} \times \mathbf{v}^0 = 0$ , и его угловая скорость  $\omega^0$  может быть любой.

Кроме условия (7.2), величины  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , должны удовлетворять условию  $v_1^{0^2} + v_2^{0^2} + v_3^{0^2} = 1$ .

Определение (7.2) направлений осей равномерных вращений гиригостата при  $\Gamma = 0$  по форме аналогично определению [27, 28] конуса Штауде, то есть конуса осей равномерных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, но отличается от него тем, что в определение конуса Штауде вместо параметров  $A_1^*, A_2^*, A_3^*, l_1, l_2, l_3$  входят параметры  $A_1^0, A_2^0, A_3^0, e_1, e_2, e_3$ .

7.2. Случай, когда  $\Gamma \neq 0$ . При  $\Gamma \neq 0$  сразу выделим вариант, когда  $\omega^0 = 0$ . Непосредственно из условий (6.5) получаем такой результат.

*Утверждение 4.* При  $\Gamma \neq 0$  вариант  $\omega^0 = 0$ , соответствующий состоянию покоя гиригостата, имеет место, когда

$$e_2 v_3^0 - e_3 v_2^0 = 0, \quad e_3 v_1^0 - e_1 v_3^0 = 0, \quad e_1 v_2^0 - e_2 v_1^0 = 0,$$

то есть  $\mathbf{e} \times \mathbf{v}^0 = 0$ . Это означает, что центр масс гиригостата находится на вертикали над неподвижной точкой  $O$  или под этой точкой.

Рассмотрим теперь вариант, когда  $\omega^0 \neq 0$  в случае  $\Gamma \neq 0$ . Чтобы вывести соотношение, связывающее  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ , сначала умножим равенства (6.5) на  $e_1, e_2, e_3$  и сложим. Приходим к соотношению,

$$\omega^0 S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) - A' \Omega \Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0, \quad (7.4)$$

содержащему  $\omega^0$  в первой степени. Здесь приняты обозначения

$$S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = (A_2^* - A_3^*) e_1 v_2^0 v_3^0 + (A_3^* - A_1^*) e_2 v_3^0 v_1^0 + (A_1^* - A_2^*) e_3 v_1^0 v_2^0 \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) &= \mathbf{v}^0 \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{e}) = -e_1 (l_2 v_3^0 - l_3 v_2^0) - e_2 (l_3 v_1^0 - l_1 v_3^0) - \\ &- e_3 (l_1 v_2^0 - l_2 v_1^0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Получим теперь из равенств (6.5) соотношение, содержащее  $\omega^0$  только во второй степени. Для этого умножим равенства (6.5) на  $l_1, l_2, l_3$  и сложим. Приходим к соотношению

$$\omega^{0^2} V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) + \Gamma \Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0, \quad (7.7)$$

где функция  $V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)$  определена в (7.1).

Проанализируем соотношения (7.4), (7.7) и получим из них условия, определяющие значения  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  и соответствующие им значения  $\omega^0$ .

*Утверждение 5.* Пусть  $\Gamma \neq 0$  и  $\omega^0 \neq 0$ . Вырожденный случай, когда выполняется тождественное равенство  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \equiv 0$ , имеет место при условиях

$$(A_2^* - A_3^*)e_1 = 0, \quad (A_3^* - A_1^*)e_2 = 0, \quad (A_1^* - A_2^*)e_3 = 0, \quad (7.8)$$

которые следуют из (7.5). Если условия (7.8) выполнены, то соотношение (7.4) имеет место только при дополнительном условии  $\Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \equiv 0$ , то есть, согласно (7.6), при

$$l_1 = l^0 e_1, \quad l_2 = l^0 e_2, \quad l_3 = l^0 e_3 \quad (l^0 = \pm 1)$$

Тогда, согласно (7.1), (7.5), (7.6), в этом случае имеем  $S^*, \Pi^*, V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \equiv 0$ , и поэтому оба соотношения (7.4), (7.7) выполняются при любых значениях  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  и  $\omega^0$ .

Для варианта, когда  $\Gamma \neq 0$  и  $\omega^0 \neq 0$ , рассмотрим теперь общий невырожденный случай, когда  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \neq 0$ , то есть не выполнено хотя бы одно из условий (7.8). В этом случае функция  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)$  обращается в нуль лишь при некоторых значениях своих аргументов, но не исключено, что  $\Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \equiv 0$ .

Сначала рассмотрим особый подслучай общего невырожденного случая.

*Утверждение 6.* Пусть  $\Gamma \neq 0$  и  $\omega^0 \neq 0$ . Особый подслучай общего невырожденного характеризуется тем, что  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \neq 0$ , но  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0$  при некоторых особых значениях  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ . Для этих значений соотношения (7.4), (7.7), определяющие направления полуосей и угловые скорости равномерных вращений, выполнены лишь при  $\Pi^*, V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0$ , и тогда соотношениям (7.4), (7.7) удовлетворяет любое значение  $\omega^0$ .

Рассмотрим, наконец, общий неособый подслучай невырожденного случая, когда при данных значениях  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  выполнено неравенство  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \neq 0$ . Так как, по предположению,  $\omega^0 \neq 0$ , то из (7.4) следует, что в этом подслучае выполняется также неравенство

$$\Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \neq 0, \quad (7.9)$$

а угловая скорость  $\omega^0$  однозначно определяется по формуле

$$\omega^0 = \frac{A'\Omega\Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)}{S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)} \quad (7.10)$$

Подставив это выражение в (7.7), приходим к соотношению, которое с учетом неравенства (7.9) записывается в виде

$$\Gamma S^{*2}(v_1^0, v_2^0, v_3^0) + (A'\Omega)^2 \Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) = 0 \quad (7.11)$$

Запишем соотношение (7.11) в виде

$$\frac{A'\Omega\Pi^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)}{S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)} = -\frac{\Gamma}{A'\Omega} \frac{S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)}{V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)}$$

С учетом (7.10) следует, что угловая скорость равномерного вращения выражается также по формуле

$$\omega^0 = -\frac{\Gamma}{A'\Omega} \frac{S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)}{V^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0)} \quad (7.12)$$

*Утверждение 7.* Пусть  $\Gamma \neq 0$  и  $\omega^0 \neq 0$ . Пусть компоненты  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  единичного вектора вертикали  $\mathbf{v}^0$  в главных осях тензора инерции  $\mathbf{A}^*$  удовлетворяют неравенству  $S^*(v_1^0, v_2^0, v_3^0) \neq 0$  и условию (7.11). Тогда полуось, определяемая в теле  $S^0$  вектором  $\mathbf{v}^0$  с такими компонентами, является полуосью равномерного вращения тела  $S^0$ , если оно установлено так, что эта полуось направлена по вертикали вниз. Угловая скорость этого равномерного вращения выражается по любой из формул (7.10) или (7.12).

Левая часть соотношения (7.11) является суммой однородных полиномов четвертой и третьей степени по отношению к  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$ . Это соотношение определяет в теле-носителе  $S^0$  неизменно связанную с ним поверхность четвертого порядка. Пересечение поверхности (7.11) с единичной сферой  $v_1^{0^2} + v_2^{0^2} + v_3^{0^2} = 1$  определяет неизменно связанную с телом-носителем  $S^0$  кривую, называемую сферической линией. Конус с вершиной в точке  $O$ , направляющей линией которого служит сферическая линия, является конусом полуосей равномерных вращений гиростата. Геометрическое место концов векторов угловой скорости равномерного вращения в теле  $S^0$  называется направляющей линией.

**8. Сравнение условий существования стационарных движений гиростата с электромотором и без электромотора.** В большинстве работ, посвященных динамике тяжелого гиростата без электромотора, имеющего неподвижную точку, рассматриваются две модели гиростата. Первая из этих моделей основана на предположении, что динамически и статически уравновешенный ротор вращается с постоянной относительной угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, фиксированной в теле-носителе. Другая модель гиростата основана на предположении, что ротор вращается по инерции без трения. Обе эти модели описываются одинаковыми по форме уравнениями движения, отличающимися определением тензора инерции, и поэтому обычно подразумевается, что результаты, полученные с помощью таких уравнений, справедливы для обеих моделей. Это относится и к уравнению, определяющему направления полуосей равномерных вращений гиростата, полученному в [2, 10] и, позже, в [13]. Однако между этими двумя известными моделями гиростата имеется различие, которое необходимо учитывать при определении полуосей равномерных вращений.

На примере однороторного тяжелого гиростата с неподвижной точкой рассмотрим подробнее вопрос об условиях существования стационарных движений для двух указанных моделей гиростата, основываясь на полученных выше уравнениях его движения.

*8.1. Условия существования стационарных движений гиростата с ротором, вращающимся с фиксированной угловой скоростью.* Уравнения движения тяжелого гиростата с ротором, вращающимся с фиксированной относительной угловой скоростью  $\Omega$ , получаются из второй формы уравнений движения гиростата с синхронным электромотором, то есть из уравнений (5.2), (5.3), (4.6), (4.7), если отбросить уравнение вращения ротора (5.3) и уравнения для электрических токов (4.7) и положить  $\dot{\gamma} = 0$  в динамических уравнениях (5.2). Получившаяся из (5.2), (4.6) система дифференциальных урав-

нений является результатом проектирования на главные оси тензора  $\mathbf{A}^*$  известных векторных уравнений

$$\mathbf{A}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}^*) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}\mathbf{e} \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad (8.1)$$

Здесь  $\mathbf{A}^*$  – тензор, определенный формулой (2.4),  $\boldsymbol{\lambda}^* = A' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{I}$  – гиристатический момент.

Стационарные решения этой системы соответствуют значениям  $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0$  фазовых переменных, при которых ее правые части обращаются в нуль.

Из условий обращения в нуль правых частей скалярных уравнений, соответствующих векторному кинематическому уравнению  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ , следуют уже полученные выше выражения (6.4) для  $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0$ . В результате их подстановки в скалярные уравнения (5.2), соответствующие входящему в (8.1) векторному динамическому уравнению, условия обращения в нуль правых частей динамических уравнений принимают тот же вид (6.5), что и для гиристата с синхронным электромотором.

Поэтому для тяжелого гиристата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью  $\Omega$ , направляющие косинусы  $v_1^0, v_2^0, v_3^0$  полуосей равномерного вращения и угловые скорости  $\omega^0$  равномерного вращения определены теми же формулами (7.11), (7.10), что и для гиристата с синхронным электромотором, в котором угловая скорость вращения магнитного поля в статоре равна  $\Omega$ .

Сферическая и направляющая линии для этого случая изучены в [11, 12].

*8.2. Условия существования стационарных движений гиристата с ротором, вращающимся по инерции без трения.* Уравнение вращения ротора  $S'$  получено выше в форме (2.9):  $A' \dot{p}' = M$ . Здесь  $M$  – момент, создаваемый относительно оси ротора силами, действующими на ротор со стороны тела-носителя  $S^0$ , а величина  $p'$  определяется формулой (2.7). Для модели гиристата с ротором, вращающимся по инерции без трения, имеем  $M = 0$ . Тогда  $p'(t) = p'(t_0)$  при  $t \geq t_0$ , то есть величина  $p'$  является интегралом движения.

Поэтому уравнения движения гиристата с ротором, вращающимся по инерции без трения, следуют из первой формы уравнений движения гиристата с электромотором, а именно, из уравнений (4.3), (4.6), если положить в них  $M = 0$ . Они получаются также путем проектирования на главные оси тензора  $\mathbf{A}$  векторных уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}\mathbf{e} \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega},$$

которые имеют тот же вид, что и уравнения (8.1). Их отличие от уравнений (8.1) состоит в том, что вместо тензора  $\mathbf{A}^*$  и вектора  $\boldsymbol{\lambda}^* = A' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{I}$  здесь используются тензор  $\mathbf{A}$ , определенный формулой (2.6), и вектор  $\boldsymbol{\lambda} = A' p' \mathbf{I}$ .

Отсюда следует, что для гиристата с вращающимся по инерции ротором конус полуосей равномерных вращений и угловые скорости равномерных вращений определяются формулами такого же вида, как формулы (7.11), (7.10) для гиристата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью. Но вместо моментов инерции  $A_1^*, A_2^*, A_3^*$  в эти формулы входят моменты инерции  $A_1, A_2, A_3$ , а вместо фиксированной угловой скорости  $\Omega$  в них входит угловая скорость  $p'$ , определяемая начальными условиями. Таким образом, при использовании первой формы уравнений движения, с тензором  $\mathbf{A}$ , для гиристата с вращающимся по инерции ротором вместо фиксированного в теле-носителе конуса полуосей равномерных вращений в общем случае существует семейство таких конусов, зависящих как от параметра от величины  $p'$ .

Условия существования стационарных движений гиростата с вращающимся по инерции ротором и уравнение конуса полуосей его равномерных вращений можно также получить, воспользовавшись второй формой уравнений движения гиростата, а именно уравнениями (5.2), (4.5), (4.6), взятыми при  $M = 0$ . В этом случае, в отличие от гиростата с электромотором, нет выделенной угловой скорости вращения ротора, и поэтому в уравнениях (5.2), (4.5) следует заменить  $\dot{\gamma} + \Omega$ ,  $\dot{\gamma}$  на  $\dot{\phi}'$ ,  $\dot{\phi}'$ .

Пусть в некоторый момент времени  $t_0$  для полученной таким образом системы уравнений движения гиростата заданы начальные значения ее фазовых переменных:  $\omega_i(t_0) = \omega_i^0$ ,  $v_i(t_0) = v_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\dot{\phi}'(t_0) = \Omega^0$ .

Они определяют стационарное движение гиростата, если такие постоянные значения фазовых переменных удовлетворяют всем уравнениям движения (5.2), (4.5), (4.6), в которых  $M = 0$ , а  $\dot{\gamma} + \Omega$ ,  $\dot{\gamma}$  заменены на  $\dot{\phi}'$ ,  $\dot{\phi}'$ . Для уравнений (5.2) это означает выполнение условий

$$(A_2^* - A_3^*)\omega_2^0\omega_3^0 + A_1^*\Omega^0(l_2\omega_3^0 - l_3\omega_2^0) + \Gamma(e_2v_3^0 - e_3v_2^0) = 0 \quad (1 \ 2 \ 3), \quad (8.2)$$

а для уравнений (4.6) – выполнение условий

$$\omega_3^0v_2^0 - \omega_2^0v_3^0 = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (8.3)$$

Уравнение вращения ротора (4.5) в случае  $M = 0$  удовлетворяется при любых постоянных значениях фазовых переменных.

Из соотношений (8.3) следуют выражения (6.4). Подставив их в соотношения (8.2), получаем условия существования стационарных движений гиростата с ротором, вращающимся по инерции без трения. По форме они совпадают с полученными выше условиями (6.5) существования стационарных движений гиростата с синхронным электромотором, которые, в свою очередь, совпадают с условиями существования стационарных движений для гиростата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью. Существенное отличие этих условий от условий (6.5) состоит в том, что вместо фиксированной относительной угловой скорости  $\Omega$  вращения ротора в них входит произвольное начальное значение  $\Omega^0$  этой угловой скорости.

Таким образом, при использовании второй формы уравнений движения, с тензором  $A^*$ , для гиростата с вращающимся по инерции ротором вместо фиксированного в теле-носителе конуса полуосей равномерных вращений в общем случае существует семейство таких конусов, зависящих от величины  $\Omega^0 = \dot{\phi}'(t_0)$  как от параметра.

**Заключение.** В статье дана математическая постановка задачи о движении однороторного гиростата с неподвижной точкой, помещенного в поле силы тяжести и снабженного электромотором, который поддерживает вращение ротора при наличии момента сил трения относительно его оси. Связь, реализующая неподвижную точку, предполагается идеальной. Рассмотрены три модели электромотора: бестоковые модели асинхронного и синхронного электромотора и многотоковая модель синхронного электромотора. Дифференциальные уравнения движения гиростата с электромотором получены в двух формах, соответствующих двум определениям тензора инерции в неподвижной точке. В случае многотоковой модели синхронного электромотора эти уравнения включают уравнения для электрических токов.

Проанализированы условия, при которых существуют стационарные решения таких дифференциальных уравнений. Эти решения описывают стационарные движения гиростата – состояния покоя и равномерные вращения тела-носителя вокруг вертикали. Установлено, что в общем случае направления полуосей равномерных вращений гиростата с электромотором образуют в теле-носителе конус, совпадающий с конусом

полуосей равномерных вращений для известной модели гиростата с ротором, вращающимся с постоянной относительной угловой скоростью.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
4. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
5. *Гашененко И.Н., Мозалевская Г.В., Ткаченко Д.Н.* Об одном решении Харламовой–Мозалевской уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 37–45.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Об одном классе движений гиростата Жуковского с переменным гиростатическим моментом // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 3–9.
7. *Зыза А.В., Ткаченко Д.Н.* Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. 2016. Вып. 46. С. 55–63.
8. *Горр Г.В.* Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2017. 424 с.
9. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Уравнения движения тяжелого гиростата // Вестн. Таганрогского пед. ин-та им. А.П. Чехова. 2019. № 1. С. 321–323.
10. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 373–375.
11. *Анчев А.О.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
12. *Ковалев А.М., Киселев А.М.* О конусе осей равномерного вращения гиростата // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 36–45.
13. *Цодокова Н.С.* О перманентных осях вращения гиростата с закрепленной точкой // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 6. С. 1104–1107.
14. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
15. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. 2009. Вып. 39. С. 42–49.
16. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Прецессионные и изоконические движения твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. 2015. Вып. 45. С. 26–39.
17. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* Исследование асимптотических к покою движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. 2020. Вып. 50. С. 11–23.
18. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В., Ткаченко Д.Н.* Об асимптотически равномерных движениях гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. 2020. Вып. 50. С. 24–42.
19. *El-Gohary A.* Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostator on a circular orbit // Chaos, Solitons and Fractals. 2009. V. 42. Iss. 5. P. 2842–2851.
20. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Хаотическая динамика неуравновешенного гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 734–750.
21. *Асланов В.С., Юдинцев В.В.* Динамика и управление хаосом асимметричных спутников гиростатов // Космич. исслед. 2014. Т. 52. № 3. С. 229–241.
22. *Doroshin A.V.* Images of chaos in attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostator satellites // J. Dyn.&Vibroac. 2015. V. 2. № 2. P. 16–26.



23. *Гашененко И.Н.* Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата // Нелин. дин. 2005. Т. 1. № 1. С. 33–52.
24. *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелин. дин. 2007. Т. 3. № 3. С. 331–348.
25. *Харламов М.П., Рябов П.Е., Харламова И.И.* Топологический атлас гиростата Ковалевской–Яхья // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2016. Т. 128. С. 3–146.
26. *Соколов С.В.* Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполюсового гиростата // Докл. РАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 660–663.
27. *Дружинин Э.И.* Устойчивость стационарных движений гиростатов // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1966. Вып. 92. С. 12–23.
28. *Галиуллин И.А.* Решение задачи об устойчивости регулярных прецессий симметричного гиростата в ньютоновском поле // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 2. С. 182–184.
29. *Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.* О движениях гиростата на многообразии // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2017. № 3 (55). С. 17–22.
30. *Безгласный С.П., Красников В.С.* Стабилизация программных движений однороторного гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Автоматизация процессов управления. 2016. Т. 44. № 2. С. 70–76.
31. *Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А.* Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 1. С. 61–74.
32. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия и их устойчивость // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 3. С. 356–368.
33. *Банщиков А.В., Чайкин С.В.* Анализ устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата средствами символьно-численного моделирования // Космич. исслед. 2015. Т. 53. № 5. С. 414–420.
34. *Банщиков А.В.* Символьно-численный анализ необходимых условий устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 2 (50). С. 24–28.
35. *Гутник С.А., Сантуш Л., Сарычев В.А., Силва А.* Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента; положения равновесия и их устойчивость // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 142–155.
36. *Сазонов В.В.* Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 2. С. 145–158.
37. *Панкратов А.А.* Периодические и условно-периодические движения спутника-гиростата под действием гравитационного момента на круговой орбите // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 7 (7). С. 139–151.
38. *Тихонов А.А., Тхай В.Н.* Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационном и магнитном полях // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2015. Т. 2 (60). Вып. 2. С. 278–286.
39. *Wurov A.A.* On Collinear Relative Equilibrium of Tethered Gyrostat in a Central Newtonian Field. Wien: Institut Mechanik, Technische Universitat. 1996. 32 p.
40. *Евдокименко А.П.* Об установившихся движениях гиростата, подвешенного на стержне в центральном гравитационном поле // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 219–225.
41. *Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С.* Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. М.; Ижевск: НИЦ “РХД”. 2007. 560 с.
42. *Алексеев А.В.* Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // Мех. и машиностр. 2007. Т. 9. № 3. С. 671–676.
43. *Белецкий В.В., Чайкин С.В.* Учет перемещения центра масс гиростата с упругим стержнем при анализе устойчивости семейства его равновесий // Вестн. МГУ им. М.В. Ломоносова. Сер.: Мат., мех. 2006. № 1. С. 42–47.

44. *Чайкин С.В.* Стабилизация нетривиальных относительных равновесий гиростата с упругим элементом на круговой орбите // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 791–800.
45. *Русанов В.А., Данеев А.В., Куменко А.Е.* Структурно-параметрическая идентификация упругого элемента спутника-гиростата // Изв. Самарского НЦ РАН. 2014. Т. 16. № 6. С. 305–311.
46. *Бузов А.А.* О консервативных методах управления вращением гиростата // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 270–282.
47. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космич. исслед. 2013. Т. 51. № 2. С. 412–418.
48. *Алексеев А.В.* Исследование ориентационного движения трехроторного гиростата на основе асимптотических методов // Вестн. ИжГТУ. 2015. № 2 (66). С. 23–26.
49. *Харламов С.А.* О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента вокруг оси собственного вращения // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 2. С. 327–330.
50. *Харламов С.А.* К теории астатического гироскопа с электроприводом, установленного в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1963. № 6. С. 45–54.
51. *Крементуло В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента относительно оси ротора // Изв. АН СССР. Мех. и машиностр. 1965. № 3. С. 156–159.
52. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
53. *Коносевич Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. 1977. Вып. 9. С. 61–73.
54. *Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. 2005. Вып. 35. С. 115–123.
55. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 57–73.
56. *Konosevich B., Konosevich Yu.* Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope // Nonlin. Dyn. 2015. V. 79. № 3. P. 2005–2015.
57. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автом. и телемех. 2006. № 10. С. 47–85.
58. *Леонов Г.А., Зарецкий А.М.* Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 18–27.
59. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 74–85.
60. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 124–141.
61. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных решений уравнений многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе. 2 // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 50–68.
62. *Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б.* Модель электродвигателя в теории гироскопов // Тр. ин-та прикл. математики и механики. 2008. Вып. 17. С. 88–95.
63. *Staude O.* Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine und Angew. Math. 1894. V. 113. № 4. P. 318–334.
64. *Холостова О.В.* Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед. 2008. 128 с.

## Gyrostat with the Electric Motor: Mathematical Model and Stationary Motions

**B. I. Konosevich<sup>a,#</sup> and Yu. B. Konosevich<sup>a,#</sup>**

<sup>a</sup>*Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, DPR*

<sup>#</sup>*e-mail: konos.donetsk@yandex.ru*

The article presents a mathematical model of a single-rotor gyrostat with a fixed point, placed in the gravity field and supplied with the electric motor, which sustains the spin of the rotor in the presence of the dissipative moment on its axis. It is assumed also that the dissipative moment is equal to zero in the spherical hinge realizing the fixed point. Three models of the electric motor are considered. They are the no-current models of the asynchronous and synchronous electric motor and the multiple-current model of the synchronous electric motor. Two forms of differential equations of motion are derived for the gyrostat with the electric motor. They correspond to two definitions of its inertia tensor.

Existence conditions are found and analyzed for stationary (steady-state) solutions of equations of motion of this electromechanical system. These solutions describe stationary motions of the system, namely, permanent rotations of the carrier body about the vertical line and its equilibrium states. It is shown that half-axes of permanent rotations of the gyrostat with the electric motor form in the carrier body a cone coinciding with the cone of half-axes or permanent rotations for the well-known model of the gyrostat with the uniformly spinning rotor.

*Keywords:* gyrostat, inertia tensor, asynchronous and synchronous electric motor, stationary motion, cone of half-axes of permanent rotations

### REFERENCES

1. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. Nuova ed. Vol. 2. Pt. 2. Bologna: Zanichelli, 1952. 530 p.
2. *Kharlamov P.V.* Lectures on Rigid Body Dynamics. Part 1. Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 1965. 221 p. (in Russian)
3. *Kharlamov P.V.* On equations of motion of rigid bodies systems // *Rigid Body Mech.*, 1972, vol. 4, pp. 52–73. (in Russian)
4. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kiev: Nauk. Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
5. *Gasheneko I.N., Mozalevskaya G.V., Tkachenko D.N.* On one Mozalevskaya–Kharlamova solution to equations of motion of a gyrostat // *Rigid Body Mech.*, 2012, vol. 42, pp. 37–45. (in Russian)
6. *Gorr G.V., Maznev A.V.* On one class of motions of Zhukovskii gyrostat with the variable gyrostatic moment // *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 237–242.
7. *Zyza A.V., Tkachenko D.N.* Polynomial solutions in the problem on motion of a gyrostat in the magnetic field // *Rigid Body Mech.*, 2016, vol. 46, pp. 55–63. (in Russian)
8. *Gorr G.V.* Invariant Relations of Equations of Rigid Bodies Dynamics (Theory, Results, Comments). Moscow; Izhevsk: Inst. Comp. Invest., 2017. 424 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Ilyukhin A.A.* Equations of motion of a heavy gyrostat // *Bull. Chekhov Taganrog Pedagog. Inst.*, 2019, no. 1, pp. 321–333. (in Russian)
10. *Kharlamov P.V.* On permanent rotations of a body having a fixed point // *Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 2, pp. 373–375. (in Russian)
11. *Anchev A.O.* On permanent rotations of a heavy gyrostat having a fixed point // *Appl. Math. Mech.*, 1967, vol. 31, no. 1, pp. 49–58. (in Russian)
12. *Kovalev A.M., Kiselyov A.M.* On the cone of permanent rotations of a gyrostat // *Rigid Body Mech.*, 1972, vol. 4, pp. 36–45. (in Russian)
13. *Tsodokova N.S.* On permanent rotations of a gyrostat with a fixed point // *Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 6, pp. 1104–1107. (in Russian)
14. *Gorr G.V.* Precessional motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of systems of coupled rigid bodies // *Appl. Math. Mekh.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 573–587. (in Russian)

15. *Volkova O.S., Gashenko I.N.* Pendulous rotations of a heavy gyrostat with the variable gyrostatic moment // *Rigid Body Mech.*, 2009, vol. 39, pp. 42–49. (in Russian)
16. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Precession and isoconical motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces // *Rigid Body Mech.*, 2015, vol. 45, pp. 26–39. (in Russian)
17. *Gorr G.V., Balaklitskaya T.V.* Investigation of asymptotic to rest motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces // *Rigid Body Mech.*, 2020, vol. 50, pp. 11–23. (in Russian)
18. *Gorr G.V., Balaklitskaya T.V., Tkachenko D.N.* On asymptotically steady rotations of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces // *Rigid Body Mech.*, 2020, vol. 50, pp. 24–42. (in Russian)
19. *El-Gohary A.* Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostat on a circular orbit // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, vol. 42, no. 5, pp. 2842–2851.
20. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* Chaotic dynamics of an unbalanced gyrostat // *AMM*, 2010, vol. 74, no. 5, pp. 524–535.
21. *Aslanov V.S., Yudinsev V.V.* Dynamics and chaos control of asymmetric gyrostat satellites // *Cosmic Res.*, 2014, vol. 52, no. 3, pp. 216–228.
22. *Doroshin A.V.* Images of chaos in attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat satellites // *J. Dyn.&Vibroac.*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 16–26.
23. *Gashenko I.N.* Bifurcations of integral manifolds in the problem on motion of a heavy gyrostat // *Nonlin. Dyn.*, 2005, vol. 1, no. 1, pp. 33–52. (in Russian)
24. *Kharlamov M.P.* Critical subsystems of Kovalevskaya gyrostat in two static fields // *Nonlin. Dyn.*, 2007, vol. 3, no. 3, pp. 331–348. (in Russian)
25. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Kharlamova I.I.* Topological atlas of Kovalevskaya–Yehia gyrostat // *Overall Results of Sci.&Engng. Ser. Modern Math.& Its Appl.. Subject Surveys*, 2016, vol. 128, pp. 3–146. (in Russian)
26. *Sokolov S.V.* New invariant relations of one critical subsystem of generalized two-field gyrostat // *Dokl. RAN*, 2017, vol. 477, no. 6, pp. 660–663. (in Russian)
27. *Druzhinin E.I.* Stability of steady motions of gyrostats // *Proc. of Kazan Aviation Inst.*, 1966, vol. 92, pp. 12–23.
28. *Galiullin I.A.* Solution to the problem on stability of regular precessions of a symmetric gyrostat in the Newtonian field // *Cosmic Res.*, 2011, vol. 49, no. 2, pp. 182–184.
29. *Irtegov V.D., Titorenko T.N.* About motions of the gyrostat on a manifold // *Modern Technol. Syst. Anal. Modeling*, 2017., vol. 3, no. 55, pp. 17–22. (in Russian)
30. *Bezglasnyi S.P., Krasnikov V.S.* Stabilization of program motions of a single-rotor gyrostat with a cavity filled with viscous fluid // *Autom. Manag. Proc.*, 2016., vol. 4, no. 2, pp. 70–76. (in Russian)
31. *Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A.* Dynamics of a gyrostat satellite with the vector of gyrostatic moment in the principle plane of inertia // *Cosmic Res.*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 60–73.
32. *Gutnik S.A., Sarychev V.A.* Dynamics of an axisymmetric gyrostat. Equilibrium positions and their stability // *JAMM*, 2014, vol. 78, no. 3, pp. 249–257.
33. *Banshchikov A.V., Chaikin S.V.* Analysis of the stability of relative equilibriums of a prolate axisymmetric gyrostat by symbolic-numerical modeling // *Cosmic Res.*, 2015, vol. 53, no. 5, pp. 378–384.
34. *Banshchikov A.V.* Symbolic-numerical analysis of necessary conditions of the stability of relative equilibriums of a prolate axisymmetric gyrostat // *Modern Technol. Syst. Anal. Modeling*, 2016, vol. 2, no. 50, pp. 24–28. (in Russian)
35. *Gutnik S.A., Santos L., Silva A., Sarychev V.A.* Dynamics of a gyrostat satellite subjected to the action of gravity moment. Equilibrium attitudes and their stability // *J. Comput.&Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 469–482.
36. *Sazonov V.V.* Periodic motions of a satellite-gyrostat relative to its center of mass under the action of gravitational torque // *Cosmic Res.*, 2013, vol. 51, no. 2, pp. 133–146.
37. *Pankratov A.A.* Periodic and conditionally periodic motions of a satellite-gyrostat under gravitational moment on the circular orbit // *Bull. BMSTU*, 2012, vol. 7, no. 7, pp. 39–151. (in Russian)

38. *Tikhonov A.A., Tkhai V.N.* Symmetrical oscillations in the problem of gyrostat attitude motion in a weakly elliptical orbit in gravitational and magnetic fields // *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 119–125.
39. *Burov A.A.* On Collinear Relative Equilibrium of Tethered Gyrostat in a Central Newtonian Field. Wien: Institut Mechanik, Technische Universitat. 1996. 32 p.
40. *Yevdokimenko A.P.* On the steady motions of the tethered gyrostat in the central gravitational field // *Appl. Math.&Mech.*, 2005, vol. 69, no. 2, pp. 219–225. (in Russian)
41. *Alpatov A.P., Beletskii V.V., Dranovskii V.I., Zakrzhevskii A.E., Pirozhenko A.V., Troger G., Khoroshilov V.S.* Dynamics of Space Systems with Cable and Articulated Joints. Moscow; Izhevsk: R.&C. Dyn., 2007, 560 p. (in Russian)
42. *Alexeev A.V.* Motion of a satellite-gyrostat enclosing a cavity with the high viscous fluid // *Mech.&Engng.*, 2007, vol. 9, no. 3, pp. 671–676. (in Russian)
43. *Beletskii V.V., Chaikin S.V.* Taking into account shift of a center of mass of a gyrostat with elastic beam in analysis of the family of its equilibria // *Bull. Moscow Univ.. Ser. 1: Math. Mech.*, 2006, no. 1, pp. 42–47. (in Russian)
44. *Chaikin S.V.* Stabilization of non-trivial relative equilibria of gyrostat with elastic element in a circular orbit // *JAMM*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 791–800. (in Russian)
45. *Rusanov V.A., Daneev A.V., Kumenko A.E.* Structural-parametric identification of equations of differential dynamics of the elastic element of the satellite-gyrostat // *Proc. Samara Sci. Center of the RAS*, 2014, vol. 16, no. 6, pp. 305–311. (in Russian)
46. *Burov A.A.* Conservative methods of controlling the rotation of a gyrostat // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 195–204.
47. *Vorotnikov V.I., Martysenko Y.G.* On the nonlinear problem of the three-axis reorientation of a three-rotor gyrostat in the game noise model // *Cosmic Res.*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 372–378.
48. *Alekseyev A.V.* Research of orientation motion of triple gyrostat based on asymptotic methods // *M.T. Kalashnikov Izhevsk State Techn. Univ.*, 2015, vol. 18, no. 2(66), pp. 23–26. (in Russian)
49. *Kharlamov S.A.* On motion of a gimbals mounted gyroscope in the presence of a moment about the axis of proper rotation // *Dokl. AN SSSR*, 1961, vol. 139, no. 2, pp. 327–330. (in Russian)
50. *Kharlamov S.A.* On the theory of the balanced gyroscope with the electric drive, mounted in the gimbals suspension // *Proc. of the USSR Acad. Sci. Mech.&Mech. Engng.*, 1963, no. 6, pp. 45–54. (in Russian)
51. *Krementulo V.V.* On stability of motion of a gimbals mounted gyroscope in the presence of a moment about the axis of the rotor // *Proc. of the USSR Acad. Sci. Mech.&Mech. Engng.*, 1965, no. 3, pp. 156–159. (in Russian)
52. *Klimov D.M., Kharlamov S.A.* Dynamics of a Gimbals Mounted Gyroscope. Moscow: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)
53. *Konosevich B.I.* On stability of steady-state motions of a gimbals mounted asynchronous gyroscope // *Rigid Body Mech.*, 1977, vol. 9, pp. 61–73. (in Russian)
54. *Konosevich Yu.B.* Stability criterion for steady-state motions of a gimbals mounted synchronous gyroscope // *Rigid Body Mech.*, 2005, vol. 35, pp. 115–123. (in Russian)
55. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* On stability of steady-state motions of a gimbals mounted gyroscope supplied with the electric motor // *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 285–297.
56. *Konosevich B., Konosevich Yu.* Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope // *Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 79, no. 3, pp. 2005–2015.
57. *Leonov G.A.* Phase synchronization: Theory and applications // *Autom.&Remote Control*, 2006, no. 10, pp. 1573–1609.

58. *Leonov G.A., Zaretskiy A.M.* Global stability and oscillations of dynamical systems describing synchronous electrical machines // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.*, 2012, no. 45, pp. 157–163.
59. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Sufficient global stability condition for a model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment // *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.*, 2018, vol. 51, no. 1, pp. 57–65.
60. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Stability criterion for stationary solutions of multi-current model equations for a synchronous gimbal-mounted gyroscope. Part 1 // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 2, pp. 258–272.
61. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Stability criterion for stationary solutions of multi-current model equations for a synchronous gimbal-mounted gyroscope. Part 2 // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 1, pp. 40–54.
62. *Konosevich B.I., Konosevich Yu.B.* Model of an electric motor in the theory of gyroscopes // *Proc. Inst. Appl. Math. & Mech.*, 2008, vol. 17, pp. 88–95.
63. *Staude O.* Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // *J. Reine und Angew. Math.*, 1894, vol. 113, no. 4, pp. 318–334.
64. *Kholostova O.V.* Investigation of Stability of Staude Permanent Rotations. Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res., 2008. 128 p.

УДК 531.36

## ОБ АНАЛОГАХ СЛУЧАЯ ГЕССА ДЛЯ ГИРОСТАТА ПРИ ДЕЙСТВИИ МОМЕНТА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ И ЦИРКУЛЯРНЫХ СИЛ

© 2022 г. А. А. Косов<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения  
Российской академии наук, Иркутск, Россия*

*\*e-mail: kosov\_idstu@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принята к публикации 30.08.2022 г.

В статье изучаются уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки при действии момента потенциальных, гироскопических и циркулярных сил. Выделено шесть аналогов случая Гесса, в которых система уравнений движения имеет линейный частный интеграл. Для двух случаев найден дополнительный общий интеграл. Установлено, что компонента вектора угловой скорости, не входящая в интеграл Гесса, совершает колебания с нулевым средним значением на всех решениях вне множества Гесса. Приведены три типа стационарных решений и методом интегральных связей Четаева получены достаточные условия их устойчивости.

*Ключевые слова:* гиростат, гироскопические и циркулярные силы, аналоги случая Гесса, частные и общие интегралы, стационарные решения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522060091

**1. Введение.** В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить дополнительный частный интеграл. По-видимому, первый такой случай с линейным частным интегралом, зависящим от двух фазовых переменных, был найден в 1890 г. В. Гессом [1]. Этот “случай Гесса” был сразу же замечен и получил существенное продвижение в работах отечественных ученых [2, 3]. Дальнейшее развитие результатов исследований подробно представлено в монографиях по динамике твердого тела [4–6], где случаю Гесса посвящены целые разделы.

Исследования случая Гесса, его аналогов и обобщений успешно продолжают и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [7] периодические и квазипериодические движения тяжелого твердого тела при условиях Гесса, строились [8] частные точные аналитические решения, представимые тригонометрическими функциями времени. С использованием аналога интеграла Гесса для усредненной системы рассматривалось [9] движение твердого тела в условиях, когда точка подвеса совершает высокочастотные периодические колебания малой амплитуды.

Указаны [10] аналоги случаев Гесса для гироскопа в кардановом подвесе и уравнений Чаплыгина, описывающих падение твердого тела в жидкости. Установлена аналогия с задачей Сулова и дан критический обзор классических и современных исследований случая Гесса [11]. Применением алгоритма Ковачича найдены [12] две ситуации для случая Гесса, в которых существуют лиувиллевы решения.

Методом Рауса выявлено [13], что уравнения вращательного движения твердого тела в случае Гесса имеют довольно богатый набор стационарных решений. Доказана неинтегрируемость на множестве уровня интеграла Гесса [14, 15] и отмечена актуальность исследования задачи Гесса для уравнений тяжелого твердого тела и в настоящее время. Следовательно, не менее актуальны эти же вопросы касательно аналогов случая Гесса и для более сложных механических систем, таких, как гиростат.

Подход Гесса был впервые распространен на уравнения движения гиростата в [16], где был найден зависящий от двух фазовых переменных аналог интеграла Гесса для уравнений тяжелого гиростата. Был получен [17] аналог случая Гесса—Сретенского для уравнений движения гиростата в псевдоевклидовом пространстве.

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата с неподвижной точкой при действии момента сил (потенциальных, гироскопических, циркулярно-гироскопических). Основные цели состоят в получении аналогов случая Гесса для гиростата при действии такого рода момента сил. С использованием аналогов частного интеграла Гесса устанавливаются эргодические свойства компоненты вектора угловой скорости, не входящей в интеграл Гесса. Рассматриваются также вопросы построения стационарных решений и получения условий их устойчивости с помощью метода интегральных связей Четаева [18].

**2. Дифференциальные уравнения движения, первые интегралы и постановка задачи.** Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda) \times \omega + M, \quad M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} + S\gamma \times \omega + L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma \quad (2.1)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega \quad (2.2)$$

Здесь  $\omega = \text{col}(p, q, r)$  — вектор угловой скорости,  $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  — единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат,  $I = I^T > 0$  — симметричная положительно определенная матрица тензора инерции относительно неподвижной точки,  $\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — вектор гиростатического момента. Суммарный вектор  $M = M(t, \gamma, \omega)$  момента сил, действующих на гиростат, складывается из момента потенциальных сил  $\gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$ , момента гироскопических сил  $S\gamma \times \omega$  и момента циркулярно-гироскопических сил  $L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$ . Здесь  $U(\gamma)$  — некоторая непрерывно дифференцируемая функция (потенциал),  $S = S^T$  — некоторая симметричная матрица,  $L(t, \gamma, \omega)$  — произвольная непрерывная функция. Отметим, что момент вида  $S\gamma \times \omega$  возникает вследствие действия сил Лоренца при вращении заряженного твердого тела, помещенного в однородное магнитное поле с неизменным вектором напряженности [19]. Момент вида  $L\omega \times \gamma$ ,  $L = \text{const}$  возникает при вращении ферромагнитного тела в постоянном и однородном магнитном поле [20, 21].

Система (2.1), (2.2) имеет три первых интеграла:

$$J_1 = J_1(\gamma, \omega) = \omega^T I \omega + 2U(\gamma) = d_1 = \text{const} \quad (2.3)$$

$$J_2 = J_2(\gamma, \omega) = \gamma^T (I\omega + \lambda) + \frac{1}{2} \gamma^T S \gamma = d_2 = \text{const} \quad (2.4)$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T \gamma = 1 \quad (2.5)$$

Первые интегралы энергии (2.3) и момента (2.4) определяют момент  $M$  в правой части (2.1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей  $L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$  [22].



Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной  $I = \text{diag}(A, B, C)$ . Запишем систему (2.1), (2.2) и первые интегралы в координатной форме

$$A\dot{p} = (B - C)qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - q(S\gamma)_3 + r(S\gamma)_2 + L(q\gamma_3 - r\gamma_2)$$

$$B\dot{q} = (C - A)pr + \lambda_3 p - \lambda_1 r + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - r(S\gamma)_1 + p(S\gamma)_3 + L(r\gamma_1 - p\gamma_3) \quad (2.6)$$

$$C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - p(S\gamma)_2 + q(S\gamma)_1 + L(p\gamma_2 - q\gamma_1)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \quad (2.7)$$

$$J_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2U(\gamma) = d_1 = \text{const} \quad (2.8)$$

$$J_2 = \gamma_1(Ap + \lambda_1) + \gamma_2(Bq + \lambda_2) + \gamma_3(Cr + \lambda_3) + \frac{1}{2}(s_{11}\gamma_1^2 + s_{22}\gamma_2^2 + s_{33}\gamma_3^2) + s_{12}\gamma_1\gamma_2 + s_{13}\gamma_1\gamma_3 + s_{23}\gamma_2\gamma_3 = d_2 = \text{const} \quad (2.9)$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (2.10)$$

Здесь  $(S\gamma)_i$  означает  $i$ -ю компоненту вектора  $S\gamma$ .

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) установить аналоги случая Гесса [1] для системы (2.6), (2.7) при различных предположениях на правые части уравнений движения;

2) показать, что частные интегралы Гесса существуют и при отсутствии момента потенциальных сил и порождают новый общий интеграл;

3) установить эргодические свойства компоненты  $q(t)$  решения системы (2.6), (2.7);

4) выявить стационарные решения, которые задаются постоянными, обращающими правые части уравнений движения (2.6), (2.7) в нуль;

5) используя первые интегралы получить методом интегральных связей Четаева [18] достаточные условия устойчивости выявленных стационарных решений;

6) установить аналоги случая Гесса [1] для более общей по сравнению с (2.6), (2.7) системы при действии дополнительного момента циркулярных сил.

**3. Аналоги интеграла Гесса.** Справедливо следующее

*Утверждение 1.* Пусть для системы (2.6), (2.7) выполняются условия:

1. Функция  $U(\gamma)$  имеет вид  $U(\gamma) = F(\mu_1\gamma_1 + \mu_3\gamma_3)$ , где  $F(\theta)$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента  $\theta = \mu_1\gamma_1 + \mu_3\gamma_3$ .

2. Компонента  $\lambda_2$  вектора гиростатического момента  $\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  удовлетворяет равенству  $\lambda_2 = 0$ .

3.  $\mu_3^2 C(A - B) = \mu_1^2 A(B - C)$ .

4. Матрица  $S$  имеет вид  $S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & 0 & s_{33} \end{pmatrix}$ , причем выполнены равенства  $s_{11}\mu_3 - s_{13}\mu_1 = 0$ ,

$s_{13}\mu_3 - s_{33}\mu_1 = 0$ .

5.  $L = L(t, \gamma, \omega) \equiv 0$ .

Тогда функция

$$J_4 = \mu_1 Ap + \mu_3 Cr + d, \quad d = \frac{\mu_1 A(\mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3)}{\mu_3(A - B)} \quad (3.1)$$

удовлетворяет равенству

$$\dot{J}_4 = \left. \frac{dJ_4}{dt} \right|_{(2.6),(2.7)} = K_1 q J_4, \quad (3.2)$$

где  $K_1 = \frac{\mu_3(A-B)}{\mu_1 A} = \frac{\mu_1(B-C)}{\mu_3 C}$ , и система (2.6), (2.7) имеет помимо интегралов (2.8)–(2.10) дополнительный частный интеграл

$$J_4 = \mu_1 A p + \mu_3 C r + d = 0 \quad (3.3)$$

Доказательство. Вычисляя производную от задаваемой формулой (3.1) функции  $J_4$  в силу системы (2.6), (2.7) при условиях 1–5, получаем

$$\begin{aligned} \dot{J}_4 = & (\mu_1 \mu_3 - \mu_3 \mu_1) \frac{dF(\theta)}{d\theta} \gamma_2 + (\mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3) q + L \mu_3 p \gamma_2 - L \mu_1 r \gamma_2 + \\ & + (\mu_3(A-B)p + \mu_1(B-C)r + (s_{11}\mu_3 - s_{13}\mu_1 - L\mu_3)\gamma_1 + \\ & + (s_{13}\mu_3 - s_{33}\mu_1 + L\mu_1)\gamma_3) q = K_1 q J_4 \end{aligned}$$

Тем самым установлено также, что (3.3) является при условиях утверждения 1 частным интегралом системы (2.6), (2.7).

*Замечание 1.* Если при выполнении условий 1–4 утверждения 1 условие 5 не выполнено, но функция  $L = L(t, \gamma, \omega)$  представима в виде произведения  $L = L_0(J_4) L_1(t, \gamma, \omega)$ , где  $L_0(0) = 0$ , а функция  $L_1(t, \gamma, \omega)$  произвольна, то (3.3) останется частным интегралом системы, хотя дифференциальное соотношение (3.2) уже не будет выполнено.

Необходимо также отметить, что (3.3) это фактически не аналог, а с точностью до константы и есть интеграл Гесса, найденный в [1] для классического случая тяжелого твердого тела, которому соответствуют нулевые значения параметров  $\lambda = 0$ ,  $L \equiv 0$ ,  $S = 0$  и тождественная функция  $F(\theta) = \theta$ .

Далее будем рассматривать те случаи, когда линейный частный интеграл зависит от четырех переменных.

Справедливо следующее

*Утверждение 2.* Пусть для системы (2.6), (2.7) выполняются условия 1–3 утверждения 1 и, кроме того, условия:

4. Матрица  $S$  имеет вид  $S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & 0 & s_{33} \end{pmatrix}$ , причем выполнено равенство  $s_{11}\mu_3^2 - 2s_{13}\mu_1\mu_3 + s_{33}\mu_1^2 = 0$ .

5.  $L = L(t, \gamma, \omega) \equiv L_2 = \frac{A(s_{11}\mu_3 - s_{13}\mu_1)}{\mu_3(A-B)}$ .

Тогда функция

$$J_5 = \mu_1 A p + \mu_3 C r + \mu_1 L_2 \gamma_1 + \mu_3 L_2 \gamma_3 + d \quad (3.4)$$

удовлетворяет равенству

$$\dot{J}_5 = \left. \frac{dJ_5}{dt} \right|_{(2.6),(2.7)} = K_2 q J_5, \quad (3.5)$$

где  $K_2 = \frac{\mu_3(A-B)}{\mu_1 A} = \frac{\mu_1(B-C)}{\mu_3 C} = \frac{s_{11}\mu_3 - s_{13}\mu_1}{\mu_1 L_2} = \frac{s_{13}\mu_3 - s_{33}\mu_1}{\mu_3 L_2}$ , и система (2.6), (2.7) имеет помимо интегралов (2.8)–(2.10) дополнительный частный интеграл

$$J_5 = 0 \tag{3.6}$$

Доказательство. Вычисляя производную от задаваемой формулой (3.4) функции  $J_5$  в силу системы (2.6), (2.7) при условиях 1–5, получаем

$$\begin{aligned} \dot{J}_5 &= (\mu_1\mu_3 - \mu_3\mu_1) \frac{dF(\theta)}{d\theta} \gamma_2 + (\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) q + (L\mu_3 - \mu_3 L_2) p \gamma_2 + \\ &+ (\mu_1 L_2 - L\mu_1) r \gamma_2 + (\mu_3(A-B) p + \mu_1(B-C) r) + \\ &+ (s_{11}\mu_3 - s_{13}\mu_1 - L\mu_3 + \mu_3 L_2) \gamma_1 + (s_{13}\mu_3 - s_{33}\mu_1 + L\mu_1 - \mu_1 L_2) \gamma_3 q = K_2 q J_5 \end{aligned}$$

Тем самым установлено также, что (3.6) является при условиях утверждения 2 частным интегралом системы (2.6), (2.7).

*Замечание 2.* Если при выполнении условий 1–4 утверждения 2 условие 5 не выполнено, но функция  $L = L(t, \gamma, \omega)$  представима в виде суммы  $L = L_2 + L_0(J_5) L_1(t, \gamma, \omega)$ , где  $L_0(0) = 0$ , а функция  $L_1(t, \gamma, \omega)$  произвольна, то (3.6) останется частным интегралом системы, хотя дифференциальное соотношение (3.5) уже не будет выполнено.

Теперь будем рассматривать те случаи, когда задающая момент гироскопических сил матрица  $S$  является диагональной.

*Утверждение 3.* Пусть для системы (2.6), (2.7) выполняются условия 1–3 утверждения 1 и, кроме того, условия:

4. Матрица  $S$  имеет вид  $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$ , причем выполнено равенство  $\mu_3^2(s_{11} - s_{22}) = \mu_1^2(s_{22} - s_{33})$ .

5.  $L = L(t, \gamma, \omega) \equiv L_3 = \frac{Bs_{22} - Cs_{33}}{B - C}$ .

Тогда функция

$$J_6 = \mu_1 Ap + \mu_3 Cr + \mu_1(L_3 - s_{22})\gamma_1 + \mu_3(L_3 - s_{22})\gamma_3 + d \tag{3.7}$$

удовлетворяет равенству

$$\dot{J}_6 = \left. \frac{dJ_6}{dt} \right|_{(2.6),(2.7)} = K_3 q J_6, \tag{3.8}$$

где  $K_3 = \frac{\mu_3(A-B)}{\mu_1 A} = \frac{\mu_1(B-C)}{\mu_3 C} = \frac{\mu_3(s_{11} - s_{22})}{\mu_1(L_0 - s_{22})} = \frac{\mu_1(s_{22} - s_{33})}{\mu_3(L_0 - s_{22})}$ , и система (2.6), (2.7) имеет помимо интегралов (2.8)–(2.10) дополнительный частный интеграл

$$J_6 = 0 \tag{3.9}$$

Доказательство. Вычисляя производную от задаваемой формулой (3.7) функции  $J_6$  в силу системы (2.6), (2.7) при условиях 1–5, получаем

$$\begin{aligned} \dot{J}_6 &= (\mu_1\mu_3 - \mu_3\mu_1) \frac{dF(\theta)}{d\theta} \gamma_2 + (\mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3) q + (L\mu_3 - s_{22}\mu_3 - \mu_3(L_3 - s_{22})) p \gamma_2 + \\ &+ (s_{22}\mu_1 + \mu_1(L_3 - s_{22}) - L\mu_1) r \gamma_2 + (\mu_3(A-B) p + \mu_1(B-C) r) + \\ &+ (s_{11}\mu_3 + \mu_3(L_3 - s_{22}) - L\mu_3) \gamma_1 + (L\mu_1 - \mu_1(L_3 - s_{22}) - s_{33}\mu_1) \gamma_3 q = K_3 q J_6 \end{aligned}$$

Тем самым установлено также, что (3.9) является при условиях утверждения 3 частным интегралом системы (2.6), (2.7).

*Замечание 3.* Если при выполнении условий 1–4 утверждения 3 условие 5 не выполнено, но функция  $L = L(t, \gamma, \omega)$  представима в виде суммы  $L = L_3 + L_0(J_6) L_1(t, \gamma, \omega)$ , где  $L_0(0) = 0$ , а функция  $L_1(t, \gamma, \omega)$  произвольна, то (3.9) останется частным интегралом системы, хотя дифференциальное соотношение (3.8) уже не будет выполнено.

Необходимо отметить, что близкий аналог случая Гесса для системы (2.6), (2.7) с  $\lambda = 0$ ,  $L \equiv 0$ , диагональной матрицей  $S$  и линейным потенциалом  $U(\gamma)$  был указан ранее в работе [19].

Теперь рассмотрим тот случай, когда на гиростат не действует момент потенциальных сил. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{C(A-B)}, & b_2 &= \sqrt{A(B-C)}, & L_4 &= \frac{Bs_{22} - Cs_{33}}{B-C} \\ b_3 &= (L_4 - s_{22})b_1, & b_4 &= (L_4 - s_{22})b_2 \\ h_1 &= \frac{b_1A(b_2\lambda_1 - b_1\lambda_3)}{b_2(A-B)}, & h_2 &= \frac{b_1A(b_2\lambda_1 + b_1\lambda_3)}{b_2(A-B)} \\ J_{71} &= b_1Ap + b_2Cr + b_3\gamma_1 + b_4\gamma_3 + h_1 \\ J_{72} &= b_1Ap - b_2Cr + b_3\gamma_1 - b_4\gamma_3 + h_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

*Утверждение 4.* Пусть для системы (2.6), (2.7) выполняются условия:

1. Момент потенциальных сил отсутствует, т.е.  $U(\gamma) \equiv 0$ .
2. Компонента  $\lambda_2$  вектора гиростатического момента  $\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  удовлетворяет равенству  $\lambda_2 = 0$ .
3. Моменты инерции удовлетворяют неравенствам  $A > B > C$ .
4. Матрица  $S$  имеет вид  $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$ , причем выполнено равенство  $A(B-C)(s_{11} - s_{22}) = C(A-B)(s_{22} - s_{33})$ .
5.  $L = L(t, \gamma, \omega) \equiv L_4 = \text{const}$ .

Тогда задаваемые формулами (3.10) две функции  $J_{71}$  и  $J_{72}$  удовлетворяют равенствам

$$\dot{J}_{71} = \left. \frac{dJ_{71}}{dt} \right|_{(2.6),(2.7)} = K_{41}qJ_{71}, \quad \dot{J}_{72} = \left. \frac{dJ_{72}}{dt} \right|_{(2.6),(2.7)} = K_{42}qJ_{72}, \quad (3.11)$$

где  $K_{41} = \frac{b_2(A-B)}{b_1A}$ ,  $K_{42} = -\frac{b_2(A-B)}{b_1A}$ , и система (2.6), (2.7) имеет помимо интегралов (2.8)–(2.10) два дополнительных частных интеграла

$$J_{71} = 0, \quad J_{72} = 0 \quad (3.12)$$

и общий интеграл

$$J_7 = J_{71}J_{72} = c_7 = \text{const}, \quad (3.13)$$

независимый от интегралов  $J_1, J_2, J_3$ , следовательно, система (2.6), (2.7) интегрируема.

*Доказательство.* Вычисляя производную от задаваемой формулой (3.10) функции  $J_{71}$  в силу системы (2.6), (2.7) при условиях 1–5, получаем

$$\begin{aligned} \dot{J}_{71} &= (b_2\lambda_1 - b_1\lambda_3)q + (Lb_2 - s_{22}b_2 - b_2(L_4 - s_{22}))p\gamma_2 + \\ &+ (s_{22}b_1 + b_1(L_4 - s_{22}) - Lb_1)r\gamma_2 + (b_2(A-B)p + b_1(B-C)r + \\ &+ (s_{11}b_2 + b_2(L_4 - s_{22}) - Lb_2)\gamma_1 + (Lb_1 - b_1(L_4 - s_{22}) - s_{33}b_1)\gamma_3)q = K_{41}qJ_{71} \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим  $\dot{J}_{72} = K_{42}qJ_{72}$ . Дифференциальные соотношения (3.11) доказаны. Тем самым установлено также, что (3.12) являются при условиях утверждения 4 частными интегралами системы (2.6), (2.7).

Рассмотрим теперь функции (3.10) и (3.13) вдоль произвольного решения системы (2.6), (2.7), обозначая их зависимость от времени  $J_{71}[t]$ ,  $J_{72}[t]$ ,  $J_7[t]$ . Тогда интегрируя (3.11), приходим к равенствам  $J_{71}[t] = J_{71}[0]\exp\left(\int_0^t K_{41}q(\tau)d\tau\right)$ ,  $J_{72}[t] = J_{72}[0]\exp\left(\int_0^t K_{42}q(\tau)d\tau\right)$ . Отсюда с учетом равенства  $K_{41} + K_{42} = 0$  находим

$$J_7[t] = J_{71}[t]J_{72}[t] = J_{71}[0]J_{72}[0]\exp\left(\int_0^t (K_{41} + K_{42})q(\tau)d\tau\right) = J_7[0]$$

Тем самым установлено, что  $J_7[t]$  сохраняется вдоль каждого решения, т.е. система (2.6), (2.7) имеет общий интеграл (3.13). Независимость интегралов вытекает из того, что ранг матрицы Якоби равен 4. Утверждение доказано.

*Замечание 4.* Если при выполнении условий 1–4 утверждения 4 условие 5 не выполнено, но функция  $L = L(t, \gamma, \omega)$  представима в виде суммы  $L = L_4 + L_0(J_7)L_1(t, \gamma, \omega)$ , где  $L_0(0) = 0$ , а функция  $L_1(t, \gamma, \omega)$  произвольна, то (3.12) останутся частными интегралами системы, хотя дифференциальные соотношения (3.11) уже не будут выполнены.

**4. О поведении  $q(t)$  вне множества Гесса.** Множеством Гесса будем называть  $H_i = \{(\omega, \gamma) : J_i(\omega, \gamma) = 0\}$ , где  $J_i(\omega, \gamma)$  есть какой-либо из приведенных выше пяти частных интегралов  $J_4, J_5, J_6, J_{71}, J_{72}$  для системы уравнений движения гиростата (2.6), (2.7), являющихся аналогами интеграла Гесса.

Произвольное решение  $(\omega(t), \gamma(t))$  будем называть *отделенным* от множества Гесса, если  $\inf\{\rho((\omega(t), \gamma(t)), H), -\infty < t < +\infty\} = \rho_0 > 0$ . Здесь  $\rho((\omega, \gamma), H_i)$  – расстояние от точки  $(\omega, \gamma)$  до множества  $H_i$ .

*Утверждение 5.* Пусть для системы уравнений движения гиростата (2.6), (2.7) выполняются условия какого-либо из утверждений 1–4, и, значит, система имеет частный интеграл аналог интеграла Гесса.

Тогда для всякого решения  $(\omega(t), \gamma(t))$ , отделенного от множества Гесса, его компонента  $q(t)$  совершает колебания с нулевым средним значением  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau)d\tau = 0$ .

*Доказательство.* Пусть выполнены условия какого-либо из утверждений 1–4, для определенности утверждения 1 (для других случаев рассуждения совершенно идентичны). Рассмотрим произвольное решение  $(\omega(t), \gamma(t))$ , не лежащее на множестве Гесса  $H_4$ . Из существования интегралов  $J_1$  и  $J_3$  вытекает ограниченность решения  $(\omega(t), \gamma(t))$  при всех  $-\infty < t < +\infty$ . Значит на этом решении будет ограничена сверху и снизу при всех  $-\infty < t < +\infty$  и задаваемая формулой (3.1) функция  $J_4$ . Интегрируя дифференциальное равенство (3.2), получаем  $J_4(\omega(t), \gamma(t)) = J_4(\omega(0), \gamma(0))\exp\left(\int_0^t K_1q(\tau)d\tau\right)$ , поэтому из ограниченности функции  $J_4$  вдоль решения  $(\omega(t), \gamma(t))$  следует, что  $\int_0^t K_1q(\tau)d\tau < +\infty$  при всех  $-\infty < t < +\infty$ . Если предположить теперь, что существует последовательность  $|t_k| \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow +\infty$  такая, что  $\int_0^{t_k} K_1q(\tau)d\tau \rightarrow -\infty$ , то это повлечет  $J_4(\omega(t_k), \gamma(t_k)) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ , что противоречит тому условию, что решение  $(\omega(t), \gamma(t))$  отделено от множества Гесса  $H_4$ . Таким образом, при всех  $-\infty < t < +\infty$

ограничен интеграл  $-\infty < \int_0^t K_1 q(\tau) d\tau < \infty$ , а так как  $K_1$  отличная от нуля постоянная, то значит ограничен и интеграл  $-\infty < \int_0^t q(\tau) d\tau < +\infty$ . Следовательно, среднее значение равно нулю  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau) d\tau = 0$ . Утверждение доказано.

*Следствие 1.* Для любого стационарного решения  $(\omega(t), \gamma(t)) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$ , не лежащего в множестве Гесса, всегда будет  $\bar{q} = 0$ .

Это следствие может быть очень полезным при отыскании всех стационарных решений системы (2.6), (2.7). Необходимо отметить также, что на самом множестве Гесса возможны стационарные решения с  $\bar{q} \neq 0$  (см., например, [13], стационарное решение (V)).

**5. Стационарные решения и их устойчивость.** В этом разделе приведем три различных типа стационарных решений  $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$  системы (2.6), (2.7) и проведем анализ их устойчивости вторым методом Ляпунова, используя в качестве функций Ляпунова связки интегралов, конструируемые по методу Четаева [18].

*Утверждение 6.* При  $U(\gamma) = F(\mu_1 \gamma_1 + \mu_3 \gamma_3)$ , где  $F(\theta)$  – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, система (2.6), (2.7) имеет два стационарных решения (состояния покоя)

$$\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{\sigma \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}}, \quad \bar{\gamma}_3 = \frac{\sigma \mu_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}}, \quad (5.1)$$

где  $\sigma = +1$  или  $\sigma = -1$ . Те стационарные решения (5.1), для которых выполняется

условие  $\sigma \frac{dF(\sigma \sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta} < 0$ , являются устойчивыми по Ляпунову.

*Доказательство.* Подстановкой в систему (2.6), (2.7) легко проверить, что (5.1) является стационарным решением при условиях утверждения 6. Введем обозначения для отклонений от невозмущенного стационарного движения

$$x_1 = p - \bar{p}, \quad x_2 = q - \bar{q}, \quad x_3 = r - \bar{r} \\ x_4 = \gamma_1 - \bar{\gamma}_1, \quad x_5 = \gamma_2 - \bar{\gamma}_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \bar{\gamma}_3$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущенного движения выпишутся следующим образом:

$$J_1 - \bar{J}_1 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2 \frac{dF(\sigma \sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta} (\mu_1 x_4 + \mu_3 x_6) + \\ + \frac{d^2 F(\sigma \sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta^2} (\mu_1 x_4 + \mu_3 x_6)^2 + o(x^2) \\ J_3 - \bar{J}_3 = \frac{2\sigma \mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}} x_4 + \frac{2\sigma \mu_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2}} x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Здесь и далее через  $\bar{J}_i$  обозначено значение интеграла  $J_i$  на стационарном решении. Функцию Ляпунова строим в виде линейно-квадратичной связки (комбинации) интегралов уравнений возмущенного движения

$$V = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_3 (J_3 - \bar{J}_3) + \beta_3 (J_3 - \bar{J}_3)^2$$

Коэффициенты  $\alpha_3$  и  $\beta_3$  с целью уничтожения линейных слагаемых в связке и подавления возможно отрицательного квадратичного слагаемого выберем следующим образом:

$$\alpha_3 = -\sigma\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2} \frac{dF(\sigma\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta}, \quad \beta_3 > \frac{\mu_1^2 + \mu_3^2}{4} \left| \frac{d^2F(\sigma\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta^2} \right|$$

Тогда для квадратичной части связки будет справедлива оценка снизу

$$V_2 \geq Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - \sigma\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2} \frac{dF(\sigma\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta} (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$$

При выполнении условия  $\sigma \frac{dF(\sigma\sqrt{\mu_1^2 + \mu_3^2})}{d\theta} < 0$  квадратичная часть связки  $V_2$ , а значит и вся связка  $V$  будет положительно определенной функцией. Справедливость утверждения 6 следует теперь из теоремы Ляпунова об устойчивости.

*Замечание 5.* Так как при доказательстве утверждения 6 не использовался интеграл  $J_2$ , то это утверждение справедливо и в том случае, когда в системе (2.6), (2.7) матрица  $S$  является произвольной симметричной переменной  $S = S(t, \omega, \gamma)$ .

Необходимо отметить, что устойчивость состояний покоя (5.1) в классическом случае Гесса для тяжелого твердого тела, которому соответствует  $F(\theta) = \theta$ , изучалась в работе [23], где была установлена лишь условная устойчивость относительно множества Гесса (поскольку использовался частный интеграл Гесса) состояния покоя (5.1), отвечающего значению  $\sigma = -1$ . Для другого состояния покоя (5.1), отвечающего значению  $\sigma = 1$ , в [23] была доказана неустойчивость по линейному приближению. Как следует из утверждения 6, если  $F(\theta) = \theta$ , то условие устойчивости выполняется только при  $\sigma = -1$ . Если же функция  $F(\theta)$  не сводится к тождественной, то устойчивыми могут быть оба состояния покоя (5.1). Например, это будет иметь место в случае  $F(\theta) = a\theta^2, a < 0$ .

Рассмотрим теперь устойчивость одноосного перманентного вращения. Введем для краткости обозначения  $f_1 = \frac{dF(\mu_1\sigma)}{d\theta}, f_2 = \frac{d^2F(\mu_1\sigma)}{d\theta^2}$ .

*Утверждение 7.* Если матрица  $S$  диагональная  $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$ , а потенциал имеет вид  $U(\gamma) = F(\mu_1\gamma_1 + \mu_3\gamma_3)$ , где  $F(\theta)$  – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, то система (2.6), (2.7) имеет два стационарных решения (перманентных вращения)

$$\bar{q} = \bar{r} = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \sigma, \quad \bar{p} = \frac{\sigma\mu_3}{\lambda_1} \frac{dF(\mu_1\sigma)}{d\theta} \tag{5.2}$$

где  $\sigma = +1$  или  $\sigma = -1$ . Те из решений (5.2), для которых выполняются условия

$$(A - B) \left( \frac{f_1\mu_3}{\lambda_3} \right)^2 + \frac{f_1\mu_3}{\lambda_3} (s_{11} - s_{22}) + \left( \frac{\mu_3\lambda_1}{\lambda_3} - \mu_1 \right) f_1\sigma > 0 \tag{5.3}$$

$$(A - C) \left( \frac{f_1\mu_3}{\lambda_3} \right)^2 + \frac{f_1\mu_3}{\lambda_3} (s_{11} - s_{33}) + \left( \frac{\mu_3\lambda_1}{\lambda_3} - \mu_1 \right) f_1\sigma + \frac{\lambda_3^2}{A} + f_2\mu_3^2 > 0, \tag{5.4}$$

являются устойчивыми по Ляпунову.

Доказательство. Подстановкой в систему (2.6), (2.7) легко проверить, что (5.2) является стационарным решением при условиях утверждения 7. Интегралы уравнений возмущенного движения выпишутся следующим образом:

$$J_1 - \bar{J}_1 = 2A\bar{p}x_1 + 2f_1(\mu_1x_4 + \mu_3x_6) + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + f_2(\mu_1x_4 + \mu_3x_6)^2 + o(\|x\|^2)$$

$$J_2 - \bar{J}_2 = A\sigma x_1 + (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\sigma)x_4 + \lambda_3x_6 + Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}(s_{11}x_4^2 + s_{22}x_5^2 + s_{33}x_6^2)$$

$$J_3 - \bar{J}_3 = 2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Функцию Ляпунова по методу Четаева [18] строим в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения

$$V = (J_1 - \bar{J}_1) + \alpha_2(J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2$$

Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i = 2, 3$  с целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2f_1\mu_3}{\lambda_3}$$

$$\alpha_3 = \frac{f_1\mu_3}{\lambda_3} \left( \frac{Af_1\mu_3}{\lambda_3} + \lambda_1\sigma + s_{11} \right) - f_1\mu_1\sigma$$

Тогда квадратичная часть  $V_2(x)$  интеграла  $V(x)$  уравнений возмущенного движения запишется так

$$\begin{aligned} V_2(x) &= Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + f_2(\mu_1x_4 + \mu_3x_6)^2 - \\ &- \frac{2f_1\mu_3}{\lambda_3} \left[ Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}(s_{11}x_4^2 + s_{22}x_5^2 + s_{33}x_6^2) \right] + \\ &+ \left[ \frac{f_1\mu_3}{\lambda_3} \left( \frac{Af_1\mu_3}{\lambda_3} + \lambda_1\sigma + s_{11} \right) - f_1\mu_1\sigma \right] (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + \\ &+ \beta_2(A\sigma x_1 + (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\sigma)x_4 + \lambda_3x_6)^2 + \beta_3(2\sigma x_4)^2 \end{aligned}$$

Так как коэффициенты  $\beta_2$  и  $\beta_3$  можно взять сколь угодно большими положительными, то для положительной определенности  $V_2(x)$  необходимо и достаточно [24] установить положительную определенность  $V_2(x)$  на множестве  $\Theta = \{x_4 = 0, A\sigma x_1 + \lambda_3x_6 = 0\}$ . На этом множестве  $V_2(x)$  распадается на сумму двух квадратичных форм от двух переменных. Применяя к каждой из них критерий Сильвестра, придем к неравенствам (5.3), (5.4). Утверждение доказано.

Отметим, что неравенства (5.3), (5.4) всегда можно выполнить за счет выбора элементов матрицы  $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$ , т.е. всегда возможна гироскопическая стабилизация перманентного вращения (5.2).

Рассмотрим теперь устойчивость перманентных вращений, образующих целое семейство.



*Утверждение 8.* Если матрица  $S$  диагональная  $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$ , а потенциал имеет вид  $U(\gamma) = \mu_1\gamma_1 + \mu_3\gamma_3$ , то система (2.6), (2.7) имеет при всех  $0 < \varphi < 2\pi$ ,  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}k$ ,  $k$  – целое число, при которых выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & [\lambda_3 \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi + (s_{33} - s_{11}) \cos \varphi \sin \varphi]^2 - \\ & - 4(C - A) \cos \varphi \sin \varphi (\mu_1 \sin \varphi - \mu_3 \cos \varphi) > 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

два стационарных решения (перманентных вращения)

$$\begin{aligned} \bar{p} = \Omega_i \cos \varphi, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = \Omega_i \sin \varphi, \quad \bar{\gamma}_1 = \cos \varphi, \\ \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \sin \varphi; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $\Omega_i$  – один из корней квадратного уравнения

$$\begin{aligned} 4(C - A) \cos \varphi \sin \varphi \Omega^2 + [\lambda_3 \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi + (s_{33} - s_{11}) \cos \varphi \sin \varphi] \Omega + \\ + (\mu_1 \sin \varphi - \mu_3 \cos \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Те из решений (5.6), для которых выполняются условия

$$(A - B) \bar{p}^2 + (\lambda_1 + s_{11} \bar{\gamma}_1) \bar{p} - \mu_1 \bar{\gamma}_1 > 0 \quad (5.8)$$

$$(A + Cb^2) \left[ Cc^2 - \frac{\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} (s_{11} + s_{33}) \frac{\bar{\gamma}_1^2}{\bar{\gamma}_3^2} + \frac{\alpha_3}{\bar{\gamma}_3^2} \right] - \left( bc - \frac{A\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} \right)^2 > 0 \quad (5.9)$$

являются устойчивыми по Ляпунову.

Входящие в неравенство (5.9) числа  $b, c, \alpha_3$  определяются в процессе доказательства.

Доказательство. Неравенство (5.5) обеспечивает вещественность корней уравнения (5.7). Подстановкой в систему (2.6), (2.7) легко проверить, что (5.6) является стационарным решением при условиях утверждения 8. Интегралы уравнений возмущенного движения выпишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} J_1 - \bar{J}_1 &= 2A\bar{p}x_1 + 2C\bar{r}x_3 + 2(\mu_1x_4 + \mu_3x_6) + Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 \\ J_2 - \bar{J}_2 &= A\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\bar{\gamma}_1)x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3 + s_{33}\bar{\gamma}_3)x_6 + Ax_1x_4 + \\ &+ Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}(s_{11}x_4^2 + s_{22}x_5^2 + s_{33}x_6^2) \\ J_3 - \bar{J}_3 &= 2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{aligned}$$

Функцию Ляпунова по методу Четаева [18] строим в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения

$$V = (J_1 - \bar{J}_1) + \alpha_2 (J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3 (J_3 - \bar{J}_3) + \beta_2 (J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \bar{J}_3)^2$$

Коэффициенты  $\alpha_i, i = 2, 3$  с целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем следующим образом

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} \\ \alpha_3 &= \frac{\bar{p}}{\bar{\gamma}_1^2} (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\bar{\gamma}_1) - \frac{\mu_1}{\bar{\gamma}_1} \end{aligned}$$

Тогда интеграл  $V(x)$  уравнений возмущенного движения запишется так

$$\begin{aligned} V(x) = & Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} \left[ Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}(s_{11}x_4^2 + s_{22}x_5^2 + s_{33}x_6^2) \right] + \\ & - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} \left[ Ax_1x_4 + Bx_2x_5 + Cx_3x_6 + \frac{1}{2}(s_{11}x_4^2 + s_{22}x_5^2 + s_{33}x_6^2) \right] + \\ & + \left[ \frac{\bar{p}}{\bar{\gamma}_1^2} (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\bar{\gamma}_1) - \frac{\mu_1}{\bar{\gamma}_1} \right] (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \\ & + \beta_2 [A\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\bar{\gamma}_1)x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3 + s_{33}\bar{\gamma}_3)x_6]^2 + \beta_3 (2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6)^2 \end{aligned}$$

Так как коэффициенты  $\beta_2$  и  $\beta_3$  можно взять сколь угодно большими положительными, то для положительной определенности  $V(x)$  необходимо и достаточно [24] установить положительную определенность  $V(x)$  на множестве  $\Theta = \{2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6 = 0, A\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + (A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\bar{\gamma}_1)x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3 + s_{33}\bar{\gamma}_3)x_6 = 0\}$ .

На этом множестве справедливы равенства

$$x_6 = ax_4, \quad x_3 = bx_1 + cx_4,$$

где  $a = -\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_3}$ ,  $b = -\frac{A\bar{\gamma}_1}{C\bar{\gamma}_3}$ ,  $c = -\frac{1}{C\bar{\gamma}_3} \left[ A\bar{p} + \lambda_1 + s_{11}\bar{\gamma}_1 - \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_3} (C\bar{r} + \lambda_3 + s_{33}\bar{\gamma}_3) \right]$  и  $V(x)$  представляет собой сумму двух квадратичных форм от двух переменных

$$V(x) = V_{14}(x) + V_{25}(x)$$

$$\begin{aligned} V_{14}(x) = & (A + Cb^2)x_1^2 + 2 \left( bc - \frac{A\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} \right) x_1x_4 + \left[ Cc^2 - \frac{\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} (s_{11} + s_{33}) \frac{\bar{\gamma}_1^2}{\bar{\gamma}_3^2} + \frac{\alpha_3}{\bar{\gamma}_3^2} \right] x_4^2 \\ V_{25}(x) = & Bx_2^2 - 2B \frac{\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} x_2x_5 + \left( \alpha_3 - \frac{\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} s_{22} \right) x_5^2 \end{aligned}$$

Применяя к каждой из них критерий Сильвестра, приходим к неравенствам (5.8), (5.9). Утверждение доказано.

**6. Аналог случая Гесса при действии момента циркулярных сил.** Будем теперь рассматривать систему (2.1) при действии момента

$$M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} + S\gamma \times \omega + W\omega \times \gamma + L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma, \quad (6.1)$$

где  $W$  — некоторая симметричная матрица, а все другие слагаемые момента  $M$  уже были описаны выше в разделе 2. Отметим, что момент вида  $W\omega \times \gamma$  возникает, например, при вращении сверхпроводящего или ферромагнитного тела в магнитном поле под действием эффекта Барнетта—Лондона [25]. В этом разделе будем строить аналоги частного интеграла Гесса для гиростата при действии момента (6.1), считая матрицы  $S = \text{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$  и  $W = \text{diag}(w_{11}, w_{22}, w_{33})$  диагональными. Уравнения движения (2.1) тогда запишутся следующим образом

$$A\dot{p} = (B - C)qr + \lambda_2r - \lambda_3q + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} + (L - s_{33} + w_{22})q\gamma_3 +$$

$$B\dot{q} = (C - A)pr + \lambda_3 p - \lambda_1 r + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} + (L - s_{11} + w_{33})r\gamma_1 + \quad (6.2)$$

$$+ (s_{33} - w_{11} - L)p\gamma_3$$

$$C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} + (L - s_{22} + w_{11})p\gamma_2 + \quad (6.3)$$

$$+ (s_{11} - w_{22} - L)q\gamma_1$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

Отметим, что система (6.2), (6.3) имеет интеграл момента (2.4) и геометрический интеграл (2.5), а полная энергия (2.3) уже не будет первым интегралом для этой системы.

Справедливо следующее

*Утверждение 9.* Пусть для системы (6.2), (6.3) выполняются условия 1–3 утверждения 1 и, кроме того, условия:

4. Матрицы  $S$  и  $W$  диагональные, причем выполнено равенство

$$w_{11} + \frac{A}{A - B}(s_{11} - s_{22} + w_{11} - w_{22}) = w_{33} + \frac{C}{B - C}(s_{22} - s_{33} + w_{22} - w_{33})$$

5.  $L = L(t, \gamma, \omega) \equiv L_8 = s_{22} - w_{33} + \frac{A}{A - B}(s_{11} - s_{22} + w_{11} - w_{22})$ .

Тогда функция

$$J_8 = \mu_1 Ap + \mu_3 Cr + \mu_1 (L_8 - s_{22} + w_{33})\gamma_1 + \mu_3 (L_8 - s_{22} + w_{11})\gamma_3 + d \quad (6.4)$$

удовлетворяет равенству

$$\dot{J}_8 = \left. \frac{dJ_8}{dt} \right|_{(6.2), (6.3)} = K_2 q J_8, \quad (6.5)$$

где  $K_2 = \frac{\mu_3(A - B)}{\mu_1 A} = \frac{\mu_1(B - C)}{\mu_3 C}$ , и система (3.2), (3.3) имеет помимо интегралов (2.4) и (2.5) дополнительный частный интеграл

$$J_8 = 0 \quad (6.6)$$

*Доказательство.* Вычисляя производную от задаваемой формулой (6.4) функции  $J_8$  в силу системы (6.2), (6.3) при условиях 1–5, получаем

$$\begin{aligned} \dot{J}_8 = & (\mu_1 \mu_3 - \mu_3 \mu_1) \frac{dF(\theta)}{d\theta} \gamma_2 + (L_8 \mu_3 - s_{22} \mu_3 + w_{33} \mu_3 - \mu_3 (L_8 - s_{22} + w_{11})) p \gamma_2 + \\ & + (\mu_1 (s_{22} - w_{33} - L_8) + \mu_1 (L_8 - s_{22} + w_{33})) r \gamma_2 + (\mu_3 (A - B) p + \mu_1 (B - C) r + \\ & + (\mu_3 (s_{11} + L_8 - w_{22}) + \mu_3 (L_8 - s_{22} + w_{11})) \gamma_1 + \\ & + (\mu_1 (L_8 - s_{33} + w_{22}) - \mu_1 (L_8 - s_{22} + w_{33})) \gamma_3 + (\mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3) q = K_2 q J_8 \end{aligned}$$

Тем самым установлено также, что (6.6) является при условиях утверждения 8 частным интегралом системы (6.2), (6.3).

*Замечание 6.* Если при выполнении условий 1–4 утверждения 9 условие 5 не выполнено, но функция  $L = L(t, \gamma, \omega)$  представима в виде суммы  $L = L_8 + L_0(J_8) L_1(t, \gamma, \omega)$ , где  $L_0(0) = 0$ , а функция  $L_1(t, \gamma, \omega)$  произвольна, то (6.6) останется частным интегралом системы, хотя дифференциальное соотношение (6.5) уже не будет выполнено.

Теперь рассмотрим тот случай, когда на гири стат не действует момент потенциальных сил. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{C(A-B)}, & b_2 &= \sqrt{A(B-C)} \\ L_9 &= s_{22} - w_{11} + \frac{C}{B-C}(s_{22} - s_{33} + w_{22} - w_{33}) \\ b_3 &= (L_9 - s_{22} + w_{33})b_1, & b_4 &= (L_9 - s_{22} + w_{11})b_2 \\ h_1 &= \frac{b_1 A(b_2 \lambda_1 - b_1 \lambda_3)}{b_2(A-B)}, & h_2 &= \frac{b_1 A(b_2 \lambda_1 + b_1 \lambda_3)}{b_2(A-B)} \\ J_{91} &= b_1 A p + b_2 C r + b_3 \gamma_1 + b_4 \gamma_3 + h_1 \\ J_{92} &= b_1 A p - b_2 C r + b_3 \gamma_1 - b_4 \gamma_3 + h_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

*Утверждение 10.* Пусть для системы (6.2), (6.3) выполняются условия 1–3 утверждения 4 и, кроме того, условия:

4. Матрицы  $S$  и  $W$  диагональные, причем выполнено равенство

$$w_{11} + \frac{A}{A-B}(s_{11} - s_{22} + w_{11} - w_{22}) = w_{33} + \frac{C}{B-C}(s_{22} - s_{33} + w_{22} - w_{33})$$

5.  $L = L(t, \gamma, \omega) \equiv L_9 = \text{const}$ .

Тогда задаваемые формулами (6.7) две функции  $J_{91}$  и  $J_{92}$  удовлетворяют равенствам

$$\dot{J}_{91} = \left. \frac{dJ_{91}}{dt} \right|_{(6.2), (6.3)} = K_{41} q J_{91}, \quad \dot{J}_{92} = \left. \frac{dJ_{92}}{dt} \right|_{(6.2), (6.3)} = K_{42} q J_{92}, \quad (6.8)$$

где  $K_{41} = \frac{b_2(A-B)}{b_1 A}$ ,  $K_{42} = -\frac{b_2(A-B)}{b_1 A}$ , и система (6.2), (6.3) имеет помимо интегралов (2.9), (2.10) два дополнительных частных интеграла

$$J_{91} = 0, \quad J_{92} = 0 \quad (6.9)$$

и общий интеграл

$$J_9 = J_{91} J_{92} = c_9 = \text{const}, \quad (6.10)$$

независимый от интегралов  $J_2, J_3$ .

Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.

Так как система (6.2), (6.3) не имеет интеграла энергии, то, в отличие от утверждения 4, теперь для интегрируемости необходимо отыскать еще один независимый интеграл. По той же причине здесь нет аналога утверждения 5 о нулевом среднем для  $q(t)$  вне множества Гесса. Однако можно доказать аналог следствия из утверждения 5.

*Утверждение 11.* Если выполнены условия утверждения 9 или 10, то для любого стационарного решения  $(\omega(t), \gamma(t)) = (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$ , не лежащего в множестве Гесса, всегда будет  $\bar{q} = 0$ .

Доказательство. Пусть выполнены условия утверждения 9. Рассмотрим произвольное стационарное решение  $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$ , не лежащее в множестве Гесса  $J_8 = 0$ . На нем функция  $J_8 = J_8(\bar{p}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_3)$  принимает постоянное значение. С другой стороны,  $J_8[t] = J_8[0] \exp \int_0^t K_2 \bar{q} d\tau = J_8[0] \exp(K_2 \bar{q} t)$  может быть постоянной только при  $\bar{q} = 0$ . В случае выполнения условий утверждения 10 рассуждения аналогичны.

**Заключение.** В заключение отметим кратко некоторые возможные направления развития полученных в статье результатов. В статье получено 6 аналогов случая Гесса для уравнений движения гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил. Такого рода аналоги, в которых система имеет линейный частный интеграл, могут существовать и при других условиях. В этой связи представляет интерес выяснить, каким условиям должен удовлетворять момент  $M(t, \gamma, \omega)$  в системе (2.1), чтобы она имела линейный частный интеграл типа Гесса.

Для классического случая Гесса для твердого тела еще П.А. Некрасовым было получено [3] линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. В самое последнее время А.С. Кулешовым такое уравнение было преобразовано [12] к виду, допускающему применение алгоритма Ковачича. Это позволило установить, какие типы лиувиллевых решений могут реализоваться в случае Гесса для уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой. Возможно, что такой подход будет результативным и для аналогов случая Гесса, полученных в данной статье.

Выявлены три группы стационарных движений и проведен анализ их устойчивости методом Четаева. Целесообразно расширить перечень стационарных движений, используя метод Рауса, как это было сделано в [13] для уравнений твердого тела в случае Гесса, а также провести более полный анализ устойчивости, аналогично тому, как это сделано в работах [26–28] для гиростата с одними потенциальными силами. При этом использование аналога линейного частного интеграла Гесса, как показано в [22], может расширить условия устойчивости относительно множества Гесса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hess W. Uber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und uber eine neue partikulare Losung des Problems der Bewegung eines starren Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. V. 37. № 2. P. 153–181.
2. Аппельротъ Г.Г. По поводу §1 мемуара С.В. Ковалевской “Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe” (Acta Mathematica. 12. 2) // Матем. сб. 1892. Т. 16. № 3. С. 483–507.
3. Некрасовъ П.А. Къ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки // Матем. сб. 1892. Т. 16. № 3. С. 508–517.
4. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск. НИЦ Регул. и хаотич. дин., 2001. 384 с.
6. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 401 с.
7. Гашененко И.Н. Периодические движения твердого тела в случае Гесса // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 14–25.
8. Емельянова И.С. Один случай решения задачи Гесса в тригонометрических функциях // Изв. вузов. Матем. 1998. № 3. С. 10–15.
9. Kholostova O.V. On the dynamics of a rigid body in the hess case at high-frequency vibrations of a suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 1. P. 59–84.
10. Борисов А.В., Мамаев И.С. Случай Гесса в динамике твердого тела // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 256–265.

11. *Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Система Гесса–Аппельерта и ее неголономные аналоги // Тр. МИАН. 2016. Т. 294. С. 268–292.
12. *Кулешов А.С.* Применение алгоритма Ковачича для исследования движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 202. С. 10–42.
13. *Новиков М.А.* О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 28–37.
14. *Беляев А.В.* Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 5. С. 5–34.
15. *Беляев А.В.* О представлении решений задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Ковалевской в  $\zeta$ - и  $\varphi$ -функциях Вейерштрасса и неинтегрируемости в квадратурах случая Гесса // Матем. сб. 2016. Т. 207. № 7. С. 3–28.
16. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. Вып. 2. С. 292–294.
17. *Макеев Н.Н.* Интегралы геометрической теории динамики гиростата // Вестн. Пермского ун-та. Мат. Мех. Информ. 2012. Вып. 2 (10). С. 26–35.
18. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
19. *Лунев В.В.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 4. С. 824–826.
20. *Самсонов В.А.* О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 32–34.
21. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
22. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D: Nonlin. Phenom. 2022. V. 430. P. 133103.
23. *Новиков М.А.* Об устойчивости стационарных движений транспортных систем при существовании частного интеграла // Совр. технол. Сист. анал. моделир. 2019. № 4 (64). С. 58–64.
24. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
25. *Горп Г.В., Мазнев А.В.* О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 2. С. 369–376.
26. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal. & Appl. 2013. V. 401. P. 836–849.
27. *de Bustos Munoz M.T., Guirao J.L.G., Vera Lopez J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory Dyn. Syst. 2015. V. 14. № 2. P. 265–280.
28. *Iñarraea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math. & Comput. 2017. V. 293. P. 404–415.

### On Analogues of the Hess Case for a Gyrostat under the Action of a Moment of Gyroscopic and Circular Forces

A. A. Kosov<sup>a, #</sup>

<sup>a</sup>*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch  
of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: kosov\_idstu@mail.ru*

The article studies the equations of motion of a gyrostat around a fixed point under the action of the moment of potential, gyroscopic and circular forces. Six analogs of the Hess case are distinguished, in which the system of equations of motion has a linear partial integral. An additional general integral is found for two cases. It is established that the component of the

angular velocity vector, which is not included in the Hess integral, oscillates with zero mean on all solutions outside the Hess set. Three types of stationary solutions are given, and sufficient conditions for their stability are obtained by the Chetaev method of integral bundles.

*Keywords:* gyrostat, gyroscopic and circular forces, analogues of the Hess case, partial and general integrals, stationary solutions, stability

## REFERENCES

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.*, 1890, vol. 37, no. 2, pp. 153–181.
2. *Appel'rot G.G.* Concerning Section 1 of the Memoir of S. V. Kovalevskaya “Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe”, and the Appendix to This Paper // *Mat. Sb.*, 1892, vol. 16, no. 3, pp. 483–507.
3. *Nekrassov P.A.* Zur Frage von der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // *Mat. Sb.*, 1892, vol. 16, no. 3, pp. 508–517.
4. *Golubev V.V.* Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point. Israel: Israeli Program for Scientific Translations, 1960. 287 p.
5. *Borisov A., Mamaev I.* Rigid Body Dynamics. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2001. 384 p. (in Russian)
6. *Gasheneko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems in the Dynamics of Rigid Body. Kiev: Nauk. Dumka, 2012. 401 p. (in Russian)
7. *Gasheneko I.N.* The periodic motions of a rigid body in the Hess case // *Mech. Solids*, 2012, vol. 42, pp. 14–25.
8. *Emel'yanova I.S.* One case of solving the Hess problem in trigonometric functions // *Rus. Math.*, 1998, vol. 42, no. 3, pp. 7–12.
9. *Kholostova O.V.* On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 59–84.
10. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* The Hess case in rigid-body dynamics // *J. Appl. Math.&Mech.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 227–235.
11. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* The Hess–Appelrot system and its nonholonomic analogs // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 294, pp. 252–275.
12. *Kuleshov A.S.* Application of the Kovacic algorithm to the study of the motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // *Results of Sci.&Technol. Ser. Modern Math.& Its Appl. Thematic Rev.*, 2021, vol. 202, pp. 10–42.
13. *Novikov M.A.* On stationary motions of a rigid body under the partial Hess integral existence // *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 262–270.
14. *Belyaev A.V.* On the general solution of the problem of the motion of a heavy rigid body in the Hess case // *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 5, pp. 621–649.
15. *Belyaev A.V.* Representation of solutions to the problem of the motion of a heavy rigid body in the Kovalevskaya case in terms of Weierstrass  $\zeta$ - and  $\wp$ -functions and nonintegrability of the Hess case by quadratures // *Sb. Math.*, 2016, vol. 207, no. 7, pp. 889–914.
16. *Sretenskii L.N.* Some integrability cases for the equations of gyrostat motion // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, vol. 149, no. 2, pp. 292–294.
17. *Makeyev N.N.* Integrals of the geometrical theory of a dynamics gyrostat // *Perm Univ. Bull. Math. Mech. Comput. Sci.*, 2012, iss. 2 (10), pp. 26–35.
18. *Chetaev N.* The Stability of Motion. N.Y.: Pergamon Press, 1961.
19. *Lunev V.V.* Integrable cases in the problem of the motion of a heavy rigid body with a fixed point in a Lorentz force field // *Sov. Phys., Dokl.*, 1984, vol. 29, pp. 297–298.
20. *Samsonov V.A.* On the rotation of a body in a magnetic field // *AN SSSR, Izvestiia, Mekhanika Tverdogo Tela*, 1984, no. 4, pp. 32–34.

21. *Kozlov V.V.* The problem of the rotation of a rigid body in a magnetic field // AN SSSR, Izvestia, Mekhanika Tverdogo Tela, 1985, no. 6, pp. 28–33.
22. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom., 2022, vol. 430, pp. 133103.
23. *Novikov M.A.* On the stability of steady-state motions of transport systems in the case of existence of a partial integral // Modern Technol., Syst. Anal. Model., 2019, vol. 64, no. 4, pp. 58–64.
24. *Rubanovskii V.N., Samsonov V.A.* Stability of Steady Motions in Examples and Problems. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (in Russian)
25. *Gorr G.V., Maznev A.A.* About motion of symmetric gyrostat with a variable gyrostatic moment in two tasks of dynamics// Rus. J. Nonlin. Dyn., 2012, vol. 8, no. 2, pp. 369–376.
26. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal.&Appl., 2013, vol. 401, pp. 836–849.
27. *de Bustos Munoz M.T., Guirao J.L.G., Vera Lopez J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory of Dyn. Syst., 2015, vol. 14, no. 2, pp. 265–280.
28. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math.&Comput., 2017, vol. 293, pp. 404–415.



УДК 531.36

## ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ШАРА

© 2022 г. А. А. Буров<sup>1,\*</sup>, В. И. Никонов<sup>1,\*\*</sup>, Е. С. Шалимова<sup>2,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*e-mail: jtm@narod.ru

\*\*e-mail: nikon\_v@list.ru

\*\*\*e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.04.2022 г.

После доработки 23.07.2022 г.

Принята к публикации 01.08.2022 г.

Рассматривается задача об относительных равновесиях точки в окрестности равномерно вращающегося однородного шара со сферической полостью. Вращение тела осуществляется вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии тела и проходящей через его центр масс. В предположении о наличии сухого трения исследованы семейства неизолированных относительных равновесий (точек либрации), расположенные на поверхности полости. Изучены их устойчивость и бифуркации.

*Ключевые слова:* небесные тела с полостями, неизолированные относительные равновесия, движение в нецентральной гравитационном поле, обобщенная гравитирующая гантель, сухое трение

DOI: 10.31857/S0032823522060029

**1. Введение.** В небесной механике рассматриваются различные задачи о движении тел под действием сил взаимного притяжения. Как правило, рассматривается задача о движении нескольких тел, находящихся во внешнем пространстве друг относительно друга и, возможно, соприкасающихся друг с другом или приходящих в такое соприкосновение. В задачах другого типа предполагается, что те или иные тела проницаемы, и движение одного тела внутри другого осуществляется под действием силы притяжения и выталкивающей силы. Задачи такого типа называют задачами Роба, поскольку их исследование восходит к публикации [1]. В работе [1] предполагается, что шар движется внутри сферической оболочки, заполненной однородной несжимаемой жидкостью, под действием выталкивающей силы со стороны жидкости, а также силы притяжения со стороны точки, находящейся вне оболочки. Различные задачи о точках либрации в близкой постановке изучались в [2–4]. К этому же классу задач относится задача о движении звезды в неоднородной вращающейся эллиптической галактике [5], для которой были определены точки либрации и исследована их устойчивость.

В настоящей работе внимание сосредоточено на задаче, отличающейся по постановке от задач описанных выше типов. В ней предполагается, что в одном из тел имеется полость, и другое тело совершает движение внутри этой полости, соприкасаясь с предполагаемой непроницаемой поверхностью этой полости. Изучается простейший по постановке случай, когда одно тело представляет собой однородный шар, внутри которого расположена сферическая полость, не выходящая на поверхность. Предпо-

лагается, что размеры другого, находящегося внутри полости, тела пренебрежимо малы по сравнению с его размерами, т.е. это тело рассматривается как материальная точка. Считается, что в точке соприкосновения действует сила сухого трения. В предположении о равномерном вращении объёмлющего тела изучаются свойства относительных равновесий (точек либрации) в зависимости от параметров задачи. Постановка задачи о движении внутри полости в идейном плане восходит, вероятно, к работе [6], где был описан потенциал притяжения в случае, когда одно тело находится внутри другого.

Как известно (см., например, [7–11]), среди факторов, важных для описания движения по внутренней или внешней поверхности быстро вращающегося малого небесного тела неправильной формы, можно выделить как возможную неоднородность поля притяжения, так и сопоставимость по величине силы притяжения и центробежной силы. Так, в частности, на поверхности тела могут существовать области, в которых незакрепленная частица не может оставаться в покое несмотря на наличие трения (аналоги крутых склонов гор). Общие методы исследования систем с такими свойствами, разработанные в [12–18], были опробованы ранее на ряде задач о движении систем, содержащих вращающиеся элементы [9–12].

**2. Движение по инерции динамически симметричного твердого тела.** Прежде всего напомним некоторые факты, относящиеся к вращению по инерции динамически симметричного твердого тела вокруг центра масс. Пусть  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_*, I_*)$  главный центральный тензор инерции тела,  $\psi$ ,  $\theta$  и  $\phi$  – задающие положение тела углы прецессии, нутации и собственного вращения соответственно,

$$p_\psi = I_* \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_1 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \cos \theta, \quad p_\theta = I_* \dot{\theta}, \quad p_\phi = I_1 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) \quad (2.1)$$

отвечающие им импульсы. Как известно (см., например, [23]), движение такого тела описывается каноническими уравнениями Гамильтона с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{(p_\psi - p_\phi \cos \theta)^2}{I_* \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{I_*} + \frac{p_\phi^2}{I_1} \right) \quad (2.2)$$

Координаты  $\psi$  и  $\phi$  – циклические. Отвечающие им импульсы сохраняют свои значения во все время движения.

Установившимися движениями оказываются прецессии. При фиксированных значениях отвечающих циклическим координатам импульсов постоянный угол нутации находится как критическая точка приведенного потенциала

$$U_a = \frac{(p_\psi - p_\phi \cos \theta)^2}{2I_* \sin^2 \theta}$$

При этом уравнение имеет вид

$$\frac{\partial U_a}{\partial \theta} = \frac{(p_\psi - p_\phi \cos \theta)(p_\phi - p_\psi \cos \theta)}{I_* \sin^3 \theta} = 0$$

Так как косинус по абсолютной величине не превосходит единицы, то при  $p_\psi \neq p_\phi$  может иметь место лишь одно из двух решений относительно  $\cos \theta$ : либо

$$\cos \theta = \frac{p_\psi}{p_\phi}, \quad \left| \frac{p_\psi}{p_\phi} \right| < 1, \quad (2.3)$$

либо

$$\cos \theta = \frac{p_\Phi}{p_\Psi}, \quad \left| \frac{p_\Phi}{p_\Psi} \right| < 1 \tag{2.4}$$

В случае, когда  $p_\Psi = p_\Phi$ , имеет место единственный кратный корень  $\cos \theta = 1$ , отвечающий равномерному вращению тела вокруг оси динамической симметрии.

Вычисляя вторые производные по углу нутации на движениях (2.3) и (2.4), находим

$$\left. \frac{\partial^2 U_a}{\partial \theta^2} \right|_{(2.3)} = \frac{p_\Phi^2}{I_*}, \quad \left. \frac{\partial^2 U_a}{\partial \theta^2} \right|_{(2.4)} = \frac{p_\Psi^2}{I_*}$$

Таким образом, обсуждаемые прецессионные движения устойчивы по углу нутации. По углам прецессии и собственного вращения устойчивости естественно не наблюдается.

Подстановка (2.1) в (2.4) приводит к зависимости угла нутации от угловых скоростей прецессии и собственного вращения на прецессионных движениях. Эта зависимость имеет вид

$$\cos \theta = \frac{I_1 \dot{\phi}_0}{I_* - I_1 \dot{\psi}_0} \tag{2.5}$$

В частности, при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  прецессия оказывается перманентным вращением с  $\dot{\phi}_0 = 0$ . Именно этот случай, для которого ось прецессии перпендикулярна оси симметрии тела, составляет предмет дальнейшего рассмотрения.

*Замечание.* В случае, когда  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , перманентные вращения образуют однопараметрическое семейство неизолированных движений, отличающихся углом поворота тела вокруг его оси симметрии.

**3. Постановка задачи и основные обозначения.** Пусть  $\mathcal{A}$  – твердое тело, получающееся из однородного шара  $\mathcal{B}$  радиуса  $r_B$  с центром  $B$  изъятием содержимого сферической полости  $\mathcal{C}$  радиуса  $r_C$  с центром  $C$ :  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ . Предположим, что тело  $\mathcal{A}$  совершает вращение вокруг оси, перпендикулярной оси  $BC$  и проходящей через точку  $O$  – центр масс тела – с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Пусть частичка  $P$ , размеры которой пренебрежимо малы по сравнению с размерами тела  $\mathcal{A}$ , движется по внутренней  $\partial \mathcal{A}_i$  или внешней  $\partial \mathcal{A}_e$  поверхности тела  $\mathcal{A}$  под действием притяжения со стороны тела, нормальной реакции и силы сухого трения. В дальнейшем считается, что движение частички  $P$  не оказывает влияния на движение тела  $\mathcal{A}$ .

Введем вращающуюся вместе с телом правую систему отсчета  $Ox_1x_2x_3$  ( $BCO$ ), ось  $Ox_3$  которой совпадает с осью вращения, ось  $Ox_1$  направлена вдоль оси симметрии тела, а ось  $Ox_2$  дополняет их до правой тройки (см. рис. 1). Для удобства описания точки внутренней (внешней) поверхности тела, располагающиеся на оси  $Ox_1$ , наименее и наиболее удаленные от оси вращения, обозначим  $W$  и  $E$  ( $W'$  и  $E'$ ) соответственно. Единичные векторы осей  $BCO$  обозначим  $e_1, e_2$  и  $e_3$  соответственно.

Пусть центр полости  $C$  располагается на положительной полуоси  $Ox_1$ . В дальнейшем предполагается, что полость  $\mathcal{C}$  не выходит за пределы внешней поверхности тела, т.е. если  $|BC| = d$ , то  $d + r_C \leq r_B$ . Тогда

$$OP = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad OB = (b, 0, 0)^T, \quad OC = (c, 0, 0)^T,$$

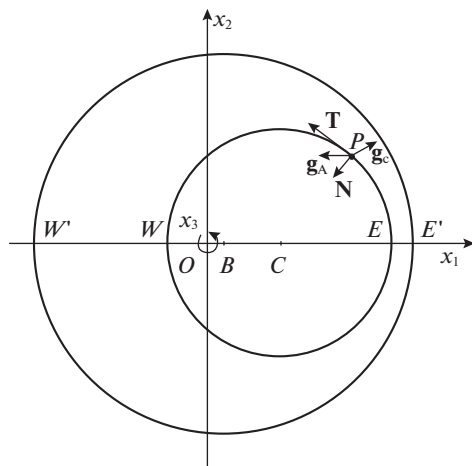


Рис. 1.

где

$$b = \frac{r_C^3}{r_B^3 - r_C^3} d, \quad c = \frac{r_B^3}{r_B^3 - r_C^3} d > 0$$

Относительно неинерциальной системы отсчета  $Ox_1x_2x_3$  точка  $P$  движется по поверхности тела под действием силы притяжения с его стороны, центробежной и кориолисовой сил, а также нормальной и касательной составляющих реакции. Касательная составляющая реакции – не что иное, как сила трения.

Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = 2\omega\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_c + \mathbf{g}_a, \quad \mathbf{g}_c = -\frac{\partial U_c}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{g}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{g}_c$  – напряженность центробежных сил с потенциалом

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{x}),$$

$\mathbf{g}_a$  – напряженность сил притяжения с потенциалом  $U = U(\mathbf{x})$ , векторы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{T}$  задают нормальную реакцию поверхности и силу трения, отнесенную к массе точки.

Ставится задача об определении точек либрации – равновесий точки  $P$ , находящейся в соприкосновении с поверхностью  $\partial\mathcal{A}$  тела  $\mathcal{A}$  относительно вращающейся вместе с телом системы отсчета  $Ox_1x_2x_3$ . Исследованию точек либрации, расположенных внутри полости, посвящена работа [24], в которой были обнаружены семейства как изолированных, так и неизоллированных относительных равновесий точек, исследованы устойчивость и бифуркации таких равновесий, а также построены области возможного движения.

**4. Поле притяжения.** Как известно (см., например, [25], задача О-130, а также [26], задача 1.215) напряженность поля притяжения со стороны тела  $A$  внутри полости имеет вид

$$\mathbf{g}_a = -\frac{4}{3}\pi G\rho d\mathbf{e}_1 = -\frac{4}{3}\pi G\rho d(0, 0, 1)^T,$$

где  $G$  – постоянная тяготения,  $\rho$  – плотность тела  $\mathcal{A}$ . Иными словами, внутри полости поле сил притяжения постоянно и однородно. Для сравнения, вне тела напряженность поля притяжения имеет вид

$$\mathbf{g}_a = -\frac{4}{3}\pi G\rho \left( \frac{r_B^3}{(\mathbf{BP}, \mathbf{BP})^{3/2}} \mathbf{BP} - \frac{r_C^3}{(\mathbf{CP}, \mathbf{CP})^{3/2}} \mathbf{CP} \right) \quad (4.1)$$

Сила притяжения потенциальна, и ее потенциал записывается как

$$U = \frac{4}{3}\pi G\rho \begin{cases} d \cdot x_1, & P \in \mathcal{C} \\ -\frac{r_B^3}{(\mathbf{BP}, \mathbf{BP})^{1/2}} + \frac{r_C^3}{(\mathbf{CP}, \mathbf{CP})^{1/2}}, & P \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}, \end{cases} \quad (4.2)$$

причем на внешней поверхности  $\partial\mathcal{A}_e$  тела  $\mathcal{A}$  первое слагаемое в (4.2) постоянно.

*Замечание.* Главные центральные моменты инерции тела  $\mathcal{A}$

$$I_1^A(O) = \frac{8}{15}\rho\pi(r_B^5 - r_C^5), \quad I_2^A(O) = I_3^A(O) = \frac{8}{15}\rho\pi(r_B^5 - r_C^5) - \frac{4}{3}\rho\pi(r_B^3 - r_C^3)bc, \quad (4.3)$$

определяются с помощью теоремы Гюйгенса–Штейнера (см., например, [27]). Из соотношений (4.3) видно, что осевой момент инерции  $I_1^A(O)$  является наибольшим:

$$I_1^A(O) \geq I_2^A(O) = I_3^A(O)$$

**5. Относительные равновесия.** Пусть  $\mu = \operatorname{tg}\alpha \geq 0$  – коэффициент трения,  $\alpha$  – угол трения. Для определения относительных равновесий точки  $P$ , находящейся в соприкосновении с поверхностью полости, выпишем условия их существования в виде

$$\mathbf{g}_N + \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{g}_T + \mathbf{T} = 0, \quad |\mathbf{T}| \leq \mu|\mathbf{N}|,$$

где  $\mathbf{g}_N$  и  $\mathbf{g}_T$  – нормальная и касательная составляющие вектора напряженности  $\mathbf{g}$ . Нетрудно видеть, что задаваемое неравенством условие существования относительных равновесий представимо в виде

$$|\mathbf{g}_T| \leq \mu|\mathbf{g}_N| \Leftrightarrow (\mathbf{g}_T, \mathbf{g}_T) \leq \mu^2 (\mathbf{g}_N, \mathbf{g}_N) \Leftrightarrow (\mathbf{g}, \mathbf{g}) \leq (1 + \mu^2) (\mathbf{g}_N, \mathbf{g}_N) \quad (5.1)$$

Для точек поверхности полости  $\partial\mathcal{A}_i$ , задаваемой уравнением

$$f = \frac{1}{2}((x_1 - c)^2 + x_2^2 + x_3^2 - r_C^2) = 0, \quad (5.2)$$

единичный вектор внутренней нормали имеет вид

$$\mathbf{e}_N = -\frac{1}{r_C}(x_1 - c, x_2, x_3)^T$$

Введем безразмерную угловую скорость  $\Omega \geq 0$ :

$$\Omega^2 = \frac{3}{4}\frac{\omega^2}{\pi G\rho},$$

при этом напряженность  $\mathbf{g}$  на относительных равновесиях записывается как

$$\mathbf{g} = \frac{4}{3}\pi G\rho (\Omega^2 x_1 - d, \Omega^2 x_2, 0)^T$$

$$(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = \left(\frac{4}{3}\pi G\rho\right)^2 \left( (\Omega^2 x_1 - d)^2 + \Omega^4 x_2^2 \right)$$

$$(\mathbf{g}, \mathbf{e}_N) = -\frac{4\pi G\rho}{3r_c} \left( (\Omega^2 x_1 - d)(x_1 - c) + \Omega^2 x_2^2 \right)$$

$$(\mathbf{g}_N, \mathbf{g}_N) = (\mathbf{g}, \mathbf{e}_N)^2 = \left( \frac{4\pi G\rho}{3r_c} \right)^2 \left( (\Omega^2 x_1 - d)(x_1 - c) + \Omega^2 x_2^2 \right)^2$$

Эти соотношения в дальнейшем используются для исследования свойств нормальной и касательной составляющих реакции связи, а также условий равновесия (5.1).

5.1. *Свойства нормальной составляющей реакции.* На равновесиях условие напряженности связи принимает вид  $(\mathbf{g}, \mathbf{e}_N) < 0$  или

$$\begin{aligned} & (\Omega^2 x_1 - d)(x_1 - c) + \Omega^2 x_2^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} c - x_1 > 0, & \Omega = 0 \\ \left( x_1 - \frac{c(\Omega^2 + \Omega_0^2)}{2\Omega^2} \right)^2 + x_2^2 - \frac{c^2(\Omega^2 - \Omega_0^2)}{4\Omega^4} > 0, & \Omega > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь и далее

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{d}{c}}, \quad \Omega_{\pm} = \sqrt{\frac{d}{c \pm r_c}}, \quad \Omega_{\pm s} = \sqrt{\frac{d}{c \pm r_c \sin \alpha}}, \quad \Omega_{\pm c} = \sqrt{\frac{d}{c \pm r_c \cos \alpha}},$$

и имеет место неравенство

$$0 \leq \Omega_+ \leq \Omega_{+c} \leq \Omega_{+s} \leq \Omega_0 \leq \Omega_{-s} \leq \Omega_{-c} \leq \Omega_-, \quad \alpha \in [0; \pi/4] \quad (5.4)$$

$$0 \leq \Omega_+ \leq \Omega_{+s} \leq \Omega_{+c} \leq \Omega_0 \leq \Omega_{-c} \leq \Omega_{-s} \leq \Omega_-, \quad \alpha \in (\pi/4; \pi/2] \quad (5.5)$$

В дальнейшем будем подробно рассматривать случай  $\alpha \in [0; \pi/4]$ , как физически более осмысленный. Для него  $\mu \in [0, 1]$ .

При  $\Omega = 0$  соотношение (5.3) задает полупространство, ограниченное плоскостью, ортогональной оси симметрии тела  $\mathcal{A}$  и пересекающей полость  $\mathcal{C}$  по окружности большого круга. Для всех точек полусферы, содержащей полюс  $W$ , нормальная составляющая реакции направлена внутрь полости, т.е. частица  $P$  находится на связи.

При  $0 < \Omega < \Omega_0$  соотношение (5.3) задает внешность прямого кругового цилиндра  $\mathcal{L}$  с осью, параллельной оси вращения. Направляющая цилиндра – расположенная в плоскости  $Ox_1x_2$  окружность с центром в точке  $\left( c \frac{\Omega^2 + \Omega_0^2}{2\Omega^2}, 0, 0 \right)$  и радиусом

$$r(\Omega) = \frac{c \left| \Omega^2 - \Omega_0^2 \right|}{2\Omega^2}. \text{ Цилиндр } \mathcal{L} \text{ содержит прямую, параллельную оси вращения и проходящую через точку } C \text{ – центр полости } \mathcal{C}. \text{ Кроме того, этот цилиндр содержит}$$

прямую, параллельную оси вращения и проходящую через точку  $\left( c \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}, 0, 0 \right)$ . При  $\Omega = \Omega_+$  точка  $E$  и проходящая через нее образующая также будут принадлежать цилиндру  $\mathcal{L}$ .

При  $\Omega \rightarrow \Omega_0$  цилиндр  $\mathcal{L}$  стягивается в прямую, проходящую через точку  $(c, 0, 0)$  и параллельную оси вращения, и исчезает при  $\Omega = \Omega_0$ : нормальная составляющая реакции при этом всюду направлена внутрь полости.

С дальнейшим увеличением угловой скорости цилиндр вновь появляется. При этом точка пересечения оси цилиндра с осью  $Ox_1$  пробегает отрезок от  $C$  до  $O$ . С увеличением угловой скорости радиус цилиндра увеличивается. При  $\Omega = \Omega_-$  точка  $W$  оказы-

вається на одной из образующих цилиндра. Наконец, при  $\Omega \rightarrow \infty$  цилиндр в пределе касается оси  $Ox_3$ . При этом его радиус оказывается равным  $c/2$ , а ось проходит через точку  $(c/2, 0, 0)$ . Заметим, что если  $d = 0$ , то и  $c = 0$ , и соотношение (5.3) выполнено тождественно.

5.2. *Условия существования относительных равновесий.* Как было показано выше, относительные равновесия существуют при выполнении неравенства (5.2), которое согласно выполненным вычислениям принимает вид

$$F_i \geq 0, \quad F_i = \cos^{-2} \alpha \left( (\Omega^2 x_1 - d)(x_1 - c) + \Omega^2 x_2^2 \right)^2 - (\Omega^2 x_1 - d)^2 r_C^2 - \Omega^4 x_2^2 r_C^2 \quad (5.6)$$

Область  $\mathcal{F}_i$ , задаваемая неравенством (5.6), ограничена прямым цилиндром  $\partial\mathcal{F}_i$ , направляющая которого задается уравнением  $F_i = 0$ , а образующие параллельны оси  $Ox_3$ . Цилиндрическая поверхность  $\partial\mathcal{F}_i$ , в частности, содержит прямые, параллельные оси вращения и проходящие через точки  $(c - r_C \cos \alpha, 0, 0)$  и  $\left( c \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}, 0, 0 \right)$ .

Опишем топологические перестроения областей, заполненных неизолрованными равновесиями, на каждом из интервалов, задаваемых неравенствами (5.4) или (5.5), зависящих от угла трения  $\alpha$ . Обозначим  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  и  $\mathcal{R}_E(\Omega)$  области, в которых удовлетворяется неравенство (5.6) и которые примыкают, соответственно, к точкам  $W$  и  $E$ . Границы этих областей – кривые  $\partial W$  и  $\partial E$ . Введем величины

$$p_{\pm} = \frac{\Omega^2(c^2 - r_C^2 \sin^2 \alpha) - d \cdot c \pm r_C \cos \alpha \sqrt{(\Omega^2(c + r_C \sin \alpha) - d)(\Omega^2(c - r_C \sin \alpha) - d)}}{c(\Omega^2 - \Omega_0^2)},$$

существующие при  $\Omega \in [0, \Omega_{+s}] \cup [\Omega_{-s}, \infty)$  и  $c > r_C \sin \alpha$  или при  $\Omega \in [0, \Omega_{+s}]$  и  $c < r_C \sin \alpha$ .

Граница  $\partial W$  содержит точки  $K_{\pm}(\Omega)$ , такие, что

$$K_{\pm}(\Omega) = \begin{cases} \left( p_+, \pm \sqrt{r_C^2 - (p_+ - c)^2}, 0 \right)^T, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_{+s} \\ \left( p_-, \pm \sqrt{r_C^2 - (p_- - c)^2}, 0 \right)^T, & \Omega \geq \Omega_{-s}, \end{cases}$$

а граница  $\partial E$  – точки

$$M_{\pm}(\Omega) = \begin{cases} \left( p_-, \pm \sqrt{r_C^2 - (p_- - c)^2}, 0 \right)^T, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_{+s} \\ \left( p_+, \pm \sqrt{r_C^2 - (p_+ - c)^2}, 0 \right)^T, & \Omega \geq \Omega_{-s}, \end{cases}$$

Положение точек  $K_{\pm}(\Omega)$  и  $M_{\pm}(\Omega)$  существенно зависит от величины угловой скорости  $\Omega$ . Кроме того, границы  $\partial W$  и  $\partial E$  содержат пары точек

$$L_{\pm} = (c - r_C \cos \alpha, 0, \pm r_C \sin \alpha)^T, \quad N_{\pm} = (c + r_C \cos \alpha, 0, \pm r_C \sin \alpha)^T$$

соответственно. Положение этих точек фиксировано и не меняется с изменением угловой скорости  $\Omega$ .

Прежде всего, рассмотрим случай  $\Omega = 0$ , т.е. тело не вращается. В этом случае величина  $F_i$  принимает вид

$$F_i|_{\Omega=0} = d^2 \cos^{-2} \alpha (x_1 - (c - r_C \cos \alpha))(x_1 - (c + r_C \cos \alpha))$$

Тогда неравенство (5.6) определяет пару параллельных плоскостей, ортогональных оси  $Ox_1$  и отстоящих от центра полости  $\mathcal{C}$  на расстоянии  $r_C \cos \alpha$ . Эти плоскости высекают из границы  $\partial\mathcal{C}$  полости  $\mathcal{C}$  два симметричных сферических сегмента высотой  $r_C(1 - \cos \alpha)$ , содержащих точки  $W$  и  $E$  соответственно. При  $\mu = 0$  пересечение этих плоскостей и полости  $\mathcal{C}$  состоит ровно из точек  $W$  и  $E$ .

В точках области, примыкающей к полюсу  $E$ , нормальная реакция направлена во внешность полости, т.е. частица  $P$  не находится на связи. Такие области в данной постановке не имеют физического смысла и далее рассматриваются.

Пусть теперь  $\Omega > 0$ . При  $0 \leq \Omega < \Omega_+$  область  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  заполнена неизолрованными относительными равновесиями, в то время как при тех же значениях  $\Omega$  в точках области  $\mathcal{R}_E(\Omega)$  связь ослаблена, и относительных равновесий нет.

При  $\Omega = \Omega_+$  поверхность  $\partial\mathcal{F}_i$  и полость  $\mathcal{C}$  имеют, в частности, общую точку  $E$ , но нормальная реакция в этой точке равна нулю.

При  $\Omega_+ < \Omega < \Omega_{+c}$  область  $\mathcal{R}_E(\Omega)$  представляется в виде трех связанных компонент, пересекающихся по граничным точкам

$$\left( c \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}, 0, \pm \sqrt{\frac{\Omega^4 r_C^2 - (\Omega^2 - \Omega_0^2)^2 c^2}{\Omega^4}} \right)^T, \quad (5.7)$$

причем, если  $\Omega = \Omega_+$ , то эти точки порождаются из точки  $E$ ; если  $\Omega = \Omega_{+c}$ , то это точки  $N_{\pm}$ .

Одна компонента, содержащая точку  $E$ , пересекается с двумя оставшимися компонентами, располагающимися в разных полупространствах относительно плоскости  $x_3 = 0$ . При этом, лишь в точках компоненты связности, содержащей точку  $E$ , нормальная реакция направлена внутрь полости.

При  $\Omega_{+c} < \Omega < \Omega_{+s}$  во всех точках область  $\mathcal{R}_E(\Omega)$  нормальная реакция теперь направлена внутрь полости, и заполняющие это множество относительные равновесия обретают физический смысл.

При  $\Omega = \Omega_{+s}$  области  $\mathcal{R}_W(\Omega_{+s})$  и  $\mathcal{R}_E(\Omega_{+s})$  смыкаются в попарно совпадающих точках  $K_{\pm}(\Omega_{+s}) = M_{\pm}(\Omega_{+s})$ , причем

$$K_{\pm}(\Omega_{+s}) = M_{\pm}(\Omega_{+s}) = (c + r_C \sin \alpha, \pm \cos \alpha, 0)^T$$

и образуют кольцо  $\mathcal{R}(\Omega)$ , существующее при  $\Omega_{+s} < \Omega < \Omega_{-s}$ .

*Замечание.* При  $\Omega = \Omega_0$  бифуркация не происходит. Однако функция  $F_i$ , принимающая вид

$$F_i|_{\Omega=\Omega_0} = \Omega_0^2 \cos^{-2} \alpha \left( (x_1 - c)^2 + x_2^2 \right) \left( (x_1 - c)^2 + x_2^2 - r_C^2 \cos^2 \alpha \right),$$

задает круговой цилиндр радиуса  $r_C \cos \alpha$  с осью, параллельной оси вращения и проходящей через центр полости  $\mathcal{C}$ . Границы кольца  $\mathcal{R}(\Omega_0)$  в этом случае — две симметричные окружности. Они принадлежат пересечениям плоскостей  $x_3 = \pm r_C \sin \alpha$  и сферы (5.2). Отметим, что угол, который составляет радиус-вектор любой точки этих окружностей с плоскостью  $x_3 = 0$ , и есть угол трения  $\alpha$ .

Дальнейшие случаи следует рассматривать в зависимости от того, где находится центр масс  $O$ . Так как предполагается, что  $\alpha \in [0; \pi/4)$ , то возможны следующие случаи:

- I. строго вне полости, т.е.  $c > r_C$ ,
- II. на границе полости, т.е.  $c = r_C$ ,



- III.а. внутри полости, и  $r_C \cos \alpha < c < r_C$ ,
- III.б. внутри полости, и  $r_C \sin \alpha < c \leq r_C \cos \alpha$ ,
- III.в. внутри полости, и  $0 < c \leq r_C \sin \alpha$ .

Рассмотрим перечисленные случаи более подробно.

I. Пусть  $c > r_C$ . При  $\Omega_0 < \Omega < \Omega_{-s}$  кольцо  $\mathcal{R}(\Omega)$  продолжает существовать, но деформируется, и при  $\Omega > \Omega_{-s}$  вновь размыкается в точках

$$K_{\pm}(\Omega_{-s}) = M_{\pm}(\Omega_{-s}) = (c - r_C \sin \alpha, \pm r_C \cos \alpha, 0)^T$$

на области  $R_W(\Omega)$  и  $R_E(\Omega)$ , существующие при  $\Omega_{-s} < \Omega < \Omega_{-c}$ .

При  $\Omega_{-c} < \Omega < \Omega_{-}$  область  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  представляется в виде трех связанных компонент, пересекающихся по граничным точкам (5.7), причем, если  $\Omega = \Omega_{-c}$ , то имеют место две точки  $L_{\pm}$ ; если  $\Omega = \Omega_{-}$ , то точки сливаются в точке  $W$ . Одна компонента, содержащая точку  $W$ , пересекается с двумя оставшимися компонентами, располагающимися симметрично в разных полупространствах относительно плоскости  $x_3 = 0$ . При этом, лишь в точках компоненты связности, содержащая точку  $W$ , нормальная реакция направлена внутрь полости.

При  $\Omega = \Omega_{-}$  поверхность  $\partial\mathcal{F}_i$  и полость  $\mathcal{C}$  пересекаются, в частности, в точке  $W$ , и нормальная реакция в этой точке равна нулю.

При  $\Omega > \Omega_{-}$  в точках области  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  нормальная реакция направлена во внешность полости, и такие решения более интереса не представляют, в то время как область  $\mathcal{R}_E(\Omega)$  остается существовать. При  $\Omega \rightarrow \infty$  в пределе имеют место соотношения

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} p_{\pm} = \left( \sqrt{c^2 - r_C^2 \sin^2 \alpha} \pm r_C \cos \alpha \right) \sqrt{1 - \frac{r_C^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \quad (5.8)$$

В точках области  $\mathcal{R}_W^{\infty} = \mathcal{R}_W(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty}$  нормальная реакция направлена во внешность полости. При этом с областью  $\mathcal{R}_E^{\infty} = \mathcal{R}_E(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty}$  такого не происходит: в точках из  $\mathcal{R}_E^{\infty}$  нормальная составляющая реакции направлена внутрь полости.

Описанные перестройки областей неизолированных равновесий проиллюстрированы на рис. 2. Для удобства демонстрации введены сферические координаты  $x = r_C \cos \theta + c$ ,  $y = r_C \sin \theta \cos \varphi$ ,  $z = r_C \sin \theta \sin \varphi$  и показана серия разверток на плоскости  $(\theta, \varphi)$  при возрастании угловой скорости вращения тела  $\Omega$ , при этом выбраны параметры  $\mu = 0.5$ ,  $r_C = 0.25$ ,  $d = 0.5$ ,  $r_B = 1$ . Светло-серым цветом выделены области, на которых нормальная реакция направлена во внешность полости, темно-серым – внутрь полости. Пунктирной линией показана граница смены знака нормальной реакции.

II. Пусть  $c = r_C$ . При  $\Omega_0 < \Omega < \Omega_{-s}$  кольцо  $\mathcal{R}(\Omega)$  продолжает существовать, и при  $\Omega > \Omega_{-s}$  вновь размыкается в точках  $K_{\pm}(\Omega_{-s}) = M_{\pm}(\Omega_{-s})$  на области  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  и  $\mathcal{R}_E(\Omega)$ , существующие при  $\Omega_{-s} < \Omega < \Omega_{-c}$ . При  $\Omega_{-c} < \Omega < \infty$  область  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  представляется в виде трех связанных компонент, пересекающихся по граничным точкам, причем одна компонента, содержащая точку  $W$ , пересекается с двумя оставшимися компонентами, располагающимися в разных полупространствах относительно плоскости  $x_3 = 0$ . При этом лишь в точках компоненты связности, содержащей точку  $W$ , нормальная реакция направлена внутрь полости. Значение угловой скорости  $\Omega = \Omega_{-}$  более не определено. При  $\Omega \rightarrow \infty$  имеем  $p_{-} \rightarrow 0$ , и область  $\mathcal{R}_W^{\infty}$  состоит только из точки  $W$ , совпадающей с центром масс  $O$ . Нормальная составляющая реакции в этой точке об-

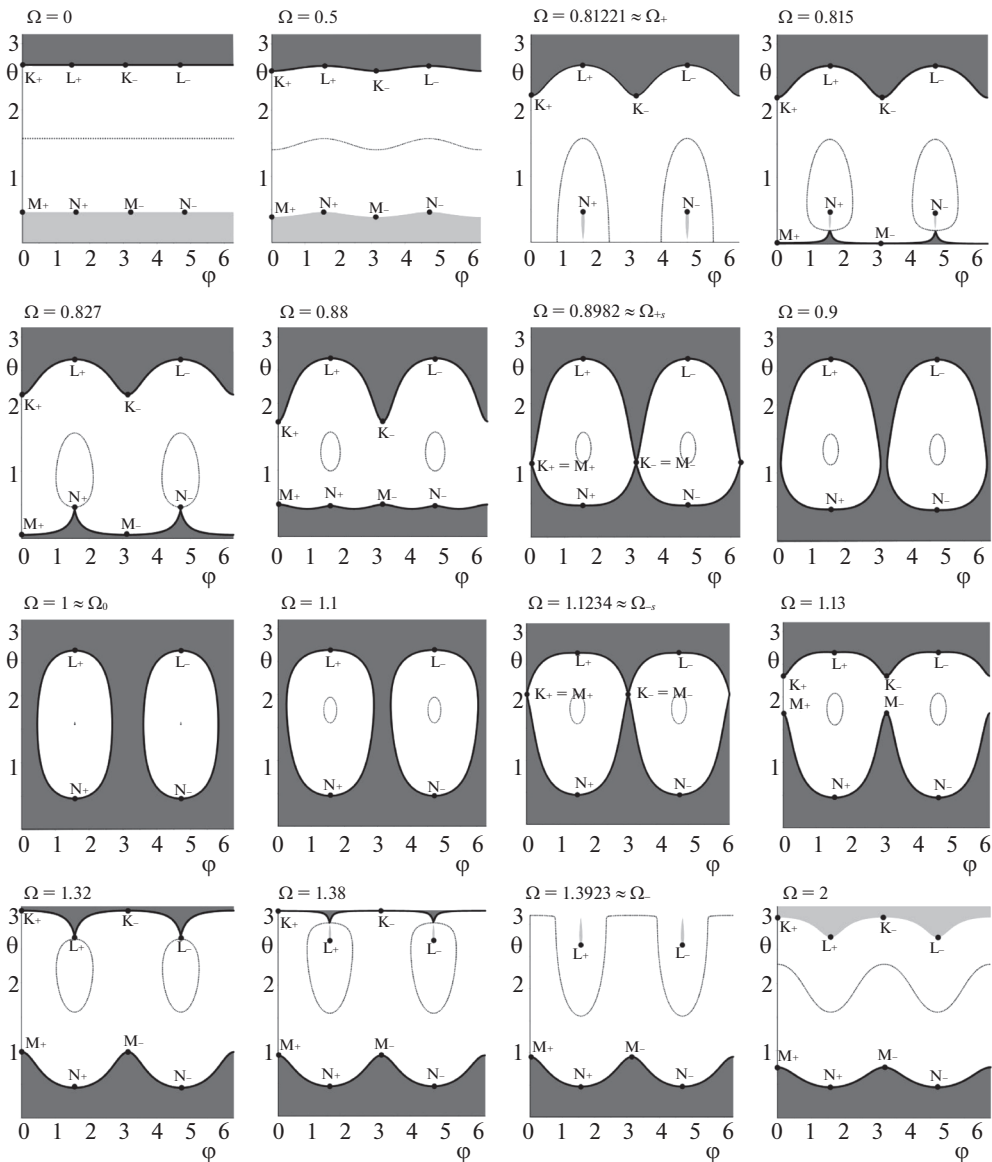


Рис. 2.  $\mu = 0.5$ ,  $r_C = 0.25r_B$ ,  $d = 0.5r_B$ .

ращается в нуль. При этом  $p_+ \rightarrow 2r_C \cos^2 \alpha$  при  $\Omega \rightarrow \infty$  и, как и прежде, в точках из области  $\mathcal{R}_E^\infty$  нормальная составляющая реакции направлена внутрь полости.

III.a. Пусть  $r_C \cos \alpha < c < r_C$ . В этом случае наблюдается картина, аналогичная картине из пункта II. При  $\Omega_0 < \Omega < \Omega_+$  кольцо  $\mathcal{R}(\Omega)$  продолжает существовать, и при  $\Omega > \Omega_+$  вновь размыкается в точках  $K_\pm(\Omega_+) = M_\pm(\Omega_+)$  на области  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  и  $\mathcal{R}_E(\Omega)$ , существующие при  $\Omega_+ < \Omega < \Omega_c$ . При  $\Omega_c < \Omega \leq \infty$  область  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  представляется в

виде трех связных компонент. При этом компонента связности, содержащая точку  $W$ , не вырождается, и в ее точках нормальная реакция направлена внутрь полости.

III.б. Пусть  $r_c \sin \alpha < c \leq r_c \cos \alpha$ . При  $\Omega_0 < \Omega < \Omega_{-s}$  кольцо  $\mathcal{R}(\Omega)$  продолжает существовать, и при  $\Omega > \Omega_{-s}$  вновь размыкается в точках  $K_{\pm}(\Omega_{-s}) = M_{\pm}(\Omega_{-s})$  на области  $\mathcal{R}_W(\Omega)$  и  $\mathcal{R}_E(\Omega)$ , существующие при  $\Omega_0 < \Omega < \Omega_{-s}$ . Значение угловой скорости  $\Omega = \Omega_{-c}$  более не определено. При  $\Omega_{-s} < \Omega \leq \infty$  существует односвязная область  $\mathcal{R}_W(\Omega)$ , во всех точках которой нормальная составляющая реакции направлена внутрь полости.

III.в. Пусть  $0 \leq c \leq r_c \sin \alpha$ . Значение угловой скорости  $\Omega = \Omega_-$  более не определено. Кольцо  $\mathcal{R}(\Omega)$  продолжает существовать при  $\Omega_0 < \Omega < \infty$ . При  $\Omega \rightarrow \infty$  точки  $K_{\pm} = K_{\pm}(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty}$  и  $M_{\pm} = M_{\pm}(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty}$  не существуют, и имеет место кольцо  $\mathcal{R}^{\infty}$ , во всех точках которого нормальная составляющая реакции направлена внутрь полости, т.е. частица  $P$  находится на связи.

Отметим, что в случае  $\alpha \in (\pi/4; \pi/2)$ , по сравнению с предыдущим, критические значения угловой скорости  $\Omega_{\pm s}$  и  $\Omega_{\pm c}$  меняются местами, ср. неравенства (5.4) и (5.5). При  $\alpha = \pi/4$  имеем  $\Omega_{\pm c} = \Omega_{\pm s}$ . Вместе с этим меняется местами порядок перестроения соответствующих областей, заполненных неизолированными равновесиями.

*Замечание.* При  $d = 0$  величина  $F_i$  из соотношения (5.6) принимает вид

$$F_i|_{d=0} = \Omega^4 (x_1^2 + x_2^2) \cos^{-2} \alpha (x_1^2 + x_2^2 - r_c^2 \cos^2 \alpha)$$

и определяет прямую, параллельную оси вращения и проходящую через точку  $O$ , и круговой цилиндр с осью, совпадающей с осью вращения, радиуса  $r_c \cos \alpha$ . Этот цилиндр вырезает из сферы (5.2) кольцо  $\mathcal{R}(\Omega_0)$ , рассмотренное выше. При этом во всех точках кольца выполнено соотношение  $(\mathbf{g}, \mathbf{e}_N) < 0$ .

**6. Об устойчивости относительных равновесий.** Для относительных равновесий, расположенных внутри найденных областей, устойчивость по Ляпунову следует из результатов Г.К. Пожарицкого [28]. Как и в [22, 29], можно ставить вопрос об устойчивости связных компонент областей, заполненных равновесиями.

Будем считать связную компоненту *устойчивой*, если для каждой точки ее границы проекция суммы активных сил и центробежной силы на плоскость, касательную к поверхности в этой точке, направлена внутрь рассматриваемой связной компоненты. Это свойство можно трактовать следующим образом. Пусть в начальный момент точка  $P$  располагается в некоторой точке границы области, заполненной равновесиями. “Освободив” систему от трения, т.е. предположив, что коэффициент трения обратился в нуль, “отпустим” точку  $P$  без начальной скорости. Если для всех точек границы связной компоненты точка  $P$  начнет движение внутрь этой компоненты или вдоль ее границы, то скажем, что эта связная компонента устойчива. Если найдется хотя бы одна точка границы рассматриваемой компоненты, для которой точка  $P$  начнет движение вовне этой компоненты, то речь идет о *неустойчивости* этой связной компоненты.

Введенное таким образом определение устойчивости проверяется путем анализа знака скалярного произведения касательной проекции активных сил при нулевой начальной скорости на внешнюю нормаль к границе области, заполненной равновесиями, в точках границы. В рассмотренном на рис. 2 примере оказывается, что на всех компонентах областей равновесия, на которых нормальная реакция направлена внутрь сферы, упомянутая проекция суммы сил направлена внутрь компоненты. Границы этих компонент выделены жирной сплошной линией.

**Выводы.** Как показало исследование, области, заполненные неизолрованными относительно равновесиями, в зависимости от значений параметров могут заполнять на поверхности полости подобласти различных топологических типов. Иными словами, области на поверхности полости, пригодные “для эксплуатации”, также существенно зависят от параметров.

Аналитическое исследование аналогичных перестроек множеств неизолрованных относительных равновесий возможно и в случае, когда тело — однородный эллипсоид с шаровой полостью. Эта задача представляется более трудной из-за большого числа параметров, определяющих как размеры и положение полости, так и размеры эллипсоидального тела.

Заметим, что выполненное исследование носит академический характер. Для реальных небесных тел таких, как кометы, потоки исходящих газов говорят в пользу наличия полостей, из которых они исходят. Существующие методы в принципе позволяют вычислять гравитационные поля внутри небесных тел и численно исследовать особенности динамики внутри полостей при их наличии. Однако вопрос об обнаружении полостей и об описании их геометрии для конкретных небесных тел остается открытым.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00297).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robe H.A.G.* A new kind of 3-body problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 1977. V. 16. № 3. P. 343–351.  
<https://doi.org/10.1007/BF01232659>
2. *Shrivastava A.K., Garain D.* Effect of perturbation on the location of libration point in the Robe restricted problem of three bodies // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 1991. V. 51. P. 67–73.  
<https://doi.org/10.1007/BF02426670>
3. *Plastino A.R., Plastino A.* Robe’s restricted three-body problem revisited // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 1995. V. 61. P. 197–206.  
<https://doi.org/10.1007/BF00048515>
4. *Hallan P.P., Rana N.* The existence and stability of equilibrium points in the Robe’s restricted three-body problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2001. V. 79. P. 145–155.  
<https://doi.org/10.1023/A:1011173320720>
5. *Гасанов С.А., Лукьянов Л.Г.* О точках либрации в задаче о движении звезды внутри эллиптической галактики // *Астрон. ж.* 2002. Т. 79. № 10. С. 944–951.
6. *Дубошин Г.Н.* Специальный случай разложения общей силовой функции двух твердых тел // *Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга.* 1980. № 218. С. 3–10.
7. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2003. V. 87. P. 263–290.  
<https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000005720.09027.ee>
8. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and Control of Surface Exploration. Robots on Asteroids // in: *Optimiz.&Coop. Control Strat. LNCIS 381* / Ed. by *Hirsch M.J. et al.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. P. 135–150.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-540-88063-9\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88063-9_8)
9. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // *Planet.&Space Sci.* 2016. V. 127. P. 33–43.  
<https://doi.org/10.1016/j.pss.2016.04.007>
10. *Tardivel S., Scheeres D.J., Michel P. et al.* Contact motion on surface of asteroid // *J. Spacecraft&Rockets.* 2015. V. 51. № 6. P. 1857–1871.  
<https://doi.org/10.2514/1.A32939>

11. Zhang Y., Zeng X., Circi C. et al. The motion of surface particles for the asteroid 101955 Bennu // *Acta Astron.* 2019. V. 163. P. 3–10.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.044>
12. van de Wouw N., Leine R.I. Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control.* 2006. P. 4271–4276.  
<https://doi.org/10.1109/CDC.2006.376952>
13. Leine R.I., van de Wouw N. Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // *Nonlin. Dyn.* 2008. V. 51. № 4. P. 551–583.  
<https://doi.org/10.1007/s11071-007-9244-z>
14. Leine R.I., van de Wouw N. Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // *Lecture Notes in Appl. & Comput. Mech.* 2008. V. 36. 236 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-76975-0>
15. Leine R.I., van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A. Solids.* 2006. V. 25. P. 595–616.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
16. Leine R.I. Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D.* 2006. V. 223. P. 121–137.  
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
17. Ivanov A. Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354709060045>
18. Иванов А. П. Основы теории систем с трением. М.; Ижевск: НИЦ Регул. и хаотич. дин., 2011. 304 с.
19. Burov A.A. On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mech.* 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
20. Burov A.A., Shalimova E.S. On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 3. P. 225–233.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715030028>
21. Буров А. А., Шалимова Е. С. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболической чаше с сухим трением // *Изв. РАН. МТТ.* 2016. № 4. С. 30–42.
22. Шалимова Е. С. О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // *Нелин. дин.* 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.  
<https://doi.org/10.20537/nd1603006>
23. Березкин Е. Н. Курс теоретической механики. М.: Изд. МГУ, 1974. 647 с.
24. Burov A.A., Nikonov V.I. Libration points inside a spherical cavity of a uniformly rotating gravitating ball // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2021. V. 17. № 4. P. 413–427.  
<https://doi.org/10.20537/nd210404>
25. Генденштейн Л. Э., Кирик Л. А., Гельфгат И. М. Решение ключевых задач по физике для основной школы. 7–9 классы. М.: Илекса, 2016. 208 с.
26. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 1979. 369 с.
27. Четаев Н. Г. Теоретическая механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 368 с.
28. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением // *ПММ.* 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 5–14.
29. Буров А. А., Никонов В. И., Шалимова Е. С. Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 4. С. 528–543.

## On Relative Equilibria on a Surface of a Spherical Cavity Inside of a Uniformly Rotating Gravitating Ball

A. A. Burov<sup>a,#</sup>, V. I. Nikonov<sup>a,##</sup>, and E. S. Shalimova<sup>b,###</sup>

<sup>a</sup> *FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: jtm@narod.ru*

<sup>##</sup> *e-mail: nikon\_v@list.ru*

<sup>###</sup> *e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru*

Relative equilibria of a point particle in the neighborhood of a homogeneous gravitating ball with a spherical cavity are considered. It is assumed that the body rotates uniformly around the axis perpendicular to its symmetry axis and passing through its center. It is supposed that a dry friction force appears between the point and the cavity surface. The dependence of existence, bifurcations, and stability of relative equilibria of the point particle on the cavity surface on the parameters of the problem is studied.

*Keywords:* celestial bodies with cavities, relative equilibria, motion of a point particle in a noncentral gravity field, generalization of a gravitating dumbbell, dry friction

### REFERENCES

1. *Robe H.A.G.* A new kind of 3-body problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1977, vol. 16, no. 3, pp. 343–351. <https://doi.org/10.1007/BF01232659>
2. *Shrivastava A.K., Garain D.* Effect of perturbation on the location of libration point in the Robe restricted problem of three bodies // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1991, vol. 51, pp. 67–73. <https://doi.org/10.1007/BF02426670>
3. *Plastino A.R., Plastino A.* Robe's restricted three-body problem revisited // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1995, vol. 61, pp. 197–206. <https://doi.org/10.1007/BF00048515>
4. *Hallan P.P., Rana N.* The existence and stability of equilibrium points in the Robe's restricted three-body problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2001, vol. 79, pp. 145–155. <https://doi.org/10.1023/A:1011173320720>
5. *Gasanov S.A., Luk'yanov L.G.* The libration points for the motion of a star inside an elliptical galaxy // *Astron. Rep.*, 2002, vol. 46, no. 10, pp. 851–857. <https://doi.org/10.1134/1.1515096>
6. *Duboshin G.N.* A special case of series expansion of the general force function of two rigid bodies // *Gos. Astron. Inst. Shternberga*, no. 218, pp. 3–10. (in Russian)
7. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2003, vol. 87, pp. 263–290. <https://doi.org/10.1023/B:CELE.0000005720.09027.ee>
8. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and Control of Surface Exploration. Robots on Asteroids // in: *Optimiz. & Coop. Control Strat. LNCIS 381* / Ed. by *Hirsch M.J. et al.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. pp. 135–150. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-88063-9\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88063-9_8)
9. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // *Planet. & Space Sci.*, 2016, vol. 127, pp. 33–43. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2016.04.007>
10. *Tardivel S., Scheeres D.J., Michel P. et al.* Contact motion on surface of asteroid // *J. Spacecraft & Rockets*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 1857–1871. <https://doi.org/10.2514/1.A32939>
11. *Zhang Y., Zeng X., Circi C. et al.* The motion of surface particles for the asteroid 101955 Bennu // *Acta Astron.*, 2019, vol. 163, pp. 3–10. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.044>
12. *van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control*. 2006, pp. 4271–4276. <https://doi.org/10.1109/CDC.2006.376952>
13. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // *Nonlin. Dyn.*, 2008, vol. 51, no. 4, pp. 551–583. <https://doi.org/10.1007/s11071-007-9244-z>

14. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // *Lecture Notes in Appl.&Comput. Mech.*, 2008, vol. 36, 236 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-76975-0>
15. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A. Solids*, 2006, vol. 25, pp. 595–616. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
16. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*, 2006, vol. 223, pp. 121–137. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
17. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2009, vol. 14, no. 6, pp. 656–672. <https://doi.org/10.1134/S1560354709060045>
18. *Ivanov A.P.* Fundamentals of the Theory of Systems with Friction. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., Inst. Comput. Sci., 2011. (in Russian)
19. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mech.*, 2010, vol. 212, no. 3–4, pp. 349–354. <https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
20. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 225–233. <https://doi.org/10.1134/S1560354715030028>
21. *Burov A.A., Shalimova E.S.* Bifurcations of relative equilibria of a heavy bead on a rotating parabolic bowl with dry friction // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 4, pp. 395–405. <https://doi.org/10.3103/S0025654416040038>
22. *Shalimova E.S.* On the motion of a material point on a rotating sphere with dry friction (the case of the vertical axis) // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 369–383. <https://doi.org/10.20537/nd1603006>
23. *Berezkin E.N.* Course in Theoretical Mechanics. Moscow: Moscow State Univ., 1974. 647 p. (in Russian)
24. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Libration points inside a spherical cavity of a uniformly rotating gravitating ball // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2021, vol. 17, no. 4, pp. 413–427. <https://doi.org/10.20537/nd210404>
25. *Gendenstein L.E., Kirik L.A., Gelfgat I.M.* Solving Key Problems in Physics for the Basic School. 7–9 Classes. Moscow: Ilexa, 2016. 208 p. (in Russian)
26. *Irodov I.E.* Problems in General Physics. Moscow: Nauka, 1979. 369 p. (in Russian)
27. *Chetaev N.G.* The Stability of Motion, N.Y.: Pergamon, 1961.
28. *Pozharitskii G.K.* On the stability of equilibrium states for systems with dry friction // *JAMM*, 1962, vol. 26, iss. 1. pp. 3–16. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(62\)90097-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(62)90097-7)
29. *Burov A.A., Nikonov V.I., Shalimova E.S.* On the motion of a point particle on a homogeneous gravitating ball with a spherical cavity in the presence of dry friction // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1587–1598. <https://doi.org/10.3103/S0025654421080045>

УДК 531.381

## РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА В СУПЕРПОЗИЦИИ ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ

© 2022 г. В. Ю. Ольшанский<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>ИПТМУ РАН, Саратов, Россия

\*e-mail: olshanskiy\_vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 05.04.2022 г.

После доработки 15.07.2022 г.

Принята к публикации 30.07.2022 г.

В статье описаны все возможные случаи регулярной прецессии при движении твердого тела и гиростата вокруг неподвижной точки под действием трех однородных полей. Получено обобщение известных условий Яхья, когда скорости прецессии и собственного вращения равны друг другу. Найден новый случай регулярной прецессии, когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения и ось прецессии не ортогональна оси собственного вращения. Рассмотрено применение результатов в частном случае, когда силовые линии трех полей взаимно ортогональны, и в случае, когда ось прецессии коллинеарна силовым линиям одного из полей.

*Ключевые слова:* твердое тело и гириостат, движение вокруг неподвижной точки в трех однородных полях, регулярная прецессия

DOI: 10.31857/S0032823522060121

**1. Введение.** Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в суперпозиции однородных полей является одним из обобщений задачи интегрирования уравнений Эйлера—Пуассона. После указания [1] новых случаев интегрируемости вращающегося намагниченного твердого тела в однородных гравитационном и магнитном полях, во многих работах были изучены различные аспекты задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в суперпозиции нескольких полей. Были найдены [2, 3], в частности, новые интегрируемые случаи движения под действием потенциальных и гироскопических сил без осевой симметрии и движения симметричного тела и гиростата в случае Ковалевской в гравитационном, электрическом и магнитном полях. Для гиростата в двух постоянных полях определены положения равновесия и построены периодические решения [4, 5]. Позже были получены достаточные условия устойчивости гиростата в постоянном гравитационном и однородном магнитном полях [6, 7]. Анализ интегрируемых систем выполнен [8] для волчка Ковалевской в двух полях. Уравнения движения твердого тела под действием обобщенных консервативных и гироскопических сил были использованы при построении новых решений в задаче о движении в идеальной несжимаемой жидкости свободного многосвязного тела [9] и при изучении устойчивости движения гиростата под действием гравитационной и выталкивающей сил [10].

Важным простым и нетривиальным случаем, который встречается при описании движения некоторых технических объектов и естественных космических тел, является регулярная прецессия. При таком движении тело вращается с постоянной скоростью вокруг некоторой оси, связанной с телом (ось собственного вращения), и эта ось вра-



щается с постоянной скоростью вокруг оси, неподвижной в инерциальном пространстве (ось прецессии). Угол между осью прецессии и осью собственного вращения постоянен.

Регулярная прецессия динамически симметричного свободного и тяжелого тел хорошо изучена (см. например [11]). Возможность регулярной прецессии несимметричного тяжелого твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, была показана Гриоли в 1947 году [12]. В этом случае оси прецессии и собственного вращения взаимно перпендикулярны, скорости прецессии и собственного вращения одинаковы, ось прецессии не вертикальна. Решение Гриоли было перенесено [13] на задачу о движении тела в жидкости. Отметим, что несимметричное тело с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, также может совершать прецессионное движение при отсутствии внешних сил [14–17]. Обзор регулярных и нерегулярных прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, при движении в жидкости, при движении в магнитном поле, приведен в [18, 19].

Недавно была указана возможность регулярной прецессии вокруг неvertикальной оси несимметричного твердого тела и гиростата в суперпозиции двух [20] и трех [21] однородных полей, а также выделен случай трех однородных полей (при анализе условий регулярной прецессии твердого тела в суперпозиции трех (гравитационного, электрического и магнитного) полей, одно из которых – неоднородное [22]). В отмеченных работах [20–22] рассматривается частный случай регулярной прецессии, когда скорости прецессии и собственного вращения совпадают, силовые линии полей взаимно ортогональны и ось прецессии коллинеарна силовым линиям одного из полей.

В настоящей статье проанализированы все возможные случаи регулярной прецессии твердого тела с неподвижной точкой в суперпозиции трех независимых однородных полей. Для случая равенства скоростей прецессии и собственного вращения получено обобщение известных условий [21, 22] и приведены условия для динамически симметричного тела. Найден новый случай регулярной прецессии, для которого скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения. Получены общие условия существования прецессии для этого случая, показано, что угол между осями прецессии и собственного вращения задается равенством  $\cos \theta = 1/6$ .

**2. Постановка задачи и предварительный анализ.** Рассмотрим движение гиростата вокруг неподвижной точки  $O$  под действием трех однородных постоянных силовых полей. Обозначим  $\alpha_i$  – единичные векторы направлений сил каждого из полей,  $C_i$  – центры приведения сил,  $\mathbf{u}_i = p_i \mathbf{OC}_i$ ,  $p_i$  – суммарная сила действия на тело поля номер  $i$ .

Теорема об изменении кинетического момента дает уравнение

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \alpha_1 \times \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \times \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \times \mathbf{u}_3 \quad (2.1)$$

Здесь  $(\cdot)$  – производная по времени в системе отсчета, связанной с телом; векторы  $\mathbf{u}_i$  постоянны в этой системе, векторы  $\alpha_i$  постоянны в инерциальной системе.  $\mathbf{I}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  – оператор инерции тела в неподвижной точке и угловая скорость тела,  $\mathbf{M}$  – сумма моментов внешних сил,  $\boldsymbol{\sigma}$  – гиростатический момент.

Для векторов  $\alpha_i$  в подвижной системе отсчета имеем уравнения

$$\dot{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega} \times \alpha_i = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Если векторы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  компланарны или векторы  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  компланарны, то задача (2.1), (2.2) может быть заменена эквивалентной задачей о движении в двух однородных полях; эти случаи будем называть приводимыми, в данной статье они не рассматриваются.

При регулярной прецессии угловая скорость тела имеет два компонента, один – постоянный в системе, связанной с телом, другой – постоянный в инерциальной системе отсчета

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{m} + \omega_p \boldsymbol{\rho} \quad (2.3)$$

Здесь векторы  $\mathbf{m}$  и  $\boldsymbol{\rho}$  постоянны, соответственно, в подвижной и инерциальной системах;  $|\mathbf{m}| = |\boldsymbol{\rho}| = 1$ . Величины  $\omega_r$  и  $\omega_p$  – это скорости собственного вращения (относительная скорость) и прецессии (переносная скорость).

Ниже решается следующая задача: при заданных в инерциальной системе отсчета направлениях  $\boldsymbol{\alpha}_i$  силовых линий полей и заданном положении оси прецессии  $\boldsymbol{\rho}$  определить гиростатический момент и векторы  $\mathbf{u}_i$ , при которых тело может совершать регулярную прецессию.

Решение может быть формально упрощено, если считать направления полей  $\boldsymbol{\alpha}_i$  взаимно ортогональными; поскольку этого всегда можно добиться линейным преобразованием, обычно считается, что такое преобразование уже выполнено и  $(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0$ ,  $i \neq j$ . Это затрудняет интерпретацию результатов, поскольку в реальных задачах как взаимное расположение силовых линий полей, так и положения центров приведения сил могут быть любыми. Ниже задача решается для произвольных заданных углов между силовыми линиями полей.

Векторная функция  $\boldsymbol{\rho}(t)$  удовлетворяет уравнению (2.2), которое, при учете равенства (2.3), становится линейным

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} + \omega_r \mathbf{m} \times \boldsymbol{\rho} = 0 \quad (2.4)$$

Пусть  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$  – некоторый связанный с телом ортонормированный правый базис и  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{m}$ . Решение уравнения (2.4) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\rho} = \cos \theta \mathbf{l}_1 + \sin \theta (\sin \tau \mathbf{l}_2 + \cos \tau \mathbf{l}_3), \quad \tau = \omega_r t + \text{const} \quad (2.5)$$

Произвольный параметр  $\theta$  – это угол между осями собственного вращения и прецессии,  $\cos \theta = (\mathbf{m}, \boldsymbol{\rho})$ .

Из формул (2.3) и (2.5) получаем компоненты угловой скорости

$$\omega^{(1)} = \Omega(1 + \kappa \cos \theta), \quad \omega^{(2)} = \Omega \kappa \sin \theta \sin \tau, \quad \omega^{(3)} = \Omega \kappa \sin \theta \cos \tau \quad (2.6)$$

Здесь и далее  $d^{(i)}$  – компонента  $\mathbf{d}$  в базисе  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$ ,  $\kappa = \omega_p/\omega_r$ ,  $\Omega = \omega_r$ .

Скалярная форма уравнений (2.2) в осях  $(\mathbf{l}_j)$  следующая:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(1)}}{d\tau} + \kappa \sin \theta (\alpha_i^{(3)} \sin \tau - \alpha_i^{(2)} \cos \tau) &= 0 \\ \frac{d\alpha_i^{(2)}}{d\tau} + \kappa \sin \theta \cos \tau \alpha_i^{(1)} - (\kappa \cos \theta + 1) \alpha_i^{(3)} &= 0 \\ \frac{d\alpha_i^{(3)}}{d\tau} - \kappa \sin \theta \sin \tau \alpha_i^{(1)} + (\kappa \cos \theta + 1) \alpha_i^{(2)} &= 0; \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Общее решение запишем, с учетом нормировки  $|\boldsymbol{\alpha}_i| = 1$ , в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(1)} &= \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \sin \tau_i; \quad \tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \tau + \varphi_i \\ \alpha_i^{(2)} &= \sin \theta \cos \theta_i \sin \tau + \sin \theta_i (\cos \tau \cos \tau_i - \cos \theta \sin \tau \sin \tau_i) \\ \alpha_i^{(3)} &= \sin \theta \cos \theta_i \cos \tau - \sin \theta_i (\sin \tau \cos \tau_i + \cos \theta \cos \tau \sin \tau_i); \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь  $\theta_i, \varphi_i$  – произвольные постоянные, геометрический смысл которых указан ниже.

Формулы (2.5) и (2.8) допускают векторную запись

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\mathbf{R}\mathbf{s}_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{R}\mathbf{l}_1 \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathbf{R}(t)$  – поворот,  $\mathbf{s}_i$  – единичные векторы, заданные сферическими координатами  $\theta_i, \varphi_i$  в базисе  $(\mathbf{l}_i)$

$$\mathbf{s}_i = \cos \theta_i \mathbf{l}_1 + \sin \theta_i (\cos \varphi_i \mathbf{l}_2 + \sin \varphi_i \mathbf{l}_3); \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

Элементы  $r_{ij} = (\mathbf{l}_i, \mathbf{R}\mathbf{l}_j)$  ортогональной матрицы  $\mathbf{R}$  следующие

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\cos \theta, & r_{12} &= -\sin \theta \sin \kappa \tau, & r_{13} &= -\sin \theta \cos \kappa \tau \\ r_{21} &= -\sin \theta \sin \tau, & r_{22} &= -\cos \tau \cos \kappa \tau + \cos \theta \sin \tau \sin \kappa \tau \\ r_{23} &= \cos \tau \sin \kappa \tau + \cos \theta \sin \tau \cos \kappa \tau \\ r_{31} &= -\sin \theta \cos \tau, & r_{32} &= \sin \tau \cos \kappa \tau + \cos \theta \cos \tau \sin \kappa \tau \\ r_{33} &= -\sin \tau \sin \kappa \tau + \cos \theta \cos \tau \cos \kappa \tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из формул (2.9) и (2.10) получаем

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \rangle = -\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin (\varphi_2 - \varphi_3) + \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin (\varphi_3 - \varphi_1) + \cos \theta_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}_1) &= \cos \theta_1, & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \rangle &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1 \ 2 \ 3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для дальнейшего анализа условий регулярной прецессии суммарный момент внешних сил, учитывая равенства (2.9), удобно представить в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{R}\mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{R}\mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{R}\mathbf{l}_3 \quad (2.14)$$

$$\mathbf{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} s_1^{(i)} \mathbf{u}_1 + s_2^{(i)} \mathbf{u}_2 + s_3^{(i)} \mathbf{u}_3; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

Запись суммарного момента в виде (2.14) позволяет выполнить декомпозицию поставленной в работе задачи нахождения конфигурационных условий прецессии: сначала, при анализе тригонометрических тождеств, находим векторы  $\mathbf{v}_i$  и ограничения, налагаемые на тензор инерции  $\mathbf{I}$  твердого тела, гиросtatический момент  $\boldsymbol{\sigma}$  и угол  $\theta$  между осями собственного вращения и прецессии. Эти ограничения, как и векторы  $\mathbf{v}_i$ , не зависят от значений параметров  $\theta_i, \varphi_i$  и, следовательно, не зависят от взаимного расположения силовых линий полей  $\boldsymbol{\alpha}_i$  и от положения оси прецессии в инерциальном пространстве. Затем из системы (2.15) находим векторы  $\mathbf{u}_i$ , определяющие центры приведения сил.

Решение системы (2.15) имеет вид

$$\mathbf{u}_i = n_i^{(1)} \mathbf{v}_1 + n_i^{(2)} \mathbf{v}_2 + n_i^{(3)} \mathbf{v}_3; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{n}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3}{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle}, \quad \mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3}{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (2.17)$$

Здесь  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$  – смешанное произведение,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .

Первая группа равенств (2.17) определяет векторы  $\mathbf{n}_i$  по заданным векторам  $\mathbf{s}_i$ , вторая группа равенств, выражающая  $\mathbf{s}_i$  через  $\mathbf{n}_i$ , следует из первой. Допустимые при прецессионном движении положения центров приведения сил существенным образом зависят от параметров  $\theta_i, \varphi_i$ , то есть от взаимного расположения силовых линий полей.

Отметим, что если направления силовых полей и ось прецессии заданы в инерциальном пространстве, то формулы (2.10) задают в теле однопараметрическое множество троек векторов  $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ ; любая тройка из этого множества отличается от другой поворотом вокруг оси собственного вращения  $\mathbf{l}_1$ . Действительно, при заданных векторах  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\rho}$  формулы (2.12) определяют углы  $\theta_i$  и разности между углами  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$ . Формулы (2.17) также определяют множество троек векторов  $\mathbf{n}_i$ , отличающихся одна от другой поворотом вокруг  $\mathbf{l}_1$ .

Для анализа условий, при которых уравнение (2.1) обращается в тождество, запишем явно оператор  $\mathbf{R}$  как функцию времени

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = & (\cos(\kappa + 1)\tau \mathbf{P}_{4c} + \sin(\kappa + 1)\tau \mathbf{P}_{4s})(\cos\theta + 1)/2 + \\ & + (\cos(\kappa - 1)\tau \mathbf{P}_{3c} + \sin(\kappa - 1)\tau \mathbf{P}_{3s})(\cos\theta - 1)/2 - \\ & - \sin\theta(\cos\kappa\tau \mathbf{P}_{2c} + \sin\kappa\tau \mathbf{P}_{2s} + \cos\tau \mathbf{P}_{1c} + \sin\tau \mathbf{P}_{1s}) - \cos\theta \mathbf{P}_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

У используемых в правой части равенства (2.18) операторов отличны от нуля только следующие элементы их матриц в базисе  $(\mathbf{l}_j)$ :

$$\begin{aligned} p_{33}^{4c} = -p_{22}^{4c} = p_{23}^{4s} = p_{32}^{4s} = p_{22}^{3c} = p_{33}^{3c} = p_{32}^{3s} = -p_{23}^{3s} = p_{13}^{2c} = p_{12}^{2s} = \\ = p_{31}^{1c} = p_{21}^{1s} = p_{11}^0 = 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь, например,  $p_{ij}^{4c} = (\mathbf{l}_i, \mathbf{P}_{4c}\mathbf{l}_j)$ .

Обозначим через  $\mathbf{L}$  левую часть равенства (2.1) и, используя формулу (2.6) для угловой скорости, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \frac{(\kappa \sin\theta)^2}{2} (\mathbf{L}_{2c} \cos 2\tau + \mathbf{L}_{2s} \sin 2\tau) + \kappa \sin\theta (\mathbf{L}_{1c} \cos \tau + \mathbf{L}_{1s} \sin \tau) + \mathbf{L}_0 \\ \mathbf{L}_{2c} = & \Omega^2 (\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_3 - \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_2), \quad \mathbf{L}_{2s} = \Omega^2 (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_2) \\ \mathbf{L}_{1c} = & \Omega^2 ((2 + \kappa \cos\theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_3 + \kappa \cos\theta \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \operatorname{tr} \mathbf{I}) + \Omega \mathbf{l}_3 \times \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{L}_{1s} = & \Omega^2 ((2 + \kappa \cos\theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 + \kappa \cos\theta \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_3 \operatorname{tr} \mathbf{I}) + \Omega \mathbf{l}_2 \times \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{L}_0 = & \Omega^2 \left( (1 + \kappa \cos\theta)^2 - \frac{(\kappa \sin\theta)^2}{2} \right) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_1 + \Omega (1 + \kappa \cos\theta) \mathbf{l}_1 \times \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (2.20)$$

После нахождения конфигурации, допускающей регулярную прецессию, для описания движения тела в инерциальном пространстве используем формулу

$$\mathbf{l}_q = -\boldsymbol{\alpha}_1 \sum_i n_1^{(i)} r_{qi} - \boldsymbol{\alpha}_2 \sum_i n_2^{(i)} r_{qi} - \boldsymbol{\alpha}_3 \sum_i n_3^{(i)} r_{qi}; \quad q = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

Для проверки данной формулы подставим в правую часть выражения  $\boldsymbol{\alpha}_i$  и  $n_j^{(i)}$  из формул (2.9) и (2.17), правая часть запишется в виде  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T \mathbf{l}_q$ , где  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$ .

Функции  $r_{ij}(t)$  заданы равенствами (2.11). Формулы (2.21) задают движение связанного с телом базиса  $(\mathbf{l}_i)$  в инерциальном пространстве и, следовательно, позволяют описать в явном виде движение каждой точки тела.

Отметим следующее. Векторы  $\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{R}\mathbf{l}_i$  постоянны в инерциальной системе отсчета. Из формулы (2.14) следует, что суммарное действие трех полей с неортогональными силовыми линиями при регулярной прецессии может быть интерпретировано, как действие трех взаимно ортогональных полей с направлениями  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ .

Покажем теперь, что регулярная прецессия в трех независимых полях при  $|\kappa| \neq 1$ ,  $|\kappa| \neq 2$  невозможна. Действительно, пусть  $\kappa > 0$ , тогда суммарный момент  $\mathbf{M}$ , заданный формулой (2.14), не должен содержать слагаемые с  $\cos(\kappa + 1)\tau$ ,  $\sin(\kappa + 1)\tau$ ,  $\cos \kappa\tau$ ,  $\sin \kappa\tau$ , так как левая часть уравнения (2.1), заданная формулами (2.20), таких слагаемых не содержит. Учитывая равенства (2.18), получаем следующие условия

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{P}_2 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{P}_3 = 0, \quad (2.22)$$

которые должны быть выполнены при  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{4c}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{4s}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{2c}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{2s}$ .

Учитывая формулы (2.19), условия (2.22) запишем в виде

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_2 - \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_2 = 0 \quad (2.23)$$

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_1 = 0, \quad \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_1 = 0 \quad (2.24)$$

Эти условия могут быть выполнены, только если  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = 0$ . В этом случае из формулы (2.16) следует, что векторы  $\mathbf{u}_i$  коллинеарны вектору  $\mathbf{v}_1$  и система полей приводима к одному полю.

Таким образом, регулярная прецессия в трех независимых полях может быть возможна, только если скорость прецессии равна скорости собственного вращения или вдвое больше скорости собственного вращения. Примеры прецессий в случае  $\kappa = 1$  приведены в работах [21, 22]. Возможность регулярной прецессии в случае  $\kappa = 2$  впервые указана в настоящей работе. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

**3. Конфигурационные условия прецессии при равных скоростях прецессии и собственного вращения.** Сравнивая при  $\kappa = 1$  коэффициенты при соответствующих гармониках в уравнении (2.1), получим, учитывая равенства (2.14), (2.18) и (2.20), что равенство  $\mathbf{L} = \mathbf{M}$  тождественно выполнено, только если

$$(1 - \cos \theta) \mathbf{L}_{2c} = \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_{4c} \mathbf{l}_i, \quad (1 - \cos \theta) \mathbf{L}_{2s} = \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_{4s} \mathbf{l}_i$$

$$\mathbf{L}_{1c} = -\sum \mathbf{v}_i \times (\mathbf{P}_{2c} + \mathbf{P}_{1c}) \mathbf{l}_i, \quad \mathbf{L}_{1s} = -\sum \mathbf{v}_i \times (\mathbf{P}_{2s} + \mathbf{P}_{1s}) \mathbf{l}_i$$

$$\mathbf{L}_0 = -\cos \theta \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_0 \mathbf{l}_i + \frac{1}{2} (\cos \theta - 1) \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_{3c} \mathbf{l}_i$$

Учитывая равенства (2.19) и (2.20), эти условия запишем при  $\kappa = 1$  в виде

$$\Omega^2 (1 - \cos \theta) (\mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_3 - \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_2) = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_3 - \mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_2$$

$$\Omega^2 (1 - \cos \theta) (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_2) = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_3 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_2$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 ((2 + \cos \theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_3 + \cos \theta \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \operatorname{tr} \mathbf{I}) + \Omega \mathbf{l}_3 \times \boldsymbol{\sigma} = \\ = \mathbf{l}_3 \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{v}_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 ((2 + \cos \theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 + \cos \theta \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_3 \operatorname{tr} \mathbf{I}) + \Omega \mathbf{l}_2 \times \boldsymbol{\sigma} = \\ = \mathbf{l}_2 \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 \left( (1 + \cos \theta)^2 - \frac{(\sin \theta)^2}{2} \right) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_1 + \Omega (1 + \cos \theta) \mathbf{l}_1 \times \boldsymbol{\sigma} = \\ - \cos \theta \mathbf{v}_1 \times \mathbf{l}_1 + \frac{\cos \theta - 1}{2} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_3) \end{aligned}$$

Перейдем к векторным параметрам  $\mathbf{w}_i$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 + \Omega^2 \cos \theta \mathbf{\Pi}_1 + \Omega \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{\Pi}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{\Pi}_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условия (3.1) преобразуются к виду

$$\mathbf{w}_2 \times \mathbf{l}_2 - \mathbf{w}_3 \times \mathbf{l}_3 = 0, \quad \mathbf{w}_2 \times \mathbf{l}_3 + \mathbf{w}_3 \times \mathbf{l}_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\Omega^2 (3\mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_3 + \mathbf{l}_2 \operatorname{tr} \mathbf{I}) = \mathbf{l}_3 \times \mathbf{w}_1 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{w}_3 \quad (3.4)$$

$$\Omega^2 (3\mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_2 - \mathbf{l}_3 \operatorname{tr} \mathbf{I}) = \mathbf{l}_2 \times \mathbf{w}_1 + \mathbf{l}_1 \times \mathbf{w}_2$$

$$\Omega^2 3 \cos \theta \mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_1 + \Omega \mathbf{l}_1 \times \boldsymbol{\sigma} = \cos \theta \mathbf{l}_1 \times \mathbf{w}_1 + \frac{1 - \cos \theta}{2} (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{w}_2 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{w}_3) \quad (3.5)$$

Условия (3.3) выполнены, только если справедливы равенства

$$\mathbf{w}_2 = \mu \mathbf{l}_2 + \nu \mathbf{l}_3, \quad \mathbf{w}_3 = -\nu \mathbf{l}_2 + \mu \mathbf{l}_3 \quad (3.6)$$

Условия (3.4) с учетом формул (3.6) записываются в виде

$$\Omega^2 (3\mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_3 + \mathbf{l}_2 \operatorname{tr} \mathbf{I}) = \mathbf{l}_3 \times \mathbf{w}_1 - \mu \mathbf{l}_2 - \nu \mathbf{l}_3$$

$$\Omega^2 (3\mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_2 - \mathbf{l}_3 \operatorname{tr} \mathbf{I}) = \mathbf{l}_2 \times \mathbf{w}_1 - \nu \mathbf{l}_2 + \mu \mathbf{l}_3$$

Координатная форма этих условий следующая

$$\Omega^2 (I_{11} + I_{22} - 2I_{33}) = \Omega^2 (I_{11} + I_{33} - 2I_{22}) = w_1^{(1)} - \mu$$

$$\nu = 3\Omega^2 I_{23} = -3\Omega^2 I_{32}, \quad w_1^{(2)} = w_1^{(3)} = 0$$

Отсюда получаем

$$I_{22} = I_{33}, \quad I_{23} = 0 \quad (3.7)$$

$$w_1^{(1)} - \mu = \Omega^2 (I_{11} - I_{22}), \quad \nu = 0, \quad \mathbf{w}_1 = w_1^{(1)} \mathbf{l}_1 \quad (3.8)$$

Из равенств (3.6), (3.8) находим векторы  $\mathbf{w}_i$

$$\mathbf{w}_1 = (\mu + \Omega^2 (I_{11} - I_{22})) \mathbf{l}_1, \quad \mathbf{w}_2 = \mu \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{w}_3 = \mu \mathbf{l}_3 \quad (3.9)$$

Условие (3.5) принимает вид

$$3\Omega \cos \theta \mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{l}_1 \times \boldsymbol{\sigma} = 0$$

Это условие эквивалентно системе двух условий

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = -3\Omega \cos \theta I_{12}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = -3\Omega \cos \theta I_{13} \quad (3.10)$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (2.1) обратилось в тождество, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (3.7), функции  $\mathbf{w}_i$  были заданы формулами (3.9), где  $\mu$  – некоторый скалярный параметр и компоненты гиросtatического момента определялись по формулам (3.10).

Известно (см. п. 6), что условия (3.7) означают ортогональность вектора  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{m}$  круговому сечению эллипсоида инерции и, следовательно, при их выполнении ось собственного вращения ортогональна данному сечению. В случае Гриоли [12] на данной оси находится и центр тяжести тела. В рассмотренном в статье общем случае прецессии нахождение какого-то из центров приведения сил на оси собственного вращения не является обязательным.

Векторные параметры  $\mathbf{v}_i$  выражаются через  $\mathbf{w}_i$  по формулам (3.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\mu + \Omega^2 (I_{11} - I_{22})) \mathbf{l}_1 + \Omega^2 \cos \theta \mathbf{\Pi}_1 + \Omega \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{v}_2 &= \mu \mathbf{l}_2 + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{\Pi}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \mu \mathbf{l}_3 + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{\Pi}_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Учитывая формулы (2.16), теперь получим запись допустимых векторов  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в виде

$$\mathbf{u}_i = \mu \mathbf{n}_i + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{I}_i + n_i^{(1)} \Omega (\boldsymbol{\sigma} + \Omega (\mathbf{\Pi}_1 + (I_{11} - I_{22}) \mathbf{l}_1)) \quad (3.12)$$

**4. Конфигурационные условия прецессии при скорости прецессии вдвое большей скорости собственного вращения.** В случае  $k = 2$  суммарный момент  $\mathbf{M}$  не должен содержать слагаемые с  $\cos 3\tau$ ,  $\sin 3\tau$  (они отсутствуют в левой части  $\mathbf{L}$  уравнения (2.1)). Учитывая формулы (2.14) и (2.18), получим, что указанные слагаемые отсутствуют, если выполнены условия (2.22) при  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{4c}$  и  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{4s}$ , что снова приводит к условиям (2.24).

При выполнении условий (2.24) равенство  $\mathbf{M} = \mathbf{L}$  тождественно выполнено, только если

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \mathbf{L}_{2c} &= -\sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_{2c} \mathbf{l}_i, \quad 2 \sin \theta \mathbf{L}_{2s} = -\sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_{2s} \mathbf{l}_i \\ 2 \sin \theta \mathbf{L}_{1c} &= \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}'_{3c} \mathbf{l}_i, \quad 2 \sin \theta \mathbf{L}_{1s} = \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}'_{3s} \mathbf{l}_i, \quad \mathbf{L}_0 = -\cos \theta \sum \mathbf{v}_i \times \mathbf{P}_0 \mathbf{l}_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$\mathbf{P}'_{3c} = \frac{\cos \theta - 1}{2} \mathbf{P}_{3c} - \sin \theta \mathbf{P}_{1c}, \quad \mathbf{P}'_{3s} = \frac{\cos \theta - 1}{2} \mathbf{P}_{3s} - \sin \theta \mathbf{P}_{1s}$$

Условия (4.1) при учете равенств (2.19) и (2.20) принимают вид

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \Omega^2 (\mathbf{l}_3 \times \mathbf{\Pi}_3 - \mathbf{l}_2 \times \mathbf{\Pi}_2) &= \mathbf{l}_1 \times \mathbf{v}_3 \\ 2 \sin \theta \Omega^2 (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{\Pi}_3 + \mathbf{l}_3 \times \mathbf{\Pi}_2) &= \mathbf{l}_1 \times \mathbf{v}_2 \\ 2 \sin \theta (\Omega^2 (2(1 + \cos \theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_3 + 2 \cos \theta \mathbf{l}_3 \times \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{l}_2 \operatorname{tr} \mathbf{I}) + \Omega \mathbf{l}_3 \times \boldsymbol{\sigma}) &= \\ &= \frac{\cos \theta - 1}{2} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_3) - \sin \theta \mathbf{v}_1 \times \mathbf{l}_3 \\ 2 \sin \theta (\Omega^2 (2(1 + \cos \theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_2 + 2 \cos \theta \mathbf{l}_2 \times \mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{l}_3 \operatorname{tr} \mathbf{I}) + \Omega \mathbf{l}_2 \times \boldsymbol{\sigma}) &= \\ &= \frac{\cos \theta - 1}{2} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{l}_3 - \mathbf{v}_3 \times \mathbf{l}_2) - \sin \theta \mathbf{v}_1 \times \mathbf{l}_2 \\ \Omega^2 ((1 + 2 \cos \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta) \mathbf{l}_1 \times \mathbf{\Pi}_1 + \Omega (1 + 2 \cos \theta) \mathbf{l}_1 \times \boldsymbol{\sigma} &= -\cos \theta \mathbf{v}_1 \times \mathbf{l}_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из условий (2.24) следует, что векторы  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  можно представить в виде

$$\mathbf{v}_2 = \xi_3 \mathbf{l}_2 + \xi_2 \mathbf{l}_3, \quad \mathbf{v}_3 = -\xi_2 \mathbf{l}_2 + \xi_3 \mathbf{l}_3 \quad (4.3)$$

Записывая, при учете формул (4.3), систему (4.2) в проекциях на  $\mathbf{l}_j$ , получим систему, состоящую из условий (3.7) и следующих условий ( $j = 2, 3$ )

$$\xi_j = -2\Omega^2 \sin \theta I_{1j} \quad (4.4)$$

$$2\Omega \sin \theta (2\Omega \cos \theta I_{1j} + \boldsymbol{\sigma}^{(j)}) = -(1 - \cos \theta) \xi_j + \sin \theta v_1^{(j)} \quad (4.5)$$

$$\Omega^2 ((1 + 2 \cos \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta) I_{1j} + \Omega (1 + 2 \cos \theta) \boldsymbol{\sigma}^{(j)} = \cos \theta v_1^{(j)} \quad (4.6)$$

$$2\Omega^2 ((1 + 2 \cos \theta) I_{11} - 2 \cos \theta I_{22}) + 2\Omega \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = v_1^{(1)} \quad (4.7)$$

Условия (4.5), после подстановки  $\xi_j$  из формул (4.4), преобразуем к виду

$$\Omega^2 (6 \cos \theta - 2) I_{1j} + 2\Omega \sigma^{(j)} = v_1^{(j)}; \quad j = 2, 3 \quad (4.8)$$

Подставляя отсюда  $v_1^{(j)}$  в равенства (4.6), получим

$$\sigma^{(j)} = \Omega (1 - 6 \cos \theta) I_{1j}; \quad j = 2, 3 \quad (4.9)$$

Из формул (4.8) и (4.9) следует

$$v_1^{(j)} = -6\Omega^2 \cos \theta I_{1j}; \quad j = 2, 3 \quad (4.10)$$

Из равенств (4.3), (4.4), (4.7) и (4.8) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\Omega \boldsymbol{\sigma} + \Omega^2 (2(3 \cos \theta - 1) \mathbf{I}_1 + 2((2 - \cos \theta) I_{11} - 2 \cos \theta I_{22}) \mathbf{I}_1) \\ \mathbf{v}_2 &= -2\Omega^2 \sin \theta (I_{13} \mathbf{l}_2 + I_{12} \mathbf{l}_3), \quad \mathbf{v}_3 = 2\Omega^2 \sin \theta (I_{12} \mathbf{l}_2 - I_{13} \mathbf{l}_3) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом, имеем условия (3.7) и (4.9). Множество векторов  $\mathbf{u}_i$  задается формулами (2.16) и (4.11).

**5. Прецессия твердого тела.** В случае, когда гиросtatический момент равен нулю, получим условия прецессии твердого тела. Эти условия мало отличаются от случая, когда гиросtatический момент коллинеарен оси собственного вращения, поэтому рассмотрим оба случая совместно. Пусть

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = 0 \quad (5.1)$$

Условия (3.7) остаются необходимыми.

*Случай*  $\kappa = 1$ . Имеется две возможности выполнения условий (3.10):

a)  $\cos \theta = 0$ , ось собственного вращения ортогональна оси прецессии;

b)  $I_{12} = I_{13} = 0$ , эллипсоид инерции имеет осевую симметрию, ось симметрии является осью собственного вращения.

В первом случае формулы (3.12), задающие допустимое множество векторов  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), записываются в виде

$$\mathbf{u}_i = \mu \mathbf{n}_i - \Omega^2 \mathbf{I} \mathbf{n}_i + n_i^{(1)} \left( \Omega^2 (\mathbf{I}_1 + (I_{11} - I_{22})) \mathbf{l}_1 \right) + \Omega \sigma^{(1)} \mathbf{l}_1 \quad (5.2)$$

Во втором случае, учитывая условия (3.7) получим, что  $\mathbf{l}_i$  – собственные векторы оператора инерции и  $\mathbf{l}_1$  – ось симметрии. Обозначив

$$\tilde{\mu} = \mu - \Omega (1 - \cos \theta) I_2$$

из формул (3.11) получим

$$\mathbf{v}_1 = \left( \tilde{\mu} + \Omega \sigma^{(1)} + \Omega^2 ((1 + \cos \theta) I_1 - \cos \theta I_2) \right) \mathbf{l}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \tilde{\mu} \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \tilde{\mu} \mathbf{l}_3$$

Допустимое множество векторов  $\mathbf{u}_i$  записывается, при учете формул (2.16), в виде

$$\mathbf{u}_i = \tilde{\mu} \mathbf{n}_i + n_i^{(1)} \left( \Omega \sigma^{(1)} + \Omega^2 ((1 + \cos \theta) I_1 - \cos \theta I_2) \right) \mathbf{l}_1; \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

*Случай*  $\kappa = 2$ . Условия (5.1) и (4.9) могут быть выполнены, только если

$$\cos \theta = \frac{1}{6} \quad (5.4)$$

Иначе  $I_{12} = I_{13} = 0$  и три поля приводятся к одному полю.

Таким образом, регулярная прецессия в суперпозиции трех независимых полей твердого тела или гиростата, гиросtatический момент которого направлен по оси собственного вращения, в случае, когда скорость прецессии в два раза больше скорости



собственного вращения, возможна, только если косинус угла между осями прецессии и собственного вращения равен одной шестой.

Из формул (2.16) и (4.11) находим допустимое множество векторов  $\mathbf{u}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & 2\Omega\sigma^{(1)}n_i^{(1)}\mathbf{l}_1 + \Omega^2\left(n_i^{(1)}\left(\frac{2}{3}(4I_{11} - I_{22})\mathbf{l}_1 - I_{12}\mathbf{l}_2 - I_{13}\mathbf{l}_3\right) + \right. \\ & \left. + 2\sin\theta\left(n_i^{(2)}(I_{13}\mathbf{l}_2 - I_{12}\mathbf{l}_3) - n_i^{(3)}(I_{12}\mathbf{l}_2 + I_{13}\mathbf{l}_3)\right)\right); \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Угол  $\theta$  задан равенством (5.4).

В случае твердого тела в формуле (5.5) следует положить  $\sigma^{(1)} = 0$ .

Замечание. В рассмотренном выше случае  $\kappa = 1$  векторы  $\mathbf{u}_i$  включают в себя слагаемые  $\mu\mathbf{n}_i$  (формулы (3.12), (5.2), (5.3)), содержащие произвольный параметр  $\mu$ . Получаем, что при заданных в инерциальном пространстве направлениях  $\alpha_i$  силовых линий постоянных полей, заданном расположении оси прецессии  $\rho$  относительно этих линий, заданном тензоре инерции твердого тела существуют различные расположения центров приведения сил и различные величины сил, для которых прецессионное движение будет совпадающим (при одинаковых начальных условиях).

Данное свойство обусловлено тем, что оператор поворота  $\mathbf{R}$ , заданный формулами (2.11), при  $\kappa = 1$  является симметрическим. Момент внешних сил можно задать формулой (2.14), где векторы  $\mathbf{v}_i$ , в соответствии с формулой (3.11), содержат слагаемые  $\mu\mathbf{l}_i$ . Эти слагаемые не вносят вклад в суммарный момент, так как при любом симметрическом операторе  $\mathbf{R}$  имеем

$$\sum \mathbf{l}_i \times \mathbf{R}\mathbf{l}_i = 0$$

В случае  $\kappa = 2$  оператор  $\mathbf{R}(t)$  не является симметрическим и аналогичное свойство отсутствует.

#### 6. Частный случай: регулярная прецессия в суперпозиции трех ортогональных полей.

Пусть векторы  $\alpha_i$ , задающие направления силовых линий полей, образуют правую ортонормированную тройку. В соответствии с формулами (2.9) векторы  $\mathbf{s}_i$  тогда образуют левую ортонормированную тройку, при этом

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \rangle = -1, \quad \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = -\mathbf{s}_3 \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Из формул (2.17) получаем

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{s}_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.1)$$

Таким образом, формула (2.10) определяет векторы  $\mathbf{n}_i$ , присутствующие в формулах (2.16), которые задают множества допустимых векторов  $\mathbf{u}_i$ .

Как было отмечено выше, в п. 2, при заданном положении оси прецессии относительно силовых линий полей можно определить все параметры  $\theta_i$  и только разности между параметрами  $\varphi_i$  (но не сами эти параметры). При этом формула (2.10) определяет тройку векторов ( $\mathbf{s}_i$ ) с точностью до произвольного поворота вокруг оси  $\mathbf{l}_1$ .

Параметры  $\theta_i$  — это углы вектора  $\rho$  с осями  $\alpha_i$ ; приведем явные формулы для разностей  $\varphi_i - \varphi_j$ .

В случае ортогонального базиса имеем формулу

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1$$

и из формул (2.13) также следуют условия

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Данные условия при  $\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \neq 0$  приводят к формулам

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}, \quad \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (6.2)$$

Если  $\sin \theta_i = 0$ , то  $\rho = \alpha_i$ ; этот случай рассмотрен ниже.

Обозначим  $\varphi_2 = \varepsilon$  и используем очевидные формулы

$$\sin \varphi_1 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varepsilon + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \varepsilon$$

Из формул (2.10), (6.1) и (6.2) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \cos \theta_1 \mathbf{l}_1 - \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_2} \mathbf{l}'_2 + \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_2} \mathbf{l}'_3 \\ \mathbf{n}_2 &= \cos \theta_2 \mathbf{l}_1 + \sin \theta_2 \mathbf{l}'_2, \quad \mathbf{l}'_2 = \cos \varepsilon \mathbf{l}_2 + \sin \varepsilon \mathbf{l}_3, \quad \mathbf{l}'_3 = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}'_2 \\ \mathbf{n}_3 &= \cos \theta_3 \mathbf{l}_1 - \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3}{\sin \theta_2} \mathbf{l}'_2 - \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_2} \mathbf{l}'_3 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для рассматриваемого случая трех ортогональных полей выделим частный случай, когда ось прецессии ортогональна силовым линиям одного из полей. Пусть, например,  $(\rho, \alpha_2) = 0$ . В соответствии с формулами (2.9) получим  $(\mathbf{l}_1, \mathbf{s}_2) = 0$ . Учитывая равенства (6.1) и (6.3), получим  $\cos \theta_2 = 0$ . Положим

$$\theta_2 = \pi/2, \quad \theta_1 = \beta, \quad \theta_3 = \pi/2 - \beta$$

Формулы (6.3) примут вид

$$\mathbf{n}_1 = \cos \beta \mathbf{l}_1 + \sin \beta \mathbf{l}'_3, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{l}'_2, \quad \mathbf{n}_3 = \sin \beta \mathbf{l}_1 - \cos \beta \mathbf{l}'_3 \quad (6.4)$$

При  $\beta = \pi/2$  получим  $\rho = \alpha_3$ , при  $\beta = 0$  —  $\rho = \alpha_1$  и, если ось прецессии коллинеарна силовым линиям  $\alpha_1$ , векторы  $\mathbf{n}_i$  имеют вид

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{l}_1, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{l}'_2, \quad \mathbf{n}_3 = -\mathbf{l}'_3 \quad (6.5)$$

Эти равенства получены с использованием формул (6.2), то есть при  $\sin \theta_i \neq 0$ . Нахождение  $\mathbf{n}_i$  непосредственно из формул (2.10) и (6.1) при  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \theta_3 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \varepsilon$ ,  $\varphi_3 = \varepsilon - \pi/2$  приводит снова к формулам (6.5).

Перейдем теперь к записи полученных условий в главных осях инерции. Обозначим  $I_i$ ,  $\mathbf{e}_i$  собственные значения и собственные векторы оператора инерции  $\mathbf{I}$ . При условиях (3.7) одним из собственных значений является  $\lambda = I_{22} = I_{33}$  и соответствующий этому значению собственный вектор ортогонален  $\mathbf{l}_1$ . Пронумеруем собственные значения  $I_k$  оператора  $\mathbf{I}$  так, что

$$I_2 = I_{22} = I_{33} \quad (6.6)$$

Используемый выше ортобазис  $(\mathbf{l}_i)$  ограничен только условием  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{m}$ . Учитывая, что  $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{l}_1$ , можно выбрать базис  $(\mathbf{l}_i)$  такой, что

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{l}_3 = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_2 \quad (6.7)$$

Вектор  $\mathbf{m}$  можно представить в виде

$$\mathbf{m} = \cos \xi \mathbf{e}_1 + \sin \xi \mathbf{e}_3 \quad (6.8)$$

Если  $(I_2 - I_1)(I_3 - I_2) \geq 0$ , то  $\mathbf{e}_2$  – средняя ось эллипсоида инерции и  $\mathbf{m}$  – нормаль одного из круговых сечений эллипсоида. Справедливы формулы

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_1 \cos^2 \xi + I_3 \sin^2 \xi, & I_{22} &= I_2, & I_{33} &= I_1 \sin^2 \xi + I_3 \cos^2 \xi \\ I_{12} &= I_{23} = 0, & I_{13} &= (I_3 - I_1) \sin \xi \cos \xi, & I_{11} &= I_1 + I_3 - I_2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\cos \xi = \pm \sqrt{\frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1}}, \quad \sin \xi = \pm \sqrt{\frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1}}$$

Для сравнения с известными результатами [21, 22] приведенные выше при  $\kappa = 1$  формулы (3.12) запишем для случая, когда ось прецессии коллинеарна силовым линиям поля  $\alpha_1$ . Учитывая формулы (6.5), где  $I_2', I_3'$  заданы формулами (6.3), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mu \mathbf{l}_1 + \Omega \boldsymbol{\sigma} + \Omega^2 ((\cos \theta - 1) \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_1 + (I_{11} - I_{22}) \mathbf{l}_1) \\ \mathbf{u}_2 &= \mu (\cos \varepsilon \mathbf{l}_2 + \sin \varepsilon \mathbf{l}_3) + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{I} (\cos \varepsilon \mathbf{l}_2 + \sin \varepsilon \mathbf{l}_3) \\ \mathbf{u}_3 &= \mu (\sin \varepsilon \mathbf{l}_2 - \cos \varepsilon \mathbf{l}_3) + \Omega^2 (\cos \theta - 1) \mathbf{I} (\sin \varepsilon \mathbf{l}_2 - \cos \varepsilon \mathbf{l}_3) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Выделим случай прецессии твердого тела или гиростата с гиростатическим моментом, коллинеарным оси собственного вращения. Полагая  $\cos \theta = 0$ , формулы (6.10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (\xi + r) \mathbf{l}_1, & \mathbf{u}_2 &= \xi (\cos \varepsilon \mathbf{l}_2 + \sin \varepsilon \mathbf{l}_3) - \sin \varepsilon \Omega^2 I_{13} \mathbf{l}_1, & \xi &= \mu - \Omega^2 I_2 \\ \mathbf{u}_3 &= \xi (\sin \varepsilon \mathbf{l}_2 - \cos \varepsilon \mathbf{l}_3) + \cos \varepsilon \Omega^2 I_{13} \mathbf{l}_1, & r &= \Omega \sigma^{(1)} + \Omega^2 (I_1 + I_3 - I_2) \end{aligned}$$

Если здесь положить  $\varepsilon = \pi$  и выполнить замену индексов  $(123) \mapsto (321)$ , то получим пример Яхья [21]. В этом случае  $\mathbf{u}_2 \parallel \mathbf{l}_2$ ,  $\mathbf{l}_2 = \mathbf{e}_2$  и центр приведения сил поля  $\alpha_2$  лежит на средней оси эллипсоида инерции.

Таким образом, из возможных случаев регулярной прецессии твердого тела с гиростатом в суперпозиции трех полей решение Яхья [21] выделяет частный случай, заданный следующими условиями:

- 1) силовые линии трех полей взаимно ортогональны,  $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ ,  $i \neq j$ ;
- 2) ось прецессии коллинеарна силовым линиям одного из полей,  $\boldsymbol{\rho} \parallel \alpha_1$ ;
- 3) ось собственного вращения перпендикулярна оси прецессии,  $(\mathbf{m}, \boldsymbol{\rho}) = 0$ ;
- 4) скорость собственного вращения равна скорости прецессии,  $\kappa = 1$ ;
- 5) гиростатический момент ортогонален плоскости кругового сечения эллипсоида инерции твердого тела,  $\boldsymbol{\sigma} \parallel \mathbf{m}$ ;
- б) центр приведения сил одного из полей лежит на средней оси эллипсоида инерции,  $\mathbf{u}_2 \parallel \mathbf{e}_2$ .

Как показано выше, каждое из этих условий не является обязательным.

В работе [22] рассмотрена возможность прецессии гиростата (с одинаковыми скоростями прецессии и собственного вращения) в трех полях, два из которых однородные, и выделен частный случай, когда третье поле тоже однородное. Выполненная нами проверка показывает, что условия прецессии [22] в трех однородных полях могут быть записаны в виде (6.10) при  $\varepsilon = \pi$ . Таким образом, решение [22] выделяет частный случай, заданный приведенными выше условиями 1, 2, 4, 6.

**Заключение.** Решение задачи о вращении твердого тела (гиростата) в суперпозиции нескольких полей важно при конструировании различных приборов навигации и управления. Во многих режимах работы таких устройств удобно использовать регулярную прецессию, как в классическом случае движения в поле тяжести. Возможность регулярной прецессии несимметричного твердого тела и гиростата в суперпозиции

ции двух и трех полей была показана Яхья [20, 21], который привел примеры для случая, когда скорости прецессии и собственного вращения совпадают и оси прецессии и собственного вращения перпендикулярны. В настоящей работе описаны все возможные случаи регулярной прецессии при вращении гиростата вокруг неподвижной точки под действием трех независимых однородных полей. Случай двух полей должен быть рассмотрен отдельно. Конфигурационные условия прецессии получены без предположения о взаимной ортогональности полей. Получено обобщение условий Яхья. Показано, что регулярная прецессия несимметричного твердого тела и гиростата возможна и когда скорость прецессии вдвое больше скорости собственного вращения. Выделен случай, когда ось прецессии коллинеарна силовым линиям одного из полей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.* 1984. V. 95. P. 307–315.
2. *Yehia H.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // *Mech. Res. Commun.* 1986. V. 13. Iss. 3. P. 169–172.
3. *Yehia H.M.* New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. II – The case of asymmetric forces // *Mech. Res. Commun.* 1996. V. 23. Iss. 5. P. 429–431.
4. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // *Reg. Chaot. Dyn.* 2005. V. 10. Iss. 4. P. 381–398.
5. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // *J. Phys. A.* 2008. V. 41. Iss. 27.
6. *Elmandouh A.A.* On the stability of the permanent rotations of a charged rigid body-gyrostat // *Acta Mech.* 2017. V. 228. P. 3947–3959.
7. *Elmandouh A.A., Ibrahim A.G.* Hamiltonian structure, equilibria, and stability for an axisymmetric gyrostat motion in the presence of gravity and magnetic fields // *Acta Mech.* 2019. V. 230. P. 2539–2548.
8. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E.* Topological atlas of the kovalevskaya top in a double field // *J. Math. Sci.* 2017. V. 233. P. 775–809.
9. *Yehia H.M., Saleh E., Megahid S.F.* New solutions of classical problems in rigid body dynamics // *Mech. Res. Commun.* 2015. V. 69. P. 40–44.
10. *Elmandouh A.A.* On the stability of certain motions of a rigid body-gyrostat in an incompressible ideal fluid // *Int. J. Non-lin. Mech.* 2020. V. 120. Art. no. 103419.
11. *Goldstein H.* *Classical Mechanics.* Addison – Wesley. 1951.
12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. mat. pura e appl.* 1947. V. 26. Iss. 3–4. P. 271–281.
13. *Рубановский В.Н.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 212–219.
14. *Ольшанский В.Ю.* О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
15. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. Iss. 12. Art. no. 57.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2020. V. 132. Iss. 9. Art. no. 46.
17. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // *ПММ.* 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564.
18. *Горп Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // *ПММ.* 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
19. *Горп Г.В., Мазнев А.В., Шетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДНГУ. 2009.
20. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. Iss.3. P. 200–205.

21. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. Iss. 2. P. 216–219.
22. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019. V. 15. Iss. 3. P. 285–292.

### Regular Precession of a Gyrostat in Three Uniform Fields

V. Yu. Ol'shanskii<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: olshanskiy\_vlad@mail.ru*

This article describes all possible cases of regular precession in the motion of a rigid body and gyrostat around a fixed point under the action of three uniform fields. A generalization of the known Yehia conditions is obtained when the precession and proper rotation velocities are equal to each other. A new case of regular precession is found for which the precession velocity is twice the proper rotation velocity, and the precession axis is not orthogonal to the proper rotation axis. The application of the results in the special case where force lines of the three fields are orthogonal to each other, and in the case where the precession axis is collinear to one of the force lines is considered.

*Keywords:* rigid body and gyrostat, motion around a fixed point in three uniform fields, regular precession

### REFERENCES

1. *Bogoyavlensky O.I.* Euler equations on finite dimensional Lie algebras arising in physical problems // *Math. Phys. Commun.*, 1984, vol. 95, pp. 307–315.
2. *Yehia H.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // *Mech. Res. Commun.*, 1986, vol. 13, iss. 3, pp. 169–172.
3. *Yehia H.M.* New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. II – The case of asymmetric forces // *Mech. Res. Commun.*, 1996, vol. 23, iss. 5, pp. 429–431.
4. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // *Reg. Chaot. Dyn.*, 2005, vol. 10, iss. 4, pp. 381–398.
5. *Kharlamov M.P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // *J. Phys. A*, 2008, vol. 41, iss. 27.
6. *Elmandouh A.A.* On the stability of the permanent rotations of a charged rigid body-gyrostat // *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, pp. 3947–3959.
7. *Elmandouh A.A., Ibrahim A.G.* Hamiltonian structure, equilibria, and stability for an axisymmetric gyrostat motion in the presence of gravity and magnetic fields // *Acta Mech.*, 2019, vol. 230, pp. 2539–2548.
8. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E.* Topological atlas of the Kovalevskaya top in a double field // *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 233, pp. 775–809.
9. *Yehia H.M., Saleh E., Megahid S.F.* New solutions of classical problems in rigid body dynamics // *Mech. Res. Commun.*, 2015, vol. 69, pp. 40–44.
10. *Elmandouh A.A.* On the stability of certain motions of a rigid body-gyrostat in an incompressible ideal fluid // *Int. J. Non-Lin. Mech.*, 2020, vol. 120. Article 103419.
11. *Goldstein H.* *Classical Mechanics.* Addison – Wesley, 1951.
12. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. mat. pura e appl.*, 1947, vol. 26, iss. 3–4, pp. 271–281.
13. *Rubanovskii V.N.* On a new particular solution of the equations of motion of a heavy solid in liquid // *JAMM*, 1985, vol. 49, iss. 2, pp. 160–165.
14. *Ol'shanskii V.Yu.* On the regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Mech. Solids*, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 95–106.

15. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2019, vol. 131, iss. 12, Art. no. 57.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Analysis of regular precession conditions for asymmetrical liquid-filled rigid bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2020, vol. 132, iss. 9, Art. no. 46.
17. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body filled with a liquid // *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, iss. 8, pp. 1500–1513.
18. *Gorr G.V.* Precessional motions in rigid body dynamics and the dynamics of systems of coupled rigid bodies // *JAMM*, 2003, vol. 67, iss. 4, pp. 511–523.
19. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession Motions in Rigid Body Dynamics and Dynamics of Linked Rigid Bodies Systems. Donetsk: Donetsk National Univ. 2009.
20. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.*, 2015, vol. 2, iss. 3, pp. 200–205.
21. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 216–219.
22. *Hussein A.M.* Precessional motion of a rigid body acted upon by three irreducible fields // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019, vol. 15, iss. 3, pp. 285–292.

УДК 531.36

## ОРИЕНТАЦИЯ И КИНЕМАТИКА ВРАЩЕНИЯ: КВАТЕРНИОННЫЕ И ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ МАТРИЧНЫЕ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ, УРАВНЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ

© 2022 г. Ю. Н. Челноков<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

*\*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

После доработки 15.08.2022 г.

Принята к публикации 15.08.2022 г.

Построена теория трехмерных и четырехмерных кососимметрических операторов вращения, порождаемых экспоненциальными представлениями ортогональных операторов или их представлениями с помощью формул Кэли. К порождающим ортогональным операторам относятся матрица направляющих косинусов углов, кватернионная матрица параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернион вращения Гамильтона. Изложены новые матричные и кватернионные кинематические уравнения вращения твердого тела в четырехмерных кососимметрических матрицах и в кватернионах с нулевыми скалярными частями (в ассоциированных кватернионах). Показано их преимущество по сравнению с известными кинематическими уравнениями вращения в трехмерных кососимметрических матрицах и по сравнению с векторными кинематическими уравнениями. В качестве актуального приложения предложенных уравнений рассмотрено построение высокоточных алгоритмов определения ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Кососимметрические матрицы четвертого (четного) порядка и ассоциированные кватернионы имеют качественные преимущества перед кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядка и векторами. Это делает использование предложенных кинематических уравнений вращения в задачах ориентации и навигации более эффективным по сравнению с традиционно используемыми уравнениями в трехмерных кососимметрических операторах.

*Ключевые слова:* трехмерные и четырехмерные ортогональные и кососимметрические операторы вращения, матрицы, векторы, кватернионы, экспоненциальные представления ортогональных операторов, формулы Кэли, кинематические уравнения вращения, алгоритмы ориентации

DOI: 10.31857/S0032823522060030

**1. Введение.** Как известно (Гантмахер, 1967) [1], существует взаимно однозначное соответствие между ортогональными и кососимметрическими операторами, которое устанавливается с помощью экспоненциальных представлений ортогональных операторов или их представлений с помощью формул Кэли. В статье обсуждаются трехмерные и четырехмерные кососимметрические операторы вращения (матрицы, векторы, кватернионы), которые порождаются экспоненциальными представлениями таких ортогональных операторов как матрица направляющих косинусов углов, кватернионная матрица вращения и кватернион вращения Гамильтона [2]. Также рассматриваются представления этих операторов с помощью формул Кэли.

Трехмерный кососимметрический оператор (трехмерная кососимметрическая матрица) соответствует трехмерному вектору, а четырехмерный кососимметрический оператор (четырёхмерная кососимметрическая матрица) соответствует кватерниону, скалярная часть которого равна нулю. Такой кватернион называется нами ассоциированным кватернионом. Число компонент вектора и ненулевых компонент ассоциированного кватерниона одинаково и равно трем, но их свойства существенно различаются, так как размерности вектора и ассоциированного кватерниона различны и равны трем и четырем соответственно.

Кватернион — это четырехмерное гиперкомплексное число (или переменная) с одной действительной и тремя мнимыми единицами. Он был введен в математику и механику Гамильтоном (1843) [2]. Кватернионное исчисление, в отличие от матричного исчисления, имеет геометрическую наглядность векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно более общее и гибкое. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме того, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, можно непосредственно использовать векторные величины, определяемые их проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением, чем векторный. Также отметим, что в кватернионном исчислении, в отличие от матричного, операция аналитического нахождения и численного вычисления обратного кватерниона, в отличие от аналитического нахождения и вычисления обратной матрицы, проста и легко алгоритмируема.

Кватернион вращения Гамильтона может быть введен в классическую механику на основе фундаментальной теоремы Эйлера о конечном повороте твердого тела. Согласно этой теореме твердое тело с одной неподвижной точкой может быть переведено из исходного углового положения в конечное с помощью одного поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку. Угол этого поворота называется углом Эйлера, а ось вращения — осью вращения Эйлера. Уравнения и соотношения теории конечных поворотов и кинематики вращательного движения твердого тела принимают наиболее удобный вид при использовании четырех параметров Эйлера (Euler (1770) [3]; Rodrigues–Hamilton, Euler–Rodrigues (1840) [4]). Эти параметры однозначно связаны с проекциями вектора Родригеса (Rodrigues (1840) [4]) или вектора Гиббса (Gibbs (1901, 1961) [5, 6]).

Использование четырех параметров Эйлера в качестве скалярных кинематических параметров вращательного движения естественным образом привело к введению в механику четырехмерного гиперкомплексного числа — кватерниона конечного поворота Гамильтона (его компонентами являются параметры Эйлера), а также привело к введению в механику четырехмерных кватернионных матриц.

С момента открытия кватернионов до 50-х годов прошлого века интерес к ним проявляли в основном математики и физики, механики использовали их в основном для изучения геометрии движения. Широкий интерес механиков и специалистов в области прикладной математики, навигации и управления движением к кватернионам возник начиная с 60-х годов прошлого века в связи с созданием автономных высокоточных компьютеризированных систем ориентации, навигации и управления движением космических аппаратов, ракет, самолетов, морских кораблей, роботов и манипуляторов, наземных экипажей. Это создание потребовало разработки новых методов и моделей теоретической механики, новой теории инерциальной навигации и управления движением, новых регулярных, не содержащих особых точек типа деления на ноль, моделей и алгоритмов навигации и управления движением, которые эффективно реализуются в реальном времени на бортовых компьютерах. В настоящее время кватернионные методы и модели теоретической механики заняли здесь прочное место



как теоретический аппарат, позволяющий наиболее эффективно решать многие задачи механики, навигации и управления движением.

Кососимметрические матрицы третьего (нечетного) и четвертого (четного) порядков, используемые для описания вращения, обладают качественно различными свойствами (Гантмахер 1967) [1]. Кососимметрические матрицы третьего порядка являются особыми (их определители равны нулю), кососимметрические матрицы четвертого порядка не являются особыми (их определители всегда отличны от нуля). Если многочлен любой степени от кососимметрической матрицы третьего порядка сводится к многочлену второй степени, то многочлен любой степени от кососимметрической матрицы четвертого порядка сводится к многочлену первой степени, что важно при построении алгоритмов ориентации. Ассоциированные кватернионы имеют аналогичные преимущества перед трехмерными векторами.

Это делает использование предложенных нами матричных кинематических уравнений в четырехмерных кососимметрических матрицах и кватернионных кинематических уравнений в ассоциированных кватернионах более эффективным при построении алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) в сравнении с кинематическими уравнениями в трехмерных кососимметрических операторах (векторных и матричных) (Wiener (1962) [7], Stuelpnagel (1964) [8], Bortz (1971) [9], Панов (1984, 1995) [10, 11], Marandi и Modi (1987) [12], Shuster (1993) [13], Tsiotras и Longuski (1995) [14]; Schaub, Tsiotras и Junkins (1995) [15], Schaub и Junkins (1996) [16]; Tsiotras, Junkins и Schaub (1997) [17]; Schaub, Robinett и Junkins (1997) [18], Schaub (1998) [19], Hurtado (2008) [20]). Такие алгоритмы ориентации были предложены нами (Челноков и Переляев (2014) [21]; Челноков, Переляев и Челнокова (2016) [22]).

Отметим, что Schaub, Tsiotras и Junkins (1995) [15], Tsiotras, Junkins и Schaub (1997) [17], а также Hurtado (2008) [20] ввели преобразование Кэли между трехмерной ортогональной матрицей ориентации (для направляющих косинусов углов) и трехмерной кососимметрической матрицей (для модифицированных параметров Родригеса).

Кинематика вращения с использованием параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и четырехмерных ортогональных кватернионных матриц рассматривалась в работах Челнокова (1977) [23], Плотникова и Челнокова (1979, 1981) [24, 25]), а также в отдельных главах книги (Челноков 2006) [26]. Данная статья обобщает и развивает полученные нами результаты в области геометрии и кинематике вращения в книге [26] (2006, гл. 5, с. 245–259), которые касаются трехмерных и четырехмерных кососимметрических операторов вращения и кинематических уравнений в этих операторах.

*Новизна исследования.* Описание вращения, одного из двух основных движений в природе и технике, основано на использовании различных трехмерных и четырехмерных ортогональных и кососимметрических операторов вращения: матриц, векторов и кватернионов Гамильтона. Актуальным является рассмотрение связи между известными ортогональными и кососимметрическими операторами и установление новых удобных операторов вращения. Эти связи устанавливаются нами с использованием экспоненциальных представлений ортогональных операторов и их представлений с помощью формул Кэли. Введенные нами новые удобные операторы вращения — это четырехмерные кососимметрические матрицы и кватернионы с нулевыми скалярными частями (ассоциированные кватернионы). Также актуально получение новых кинематических уравнений вращения, удобных в теории и технике. Такими уравнениями являются предложенные нами кинематические уравнения вращения в четырехмерных кососимметрических матрицах и в ассоциированных кватернионах. Их использование позволило нам построить новые высокоточные алгоритмы определения ориентации в инерциальной системе координат.

Предложенное нами развитие кинематики вращения заключается во введении новых кососимметрических операторов вращения, в построении новых удобных кинематических уравнений вращения.

матических уравнений вращения и эффективных алгоритмов ориентации. Оно позволяет повысить эффективность аналитического исследования кинематики вращения и точность систем ориентации, навигации и управления движением.

## 2. Вращение твердого тела: векторы, кватернионы и матрицы.

2.1. *Вектор и кватернион поворота, матрица направляющих косинусов, кватернионные матрицы поворотов (вращений)*. Введем в рассмотрение опорную (основную) систему координат  $\xi$  ( $\xi_1\xi_2\xi_3$ ) и жестко связанную с твердым телом систему координат  $X$  ( $X_1X_2X_3$ ) с началами в выбранной точке  $O$  тела (полюсе). Введем обозначения:  $\varphi$  – эйлеров угол поворота твердого тела (системы координат  $X$ ) относительно системы координат  $\xi$ ,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор эйлеровой оси конечного поворота тела в опорной системе координат  $\xi$ ,  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – проекции вектора  $\mathbf{e}$  на оси систем координат  $X$  и  $\xi$  (одинаковые при условии, что в начальном положении одноименные оси систем координат  $X$  и  $\xi$  совпадали),  $\boldsymbol{\theta} = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}$  – вектор конечного поворота тела,  $\lambda_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) – параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) [27, 28] рассматриваемого поворота тела,  $\lambda$  – кватернион Гамильтона конечного поворота тела, имеющий вид

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}) \\ \lambda_0 &= \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_i = \sin \frac{\varphi}{2} e_i, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Введем также трехмерную матрицу  $c$  направляющих косинусов  $c_{ik}$  углов между координатными осями  $\xi_i$  и  $X_k$

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

и четырехмерную кватернионную матрицу  $n$  (Bellman 1960 [29], Ickes 1970 [30], Плотников и Челноков (1981) [25], Челноков (2006) [26]):

$$n = n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Матрицы  $c$  и  $n$  ортогональны:

$$c^{-1} = c^T, \quad n^{-1} = n^T; \quad \det c = |c| = 1, \quad \det n = |n| = 1$$

Здесь и далее “Т” – символ транспонирования.

Отметим следующие свойства кватернионной матрицы  $n$ : 1)  $n = E$ , если угол поворота тела  $\varphi = 0$  ( $E$  – единичная матрица размерами  $4 \times 4$ ); 2) произведение матриц вида  $n$  дает матрицу того же вида:  $n_1 n_2 = n_3$ , 3) некоммутативность в общем случае матриц типа  $n$ :  $n_1 n_2 \neq n_2 n_1$ ; 4) матрица  $n$  переходит в обратную матрицу  $n^{-1}$ , если вектор конечного поворота тела  $\boldsymbol{\theta}$  изменяет свое направление на противоположное.

2.2. *Косимметрические матрицы*. В дальнейшем будем рассматривать трехмерные косимметрические матрицы

$$s_v = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

и четырехмерные кососимметрические матрицы типа  $n$ :

$$s_q = n\{\mathbf{s}_v\} = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ s_1 & 0 & s_3 & -s_2 \\ s_2 & -s_3 & 0 & s_1 \\ s_3 & s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Эти кососимметрические матрицы сопоставляются трехмерному вектору  $\mathbf{s}_v$  с координатами  $s_i$ .

Отметим следующие свойства введенных трехмерных и четырехмерных кососимметрических матриц:

$$\begin{aligned} \det s_v &= |s_v| = 0, & s_v^T &= -s_v, & s_v^2 &= -s_v s_v^T = -s_v^T s_v, & s_v^3 &= -|s_v|^2 s_v \\ s_v^4 &= -|s_v|^2 s_v^2, & s_v^5 &= |s_v|^4 s_v, & s_v^6 &= |s_v|^4 s_v^2, & s_v^7 &= -|s_v|^6 s_v \\ s_v^8 &= -|s_v|^6 s_v^2, & |s_v|^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \det s_q &= |s_q| = \det n\{\mathbf{s}_v\} = |n\{\mathbf{s}_v\}| = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^2 \\ s_q^T &= -s_q, & s_q^2 &= -s_q s_q^T = -s_q^T s_q = -|s_v|^2 E, & |s_v|^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \\ s_q^3 &= -|s_v|^2 s_q, & s_q^4 &= |s_v|^4 E, & s_q^5 &= |s_v|^4 s_q, & s_q^6 &= -|s_v|^6 E, & s_q^7 &= -|s_v|^6 s_q, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, кососимметрические матрицы третьего (нечетного) и четвертого (четного) порядков, как уже отмечалось, имеют качественно различные свойства. Если кососимметрические матрицы третьего порядка являются особыми (их определители равны нулю), то кососимметрические матрицы четвертого порядка — нет (их определители всегда отличны от нуля). Кроме того, если многочлен любой степени от кососимметрической матрицы третьего порядка сводится к многочлену второй степени (с соответствующими коэффициентами), то многочлен любой степени от кососимметрической матрицы четвертого порядка сводится к многочлену первой степени (с соответствующими коэффициентами).

### 3. Кососимметрические операторы, порождаемые экспоненциальными представлениями ортогональных операторов.

*3.1. Экспоненциальное представление матрицы направляющих косинусов.* Рассмотрим трехмерную кососимметрическую матрицу  $s_v$  размерами  $3 \times 3$ , определяемую формулой (2.4) и порождаемую экспоненциальным представлением матрицы  $c$  направляющих косинусов углов между осями связанной  $X$  и опорной  $\xi$  систем координат. Эта матрица связана с ортогональной матрицей  $c$  направляющих косинусов углов матричным соотношением

$$c = e^{s_v} = \exp s_v \quad (3.1)$$

Матричная экспонента для любой квадратной матрицы  $A$  может быть представлена в виде степенного ряда

$$e^A = \exp A = E + \frac{1}{1!} A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \quad (3.2)$$

Используя разложение матричной экспоненты  $e^{s_v}$  в ряд (3.2), свойства (2.6) кососимметрической матрицы третьего порядка и разложения в ряды тригонометрических функций

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots, \quad \cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots, \quad (3.3)$$

из (3.1) получим:

$$c = E + |\mathbf{s}_v|^{-1} \sin |\mathbf{s}_v| s_v + |\mathbf{s}_v|^{-2} (1 - \cos |\mathbf{s}_v|) s_v^2; \quad |\mathbf{s}_v|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{s}_v$  – трехмерный вектор с компонентами  $s_i$ .

С другой стороны, матрица  $c$  направляющих косинусов может быть представлена в виде

$$c = c\{\varphi, \mathbf{e}\} = \cos \varphi E + \sin \varphi s_v \{\mathbf{e}\} + (1 - \cos \varphi) s_s \{\mathbf{e}\}; \quad s_s = E + (s_v \{\mathbf{e}\})^2,$$

где  $s_v \{\mathbf{e}\}$  и  $s_s \{\mathbf{e}\}$  – кососимметрическая и симметрическая матрицы, сопоставляемые единичному вектору  $\mathbf{e}$  эйлеровой оси конечного поворота твердого тела, матрица  $s_v \{\mathbf{e}\}$  имеет вид (2.4) и составлена из проекций  $e_i$  единичного вектора  $\mathbf{e}$  эйлеровой оси вращения тела, одинаковых в системах координат  $\xi$  и  $X$ ,  $\varphi$  – эйлеров угол поворота тела.

Вводя эйлеров вектор  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}$  конечного поворота и учитывая, что  $s_s = E + (s_v \{\mathbf{e}\})^2$ , запишем последнюю формулу в виде

$$c = c\{\boldsymbol{\varphi}\} = E + \frac{1}{\varphi} \sin \varphi s_v \{\boldsymbol{\varphi}\} + \frac{1}{\varphi^2} (1 - \cos \varphi) (s_v \{\boldsymbol{\varphi}\})^2; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}, \quad (3.5)$$

где  $s_v \{\boldsymbol{\varphi}\}$  – трехмерная кососимметрическая матрица  $3 \times 3$ , сопоставляемая вектору  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}$ , координаты которого  $\varphi_i = \varphi e_i$  одинаковы в системах координат  $\xi$  и  $X$ .

Из сравнения (3.4) и (3.5) следует, что трехмерная кососимметрическая матрица  $s_v$ , порождаемая экспоненциальным представлением матрицы направляющих косинусов (3.1), имеет вид

$$s_v = s_v \{\boldsymbol{\varphi}\} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}, \quad \varphi_i = \varphi e_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.6)$$

т.е. это трехмерная кососимметрическая матрица, которая сопоставляется эйлерову вектору  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}$  конечного поворота твердого тела (вектор  $\boldsymbol{\varphi}$  является для матрицы  $s_v$  собственным вектором и отвечает ее нулевому собственному числу). Элемент  $s_i$  этой матрицы равен проекции  $\varphi_i$  вектора  $\boldsymbol{\varphi}$ :  $s_i = \varphi_i$ .

Найдем выражение трехмерной кососимметрической матрицы  $s_v$  через матрицу  $c$  направляющих косинусов. Можно показать, что кватернион ориентации  $\boldsymbol{\lambda}$  и матрица  $c$  связаны равенством

$$\lambda_0 E - s_v \{\boldsymbol{\lambda}_v\} = 2\lambda_0 (E + c\{\boldsymbol{\lambda}\})^{-1}; \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\lambda}_v, \quad \lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \boldsymbol{\lambda}_v = \sin(\varphi/2)\mathbf{e}$$

Отсюда, учитывая, что  $s_v \{\boldsymbol{\lambda}_v\} = \sin(\varphi/2) s_v \{\mathbf{e}\} = (1/\varphi) \sin(\varphi/2) s_v \{\boldsymbol{\varphi}\}$ , находим

$$s_v \{\boldsymbol{\varphi}\} = \varphi \operatorname{ctg}(\varphi/2) [E - 2(E + c)^{-1}] \quad (3.7)$$

Обратная матрица

$$(E + c)^{-1} = (1/2)[E + (1 + \operatorname{tr} c)^{-1} (c^T - c)],$$

где  $1 + \operatorname{tr} c = 1 + c_{11} + c_{22} + c_{33} = 2(1 + \cos \varphi) = 4 \cos^2(\varphi/2)$ .

Поэтому формула (3.7), выражающая трехмерную кососимметрическую матрицу  $s_v \{\boldsymbol{\varphi}\}$  через матрицу  $c$  направляющих косинусов, примет вид:

$$s_v \{\boldsymbol{\varphi}\} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\sin \varphi} (c - c^T) \quad (3.8)$$

Формулу (3.8) можно было записать, минувя проделанные выкладки, если использовать известные формулы, выражающие направляющие косинусы  $e_k$  эйлеровой оси конечного поворота твердого тела через элементы матрицы направляющих косинусов.

Отметим, что в литературе приводится (Stuelpnagel (1964) [8], Переляев (2009) [31]) более сложное выражение матрицы  $s_v\{\boldsymbol{\varphi}\}$  через матрицу  $c$  в форме матричного квадратичного многочлена:

$$s_v\{\boldsymbol{\varphi}\} = \frac{1}{\sin \varphi} \left[ -\varphi(1 + 2 \cos \varphi) E + \frac{1}{2} \varphi(1 + \cos \varphi) c - \frac{1}{2} \varphi c^2 \right] \quad (3.9)$$

Это представление для матрицы  $s_v$  обратно представлению (3.5) для матрицы  $c$ .

Также отметим, что Hurtado (2008) [20] приводятся другие формулы, связывающие трехмерную кососимметрическую матрицу  $s_v$  с ортогональной матрицей  $c$  направляющих косинусов углов.

**3.2. Экспоненциальные представления кватернионной матрицы и кватерниона.** Рассмотрим теперь четырехмерную кососимметрическую матрицу  $s_q$ , порождаемую экспоненциальным представлением кватернионной матрицы поворота типа  $n$ , т.е. кососимметрическую матрицу  $s_q$  размерами  $4 \times 4$ , связанную с ортогональной кватернионной матрицей  $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$  соотношением

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = e^{s_q} = \exp s_q, \quad (3.10)$$

где четырехмерная кватернионная матрица  $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$  сопоставляется кватерниону поворота  $\boldsymbol{\lambda}$  и имеет вид матрицы (2.3).

Используя разложение матричной экспоненты  $e^{s_q}$  в ряд (3.2), свойства (2.7) кососимметрической матрицы четвертого порядка и разложения в ряды тригонометрических функций (3.3), из (3.10) получим:

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \cos |\mathbf{s}_v| E + |\mathbf{s}_v|^{-1} \sin |\mathbf{s}_v| s_q; \quad |\mathbf{s}_v|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (3.11)$$

С другой стороны, кватернионная матрица  $n\{\boldsymbol{\lambda}\}$  может быть представлена в следующем виде:

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \cos \frac{\Phi}{2} E + \sin \frac{\Phi}{2} n\{\mathbf{e}\} = \cos \frac{\Phi}{2} E + \frac{2}{\Phi} \sin \frac{\Phi}{2} n\left\{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}\right\}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \Phi \mathbf{e} \quad (3.12)$$

Здесь  $n\{\mathbf{e}\}$  и  $n\{\boldsymbol{\varphi}/2\}$  – четырехмерные кососимметрические матрицы, которые сопоставляются единичному вектору  $\mathbf{e}$  эйлеровой оси конечного поворота твердого тела и половинному вектору  $\boldsymbol{\varphi}$  “истинного” конечного поворота тела и имеют вид матрицы (2.5). При этом, как уже отмечалось, координаты (проекции)  $e_i$  и  $\varphi_i$  векторов  $\mathbf{e}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  в системах координат  $\xi$  и  $X$  одинаковы.

Из сравнения (3.11) и (3.12) следует, что четырехмерная кососимметрическая матрица  $s_q$ , порождаемая экспоненциальным представлением кватернионной матрицы поворота типа  $n$ , определяется соотношениями

$$s_q = n\{\boldsymbol{\varphi}/2\} = (1/2) n\{\boldsymbol{\varphi}\}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \Phi \mathbf{e} \quad (3.13)$$

и имеет вид:

$$s_q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 \\ \varphi_1 & 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ \varphi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_3 & \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_i = \Phi e_i, \quad (3.14)$$

т.е. это четырехмерная кососимметрическая матрица, которая сопоставляется половинному эйлерову вектору  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi e$  конечного поворота твердого тела. Элемент  $s_i$  этой матрицы равен половине проекции  $\varphi_i$  вектора  $\boldsymbol{\varphi}$ :  $s_i = (1/2)\varphi_i$ .

Выражение кватернионной матрицы поворота типа  $n$  через четырехмерную кососимметрическую матрицу  $s_q$  легко получается из (3.10), (3.11) и имеет вид:

$$n\{\boldsymbol{\lambda}\} = \cos \frac{\varphi}{2} E + \frac{2}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} s_q, \quad s_q = n \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \right\} = \frac{1}{2} n\{\boldsymbol{\varphi}\}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi e \quad (3.15)$$

Кватерниону поворота  $\boldsymbol{\lambda}$ , играющему роль ортогонального оператора, соответствует кватернион  $s_q$  с нулевой скалярной частью, играющий роль кососимметрического оператора. Эти кватернионы связаны формулой

$$\boldsymbol{\lambda} = e^{s_q} = \exp s_q = e^{\boldsymbol{\varphi}/2} = \exp(\boldsymbol{\varphi}/2), \quad (3.16)$$

где  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$ ,  $s_q = \boldsymbol{\varphi}/2$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}$ ,  $\lambda_0 = \cos(\varphi/2)$ ,  $\lambda_i = \sin(\varphi/2)e_i$ ;  $\varphi_i = \varphi e_i$ .

#### 4. Кинематические уравнения в кососимметрических операторах, порождаемых экспоненциальными представлениями ортогональных операторов.

4.1. *Трехмерные векторные и матричные кинематические уравнения для эйлерова вектора поворота.* Рассмотрим кинематические уравнения в кососимметрических матрицах, порождаемых экспоненциальными представлениями матрицы направляющих косинусов и кватернионной матрицы поворота. Эти уравнения можно получить, дифференцируя по времени соотношения (3.8), (3.15) и учитывая матричные кинематические уравнения Пуассона (Лурье 1961 [28], Челноков 2006 [26], Журавлев 2008 [32]) и кинематические уравнения в параметрах Эйлера (Бранец и Шмыглевский 1973, 1992 [33, 34]; Челноков 2006 [26], Журавлев 2008 [32]). Однако проще для этой цели использовать векторные кинематические уравнения для эйлерова вектора  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi e$  конечного поворота тела:

$$d\boldsymbol{\varphi}/dt = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \left[ 1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right] \boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (4.1)$$

$$(d\boldsymbol{\varphi}/dt)_{\text{loc}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \left[ 1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right] \boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (4.2)$$

Здесь  $d\boldsymbol{\varphi}/dt = (d\varphi_1/dt)\boldsymbol{\xi}_1 + (d\varphi_2/dt)\boldsymbol{\xi}_2 + (d\varphi_3/dt)\boldsymbol{\xi}_3$  – абсолютная производная от вектора  $\boldsymbol{\varphi}$ , координаты (проекции) которого  $\varphi_i = \varphi e_i$  одинаковы в системах координат  $\boldsymbol{\xi}$  и  $X$ ,  $\boldsymbol{\xi}_i$  – орты опорной системы координат  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $(d\boldsymbol{\varphi}/dt)_{\text{loc}} = (d\varphi_1/dt)\mathbf{x}_1 + (d\varphi_2/dt)\mathbf{x}_2 + (d\varphi_3/dt)\mathbf{x}_3$  – локальная производная от вектора  $\boldsymbol{\varphi}$  ( $\mathbf{x}_i$  – орты связанной с твердым телом системы координат  $X$ ).

Уравнение (4.2) предложено Борцем (1971) [9].

Учтем, что векторное произведение  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varphi}$  соответствует матричному выражению  $\omega_\xi s_\nu - s_\nu \omega_\xi$  или  $\omega_x s_\nu - s_\nu \omega_x$  в трехмерных кососимметричных матрицах  $s_\nu$ ,  $\omega_\xi$  или  $s_\nu$ ,  $\omega_x$ , а также то, что уравнение (4.1) содержит абсолютную производную вектора  $\boldsymbol{\varphi}$ , а уравнение (4.2) – локальную производную. Тогда вместо векторных кинематических уравнений (4.1) и (4.2) мы будем иметь матричные кинематические уравнения

$$\frac{ds_\nu}{dt} = \omega_\xi + \frac{1}{2} (\omega_\xi s_\nu - s_\nu \omega_\xi) + \frac{1}{\varphi^2} \left( 1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) (s_\nu^2 \omega_\xi + \omega_\xi s_\nu^2 - 2s_\nu \omega_\xi s_\nu) \quad (4.3)$$

$$\frac{ds_v}{dt} = \omega_x - \frac{1}{2}(\omega_x s_v - s_v \omega_x) + \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) (s_v^2 \omega_x + \omega_x s_v^2 - 2s_v \omega_x s_v)$$

$$\omega_x = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3^* & -\omega_2^* \\ -\omega_3^* & 0 & \omega_1^* \\ \omega_2^* & -\omega_1^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

представляющие собой матричные нелинейные, в общем случае нестационарные дифференциальные уравнения первого порядка относительно трехмерной кососимметрической матрицы  $s_v$ .

В этих уравнениях матрица  $s_v$  имеет вид (3.6), элементами матрицы  $\omega_\xi$  являются проекции  $\omega_i^*$  вектора  $\omega$  мгновенной угловой скорости твердого тела на опорные координатные оси, а элементами матрицы  $\omega_x$  — проекции  $\omega_i$  этого вектора на связанные координатные оси.

Уравнение (4.4) приводится, например, Stuelpnagel (1964) [8] (см. также Переляев, [31]).

4.2. *Кинематические уравнения в ассоциированных кватернионах.* Используя соотношения  $\omega \times \varphi = (1/2)(\omega \circ \varphi - \varphi \circ \omega)$ ,  $\varphi \circ \varphi = -\varphi^2$  (при этом орты трехмерного ортогонального базиса формально отождествляются с векторными мнимыми единицами Гамильтона), перейдем от векторных кинематических уравнений (4.3) и (4.4) к кватернионным кинематическим уравнениям

$$2d\varphi/dt = 2\dot{\varphi} = \left(1 + \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) \omega_\xi + \omega_\xi \times \varphi - \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) \varphi \circ \omega_\xi \circ \varphi \quad (4.5)$$

$$2d\varphi/dt = 2\dot{\varphi} = \left(1 + \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) \omega_x - \omega_x \times \varphi - \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) \varphi \circ \omega_x \circ \varphi$$

$$\varphi = \varphi_\xi = \varphi_x = \varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 \mathbf{i} + \dot{\varphi}_2 \mathbf{j} + \dot{\varphi}_3 \mathbf{k} \quad (4.6)$$

$$\omega_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad \omega_\xi = \omega_1^* \mathbf{i} + \omega_2^* \mathbf{j} + \omega_3^* \mathbf{k}, \quad \omega \times \varphi = (1/2)(\omega \circ \varphi - \varphi \circ \omega)$$

Здесь кватернионы  $\varphi = \varphi_\xi = \varphi_x$ ,  $\omega_\xi$  и  $\omega_x$  — отображения эйлера вектора конечного поворота твердого тела и вектора мгновенной угловой скорости твердого тела на опорную и связанную системы координат.

В нелинейных дифференциальных уравнениях (4.5) и (4.6) в качестве переменной выступает ассоциированный кватернион  $\varphi$  (кватернион с нулевой скалярной частью), связанный с кватернионом поворота  $\lambda$  формулой (3.16).

Запишем уравнения (4.5) и (4.6) в другом виде:

$$4 \frac{ds_q}{dt} = 4\dot{s}_q = (1 + \kappa \operatorname{ctg} \kappa) \omega_\xi + 2\omega_\xi \times s_q - \frac{1}{\kappa^2} (1 - \kappa \operatorname{ctg} \kappa) s_q \circ \omega_\xi \circ s_q$$

$$4 \frac{ds_q}{dt} = 4\dot{s}_q = (1 + \kappa \operatorname{ctg} \kappa) \omega_x - 2\omega_x \times s_q - \frac{1}{\kappa^2} (1 - \kappa \operatorname{ctg} \kappa) s_q \circ \omega_x \circ s_q, \quad (4.7)$$

где кватернионная переменная

$$s_q = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k} = \varphi/2 = (1/2)(\varphi_1 \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j} + \varphi_3 \mathbf{k}) = (\varphi/2)(e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k})$$

$$\kappa = \varphi/2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}$$

соответствует половинному эйлерову вектору  $\Phi = \Phi e$  конечного поворота тела и, как уже отмечалось, играет роль кососимметрического оператора, который ставится в соответствие такому ортогональному оператору, как кватернион поворота  $\lambda$ , с помощью его экспоненциального представления (3.16).

4.3. *Кинематические уравнения в четырехмерных кососимметрических матрицах.* Кватернионам  $\Phi$ ,  $s_q$ ,  $\omega_\xi$ ,  $\omega_x$  с нулевыми скалярными частями соответствуют четырехмерные кососимметрические матрицы типа  $n$  (см. (2.5)). Произведению кватернионов отвечает произведение кватернионных матриц типа  $n$ , взятых в обратном порядке. Поэтому от кватернионных кинематических уравнений (4.5)–(4.7) можно перейти к матричным кинематическим уравнениям. Так, кватернионному уравнению (4.7) соответствует матричное уравнение

$$4 \frac{ds_q}{dt} = 4\dot{s}_q = (1 + \kappa \operatorname{ctg} \kappa) n_\omega - (s_q n_\omega - n_\omega s_q) - \frac{1}{\kappa^2} (1 - \kappa \operatorname{ctg} \kappa) s_q n_\omega s_q \quad (4.8)$$

$$\kappa = \det s_q = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2},$$

где матричная переменная представляет собой кососимметричную матрицу  $s_q$  размерностей  $4 \times 4$ , которая связана с кватернионной матрицей вращения  $n\{\lambda\}$  с помощью своего экспоненциального представления (3.10) и имеет вид (3.14).

В уравнении (4.8) матрица  $n_\omega$  представляет собой четырехмерную кососимметричную матрицу типа  $n$ , которая соответствует отображению  $\omega_x$  вектора угловой скорости твердого тела на связанный базис.

Матричное кинематическое уравнение (4.8) можно записать в векторно-матричной записи

$$4 \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = \left(1 + \frac{\Phi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + (n_\omega - m_\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} - \frac{4}{\Phi^2} \left(1 - \frac{\Phi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi}{2}\right) \operatorname{sn}_\omega \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$s_i = \varphi_i/2, \quad \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 4(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

$$n_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$(n_\omega - m_\omega) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & E_{1 \times 3} \\ E_{3 \times 1} & \omega_x \end{pmatrix}$$

Здесь  $m_\omega$  и  $n_\omega$  – четырехмерные кососимметричные матрицы типов  $m$  и  $n$  (Челноков 2006) [26], соответствующие отображению  $\omega_x$  вектора угловой скорости твердого тела на связанный базис; первая строка и первый столбец матрицы  $n_\omega - m_\omega$  равны нулю, а ее остаток (называемый ядром этой матрицы) равен удвоенной трехмерной кососимметричной матрице  $\omega_x$ , которая имеет вид первой из матриц, указанных после формулы (4.9).

Такая запись кинематических уравнений удобна с точки зрения построения алгоритмов численного интегрирования этих уравнений.



**5. Представление кососимметрических операторов с помощью формулы Кэли.**  
**5.1. Трехмерные кососимметрические матрицы, порождаемые формулой Кэли.** Рассмотрим трехмерную кососимметрическую матрицу  $s_v$ , связанную с матрицей  $c$  направляющих косинусов формулой Кэли (Гантмахер, [1]):

$$c = (E - s_v)(E + s_v)^{-1}, \quad (5.1)$$

где матрица  $s_v$  имеет, по-прежнему, вид (2.4).

Обратная связь имеет вид

$$s_v = (E - c)(E + c)^{-1} \quad (5.2)$$

Найдем кососимметрическую матрицу  $s_v$ , определяемую формулой (5.2). Учитывая соотношения

$$(E + c)^{-1} = (1/2)[E + (1 + \text{tr } c)^{-1}(c^T - c)]; \quad c^T = (\text{tr } c)(E - c) + c^2$$

$$\text{tr } c = c_{11} + c_{22} + c_{33} = 1 + 2 \cos \varphi, \quad 1 + \text{tr } c = 2(1 + \cos \varphi) = 4 \cos^2(\varphi/2),$$

из (5.1) получим известную формулу Stuelpnagel (1964) [8]:

$$s_v = (1 + \text{tr } c)^{-1} [\text{tr } c E - (1 + \text{tr } c)c + c^2], \quad (5.3)$$

а также формулу

$$s_v = s_v \left\{ -\text{tg} \frac{\varphi}{2} \mathbf{e} \right\} = (1 + \text{tr } c)^{-1} (c^T - c) = -\text{tg} \frac{\varphi}{2} s_v \{ \mathbf{e} \} = -\text{tg} \frac{\varphi}{2} \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

которая устанавливает связь матрицы  $s_v$  с эйлеровой парой  $(\varphi, \mathbf{e})$ .

Таким образом, трехмерная кососимметрическая матрица  $s_v$ , связанная с матрицей направляющих косинусов формулой Кэли, имеет вид (5.4). Из этой формулы следует, что элементами этой матрицы являются координаты  $s_i$  вектора

$$\mathbf{s}_v = -\text{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}, \quad (5.5)$$

в то время как элементами трехмерной кососимметрической матрицы  $s_v$ , порождаемой экспоненциальным представлением матрицы направляющих косинусов, являются координаты вектора  $\mathbf{s}_v = \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{e}$  (см. формулу (3.6)).

Отметим, что трехмерная кососимметрическая матрица  $s_v$ , порождаемая формулой Кэли, и соответствующий ей вектор  $\mathbf{s}_v$ , как это видно из (5.4) и (5.5), не определены для угла  $\varphi = \pi$ .

В книге [1] (Гантмахер 1967) указывается, что в общем случае вместо формул (5.1) и (5.2) (при этом под  $c$  и  $s_v$  понимаются ортогональные и кососимметрические операторы любой размерности) можно взять формулы

$$c = -(E - s_v)(E + s_v)^{-1} \quad (5.6)$$

$$s_v = (E + c)(E - c)^{-1} \quad (5.7)$$

В нашем случае, как показано выше, кососимметричная матрица третьего порядка  $s_v$  может быть представлена в виде (5.2) (кроме случая, когда  $\varphi = \pi$ ). Можно показать, что представление матрицы  $s_v$  через матрицу направляющего косинуса  $c$  в виде (5.7) невозможно.

Отметим, что Hurtado (2008) [20] также рассматриваются вышеприведенные формулы Кэли, связывающие трехмерную кососимметрическую матрицу  $s_v$  с ортогональ-

ной матрицей  $s$  направляющих косинусов углов, и их обобщения с использованием скалярного параметра.

5.2. *Четырехмерные кососимметрические матрицы, порождаемые формулой Кэли.* Рассмотрим теперь связь кватернионной матрицы поворота  $n$ , являющейся ортогональной матрицей, имеющей вид матрицы (2.3), с кососимметрической матрицей  $s_q$  размерами  $4 \times 4$ , имеющей вид матрицы (2.5). В соответствии с формулой Кэли [1] эта связь имеет вид

$$\begin{aligned} n &= (E - s_q)(E + s_q)^{-1} \\ n &= n\{\lambda\} = n\{\lambda_0 + \lambda_v\} = n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} \\ \mathbf{e}_q &= \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_x = (e_1\mathbf{i} + e_2\mathbf{j} + e_3\mathbf{k}), \quad e_i = \mathbf{e} \cdot \xi_i = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь и далее запись вида  $n\{\lambda\}$  означает, что кватернионная матрица  $n$  сопоставляется (соответствует) кватерниону, записанному в фигурных скобках (в данном случае кватерниону поворота  $\lambda$ );  $\mathbf{e}$  — как и ранее, единичный вектор эйлеровой оси поворота твердого тела,  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_x$  — его отображения на связанный  $X$  и опорный  $\xi$  базисы.

Обратная связь матриц  $n$  и  $s_q$  имеет вид

$$s_q = (E - n)(E + n)^{-1} \quad (5.9)$$

Рассмотрим матрицы

$$\begin{aligned} E - n &= E - n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} = 2 \sin(\varphi/4)n\{\sin(\varphi/4) - e_q \cos(\varphi/4)\} \\ E + n &= E + n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} = 2 \cos(\varphi/4)n\{\cos(\varphi/4) + e_q \sin(\varphi/4)\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь при записи этих матриц были учтены структура кватернионной матрицы типа  $n$ , определяемая формулой (2.3), и формулы

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_0 &= 1 - \cos(\varphi/2) = 2 \sin^2(\varphi/4), \quad 1 + \lambda_0 = 1 + \cos(\varphi/2) = 2 \cos^2(\varphi/4) \\ \sin(\varphi/2) &= 2 \sin(\varphi/4) \cos(\varphi/4) \end{aligned}$$

Используя (5.10) и тригонометрические формулы

$$\begin{aligned} \sin(\varphi/4) &= \cos(\pi/2 - \varphi/4) = -\cos(\pi/2 + \varphi/4) \\ \cos(\varphi/4) &= \sin(\pi/2 - \varphi/4) = \sin(\pi/2 + \varphi/4), \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} E - n &= 2 \sin(\varphi/4)n\{\cos(\pi/2 - \varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\pi/2 - \varphi/4)\} \\ (E + n)^{-1} &= [2 \cos(\varphi/4)n\{\cos(\varphi/4) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\}]^{-1} = \\ &= [n\{\cos(\varphi/4) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\}]^{-1} [2 \cos(\varphi/4)E]^{-1} = \\ &= [2 \cos(\varphi/4)]^{-1} n\{\cos(\varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Подставляя последние соотношения в (5.9), получаем выражение для кососимметрической матрицы  $s_q$  через эйлерову пару  $(\varphi, \mathbf{e})$ :

$$s_q = (E - n)(E + n)^{-1} = \operatorname{tg}(\varphi/4)n\{\cos(\pi/2) - \mathbf{e}_q \sin(\pi/2)\},$$

или

$$s_q = \operatorname{tg}(\varphi/4)n\{-\mathbf{e}_q\} = -\operatorname{tg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}_q\}, \quad s_i = -\operatorname{tg}(\varphi/4)e_i \quad (5.12)$$

*Замечание.* При перемножении матриц  $(E - n)$  и  $(E + n)^{-1}$ , определяемых (5.11), приходим к произведению

$$n\{\cos(\pi/2 - \varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\pi/2 - \varphi/4)\}n\{\cos(\varphi/4) - \mathbf{e}_q \sin(\varphi/4)\},$$

двух кватернионных матриц типа  $n$ , которое можно рассматривать как формулу сложения двух конечных поворотов, совершаемых вокруг одной и той же оси, направление которой задается единичным вектором  $-\mathbf{e}$ , на углы  $\pi - \varphi/2$  и  $\varphi/2$ . В результате сложения таких поворотов получаем результирующий поворот вокруг той же оси на угол, равный  $\pi$ , которому соответствует кватернионная матрица  $n\{-\mathbf{e}_q\}$ .

Таким образом, кососимметрическая матрица  $s_q$  размерами  $4 \times 4$ , которая ставится в соответствие с помощью формулы Кэли (5.9) кватернионной матрице поворота типа  $n$ , имеет вид

$$s_q = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ -e_1 & 0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Учитывая (5.12), запишем формулу Кэли (5.8) для кватернионной матрицы  $n$  в таком виде:

$$\begin{aligned} n = n\{\lambda\} &= n\{\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}_q \sin(\varphi/2)\} = (E - s)(E + s)^{-1} = \\ &= (E + \operatorname{tg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}_q\})(E - \operatorname{tg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}_q\})^{-1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Таким образом, если трехмерная кососимметричная матрица  $s_v$ , связанная с матрицей направляющих косинусов формулой Кэли, соответствует вектору  $\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}$ , то четырехмерная кососимметричная матрица  $s_q$ , связанная с кватернионной матрицей вращения типа  $n$  формулой Кэли, соответствует вектору  $\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ . Обратим внимание на то, что если трехмерная кососимметричная матрица  $s_v$  и соответствующий вектор  $\mathbf{s}_v$  не определены для угла  $\varphi = \pi$ , то четырехмерная кососимметричная матрица  $s_q$  и соответствующий вектор  $\mathbf{s}_v$  не определены для угла  $\varphi = 2\pi$ .

Вместо формул (5.8) и (5.9), устанавливающих взаимно однозначное соответствие между кватернионной матрицей поворота  $n$  и четырехмерной кососимметрической матрицей (обозначим ее через  $s^*$ ), можно взять другие формулы:

$$n = -(E - s^*)(E + s^*)^{-1} \quad (5.15)$$

$$s^* = (E + n)(E - n)^{-1} \quad (5.16)$$

В этом случае четырехмерная кососимметрическая матрица  $s^*$  будет определяться формулой

$$s^* = \operatorname{ctg}(\varphi/4)n\{\mathbf{e}\}, \quad (5.17)$$

или, в развернутом виде, формулой

$$s^* = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4} \begin{pmatrix} 0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_1 & 0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

*Замечание.* Формулы (5.8), (5.9) и (5.15), (5.16) не взаимно исключают друг друга, как это было в случае формул (5.1), (5.2) и (5.6), (5.7) для матрицы направляющих косинусов и трехмерной кососимметрической матрицы, так как порядки рассматриваемых операторов (матриц  $n$ ,  $s_q$  и  $s^*$ ) четные.

Таким образом, если четырехмерной кососимметрической матрице  $s_q$ , определяемой формулой Кэли (5.9), соответствует вектор  $\mathbf{s}_v = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ , то четырехмерной ко-

косимметрической матрице  $s^*$ , определяемой другой формулой Кэли (5.17), соответствует вектор  $s_v^* = \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ . При этом, если матрица  $s_q$  и соответствующий ей вектор  $s_v$  не определены для угла  $\varphi = 2\pi$ , то матрица  $s^*$  и соответствующий ей вектор  $s_v^*$  не определены для угла  $\varphi = 0$ .

Из формул (5.9) и (5.16) следует, что матрицы  $s_q$  и  $s^*$  связаны соотношением

$$s_q s^* = s^* s_q = E$$

5.3. Ассоциированные кватернионы, порождаемые формулой Кэли. Матричной формуле Кэли (5.8) соответствует кватернионная формула

$$\lambda = (1 + \mathbf{s})^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}), \quad (5.19)$$

где  $\lambda$  – кватернион поворота (вращения):

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k})$$

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \lambda_i = \sin \frac{\varphi}{2} e_i,$$

а  $\mathbf{s}$  – ассоциированный кватернион (кватернион, скалярная часть которого равна нулю):

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}$$

Отметим, что в кватернионной формуле (5.19), в отличие от матричной формулы (5.8), произведение кватернионных множителей берется в обратном порядке.

Из кватернионного аналога формулы Кэли (5.19) следует формула для ассоциированного кватерниона  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = (1 - \lambda) \circ (1 + \lambda)^{-1} \quad (5.20)$$

Преобразуем правые части формул (5.19) и (5.20). Получим

$$\lambda = (1 + \mathbf{s})^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}) = \left(1 + (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)\right)^{-1} \left(1 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 2\mathbf{s}\right) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{s} = (1 - \lambda) \circ (1 + \lambda)^{-1} = -2 \|1 + \lambda\|^{-1} \lambda_v$$

С учетом соотношений

$$\|1 + \lambda\|^{-1} = [2(1 + \lambda_0)]^{-1} = [2(1 + \cos(\varphi/2))]^{-1} = [4 \cos^2(\varphi/4)]^{-1}$$

$$\lambda_v = \sin(\varphi/2)\mathbf{e}_q = 2 \sin(\varphi/4) \cos(\varphi/4)\mathbf{e}_q$$

формула для кватерниона  $\mathbf{s}$  принимает вид

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k} = (1 - \lambda) \circ (1 + \lambda)^{-1} = -\text{tg} \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q = -\text{tg} \frac{\varphi}{4} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}) \quad (5.22)$$

$$s_i = -\text{tg} \frac{\varphi}{4} e_i$$

Можно убедиться, что подстановка формул (5.22) для  $\mathbf{s}$  и  $s_i$  в соотношение (5.21) дает формулу (2.1) для кватерниона поворота  $\lambda$ .

Можно также показать, что кватернионы  $(1 + \mathbf{s})^{-1}$  и  $(1 - \mathbf{s})$ , а также  $(1 - \lambda)$  и  $(1 + \lambda)^{-1}$  в формулах (5.19) и (5.20) коммутативны. Поэтому эти формулы можно записать в виде

$$\lambda = (1 - \mathbf{s}) \circ (1 + \mathbf{s})^{-1}, \quad \mathbf{s} = (1 + \lambda)^{-1} \circ (1 - \lambda)$$

Рассмотрим другой кватернионный аналог матричной формулы Кэли:

$$\lambda = -(1 + \mathbf{s}^*)^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}^*) \quad (5.23)$$

Из соотношения (5.23) следует формула для ассоциированного кватерниона  $\mathbf{s}^*$ :

$$\mathbf{s}^* = (1 - \lambda)^{-1} \circ (1 + \lambda) \quad (5.24)$$

Преобразуем правые части формул (5.23) и (5.24). Получим

$$\begin{aligned} \lambda &= -(1 + \mathbf{s}^*)^{-1} \circ (1 - \mathbf{s}^*) = -(1 + (s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_3^{*2}))^{-1} (1 - (s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_3^{*2}) - 2\mathbf{s}^*) \\ \mathbf{s}^* &= (1 - \lambda)^{-1} \circ (1 + \lambda) = 2 \|1 - \lambda\|^{-1} \lambda_v \end{aligned} \quad (5.25)$$

С учетом соотношений

$$\|1 - \lambda\|^{-1} = [2(1 - \lambda_0)]^{-1} = [2 \sin^2(\varphi/4)]^{-1}, \quad \lambda_v = \sin(\varphi/2) \mathbf{e}_q = 2 \sin(\varphi/4) \cos(\varphi/4) \mathbf{e}_q$$

формула для ассоциированного кватерниона  $\mathbf{s}^*$  принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^* = s_1^* \mathbf{i} + s_2^* \mathbf{j} + s_3^* \mathbf{k} &= (1 - \lambda)^{-1} \circ (1 + \lambda) = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}) \\ s_i^* &= \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{4} e_i \end{aligned} \quad (5.26)$$

Таким образом, четырехмерным кососимметрическим матрицам  $s_q$  и  $\mathbf{s}^*$ , порождаемым формулами Кэли, отвечают ассоциированные кватернионы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{s}^*$ , определяемые формулами (5.22) и (5.26).

## 6. Кинематические уравнения типа Риккати в кососимметрических операторах, порождаемых формулами Кэли.

*6.1. Трехмерное матричное кинематическое уравнение типа Риккати.* Матричное кинематическое уравнение, использующее в качестве переменной трехмерную кососимметрическую матрицу  $s_v$ , определяемую формулой Кэли (5.2) или (5.4), можно получить, дифференцируя по времени соотношение  $c(E + k) = (E - k)$ , являющееся следствием (5.1), и учитывая кинематические уравнения Пуассона  $dc/dt = \omega_x c = c \omega_x$ . Это уравнение имеет вид уравнения, полученного Stuelpnagel (1964) [8] (см. также Переляев (2009) [31]).

$$\begin{aligned} 2\dot{s}_v &= -\omega_x + \omega_x s_v - s_v \omega_x + s_v \omega_x s_v \\ s_v &= \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_x = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Элементами трехмерной кососимметрической матрицы  $\omega_x$  являются проекции  $\omega_i$  вектора  $\boldsymbol{\omega}$  мгновенной угловой скорости твердого тела на связанные с ним координатные оси.

*6.2. Кинематические уравнения типа Риккати в четырехмерных кососимметрических матрицах.* Для получения матричного кинематического уравнения, использующего в качестве переменной четырехмерную кососимметрическую матрицу  $s_q$ , определяемую формулой Кэли (5.9), или, в явном виде, формулой (5.13), продифференцируем по времени соотношение  $n(E + s_q) = E - s_q$ , являющееся следствием (5.8), и учтем матричное кинематическое уравнение  $2\dot{n} = n_{\omega} n$  в параметрах Эйлера. Получим уравнение

$$2\dot{s}_q = -(E + n)^{-1} n_{\omega} (E - s_q)$$

Из второго выражения (5.11) и соотношения (5.12) находим:  $(E + n)^{-1} = (1/2)(E + s_q)$ . Поэтому последнее уравнение принимает вид следующего матричного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела:

$$4\dot{s}_q = -(E + s_q)n_\omega(E - s_q)$$

$$s_q = \begin{pmatrix} 0 & -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ s_1 & 0 & s_3 & -s_2 \\ s_2 & -s_3 & 0 & s_1 \\ s_3 & s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

После перемножения матриц в правой части уравнения (6.2), получим матричное кинематическое уравнение типа Риккати

$$4\dot{s}_q = -n_\omega + n_\omega s_q - s_q n_\omega + s_q n_\omega s_q \quad (6.3)$$

В этих уравнениях  $n_\omega$  – четырехмерная кососимметрическая матрица типа  $n$ , сопоставляемая отображению  $\omega_x$  вектора угловой скорости твердого тела на связанные с ним координатные оси.

Правые части уравнений (6.1) и (6.3) по своей форме совпадают. Однако в кинематическом уравнении (6.3) в четырехмерных кососимметрических матрицах, в отличие от кинематического уравнения (6.1) в трехмерных кососимметрических матрицах, вместо коэффициента 2 перед производной  $\dot{s}_q$  стоит коэффициент 4. Кососимметрические матрицы четвертого (четного) порядка имеют качественные преимущества перед трехмерными кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядка, указанные во введении, которые делают использование матричного кинематического уравнения (6.2) или (6.3) более эффективным при проведении аналитических исследований и при построении высокоточных численных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы.

Матричное уравнение (6.3) можно записать в более компактном виде. Вводя новую матричную переменную  $\ell = E + s_q$  с элементами  $\ell_0 = 1$ ,  $\ell_i = s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получим уравнение

$$4\dot{\ell} = -2\ell n_\omega + \ell n_\omega \ell$$

Если новую матричную переменную ввести по-другому:  $\ell = E - s_q$  (элементы этой переменной  $\ell_0 = 1$ ,  $\ell_i = -s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )), то вместо уравнения (6.3) получим уравнение

$$4\dot{\ell} = 2n_\omega \ell - \ell n_\omega \ell$$

Для кососимметрической матрицы  $s_q$  размерами  $4 \times 4$ , которой соответствует вектор  $s_v = \text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ , вместо уравнений (6.2) и (6.3) будем иметь уравнения

$$4\dot{s}_q = (E - s_q)n_\omega(E + s_q)$$

$$4\dot{s}_q = n_\omega + n_\omega s_q - s_q n_\omega - s_q n_\omega s_q$$

Матричное кинематическое уравнение, использующее в качестве переменной четырехмерную кососимметрическую матрицу  $s^*$ , определяемую формулой Кэли (5.16), или, в явном виде, формулой (5.18), получается аналогично и имеет вид, полностью совпадающий с уравнением (6.2) или (6.3):

$$4\dot{s}^* = -(E + s^*)n_\omega(E - s^*)$$

$$4\dot{s}^* = -n_\omega + n_\omega s^* - s^* n_\omega + s^* n_\omega s^*$$

Таким образом, полученные матричные кинематические уравнения типа Риккати ковариантны по отношению к четырехмерным кососимметрическим матрицам  $s_q$  и  $s^*$ .

Матричные кинематические уравнения типа Риккати можно записать в векторно-матричной записи. Так, уравнение (6.3) в такой записи имеет вид

$$4 \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \dot{} \\ s_2 \dot{} \\ s_3 \dot{} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + (n_\omega - m_\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + s_q n_\omega \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad (n_\omega - m_\omega) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы  $s_q$ ,  $n_\omega$  и  $m_\omega$  приведены после уравнений (6.2) и (4.9).

Такая запись кинематических уравнений удобна для построения алгоритмов численного интегрирования этих уравнений.

**6.3. Кинематические уравнения типа Риккати в ассоциированных кватернионах.** Для получения кинематических уравнений в порождаемых формулами Кэли ассоциированных кватернионах продифференцируем кватернионное соотношение

$$(1 + \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\lambda} = 1 - \mathbf{s},$$

вытекающее из соотношения (5.19), и подставим в полученный результат дифференцирования производную  $\boldsymbol{\lambda} \dot{} = (1/2)\boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x$  из кватернионного кинематического уравнения в параметрах Эйлера. Получим после преобразований

$$2\mathbf{s} \dot{} = -(1 - \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} \quad (6.4)$$

Обратный кватернион

$$(1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} = \|1 + \boldsymbol{\lambda}\|^{-1} (1 + \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = [4 \cos^2(\varphi/4)]^{-1} (1 + \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = (1/2)(1 - \operatorname{tg}(\varphi/4) \mathbf{e}_q) = (1/2)(1 + \mathbf{s})$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (6.4), получаем кватернионное кинематическое уравнение твердого тела

$$4\mathbf{s} \dot{} = -(1 - \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ (1 + \mathbf{s}) \quad (6.5)$$

В этом уравнении кватернионная переменная

$$\mathbf{s} = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k} = (1 - \boldsymbol{\lambda}) \circ (1 + \boldsymbol{\lambda})^{-1} = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k})$$

является ассоциированным кватернионом, компонентами которого являются проекции вектора  $-\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ . Компоненты кватерниона  $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$  – проекции вектора угловой скорости твердого тела на оси связанной с ним системы координат  $X$ .

Введем новую кватернионную переменную

$$\mathbf{S} = 1 - \mathbf{s} = 1 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k} = 1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q = \left( \cos \frac{\varphi}{4} \right)^{-1} \left( \cos \frac{\varphi}{4} + \sin \frac{\varphi}{4} \mathbf{e} \right)$$

Тогда уравнение (6.5) примет вид

$$4\mathbf{S} \dot{} = \mathbf{S} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \bar{\mathbf{S}}, \quad \mathbf{S} = 1 - \mathbf{s}, \quad \bar{\mathbf{S}} = 1 + \mathbf{s}, \quad \mathbf{S} \dot{} = -\mathbf{s} \dot{}.$$

Выражение в квадратных скобках в правой части этого уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \bar{\mathbf{S}} &= \left( \cos \frac{\varphi}{4} \right)^{-2} \left[ \left( \cos \frac{\varphi}{4} + \sin \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q \right) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \left( \cos \frac{\varphi}{4} - \sin \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q \right) \right] \\ &= \left( \cos \frac{\varphi}{4} \right)^{-2} = 1 + \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} \right)^2 = 1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \|\mathbf{S}\| \end{aligned}$$

описывает поворот вектора  $\boldsymbol{\omega}$  в системе координат  $X$  на угол, равный  $\varphi/2$ .

Уравнение (6.5) можно также записать в следующем виде

$$4\mathbf{s}^{\cdot} = -\left(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)\boldsymbol{\omega}_x^+ = -(1 + \|\mathbf{s}\|)\boldsymbol{\omega}_x^+$$

$$\boldsymbol{\omega}_x^+ = \left(\cos\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q\right) \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \left(\cos\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{\varphi}{4}\mathbf{e}_q\right)$$

Приведенные формы уравнения (6.5) удобны для построения аналитических решений кинематических уравнений в частных случаях движения твердого тела и для их геометрических интерпретаций.

Перемножая кватернионы, стоящие в правой части уравнения (6.5), получаем следующее кватернионное кинематическое уравнение твердого тела, имеющее вид уравнения Риккати:

$$4\mathbf{s}^{\cdot} = -\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s} = -\boldsymbol{\omega}_x - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{s} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{s} \quad (6.6)$$

Кватернионное уравнение (6.6) можно записать в более компактном виде. Вводя новую кватернионную переменную  $\ell = 1 + \mathbf{s}$  с элементами  $\ell_0 = 1$ ,  $\ell_i = s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получим уравнение

$$4\ell^{\cdot} = -2\boldsymbol{\omega}_x \circ \ell + \ell \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \ell$$

Если новую кватернионную переменную ввести по-другому:  $\ell = 1 - \mathbf{s}$  (элементы этой переменной  $\ell_0 = 1$ ,  $\ell_i = -s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )), то вместо уравнения (6.6) получим уравнение

$$4\ell^{\cdot} = 2\ell \circ \boldsymbol{\omega}_x - \ell \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \ell$$

Используя соотношение перепроектирования

$$\boldsymbol{\omega}_x = \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi} \circ \boldsymbol{\lambda},$$

в котором  $\boldsymbol{\omega}_{\xi}$  – отображение вектора угловой скорости твердого тела на опорную (основную) систему координат  $\xi$ , уравнение (6.4) запишем в следующем виде

$$2\mathbf{s}^{\cdot} = -(1 - \mathbf{s}) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi} \circ \boldsymbol{\lambda} \circ (1 + \mathbf{s})$$

С учетом соотношений

$$(1 - \mathbf{s}) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} = 1 + \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\lambda} \circ (1 + \mathbf{s}) = 1 - \mathbf{s}$$

последнее уравнение примет вид

$$4\mathbf{s}^{\cdot} = -(1 + \mathbf{s}) \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi} \circ (1 - \mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q, \quad \boldsymbol{\omega}_{\xi} = \omega_1^* \mathbf{i} + \omega_2^* \mathbf{j} + \omega_3^* \mathbf{k} \quad (6.7)$$

Это – кватернионное кинематическое уравнение твердого тела, переменная  $\mathbf{s}$  в котором является ассоциированным кватернионом, а кватернион  $\boldsymbol{\omega}_{\xi}$  составлен из проекций  $\omega_i^*$  вектора угловой скорости твердого тела на опорную (основную) систему координат  $\xi$ .

Перемножая кватернионы, стоящие в правой части уравнения (6.7), получаем следующее кватернионное кинематическое уравнение типа Риккати:

$$4\mathbf{s}^{\cdot} = -\boldsymbol{\omega}_{\xi} + \boldsymbol{\omega}_{\xi} \circ \mathbf{s} - \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi} \circ \mathbf{s} = -\boldsymbol{\omega}_{\xi} + 2\boldsymbol{\omega}_{\xi} \times \mathbf{s} + \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\omega}_{\xi} \circ \mathbf{s} \quad (6.8)$$

Получим другие кватернионные кинематические уравнения, в которых переменной является ассоциированный кватернион  $\mathbf{s}^* = \operatorname{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$ . Из соотношения (5.23) имеем

$$(1 + \mathbf{s}^*) \circ \boldsymbol{\lambda} = -(1 - \mathbf{s}^*)$$



Дифференцируя это соотношение и учитывая кинематические уравнения в параметрах Эйлера

$$\dot{\lambda} = (1/2)\lambda \circ \omega_x = (1/2)\omega_\xi \circ \lambda,$$

получим после преобразований

$$2s^{*\dot{}} = -(1 + s^*) \circ \lambda \circ \omega_x \circ (\lambda - 1)^{-1} = -(1 + s^*) \circ \omega_\xi \circ \lambda \circ (\lambda - 1)^{-1} \quad (6.9)$$

Обратный кватернион

$$(\lambda - 1)^{-1} = \|\lambda - 1\|^{-1}(\bar{\lambda} - 1) = -(1/2)(1 + \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q) = -(1/2)(1 + s^*)$$

Поэтому, учитывая равенства

$$(1 + s^*) \circ \lambda = -(1 - s^*), \quad \lambda \circ (1 + s^*) = -(1 - s^*),$$

из уравнений (6.9) получаем следующие кватернионные кинематические уравнения, в которых переменной является ассоциированный кватернион  $s^*$ :

$$4s^{*\dot{}} = -(1 - s^*) \circ \omega_x \circ (1 + s^*) \quad (6.10)$$

$$4s^{*\dot{}} = -(1 + s^*) \circ \omega_\xi \circ (1 - s^*), \quad (6.11)$$

где

$$s^* = s_1^* \mathbf{i} + s_2^* \mathbf{j} + s_3^* \mathbf{k} = \text{ctg} \frac{\varphi}{4} \mathbf{e}_q = \text{ctg} \frac{\varphi}{4} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k})$$

$$\omega_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}, \quad \omega_\xi = \omega_1^* \mathbf{i} + \omega_2^* \mathbf{j} + \omega_3^* \mathbf{k}$$

Перемножая кватернионы, стоящие в правых частях уравнений (6.10) и (6.11), получаем следующие кватернионные кинематические уравнения типа Риккати:

$$4s^{*\dot{}} = -\omega_x + s^* \circ \omega_x - \omega_x \circ s^* + s^* \circ \omega_x \circ s^* = -\omega_x - 2\omega_x \times s^* + s^* \circ \omega_x \circ s^* \quad (6.12)$$

$$4s^{*\dot{}} = -\omega_\xi + \omega_\xi \circ s^* - s^* \circ \omega_\xi + s^* \circ \omega_\xi \circ s^* = -\omega_\xi + 2\omega_\xi \times s^* + s^* \circ \omega_\xi \circ s^* \quad (6.13)$$

Из полученных кватернионных кинематических уравнений видно, что они ковариантны по отношению к ассоциированным кватернионам  $\mathbf{s} = -\text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$  и  $s^* = \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$  (имеют одинаковый вид).

Перейдем от кватернионного кинематического уравнению (6.6) к соответствующему векторному кинематическому уравнению, используя известную формулу кватернионной алгебры:  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – кватернионы с нулевыми скалярными частями, центральная точка и символ  $\times$  – символы скалярного и векторного произведений.

Получим

$$4\dot{\mathbf{s}} = -(\omega_x \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} + \mathbf{s} \times (\omega_x \times \mathbf{s}) - 2\omega_x \times \mathbf{s} - \omega_x$$

Двойное векторное произведение  $\mathbf{s} \times (\omega_x \times \mathbf{s}) = k^2 \omega_x - (\omega_x \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}$ . Поэтому последнее дифференциальное уравнение примет вид

$$4\dot{\mathbf{s}} = (s^2 - 1)\omega_x - 2(\omega_x \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - 2\omega_x \times \mathbf{s}, \quad s^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$$

Обозначим  $\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{s} = \text{tg} \frac{\varphi}{4} (e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k})$ . Тогда полученное выше уравнение примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{4}(1 - \boldsymbol{\theta}^2)\omega_x - \frac{1}{2}\omega_x \times \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}(\omega_x \cdot \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} \quad (6.14)$$

В этом уравнении  $\theta$  и  $\omega_x$  могут трактоваться как векторы, определенные своими проекциями в связанной с твердым телом системе координат  $X$ , а производная является локальной производной, характеризующей изменение вектора  $\theta$  в связанной системе координат.

Отметим, что векторы конечных поворотов  $\theta = \text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$  и  $\theta = \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$  и соответствующие им векторные кинематические уравнения рассматривались Пановым (1987, 1995) [10, 11] и Shuster (1993) [13]. Полученное уравнение (6.14) совпадает с векторным кинематическим уравнением (2.6.30), приведенным в книге Панова [11] (1995, с. 66). Это векторное уравнение было получено Пановым в 1983 году. Оно было также получено Schuster (1993, уравнение (338)) [13].

Кватернионное кинематическое уравнение (6.5) или (6.6), а также матричное кинематическое уравнение (6.2) или (6.3) в четырехмерных кососимметрических операторах, полученные нами, имеют качественные преимущества перед векторным кинематическим уравнением (6.14) и его матричным аналогом в трехмерных кососимметрических операторах. Эти преимущества обусловлены качественными преимуществами кососимметрических операторов четвертого (четного) порядка (ассоциированного кватерниона и кватернионной кососимметрической матрицы четвертого порядка) перед кососимметрическими операторами третьего (нечетного) порядка (кососимметрической матрицей третьего порядка и трехмерным вектором). Эти преимущества были указаны во введении.

Указанные во введении свойства четырехмерных кососимметрических операторов позволяют более эффективно строить приближенные аналитические решения кинематических уравнений в четырехмерных кососимметрических операторах и их алгоритмы численного интегрирования (алгоритмы ориентации) в сравнении с использованием векторного кинематического уравнения (6.14) и его матричного аналога в трехмерных кососимметрических операторах.

**7. Алгоритмы ориентации в четырехмерных кососимметрических операторах.** Векторное кинематическое уравнение (6.14) использовалось (Панов (1984, 1995) [10, 11]; Сомов и др. (2008) [35]; Сомов (2009) [36]; Сомов, Бутырин (2012) [37]; Сомов и др. (2014) [38]) для построения алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) в инерциальной системе координат (в том числе для построения алгоритмов определения ориентации спутников), а также для полетной калибровки космического телескопа, БИНС космического аппарата.

Матричное дифференциальное уравнение Stuelpnagel (6.1) (1964) [8] и эквивалентное ему векторное дифференциальное уравнение Bortz (4.2) (1971) [9] также широко используются для построения современных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью БИНС (Savage (1998) [39], Бранец (2009) [40]).

Предложенные нами матричные кинематические уравнения вращательного движения твердого тела (6.2) и (6.3), в которых в качестве переменной используется четырехмерная кососимметрическая матрица  $s_q$ , имеют преимущества перед кинематическим уравнением Stuelpnagel (6.1), в котором в качестве переменной используется трехмерная кососимметрическая матрица  $s_v$ , из-за качественных преимуществ кососимметрических матриц четвертого (четного) порядка перед трехмерными кососимметрическими матрицами третьего (нечетного) порядка.

Предложенные кватернионные кинематические уравнения (6.5) и (6.6), использующие в качестве переменной ассоциированный кватернион  $\mathbf{s}$  и соответствующие матричным уравнениям (6.2) и (6.3), существенно проще векторного кинематического уравнения Bortz (4.2), поскольку, в отличие от него, они не содержат тригонометрических функций и операций деления. Поэтому кинематические уравнения (6.2) и (6.3), а также (6.5) и (6.6) более удобны для построения высокоточных алгоритмов опреде-

ления ориентации движущихся объектов с помощью БИНС в сравнении с кинематическими уравнениями Stuelpnagel и Bortz.

Как уже отмечалось, кватернионные уравнения (6.5) и (6.6) также более удобны для построения высокоточных алгоритмов БИНС в сравнении с векторным кинематическим уравнением Панов—Shuster (6.14) из-за их большей компактности и преимуществ четырехмерных кососимметрических операторов перед трехмерными векторами.

Наряду с описанными выше кинематическими уравнениями вращательного движения твердого тела для решения теоретических и прикладных задач (задач ориентации, навигации и управления движением различного рода движущихся объектов) широко используется классическое кватернионное кинематическое уравнение  $\dot{\lambda} = (1/2)\lambda \circ \omega_x$  (Бранец и Шмыглевский (1973, 1992) [33, 34], Челноков (2006) [26]). В этом линейном кинематическом уравнении переменной служит классический кватернион поворота  $\lambda$ , имеющий норму, равную единице.

Отметим аддитивное вхождение матрицы угловых скоростей в матричные кинематические уравнения (6.3) (Челноков) и (6.1) (Stuelpnagel), кватерниона угловой скорости — в кватернионное кинематическое уравнение (6.6) (Челноков), а вектора угловой скорости — в векторное кинематическое уравнение Bortz (4.2). Поэтому первое приближение решений этих уравнений на шаге интегрирования, построенное методом последовательного приближения Пикара, есть приращение интеграла на шаге интегрирования от вектора абсолютной угловой скорости объекта. Это приращение непосредственно измеряется на борту движущегося объекта большинством современных датчиков угловой скорости. Поэтому эти уравнения более удобны для построения сверхбыстрых циклов алгоритмов определения ориентации движущегося объекта (Savage (1998) [39], Бранец (2009) [40]), использующих интегральную первичную информацию о движении объекта, в сравнении с классическим кватернионным кинематическим уравнением. При этом кватернион ориентации  $\lambda$  вычисляется в быстрых циклах алгоритмов определения ориентации, использующих в качестве входной информации результаты вычислений сверхбыстрых циклов этих алгоритмов.

Известно, что компонента  $\lambda_0^*$  скалярной части и компоненты  $\lambda_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) векторной части  $\lambda_v^*$  кватерниона приращения  $\lambda^*$  кватернионной переменной  $\lambda$ , вычисляемые на шаге интегрирования, отличаются на несколько порядков: величина  $\lambda_0^*$  близка к единице, в то время как величины  $\lambda_i^*$  имеют порядок, равный  $10^{-5}$  и меньше (в зависимости от вида углового движения объекта и шага интегрирования). Близость компоненты  $\lambda_0^*$  к единице может приводить к потере точности определения ориентации при малой ограниченной разрядной сетке бортового вычислителя. Поэтому во многих известных алгоритмах величины  $\lambda_j^*$  вычисляются через промежуточные кинематические параметры  $\varphi_j$ , являющиеся проекциями вектора  $\Phi = \varphi e$  эйлера конечного поворота объекта на связанные с ним координатные оси. Нами величины  $\lambda_j^*$  предлагается вычислять в силу выше указанных причин через другие промежуточные кинематические параметры  $s_i = -\text{tg}(\varphi/4)e_i$ , которые являются компонентами ассоциированного кватерниона  $s = -\text{tg}(\varphi/4)e_q$ .

Нами были построены новые алгоритмы вычисления кватерниона  $\lambda$  ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат по интегральной первичной информации об абсолютной угловой скорости объекта с помощью метода последовательного приближения Пикара. Для построения алгоритмов были использованы формулы Кэли и предложенное нами кватернионное кинематическое уравнение типа Риккати (6.6). Алгоритмы построены по общей рекуррентной схеме, имеющей в кватернионной записи следующий вид:

$$\lambda(t_n) = \lambda(t_{n-1}) \circ \lambda^* \quad (7.1)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_v = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}, \quad \lambda^* = \lambda_0^* + \lambda_1^* \mathbf{i} + \lambda_2^* \mathbf{j} + \lambda_3^* \mathbf{k}$$

Здесь  $\lambda_j^*$  – приращения параметров Эйлера  $\lambda_j$  на шаге интегрирования  $h = t_n - t_{n-1}$ .

Приращения  $\lambda_j^*$  вычисляются через компоненты  $s_i$  ассоциированного кватерниона  $\mathbf{s} = -\text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$  по формуле

$$\lambda^* = (1 - s^2 - 2\mathbf{s})/(1 + s^2), \quad \mathbf{s} = s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k}, \quad s^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (7.2)$$

В свою очередь переменные  $s_i$  находятся по одному из построенных нами алгоритмов численного интегрирования (с нулевыми начальными условиями) кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (6.6).

Соотношение, связывающее кватернион поворота  $\lambda^*$  с ассоциированным кватернионом  $\mathbf{s}$ , и дифференциальное уравнение (6.6) для кватерниона  $\mathbf{s}$  гораздо проще соотношения, связывающего кватернион поворота  $\lambda^*$  с вектором поворота  $\boldsymbol{\varphi}$ , и дифференциального уравнения (4.2) для вектора  $\boldsymbol{\varphi}$  (уравнения Bortz).

Приведем два алгоритма из построенных нами алгоритмов вычисления переменных  $s_i$ .

*Одношаговый алгоритм третьего порядка точности*

$$\mathbf{s} = -a\boldsymbol{\gamma} + b\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}^* + c\boldsymbol{\gamma} \circ \boldsymbol{\gamma}^* \circ \boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\omega}_x(t) dt, \quad \boldsymbol{\gamma}^* = \gamma_1^* \mathbf{i} + \gamma_2^* \mathbf{j} + \gamma_3^* \mathbf{k} = \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \boldsymbol{\omega}_x(t) dt \quad (7.3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$$

$$h = t_n - t_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2}$$

*Двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности*

$$\mathbf{s} = -(a + b\boldsymbol{\gamma}^2)\boldsymbol{\gamma}' - (a + b\boldsymbol{\gamma}'^2)\boldsymbol{\gamma}'' - e\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}''$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = \gamma_1' \mathbf{i} + \gamma_2' \mathbf{j} + \gamma_3' \mathbf{k} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+h/2} \boldsymbol{\omega}_x(t) dt, \quad \boldsymbol{\gamma}'' = \gamma_1'' \mathbf{i} + \gamma_2'' \mathbf{j} + \gamma_3'' \mathbf{k} = \int_{t_{n-1}+h/2}^{t_{n-1}+h} \boldsymbol{\omega}_x(t) dt, \quad (7.4)$$

$$h = t_n - t_{n-1}$$

В этих алгоритмах  $a, b, c, e$  – числовые коэффициенты.

Порядок точности алгоритма, например, третий, означает, что накопленная методическая погрешность алгоритма пропорциональна  $h^3$ , где  $h$  – шаг интегрирования.

Термин “одношаговый” или “двухшаговый”, или “четырёхшаговый” алгоритм означает, что шаг интегрирования равен дискретности или равен удвоенной дискретности, или равен учетверенной дискретности выдачи интегральной первичной информации гироскопов.

Нами (совместно с Челноковой) исследованы с помощью математического моделирования хорошо известные алгоритмы вычисления ориентации в инерциальной системе координат (Edwards 1973 [41]; Бранец и Шмыглевский 1973, 1992 [33, 34]; Бесараб 1974 [42]; Панов 1995 [11]; Savage 1998 [39]; Челноков 2006 [26]; Бранец 2009 [40]): метод средней скорости, имеющий второй порядок точности; одношаговые и двухшаговые алгоритмы третьего порядка точности; двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности; четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности, полученный из алгоритма Панова 6-го порядка точности для вычисления вектора  $\boldsymbol{\varphi}$ .

Также исследованы наши новые одношаговые и двухшаговые алгоритмы третьего и четвертого порядков точности (Челноков и Переляев (2014) [21]; Челноков, Переляев

и Челнокова (2016) [22]) и алгоритмы (7.1)–(7.3) и (7.1), (7.2), (7.4). Эти алгоритмы построены автором статьи с использованием кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (6.6).

В качестве входной информации в алгоритмах используется интегральная информация об абсолютной угловой скорости объекта (величины  $\gamma_i$ ). Выходная информация алгоритмов – параметры Эйлера  $\lambda_j$  (компоненты кватерниона  $\lambda$  ориентации движущегося объекта в инерциальной системе координат).

Одна из отличительных черт проведенного исследования заключается в изучении точности (вычислительного дрейфа) алгоритмов ориентации при наличии высокочастотных (имеющих порядок 100 гц или 400 гц) колебаниях основания с учетом частоты съема первичной интегральной информации 1000 гц или 2000 гц. При моделировании движения объекта предполагается, что он совершает по каждой из угловых переменных  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  (типа самолетных углов) отдельные гармонические колебания или совершает по каждой из угловых переменных композицию нескольких гармонических колебаний с разными амплитудами и частотами. Задание таких законов движения объекта позволяет наиболее полно выявить точностные возможности исследуемых алгоритмов (традиционно при исследовании алгоритмов ориентации движение объекта задается в виде конического движения, т.е. моделируется колебательное движение объекта по двум, а не трем угловым переменным). Вычисления проводились с 32-х или 64-х разрядной сеткой (последняя использовалась при моделировании алгоритмов четвертого порядка точности). Шаг интегрирования  $h$  выбирался из интервала [0.0005 с–0.1 с]. Время движения объекта (интегрирования) – 600 с (10 мин.).

Моделирование проводилось (Челноковой) как для отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта (частоты колебаний  $f_\psi = f_\gamma = 1$  Гц,  $f_\vartheta = 0.5$  Гц) с малыми ( $\psi_+ = 1$  град,  $\vartheta_+ = 2$  град,  $\gamma_+ = 3$  град) и большими ( $\psi_+ = 15$  град,  $\vartheta_+ = 5$  град,  $\gamma_+ = 15$  град) амплитудами (а также для других вариантов отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта с большими амплитудами и частотами), так и для композиций высокочастотных и низкочастотных гармонических колебаний объекта, в частности, для следующих параметров гармоник: первая высокочастотная гармоника: частоты –  $f_\psi = 380$  Гц,  $f_\vartheta = 400$  Гц,  $f_\gamma = 420$  Гц; амплитуды (одинаковые) –  $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 2.5$  угл. сек или  $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 25$  угл. сек; вторая высокочастотная гармоника: частоты –  $f_\psi = 60$  Гц,  $f_\vartheta = 80$  Гц,  $f_\gamma = 100$  Гц; амплитуды –  $\psi_+ = 1$  угл. мин,  $\vartheta_+ = 1.5$  угл. мин,  $\gamma_+ = 2$  угл. мин или  $\psi_+ = 10$  угл. мин,  $\vartheta_+ = 15$  угл. мин,  $\gamma_+ = 20$  угл. мин; третья низкочастотная гармоника: частоты –  $f_\psi = f_\vartheta = f_\gamma = 1$  Гц (одинаковые) или  $f_\psi = 1$  Гц,  $f_\vartheta = 2$  Гц,  $f_\gamma = 3$  Гц; амплитуды –  $\psi_+ = 6$  град,  $\vartheta_+ = 8$  град,  $\gamma_+ = 10$  град.

Приведем основные выводы, касающиеся точностных характеристик указанных алгоритмов ориентации для описанных угловых движений объекта.

1. Из всех рассмотренных алгоритмов наименьшие методические погрешности имеет наш новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (7.4), построенный на основе нового кватернионного дифференциального кинематического уравнения типа Риккати (6.5) или (6.6). Этот алгоритм обладает лучшей вычислительной устойчивостью и имеет простую структуру.

При шаге интегрирования  $h = 0.01$  с его погрешности для моделируемых низкочастотных угловых движений объекта с большими амплитудами составляют  $1.29 \times 10^{-5}$  град,  $3.93 \times 10^{-6}$  град и  $1.45 \times 10^{-5}$  град по переменным  $\psi$ ,  $\vartheta$  и  $\gamma$  соответственно, что на 1–2 порядка меньше (для этого же шага интегрирования), чем погрешности всех других рассмотренных одно- и двухшаговых алгоритмов. При шаге интегрирования  $h = 0.001$  с погрешности двухшагового алгоритма (7.4) для этих угловых движений объекта составляют величины  $4.13 \times 10^{-7}$  град,  $1.47 \times 10^{-7}$  град и  $5.40 \times 10^{-7}$  град по переменным  $\psi$ ,

$\vartheta$  и  $\gamma$  соответственно, а при шаге интегрирования  $h = 0.002$  с эти погрешности состав-  
ляют величины  $1.66 \times 10^{-6}$  град,  $5.87 \times 10^{-7}$  град и  $2.16 \times 10^{-6}$  град соответственно.

2. Из всех рассмотренных одношаговых алгоритмов ориентации наименьшую мето-  
дическую погрешность имеет наш новый одношаговый алгоритм третьего порядка  
точности (7.3).

3. Хорошо известный и часто используемый четырехшаговый алгоритм 4-го поряд-  
ка точности Панова (1995) [11] имеет точность, сопоставимую с точностью нашего но-  
вого двухшагового алгоритма четвертого порядка точности (7.4), если фигурирующие  
в этом алгоритме трансцендентные функции (синус, косинус, квадратный корень)  
вычисляются по высокоточным алгоритмам (реализуемым, например, в стандартных  
подпрограммах вычисления этих функций). Однако наш новый двухшаговый алго-  
ритм четвертого порядка точности имеет преимущество в смысле объема необходи-  
мых вычислений в 1.5–2 раза в силу его большей простоты. Кроме этого, новый двух-  
шаговый алгоритм позволяет выполнять определение ориентации с большей частотой  
(в сравнении с четырехшаговым алгоритмом) и, следовательно, с большей точностью.

4. Вычислительные дрейфы всех алгоритмов для высокочастотных колебаний объ-  
екта с малыми амплитудами (наиболее интересный для практики случай) имеют поря-  
док  $10^{-6}$  град.

5. Наличие высокочастотных составляющих в угловых колебаниях объекта может  
приводить к потере вычислительной устойчивости алгоритмов ориентации при невер-  
ном выборе шага интегрирования. Так, для второй из рассмотренных композиций вы-  
сокочастотных и низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта потеря  
вычислительной устойчивости алгоритмов ориентации наблюдалась уже при шаге ин-  
тегрирования, равном 0.002 с.

**Заключение.** В статье рассмотрены трехмерные и четырехмерные косо-  
симметрические операторы, порожденные экспоненциальными представлениями таких ортого-  
нальных операторов, как матрица направляющих косинусов углов, кватернионная  
матрица вращения и кватернион вращения Гамильтона. Приведены трехмерные век-  
торные и матричные кинематические уравнения для вектора вращения Эйлера  $\varphi = \varphi\mathbf{e}$ ,  
включая векторное уравнение (Bortz) и матричное уравнение (Stuelpnagel). Получены  
новые четырехмерные кинематические уравнения в ассоциированных кватернионах и  
в кватернионных косо-симметрических матрицах, компонентами которых являются  
проекции вектора вращения  $\varphi/2$ .

Рассмотрено представление трехмерных и четырехмерных косо-симметрических  
матриц, а также ассоциированных кватернионов с помощью формул Кэли. Показано,  
что если трехмерной косо-симметрической матрице  $s_v$ , связанной с матрицей направ-  
ляющих косинусов формулой Кэли, соответствует вектор  $\mathbf{s}_v = -\text{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}$ , то четырех-  
мерной косо-симметрической матрице  $s_q$ , связанной той или иной формулой Кэли с  
кватернионной матрицей поворота типа  $n$ , соответствует вектор  $\mathbf{s}_v = -\text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$  или  
вектор  $\mathbf{s}_v = \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ . Также показано, что четырехмерным косо-симметрическим мат-  
рицам  $s_q$  и  $s_q^*$ , порождаемым формулами Кэли, отвечают ассоциированные кватернио-  
ны  $\mathbf{s}_q = -\text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$  и  $\mathbf{s}_q^* = \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}_q$ .

Рассмотрены кинематические уравнения вращения в косо-симметрических опера-  
торах типа Риккати: трехмерное матричное кинематическое уравнение, предложенное  
Stuelpnagel, и новые четырехмерные матричные кинематические уравнения, предло-  
женные нами. В этих уравнениях в качестве переменных используются трехмерная ко-  
со-симметрическая матрица и четырехмерные косо-симметрические матрицы, определя-  
емые формулами Кэли. Косо-симметрические матрицы четвертого (четного) порядков  
имеют качественные преимущества перед трехмерными косо-симметрическими матри-  
цами третьего (нечетного) порядков. Это делает использование наших матричных кин-  
ематических уравнений более эффективным при проведении аналитических исследова-

ний и при построении высокоточных численных алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы в сравнении с уравнением Stuelpnagel.

Получены новые различные кватернионные кинематические уравнения вращения в ассоциированных кватернионах  $s$  и  $s^*$ : уравнения, правые части которых имеют вид кватернионных произведений трех кватернионов, один из которых (центральный) является кватернионом угловой скорости твердого тела, а также уравнения типа Риккати. Эти кватернионы  $s$  и  $s^*$  порождаются кватернионными аналогами формул Кэли. Показано, что полученные кватернионные кинематические уравнения ковариантны по отношению к ассоциированным кватернионам  $s$  и  $s^*$ . Также показано, как из одного из полученных нами кинематических уравнений в ассоциированных кватернионах получается векторное кинематическое уравнение Панов—Shuster относительно векторной переменной  $tg(\varphi/4)\mathbf{e}$ . Вектор и ассоциированный кватернион имеют качественно различные свойства, хотя имеют одинаковое количество ненулевых компонент, равное 3. В кватернионном исчислении, в отличие от векторного исчисления, операция деления определена (существует), и она легко алгоритмизируется, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Это делает использование кинематических уравнений в ассоциированных кватернионах в задачах ориентации более эффективным, чем использование векторных уравнений.

Нами получены новые алгоритмы вычисления параметров Эйлера. Они построены с помощью метода последовательного приближения Пикара, использования формул Кэли и кинематического уравнения типа Риккати в ассоциированных кватернионах. В алгоритмах используется измеренная на борту движущегося объекта интегральная первичная информация об абсолютной угловой скорости объекта (квазикоординаты). Новые, предложенные нами алгоритмы, имеют простую структуру, позволяют определять инерциальную ориентацию объекта в параметрах Эйлера более точно, чем другие, рассмотренные известные алгоритмы, и обладают лучшей вычислительной устойчивостью.

*Развитие исследования.* Построенная нами теория может быть обобщена на общее пространственное движение твердого тела, которое представляет собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений. Это обобщение может быть выполнено с помощью дуальных векторов, дуальных матриц и бикватернионов Клиффорда (дуальных кватернионов) (Clifford (1873) [43], Котельников (1895, 1970, 1950) [44]–[46], Диментберг (1978) [47], Челноков (2006) [8]).

Также, на наш взгляд, перспективно построение и реализация на бортовых компьютерах новых дуальных алгоритмов ориентации и навигации с использованием новых дуальных матричных и бикватернионных кинематических уравнений. К таким алгоритмам относятся дуальные алгоритмы вычисления параметров ориентации и координат объекта в инерциальной системе координат, а также параметров инерциальной ориентации и проекций вектора кажущейся скорости объекта на инерциальные и связанные с объектом координатные оси по информации гироскопов и акселерометров. Такие дуальные кватернионные уравнения и алгоритмы, построенные с использованием дуальных матричных и кватернионных аналогов формул Кэли и принципа перенесения Котельникова—Штуди, рассматриваются нами в работе [48] (Челноков 2016).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00218.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
2. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges & Smith, 1853. 382 p.

3. *Euler L.* Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile // *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.* 1770. V. 15. P. 75–106.
4. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systems olide dans l'espace, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses deplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // *J. des Mathematiques Pureset Appliquess.* 1840. V. 5. P. 380–440.
5. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. New York: Dover, 1961.
6. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. New York: Scribners, 1901.
7. *Wiener. T.F.* Theoretical Analysis of Gimballess Inertial Reference Equipment Using Delta-Modulated Instruments. Ph.D. Diss. Dep. Aeron.&Astron. Massachusetts Inst. of Technol. Cambridge, MA, 1962.
8. *Stuelpnagel J.* On the parameterization of the three-dimensional rotation group // *SIAM Rev.* 1964. V. 6. № 4. P. 422–429.
9. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // *IEEE Trans. on Aerosp.&Elect. Syst. AES-7.* 1971. V. 1. P. 61–66.
10. *Панов А.П.* О выборе параметров и кинематических уравнений вращения для численного интегрирования в ЦВМ // *Кибернетика и выч. техн.* 1984. Вып. 62. С. 104–111.
11. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 279 с.
12. *Marandi S.R., Modi V.J.* A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics // *Acta Astron.* 1987. V. 15. № 11. P. 833–843.  
[https://doi.org/10.1016/0094-5765\(87\)90038-5](https://doi.org/10.1016/0094-5765(87)90038-5)
13. *Shuster M.D.* A survey of attitude representations // *J. Astron. Sci.* 1993. V. 41. № 4. P. 439–517.
14. *Tsiotras P., Longuski J.M.* A new parameterization of the attitude kinematics // *J. Astron. Sci.* 1995. V. 43. № 3. P. 243–262.
15. *Schaub H., Tsiotras P., Junkins J.L.* Principal rotation representations of proper  $N \times N$  orthogonal matrices // *Int. J. Engng. Sci.* 1995. V. 33. № 15. P. 2277–2295.
16. *Schaub H., Junkins J.L.* Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters // *J. Astron. Sci.* 1996. V. 44. № 1. P. 1–19.
17. *Tsiotras P., Junkins J.L., Schaub H.* Higher order cayley transforms with applications to attitude representations // *J. Guidance, Control, & Dyn.* 1997. V. 20. № 3. P. 528–534.
18. *Schaub H., Robinett R.D., Junkins J.L.* New penalty functions for optimal control formulation for spacecraft attitude control problems // *J. Guidance, Control, & Dyn.* 1997. V. 20. № 3. P. 428–434.
19. *Schaub H.* Novel coordinates for nonlinear multibody motion with applications to spacecraft dynamics and control. Ph.D. Diss. Aerosp. Engng. Texas AM Univ. College Station. TX, 1998.
20. *Hurtado, John E.* Interior Parameters, Exterior Parameters, and a Cayley-Like Transform // *J. Guidance, Control, & Dyn.* 2008.
21. *Chelnokov Y.N., Perelyaev S.E.* New equations and algorithms for orientation and navigation of strapdown inertial navigation systems with four-dimensional skew-symmetric operators // 21st St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. ICINS 2014. Proce. 21. 2014. P. 365–369.
22. *Челноков Ю.Н., Переляев С.Е., Челнокова Л.А.* Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта // *Изв. Саратов. унив. Новая серия: Мат. Мех. Информ.* 2016. Т. 16. № 1. С. 80–95.
23. *Челноков Ю.Н.* Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига–Гамильтона по его угловой скорости // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1977. № 3. С. 11–20.
24. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Сравнительный анализ точности алгоритмов определения ориентации объекта в параметрах Родрига–Гамильтона и направляющих косинусах // *Космич. исслед.* 1979. Т. 17. Вып. 3. С. 371–377.



25. *Плотников П.К., Челноков Ю.Н.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела // Сб. науч.-метод. статей по теор. механике. 1981. Вып. 11. С. 122–129.
26. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
27. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ НКТИ СССР, 1937. 500 с.
28. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
29. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
30. *Ickes B.F.* A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions // AIAA J. 1970. № 8. P. 13–17.
31. *Переляев С.Е.* О соответствии между трехмерными и четырехмерными параметрами трехмерной группы вращения // Изв. РАН. МТТ. 2009. Т. 44. № 2. С. 204–213.
32. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
33. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
34. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
35. *Somov Ye.I., Butyrin S.A., Skirmunt V.K.* In-flight alignment calibration of a space telescope and a star tracker cluster // Proc. Jubilee 15th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”. St. Petersburg. 2008. P. 139–143.
36. *Somov Ye.I.* Multiple algorithms for filtration, integration and calibration of a strapdown inertial system for a spacecraft attitude determination // Proc. 16th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”. St. Petersburg. 2009. P. 110–112.
37. *Somov Ye.I., Butyrin S.A.* In-flight alignment of a space telescope and a star tracker cluster at a scanning observation of the Earth marked objects // Proc. 19th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”. St. Petersburg. 2012. P. 242–244.
38. *Somov E.I., Butyrin S.A., Gasizadeh Ch.M.* Flight calibration of SINS of a small information satellite with correction from solar and magnetic sensors // XXI St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. Coll. of Mater. St. Petersburg. 2014. P. 18–21.
39. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Pt. 1: Attitude algorithm // J. Guidance, Control & Dyn. 1998. V. 21. № 1. P. 19–28.
40. *Бранец В.Н.* Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: МФТИ, 302 с.
41. *Edwards A.* Strapdown inertial navigation systems // Rocket Techn. 1973. № 5. P. 50–57.
42. *Бесараб П.Н.* Определение параметров пространственной ориентации движущегося объекта // ЖВММФ. 1974. Т. 14. № 1. С. 240–246.
43. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. № 4. P. 381–395.
44. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань: 1895. 215 с.
45. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
46. *Котельников А.П.* Теория векторов и комплексные числа // в: Сб. статей. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.: Гостехиздат, 1950. С. 7–47.
47. *Диментберге Ф.М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
48. *Челноков Ю.Н.* Уравнения кинематики твердого тела в четырехмерных кососимметрических операторах и их приложения в инерциальной навигации // ПММ. Т. 80. Вып. 6. 2016. С. 637–652.

## Orientation and Kinematics of Rotation: Quaternion and Four-dimensional Skew-symmetric Operators, Equations and Algorithms

Yu. N. Chelnokov<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Precision Mechanics and Control Problems RAS, Saratov, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

This paper derives the theory of three-dimensional and four-dimensional skew-symmetric rotation operators, generated by exponential representations of orthogonal operators or their representations using Cayley formulas. The generating orthogonal operators include the direction cosine matrix, the quaternion matrix of Euler parameters, and the Hamilton rotation quaternion. New matrix and quaternion kinematic equations for the rotation of a rigid body in four-dimensional skew-symmetric matrices and in quaternions with zero scalar parts (in associated quaternions) are proposed. It is shown that they are advantageous in comparison with the known kinematic equations of rotation in three-dimensional skew-symmetric matrices and with the vector kinematic equations. As a topical application of the proposed equations, the construction of high-precision algorithms for determining the orientation of a moving object in an inertial coordinate frame using a strapdown inertial navigation system is considered. Skew-symmetric matrices of the fourth (even) order and associated quaternions have qualitative advantages over skew-symmetric matrices of the third (odd) order and vectors. This makes the use of our proposed kinematic equations of rotation in orientation and navigation problems more efficient in comparison with the traditionally used equations in three-dimensional skew-symmetric operators.

*Keywords:* three-dimensional and four-dimensional orthogonal and skew-symmetric rotation operators, matrices, vectors, quaternions, exponential representations of orthogonal operators, Cayley formulas, kinematic equations of rotation, orientation algorithms

### REFERENCES

1. *Gantmakher F.R.* The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1967.
2. *Hamilton W.R.* Lectures on Quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853.
3. *Euler L.* Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile // *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1770, vol. 15, pp. 75–106.
4. *Rodrigues O.* Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systems olide dans l'espace, et de la variation des coordonnee sprovenant de ses deplacement sconsideeres independamment des causes qui peuvent les produire // *J. des Mathematiques Pureset Appliquess*, 1840, vol. 5. pp. 380–440.
5. *Gibbs J.W.* Scientific Papers. N.Y.: Dover, 1961.
6. *Gibbs J.W.* Vector Analysis. N.Y.: Scribners, 1901.
7. *Wiener. T.F.* Theoretical Analysis of Gimballess Inertial Reference Equipment Using Delta-Modulated Instruments. Ph.D. Diss. Dep. Aeron.&Astron. Massachusetts Inst. of Technol. Cambridge. MA, 1962.
8. *Stuelpnagel J.* On the parameterization of the three-dimensional rotation group // *SIAM Rev.*, 1964, vol. 6, no. 4, pp. 422–429. <https://doi.org/10.1137/1006093>
9. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // *IEEE Trans. on Aersp.&Elect. Syst.* AES-7, 1971, vol. 1, pp. 61–66.
10. *Panov A.P.* On choosing the kinematic parameters and equations of rotation for numerical integration on a computer // *Kibern. Vychisl. Tekh.*, 1987, vol. 62, pp. 104–111.
11. *Panov A.P.* Mathematical Background of Inertial Orientation Theory. Kiev: Nauk. Dumka, 1995.
12. *Marandi S.R., Modi V.J.* A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics // *Acta Astron.*, 1987, vol. 15, no. 11, pp. 833–843. [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(87\)90038-5](https://doi.org/10.1016/0094-5765(87)90038-5)
13. *Shuster M.D.* A survey of attitude representations // *J. Astron. Sci.*, 1993, vol. 41, no. 4, pp. 439–517.
14. *Tsiotras P., Longuski J.M.* A new parameterization of the attitude kinematics // *J. Astron. Sci.*, 1995, vol. 43, no. 3, pp. 243–262.

15. *Schaub H., Tsiotras P., Junkins J.L.* Principal rotation representations of proper  $N \times N$  orthogonal matrices // *Int. J. Engng. Sci.*, 1995, vol. 33, no. 15, pp. 2277–2295.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(95\)00070-E](https://doi.org/10.1016/0020-7225(95)00070-E)
16. *Schaub H., Junkins J.L.* Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the Rodrigues parameters // *J. Astron. Sci.*, 1996, vol. 44, no. 1, pp. 1–19.
17. *Tsiotras P., Junkins J.L., Schaub H.* Higher order Cayley transforms with applications to attitude representations // *J. Guidance, Control & Dyn.*, 1997, vol. 20, no. 3, pp. 528–534.  
<https://doi.org/10.2514/2.4072>
18. *Schaub H., Robinett R.D., Junkins J.L.* New penalty functions for optimal control formulation for spacecraft attitude control problems // *J. Guidance, Control & Dyn.*, 1997, vol. 20, no. 3, pp. 428–434. <https://doi.org/10.2514/2.4093>
19. *Schaub H.* Novel coordinates for nonlinear multibody motion with applications to spacecraft dynamics and control. Ph.D. Diss. Aersp. Engng. Texas AM Univ. College Station. TX, 1998.
20. *Hurtado J.E.* Interior Parameters, Exterior Parameters, and a Cayley-Like Transform // *J. Guidance, Control & Dyn.* 2008. <https://doi.org/10.2514/1.39624>
21. *Chelnokov Y.N., Perelyaev S.E.* New equations and algorithms for orientation and navigation of strapdown inertial navigation systems with four-dimensional skew-symmetric operators // 21st St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. ICINS 2014. Proc. 21, 2014, pp. 365–369.
22. *Chelnokov Yu.N., Perelyaev S.E., Chelnokova L.A.* An investigation of algorithms for estimating the inertial orientation of a moving object // *Izv. Saratov Univ. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16(1), pp. 80–95. (in Russian) <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-80-95>
23. *Chelnokov Yu.N.* On determining vehicle orientation in the Rodrigues-Hamilton parameters from its angular velocity // *Mech. Solids*, 1977, vol. 37 (3), pp. 8–16.
24. *Plotnikov P.K., Chelnokov Yu.N.* Comparative error analysis of algorithms for determining vehicle attitude in Rodrigues-Hamilton parameters and direction cosines // *Cosmic Res.*, 1979, vol. 17 (3), pp. 308–313.
25. *Plotnikov P.K., Chelnokov Yu.N.* Application of quaternionic matrices in the theory of finite rotation of a rigid body // in: *Coll. Papers on Sci.&Meth. Articles on Theor. Mech.* Moscow: Vysshaya Shkola, 1981. Iss. 11, pp. 122–131.
26. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and its Applications. Geometry and Kinematics of Motion. Moscow: Fizmatlit, 2006.
27. *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1927.
28. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 1961.
29. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N.Y.: McGraw-Hill, 1960.
30. *Ickes B.F.* A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions // *AIAA J.*, 1970, vol. 8, pp. 13–17.
31. *Perelyaev S.E.* On the correspondence between the three- and four-dimensional parameters of the three-dimensional rotation group // *Mech. Solids*, 2009, vol. 44 (2), pp. 204–213.
32. *Zhuravlev V.Ph.* Foundations of Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2008.
33. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body. Moscow: Nauka, 1973.
34. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems. Moscow: Nauka, 1992.
35. *Somov Ye.I., Butyrin S.A., Skirmunt V.K.* In-flight alignment calibration of a space telescope and a star tracker cluster // *Proc. Jubilee 15th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”*. St. Petersburg. 2008, pp. 139–143.
36. *Somov Ye.I.* Multiple algorithms for filtration, integration and calibration of a strapdown inertial system for a spacecraft attitude determination // *Proc. 16th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”*, St. Petersburg, 2009, pp. 110–112.
37. *Somov Ye.I., Butyrin S.A.* In-flight alignment of a space telescope and a star tracker cluster at a scanning observation of the Earth marked objects // *Proc. 19th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. CSRI “Elektropribor”*, St. Petersburg, 2012, pp. 242–244.

38. *Somov E.I., Butyrin S.A., Gasizadeh Ch.M.* Flight calibration of SINS of a small information satellite with correction from solar and magnetic sensors // XXI St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Syst. Coll. of Mater. St. Petersburg, 2014, pp. 18–21.
39. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Pt. 1: Attitude algorithm // J. Guidance, Control&Dyn., 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
40. *Branets V.N.* Lectures on the Theory of Inertial Navigation Control Systems. Moscow: MFTI, 2009.
41. *Edwards A.* Strapdown inertial navigation systems // Rocket Techn., 1973, no. 5, pp. 50–57.
42. *Besarab P.N.* Estimation of the orientation parameters of a moving object // J. Comp. Math.&Math. Phys., 1974, vol. 14 (1), pp. 240–246.
43. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc., 1873, vol. 4, pp. 381–395.
44. *Kotelnikov A.P.* Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics. Kazan: 1895.
45. *Kotelnikov A.P.* Screws and complex numbers // Izv. Fiz-mat. Obshch. Kazan. Univ., 1896, vol. 2 (6), pp. 23–33.
46. *Kotelnikov A.P.* Theory of Vectors and Complex Numbers Some Applications of Lobachevskii's Ideas in Mechanics and Physics. Moscow: Gostekhizdat, 1950.
47. *Dimenberg F.M.* Theory of Screws and Its Applications. Moscow: Nauka, 1978.
48. *Chelnokov Yu.N.* Kinematic equations of a rigid body in four-dimensional skew-symmetric operators and their application in inertial navigation // JAMM, 2016, vol. 80 (6), pp. 449–458. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.06.003>

УДК 533.6.011

## О ЗНАЧЕНИИ $Q$ -ПАРАМЕТРА В ТОЧКЕ МИНИМУМА ДАВЛЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ НЕБАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2022 г. Г. Б. Сизых<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

\*e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.02.2022 г.  
После доработки 02.08.2022 г.  
Принята к публикации 10.08.2022 г.

Рассматривается симметричное относительно некоторой плоскости небаротропное вихревое течение идеального газа. С использованием уравнений Эйлера для стационарных течений установлено, что если давление достигает строгого или нестрогого локального минимума во внутренней точке течения, расположенной на плоскости симметрии, и в этой точке течение дозвуковое, а скорость отлична от нуля, то значение  $Q$ -параметра в этой точке должно быть равно нулю. Также установлено, что если в рассматриваемой точке достигается локальный минимум или максимум давления не по пространству, а только по плоскости симметрии, то значение  $Q$ -параметра должно быть неположительным. Последнее утверждение оказывается верным как для дозвуковых, так и для звуковых и сверхзвуковых точек. Результаты могут быть использованы для верификации численных расчетов течения идеального газа за отошедшим скачком уплотнения при сверхзвуковом обтекании симметричных тел, а также для проверки численных расчетов обтекания симметричных тел вязким газом в областях, удаленных от источников завихренности, где влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь.

*Ключевые слова:* верификация расчетов, экстремальные свойства давления, уравнения Эйлера, вихревые течения газа, небаротропные течения, течение за отошедшим скачком уплотнения

DOI: 10.31857/S0032823522060145

Есть два направления в аэрогидродинамике, в которых второй скалярный инвариант тензора скоростей деформаций ( $Q$ -параметр) играет важную роль. Первое направление – визуализация результатов расчетов с использованием изображения поверхностей уровня  $Q$ -параметра. История этой традиции начинается с работы Трусделла [1], в которой он привел ряд примеров, показывающих, что величина  $\mathcal{W}_K = (1 - 4Q/\Omega^2)^{-1/2}$ , где  $\Omega$  – завихренность, лучше, чем  $|\Omega|$ , отражает интуитивное представление физиков о том, насколько сложнее завихренное течение по сравнению с движением жидкости как твердого тела или по сравнению со сдвиговым течением. При этом в своих примерах Трусделл в основном рассматривал случаи  $\mathcal{W}_K \leq 1$ ,  $\mathcal{W}_K = 1$  и  $\mathcal{W}_K \geq 1$ , что равносильно рассмотрению случаев  $Q \leq 0$ ,  $Q = 0$  и  $Q \geq 0$  соответственно. В результате Трусделл предложил считать  $\mathcal{W}_K$  “второй мерой завихренности”. В теоретической аэрогидродинамике это предложение до сих пор не принято. Но в теории турбулентности была потребность дать строгое определение очень сложным областям турбулентных течений, которые называются “когерентными вихревыми структурами” (“вращающи-

мися вихревыми воронками”, “eddy-зонами” или “Е-зонами”). Исследователи определяли такие области интуитивно через поле скорости и завихренности. Во многих работах предлагались и обосновывались различные критерии, выводы которых в той или иной степени совпадали с интуитивными представлениями исследователей. Одним из главных “кандидатов” для формального определения Е-зоны был  $Q$ -критерий ( $Q$ -criteria), согласно которому Е-зоны – это области, где  $Q$ -параметр превышает некоторое неотрицательное пороговое значение. Так, например, в [2] предлагались  $Q$ -критерий и критерий минимума давления. Хотя строгое понятие Е-зоны до сих пор отсутствует, в статье [3]  $Q$ -критерий был признан наиболее подходящим для обнаружения Е-зон. С тех пор до настоящего времени используют  $Q$ -критерий и изображение поверхностей уровня параметра  $Q$  как один из способов визуализации Е-зон. Например, в [4]  $Q$ -критерий использовался для анализа экспериментальных данных в вихревой горелке, в [5] – для представления процесса формирования области турбулентного течения при обтекании острой пластины, в [6] – для валидации пакета программ путем сравнения численного решения задачи об инъекции струи водорода в струю воздуха с данными натурального эксперимента. Популярность такого способа визуализации привела к тому, что в интерфейсы многих программных комплексов и пакетов программ (в частности, ANSYS) была заложена возможность представления поверхностей уровня  $Q$ -параметра по результатам расчетов. Наряду с этим в настоящее время все еще продолжается поиск (например, [7]) других критериев для обнаружения Е-зон, которые, как показано в [8], совместно с  $Q$ -критерием могут давать результаты, более точно совпадающие с экспериментальными данными о следах, оставленными смерчами на песке.

В настоящей статье исследование свойств  $Q$ -параметра не связано с проблемой визуализации “когерентных вихревых структур”, а продолжает исследования Роуланда [9], Гамеля [10], Трусделла [1], Никольского [11] и автора настоящей статьи (например, [12, 13]) о принципах максимума давления (далее – ПМД). Эти ПМД предназначены не для визуализации расчета, а для его дополнительной верификации путем проверки выполнения этих принципов. Кратко историю этого второго направления аэрогидродинамики, в котором  $Q$ -параметр играет важную роль, можно представить следующим образом.

Роуланд [9] и Гамель [10] показали, что в течениях идеальной и вязкой несжимаемых жидкостей в области, где давление не постоянно, а параметр  $Q \leq 0$ , минимум давления не может достигаться во внутренней точке области (аналогично – для максимума при  $Q \geq 0$ ). Позже появился ПМД для сжимаемых баротропных течений (в которых плотность можно представить функцией одного только давления), предложенный Трусделлом [1]. В условия этого баротропного принципа максимума также входит знак  $Q$ -параметра, но, кроме того, и знак некоторого выражения, зависящего от вторых производных компонент скорости, что делает этот принцип труднообозримым и непригодным для проверки численных расчетов, полученных методами первого порядка. Кроме того, ПМД Трусделла оставляет в стороне небаротропные течения.

Интерес к небаротропным течениям объясняется, как минимум, двумя практическими причинами. Во-первых, небаротропные течения формируются за отошедшим скачком уплотнения, который возникает при обтекании однородным сверхзвуковым потоком тел с гладкой выпуклой головной частью или с большим углом наклона в передней угловой точке, превышающем предельный угол, до которого возможен присоединенный скачок. Во-вторых, в некоторых областях, удаленных от источников завихренности, течение вязкого газа с высокой точностью описывается моделью небаротропного идеального газа.

Единственным давно известным принципом максимума давления для небаротропных течений был ПМД Никольского [11], в условия которого не входят значения  $Q$ -параметра: *в области плоского (возможно, небаротропного) дозвукового стационарно-*

го течения, в которой отсутствуют точки торможения, давление и угол наклона скорости, если они не постоянны в этой области, не могут достигать экстремальных значений во внутренней точке области. Примерно через 70 лет в [12] был получен ПМД для незакрученных осесимметричных течений: в области незакрученного осесимметричного (возможно, небаротропного) дозвукового стационарного течения, в которой отсутствуют точки торможения, давление, если оно не постоянно в этой области, не может достигнуть минимального значения во внутренней точке области. (В отличие от ПМД Никольского, отсутствует упоминание о максимуме давления.)

Недавно в [13] был получен дозвуковой принцип максимума давления для небаротропных течений идеального газа в общем пространственном случае. Было показано, что в дозвуковой области (возможно, небаротропного) течения оказывается верен принцип максимума [9, 10] для несжимаемой жидкости (невозможность достижения минимума и максимума в зависимости от знака и только от знака  $Q$ -параметра). Из этого следуют необходимые условия: во внутренней точке минимума  $Q$ -параметр должен быть неотрицательным, во внутренней точке максимума  $Q$ -параметр должен быть неположительным. Для проверки расчетов течений за отошедшим скачком уплотнения, насколько известно автору настоящей статьи, этот новый принцип максимума еще не использовался. При этом в [13] было предложено использовать проверку выполнения нового принципа для дополнительной верификации численных расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности (где применима модель небаротропного идеального газа). Разумеется, что выполнение принципа максимума еще не означает правильности решения, но его нарушение позволяет “отфильтровать” неправильное решение, как неверное. Этот подход показал свою эффективность, например, при расчете возмущений, вносимых крупным зданием (в форме параллелепипеда), расположенным вблизи взлетной полосы аэродрома, в боковой ветер [14], и при вычлениии ветровой нагрузки на колесо обозрения [15]. В этих двух работах расчеты подвергались дополнительной верификации путем проверки выполнения ПМД [13]. В результате этого, в [14, 15] приходилось модифицировать и сгущать расчетную сетку в некоторых областях течения из-за нарушения принципа максимума на других сетках и на сетках с более крупными ячейками.

В настоящей статье рассматривается практически важный класс стационарных небаротропных течений с плоскостью симметрии. Течения с плоскостью симметрии возникают, когда скорость невозмущенного набегающего потока лежит в плоскости симметрии обтекаемого тела. Оказывается, что для точек минимума давления, расположенных на плоскости симметрии, можно получить утверждение относительно значений  $Q$ -параметра, верное и для сверхзвуковых течений, а для дозвуковых течений можно предложить более жесткий “фильтр”, чем проверка принципа максимума [13]. Этому посвящена настоящая статья.

Ниже будут рассмотрены два типа экстремумов (минимумов или максимумов) давления. В обоих типах рассматриваются только точки экстремума давления, лежащие на плоскости симметрии (в некоторых течениях такие точки экстремума могут отсутствовать). В первом типе в точке достигается строгий или нестрогий экстремум в некоторой ее пространственной окрестности. Такой экстремум будет называться экстремумом по пространству, а когда в точке достигается строгий или нестрогий экстремум в некоторой ее (двумерной) окрестности на плоскости симметрии — экстремумом по плоскости симметрии. Такой экстремум может не быть экстремумом по пространству.

**1. Основные обозначения и уравнения движения.** Ниже, следуя [16], газ, в котором отсутствуют вязкость и теплопроводность будем называть идеальным, а газ, в котором выполняется уравнение Менделеева–Клапейрона — совершенным. Стационарное течение идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями  $c_p$  и  $c_v$  описывается следующей системой уравнений [16]:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.1)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -(\nabla p)/\rho \quad (1.2)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla(\rho p^{-k}) = 0, \quad (1.3)$$

где  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\mathbf{V}$  – скорость,  $V = |\mathbf{V}|$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{V}$  – завихренность,  $k = c_p/c_v > 1$ .

Будем рассматривать пространственные течения с плоскостью симметрии. В таких течениях могут быть дозвуковые и сверхзвуковые зоны. Также возможно наличие точек торможения (например, передняя точка торможения на обтекаемом теле). Допустим, что на плоскости симметрии есть точка  $A$ , в которой давление достигает (строгого или нестрогого) локального минимума по пространству, и в некоторой пространственной окрестности  $G$  точки  $A$  течение дозвуковое и отсутствуют точки торможения:

$$0 < M = V/\sqrt{kp/\rho} < 1 \quad (1.4)$$

Расположим прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$  так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпала с плоскостью симметрии течения, а положительное направление оси  $x$  совпало с направлением скорости газа в точке  $A$  (при этом начало координат на плоскости симметрии можно выбрать произвольно). Предположим, что компоненты скорости, плотность и давление имеют в  $G$  непрерывные вторые производные. Как обычно, обозначим  $Q = 0.5[\Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2]$ , где  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости.

Сформулированные выше требования подразумевают, что точка  $A$  расположена внутри течения (в частности, не на поверхности обтекаемого тела) и не может быть расположена на скачке уплотнения или на тангенциальном разрыве.

Предположим, что  $Q(A) < 0$ . Тогда в силу непрерывности это строгое неравенство сохранится в некоторой области  $D \subset G$ , содержащей точку  $A$ . Однако, как показано в [13], при принятых выше уравнениях движения и при предположении (1.4) в такой (трехмерной) области, в которой всюду  $Q < 0$ , отсутствуют внутренние точки минимума давления (имеется в виду минимум по пространству). То есть неравенство  $Q(A) < 0$  невозможно. Поэтому

$$Q(A) \geq 0 \quad (1.5)$$

**2. Значение  $Q$ -параметра в точке  $A$ .** Обозначим  $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$  – единичный вектор, касательный к линиям тока. Как замечено в [17], поскольку  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = V(\mathbf{e} \cdot \nabla)(V\mathbf{e}) = \mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e}$ , уравнение Эйлера (1.2) можно записать в виде:  $\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = -(\nabla p)/\rho$ . В точке минимума давления  $\nabla p = 0$  и в точке  $A$  последнее уравнение упрощается:

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = 0 \quad (2.1)$$

Из известного векторного тождества  $\nabla \mathbf{a}^2 = 2(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} + 2\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}$  следует, что  $(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = -\mathbf{e} \times \operatorname{rot} \mathbf{e}$ . Поэтому (2.1) равносильно

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V = V^2\mathbf{e} \times \operatorname{rot} \mathbf{e} \quad (\text{в точке } A) \quad (2.2)$$

Левая и правая части (2.2) ортогональны друг другу, и, следовательно, они обе равны нулю. Учитывая, что  $V \neq 0$ , имеем

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)V = 0, \quad \mathbf{e} \times \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \quad (\text{в точке } A) \quad (2.3)$$

В общем пространственном случае из второго равенства не следует, что  $\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0$ . Однако на плоскости симметрии течения (где расположена точка  $A$ ) векторы  $\mathbf{e}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{e}$



ортогональны. Поэтому из (2.3) следует, что в точке  $A$   $\text{rot } \mathbf{e} = 0$ . Воспользуемся этим при вычислении завихренности в точке  $A$ :

$$\mathbf{\Omega} = \text{rot } V\mathbf{e} = V \text{rot } \mathbf{e} - \mathbf{e} \times \nabla V = -\mathbf{e} \times \nabla V$$

Первое уравнение (2.3) можно записать как равенство нулю скалярного произведения  $\mathbf{e} \cdot \nabla V = 0$ . Это значит, что векторы  $\mathbf{e}$  и  $\nabla V$  ортогональны, из чего в свою очередь следует, что  $|\mathbf{\Omega}| = |\mathbf{e} \times \nabla V| = |\mathbf{e}| \cdot |\nabla V| = |\nabla V| = \left| \nabla \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right|$ . Чтобы найти квадрат завихренности вычислим компоненты вектора  $\nabla \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ . Система координат выбрана так, что в точке  $A$   $u = V > 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ . Поэтому  $\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial x} v + w \frac{\partial}{\partial x} w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{\partial}{\partial x} u. \text{ Аналогично } \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{\partial}{\partial y} u \text{ и } \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} u. \text{ Поэтому } \mathbf{\Omega}^2 = \left( \nabla \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} u \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} u \right)^2 = (\nabla u)^2. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение для  $\mathbf{\Omega}^2$  в формулу для  $Q$ -параметра, получаем

$$\begin{aligned} Q(A) &= 0.5 \left( (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \right) = \\ &= 0.5 \left( -(\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

В итоге, с учетом (1.5), которое верно в силу (1.4), приходим к первому основному результату:  $Q(A) = 0$ . То есть если во внутренней точке стационарного дозвукового течения, скорость в которой отлична от нуля и которая расположена на плоскости симметрии течения, достигается локальный минимум давления по пространству, то значение  $Q$ -параметра в этой точке равно нулю.

В приведенном доказательстве размер пространственной окрестности  $G$ , в которой скорость должна отличаться от нуля и быть дозвуковой (условие (1.4)), не имеет значения и может быть сколь угодно мал. Поэтому достаточно потребовать выполнения (1.4) в самой точке  $A$ , и тогда в силу непрерывности (для внутренней точки течения) найдется окрестность  $G$ , в которой условие также будет выполнено. Другими словами, при верификации расчетов существование окрестности  $G$  можно не проверять, если только условия (1.4) выполнены в точке  $A$ . Если же точка  $A$  лежит на разрыве, то условия гладкости, сформулированные в первом разделе будут нарушены в любой окрестности этой точки и полученное выше равенство  $Q(A) = 0$  будет не обосновано (как и неравенство (1.5)).

**3. Случай экстремума по плоскости симметрии.** Возможна ситуация, при которой точка  $A$  не является точкой экстремума (т.е. не является точкой минимума или максимума) давления в своей малой пространственной окрестности. Но при этом является точкой строгого или нестрогого экстремума в некоторой плоской окрестности, лежащей на плоскости симметрии (экстремум по плоскости симметрии). В этом случае неравенство (1.5) использовать нельзя. Однако поскольку на плоскости симметрии поперечная производная давления всегда равна нулю, в точке экстремума по плоскости верно равенство  $\nabla p = 0$ , на котором основано доказательство второго раздела. Кроме того, при выводе формулы (2.4) использовалось не двойное неравенство (1.4), а только его левая часть ( $0 < M$ ) (правая часть использовалась после получения формулы (2.4) для обоснования неравенства (1.5)). Поэтому доказательство неравенства (2.4) можно повторить, и оно остается в силе и для звуковых, и для сверхзвуковых точек. В результате имеем второй основной результат. *Независимо от того, является ли точка  $A$*

(внутренняя точка течения, скорость в которой отлична от нуля), лежащая на плоскости симметрии стационарного течения, точкой локального экстремума давления по пространству, если только она есть точка локального экстремума давления по плоскости симметрии, то  $Q(A) \leq 0$ .

**4. Применение для верификации расчетов.** При использовании полученных результатов для проверки расчетов течений, которые описываются системой (1.1)–(1.3), предлагается придерживаться следующей последовательности действий. Сначала следует найти точку минимума или максимума давления (если она есть) по плоскости симметрии, т.е. такую лежащую на плоскости симметрии точку  $A$ , в плоской окрестности которой (также лежащей на плоскости симметрии)  $p \geq p(A)$  или  $p \leq p(A)$ . В такой точке должно быть  $Q(A) \leq 0$  (нарушение этого неравенства будет означать ошибочность расчета). Если, более того, точка  $A$  окажется точкой локального минимума давления по пространству (т.е. если неравенство  $p \geq p(A)$  выполняется в некоторой трехмерной окрестности точки  $A$ ), и в ней верно двойное неравенство (1.4), то должно выполняться более сильное условие  $Q(A) = 0$ . Однако при выполнении этой последовательности действий следует учитывать некоторые моменты.

Во-первых, точка  $A$  должна быть внутренней точкой течения. В частности, должны быть исключены из рассмотрения точки экстремума давления, лежащие на поверхности обтекаемого тела.

Во-вторых, скорость в точке  $A$  должна быть отлична от нуля (она может быть дозвуковой, звуковой или сверхзвуковой), а сама точка должна лежать в области гладких параметров течения (в частности, должны быть исключены из рассмотрения точки, лежащие на скачке и на тангенциальном разрыве).

Только при выполнении этих условий можно утверждать, что в верном расчете в точке экстремума давления по плоскости симметрии должно выполняться неравенство  $Q(A) \leq 0$ . (Если же, кроме того, точка  $A$  есть точка минимума давления по пространству, и скорость в ней дозвуковая, то должно быть  $Q(A) = 0$ .)

**5. Обсуждение.** Как следует из ПМД [11, 12], в плоскопараллельном и в незакрученном осесимметричном течении минимума давления не может достигаться в точке, скорость в которой отлична от нуля. Условие отличия от нуля скорости в точке минимума в этих принципах максимума неустранимо, поскольку есть пример точного решения для идеальной жидкости (сферический вихрь Хилла), свойства такой жидкости при малых значениях числа Маха качественно идентичны свойствам идеального газа. В этом примере есть внутренняя точка торможения, в которой давление минимально (подробнее см. [12]). Плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения – суть простейшие примеры рассматриваемых в настоящей статье течений с плоскостью симметрии. В этих примерах экстремум по пространству и экстремум по плоскости симметрии эквивалентны. Поэтому при обнаружении в численных расчетах таких течений минимума в точке, скорость в которой отлична от нуля, можно сразу говорить об ошибочности решения (не применяя полученных в настоящей статье утверждений). Если же в расчете незакрученного осесимметричного течения обнаруживается максимум в точке, скорость в которой отлична от нуля, то следует проверить полученное выше условие  $Q(A) \leq 0$ . В [12] точки максимума давления не рассматривались, поэтому полученный выше результат усиливает ПМД [12] (для незакрученных осесимметричных течений).

В отличие от ПМД [11, 12] (где рассматривались только точки максимума давления), в настоящей статье, как и в [13], не исключаются из рассмотрения точки минимума давления по пространству, скорость в которых отлична от нуля. Если в общем пространственном случае примером может служить закрученное осесимметричное течение с постоянной осевой скоростью (на оси достигается нестрогий минимум давления), то автору настоящей статьи не удалось найти аналогичный пример для минимума давления на плоскости симметрии. Поэтому вопрос остается открытым. Нужно

или найти новый ПМД, который исключает достижение минимума давления в такой точке, расположенной на плоскости симметрии, в которой  $V \neq 0$ , или привести пример течения, в котором минимум давления достигается в такой точке. Это представляет собой отдельную содержательную задачу, выходящую за рамки настоящей статьи. Если будет найден упомянутый ПМД, то наличие в численном решении минимума по пространству на плоскости симметрии в точке  $A$ , в которой  $V \neq 0$ , сразу будет означать ошибочность решения, независимо от значения  $Q(A)$ . А пока такой ПМД не найден, нельзя исключать возможность достижения минимума давления на плоскости симметрии в точке, в которой  $V \neq 0$ , и поэтому обнаружение такой точки в численном решении будет означать ошибочность расчета только при нарушении полученного в настоящей статье условия  $Q(A) = 0$ .

Что касается условий расположения точек экстремума давления на скачках и поверхностях тел, то эти вопросы также представляют собой сложные задачи, выходящие за рамки статьи. Однако можно указать несколько свойств для точек экстремума, лежащих на поверхности обтекаемого тела. А именно. Если точка  $A$  экстремума давления лежит на гладком участке поверхности тела, то условие экстремума для внутренних точек ( $\nabla p = 0$ ) заменяется на два условия: производная давления по касательному к поверхности направлению в этой точке должна быть равна нулю, а нормальная к поверхности производная должна быть неотрицательна в случае минимума и неположительна в случае максимума. Если в этой точке  $V \neq 0$ , то в силу условия непротекания вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$  направлен по касательной к поверхности. Поэтому из уравнения  $\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = -(\nabla p)/\rho$  (оно получено в начале второго раздела) следует, что в точке экстремума производная модуля скорости  $V$  по касательному к поверхности тела направлению должна быть равна нулю, а поверхность должна быть выпуклой в сторону течения в случае минимума и вогнутой в случае максимума. Если эти условия на численном решении не выполняются, то решение ошибочно.

**Заключение.** Получены два необходимых условия, которые должны выполняться в точке локального экстремума давления, расположенной на плоскости симметрии стационарного небаротропного течения идеального газа. Если рассматривать экстремум давления по плоскости симметрии (независимо от того, является ли он экстремумом по пространству), то, если скорость газа в этой точке отлична от нуля, значение  $Q$ -параметра должно быть равно нулю или меньше нуля. Это утверждение есть первый из известных принципов максимума, охватывающий трансзвуковые и сверхзвуковые течения.

Если же в точке, лежащей на плоскости симметрии, достигается локальный минимум по пространству, а не только по плоскости симметрии, то, если скорость газа в этой точке отлична от нуля и меньше местной скорости звука, значение  $Q$ -параметра должно быть равно нулю.

Предлагается использовать эти свойства для проверки численных расчетов течений с плоскостью симметрии. Для этого в четвертом разделе приведена “инструкция” по верификации расчетов путем проверки обнаруженных принципов максимума, не требующая знакомства с остальным текстом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Truesdell C.* Two measures of vorticity // *J. Rational Mech. Anal.* 1953. V. 2. P. 173–217.
2. *Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P.* Center for turbulence research // *Proc. Summer Program.* 1988. P. 193–208.
3. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 285. P. 69–94.
4. *Cala C.E., Fernandes E.C., Heitor M.V., Shtork S.I.* Coherent structures in unsteady swirling jet flow // *Exp. Fluids.* 2006. V. 40. № 2. P. 267–276.

5. Егоров И.В., Федоров А.В., Динь К.Х. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при сверхзвуковом обтекании острой пластины // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 5. С. 17–25.
6. Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V. Large eddy simulation of a transverse hydrogen jet in supersonic crossflow // Proc. 8<sup>th</sup> Europ. Conf. for Aeronautics and Space Sci. 2019.
7. Dong X., Gao Y., Liu C. New normalized Rortex/vortex identification method // Phys. Fluids. 2019. V. 31. № 1.
8. Zhan J., Li Y., Onyx Wai W., Hu W. Comparison between the Q criterion and Rortex in the application of an in-stream structures // Phys. Fluids. 2019. V. 31.
9. Rowland H. On the motion of a perfect incompressible fluid when no bodies are present // Amer. J. Math. 1880. V. 3. P. 226–268.
10. Hamel G. Ein allgemeiner Satz uber den Druck bei der Bewegung volumbestandiger Flussigkeiten // Monatshefte Math. Phys. 1936. V. 43. P. 345–363.
11. Никольский А.А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа // Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
12. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б., Чернов С.В. Экстремальные свойства давления в осесимметричных вихревых течениях газа // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. 49. № 5. С. 26–33.
13. Вышинский В.В., Сизых Г.Б. О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // Матем. модел. 2018. Т. 30. № 6. С. 21–38.
14. Вышинский В.В., Зоан К.Т. Численное моделирование обтекания фрагментов ландшафта и вопросы верификации решений // Уч. зап. ЦАГИ. 2020. Т. 51. № 6. С. 60–68.
15. Айрапетов А.Б., Вышинский В.В., Катунин А.В. К вопросу о верификации расчетов стационарных дозвуковых течений около плохообтекаемых тел // Уч. зап. ЦАГИ. 2021. Т. 52. № 1. С. 34–40.
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 528 с.
17. Сизых Г.Б. Угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 734–741.

### **On the Value of the Q Criteria at the Point of Minimum Pressure on the Plane of Symmetry of Non-Barotropic Flow**

**G. B. Sizykh<sup>a, #</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyj, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

Non-barotropic vortex flow of an ideal gas symmetric with respect to some plane is considered. Using the Euler equations for stationary flows, it is established that if the pressure reaches a strict or nonstrict local minimum at an internal point of the flow located on the plane of symmetry, and at this point the flow is subsonic, and the velocity is different from zero, then the value of the Q criteria at this point should be equal to zero. It was also found that if at the considered point a local pressure minimum or maximum is reached not in space, but only in the plane of symmetry, then the value of the Q criteria should not be positive. The last statement turns out to be true both for subsonic and for sonic and supersonic points. The results can be used to verify numerical calculations of an ideal gas flow behind a detached shock wave in a supersonic flow around symmetric bodies, as well as to verify numerical calculations of a viscous gas flow around symmetric bodies in regions remote from sources of vorticity, where the influence of viscosity and thermal conductivity can be neglected.

*Keywords:* verification of calculations, extreme properties of pressure, Euler equations, vortex gas flows, non-barotropic flows, flow behind a detached shock wave

### REFERENCES

1. Truesdell C. Two measures of vorticity // J. Rational Mech. Anal., 1953, vol. 2, pp. 173–217.

2. *Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P.* Center for turbulence research // Proc. Summer Program, 1988, pp. 193–208.
3. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // J. Fluid Mech., 1995, vol. 285, pp. 69–94.
4. *Cala C.E., Fernandes E.C., Heitor M.V., Shtork S.I.* Coherent structures in unsteady swirling jet flow // Exp. Fluids, 2006, vol. 40, no. 2, pp. 267–276.
5. *Egorov I.V., Fedorov A.V., Din Q.H.* Direct numerical simulation of laminar-turbulent transition at supersonic flow over sharp plate // TsAGI Sci. J., 2018, vol. XLIX, no. 5, pp. 495–505.
6. *Troshin A., Vlasenko V., Sabelnikov V.* Large eddy simulation of a transverse hydrogen jet in supersonic crossflow // Proc. 8<sup>th</sup> Europ. Conf. for Aeronautics and Space Sci., 2019.
7. *Dong X., Gao Y., Liu C.* New normalized Rortex/vortex identification method // Phys. Fluids, 2019, vol. 31, no. 1.
8. *Zhan J., Li Y., Onyx Wai W., Hu W.* Comparison between the  $Q$  criterion and Rortex in the application of an in-stream structures // Phys. Fluids, 2019, vol. 31.
9. *Rowland H.* On the motion of a perfect incompressible fluid when no bodies are present // American J. Math., 1880, vol. 3, pp. 226–268.
10. *Hamel G.* A general theorem about the pressure in the movement of volume-constant fluids // Monatshefte Math. Phys., 1936, vol. 43, pp. 345–363. (in German)
11. *Nikol'skii A.A.* Theoretical research on fluid and gas mechanics // Trudy TsAGI, 1981, no. 2122, pp. 74–85. (in Russian)
12. *Golubkin V.N., Sizykh G.B., Chernov S.V.* Extremal properties of pressure in axisymmetric vortex gas flows // TsAGI Sci. J., 2018, vol. 49, iss. 5, pp. 507–514.
13. *Vyshinsky V.V., Sizykh G.B.* The verification of the calculation of stationary subsonic flows and the presentation of results // Math. Models&Comput. Simul., 2019, vol. 11, no. 1, pp. 97–106.
14. *Vyshinsky V.V., Zoan K.T.* Numerical simulation of the flow around landscape fragments and solution verification // TsAGI Sci. J., 2020, vol. 51, no. 6, pp. 641–650.
15. *Airapetov A.B., Vyshinsky V.V., Katunin A.V.* To the problem of verification of calculations of stationary subsonic flows around bluff bodies // Uch. Zap. TsAGI, 2021, vol. 52, no. 1, pp. 34–40. (in Russian)
16. *Sedov L.I.* A Course in Continuum Mechanics. Vol. 1. Netherlands: Wolters-Noordhoff Publ., 1971. 305 p.
17. *Sizykh G.B.* The attachment angle of a sonic line to the streamlined surface // Fluid Dyn., 2021, vol. 56, pp. 937–942.

УДК 532.517.2

## УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОМ СНИЗУ СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2022 г. К. Г. Шварц<sup>1,\*</sup>, Ю. А. Шварц<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

\*e-mail: kosch@psu.ru

\*\*e-mail: jul-schwarz@psu.ru

Поступила в редакцию 15.05.2022 г.

После доработки 05.08.2022 г.

Принята к публикации 15.08.2022 г.

Исследуется устойчивость адвективного течения в плоском горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами. На верхней границе слоя задано линейное распределение температуры, нижняя граница теплоизолированная. Плоскопараллельное течение, возникшее под действием горизонтальной конвекции, описывается аналитически в виде точного решения уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска. В рамках линейной теории исследуется устойчивость адвективного течения на нормальные возмущения при различных значениях числа Прандтля. Определяются наиболее опасные моды, строятся нейтральные кривые. В рамках нелинейной постановки задачи изучается структура конечно-амплитудных возмущений в надкритической области вблизи минимумов нейтральных кривых.

*Ключевые слова:* горизонтальная конвекция, адвективные течения, точное решение, нормальные возмущения, устойчивость, конечно-амплитудные возмущения

DOI: 10.31857/S0032823522060133

Адвективное течение возникает в плоском горизонтальном слое несжимаемой жидкости при наличии продольного градиента температуры [1]. В ситуации, когда температура на одной или обеих его горизонтальных границах является линейной функцией ( $T = Ax$ , где  $x$  – продольная координата,  $A$  – постоянный горизонтальный температурный градиент на границах слоя), течение описывается аналитическим выражением, которое является точным решением уравнений Навье–Стокса [2, 3]. Если обе границы твердые, на которых задано условие прилипания, то возникает течение Остроумова–Бириха [4]. Устойчивость такого течения исследована в [5]. В обзоре [3] описан класс подобных аналитических решений, обзор устойчивости различных адвективных, описанных таким образом течений, представлен в [6].

В последние годы появилось аналитическое описание адвективных термокапиллярных течений в условиях невесомости [7, 8], представлены точные решения уравнений Навье–Стокса, описывающие плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимающейся жидкости с твердыми границами, на которых задано линейное распределение температуры разных знаков, либо линейный горизонтальный температурный градиент [9], с внутренним линейным источником тепла [10], при наличии условия проскальзывания Навье [11], при наличии акустической волны [12–14], исследована устойчивость адвективного течения феррожидкости [15]. Сформулирован

новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса, описывающих адвективные течения, когда температура на границах слоя распределяется по квадратичному закону. Задача сводится к решению нелинейной системы нестационарных одномерных уравнений [16–18]. В работе [19] был учтен слабый наклон слоя и в качестве жидкости была рассмотрена бинарная молекулярная смесь с положительной термодиффузией. В этой задаче тоже имеется точное аналитическое решение, в предельном случае вырождающееся в классическое плоскопараллельное движение Остроумова–Бириха. В этой работе было показано, что реализующееся течение переносит примесь в один угол и в результате данная система может использоваться как сепаратор для жидких молекулярных смесей.

Адвективное течение в горизонтальном слое жидкости с обеими теплоизолированными границами описано аналитически в [19]. В этом случае кубический профиль скорости остается неизменным, а в профиле температуры отсутствуют зоны потенциально неустойчивой стратификации, тем самым исключаются моды неустойчивости рэлеевской природы. Линейный анализ устойчивости, проведенный в [20], показал, что опасные гидродинамические моды возникают при малых числах Прандтля ( $Pr$ ) от 0.015 до 0.27. Имеется немало работ по исследованию подобных течений при наличии однородного продольного градиента температуры численно и аналитически как в двумерной постановке [21–24], так и в трехмерной [25, 26], а также опубликованы экспериментальные работы [27, 28].

Влияние вращения на адвективное течение в плоском слое жидкости при числе Прандтля ( $Pr$ ) равного 0.1 с твердыми границами с одной нижней теплоизолированной границей исследовалось в [29], где было выявлено несколько наиболее опасных мод неустойчивости. Это побудило к изучению влияния  $Pr$  на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при теплоизолированной нижней границе при отсутствии вращения.

**1. Математическая модель.** Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости шириной  $2h$  с твердыми границами, помещенный в однородное поле тяжести. Движение жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [1] в декартовой системе координат  $Oxyz$  ( $z$  – вертикальная,  $x$ ,  $y$  – горизонтальные координаты). Выбрав в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $g\beta Ah^3/\nu$ ,  $Ah$ ,  $\rho_0 g\beta Ah^3$  (где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_0$  – средняя плотность) получим исходные уравнения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Gr \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Gr \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + Gr \left[ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + T \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + Gr \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] &= \frac{1}{Pr} \Delta T \\ Gr &= \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$ ,  $T$  – температура и  $p$  – давление, зависящие от времени  $t$  и пространственных координат  $x, y, z$ ;  $\text{Gr}$  – число Грасгофа,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности, оператор Лапласа  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$z = -1: \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{v} = 0; \quad z = 1: T = x, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Течение замкнутое:

$$\int_{-1}^1 u dz = 0, \quad \int_{-1}^1 v dz = 0 \quad (1.3)$$

Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет аналитическое решение [24]:

$$\begin{aligned} u_0(z) &= \frac{1}{6}(z^3 - z), \quad v_0(z) \equiv w_0(z) \equiv 0, \quad T_0 = x + \text{Gr Pr } \tau_0(z) \\ \tau_0(z) &= \frac{1}{360}[3z^5 - 10z^3 + 15z - 8] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Скорость имеет антисимметричный кубический профиль и совпадает с [4] для твердых границ, профиль температуры не обладают симметрией.

**2. Линейная теория.** Для исследования устойчивости адвективного течения (1.4) применяется метод малых возмущений [5]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad v_0 = (u_0, 0, 0), \quad \mathbf{V} = (U, V, W), \quad T = T_0 + \theta, \quad P = p_0 + P' \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Gr}[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{V}] = -\nabla P' + \Delta \mathbf{V} + \theta \mathbf{i}_z; \quad \mathbf{i}_z = (0, 0, 1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr}[\mathbf{V}\nabla\theta + \mathbf{V}\nabla T_0 + \mathbf{v}_0\nabla\theta] = \frac{1}{\text{Pr}}\Delta\theta$$

$$z = -1: U = V = W = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$z = 1: U = V = W = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathbf{V}$ ,  $\theta$ ,  $P'$  – малые возмущения вектора скорости, температуры и давления. В рамках линейной теории устойчивости в уравнениях (2.2)–(2.4) пренебрегаем малыми квадратичными по возмущениям  $\mathbf{V}$  и  $\theta$  слагаемыми. Полученная система линейных уравнений имеет решения в виде нормальных возмущений, пропорциональных  $\exp(\lambda t + k_x x + k_y y)$ , где  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , – декремент, определяющий временной ход возмущений. Вещественные коэффициенты  $k_x$  и  $k_y$  – это компоненты волнового вектора вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . Следуя [1, 5], изучаются два хорошо известных [12] предельных случая. Это плоские периодические возмущения в виде валов с осью, параллельной оси  $Ox$  и пространственные спиральные периодические по  $y$  возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной к оси  $Ox$ .

*Случай плоских возмущений.* Уравнения возмущений выводятся из линеаризованной системы (2.2)–(2.4) в предположении, что производная по  $y$  от всех функций равна нулю ( $k_y = 0$ ). Возмущения скорости и температуры являются функциями времени  $t$  и двух пространственных координат  $x$  и  $z$ . Численным методом, описанном в [29–31], решается начально-краевая задача для системы линейных уравнений в частных производных по времени  $t$  и переменной  $z$ .



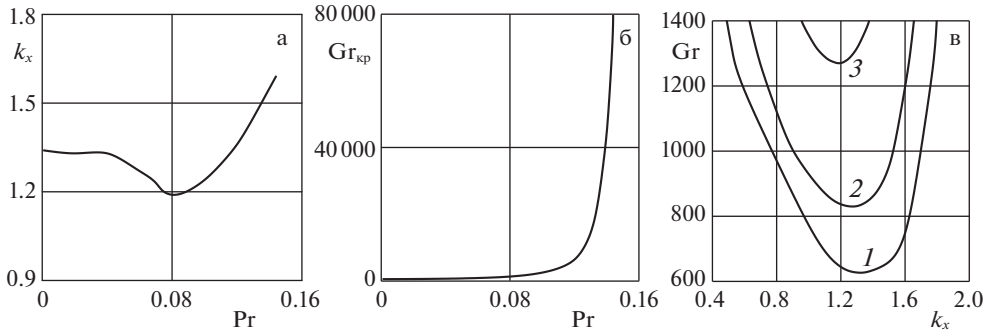


Рис. 1.

Расчеты показали, что аналогично [20, 22] только при малых значениях числа Прандтля ( $0 \leq Pr < 0.16$ ) возникает опасная колебательная гидродинамическая мода. Волновое число  $k_x$  убывает при  $0 \leq Pr < 0.08$  (рис. 1а) и принимает минимальное значение  $k_x = 1.19$  при  $Pr = 0.08$ , а затем оно монотонно возрастает с ростом числа Прандтля. Критическое число Грасгофа ( $Gr_{кр}$ ) возрастает при всех значениях  $Pr$  (рис. 1б). На рис. 1в представлены характерные нейтральные кривые при 1 –  $Pr = 0.04$ , 2 –  $Pr = 0.06$  и 3 –  $Pr = 0.08$ .

*Случай спиральных возмущений.* Уравнения спиральных возмущений выводятся из системы (2.2)–(2.4) в предположении, что производные в ней по  $x$  от всех функций равны нулю ( $k_x = 0$ ). Имеются три компоненты вектора возмущения скорости, а также возмущения температуры, которые являются функциями времени  $t$  и двух пространственных переменных  $y, z$ . Полученная начально-краевая задача решается по вычислительной схеме аналогично случаю плоских возмущений.

Расчеты показали, что в отличие от плоских возмущений при малых значениях числа Прандтля возникает опасная монотонная гидродинамическая мода. С ростом  $Pr$  волновое число  $k_y$  уменьшается (рис. 2а), критическое число Грасгофа уменьшается от 57243.4 до 8182.7 при  $0 \leq Pr < 0.14$  (рис. 2б), то есть происходит дестабилизация адвективного течения на данном интервале. При  $Pr = 0.14$   $Gr_{кр}$  достигает минимального значения, затем оно монотонно возрастает с ростом числа Прандтля, течение становится более устойчивым. В качестве примера на рис. 2в представлены нейтральные кривые при 1 –  $Pr = 0.1$ , 2 –  $Pr = 0.14$  и 3 –  $Pr = 0.2$ .

**3. Конечно-амплитудные возмущения.** Возмущения конечной амплитуды в надкритической области исследуются на основе нелинейной системы уравнений (2.2)–(2.4).

*Случай плоских возмущений.* Для плоских периодических по  $x$  возмущений система имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + Gr \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_0''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \Delta \phi - \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\Delta \psi + \phi = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Gr \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} + u_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + Ra \theta_0'(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \frac{1}{Pr} \Delta \theta$$

$$z = -1: \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{3.2}$$

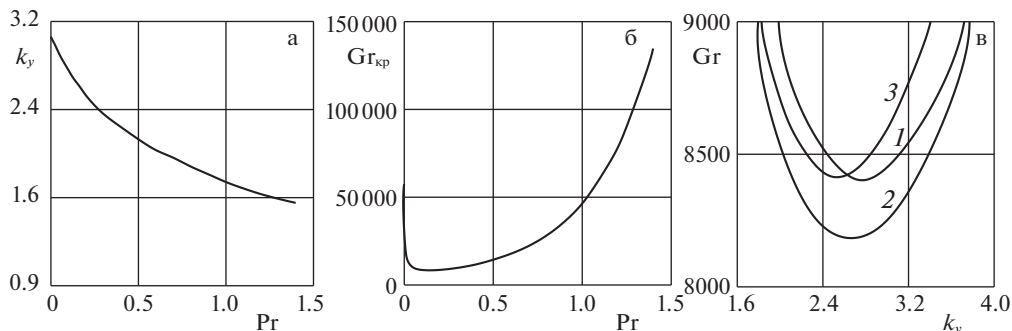


Рис. 2.

$$z = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.3)$$

$$\psi(t, 0, z) = \psi(t, L, z), \quad \varphi(t, 0, z) = \varphi(t, L, z), \quad \theta(t, 0, z) = \theta(t, L, z), \quad (3.4)$$

где  $L$  – длина волны возмущений, оператор Лапласа  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ ,  $\psi(t, x, z)$ ,  $\varphi(t, x, z)$ ,  $\theta(t, x, z)$  – конечно-амплитудные возмущения функции тока ( $U = -\partial\psi/\partial z$ ,  $W = \partial\varphi/\partial x$ ), вихря скорости ( $\varphi = \partial U/\partial z - \partial W/\partial x = -\Delta\psi$ ) и температуры.

Нелинейная задача (3.1)–(3.4) решалась численно методом сеток [31]. В рамках двухполевого метода [33] использовалась явная конечно-разностная схема. Уравнение Пуассона для функции тока решалась методом последовательной верхней релаксации. Основные расчеты проводились на сетке  $101 \times 200$ , они подтвердили критические значения числа Грасгофа, найденные в линейной теории. Было выявлено два типа конечно-амплитудных возмущений. При малых значениях числа Прандтля в диапазоне  $0 \leq \text{Pr} < 0.033$  вдоль слоя образуется пара чередующихся теплых и холодных пятен. На рис. 3а представлены изотермы возмущения температуры при  $\text{Pr} = 0.02$ , для  $\text{Gr} = 600$  выше критического,  $k_x = 1.33$ . В силу теплоизоляции нижней границы слоя жидкости тепловые пятна имеют форму близкую к полуокружности. Соответственно возникает цепочка вихрей, попарно вращающихся по часовой и против часовой стрелки (рис. 3б). Центры вихрей расположены в середине слоя вблизи центров теплого и холодного пятна. Несмотря на наличие линейного распределения температуры на верхней границе, при  $\text{Pr} = 0.02$  структура конечно-амплитудных возмущений скорости для плоских возмущений практически совпала с результатами работы [22], где обе горизонтальные границы слоя жидкости теплоизолированы. Это свидетельствует о преобладающем влиянии температурной стратификации в центре слоя жидкости на конечно-амплитудные возмущения скорости и слабом влиянии изменения граничных условий (3.3).

При значениях  $\text{Pr} \geq 0.033$  имеется пара теплых и холодных пятен эллиптической формы, движущихся вдоль слоя, например, как на рис. 4а при  $\text{Pr} = 0.08$ , для  $\text{Gr} = 2000$  выше критического и  $k_x = 1.19$ . Формируется четверка вихрей, попарно локализованных вблизи верхней и нижней границы, движущихся в том же направлении вдоль слоя, что и конечно-амплитудные возмущения температуры (рис. 4б).

*Случай спиральных возмущений.* Для пространственных периодических по  $y$  возмущений система принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{Gr} \left[ -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = \Delta \Phi - \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

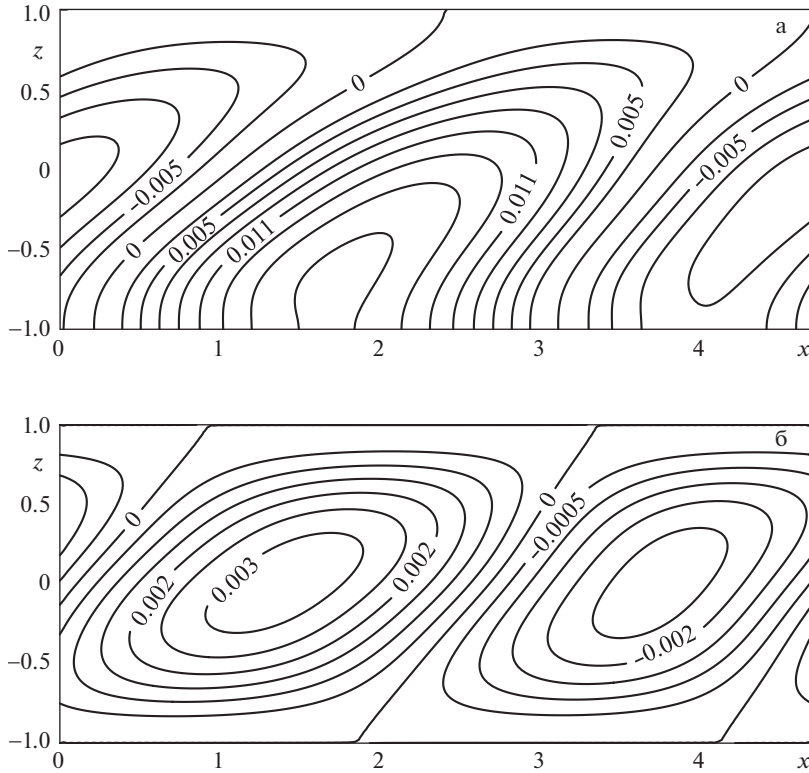


Рис. 3.

$$\Delta\Psi + \Phi = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{Gr} \left[ -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + u_0'(z) \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right] = \Delta U \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \text{Gr} \left[ -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial z} + U + \text{Ra} \theta_0'(z) \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta\theta$$

$$z = -1: \Psi = 0, \quad U = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

$$z = 1: \Psi = 0, \quad U = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi(t, 0, z) &= \Psi(t, L, z), & \Phi(t, 0, z) &= \Phi(t, L, z) \\ U(t, 0, z) &= U(t, L, z), & \theta(t, 0, z) &= \theta(t, L, z), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где оператор Лапласа  $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Имеются все три компоненты возмущений скорости, которые зависят от времени  $t$  и двух пространственных координат  $y$  и  $z$ .  $\Psi(t, y, z)$  – конечно-амплитудные возмущения функции тока ( $V = -\partial\Psi/\partial z$ ,  $W = \partial\Psi/\partial y$ ), описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость  $yOz$ ,  $U(t, y, z)$  – конечно-амплитудные возмущения первой компоненты скорости, описывающие проекцию возмущений скорости на плоскость  $xOz$  или  $xOy$ ,  $\Phi(t, y, z)$ ,  $\theta(t, y, z)$  – конечно-амплитуд-

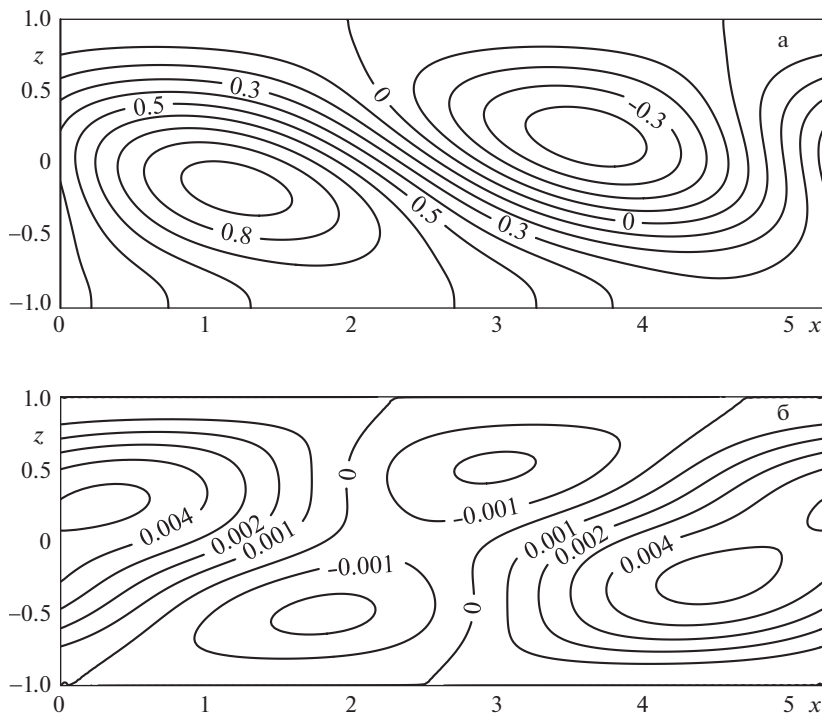


Рис. 4.

ные возмущения вихря скорости ( $\Phi = \partial V/\partial z - \partial W/\partial y = -\Delta\Psi$ ) и температуры. Этот подход использовался ранее во многих работах, например [12, 30].

Нелинейная задача (3.5)–(3.8) решалась численно методом сеток [31]. Основные расчеты проводились на сетке  $101 \times 200$ . Расчеты показали, что при всех рассматриваемых значениях числа Прандтля в областях с неустойчивой температурной стратификацией возникает система безотечных винтообразных вихрей.

На рис. 5 представлены изотермы конечно-амплитудных возмущений температуры  $\theta(t, y, z)$ , изолинии возмущений функции тока  $\Psi(t, y, z)$  и компоненты скорости  $U(t, y, z)$  при  $\text{Pr} = 0.14$  для числа Грасгофа  $\text{Gr} = 9000$  выше критического,  $k_y = 2.66$ . В середине вдоль слоя движется пара теплых и холодных пятен (рис. 5а). Проекция движения, описанная функцией возмущения функции тока вблизи порога устойчивости, представляет собой движущуюся вдоль оси  $Oy$  цепочку вращающихся в противоположных направлениях вихрей, занимающих весь слой (рис. 5б). Одновременно  $x$ -ая компонента возмущения скорости, описывает в центре слоя вращающиеся то против, то по часовой стрелке движущихся вдоль оси  $Oy$  вихрей в плоскости  $xOy$ . Центры вихрей расположены вблизи центров теплого и холодного пятна. Таким образом, в центре слоя формируется трехмерное вихревое движение, вблизи же верхней и нижней границы слоя имеются цепочки движущихся вдоль оси  $Oy$  слабых вихрей, вращающихся в плоскости  $xOy$  (рис. 5в).

**Заключение.** Представлено точное решение уравнений Навье–Стокса, записанное в приближении Обербека–Буссинеска и описывающее адвективное течение несжимаемой жидкости в горизонтальном слое с твердыми границами, условием теплоизоляции на нижней границе и линейным распределением температуры на верхней границе.

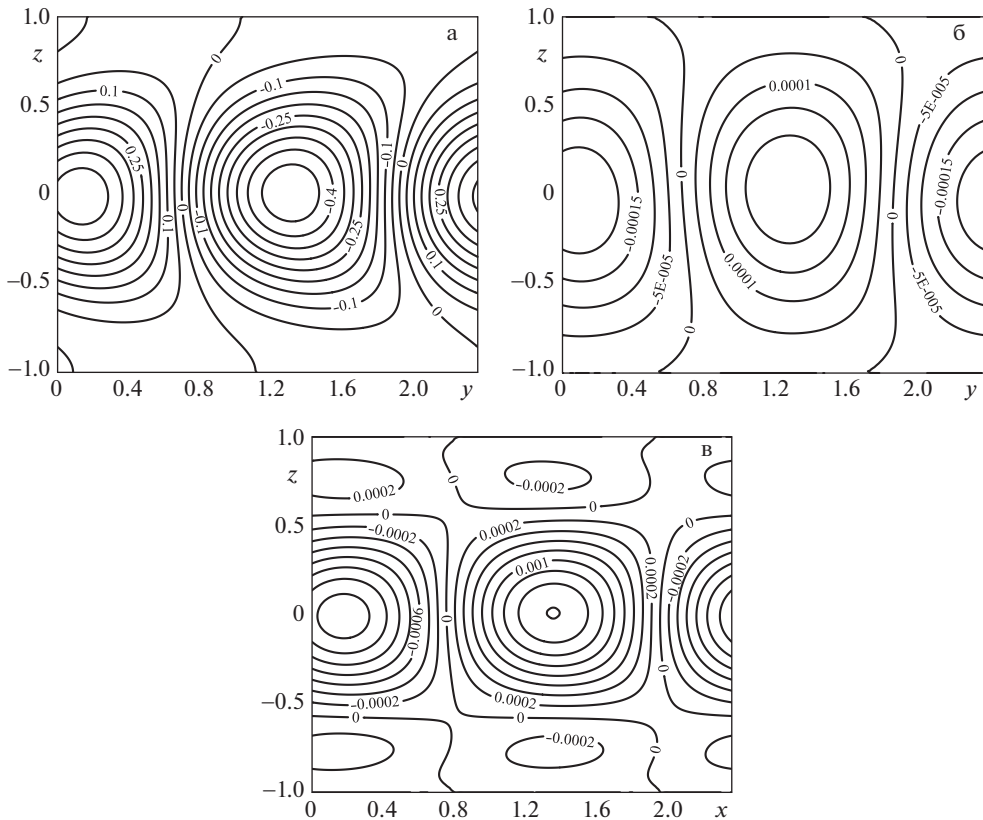


Рис. 5.

В рамках линейной теории устойчивости показано, что на всем рассматриваемом диапазоне числа Прандтля при числах Грасгофа выше критических для плоских возмущений развивается колебательная неустойчивость, а для спиральных возмущений монотонная. С ростом числа Прандтля адвективное течение становится более устойчивым на плоские возмущения. Минимальное критическое число Грасгофа для спиральных возмущений равно 8182.7 достигается при  $Pr = 0.14$ . Плоские возмущения являются опаснее спиральных возмущений.

Поведение конечно-амплитудных возмущений, возникающих в слое жидкости при значениях числа Грасгофа выше критического, исследовано конечно-разностным методом сеток на основе нелинейной задачи. За порогом устойчивости возникают нестационарные периодические конечно-амплитудные возмущения скорости и температуры в виде системы вихрей и температурных пятен различной конфигурации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехтеориздат, 1952. 286 с.

3. *Андреев В.К.* Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения // Препринт № 1–10. Красноярск: СО РАН. ИВМ, 2010.
4. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
5. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. 1992. V. 2. № 3. P. 141–151.
6. *Андреев В.К., Бекежанова В.Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. № 2. С. 3–20.
7. *Шварц К.Г.* Устойчивость термокапиллярного адвективного течения в медленно вращающемся слое жидкости в условиях невесомости // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 44–58.
8. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // ПМТФ. 2016. Т. 57. № 1 (335). С. 216–223.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20160121>
9. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 26–30.
10. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с внутренним линейным источником тепла // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 25–30.
11. *Шварц К.Г., Шварц Ю.А.* Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости при наличии условия проскальзывания Навье // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 1. С. 33–44.
12. *Любимов Д.В., Шкляев С.В.* Об устойчивости адвективного термоакустического течения // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 10–21.
13. *Любимова Т.П., Никитин Д.А., Скуридин Р.В.* О влиянии акустической волны на устойчивость адвективного течения в плоском слое // Вестн. Пермского ун-та. Сер.: Мат. Мех. Информ. 2011. Вып. 5 (9). С. 143–147.
14. *Иванцов А.О.* Слабонелинейный анализ устойчивости термоакустического адвективного течения // Вестн. Пермского ун-та. Физика. 2019. № 3. С. 28–44.
15. *Slavtchev S., Hennenberg M., Valhev G. et al.* Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field // Microgr. Sci. Technol. 2008. V. 20. Iss. 1. P. 199–203.  
<https://doi.org/10.1007/s12217-008-9027-2>
16. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 3. С. 53–58.
17. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теорет. основы хим. технол. 2016. Т. 50. № 3. С. 294–301.
18. *Бурмашева Н.В., Ларина Е.А., Просвиряков Е.Ю.* Течение типа Куэтта с учетом идеального скольжения на контакте с твердой поверхностью // Вестн. Томского гос. ун-та. Мат. и мех. 2021. № 74. С. 79–94.
19. *Демин В.А.* Конвективные сепараторы // Прикл. физ. 2013. № 4. С. 60–67.
20. *Hart J.* A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations // J. Fluid Mech. 1983. V. 132. P. 271–281.
21. *Laure P.* Etude des mouvements de convection dans une cavite rectangulaire soumise a un gradient de temperature horizontal // J. Mec. Theor. 1987. V. 6. P. 351–382.
22. *Kuo H.P., Korpela S.A.* Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side // Phys. Fluids. 1988. V. 31 (1). P. 33–42.
23. *Wang P., Daniels P.G.* Numerical solutions for the flow near the end of a shallow laterally heated cavity // J. Engng. Math. 1994. V. 28. P. 211–226.
24. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Никитин Д.А. и др.* Устойчивость адвективного течения бинарной смеси в плоском горизонтальном слое с идеально теплопроводными границами // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 129–139.

25. Lybimova T.P., Lybimov D.V., Morozov V.A. et al. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Pt. 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number // J. Fluid Mech. 2009. V. 635. P. 275–295.
26. Любимова Т.П., Никитин Д.А. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном канале прямоугольного сечения с адиабатическими границами // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 82–91.
27. Mizev A., Mosheva E., Kostarev K. et al. Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer // Phys. Rev. Fluids. 2017. V. 2. № 10. 103903.
28. Demin V.A., Kostarev K.G., Mizev A.I. et al. On convective instability of the counter propagating fluxes of inter-soluble liquids // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2014. V. 10. № 2. P. 195–208.
29. Шварц К.Г. Устойчивость адвективного течения во вращающемся горизонтальном теплоизолированном снизу слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малом числе Прандтля // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 2. С. 38–50.
30. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Перм. ун-т, 2006. 155 с.
31. Тарунин Е.Л., Шварц К.Г. Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // Выч. технол. 2001. Т. 6. № 6. С. 108–117.
32. Шварц К.Г. Конечно-амплитудные пространственные возмущения адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Выч. технол. 2001. Т. 6. Спец. вып. Ч. 2. Тр. Межд. конф. RDAMM-2001. С. 702–707.
33. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.

### Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer Insulated from below with Solid Boundaries

K. G. Shvarts<sup>a,#</sup> and Yu. A. Shvarts<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>#</sup>e-mail: kosch@psu.ru

<sup>##</sup>e-mail: jul-schwarz@psu.ru

The stability of advective flow in a flat horizontal layer of incompressible fluid with solid boundaries is investigated. The linear temperature distribution is specified on the upper boundary of the layer and the lower boundary is heat-insulated. The plane-parallel flow, which has arisen under the action of horizontal convection, is described analytically in the form of an exact solution of the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation. Within the framework of the linear theory, the stability of advective flow with respect to small normal perturbations is investigated for different values of Prandtl number. The most dangerous modes are determined and neutral curves are constructed. In the framework of nonlinear formulation of the problem, the structure of finite-amplitude perturbations in the supercritical region near the minima of neutral curves is studied.

*Keywords:* horizontal convection, advective flows, exact solution, normal perturbations, stability, finite-amplitude perturbations

### REFERENCES

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Nepomnyashchii A.A. Stability of Convective Flows. Moscow: Nauka, 1989.
2. Ostroumov G.A. Free Convection under the Conditions of the Internal Problem. NASA TM, 1958.
3. Andreev V.K. Birikh solutions of the convection equations and its certain generalizations // Prepr. no. 1–10, Krasnoyarsk: Inst. Numerical Mathematics SB RAS, 2010.

4. *Birikh R.V.* Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44.
5. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // *Microgr. Q.*, 1992, vol. 2, no. 3, pp. 141–151.
6. *Andreev V.K., Bekezhanova V.B.* Stability of non-isothermal fluids (Review) // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2013, no. 2, pp. 171–184.
7. *Schwarz K.G.* Stability of thermocapillary advective flow in a slowly rotating liquid layer under microgravity conditions // *Fluid Dyn.*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 37–49.
8. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Advective flow in a rotating liquid film // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 188–194. <https://doi.org/10.1134/S0021894416010211>
9. *Schwarz K.G.* Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 438–442. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040036>
10. *Shvarts K.G.* Plane-parallel advective flow in a horizontal layer of an incompressible fluid with an internal linear heat source // *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. S24–S28. <https://doi.org/10.1134/S0015462818040237>
11. *Schwarz K.G., Schwarz Yu.A.* Stability of advective flow in a horizontal incompressible fluid layer in the presence of the navier slip condition // *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 1, pp. 31–42.
12. *Lyubimov D.V., Shklyayev S.N.* Thermal convection in an acoustic field // *Fluid Dyn.*, 2000, vol. 35, no. 3, pp. 321–330.
13. *Lyubimova T.P., Nikitin D.A., Skuridin R.V.* About the influence of acoustic wave on the stability of advective flow in the plane layer // *Vestn. Permskogo Univ. Mat. Mech. Inform.*, 2011, iss. 5 (9), pp. 143–147.
14. *Ivantsov A.O.* Weakly non-linear analysis of thermoacoustic advective flow // *Vestn. Permskogo Univ. Phys.*, 2019, no. 3, pp. 28–44.
15. *Slavtchev S., Hennenberg M., Valhev G. et al.* Stability of ferrofluid flows in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient and an oblique magnetic field // *Microgr. Sci. Technol.*, 2008, vol. 20, iss. 1, pp. 199–203. <https://doi.org/10.1007/s12217-008-9027-2>
16. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // *Fluid Dyn.*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 330–335.
17. *Aristov S.N., Prosviryakov E.Y.* A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293.
18. *Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu.* A Couette-type flow with a perfect slip condition on a solid surface // *Tomsk State Univ. J. Math. & Mech.*, 2021, no. 74, pp. 79–94. <https://doi.org/10.17223/19988621/74/9>
19. *Demin V.A.* Convective separators // *Prikl. Phys.*, 2013, no. 4, pp. 60–67. <https://appphys.orion-ir.ru/appl-13/13-4/PF-13-4-60.pdf>
20. *Hart J.* A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations // *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 271–281.
21. *Laure P.* Etude des mouvements de convection dans une cavite rectangulaire soumise a un gradient de temperature horizontal // *J. Mec. Theor.*, 1987, vol. 6, pp. 351–382.
22. *Kuo H.P., Korpela S.A.* Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side // *Phys. Fluids*, 1988, vol. 31 (1), pp. 33–42.
23. *Wang P., Daniels P.G.* Numerical solutions for the flow near the end of a shallow laterally heated cavity // *J. Engng. Math.*, 1994, vol. 28, pp. 211–226.
24. *Lubimov D.V., Lyubimova T.P., Nikitin D.A., Perminov A.V.* Stability of a binary-mixture advective flow in a plane horizontal layer with perfectly heat conducting boundaries // *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 458–467.
25. *Lybimova T.P., Lybimov D.V., Morozov V.A. et al.* Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 1. Effect of aspect ratio and Prandtl number // *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 635, pp. 275–295.



26. *Lyubimova T.P., Nikitin D.A.* Stability of the advective flow in a horizontal rectangular channel with adiabatic boundaries // *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 240–249.
27. *Mizev A., Mosheva E., Kostarev K. et al.* Stability of solutal advective flow in a horizontal shallow layer // *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, no. 10, pp. 103903.
28. *Demin V.A., Kostarev K.G., Mizev A.I. et al.* On convective instability of the counter propagating fluxes of inter-soluble liquids // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10. no. 2, pp. 195–208.
29. *Schwarz K.G.* Stability of advective flow in a rotating horizontal incompressible fluid layer heat-insulated from below with rigid boundaries at low Prandtl number // *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 146–157.
30. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer. Perm: Perm Univ., 2006.
31. *Tarunin E.L., Shvarts K.G.* Investigation of the linear stability of advective flow by the grid method // *Vychisl. Tekhnol.*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 108–117.
32. *Shvarts K.G.* Finite-amplitude spatial perturbations of advective flow in the rotating horizontal fluid layer // *Vychisl. Tekhnol.*, 2001, vol. 6, Special iss., pt. 2, Proc. Int. Conf. RDAMM-2001, pp. 702–707.
33. *Tarunin E.L.* Computational Experiment in Problems of Free Convection. Irkutsk: Irkutsk Univ., 1990.

УДК 532.59: 534.2: 537.2

## НЕЛИНЕЙНЫЕ МОНОПОЛЬНОЕ И ДИПОЛЬНОЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ СЛАБО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

© 2022 г. А. И. Григорьев<sup>1,\*</sup>, Н. Ю. Колбнева<sup>2,\*\*</sup>, С. О. Ширяева<sup>2,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

\*e-mail: grigorai@mail.ru

\*\*e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

\*\*\*e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.

После доработки 08.08.2022 г.

Принята к публикации 12.08.2022 г.

В асимптотических расчетах второго порядка малости по малой безразмерной амплитуде осцилляций каплей естественного происхождения в материальной среде во внутриоблачном или приземном электрическом поле показывается, что среди прочих мод возбуждаются нулевая и первая моды осцилляций капли, не имеющие места в расчетах первого порядка малости. Рассчитывается интенсивность акустического излучения от них. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости.

Показано, что интенсивность монопольного акустического излучения от капли на шесть порядков более интенсивно, чем дипольного. Интенсивность монопольного излучения в используемом квадратичном по безразмерной амплитуде осцилляций приближении не зависит от радиуса капли и напряженности внешнего электростатического поля, интенсивность дипольного излучения от радиуса капли зависит существенно. Зависимость от напряженности внешнего электростатического поля появляется лишь в третьем порядке малости. Акустическое излучение от осциллирующих дождевых капель идет в слышимом диапазоне частот, а от облачных капель и капель тумана – в ультразвуковом диапазоне. Временная зависимость акустического излучения как монопольного так и дипольного от капли при начальном возбуждении конечного отрезка сплошного спектра мод имеет вид биений.

*Ключевые слова:* нелинейно осциллирующая капля, электростатическое поле, монопольное и дипольное акустические излучения

DOI: 10.31857/S0032823522060066

Известно [1–3], что осциллирующий конечный объем жидкости будет излучать акустические волны. Сказанное относится и к жидко-капельным аэрозолям естественного происхождения: туманам, облакам, дождям. В связи с изучением таких геофизических объектов [4–6] представляется актуальным провести исследование зависимости интенсивности акустического излучения от такого аэрозоля и его частоты от номера осциллирующей моды, и физико-химических характеристик среды.

При расчетах в первом порядке приближений по безразмерной амплитуде осцилляций центрально симметричная (нулевая) и трансляционная (первая) моды выпадают из рассмотрения в силу необходимости сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс [2]. Нулевая и первая моды появляются в спектре возбужденных мод

только в асимптотических расчетах более высоких порядков малости, чем первый, причем, трансляционная мода возбуждается лишь тогда, когда в спектре изначально возбужденных мод имеются две или больше с последовательными номерами [7]. Представляется интересным сравнить между собой интенсивности и частоты монопольного и дипольного излучений, а также сравнить их с общей интенсивностью акустического излучения, получаемого в линейных расчетах.

**1. Физическая постановка задачи.** Все исследование проведем на простейшем примере неподвижной слабо заряженной сферической капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости радиуса  $R$ , осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью  $E_0$ . Обозначим плотность жидкости  $\rho_1$ , а коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред –  $\sigma$ . Внешнюю среду примем идеальной сжимаемой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ex}$  и плотностью  $\rho_2$ , в которой звук распространяется со скоростью  $v$ . В дальнейших рассуждениях малым зарядом капли будем пренебрегать (он нужен только для того чтобы обеспечить неподвижность капли).

Согласно экспериментальным данным [8] капля, помещенная в электрическое поле, вытягивается в сфероид, ориентированный осью симметрии  $z$  в направлении напряженности электрического поля  $E_0$ . Полагая центр масс капли неподвижным, найдем, что в вакууме [9]  $e^2 = 9E_0^2 R / 16\pi\sigma \equiv 9w$ , где  $e$  – эксцентриситет капли, а  $w$  – безразмерный параметр Тейлора, характеризующий устойчивость капли по отношению к индуцированному заряду [8]. Так как сфероидальность равновесной формы капли определяется наличием внешнего электростатического поля, будем считать  $E_0 \sim e$ .

В настоящей задаче, чтобы избежать рассмотрения нескольких крайних ситуаций, напряженность поля примем равной  $E_0 = 0.17$  СГСЭ, которая может реализоваться и в приземном слое и внутри облака. Размеры капель в туманах, облаках и в дожде изменяются от единиц микрон до долей миллиметра. В итоге, беря максимальное значение радиуса дождевой капли  $R = 3.5$  мм, найдем, что  $e^2$  во всех ситуациях будет меньше  $\approx 2 \times 10^{-5}$ , т.е. будет малым параметром.

Все расчеты задачи проведем в сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$ , начало которой поместим в центре масс капли. Полярный угол  $\theta$  будем отсчитывать от направления вектора  $E_0$ . Для упрощения расчетов задачи ограничимся осесимметричной постановкой.

Из-за теплового движения молекул жидкости поверхность капли возмущается осцилляциями весьма малой амплитуды  $|\xi| \sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура [10]. В результате капиллярного волнового движения создается искажение  $\xi(\theta, t)$  равновесной сфероидальной формы поверхности капли. При комнатных температурах для любых жидкостей величина тепловой амплитуды  $|\xi|$  составляет не более  $1 \times 10^{-8}$  см. Тогда для капель реальных жидкостей естественного происхождения (дождь, облака, туманы) с характерными размерами  $R > 1$   $\mu$ м амплитуда осцилляций много меньше радиуса:  $|\xi| \ll R$ . Однако при наличии внешних неконтролируемых силовых воздействий (коагуляция, дробление, лобовое сопротивление, трение о воздух и т.п.) амплитуда осцилляций может быть увеличена [11, 12]. В этой связи введем второй малый параметр  $\epsilon \sim e$ .

**2. Математическая формулировка задачи.** Форму капли как в начальный, так и во все последующие моменты времени будем считать осесимметричной. Уравнение возмущенной поверхности капли в любой момент можно записать в виде:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad (2.1)$$

где  $r(\theta)$  — функция, описывающая равновесную сфероидальную форму капли. В качестве второго малого параметра примем величину отношения амплитуды осцилляций к радиусу капли  $\varepsilon \equiv \max |\xi(\theta, t)|/R \ll 1$ , т.е. безразмерную амплитуду осцилляций. Величину  $\varepsilon$  определим ниже, исходя из требования асимптотичности необходимых разложений.

Волновые движения в капле и в сжимаемой окружающей среде будут потенциальными с потенциалами скоростей  $\psi_m(r, \theta, t)$ :  $\mathbf{V}_m(r, \theta, t) = \nabla \psi_m(r, \theta, t)$ , где  $\mathbf{V}_m(r, \theta, t)$  — поле скоростей внутри ( $m = 1$ ) и вне капли ( $m = 2$ ) [2].

Математическая формулировка задачи о расчете спектра капиллярных осцилляций незаряженной капли, нелинейно осциллирующей во внешнем электростатическом поле имеет вид:

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0, \quad \Delta \Phi(r, \theta, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0 \quad (2.3)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (2.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

$$P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_E(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t) \quad (2.7)$$

Поведение гидродинамического потенциала внешней среды  $\psi_2(r, \theta, t)$  на бесконечности описывается условием излучения Зоммерфельда [3]:

$$r \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik \psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.8)$$

Кроме того, потребуем выполнения дополнительных интегральных условий: неизменности полного объема, отсутствия движения центра масс осциллирующей капли и равенства нулю ее суммарного заряда:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \quad (2.9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi], \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали к возмущенной поверхности капли:  $F(r, \theta, t) = r - r(\theta, t)$ , рассчитывается на поверхности капли по формуле  $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$ .

Рассматривая случай многомодовой начальной деформации равновесной сфероидальной формы (см., напр., [7]), начальные условия сформулируем в виде начального возмущения, определяемого суперпозицией произвольного числа колебательных мод, и равенства нулю скорости всех точек на поверхности капли:

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = R \left( \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu) \right), \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0, \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1, \quad (2.11)$$

где  $\Xi$  — множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод осциллирующей капли;  $P_j(\mu)$  — полином Лежандра  $j$ -го порядка;  $j$  — целое число,  $\mu \equiv \cos \theta$ ;  $h_j$  — константа, учитывающая парциальный вклад  $j$ -й колебательной моды

в начальное искажение капли;  $\xi_0$  и  $\xi_1$  – константы, определяемые из интегральных условий (2.9) в начальный момент времени, имеющие смысл амплитуд нулевой и первой мод:

$$\xi_0 \equiv \varepsilon^2 \xi_{00} \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2}{(2j+1)} + O(\varepsilon^3), \quad \xi_1 \equiv \varepsilon^2 \xi_{10} \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} + O(\varepsilon^3),$$

где  $o$  и  $O$  – символы порядка [13].

В приведенной постановке задачи (2.2)–(2.10):  $\Phi_s(t)$  – постоянное значение электрического потенциала вдоль поверхности капли;  $k = \frac{\omega_n}{v}$  – волновое число;  $P_{0m}$  – давления внутренней ( $m = 1$ ) и внешней ( $m = 2$ ) сред в равновесном состоянии;  $P_E = \frac{\varepsilon_{ex} (\nabla \Phi)^2}{8\pi}$  – давление электрического поля;  $P_\sigma = \sigma H$  – давление капиллярных сил,  $H$  – средняя кривизна возмущенной поверхности капли в данной точке;  $P_1 = P_{01} - \rho_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla \Psi_1)^2$  – давление внутри капли;  $P_2 = P_{02} - \rho_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \Psi_2)^2 + \frac{\rho_2}{2v^2} \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right)^2$  – давление во внешней среде.

В уравнениях (2.2), (2.4), (2.7), (2.10) принято, что электрическое поле в окружающем каплю пространстве определяется электростатическим потенциалом  $\Phi(r, \theta, t)$ , связанным с напряженностью поля  $\mathbf{E}$  соотношением:  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi(r, \theta, t)$ .

Моделируя каплю проводником, получим, что характерное время перераспределения индуцированных внешним электрическим полем зарядов много меньше характерного гидродинамического времени осцилляций поверхности капли:

$$\frac{\varepsilon_{in}}{4\pi\chi} \ll \left( \frac{R^3 \rho_1}{\sigma} \right)^{1/2},$$

где  $\varepsilon_{in}$  – диэлектрическая проницаемость жидкой капли,  $\chi$  – удельная электропроводность жидкости. Принимая для оценки характеристики дождевой капли  $R = 0.25$  см,  $\rho_1 = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma = 73$  дин/см,  $\varepsilon_{in} = 80$ ,  $\chi = 9 \times 10^6$  СГСЭ, получим, что время релаксации индуцированного заряда в жидкости меньше гидродинамического времени на четыре порядка величины.

Принимая во внимание, что составляющие гидродинамических потенциалов поля скоростей внутри и вне капли  $\psi_1^{(k)}(r, \theta, t)$ ,  $\psi_2^{(k)}(r, \theta, t)$  ( $k = 1, 2$ ) являются периодически функциями по времени  $\psi_m^{(k)}(r, \theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$  ( $m = 1, 2$ ), получим, что волновое уравнение (2.3) для  $\psi_2^{(k)}(r, \theta, t)$  примет вид однородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \psi_2^{(k)}(r, \theta, t) + k^2 \psi_2^{(k)}(r, \theta, t) = 0 \tag{2.12}$$

**3. Асимптотические разложения функций.** Для отыскания решения сформулированной задачи с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $\varepsilon$  воспользуемся классическими методами теории возмущений [13]. В рамках метода многих масштабов перейдем от единственного времени  $t$  к его различным масштабам, выраженным через малый параметр  $\varepsilon$  в виде:  $T_m = \varepsilon^m t$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Искомые величины  $\xi(\theta, t)$ ,  $\psi_m(r, \theta, t)$ ,  $\Phi(r, \theta, t)$ , а также давления  $P_m(r, \theta, t)$ ,  $P_E(r, \theta, t)$ ,  $P_\sigma$  в динамическом

граничном условии (2.6), представим в виде зависимостей от двух временных масштабов  $T_0$ ,  $T_1$  и запишем их в виде асимптотических разложений по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \\ \psi_m(r, \theta, t) &= \varepsilon \psi_m^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi_m^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \quad (m = 1, 2) \\ \Phi(r, \theta, t) &= \varepsilon \left( \Phi^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0) \right) + O(\varepsilon^3) \\ P_m(r, \theta, t) &= P_m^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon P_m^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_m^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \\ P_E(r, \theta, t) &= P_E^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon P_E^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_E^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3) \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon P_\sigma^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_\sigma^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где индекс “eq” относится к величинам, определяющим равновесное состояние капли. Здесь электрический потенциал  $\Phi(r, \theta, t)$  имеет асимптотическое разложение по целым степеням малого параметра  $\varepsilon$ , так как  $E_0 \sim e \sim \varepsilon$ . В данных разложениях  $\varepsilon \Phi^{(0)}(r, \theta) \equiv \Phi^{(eq)}(r, \theta)$  описывает потенциал электростатического поля в окрестности равновесной капли, а компонента  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  является поправкой к электрическому потенциалу, связанному с возмущением поверхности капли.

Для удобства дальнейших разложений целесообразно ввести формальный параметр  $\beta_E \sim 1$ , определяемый соотношением:  $E_0 = \beta_E \varepsilon$ . В окончательных выражениях можно легко перейти к  $E_0$ , если положить  $\beta_E \varepsilon = E_0$ .

При переходе к переменным  $T_0$ ,  $T_1$  в уравнениях (2.5), (2.6), (2.11) производные по времени вычисляются следующим образом [13]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3)\tag{3.2}$$

Поправки волнового возмущения  $\xi^{(k)}(r, \theta, t)$  ( $k = 1, 2$ ) к форме поверхности капли запишем в виде ряда по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\xi^{(k)}(\theta, t) = R \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(k)}(\theta, T_0, T_1) P_n(\mu)\tag{3.3}$$

Решения уравнений Лапласа (2.2) для поправок к гидродинамическому и электростатическому потенциалам  $\psi_1^{(k)}(r, \theta, t)$  ( $k = 1, 2$ ),  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$  при выполнении условий ограниченности (2.4) имеют вид:

$$\psi_1^{(k)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)}(r, \theta, T_0, T_1) r^n P_n(\mu)\tag{3.4}$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\mu)\tag{3.5}$$

Решение уравнения Гельмгольца (2.12) при выполнении условия излучения Зоммерфельда (2.8) представляется в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\psi_2^{(k)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(r, \theta, T_0, T_1) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu),\tag{3.6}$$

где  $h_n^{(2)}(z)$  – сферическая функция Бесселя третьего рода [14].

**4. Разложение равновесного состояния.** Учтем, что наша задача содержит два малых параметра:  $e^2$  и  $\varepsilon$ , величины которых находятся в соотношении  $\varepsilon \sim e$ . Будем учитывать это обстоятельство в нижеследующих разложениях.

Подставляя разложения (3.1) в уравнения (2.2)–(2.10), проведем анализ равновесного состояния системы.

Чтобы найти потенциал  $\Phi^{(eq)}(r, \theta)$  в явном виде, сформулируем краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^{(eq)}(r, \theta) &= 0 \\ r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(eq)}(r, \theta) &\rightarrow -\varepsilon\beta_E r \cos\theta, \quad r = r(\theta): \quad \Phi^{(eq)}(r, \theta) = \text{const}, \\ \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}_0(r, \theta), \nabla\Phi^{(eq)}(r, \theta)) dS &= 0, \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_0$  – вектор единичной нормали к невозмущенной равновесной поверхности капли. Решение сформулированной задачи имеет вид:

$$\Phi^{(eq)}(r, \theta) = \varepsilon\beta_E r \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu) \tag{4.1}$$

Уравнение равновесной формы капли с осью симметрии  $z$ , направленной коллинеарно электростатическому полю, можем записать в виде:

$$r(\theta) = R + h(\theta) \tag{4.2}$$

Функцию  $h(\theta)$ , учитывающую отклонение от сферической формы капли, представим в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$h(\theta) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu); \quad \mu = \cos\theta, \quad |h(\theta)| \ll 1, \tag{4.3}$$

где  $P_n(\mu)$  – осесимметричный полином Лежандра  $n$ -го порядка [14]. Ограничение нижнего индекса суммирования  $n$  определяется удовлетворением условий постоянства объема капли и отсутствия ее трансляционного движения.

В уравнении (4.3) амплитуды отдельных мод  $\alpha_n$  ( $n \geq 2$ ) будем искать в явном виде из условия (2.6) для равновесного состояния системы:

$$\Delta P + P_E^{(eq)} - P_\sigma^{(eq)} = 0, \quad \Delta P = P_1 - P_2; \quad P_E^{(eq)} = \frac{\varepsilon_{ex} (\nabla\Phi^{(eq)})^2}{8\pi}, \quad P_\sigma^{(eq)} = \sigma H_0, \tag{4.4}$$

где  $H_0$  – средняя кривизна равновесной, невозмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли в данной точке.

Подставляя (4.1), (4.3) в (4.4), из баланса давлений в произвольной точке равновесной поверхности капли:

$$\Delta P + \frac{3\varepsilon_{ex}}{8\pi} \varepsilon^2 \beta_E^2 [1 + 2P_2(\mu)] - \frac{\sigma}{R} \left[ 2 + \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) \alpha_n P_n(\mu) \right] = 0, \tag{4.5}$$

приравниванием амплитудных коэффициентов  $\alpha_n$  при полиномах Лежандра одинакового порядка, учитывая (4.2) и переходя от формального параметра  $\beta_E$  к физическим обозначениям, легко найдем равновесную форму капли:

$$r(\theta) = R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right); \quad e^2 = \frac{9\varepsilon_{ex} E_0^2 R}{16\pi\sigma} \tag{4.6}$$

Выражение (4.6) соответствует уравнению сфероида, вытянутого вдоль направления электрического поля, в сферической системе координат [15, 16].

**5. Задача первого порядка по  $\epsilon$ .** Подставляя в систему уравнений (2.5)–(2.7), (2.9)–(2.10) асимптотические разложения (3.1) с учетом (3.2) и собирая слагаемые первого порядка малости по  $\epsilon$ , получим задачу для отыскания амплитудных коэффициентов  $M_n^{(1)}$ ,  $A_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(1)}$  в функциях  $\xi^{(1)}(\theta, t)$ ,  $\psi_m^{(1)}(r, \theta, t)$  ( $m = 1, 2$ ), связанных с линейными осцилляциями капли:

$$r = R: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi_m^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} \quad (5.1)$$

$$-\rho_1 \frac{\partial \psi_1^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial T_0} + \frac{\sigma}{R} (2 + \hat{L}_\theta) \frac{\xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1)}{R} = 0$$

$$\hat{L}_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (5.2)$$

$$R^2 \int_0^\pi \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \sin \theta d\theta = 0, \quad 2R^3 \int_0^\pi \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

Подстановка разложений (3.3), (3.4) при  $k = 1$  в уравнения (5.1)–(5.2) позволяет найти соотношения между коэффициентами  $M_0^{(1)}$ ,  $M_1^{(1)}$ ,  $A_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(1)}$  в виде:

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0, \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0, \quad D_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0$$

$$A_n^{(1)}(T_0, T_1) = \frac{1}{n} R^{-n+2} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \quad (n \geq 1) \quad (5.3)$$

$$B_n^{(1)}(T_0, T_1) = R \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \frac{1}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \quad (5.4)$$

Из динамического граничного условия (5.2) после несложных преобразований перейдем к однородному дифференциальному уравнению второго порядка, относительно амплитудных коэффициентов  $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$  при  $n \geq 2$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(1)}(T_0, T_1) + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0 \quad (5.5)$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.5) представим в виде:

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = C_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \bar{C}_n^{(1)}(T_1) \exp(-i\omega_n T_0); \quad n \geq 2$$

$$C_n^{(1)}(T_1) = c_n^{(1)}(T_1) \exp(ib_n^{(1)}(T_1)), \quad \bar{C}_n^{(1)}(T_1) = \bar{c}_n^{(1)}(T_1) \exp(-ib_n^{(1)}(T_1)), \quad (5.6)$$

где  $C_n^{(1)}(T_1)$ ,  $\bar{C}_n^{(1)}(T_1)$  – комплексно сопряженные величины. Зависимость функций  $c_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(1)}$  от более медленного масштаба времени  $T_1$  найдем при рассмотрении задачи второго порядка малости по  $\epsilon$ .

В уравнении (5.5) квадрат частоты  $\omega_n^2$  осцилляций незаряженной сферической капли определяется соотношением:



$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)}, \quad T_0^+(n) = \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R \cdot \partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \quad (5.7)$$

Для отыскания амплитудных множителей  $F_n^{(1)}$ , входящих в разложение для поправки к электрическому потенциалу  $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ , из уравнений (2.7), (2.10) выделим слагаемые, пропорциональные:

$$r = R: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) - 3\beta_E \xi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) P_1(\mu) = \Phi_s^{(1)} \quad (5.8)$$

$$\frac{R^2}{2} \int_0^\pi \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)}{\partial r} \sin \theta d\theta = 0 \quad (5.9)$$

Выпишем решение, найденное подстановкой разложений (3.3), (3.5) в систему уравнений (5.8), (5.9), в виде:

$$F_0^{(1)}(T_0) = 0, \quad F_n^{(1)}(T_0) = \beta_E \left[ M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1) l_1(n) + M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1) l_2(n) \right] \quad (n \geq 1) \quad (5.10)$$

$$l_1(n) = \frac{3n}{(2n-1)}, \quad l_2(n) = \frac{3(n+1)}{(2n+3)}$$

В (5.8)  $\Phi_s^{(1)} = 0$ .

**6. Задача второго порядка по  $\epsilon$ .** Для нахождения коэффициентов второго порядка  $M_n^{(2)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$  в функциях  $\xi^{(2)}(\theta, t), \Psi_m^{(2)}(r, \theta, t)$  ( $m = 1, 2$ ) приведем систему уравнений, получающуюся подстановкой в (2.5)–(2.7), (2.9)–(2.10) разложений (3.1) при выполнении дифференцирования (3.2) и группировкой слагаемых, пропорциональных  $\epsilon^2$ :

$r = R:$

$$\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \Psi_m^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_m^{(1)}}{\partial \theta} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_m^{(1)}}{\partial r^2} \quad (6.1)$$

$$P_1^{(2)}(r, \theta, t) - P_2^{(2)}(r, \theta, t) + P_E^{(2)}(r, \theta, t) - P_\sigma^{(2)}(r, \theta, t) = 0$$

$$P_1^{(2)}(r, \theta, t) = -\rho_1 \left[ \frac{\partial \Psi_1^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial T_1} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_1^{(1)}}{\partial r \partial T_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial \Psi_1^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (6.2)$$

$$P_2^{(2)}(r, \theta, t) = -\rho_2 \left[ \frac{\partial \Psi_2^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial T_1} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi_2^{(1)}}{\partial r \partial T_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial \Psi_2^{(1)}}{\partial T_0} \right)^2 \right]$$

$$P_\sigma^{(2)}(r, \theta, t) = \frac{\sigma}{R} \left[ -(2 + \hat{L}_\theta) \frac{\xi^{(2)}}{R} + 2 \frac{\xi^{(1)}}{R} (1 + \hat{L}_\theta) \frac{\xi^{(1)}}{R} \right] \quad (6.3)$$

$$R \int_0^\pi \left( R \xi^{(2)} + \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right) \sin \theta d\theta = 0 \quad (6.4)$$

$$R^2 \int_0^\pi \left( 2R \xi^{(2)} + 3 \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (6.5)$$

Используя разложения (3.3), (3.4) при  $k = 1, 2$  и решения первого порядка малости (5.3), (5.4), из условий (6.1), (6.4), (6.5) найдем выражения для искомым амплитуд  $M_0^{(2)}$ ,  $M_1^{(2)}$ ,  $A_n^{(2)}$ ,  $B_n^{(2)}$  в виде:

$$M_0^{(2)}(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left( M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right)^2$$

$$M_1^{(2)}(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9k}{(2k-1)(2k+1)} M_k^{(1)}(T_0, T_1) M_{k-1}^{(1)}(T_0, T_1)$$

$$A_0^{(2)}(t) = 0$$

$$A_n^{(2)}(t) = R^2 \left( \frac{r}{R} \right)^n \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_1} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l_0(m, k, n) \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right] \quad (n \geq 1)$$

$$B_n^{(2)}(t) = R \frac{1}{\partial_r \left( h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} \left[ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_1} + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S_0(m, k, n) \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right] \quad (n \geq 0)$$

$$l_0(m, k, n) = -(m(m-1)K_{m,k,n} - \alpha_{m,k,n}) \frac{1}{nm}$$

$$S_0(m, k, n) = -R \frac{\partial_{r^2}^2 \left( h_m^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}{\partial_r \left( h_m^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} K_{m,k,n} + \frac{1}{R} \frac{h_m^{(2)}(kr)}{\partial_r \left( h_m^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}} \alpha_{m,k,n}$$

$$K_{m,k,n} = \left[ C_{k0,m0}^{n0} \right]^2; \quad \alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \cdot C_{m-1,k1}^{n0},$$

где  $C_{mk,lp}^{nq}$  – коэффициенты Клебша–Гордана [14], имеющие отличные от нуля значения при  $|m-l| \leq n \leq m+l$ ,  $m+l+n$  – четное и  $k+p=q$ .

Подставим в баланс давлений второго порядка малости (6.2) исходные разложения (3.3)–(3.6) и решение (5.6), откуда получим неоднородное дифференциальное уравнение относительно амплитудных коэффициентов  $M_n^{(2)}(T_0)$  ( $n \geq 2$ ):

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(2)}(T_0) + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0) = G_0^+(n) \exp(i\omega_n T_0) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ G_1^+(m, k, n) C_m^{(1)}(T_1) C_k^{(1)}(T_1) \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right. \\ \left. + G_1^-(m, k, n) C_m^{(1)}(T_1) \bar{C}_k^{(1)}(T_1) \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \right\} + \text{к.с.}$$

$$\begin{aligned}
 G_0^+(n) &= i\omega_n G_0(n) \frac{\partial C_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1}, \quad G_0(n) = -\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)\right)^{-1} \left(2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)\right) \\
 G_1^\pm(m, k, n) &= \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n T_0^+(n)\right)^{-1} \times \\
 &\times \left(\omega_m^2 \left(K_{m,k,n}(-m+1+n) + \frac{\alpha_{m,k,n}}{m} - \frac{\rho_2}{\rho_1} n \left(T_0^+(n) S_0(m, k, n) + K_{m,k,n}\right)\right) + \right. \\
 &\pm \omega_m \omega_k \left(K_{m,k,n}(1-m) + \frac{\alpha_{m,k,n}}{m} + \frac{2}{n} \left(K_{m,k,n} + \frac{\alpha_{m,k,n}}{mk}\right) - \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} n \left(K_{m,k,n} + \alpha_{m,k,n} T_0^+(m) T_0^+(k)\right) - \right. \\
 &\left. \left. - \omega_m^2 \omega_k^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{R^2}{2V^2} n K_{m,k,n} T_0^+(m) T_0^+(k) - 2 \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} n K_{m,k,n} (1-m(m+1))\right), \right.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\text{где } T_0^+(n) \approx -\frac{n+1}{n^2}, \quad S_0(m) \approx (m+1) \left( (m+1) \left( \frac{2}{m^2} + \frac{1}{m-1} \right) K_{m,k,n} - \frac{1}{m^2} \alpha_{m,k,n} \right).$$

В (6.6) аббревиатура “к.с.” означает слагаемые, комплексно-сопряженные к выписанным,  $\bar{C}_k^{(1)}$  – комплексно-сопряженная к  $C_k^{(1)}(T_1)$  величина.

Для того, чтобы в решении дифференциального уравнения (6.6) отсутствовали неравномерности (т.е. неограниченно нарастающие со временем члены), в правой части уравнения (6.6), имеющей смысл внешнего воздействия с частотой  $\omega_n$ , равной частоте осцилляций капли, необходимо исключить секулярные слагаемые, пропорциональные  $\exp(i\omega_n T_0)$ .

Таким образом, приравнявая нулю выражение:

$$G_0^+(n) = i\omega_n G_0(n) \frac{\partial C_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} = 0$$

и, применяя соотношение (5.7) для  $C_n^{(1)}(T_1)$ , выраженной через функции  $c_n^{(1)}(T_1)$ ,  $b_n^{(1)}(T_1)$ , несложно определить зависимость этих функций от временного масштаба  $T_1$ :

$$c_n^{(1)}(T_1) = c_n^{(0)}, \quad b_n^{(1)}(T_1) = b_n^{(0)}, \tag{6.7}$$

где постоянные интегрирования  $c_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$  находятся из начальных условий (2.11).

В итоге, при использовании условия (6.7) для амплитуд  $M_n^{(1)}(t)$  будет справедливо соотношение:

$$M_n^{(1)}(t) = 2c_n^{(0)} \cos(\omega_n t + b_n^{(0)}) \tag{6.8}$$

Общее решение уравнения (6.6) при  $n \geq 2$  с учетом исключенных секулярных членов будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
 M_n^{(2)}(T_0) &= C_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \beta_1^+(m, k, n) C_m^{(1)} C_k^{(1)} \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right. \\
 &+ \beta_1^-(m, k, n) C_m^{(1)} \bar{C}_k^{(1)} \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \left. \right\} + \text{к.с.} \tag{6.9}
 \end{aligned}$$

$$C_n^{(2)} = c_n^{(2)} \exp(ib_n^{(2)}), \quad \beta_1^\pm = \frac{G_1^\pm(m, k, n)}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_k)^2}$$

Подстановка разложения (3.1) в (2.11) при использовании (3.2) позволяет привести начальные условия первого порядка малости по  $\varepsilon$ :

$$t = 0: \quad \xi^{(1)}(\theta, t) = R \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_0} = 0 \quad (6.10)$$

Из решения системы (6.10) с учетом (3.3) при  $k = 1$  и (6.7) действительные коэффициенты  $c_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$  примут вид:

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \Xi} h_j \delta_{n,j}, \quad b_n^{(0)} = 0 \quad (6.11)$$

Для отыскания явного вида коэффициентов  $c_n^{(2)}$ ,  $b_n^{(2)}$  в решении (6.9) зададим начальные условия второго порядка малости по  $\varepsilon$ :

$$t = 0: \quad \xi^{(2)}(\theta, t) = R(\xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu)), \quad \frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1} = 0$$

(напомним, что константы  $\xi_1$  и  $\xi_1$  пропорциональны  $\varepsilon^2$ ). Из выписанных начальных условий найдем:

$$c_n^{(2)} = - \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \frac{h_j h_q}{4} (\beta_1^+(j, q, n) + \beta_1^-(j, q, n)), \quad b_n^{(2)} = 0 \quad (6.12)$$

Наконец, подставляя (6.11), (6.12) в решения первого и второго порядков (6.8), (6.9), уравнение осциллирующей поверхности капли (2.1) приобретет следующий вид:

$$r(\theta, t) = R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) P_j(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) \right) \\ M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = 0, \quad M_j^{(1)}(t) = \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) \quad (6.13)$$

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 \\ M_1^{(2)}(t) = - \sum_{j \in \Xi} \frac{9j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1} t) \cos(\omega_j t) \\ M_n^{(2)}(t) = \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \frac{h_j h_q}{2} \left[ \beta_1^+(j, q, n) (\cos((\omega_j + \omega_q)t) - \cos(\omega_n t)) + \right. \\ \left. + \beta_1^-(j, q, n) (\cos((\omega_j - \omega_q)t) - \cos(\omega_n t)) \right] \quad (n \geq 2) \quad (6.14)$$

Заметим, что амплитудные коэффициенты  $M_0^{(2)}(t)$ ,  $M_1^{(2)}(t)$  в (6.13), (6.14) рассчитываются из условий сохранения объема капли (6.4) и отсутствия движения ее центра масс (6.5).

**7. Монопольное акустическое излучение.** Наличие в спектре капиллярных осцилляций второго порядка амплитуды нулевой моды  $\alpha_0(t) = R\varepsilon^2 M_0^{(2)}(t)$ , соответствующей радиальным пульсациям капли, превращает ее в источник звуковых волн монопольного типа.

Согласно (6.13) частота осцилляций центрально-симметричной моды ( $n = 0$ ) в два раза выше частоты колебательной моды начальной деформации капли:  $\omega_0 = 2\omega_j$ .

Выражение для интенсивности монопольного излучения, связанного с центрально-симметричной (нулевой) модой во втором порядке малости по  $\epsilon$ , при условии  $\lambda \gg R$  ( $\lambda$  – длина излучаемой акустической волны), определяется ([6], с. 402) или ([3], с. 206), формулой:

$$I_0 = \frac{2\pi\rho_2 R^4 \omega^2 U_0^2}{v \left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{v^2}\right)} \tag{7.1}$$

В (7.1) амплитуда радиальной скорости  $U_0$  движения точек поверхности капли находится в виде:

$$U_0 = \frac{\partial\alpha_0(t)}{\partial t} = R\epsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2 \omega_j}{(2j+1)} \sin(2\omega_j t) \tag{7.2}$$

Подставляя (7.2) в (7.1) и придавая синусу его максимальное значение, с учетом того, что  $\omega R/v \ll 1$ , запишем окончательное выражение интенсивности монопольного излучения:

$$I_0 = \frac{2\pi\rho_2 R^6 \epsilon^4}{v} \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^4 \omega_j^4}{(2j+1)^2} \tag{7.3}$$

Используя полученное аналитическое выражение (7.3), оценим по порядку величины мощность монопольного звукового излучения от различных жидко-капельных объектов искусственного и естественного происхождения.

Источниками акустического излучения в конвективных облаках являются мелкие осциллирующие капли с типичными размерами от 3 до 30 мкм и максимальной концентрацией в облаке. Число таких капелек в 1 см<sup>3</sup> облака  $\sim 10^3$  [18, 19]. Известно, что в процессе развития кучево-дождевых облаков в результате слияния внутриоблачных капель образуются мелкие дождевые капли размером  $0.01 \leq R \leq 0.025$  см, относящиеся к мороси, и укрупненные дождевые капли при  $0.025 \leq R \leq 0.35$  см. Более крупные капли, радиус которых превышает 0.35 см, при падении в воздухе разбиваются из-за аэродинамического сопротивления [20, 21]. Заметим, что осцилляции рассматриваемых облачных и дождевых капель могут быть вызваны коагуляцией неодинаковых по размеру капель из-за разностей их скоростей падения, дроблением на более мелкие в результате электростатической неустойчивости, а также электрического взаимодействия крупных заряженных капель с малыми электрически нейтральными [18]. Для нижеследующих оценок величину отношения амплитуды начальной деформации равновесной формы капли к ее радиусу примем, равную  $|\xi|/R \sim \epsilon$ . В анализируемом случае для характерных значений напряженности внешнего электрического поля величина параметра Тейлора много меньше критического значения  $w_{кр} \approx 0.05$  [9]. Из этого следует, что большая часть капель находится далеко от предела электрогидродинамической неустойчивости по отношению к индуцированным зарядам.

Для получения численных оценок примем характеристики единичной капли и внешней среды:  $\epsilon = 0.001$ ,  $\epsilon_{ex} = 1$ ,  $h_j = 1$ ,  $\sigma = 73$  дин/см,  $\rho_1 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $v = 3.3 \times 10^4$  см/с,  $E_0 = 0.17$  СГСЭ ( $\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$  ( $E_{0кр}$  – критическое значение напряженности поля) при  $R = 3$  мкм и  $\sim 7 \times 10^{-3} E_{0кр}$  при  $R = 0.35$  см). При принятых выше значениях физических величин и радиусе дождевой капли  $R = 0.35$  см квадрат эксцентриситета капли  $e^2 = 9E_0^2 R / 16\pi\sigma \approx 2.5 \times 10^{-5}$ .

В соответствии с (7.3) положим, что возбуждение центрально-симметричной моды во втором порядке малости по  $\epsilon$  связано с наличием изначально возбужденной колебательной моды  $j = 2$ . Из (7.3) несложно видеть, что изменение интенсивности монополюсного излучения от одной капли при изменении ее радиуса и напряженности внешнего электрического поля пренебрежимо мало. Интенсивность монополюсного излучения капли при принятом выше соотношении между малыми параметрами и значениях входящих в (7.3) физических величин  $I_0 \sim 3 \times 10^{-15}$  эрг/с.

### 8. Дипольное акустическое излучение.

Появление во втором порядке малости по  $\epsilon$  амплитуды первой моды  $\alpha_1(t) = R\epsilon^2 M_1^{(2)}(t)$ , соответствующей поступательному движению, приводит к генерации звуковых волн дипольного типа.

Из (6.14) следует, что возбуждение первой (трансляционной) моды ( $n = 1$ ) имеет место, когда в спектре изначально возбужденных мод присутствуют две колебательные моды с последовательно возрастающими номерами  $j - 1, j$ .

В случае, когда равновеликий радиус  $R$  капли сравним по величине с  $(v/\omega_n)^{1/2}$ , и при выполнении условий  $\lambda \gg R$ ,  $R(\omega_n/2v)^{1/2} \ll 1$ , интенсивность дипольного акустического излучения, порождаемого осцилляциями трансляционной моды во втором порядке, находится в соответствии с известным выражением [6], стр. 401:

$$I_1 = \frac{3\pi\rho_2 R^2 v^2 \omega^2 U_1^2}{2v^3}, \quad (8.1)$$

где  $v$  — кинематическая вязкость окружающей каплю сжимаемой среды.

В (8.1) амплитудное значение скорости движения  $U_1$  поверхности капли представляется в виде:

$$U_1 = \frac{\partial\alpha_1(t)}{\partial t} = R\epsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \times \\ \times ((\omega_j + \omega_{j-1}) \sin(\omega_j + \omega_{j-1})t + (\omega_j - \omega_{j-1}) \sin(\omega_j - \omega_{j-1})t) \quad (8.2)$$

Для проведения качественной оценки по порядку величины в (8.2) заменим синусы на их максимальные значения, и из (8.1) получим:

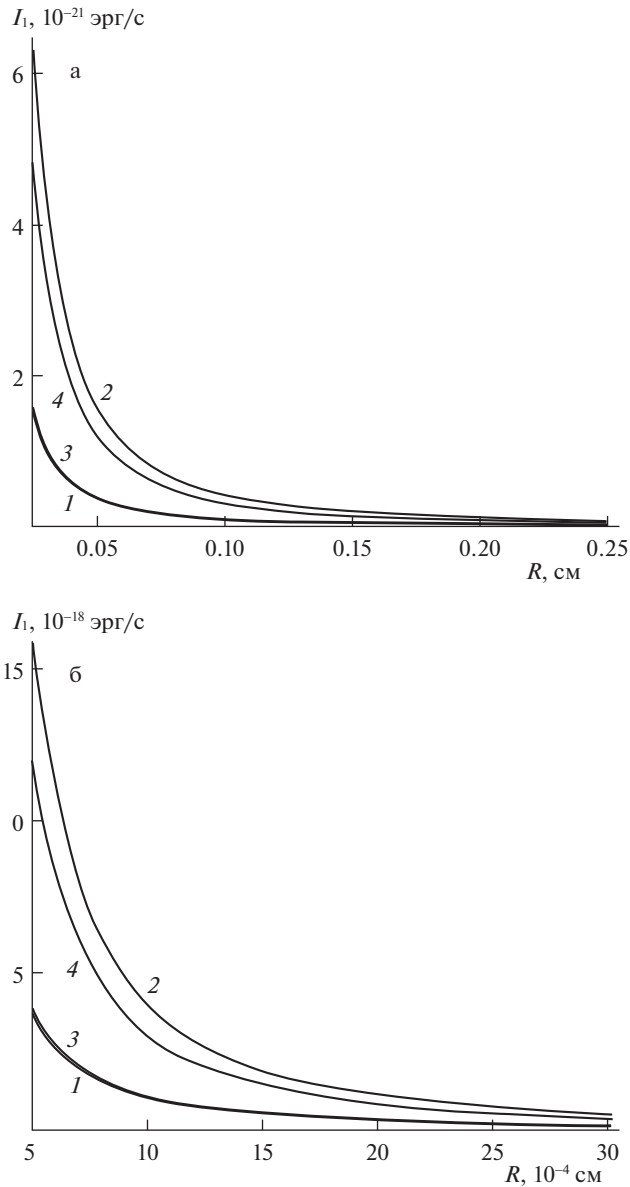
$$I_1 = \frac{3\pi\rho_2 R^4 v^2 \epsilon^4}{2v^3} \sum_{j \in \Xi} \left( \frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \right)^2 \left( (\omega_j + \omega_{j-1})^4 + (\omega_j - \omega_{j-1})^4 \right) \quad (8.3)$$

В отличие от монополюсного излучения дипольное зависит от радиуса. На рис. 1 приведены и графики зависимости интенсивности дипольного акустического излучения  $I_1$  дождевых и облачных капель от радиуса. Видно, что интенсивность дипольного излучения от облачных капель примерно на три порядка больше, чем от дождевых.

На рис. 2 приведены зависимости частот осцилляций центрально-симметричной моды, связанной с монополюсным излучением (кривая 1), и трансляционной моды, определяющей дипольное излучение (кривые 2, 3), от размера дождевой капли. Видно, что увеличение радиуса приводит к быстрому снижению частоты.

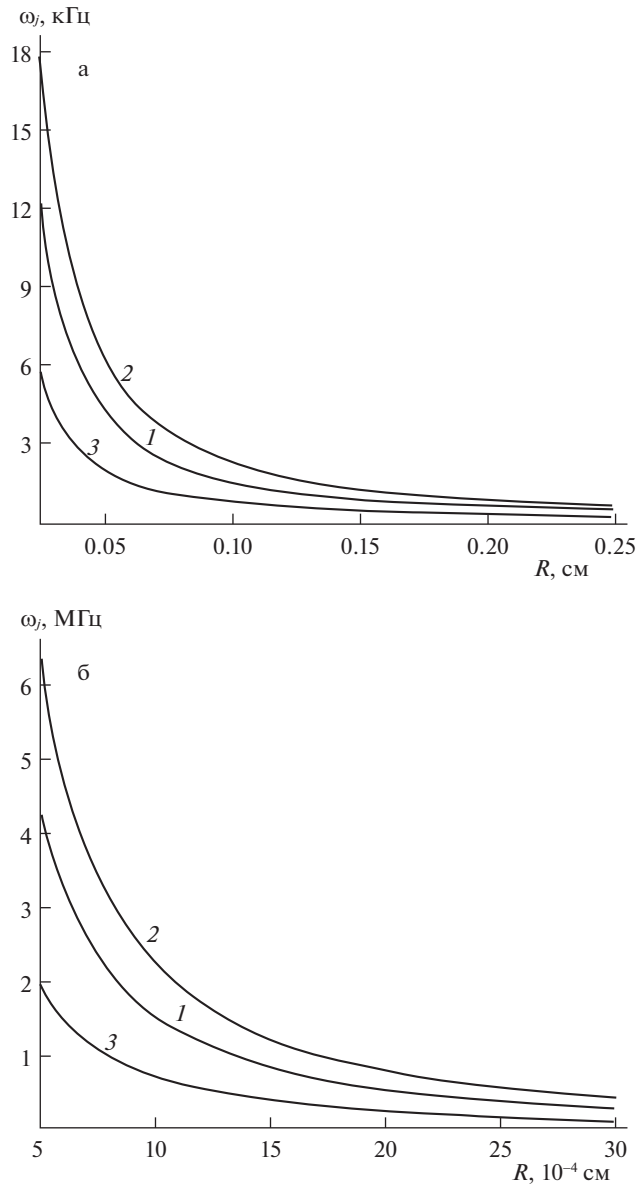
Из рис. 2 следует, что облачные капли излучают на ультразвуковых частотах в диапазоне от десятых долей МГц до 6 МГц. Но дождевые капли генерируют акустические волны в диапазоне слышимых человеческим ухом звуковых частот от десятых долей кГц до 18 кГц.

Если задаться вопросом о временной зависимости интенсивности монополюсного и дипольного излучений, то оказывается, что она зависит качественно и количественно от количества мод, возбужденных в начальный момент времени. На рис. 3 приведены



**Рис. 1.** Зависимость интенсивности дипольного акустического излучения  $I_1$  от эквивалентного радиуса  $R$  слабо заряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17$  СГСЭ. Кривая 1 соответствует начальной деформации вида  $\varepsilon(P_2(\mu) + P_3(\mu))/2$ , 2 –  $\varepsilon(P_3(\mu) + P_4(\mu))/2$ , 3 –  $\varepsilon(P_2(\mu) + P_3(\mu) + P_4(\mu))/3$ , 4 –  $\varepsilon(P_3(\mu) + P_4(\mu) + P_5(\mu))/3$ , а) дождевой, б) облачной.

зависимости интенсивности излучения монопольной компоненты излучения от времени при простейшей начальной деформации типа  $\varepsilon P_2(\mu)$  и дипольной компоненты также при простейшей начальной деформации вида  $\varepsilon(P_2(\mu) + P_3(\mu))/2$ . Из сравнения

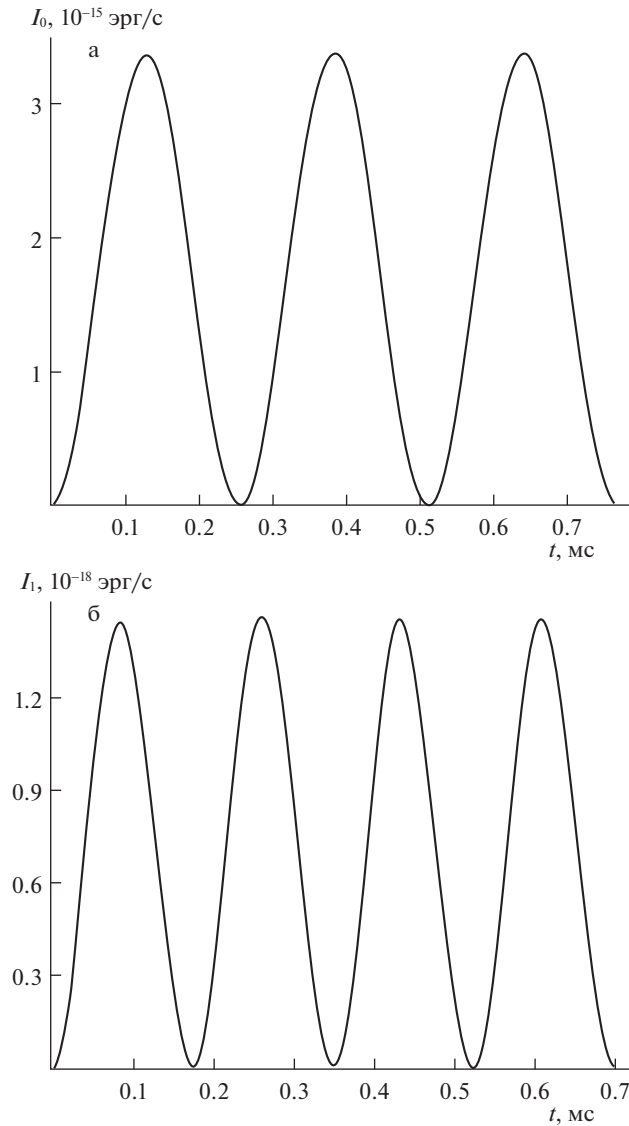


**Рис. 2.** Зависимость частот осцилляций капель от их радиуса  $R$ . Кривая 1 соответствует частоте центрально-симметричной моды:  $2\omega_2$ , 2 – частоте трансляционной моды:  $\omega_3 + \omega_2$ , 3 – частоте трансляционной:  $\omega_3 - \omega_2$ . а) для дождевых капель, б) для облачных капель.

рис. 3, а и 3, б следует, что интенсивность монопольного излучения на шесть порядков превышает интенсивность дипольного и происходит на больших частотах, но в качественном отношении графики тривиальны.

Если взять более сложные начальные деформации (см. рис. 4), то временной ход зависимости интенсивности монопольного и дипольного излучений становится более

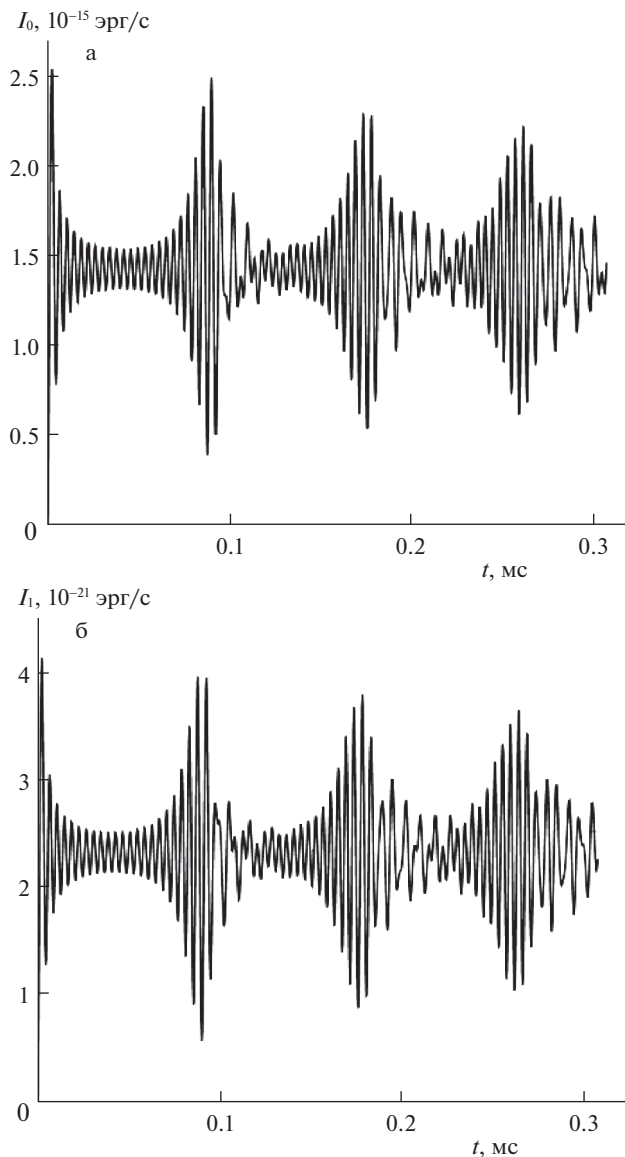




**Рис. 3.** Зависимость от времени  $t$  акустического излучения  $I_0$  незаряженной дождевой капли радиусом  $R = 250$  мкм, осциллирующей во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17$  ГЭСЭ: а) монополюсного акустического излучения при начальной деформации равновесной формы капли вида  $\varepsilon P_2(\mu)$ , б) дипольного акустического излучения при начальной деформации капли вида  $\varepsilon (P_2(\mu) + P_3(\mu))/2$ .

сложным, приобретая качественный вид биений. Амплитуда звукового сигнала начинает заметно зависеть от времени, хотя монополюсное излучение по-прежнему на шесть порядков более интенсивно.

Проведенные оценки справедливы и для туманов с характерными размерами капель 2–10 мкм [22], излучающих акустические волны в ультразвуковом диапазоне частот.



**Рис. 4.** Зависимость от времени  $t$  акустического излучения  $I_0$  незаряженной дождевой капли радиусом  $R = 250$  мкм, осциллирующей во внешнем электростатическом поле напряженностью  $E_0 = 0.17$  СГСЭ, при изначальном возбуждении первых 30 мод: а) монопольного, б) дипольного.

Естественно задаться вопросом о причине возбуждения центрально симметричной и трансляционной мод в асимптотических расчетах более высоких порядков по малому параметру  $\epsilon$ , чем первый. Представляется, что такой причиной может быть сам применяемый асимптотический метод, оставляющий в расчетах порядка  $n$  (где  $n$  — целое число) погрешность  $\sim \epsilon^n$ , которая частично (на величину  $\sim \epsilon$ ) исправляется в расчетах следующего порядка малости. В этом случае появление в расчетах второго по-

рядка малости в спектре возбуждаемых мод центрально симметричной и трансляционной носит компенсационный характер.

**Заключение.** В асимптотических расчетах второго порядка малости по отношению амплитуды начальной деформации к радиусу незаряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, показано, что возбуждение нулевой моды приводит к генерации в среде акустических волн монопольного типа. Присутствие в спектре изначально возбужденных мод двух и более с последовательными номерами приводит к появлению трансляционной (первой) моды в спектре возбуждающихся во втором порядке мод — генерирующей излучение акустических волн дипольного типа. Для дождевых капель, излучающих в диапазоне слышимых звуковых волн, монопольная компонента излучения на 6 порядков величины интенсивнее, чем дипольная составляющая. В случае излучения монопольного характера граница между ультразвуковыми и слышимыми звуковыми волнами смещается в область больших размеров капель (более чем в 1.5 раза) в сравнении с дипольным акустическим излучением. Кроме того, в отличие от электромагнитного излучения [23] влияние индуцированного заряда на интенсивность акустического излучения весьма мало.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стретт Дж. В. (*Лорд Рэлей*) Теория звука. Т. II. М.: Гостехтеориздат, 1955. 476 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
3. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
4. Little C. G. On the detectability of fog, cloud, rain, and snow by acoustic echo-sounding methods // J. Atm. Sci. 1972. V. 29. P. 748–755.
5. Foster M. P., Pflaum J. C. The behavior of cloud droplets in an acoustic field: a numerical investigation // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. № D1. P. 747–758.
6. Тулайкова Т. В., Мищенко А. В., Амирова С. Р. Акустические дожди. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
7. Ширяева С. О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–19.
8. Taylor G. I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. London. 1964. V. A280. P. 383–397.
9. Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
10. Френкель Я. И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
11. Стерлядкин В. В. Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
12. Beard K. V., Tokay A. A field study of small raindrop oscillations // Geophys. Res. Lett. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
13. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
14. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука. 1975. 436 с.
15. Григорьев А. И., Синкевич О. А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
16. Cheng K. J. Capillary oscillations of drop in an electric field // Phys. Lett. A. 1985. V. A112. № 11. P. 392–396.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.

18. Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат. 1983. 280 с.
19. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеиздат. 1989. 647 с.
20. Боровиков А.М., Гайворонский Е.Г. Физика облаков. Л.: Гидрометеиздат. 1961. 459 с.
21. Тверской П.Н. Курс метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1962. 700 с.
22. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли — пыли, дымы и туманы. Л.: Химия, 1969. 428 с.
23. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Капиллярные волны и дипольное электромагнитное излучение, создаваемое нелинейными осцилляциями незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле // Коллоидный ж. 2022. Т. 84. № 2. С. 141–163.

### Nonlinear Monopole and Dipole Acoustic Radiation of a Weakly Charged Drop, Which Oscillates in a Homogeneous Electrostatic Field

A. I. Grigoriev<sup>a, #</sup>, N. Yu. Kolbneva<sup>b, ##</sup>, and S. O. Shiryayeva<sup>b, ###</sup>

<sup>a</sup>Isinlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

<sup>b</sup>P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

<sup>#</sup>e-mail: grigori@mail.ru

<sup>##</sup>e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

<sup>###</sup>e-mail: shir@uniyar.ac.ru

In the asymptotic calculations of the second order of smallness, according to the small dimensionless amplitude of oscillations of droplets of natural origin in the material environment in the intra-cloud or ground-level electric field, it is shown that, among other modes, the zero and first modes of oscillations of the droplet that do not take place in the calculations of the first order of smallness are excited. The intensity of acoustic radiation from them is calculated. Calculations are carried out on the model of an ideal non-compressible electrically conductive fluid.

It has been shown that the intensity of monopole acoustic radiation from a drop is six orders of magnitude more intense than dipole radiation. The intensity of monopole radiation in the approximation oscillations used quadratic by dimensionless amplitude does not depend on the radius of the drop and the intensity of the external electrostatic field, the intensity of dipole radiation depends significantly on the radius of the drop. Dependence on the intensity of the external electrostatic field appears only in the third order of smallness. Acoustic radiation from oscillating rain drops goes in the audible frequency range, and from cloud and fog drops — in the ultrasonic range. The time dependence of acoustic radiation of both monopole and dipole on the drop at the initial excitation of the final segment of the continuous spectrum of modes has the form of beats.

*Keywords:* nonlinear oscillating drop, electrostatic field, monopole and dipole acoustic radiation

### REFERENCES

1. Strett J.W. (*Lord Rayleigh*) The Theory of Sound. Moscow: Gostekhteorizdat, 1955. 476 p.
2. Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 1986. 733 p.
3. Lependine L.F. Acoustics. Moscow: Vysshaya Shkola, 1978. 448 p.
4. Little C.G. On the detectability of fog, cloud, rain, and snow by acoustic echo-sounding methods // J. Atm. Sci., 1972, vol. 29, pp. 748–755.
5. Foster M.P., Pflaum J.C. The behavior of cloud droplets in an acoustic field: a numerical investigation // J. Geophys. Res., 1988, vol. 93, no. D1, pp. 747–758.
6. Tulaykova T.V., Mishchenko A.V., Amirova S.R. Acoustic Rains. Moscow: Fizmatkniga, 2010. 160 p.
7. Shiryayeva S.O. Nonlinear oscillations of the charged drop at the initial excitation of neighboring modes // J. Techn. Phys., 2002, vol. 72, iss. 4, pp. 15–19.

8. *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. London, 1964, vol. A280, pp. 383–397.
9. *Grigoriev A.I., Shiryaeva S.O., Belavina E.I.* The equilibrium form of a charged drop in electric and gravitational fields // J. Techn. Phys., 1989, vol. 59, iss. 6, pp. 27–34.
10. *Frenkel J.I.* To the theory of Tonks about the rupture of the surface of a liquid by a constant electric field in a vacuum // JETP, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348–350.
11. *Sterlyadkin V.V.* Full-scale measurements of precipitation drop oscillations// Izv. AN SSSR. Ser. FAO, 1988, vol. 24, no. 6, pp. 613–621.
12. *Beard K.V., Tokay A.* A field study of small raindrop oscillations // Geophys. Res. Lett., 1991, vol. 18, no. 12, pp. 2257–2260.
13. *Naife A.H.* Perturbation Methods. Moscow: Mir, 1976. 455 p.
14. *Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Kherson V.K.* Quantum Theory of Angular Momentum. Leningrad: Nauka, 1975. 436 p.
15. *Grigoriev A.I., Sinkevich O.A.* To the mechanism of development of instability of a liquid drop in an electric field // Fluid Dtn., 1985, no. 6, pp. 10–15.
16. *Cheng K.J.* Capillary oscillations of drop in an electric field // Phys. Lett. A., 1985, vol. A112, no. 11, pp. 392–396.
17. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Works. Moscow: Nauka, 1963. 1108 p.
18. *Mazin I.P., Schmeter S.M.* Clouds. Structure and Physics of Formation. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1983. 280 p.
19. *Mazin I.P., Hrgian A.H., Imyanitov I.M.* Handbook of Clouds and Cloudy Atmosphere. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1989. 647 p.
20. *Borovikov A.M., Gayvoronsky E.G.* Physics of Clouds. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1961. 459 p.
21. *Tverskoy P.N.* Course of Meteorology. Physics of Atmosphere. Leningrad: Hydrometeoizdat, 1962. 700 p.
22. *Green H., Lane W.* Aerosols – Dust, Smoke and Fog. Leningrad: Khimiya Publ., 1969. 428 p.
23. *Grigoriev A.I., Kolbneva N.Yu., Shiryaeva S.O.* Capillary waves and dipole electromagnetic radiation generated by nonlinear oscillations of an uncharged drop in an external homogeneous electrostatic field// Colloid J., 2022, vol. 84, no. 2, pp. 141–163.

УДК 532.5

## РАДИАЛЬНОЕ РАСТЕКАНИЕ НЕФТЕПРОДУКТОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

© 2022 г. А. В. Кистович<sup>1,\*</sup>, Т. О. Чаплина<sup>1,\*\*</sup>, В. П. Пахненко<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия*

\**e-mail: kavmendeleevo@mail.ru*

\*\**e-mail: tanya75.06@rambler.ru*

\*\*\**e-mail: terkin95@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.05.2022 г.

После доработки 08.09.2022 г.

Принята к публикации 12.09.2022 г.

Представлена теоретическая модель распространения олеиновых пятен, основанная на законах сохранения массы и полной энергии системы. На основе этой модели было получено приближенное уравнение, описывающее процесс растекания во все моменты времени. Представлены компактные решения этого уравнения, как для пятен машинного масла ограниченной площади, так и для неограниченных разливов сырой нефти. Были проведены эксперименты по изучению динамики растекания компактного пятна эталонного моторного масла и сырой нефти в различных физических условиях. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов показало их хорошее соответствие для всех динамических режимов исследуемого процесса.

*Ключевые слова:* моделирование, растекание, машинное масло, сырая нефть, коэффициент сопротивления формы

**DOI:** 10.31857/S0032823522060078

**1. Введение.** Интенсивная деятельность человека по освоению природных ресурсов Мирового океана включает разведку и добычу полезных ископаемых, транспортировку товаров, использование энергетических и биологических ресурсов, а также многие другие аспекты. Одним из последствий включения океана в сферу экономических интересов является возникновение и распространение загрязнений различного характера. Аварии с утечками нефти происходят при добыче, сборе и хранении нефти, из резервуаров, во время операций по сливу, отпуску нефтепродуктов потребителям, при транспортировке по трубопроводам и т.д. Количество утечек достигает больших значений и, по разным данным, колеблется от 5 до 17% от объема производства. При этом теряется не только ценное сырье, но и наносится значительный ущерб окружающей среде. Попадая в природные экосистемы, нефтяные углеводороды надолго вызывают нарушение биологического баланса.

В последние годы во всем мире прилагаются значительные усилия по совершенствованию системы предотвращения и ликвидации последствий аварийных разливов нефти и нефтепродуктов, но проблема по-прежнему остается актуальной. При планировании и проведении работ по борьбе с аварийными разливами углеводородов возникает необходимость прогнозирования распространения нефти в море. Такие прогнозы позволяют, в частности, предупреждать о возможности нефтяного загрязнения прибрежной зоны, о пересечении зон интенсивной хозяйственной деятельности нефтяным пятном, курсами судов и т.д. Распространение нефти в море при аварийных

разливах представляет собой сложный процесс, для описания которого необходимо учитывать большое количество различных факторов.

Экспериментальному и теоретическому изучению растекания нефти и нефтепродуктов посвящена довольно обширная научная литература, как физико-техническая [1–9], посвященная проблеме описания динамики самого процесса, так и экологическая [10–12], направленная на решение возникающих проблем очистки морских районов, направлений. В условиях Арктики возникает дополнительная проблема, связанная с распространением нефтепродуктов над и под ледяным покровом Северного Ледовитого океана, а также на заснеженной поверхности [13, 14].

подавляющее большинство упомянутых работ содержит, ставшее почти обязательным, сравнение экспериментальных результатов с теоретическими предсказаниями, что связано с неполнотой различных математических моделей распространения, полуэмпирических по своей природе и, отчасти, даже эвристических. Такое положение дел делает необходимым проведение более глубокого изучения модели распространения, самая продвинутая версия которой, достигнутая в [8], все еще недостаточно точна для требуемого в настоящее время уровня понимания процессов, происходящих при распространении нефтепродуктов в различных природных условиях.

В большинстве естественных ситуаций разливы нефтепродуктов происходят на двумерной поверхности (открытые водные пространства заливов, озер, морей и т.д.), но возможны особые условия (каналы, реки, узкие аквариумы и т.д.), когда поверхность разлива можно считать одномерной [15]. Этот факт приводит к необходимости создания отдельных моделей для одномерного и двумерного распространения.

Испарение нефтепродуктов или их отдельных компонентов, приводящее к значительному изменению физико-химических свойств разливающегося вещества [16, 17], требует усложнения математической модели в направлении учета уменьшения массы разливающегося вещества и пространственно-временной зависимости его термодинамических параметров.

Математическая модель при наличии потоков воды требует дополнительного усложнения, поскольку необходимо учитывать вязко-адвективный перенос пятна нефтепродуктов приповерхностным потоком воды [8, 13].

В данной работе представлена упрощенная математическая модель, позволяющая исследовать основные динамические параметры процесса растекания. В этой модели химический состав и все термодинамические параметры среды считаются постоянными величинами, масса растекающегося пятна предполагается неизменной, все среды однородны и изотропны.

Поскольку характерные скорости переноса вещества, сопровождающие процесс разлива нефти, значительно ниже, чем скорости звука в любой среде, все среды считаются несжимаемыми.

**2. Осесимметричное растекание нефти.** Растекание нефти сопровождается рядом механических и термодинамических процессов. Поэтому при создании модели распространения необходимо учитывать следующие основные факторы, влияющие на динамику разлива:

– Переход потенциальной энергии системы нефть–вода в кинетическую энергию в гравитационном поле из-за изменения геометрических характеристик разлива с течением времени.

– Вязкое вовлечение воды в движение из-за касательных напряжений на границе нефть–вода, вызванных горизонтальной составляющей поля скоростей в нефти. В то же время горизонтальное движение нефти замедляется.

– Создание течения в воде, вызванного вертикальным смещением нижней границы разлива нефти.

– Создание движения воды во время разлива нефти из-за явления сопротивления формы разлива нефти, сопровождающегося ее движением в воде.

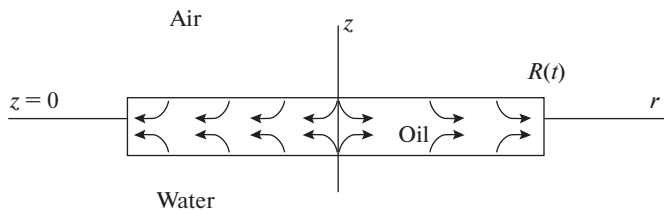


Рис. 1. Модель осесимметричного разлива нефти.

– Изменение количества поверхностной энергии системы “масло в воде” по причине изменения площадей контактных границ “масло–вода”, “масло–воздух”, “воздух–вода”.

– Вязкие тепловые потери в масле и воде.

Ниже приведен приблизительный расчет параметров разлива, модель которого основана на форме нефтяного пятна в виде диска, его радиус  $R(t)$  и толщина  $h(t)$  являются функциями времени. Структура потока масла внутри диска такова, что в верхней части частицы жидкого масла движутся вниз и от центра диска, а в нижней части – вверх и от центра диска, как показано на рис. 1. Этот тип потока соответствует движению поверхностей пятна во время разлива: верхняя граница (граница раздела масло–воздух) перемещается вниз, а нижняя (граница раздела масло–вода) перемещается вверх.

Для описания энергетических соотношений системы нефть–вода используется модель нефтяного пятна, размещенного на поверхности воды, содержащейся в цилиндрической области радиуса  $R_w$ . Первоначально, в отсутствие нефти, глубина воды была равна  $H$ . Пусть в какой-то момент времени радиус нефтяного пятна равен  $R_o$ , а толщина равна  $h$ .

Координаты верхней и нижней границ нефтяного пятна во времени задаются значениями  $z = h_{\pm}(t)$ , так что толщина пятна равна

$$h(t) = h_+(t) - h_-(t), \quad (2.1)$$

и его радиус равен  $R_o$ . Уровень свободной поверхности воды в это время обозначается символом  $H'$ . Одним из параметров проблемы является объем нефтяного пятна

$$V = \pi R_o^2(t)h(t) = \pi R_o^2(t)(h_+(t) - h_-(t)) = \text{const}, \quad (2.2)$$

который остается неизменным в течение всего времени разлива.

На основе закона сохранения объема воды

$$\pi R_w^2 H + \pi R_o^2 (H' - h_-) = \pi R_w^2 H', \quad (2.3)$$

и законе Архимеда

$$\pi R_o^2 (H' - h_-) \rho_w = \pi R_o^2 (h_+ - h_-) \rho_o, \quad (2.4)$$

получаются необходимые соотношения

$$H' = H + \rho R_*^2 h, \quad h_- = H - (1 - R_*^2) \rho h, \quad h_+ = H + (1 - (1 - R_*^2) \rho) h, \quad (2.5)$$

где  $\rho = \rho_o / \rho_w$ ,  $R_* = R_o / R_w$ .

В постоянном гравитационном поле потенциальная энергия системы, показанной на рис. 2, с учетом (2.5) определяется соотношением



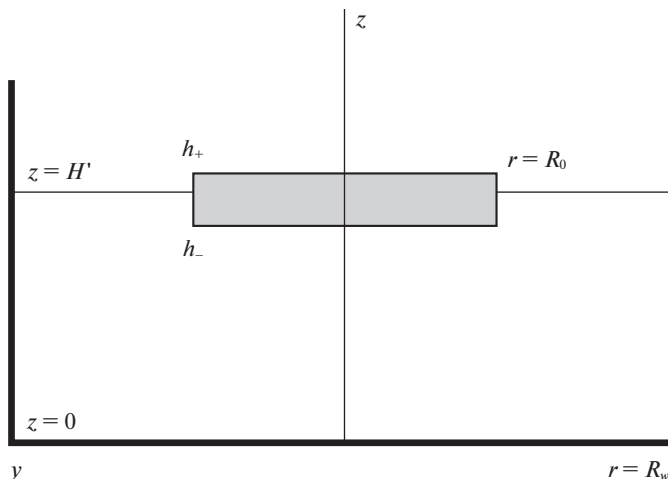


Рис. 2. Модель для расчета энергетического состояния системы.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\pi}{2} g \left[ (R_w^2 - R_o^2) H'^2 \rho_w + R_o^2 h_-^2 \rho_w + R_o^2 (h_+ + h_-) h \rho_o \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} g \left[ R_w^2 H'^2 \rho_w + 2R_o^2 H h \rho_o + R_o^2 h^2 \rho_o (1 - \rho) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поверхностная энергия определяется выражением

$$E_S = \pi (R_w^2 - R_o^2) \sigma_{aw} + \pi R_o^2 (\sigma_{ow} + \sigma_{oa}) = \pi R_w^2 \sigma_{aw} + \pi R_o^2 (\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}), \quad (2.7)$$

где  $\sigma_{ij}$  – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела  $i$ -й и  $j$ -й сред.

Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии нефти и воды и имеет вид

$$T = \pi \left[ \rho_w \int_{R_o}^{R_w} \int_0^{H'} \mathbf{w}^2 r dr dz + \rho_w \int_0^{R_o} \int_0^{h_-} \mathbf{w}^2 r dr dz + \rho_o \int_0^{R_o} \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{v}^2 r dr dz \right], \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  – поля скоростей в нефти и воде соответственно.

Скорость диссипации вязкой энергии в системе определяется выражением

$$\dot{E}_V = \frac{\pi}{\eta_w} \left[ \int_{R_o}^{R_w} \int_0^{H'} \Sigma_w r dr dz + \int_0^{R_o} \int_0^{h_-} \Sigma_w r dr dz \right] + \frac{\pi}{\eta_o} \int_0^{R_o} \int_{h_-}^{h_+} \Sigma_o r dr dz, \quad (2.9)$$

где  $\Sigma_i = \sigma_{rr}^2 + 2\sigma_{rz}^2 + \sigma_{zz}^2$ , причем элементы тензора вязких напряжений вычисляются для  $i$ -й среды.

Таким образом, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \Sigma_w &= 2\eta_w^2 \left[ 2(\partial w_r / \partial r)^2 + (\partial w_r / \partial z + \partial w_z / \partial r)^2 + 2(\partial w_z / \partial z)^2 \right] \\ \Sigma_o &= 2\eta_o^2 \left[ 2(\partial v_r / \partial r)^2 + (\partial v_r / \partial z + \partial v_z / \partial r)^2 + 2(\partial v_z / \partial z)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

В выражениях (2.6) и (2.7) значения  $\frac{\pi}{2} R_w^2 H'^2 \rho_w g$  и  $\pi R_w^2 \sigma_{aw}$  описывают потенциальную и поверхностную энергию воды перед нанесением на нее нефтяного пятна. Отказ от этих членов и перенос начала координат оси  $z$  на исходную поверхность воды, с

учетом того факта, что размер акватории значительно больше размера разлива, устремление внешнего радиуса  $R_w$  системы к бесконечности ( $R_w \rightarrow \infty \sim R_* \rightarrow 0$ ), и введение обозначения  $R_0 = R(t)$  для сокращения записи, приводит к окончательным выражениям для энергетических характеристик разлива нефти

$$H' = H, \quad h_- = -\rho h, \quad h_+ = (1 - \rho)h \quad (2.11)$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2} R^2 h^2 \rho_o g (1 - \rho) = \frac{M_o g}{2} h (1 - \rho), \quad (2.12)$$

где  $M_o$  – масса нефти, которая является постоянной величиной,

$$E_S = \pi R^2 (\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}) = M_o g \frac{\lambda_S^2}{h} \text{sign}(\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}), \quad (2.13)$$

где  $\lambda_S = \sqrt{|\sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}| / \rho_o g}$  – капиллярная постоянная контактной линии “нефть–вода–воздух”,

$$T = \pi \left[ \rho_w \int_{R-H}^{\infty} \int_0^0 \mathbf{w}^2 r dr dz + \rho_w \int_0^R \int_{-H}^{h_-} \mathbf{w}^2 r dr dz + \rho_o \int_0^R \int_{h_-}^{h_+} \mathbf{v}^2 r dr dz \right] \quad (2.14)$$

$$\dot{E}_V = \frac{\pi}{\eta_w} \left[ \int_{R-H}^{\infty} \int_0^0 \Sigma_w r dr dz + \int_0^R \int_{-H}^{h_-} \Sigma_w r dr dz \right] + \frac{\pi}{\eta_o} \int_0^R \int_{h_-}^{h_+} \Sigma_o r dr dz \quad (2.15)$$

Уравнение динамики энергии системы имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (T + \Pi + E_S) = -\dot{E}_V \quad (2.16)$$

Для того чтобы система уравнений (2.1), (2.2), (2.11)–(2.16) приводила к конструктивным результатам, необходимо задаться моделью поля скоростей в нефти и воде.

$$v_r|_{r=0} = 0, \quad v_r|_{r=R(t)} = \dot{R}(t), \quad v_z|_{z=h_{\pm}(t)} = \dot{h}_{\pm}(t), \quad (2.17)$$

где точка над символом обозначает производную по времени, а поле скорости в воде удовлетворяет условиям

$$w_r|_{r=0} = 0, \quad w_r|_{r=R, z \in [h_-, 0]} = \dot{R}, \quad w_z|_{z=0, r > R} = 0, \quad w_z|_{z=h_-, r \leq R} = \dot{h}_- \\ \mathbf{w}|_{r=\infty} = 0, \quad \mathbf{w}|_{z=-H} = 0 \quad (2.18)$$

Поле скоростей, как в нефти, так и в воде состоит из двух частей – потенциальной и вихревой. Потенциальная часть обусловлена перемещением границ нефтяного пятна. Вихревая часть обусловлена вязким трением в рассматриваемых средах и возникает в результате развития потенциального потока.

Поскольку обе среды считаются несжимаемыми, то есть удовлетворяющими уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.19)$$

то компоненты потенциальной части поля скоростей в нефти с учетом условий (2.17) принимают вид

$$v_r = \frac{\dot{R}}{R} r, \quad v_z = -2 \frac{\dot{R}}{R} (z - h_-) + \dot{h}_- \quad (2.20)$$

В воде потенциальная часть поля скорости определяется движением нижней части масляного диска со скоростью  $\dot{h}_-$  и определяется соотношениями

$$\mathbf{w} = \nabla \Phi_w, \quad \Phi_w(r, z, t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} M(r - r', z - h_-, \psi, t) r' dr' d\psi \quad (2.21)$$

и граничными условиями (2.18).

В (2.21)  $M(r - r', z - h, \psi, t)$  есть некоторая функция координат и времени, явная форма которой в будущем не понадобится.

Вязкое вовлечение воды нефтью влечет за собой развитие вихревой составляющей полей скорости, как в воде, так и в нефти. Учет этого явления приводит к изменению записи полей скорости в нефти (см. Приложение)

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\dot{R}}{R} r (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o)) \\ v_z &= -4 \frac{\dot{R}}{R} \sqrt{v_o t} \left[ \zeta_o (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o)) + \frac{\kappa_{ow}}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_o^2} \right] + \dot{h}_- \end{aligned} \quad (2.22)$$

и в воде при  $r \leq R(t)$

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{\dot{R}}{R} r \kappa_{wo} \operatorname{erfc}(\zeta_w) + \frac{\partial \Phi_w}{\partial r} \\ w_z &= 4 \kappa_{wo} \frac{\dot{R}}{R} \sqrt{v_w t} \left[ \zeta_w \operatorname{erfc}(\zeta_w) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta_w^2} \right] + \frac{\partial \Phi_w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \zeta_o &= \frac{z - h_-}{2\sqrt{v_o t}}, \quad \zeta_w = \frac{h_- - z}{2\sqrt{v_w t}}, \quad \kappa_{ow} = k_{ow} \theta(t), \quad \kappa_{wo} = k_{wo} \theta(t) \\ k_{ow} &= \frac{\sqrt{\rho_w \eta_w}}{\sqrt{\rho_o \eta_o} + \sqrt{\rho_w \eta_w}}, \quad k_{wo} = 1 - k_{ow} = \frac{\sqrt{\rho_o \eta_o}}{\sqrt{\rho_o \eta_o} + \sqrt{\rho_w \eta_w}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь  $v_o, v_w$  кинематические, и  $\eta_o, \eta_w$  динамические вязкости нефти и воды, соответственно.

*Расчет вязких потерь.* Вязкие потери в нефти рассчитываются на основе выражений (2.22), из которых следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{\dot{R}}{R} (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o)), \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\dot{R}}{R} \frac{r \kappa_{ow}}{\sqrt{\pi v_o t}} e^{-\zeta_o^2} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2 \frac{\dot{R}}{R} (1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

и тогда, согласно (2.10), имеет место

$$\Sigma_o = 2\eta_o^2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[ 10(1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o))^2 + \frac{r^2 \kappa_{ow}^2}{\pi v_o t} e^{-2\zeta_o^2} \right] \quad (2.26)$$

В результате мощность вязких потерь в нефти определяется выражением

$$\frac{\pi}{\eta_o} \int_0^R \int_h^{h_-} \Sigma_o r dr dz = 2\pi \eta_o \sqrt{v_o t} \dot{R}^2 \int_0^{\zeta_h^o} \left[ 10(1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_o))^2 + \frac{r^2 \kappa_{ow}^2}{2\pi v_o t} e^{-2\zeta_o^2} \right] d\zeta_o, \quad (2.27)$$

где  $\zeta_h^o = \frac{h}{2\sqrt{v_o t}}$ .

Точное значение выражения (2.27) вычислено, но оно слишком громоздко, поэтому ниже приведены два предельных значения этого выражения при  $\zeta_h^o \ll 1$  (что соответствует случаю, когда толщина разлива намного меньше толщины вязкого пограничного слоя в нефти на границы вода–нефть, что эквивалентно большим значениям времени  $t$  после начала разлива)

$$\frac{\pi}{\eta_o} \int_0^R \int_h^{h_-} \Sigma_o r dr dz = \frac{M_o \dot{R}^2 \kappa_{ow}^2}{2\pi t} \left( 1 + O\left(\frac{v_o t}{R^2}\right) \right), \quad (2.28)$$

и при  $\zeta_h^o \gg 1$  (когда выполняется обратное соотношение для упомянутых выше толщин, что характерно для динамики разлива в начальные моменты времени)

$$\frac{\pi}{\eta_o} \int_0^R \int_0^h \Sigma_o r dr dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \eta_o \frac{R^2 \dot{R}^2 \kappa_{ow}^2}{2\sqrt{v_o t}} \left( 1 + O\left(\frac{h\sqrt{v_o t}}{R^2}\right) \right) \quad (2.29)$$

Поскольку в реальных условиях  $h \ll R$  и  $\sqrt{v_o t} \ll R$ , то даже для самых вязких сортов нефти во все моменты времени наблюдения за процессом, выражения (2.28), (2.29) характеризуются небольшой погрешностью вычислений.

Вязкие потери в воде рассчитываются на основе выражений (2.23), из которых следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_r}{\partial r} &= \frac{\dot{R}}{R} \kappa_{wo} \operatorname{erfc}(\zeta_w), & \frac{\partial w_r}{\partial z} &= \frac{\dot{R}}{R} \frac{r \kappa_{wo}}{\sqrt{\pi v_w t}} e^{-\zeta_w^2} \\ \frac{\partial w_z}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial w_z}{\partial z} &= -2 \frac{\dot{R}}{R} \kappa_{wo} \operatorname{erfc}(\zeta_w) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Тогда, согласно (2.10), имеет место

$$\Sigma_w = 2\eta_w^2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left[ 10\kappa_{wo}^2 \operatorname{erfc}^2(\zeta_w) + \frac{r^2 \kappa_{wo}^2}{\pi v_w t} e^{-2\zeta_w^2} \right] \quad (2.31)$$

Основная часть вязких потерь в воде — это величина

$$\frac{\pi}{\eta_w} \int_0^R \int_0^h \Sigma_w r dr dz,$$

в которой можно устремить глубину моря  $H$  в бесконечность (это связано с быстрым уменьшением значений элементов тензора вязких напряжений (2.30) при удалении от нижней границы нефтяного пятна), в результате чего для всех моментов времени справедлив результат

$$\frac{\pi}{\eta_w} \int_0^R \int_0^h \Sigma_w r dr dz = \frac{\eta_w}{4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{v_w t}} R^2 \dot{R}^2 \kappa_{wo}^2 \left( 1 + O\left(\frac{v_w t}{R^2}\right) \right), \quad (2.32)$$

погрешность которого невелика из-за справедливости соотношения  $v_w t \ll R^2$  на протяжении всего процесса разлива.

*Расчет кинетической энергии.* Этот расчет выполняется в соответствии с соотношением (2.14) при  $H \rightarrow \infty$ , и с учетом малости значения

$$\left| \frac{\dot{h}}{\dot{R}} \right| = \left| \frac{1}{\dot{R}} \left( \frac{\dot{V}}{\pi R^2} \right) \right| = \frac{2V}{\pi R^3} \ll 1 \quad (2.33)$$

Как показывают расчеты, проведенные на основе выражений (2.22) для поля скорости в нефти, кинетическая энергия радиального движения пропорциональна величине  $\dot{R}^2$ , а вертикального движения —  $\dot{h}^2$ . Тогда, согласно (2.33), энергией вертикального движения можно пренебречь, в результате чего кинетическая энергия нефти задается приближенным выражением

$$T_o = \frac{M_o \dot{R}^2}{4} \left( 1 - \kappa_{ow} \operatorname{erfc}(\zeta_h^o) \right)^2 = \frac{M_o \dot{R}^2}{4} \begin{cases} (1 - \kappa_{ow})^2, & \zeta_h^o \ll 1 \\ 1, & \zeta_h^o \gg 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

Движение воды во время разлива нефти вызвано тремя основными механизмами — вязким захватом воды потоком нефти (вязкий член в поле скоростей (2.23)), генерацией потенциального потока воды из-за смещения вверх нижней границы нефтяного

пятна (члены с  $\partial \Phi_w / \partial r$  и  $\partial \Phi_w / \partial z$  в (2.23)) и генерированием потока воды из-за явления сопротивления формы, растекающегося олеина.

Поскольку максимальное значение потенциальной части поля скорости в воде ограничено значением  $|\dot{h}_c| < |\dot{h}|$ , этой частью кинетической энергии воды можно пренебречь по сравнению с энергией воды, увлекаемой за счет вязких эффектов, основная часть которых описывается значением

$$T_w = \frac{M_w \dot{R}^2}{4} \kappa_{wo}^2 \frac{1}{\zeta_h^w} \frac{2 - \sqrt{2}}{\pi^{3/2}}; \quad M_w = \rho_w V, \quad \zeta_h^w = \frac{h}{2\sqrt{v_w t}} \quad (2.35)$$

Явная форма величины кинетической энергии воды, обусловленной явлением сопротивления формы, задается выражением

$$T_f = \int_0^t C_{sh} \dot{R}^2 dt, \quad (2.36)$$

где  $C_{sh}$  – коэффициент сопротивления формы, точное значение которого неизвестно.

*Уравнение динамики энергии.* На основе уравнения (2.16) и выражений, полученных выше, уравнение энергетической динамики системы может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_o + T_w + \Pi + E_S) + C_f \dot{R}^2 + \dot{E}_v = 0, \quad (2.37)$$

где  $\Pi$  определяется выражением (2.12),  $E_S$  – (2.13),  $\dot{E}_v$  – (2.28), (2.29), (2.32),  $T_o$  – (2.34) и  $T_w$  – (2.35).

Анализ выражений (2.34) и (2.35) показывает, что поскольку  $\frac{2 - \sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \ll 1$  и  $\frac{1}{\zeta_h^w} < 1$  (при начальной толщине разлива  $h = 1$  м это значение сопоставимо с единицей, только начиная со времени  $t \sim 10^3$  с, когда процесс разлива почти завершен), значением  $T_w$  следует пренебречь по сравнению с  $T_o$ . Затем, при подстановке необходимых значений в (2.37), формируется несколько громоздкое нелинейное уравнение, учитывающее множество факторов, влияющих на процесс растекания нефти по поверхности воды

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \frac{2C_{sh}}{M_o \alpha^2} \dot{R} + \frac{4g\lambda_s^2}{V\alpha^2} \text{sign}(\sigma)\pi R - \frac{2gV(1-\rho)}{\pi\alpha^2} \frac{1}{R^3} + \\ + \frac{1}{2M_o \alpha^2} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \left( \frac{\eta_o}{\sqrt{v_o}} \kappa_{ow}^2 + \frac{\eta_w}{\sqrt{v_w}} \kappa_{wo}^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $\alpha = 1 - \kappa_{ow} \text{erfc}(\zeta_h)$ ,  $\sigma = \sigma_{ow} + \sigma_{oa} - \sigma_{aw}$ .

Введение переменной  $F = \pi^2 R^4$  – квадрата площади разлива нефти – преобразует уравнение (2.38) к виду

$$\ddot{F} - \frac{3}{4} \frac{\dot{F}^2}{F} + 2a^2 \dot{F} + b^2 \text{sign}(\sigma)F - c^2 + d^2 \sqrt{F} \dot{F} = 0, \quad (2.39)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a^2 = \frac{C_{sh}}{M_o \alpha^2}, \quad b^2 = \frac{16\pi g \lambda_s^2}{V \alpha^2}, \quad c^2 = \frac{8\pi g(1-\rho)V}{\alpha^2} \\ d^2 = \frac{1}{M_o \alpha^2 \sqrt{2\pi t}} \frac{\rho_o \rho_w \sqrt{v_o v_w}}{\rho_o \sqrt{v_o} + \rho_w \sqrt{v_w}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Анализ экспериментальных данных с минеральным маслом Volga M8B-SAE 20 API

показывает, что значение  $\frac{3}{4} \frac{\dot{F}^2}{F}$  значительно меньше значения  $\dot{F}$ , и им можно прене-

бречь. В то же время выражение для коэффициента  $d^2$  в (2.40) указывает на значительный вклад вязких потерь только в начальные моменты времени разлива, когда вязкие напряжения в среде имеют существенные значения. Это позволяет не учитывать последний член уравнения (2.39). В результате таких приближений уравнение динамики энергии принимает вид

$$\ddot{F} + 2a^2 \dot{F} + b^2 \text{sign}(\sigma)F - c^2 = 0, \quad (2.41)$$

более того, коэффициенты этого уравнения рассматриваются как постоянные значения, несмотря на наличие в них зависящего от времени значения  $\alpha$ . Такой подход обусловлен тем, что скорость изменения  $\alpha$  значительно меньше скорости изменения радиуса растекания  $R$

$$|\dot{\alpha}| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \kappa_{ow} e^{-h^2/4\nu_{ot}} \left| \frac{\dot{h}}{2\sqrt{\nu_{ot}}} - \frac{h}{4t\sqrt{\nu_{ot}}} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi\nu_{ot}}} \kappa_{ow} e^{-h^2/4\nu_{ot}} \left( \dot{R} + \frac{R}{4t} \right) \frac{V}{\pi R^3} \ll \dot{R}$$

*Решение уравнения (2.41).* Решение этого уравнения делится на два варианта.

*I.* Разлив нефти, ограниченный по площади, когда на поверхности воды может образоваться масляная линза, как конечное равновесное состояние системы. Этому случаю соответствует значение  $\text{sign}(\sigma) = 1$ . Тогда из (2.41) следует, что существует предельная величина  $F_*$ , определяемая выражением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \frac{c^2}{b^2} = \frac{(1-\rho)V^2}{2\lambda_s^2} = F_*, \quad (2.42)$$

чему соответствуют предельная площадь пятна  $S_*$  и предельный радиус  $R_*$ , описываемые соотношениями

$$S_* = F_*^{1/2}, \quad R_* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F_*^{1/4} \quad (2.43)$$

Точно такое же предельное значение  $F_*$  существует для уравнения (2.39) и при учете отброшенных нелинейных членов. В целях дальнейшего исследования вводится обозначение

$$\mu = \sqrt{|b^2 - a^4|} \quad (2.44)$$

Тогда, если  $a^4 < b^2$ , то решение (2.41) записывается в виде

$$F = F_* + (F_0 - F_*) e^{-a^2 t} \left[ \cos(\mu t) + \left( a^2 + \frac{F_1}{F_0 - F_*} \right) \frac{\sin(\mu t)}{\mu} \right], \quad (2.45)$$

где  $F_0 = F|_{t=0}$ ,  $F_1 = \dot{F}|_{t=0}$  – величины, определяемые начальными условиями.

Как видно из (2.45), площадь разлива  $S = F^{1/2}$  проявляет колебательное и затухающее поведение во времени. Частота колебаний вблизи положения равновесия определяется величиной  $2\pi b$ , а коэффициент затухания колебаний во времени определяется величиной  $a^2$ .

В случае существенного значения коэффициента затухания, когда  $a^4 > b^2$ , решение (2.41) имеет вид

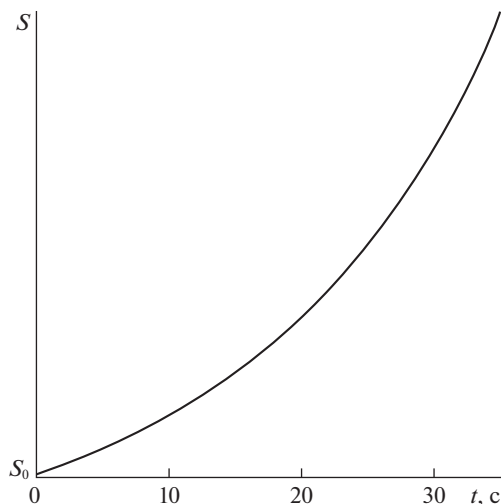


Рис. 3. Зависимость неограниченного разлива нефти от времени (2.46)–(2.47).

$$F = F_* + (F_0 - F_*)e^{-a^2 t} \left[ \operatorname{ch}(\mu t) + \left( a^2 + \frac{F_1}{F_0 - F_*} \right) \frac{\operatorname{sh}(\mu t)}{\mu} \right] \quad (2.46)$$

Графики соотношений (2.45) и (2.46) будут представлены в разд. 3.

II. Разлив нефти с неограниченной площадью происходит, когда нет предельного состояния равновесия системы, что соответствует значению  $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ . В этом случае вводятся значения

$$F_* = -\frac{(1-\rho)V^2}{2\lambda_s^2}, \quad \mu = \sqrt{a^4 + b^2}, \quad (2.47)$$

и решение уравнения (2.41) имеет вид (2.46), в который подставляются значения (2.47). Зависимость площади неограниченного разлива от времени показана на рис. 3.

Решение (2.47) включает в себя два экспоненциальных члена, один из которых пропорционален  $\exp(-(a^2 + \sqrt{a^4 + b^2})t)$ , а другой – значению  $\exp((\sqrt{a^4 + b^2} - a^2)t)$ . Первый член быстро затухает во времени, а второй неограниченно увеличивается, что обусловлено некомпенсированной силой поверхностного натяжения, действующей на границе контакта трех сред и направленной радиально от края нефтяного пятна во внешнюю область.

**3. Экспериментальные результаты и сравнение с аналитической моделью.** Эксперименты проводились с различными типами органических и минеральных масел и непосредственно с сырой нефтью. Исследование динамики распространения несмешивающейся примеси по поверхности воды проводилось в прямоугольной кювете длиной 50 см, шириной 40 см и глубиной 5 см. Чтобы избежать бликов от поверхности воды и пятен углеводородов, поверхность жидкости освещалась сверху тремя разнесенными источниками света, расположенными рядом с кюветой по бокам.

Экспериментальный метод включал нанесение различных количеств моторного масла Volga M8B-SAE 20 API ( $\rho_o = 883.7$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_o = 3.34 \times 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ ) и сырой нефти Мамонтовского месторождения ( $\rho_o = 878.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_o =$

$= 2.15 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ ) на поверхность известного объема воды и дальнейший мониторинг ее распространения по поверхности жидкости. Ход экспериментов записывался с помощью цифровой камеры в автоматическом режиме в течение 4 часов, съемка велась с частотой 360 кадров в минуту, а полученные последовательности кадров обрабатывались и анализировались. Положение масляного пятна регистрировали с использованием метода фотометрии обработанных изображений, полученных из исходных кадров методами пакетной обработки.

Переменными параметрами экспериментов были объем моторного масла, температура и соленость воды. В каждой серии экспериментов регистрировались два из вышеуказанных параметров, и для разных значений оставшегося параметра измерялась временная зависимость области распространения.

Для устранения случайных ошибок экспериментальные данные были подвергнуты дополнительной обработке с использованием модифицированного алгоритма сдвига (MSA) [18], который показал стабильную работоспособность при выделении полезного сигнала на фоне шума вплоть до отношения сигнал/шум  $-15 \text{ дБ}$ .

Ниже приведены только самые характерные экспериментальные зависимости из множества измерительных результатов.

*Растекание машинного масла.* На рис. 4, а красными точками показана экспериментальная зависимость площади разлива моторного масла Volga M8B-SAE 20 API от времени. Данные нормируются по своему максимальному значению, черные точки являются результатом обработки набора красных точек алгоритмом MSA. Все последующие экспериментальные данные, представленные здесь, также подвергались обработке алгоритмом MSA.

Как можно видеть, поведение кривой  $\bar{S}(t)$  на рис. 4, а хорошо соответствует зависимости (2.46), проиллюстрированной на рис. 4, б. Здесь и на рис. 5, б отсчеты времени безразмерны и являются условными, причины чего будут объяснены далее.

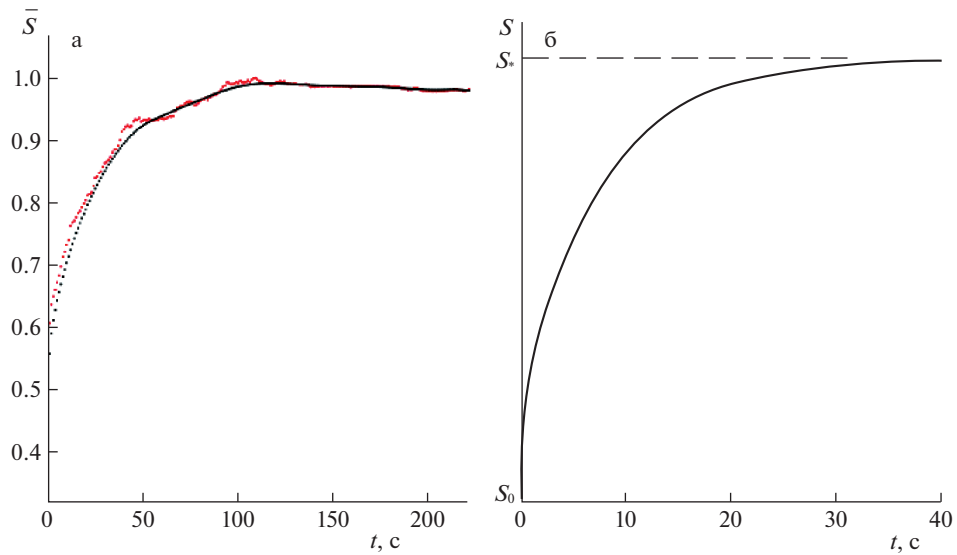
Согласно (2.46) отклонение от положения равновесия  $F = F_*$  описывается двумя убывающими показателями  $\exp(-a^2t + \mu t)$  и  $\exp(-a^2t - \mu t)$ . В начальные моменты времени вклад от члена содержащего  $\exp(-a^2t - \mu t)$  уменьшается наиболее быстро. В последующие моменты времени, когда основной вклад в отклонение вносит член, содержащий  $\exp(-a^2t + \mu t)$ , скорость снижения отклонения уменьшается по сравнению с начальными моментами времени. Этот факт отражен в поведении кривой на рис. 5, б.

Колебательный режим, описываемый соотношением (2.45), также наблюдался экспериментально, и его обработанные данные представлены на рис. 5, а.

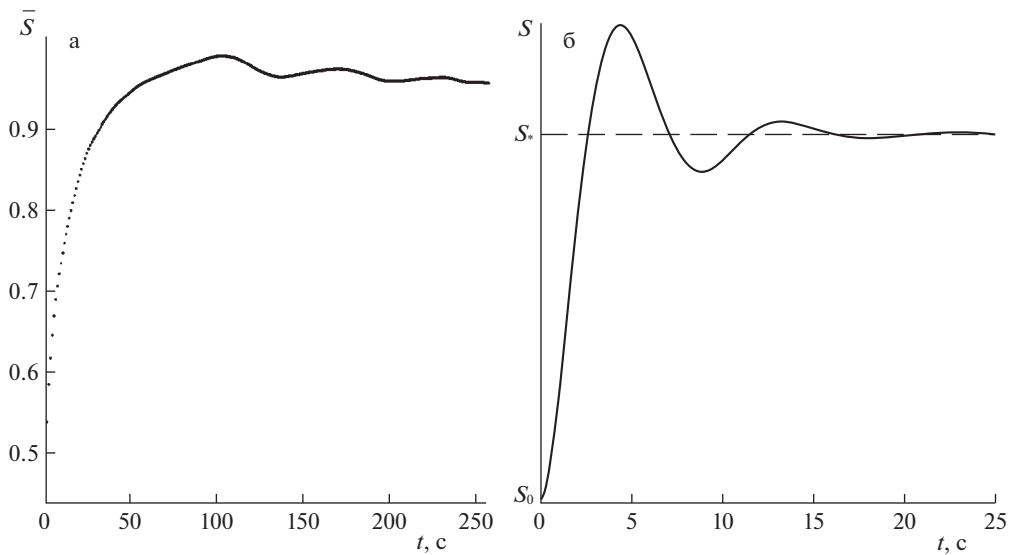
Видно, что площадь разлива растёт со временем, начиная с определенного значения  $S_0$ , достигает значения  $S_*$ , проскакивает его по инерции, после чего возникает возвратная сила, ускорение  $\ddot{F}$  меняет знак (становится отрицательным), площадь разлива начинает уменьшаться, достигает значения  $S_*$ , проскакивает его по инерции, после чего возникает возвратная сила, ускорение  $\ddot{F}$  меняет знак (становится положительным), площадь разлива начинает увеличиваться, достигает значения  $S_*$ , проскакивает его по инерции, ускорение  $\ddot{F}$  меняет знак (становится отрицательным) и т.д. Амплитуда колебаний постепенно уменьшается из-за передачи энергии от нефтяного пятна к воде (член  $a^2\dot{F}$  в уравнении (2.41)). В конце концов, нефтяное пятно приобретает свой стационарный размер.

Разница в поведении ограниченной области разлива на рис. 4 и 5 объясняется тем фактом, что в случае решения (2.46) скорость перехода кинетической энергии нефтяного топлива в кинетическую энергию воды (из-за явления сопротивления формы)





**Рис. 4.** Экспериментальные (красные) и обработанные (черные) данные растекания машинного масла Volga M8B-SAE 20 API (а). Аналитический результат (б), вычисленный на основе (2.46),  $S = F^{1/2}$ .



**Рис. 5.** Обработанные данные растекания машинного масла Volga M8B-SAE (а). Аналитический результат (б), вычисленный на основе (2.45),  $S = F^{1/2}$ .

значительно больше, чем скорость перехода к поверхностной энергии на границе раздела контактирующих сред, в отличие от случая решения (2.45), когда наблюдается обратная корреляция этих скоростей.

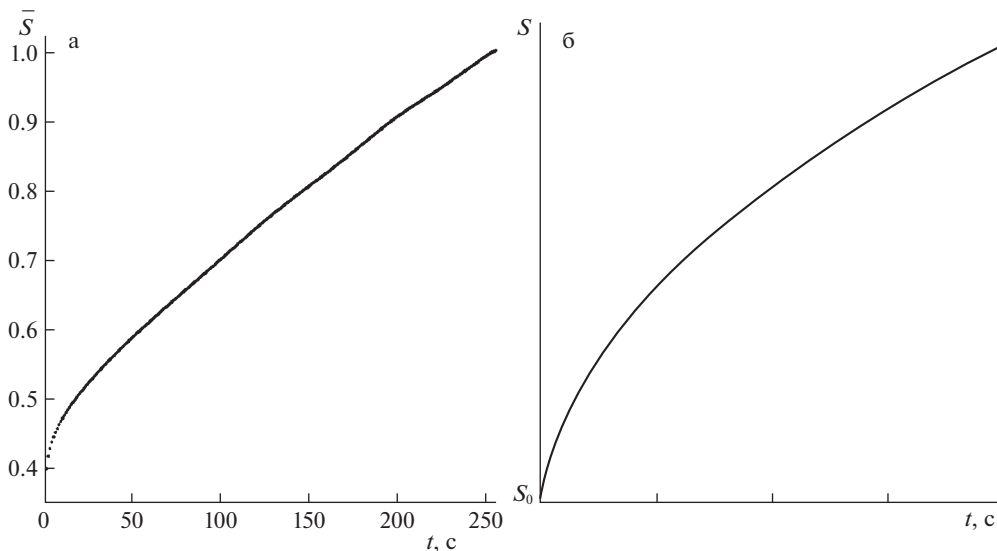


Рис. 6. Обработанные экспериментальные данные растекания сырой нефти (а). Аналитический результат (2.46, 2.47) для сырой нефти в начальные моменты времени (б).

*Растекание сырой нефти.* Сырая нефть демонстрирует иное поведение, связанное с неограниченным разливом углеводородов, экспериментальные данные для которой показаны на рис. 4,а. Поскольку размеры лабораторной установки не позволяют отследить разлив на большой площади, как на рис. 3, сравнение с теоретическими результатами (2.46), (2.47) проводится только за небольшие промежутки времени от начала процесса. Расчеты, представленные на рис. 6,б, выполненные в соответствии с соотношениями (2.46), (2.47), показывают хорошее качественное совпадение эксперимента и теории. Здесь следует подчеркнуть, что график на рис. 6,б представляет точную начальную часть графика, показанного на рис. 3.

Сравнения экспериментальных и теоретических результатов, представленные в этом разделе, носят исключительно качественный характер из-за недостатка вычислительных данных. Невозможно провести количественное сравнение для всех экспериментальных ситуаций из-за отсутствия некоторых количественных характеристик тестируемых сред. Чтобы доказать этот факт, достаточно привести уравнение (2.41) к безразмерной форме путем введения новых переменных

$$F = \frac{c^2}{a^4} \Phi, \quad t = \frac{\tau}{a^2}, \quad (3.1)$$

подстановка, которая в (2.41) приводит это уравнение к виду

$$\Phi'' + 2\Phi' + \varepsilon\Phi - 1 = 0; \quad \varepsilon = 16\pi M_o \frac{\alpha^2 \sigma}{C_{sh}^2} \quad (3.2)$$

Свойства решений этого однопараметрического уравнения определяются величиной  $\varepsilon$ , значение которой задается массой олеина  $M_o$ , плотностью и вязкими свойствами воды и олеина – коэффициентом  $\alpha$ , суммарным поверхностным натяжением  $\sigma$  на линии контакта трех сред и коэффициентом сопротивления формы  $C_{sh}$ . И если первые три значения известны с достаточной степенью точности, то оценки коэффициента

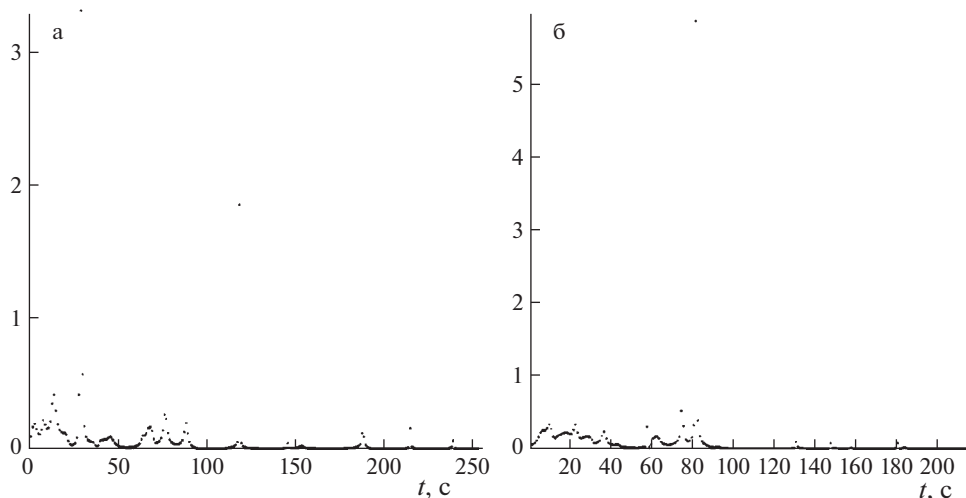


Рис. 7. Отношение  $\left|3\dot{F}^2/4F\ddot{F}\right|$  (2.45) (а) и (2.46) (б).

ента сопротивления формы пятна машинного масла или сырой нефти, разливающейся по воде, в настоящее время неизвестны. Получение таких оценок требует сложных и трудоемких измерений, что является отдельной научной задачей.

Следует также отметить, что значение коэффициента сопротивления формы включено как в шкалу размеров разлива  $c^2/a^4$ , так и в несколько временных шкал:  $a^{-2}$ ,  $\mu^{-1}$ , и т.д. (см. выражения (2.45)–(2.47)).

*Проверка справедливости уравнения (2.41) с помощью экспериментальных измерений.* Уравнение (2.41) было получено в приближении малости отношения  $\left|3\dot{F}^2/4F\ddot{F}\right|$ , то есть предполагалось выполненным условие

$$\left|3\dot{F}^2/4F\ddot{F}\right| \ll 1 \quad (3.3)$$

На рис. 7, а и б представлены расчетные значения (3.3), выполненные на основе данных обработки для рис. 4, а и 5, а.

Как видно из представленных графиков, в подавляющем большинстве точек (от 95% и более) соотношение (3.3) безусловно выполняется, что подтверждает правомерность использования приближенного уравнения (2.41) для рассматриваемой задачи.

**Заключение.** Построенная теоретическая модель растекания в виде приближенного уравнения (2.41), общего как для ограниченной, так и для неограниченной площади разлива олеина, позволила получить явные аналитические решения для любого момента времени процесса, не разделяя его на отдельные временные отрезки, как это было сделано в [5, 6, 8].

Теоретический анализ процесса разлива нефтепродуктов на поверхности воды показал, что его динамика, набор временных масштабов и предельные размеры хорошо описываются приближенным уравнением (2.41), управляющими параметрами которого являются три значения –  $a^2$ ,  $b^2 \text{sign}(\sigma)$  и  $c^2$ , введенные соотношениями (2.40). Первое значение,  $a^2$ , определяется коэффициентом сопротивления формы нефтяного пятна, растекающегося по поверхности воды, массой разлитого олеина и значением  $\alpha^2$ , которое описывает динамику процесса взаимного вовлечения воды и олеина. Это зна-

чение описывает вклад тормозящей силы, возникающей в результате пространственного перераспределения водных и масляных масс в процессе растекания. Второе значение,  $b^2 \text{sign}(\sigma)$ , определяется значением результирующего коэффициента поверхностного натяжения на линии контакта воздух–вода–олеин, массой пролитого олеина и значением  $\alpha^2$ . Это значение отвечает за учет роли поверхностных сил (как растягивающих пятно, так и сжимающих его, в зависимости от конкретной ситуации) в процессе растекания. Третье значение,  $c^2$ , описывает влияние сил выталкивания и эффекты взаимного вовлечения воды и нефти на динамику процесса.

Эффекты вязкого трения одной среды о другую с учетом динамики разлива учитываются в зависимости от коэффициентов вовлечения воды и олеина, значения которых приведены в соответствующих выражениях (П.10)–(П.12). Также показано, что преобразование общих энергетических запасов системы в тепловую энергию из-за внутреннего трения можно пренебречь, на что указывает хорошее совпадение экспериментальных и теоретических результатов.

В случае, когда характерные свойства среды таковы, что существует предельное состояние в виде пятна олеина конечной площади (соотношения (2.45, 2.46)), которое формируется в виде углеводородной линзы [20], и характеризует растекание на его конечной стадии либо затухающими колебаниями (2.45), либо монотонным достижением предельного значения (2.46). В первом случае колебательное поведение обусловлено превышающим влиянием сил поверхностного натяжения по сравнению с силой сопротивления формы пятна, а во втором случае имеет место обратное соотношение сил.

Если свойства контактирующих сред таковы, что нет предельного размера олеинового пятна, что является следствием превышения коэффициента поверхностного натяжения на границе воздух–вода над суммой коэффициентов на границах вода–олеин и воздух–олеин, то наблюдается неограниченное растекание, площадь которого растет экспоненциально с течением времени (2.47).

Работоспособность полученного унифицированного уравнения динамики разлива олеина подтверждается сравнением с экспериментальными результатами, которые выявили те же режимы для разных типов олеинов, что и в теоретическом описании.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Российской Федерации в лице Министерства образования и науки России № 075-15-2020-802.

### Приложение. Модель проблемы взаимного вовлечения воды и нефти

Рассматривается одномерная модельная задача, схема которой приведена на рис. 8.

Пусть две среды,  $i$ -я и  $j$ -я, характеризуются плотностями и динамическими вязкостями  $\rho_i$ ,  $\eta_i$  и  $\rho_j$ ,  $\eta_j$  соответственно, перемещаются в областях  $z > 0$  и  $z < 0$  вдоль оси  $x$  с постоянными скоростями  $v_{i0}$  и  $v_{j0}$ . В начальный момент времени они соприкасаются в плоскости  $z = 0$ . Требуется найти распределения скоростей  $v_i(z, t)$  и  $v_j(z, t)$  в пространстве и во времени при  $t > 0$ . Уравнения движения имеют вид

$$\partial v_{i,j} / \partial t - v_{i,j} \partial^2 v_{i,j} / \partial z^2 = 0, \quad (\text{П.1})$$

где  $v_{i,j} = \eta_{i,j} / \rho_{i,j}$  – кинематические вязкости соответствующих сред.

Начальные условия имеют вид

$$v_{i,j}(z, t) \Big|_{t=0} = v_{i0,j0} = \text{const}_{i,j}, \quad (\text{П.2})$$

кинематическое граничное условие состоит в равенстве скоростей сред на границе контакта  $z = 0$

$$v_i(z, t) \Big|_{z=0} = v_j(z, t) \Big|_{z=0}; \quad t > 0, \quad (\text{П.3})$$

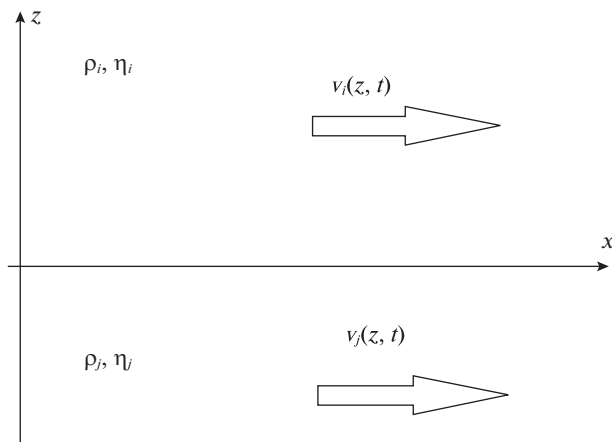


Рис. 8. Схема задачи взаимного вовлечения движущихся сред.

а динамическим граничным условием является равенство вязких касательных напряжений на этой границе

$$\eta_i \partial v_i / \partial z|_{z=0} = \eta_j \partial v_j / \partial z|_{z=0}; \quad t > 0 \quad (\text{П.4})$$

Также должны быть выполнены условия на бесконечности

$$v_i(z, t)|_{z=+\infty} = v_{i0}, \quad v_j(z, t)|_{z=-\infty} = v_{j0}; \quad t > 0 \quad (\text{П.5})$$

Заранее ясно, что физически значимое решение уравнения вида  $f_t' - \nu f_{zz}'' = 0$  задается выражением

$$f = t^\alpha \varphi_\alpha(\xi); \quad \xi = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}, \quad \alpha \geq 0 \quad (\text{П.6})$$

Причем функция  $\varphi_\alpha$  должна удовлетворять уравнению

$$\varphi_\alpha'' + 2\xi \varphi_\alpha' - 4\alpha \varphi_\alpha = 0, \quad (\text{П.7})$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\xi$ .

Решение уравнения (П.7) имеет вид [19]

$$\varphi_\alpha = \xi e^{-\xi^2} \left( A(\alpha) M\left(\alpha + 1, \frac{3}{2}, \xi^2\right) + B(\alpha) U\left(\alpha + 1, \frac{3}{2}, \xi^2\right) \right), \quad (\text{П.8})$$

где  $M$  и  $U$  – функции Куммера.

Свойства этих функций таковы, что для удовлетворения условий на бесконечности (П.5) необходимо положить  $\alpha = 0$ . Таким образом, решения уравнения (П.1) даются в виде

$$v_{i,j}(z, t) = A_{i,j} + B_{i,j} \operatorname{erf}\left(\frac{|z|}{2\sqrt{\nu_{i,j}t}}\right); \quad t > 0, \quad (\text{П.9})$$

где  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$  – функция ошибок.

Подстановка решений (П.9) в начальные (П.2) и граничные (П.3), (П.4) условия приводит к конечному результату

$$\begin{aligned} v_i(z, t) &= \frac{1}{1 + k_{ij}} \left[ v_{i0} \left( k_{ij} + \operatorname{erf} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{v_i t}} \right) \right) + v_{j0} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{v_i t}} \right) \right] \\ v_j(z, t) &= \frac{1}{1 + k_{ji}} \left[ v_{j0} \left( k_{ji} + \operatorname{erf} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{v_j t}} \right) \right) + v_{i0} \operatorname{erfc} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{v_j t}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

где  $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ , а коэффициент  $k_{ij}$  определяется выражением.

$$k_{ij} = \sqrt{\frac{\rho_i \eta_i}{\rho_j \eta_j}} = k_{ji}^{-1} \quad (\text{П.11})$$

Представление выражений (П.10) в форме

$$\begin{aligned} v_i(z, t) &= v_{i0} + (v_{j0} - v_{i0}) \kappa_{ij} \operatorname{erf} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{v_i t}} \right); & \kappa_{ij} &= \frac{1}{1 + k_{ij}} \frac{\sqrt{\rho_j \eta_j}}{\sqrt{\rho_i \eta_i} + \sqrt{\rho_j \eta_j}}, \\ v_j(z, t) &= v_{j0} + (v_{i0} - v_{j0}) \kappa_{ji} \operatorname{erf} \left( \frac{|z|}{2\sqrt{v_j t}} \right); & \kappa_{ji} &= \frac{1}{1 + k_{ji}} \frac{\sqrt{\rho_i \eta_i}}{\sqrt{\rho_i \eta_i} + \sqrt{\rho_j \eta_j}}, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

позволяет рассматривать значение  $\kappa_{ij}$  как коэффициент вовлечения  $i$ -й жидкости в относительное движение  $j$ -й жидкостью.

Прямая подстановка (П.10) и (П.12) в начально-краевую задачу (П.1)–(П.5) позволяет убедиться в правильности полученного решения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Harkins W.D.* The Physical Chemistry of Surface Films. New York: Reinhold, 1952.
2. *Fay J.A.* The Spreading of Oil Slicks on a Calm Sea from Oil on the Sea / Ed. by *Hoult D.P.* New York: Plenum Press, 1969, pp. 53–64.
3. *Garrett W.D., Barger W.R.* Factors affecting the use of monomolecular surface films to control oil pollution on water // *Environ. Sci. Technol.* 1970. V. 4. № 2. P. 123–127.
4. *Cross R.H., Hoult D.P.* Collection of oil slicks // *Harbours&Coastal Engng. Divis. ASCE.* 1971. V. 97. P. 313.
5. *Hoult D.P.* Oil spreading on the sea // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1972. V. 4. P. 341–368.
6. *Buckmaster J.* Viscous-gravity spreading of an oil slick // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 59. Pt. 3. P. 481–491.
7. *Huh C., Inoue M., Mason S.G.* Unidirectional spreading of one liquid on the surface of another // *Canadian J. Chem. Engng.* 1975. V. 53. P. 367.
8. *DiPietro N.D., Huh C., Cox R.G.* The hydrodynamics of the spreading of one liquid on the surface of another // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 84. Pt. 3. P. 529–549.
9. *Зырянов В.Н., Шурганова С.В.* Расстекание пятна нефти по поверхности моря с учетом выветривания // *Процессы в геосредах.* 2015. № 1. С. 30–36.
10. *Bayat A.* Oil spill cleanup from sea water by sorbent materials // *Chem. Engng.&Technol.* 2005. V. 28 (12). P. 1525–1528.
11. *Rethmeier J., Jonas A.* Lignite based oil binder mats: a new absorbent strategy and technology // *Spill Sci.&Technol. Bull.* 2003. V. 8 (5–6). P. 565–567.
12. *Chaplina T.O., Stepanova E. V.* Elimination of hydrocarbons spills on water objects and fluorescent diagnostics of water purity // *Phys.&Math. Model.of Earth&Envir. Proc.* 2018. P. 17–28.
13. *Matsuzaki Y., Ogasawara T., Sakai S., Izumiyama K., Kanada S.* Numerical simulation of current-induced deformation and movements of the oil slick under the ice cover // *Proc. 18th IAHR Int. Symp. on Ice.* 2006. P. 219–226.
14. *Mackay D., Leinonen P.J., Overall J.C.K., Wood B.R.* The behavior of crude oil spilled on snow // *Geology. Arctic.* 1975. P. 10–20.

15. *Hoult D.P., Suchon W.* The Spread of the Oil in a Channel. Massachusetts: Inst. of Technol., 1970. P. 25.
16. *Fingas M.F.* Studies on the evaporation of crude oil and petroleum products: I. The relationships between evaporation rate and time// *J. Hazardous Mater.* 1997. V. 56. P. 227–236.
17. *Reunhart R., Rose R.* Evaporation of crude oil at sea//*Water Res.* 1982. V. 16. P. 1319–1325.
18. *Солодкий Д.А., Кустович А.В.* Модифицированный сдвиговый алгоритм обработки измерительных данных // *Измерит. техн.* 2014. № 11. С. 43–47.
19. *Handbook of Mathematical Functions* / Ed. by *Abramowitz M., Stegun I.A.* NBS. Appl. Math. Ser. 55. 1964.
20. *Kistovich A.V., Chaplina T.O.* Analytical and experimental modeling of the hydrocarbon slick form and its spreading on the water surface// *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. P. 076605.  
<https://doi.org/10.1063/5.005470>

### Radial Spreading of Petroleum Products on the Surface of the Water

A. V. Kistovich<sup>a,#</sup>, T. O. Chaplina<sup>a,##</sup>, and V. P. Pakhnenko<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: kavmendelevo@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: tanya75.06@rambler.ru*

<sup>###</sup>*e-mail: terkin95@mail.ru*

A theoretical model of oleum spot spreading based on the laws of conservation of mass and total energy of the system is presented. Based on this model, an approximate equation describing the spreading process at all time points was obtained. Compact solutions of this equation are presented both for engine oil stains of limited area and for unlimited spills of crude oil. Experiments were conducted to study the dynamics of spreading of a compact spot of reference engine oil and crude oil under various physical conditions. Comparison of experimental and theoretical results showed their good agreement for all dynamic modes of the process under study.

*Keywords:* modeling, spreading, engine oil, crude oil, resistance shape coefficient

### REFERENCES

1. *Harkins W.D.* The Physical Chemistry of Surface Films. N.Y.: Reinhold, 1952.
2. *Fay J.A.* The Spreading of Oil Slicks on a Calm Sea from Oil on the Sea / Ed. by *Hoult D.P.* N.Y.: Plenum Press, 1969, pp. 53–64.
3. *Garrett W.D., Barger W.R.* Factors affecting the use of monomolecular surface films to control oil pollution on water // *Environ. Sci. Technol.*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 123–127.
4. *Cross R.H., Hoult D.P.* Collection of oil slicks // *J. Harbours&Coastal Engng. Div. ASCE*, 1971, vol. 97, pp. 313.
5. *Hoult D.P.* Oil spreading on the sea // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1972, vol. 4, pp. 341–368.
6. *Buckmaster J.* Viscous-gravity spreading of an oil slick // *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 59, Pt. 3, pp. 481–491.
7. *Huh C., Inoue M., Mason S.G.* Unidirectional spreading of one liquid on the surface of another // *Canadian J. Chem. Engng.*, 1975, vol. 53, pp. 367.
8. *DiPietro N.D., Huh C., Cox R.G.* The hydrodynamics of the spreading of one liquid on the surface of another // *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 84, Pt. 3, pp. 529–549.
9. *Zyryanov V.N., Shurganova S.V.* Spreading of an oil slick over the sea surface, taking into account weathering // *Proc. in Geomedica*, 2015, no. 1, pp. 30–36.
10. *Bayat A.* Oil spill cleanup from sea water by sorbent materials // *Chem. Engng & Technol.*, 2005, vol. 28 (12), pp. 1525–1528.
11. *Rethmeier J., Jonas A.* Lignite based oil binder mats: a new absorbent strategy and technology // *Spill Sci.&Technol. Bull.*, 2003, vol. 8 (5–6), pp. 565–567.

12. *Chaplina T.O., Stepanova E.V.* Elimination of hydrocarbons spills on water objects and fluorescent diagnostics of water pureness // *Phys.&Math. Model. Earth&Envir. Proc.*, 2018, pp. 17–28.
13. *Matsuzaki Y., Ogasawara T., Sakai S., Izumiyama K., Kanada S.* Numerical simulation of current-induced deformation and movements of the oil slick under the ice cover // *Proc. 18th IAHR Int. Symp. on Ice*, 2006, pp. 219–226.
14. *Mackay D., Leinonen P.J., Overall J.C.K., Wood B.R.* The behavior of crude oil spilled on snow // *Geology. Arctic*, 1975, pp. 10–20.
15. *Houli D.P., Suchon W.* *The Spread of the Oil in a Channel*. Massachusetts: Inst. of Technol., 1970, 25 p.
16. *Fingas M.F.* Studies on the evaporation of crude oil and petroleum products: I. The relationships between evaporation rate and time // *J. Hazardous Mater.*, 1997, vol. 56, pp. 227–236.
17. *Reunhart R., Rose R.* Evaporation of crude oil at sea // *Water Res.*, 1982, vol. 16, pp. 1319–1325.
18. *Solodkii D.M., Kistovich A.V.* Modified shift algorithm for processing measured data // *Meas. Techn.*, 2015, vol. 57, no. 11, pp. 1287–1292. <https://doi.org/10.1007/s11018-015-0622-5>
19. *Handbook of Mathematical Functions* / Ed. by *Abramowitz M., Stegun I.A.* NBS. Appl. Math. Ser. 55, 1964.
20. *Kistovich A.V., Chaplina T.O.* Analytical and experimental modeling of the hydrocarbon slick form and its spreading on the water surface // *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, pp. 076605. <https://doi.org/10.1063/5.005470>



УДК 517.958:539.3:517.956.8

**АНОМАЛЬНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ УПРУГОЙ ВОЛНЫ  
ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ ПЕРЕМЫЧКУ, СОЕДИНЯЮЩУЮ ДВА ПЛОСКИХ  
ИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДА**

© 2022 г. С. А. Назаров<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.

После доработки 15.08.2022 г.

Принята к публикации 15.08.2022 г.

Построена асимптотика коэффициентов прохождения и отражения для продольной волны, приходящей с бесконечности и рассеивающейся на резонаторе, тонкой перемычке, соединяющей два рукава волновода – однородные изотропные полуполосы. Подбором размеров перемычки обеспечен неожиданный эффект почти полного прохождения волны из одного рукава в другой на любой заданной наперед частоте из первого интервала непрерывного спектра. В общей ситуации реализуется почти полное отражение. Обсуждаются открытые вопросы.

*Ключевые слова:* изотропный двумерный волновод с тонкой перемычкой, продольные колебания, аномалия прохождения упругой волны, коэффициенты рассеяния, асимптотика

DOI: 10.31857/S003282352206011X

**1. Упругий волновод.** Пусть  $\Pi_{\pm}^h = \{x = (x_1, x_2) : \pm x_1 > \ell^h, |x_2| < 1\}$  – две упругие полуполосы-рукава, соединенные тонкой ( $h > 0$  – малый параметр) перемычкой  $\Theta^h = \{x : |x_1| \leq \ell^h, |x_2| < h\}$ . Масштабированием ширина полуполос сведена к двум, т.е. декартовы координаты  $(x_1, x_2)$  и все геометрические параметры сделаны безразмерными. Полуудлина перемычки

$$\ell^h = \ell^0 + h\ell'; \quad \ell^0 > 0 \tag{1.1}$$

будет подобрана так, чтобы обеспечить необычные свойства упругого – однородного и изотропного, с постоянными Ламе  $\lambda > 0$  и  $\mu > 0$  – волновода (рис. 1)

$$\Xi^h = \Pi_+^h \cup \Theta^h \cup \Pi_-^h \tag{1.2}$$

При учете симметрии относительно оси абсцисс дополним плоскую задачу теории упругости

$$L(\nabla_x)u^h(x) := -\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu)\nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \rho\kappa^2 u^h(x); \quad x \in \Xi^h \tag{1.3}$$

$$\sigma^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial\Xi^h; \quad j = 1, 2 \tag{1.4}$$

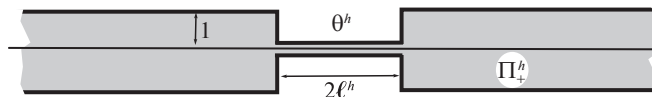


Рис. 1. Упругий волновод с перемычкой длиной  $2\ell^h$  и шириной  $2h \ll 1$ , соединяющей рукава-полуполосы.

искусственными условиями на средней линии фигуры (1.2)

$$u^h(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(u^h; x_1, 0) = 0; \quad x_1 \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Здесь  $\nabla_x = \text{grad}$ ,  $\nabla_x \cdot = \text{div}$ ,  $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$  – оператор Лапласа,  $u = (u_1, u_2)$  – вектор смещений,  $\rho > 0$  – плотность материала и  $\kappa > 0$  – частота колебаний,  $n = (n_1, n_2)$  – единичный вектор внешней нормали, определеннный почти всюду на границе  $\partial\Xi^h$ , кроме восьми угловых точек, на которых краевые условия (1.4) не ставятся,  $\sigma_1^{(n)}(u)$  и  $\sigma_2^{(n)}(u)$  – компоненты вектора нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_j^{(n)}(u) &= n_1 \sigma_{1j}(u) + n_2 \sigma_{2j}(u); \quad \partial_j = \partial/\partial x_j \\ \sigma_{ij}(u) &= \mu(\partial_j u_k + \partial_k u_j) + \lambda \delta_{j,k} \nabla_x \cdot u; \quad j, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Наконец,  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера.

Соотношения (1.5) исключают из рассмотрения изгибные колебания волновода, т.е. он подвержен только продольным колебаниям. Укажем волны, распространяющиеся в его рукавах  $\Pi_{\pm}^h$

$$w^{\pm}(x) = e^{\pm i\theta x} W^{\pm}(x_2); \quad W^{\pm} = (W_1^{\pm}, W_2^{\pm}) \quad (1.7)$$

Вектор-функции  $W^{\pm}$  и число  $\theta$  суть решения спектральных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке  $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} -\mu(\partial_2^2 - \theta^2)W_1^{\pm}(x_2) \mp i\theta(\lambda + \mu)(\pm i\theta W_1^{\pm}(x_2) + \partial_2 W_2^{\pm}(x_2)) &= \rho\kappa^2 W_1^{\pm}(x_2) \\ -\mu(\partial_2^2 - \theta^2)W_2^{\pm}(x_2) - (\lambda + \mu)\partial_2(\pm i\theta W_1^{\pm}(x_2) + \partial_2 W_2^{\pm}(x_2)) &= \rho\kappa^2 W_2^{\pm}(x_2) \\ \text{при } |x_2| \leq 1 \\ -(\lambda + 2\mu)\partial_2 W_1^{\pm}(x_2) \pm i\theta\lambda W_1^{\pm}(x_2) = 0, \quad \mu(\partial_2 W_1^{\pm}(x_2) \pm i\theta W_2^{\pm}(x_2)) &= 0 \\ \text{при } x_2 = \pm 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$W_2^{\pm}(x_2) = 0, \quad \mu(\partial_2 W_1^{\pm}(x_2) \pm i\theta W_2^{\pm}(x_2)) = 0 \quad \text{при } x_2 = 0$$

Анализируя соотношения (1.8), приходим к равенствам

$$W_1^{\pm}(x_2) = W_1^0(x_2), \quad W_2^{\pm}(x_2) = \pm i W_2^0(x_2), \quad (1.9)$$

где  $W_1^0$  и  $W_2^0$  – вещественные функции, четная и нечетная соответственно.

Амплитудные части (1.9) зафиксируем так, чтобы соблюсти условия ортогональности и нормировки ([3], гл.5, § 2)

$$Q(w^{\pm}, w^{\pm}) = \pm i, \quad Q(w^{\pm}, w^{\mp}) = 0 \quad (1.10)$$

$$Q(w, v) = \int_{-1}^1 \sum_{j=1,2} \left\langle \overline{v_j(R, x_2)} \sigma_{j1}(w; R, x_2) - w_j(R, x_2) \overline{\sigma_{j1}(v; R, x_2)} \right\rangle dx_2 \quad (1.11)$$

Симплектическая (полуторалинейная и антиэрмитова) форма (1.11) происходит от формулы Грина для оператора Ламе и потому не зависит от параметра  $R$  для волн (1.7). Величина  $Q(w, w)$  пропорциональна проекции на ось абсцисс вектора Умова [1] переноса энергии волной  $w$ , т.е. принимается энергетический принцип излучения Умова–Мандельштама ([2], гл. 1), ([3], гл. 5), [4].

Вариационная формулировка задачи (1.3)–(1.5) сводится к интегральному тождеству [5, 6]

$$E(u^h, \psi^h; \Xi^h) = \rho \kappa^2 (u^h, \psi^h)_{\Xi^h}; \quad \psi^h \in H_{\#}^h(\Xi^h) \quad (1.12)$$

на подпространстве вектор-функций из класса Соболева

$$H_{\#}^h(\Xi^h) = \left\{ \psi^h \in H^h(\Xi^h): \psi_1^h(x_1, x_2) = \psi_1^h(x_1, -x_2), \psi_2^h(x_1, x_2) = -\psi_2^h(x_1, -x_2) \right\}$$

При этом  $(\cdot, \cdot)_{\Xi^h}$  – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Xi^h)$ ,

а  $\frac{1}{2} E(u^h, u^h; \Xi^h)$  – функционал упругой энергии

$$\begin{aligned} E(u^h, u^h; \Xi^h) &= \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1,2} \left\| \partial_j u_k^h + \partial_k u_j^h; L^2(\Xi^h) \right\|^2 + \lambda \left\| \nabla_x \cdot u^h; L^2(\Xi^h) \right\|^2 \\ E(u^h, \psi^h; \Xi^h) &= \frac{1}{4} \left( E(u^h + \psi^h, u^h + \psi^h; \Xi^h) - E(u^h - \psi^h, u^h - \psi^h; \Xi^h) \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Поскольку билинейная форма (1.13) симметрична, положительна и замкнута в пространстве  $H^1(\Xi^h)$ , вариационной (1.12) и дифференциальной (1.3)–(1.5) задачам отвечает ([7], гл. 10) положительный самосопряженный оператор  $A^h$  в гильбертовом пространстве  $L^2(\Xi^h)$ , непрерывный спектр  $\wp_c$  которого – замкнутая положительная полуось  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$ . При  $\kappa = \kappa_{\dagger}^0 = 0$  (основная точка отсечки) у задачи (1.3), (1.4) в целевой полосе  $\Pi = (-1, 1) \times \mathbb{R}$  в силу дополнительного условия (1.5) есть только одно (с точностью до постоянного множителя) ограниченное решение – продольное жесткое смещение  $e_{(1)} = (1, 0)$ . Следовательно, вблизи начала координат кратность непрерывного спектра равна единице, и вторая точка отсечки  $\kappa_{\dagger}^1$  внутри непрерывного спектра  $\wp_c$  положительна. Зафиксируем какую-то частоту

$$\kappa \in (0, \kappa_{\dagger}^0) \neq \emptyset \quad (1.14)$$

Основная цель работы – подобрать размер (1.1) тонкой балки так, чтобы волна (1.7), приходящая с бесконечности в рукаве  $\Pi_-^h$ , почти полностью проникала через перемычку  $\Theta^h$  в рукав  $\Pi_+^h$  и уходила в нем на бесконечность. Ввиду симметрии волновода (1.2) можно ограничиться рассмотрением приходящей волны  $w^+$  в полуполосе  $\Pi_-^h$ , а почти полное ее прохождение означает, что решение дифракционной задачи (1.3)–(1.5)

$$W^h(x) = \chi_-(x_1) w^+(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x_1) s_{\pm}^h w^{\pm}(x) + \widetilde{W}^h(x) \quad (1.15)$$

приобретает коэффициенты рассеяния  $s_{\pm}^h$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\left|s_{+}^h\right| = 1 + o(1) \quad \text{и} \quad \left|s_{-}^h\right| = o(1) \quad (1.16)$$

Здесь  $\chi_{\pm}$  – гладкие срезающие функции

$$\chi_{\pm}(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad \pm x_1 > 3\ell^0 \quad \text{и} \quad \chi_{\pm}(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad \mp x_1 < 2\ell^0 \\ 0 \leq \chi_{\pm} \leq 1$$

Остаток  $\widetilde{W}^h(x)$  затухает при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  экспоненциальной скоростью. Закон сохранения энергии обеспечивает равенство

$$\left|s_{+}^h\right|^2 + \left|s_{-}^h\right|^2 = 1 \quad (1.17)$$

Следовательно, одна из формул (1.16) влечет за собой другую.

По причине малой толщины перемычки в ситуации общего положения, наоборот, реализуется почти полное отражение волны  $w^+$  в рукаве  $\Pi_-^h$ , т.е. коэффициенты рассеяния в поле (1.15) удовлетворяют соотношениям

$$\left|s_{-}^h\right| = 1 + o(1) \quad \text{и} \quad \left|s_{+}^h\right| = o(1) \quad (1.18)$$

Ранее эффект аномального прохождения волн через узкие щели и каналы обнаружен [8–13] для скалярных задач (акустические среды, волны на поверхности весомой жидкости и пр.), причем вопрос ставился по-разному: показать [8–11], что эффект проявляется на какой-частоте при помощи аналитических или численных методов, или подогнать [12, 13] геометрические параметры для его реализации на заданной перед частоте путем применения усовершенствованного асимптотического анализа. При анализе векторной задачи (1.3)–(1.5) применяется процедура [14–17] точной настройки параметров волновода для обеспечения необычных свойств волновых процессов, однако в отличие от скалярных задач [12, 13] какие-либо явные формулы для упругих полей и их характеристик недоступны, а результат достигается путем вывода определенных априорных связей между величинами, формирующими асимптотические формулы для коэффициентов рассеяния  $s_{\pm}^h$ .

В разд. 2 перечислены специальные решения вспомогательных задач и установлены нужные связи между их числовыми характеристиками. В разд. 3 представлен собственно асимптотический анализ, включающий процедуру понижения размерности [18, 19] на тонкой перемычке  $\Theta^h$  и метод сращиваемых асимптотических разложений [20, 21] в зонах ее присоединения к массивным рукавам, а разд. 4 посвящен процедуре точной настройки геометрических параметров, обеспечивающей искомый эффект почти полного прохождения волны. Отметим, что, поскольку согласно ограничениям (1.5), (1.14) в волноводе (1.2) имеется только одна пара распространяющихся волн (1.7), унитарность и симметричность матрицы рассеяния означает, что почти полное прохождение волны  $w^+$  в направлении “от  $-\infty$  к  $+\infty$ ” гарантирует тот же эффект для волны  $w^-$ , распространяющейся в направлении “от  $+\infty$  к  $-\infty$ ”.

В конце статьи обсуждаются сопутствующие вопросы. В разд. 5, 1°, описаны способы обоснования полученных асимптотических представлений, в частности, пояснено, что в формулах (1.16) и (1.18) бесконечно малые  $o(1)$  равны  $O(h(1 + |\ln h|))$ . Далее перечислены доступные обобщения формы и упругих свойств волновода, а также ограничения вводимые по необходимости. Кроме того, приведены упрощенный (акустический волновод; разд. 5, 4°) и усложненный (пространственный упругий волновод; разд. 5, 5°) варианты постановки задачи и приемы их исследования.

**2. Вспомогательные задачи.** 1°. *Перемычка.* Стандартная асимптотическая процедура понижения размерности ([18], гл. 15 и 16), ([19], гл. 1 § 3) в задаче (1.3)–(1.5), суженной на тонкую перемычку, приводит к одномерной модели продольных колебаний балки. Именно, введем растянутую поперечную координату  $\eta = h^{-1}x_2$  и, заменив многоточием младшие – не существенные в предпринимаемом анализе – члены, подставим разложение вектора смещений

$$u^h(x) = h^{-1}v(x_1)e_{(1)} + v'(\eta; x_1) + hv''(\eta; x_1) + \dots \quad (2.1)$$

в уравнения (1.3) на прямоугольнике  $(-\ell^0, \ell^0) \times (-h, h)$  и краевые условия (1.5) на его сторонах  $(-\ell^0, \ell^0) \times \{\pm h\}$ . Соберем множители при одинаковых степенях малого параметра  $h$  и последовательно решим задачи Неймана для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке  $(-1, 1)$ . Две задачи для компонент вектора  $v^0$

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial^2 v_1'}{\partial \eta^2}(\eta; x_1) = 0, \quad \eta \in (-1, 1), \quad \pm \mu \frac{\partial v_1'}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) = 0 \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v_2'}{\partial \eta^2}(\eta; x_1) = 0, \quad \eta \in (-1, 1), \quad \pm(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2'}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) = \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) \end{aligned}$$

дают выражение для первого поправочного члена представления (2.1)

$$v'(\eta; x_1) = -\frac{\lambda \eta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) e_{(2)} \quad (2.2)$$

Здесь  $e_{(2)} = (0, 1)$  – орт оси ординат. Компонента  $v_2''$  второй поправки  $v''$  равна нулю, а условие разрешимости задачи для первой компоненты

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial^2 v_1''}{\partial \eta^2}(\eta; x_1) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_1) + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_2'}{\partial \eta \partial x_1}(\eta; x_1); \quad \eta \in (-1, 1) \\ \pm \mu \frac{\partial v_1''}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) = \mp \mu \frac{\partial v_2'}{\partial \eta}(\pm 1; x_1) \end{aligned}$$

превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно продольной координаты  $x_1$

$$-D \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_1) = \rho \kappa^2 v(x_1); \quad x_1 \in (-\ell^0, \ell^0) \quad \left( D = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) взято предельное ( $h = 0$ ) значение размера (1.1) перемычки  $\Theta^h$ , а замена  $\ell^0 \mapsto \ell^h$  будет задействована в разд. 3 и 4.

Поскольку тонкая балка присоединена к массивным телам, уравнение (2.3) замыкается [24] условиями Дирихле

$$v(\pm \ell^0) = 0 \quad (2.4)$$

Зафиксируем главный член в представлении (1.1)

$$\ell^0 = \frac{\pi m}{2\kappa} \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad \text{при некотором } m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (2.5)$$

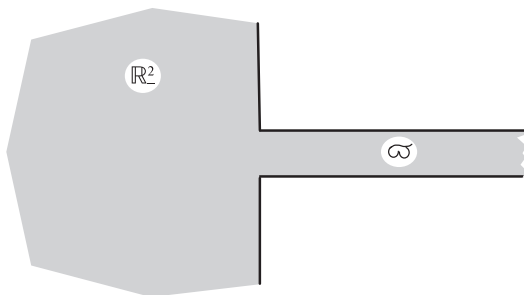


Рис. 2. Пограничный слой: упругое сочленение полуплоскости и полуполосы.

так, чтобы однородная задача (2.3), (2.4) приобрела нетривиальное решение – собственную функцию

$$\mathbf{v}(x_1) = \sin(\alpha(x_1 + \ell^0)); \quad \alpha = \frac{\pi m}{2\ell^0} \quad (2.6)$$

2°. *Пограничный слой.* Вблизи концов перемычки  $\Theta^h$ , т.е. около точек  $P_{\pm}^h = (\pm\ell^0, 0)$ , возникает [18], [22–24] явление пограничного слоя, которое, как обычно, опишем в растянутых координатах

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = (h^{-1}(x_1 \mp \ell^h), h^{-1}x_2)$$

Для определенности рассмотрим левый (знак минус) конец перемычки и не будем писать верхний индекс  $\pm$  у координат  $\xi_j$ . Соответствующая плоская статическая задача теории упругости

$$L(\nabla_{\xi})Z(\xi) = 0; \quad \xi \in \Upsilon \quad (2.7)$$

$$\sigma_j^{(n)}(Z; \xi) = 0; \quad \xi \in \partial\Upsilon, \quad j = 1, 2 \quad (2.8)$$

$$Z_2(\xi_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(Z; \xi_1, 0) = 0; \quad \xi_1 \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

поставлена на объединении  $\Upsilon$  полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2 = \{\xi : \xi_1 < 0\}$  и полуполосы  $\mathfrak{w} = [0, +\infty) \times (-1, 1)$  (рис. 2). Условия (2.8) и (2.9) унаследованы от условий (1.4) и (1.5), а инерционный член исчез из системы (2.7) потому, что мало последнее вычитаемое в преобразованном дифференциальном операторе

$$L(\nabla_x) - \rho\kappa^2 = h^{-2}(L(\nabla_{\xi}) - h^2\rho\kappa^2)$$

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений [20, 21], в рамках которого при построении главных членов асимптотики требуется найти все решения задачи (2.7)–(2.9) с не более чем логарифмическим ростом в полуплоскости и не более чем линейным ростом в полуполосе. Одно из таких решений очевидно – постоянный вектор  $Z^0 = e_{(1)}$ . Второе  $Z^1$  задано своим поведением на бесконечности

$$Z^1(\xi) = B(\xi) + \mathbf{b}e_{(1)} + O(|\xi|^{-1}); \quad \rho = |\xi| \rightarrow +\infty, \quad \xi \in \mathbb{R}_-^2 \quad (2.10)$$

$$Z^1(\xi) = \frac{1}{2} \left( \xi_1 e_{(1)} - \frac{\lambda \xi_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) + O(e^{-\varepsilon \xi_1}); \quad \xi_1 \rightarrow +\infty, \quad \xi \in \mathfrak{w}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.11)$$

Здесь  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$  – несущественная для дальнейшего постоянная,  $B$  – решение Буссинеска–Фламана [25, 26] о сосредоточенной силе, действующей на полуплоскость

$$B(\xi) = B^0 e_{(1)} \ln \frac{1}{\rho} + B^1(\varphi), \quad B^0 = \frac{2}{\pi} \tag{2.12}$$

Кроме того,  $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  – система полярных координат, а явный вид угловой части  $B^1$  решения (2.12) не понадобится. Важны только известные формулы для полярных компонент тензора напряжений

$$\sigma_{\rho\rho}(B; \xi) = -\frac{2D \cos \varphi}{\pi \rho}, \quad \sigma_{\rho\varphi}(B; \xi) = \sigma_{\varphi\varphi}(B; \xi) = 0 \tag{2.13}$$

Следовательно

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \rho=R\}} \sigma_1^{(p)}(Z^1; \xi) \Big|_{\rho=R} ds_\xi = -D, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \sigma_{11}(Z^1; R, \xi_2) d\xi_2 = D$$

и поэтому равна нулю сумма главных векторов сил, порожденных полем смещений  $Z^1$  на бесконечности в полуплоскости и в полуполосе. Именно последнее обстоятельство обеспечивает существование решения  $Z^1$  задачи (2.7)–(2.9) с заданным поведением при  $|\xi| \rightarrow \infty$  и  $\xi_1 \rightarrow +\infty$ . Отсутствие в правой части формулы (2.11) постоянного слагаемого фиксирует это решение. Согласно общим результатам [27, пример 1.12 и теорема 5.8] всякое решение задачи (2.7)–(2.9) с указанными ограничениями на рост – линейная комбинация  $c_0 Z^0 + c_1 Z^1$ . Соотношения (2.10) и (2.11) можно почленно дифференцировать при соглашениях  $\nabla_\xi O(|\xi|^{-p}) = O(|\xi|^{-p-1})$  и  $\nabla_\xi O(e^{-\varepsilon \xi_1}) = O(e^{-\varepsilon \xi_1})$ .

3°. *Рукава.* Асимптотика поля (1.15) внутри рукавов  $\Pi_\pm^h$  описывается при помощи решений задачи теории упругости в не зависящей от параметра  $h$  полуполосе  $\Pi^\square = (-\infty, 0) \times (-1, 1)$

$$L(\nabla_x)U(x) = \rho \kappa^2 U(x); \quad x \in \Pi^\square \tag{2.14}$$

$$\sigma_j^{(n)}(U; x) = 0; \quad x \in \partial \Pi^\square \setminus \mathbb{O}, \quad j = 1, 2 \tag{2.15}$$

$$U(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(U; x_1, 0) = 0; \quad x_1 \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

Краевое условие (2.15) поставлено на проколоте торце полуполосы, и далее понадобится поле смещений  $G$ , порожденное сосредоточенной в начале координат  $\mathbb{O}$  продольной силой

$$G(x) = B(x) + G e_{(1)} + O(|x|); \quad x \rightarrow \mathbb{O} \tag{2.17}$$

$$G(x) = g w^-(x) + O(e^{\varepsilon x_1}); \quad x_1 \rightarrow -\infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.18}$$

Коэффициенты  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{g}$  зависят лишь от постоянных Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ , а правила  $\nabla_x O(|x|^{-p}) = O(|x|^{-p-1})$  и  $\nabla_x O(e^{\varepsilon x_1}) = O(e^{\varepsilon x_1})$  разрешают почленное дифференцирование соотношений (2.17) и (2.18).

Еще одно поле  $W$ , гладкое вблизи точки  $\mathbb{O}$  и равное сумме приходящей  $w^+$  и отраженной волн, допускает представление

$$W(x) = w^+(x) + s w^-(x) + O(e^{\varepsilon x_1}); \quad x_1 \rightarrow -\infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.19}$$

Модуль коэффициента отражения  $s$  равен единице согласно закону сохранения энергии и условиям нормировки и ортогональности (1.10). Применим формулу интегрирования по частям для вектор-функций  $W$  и  $G$  в длинном ( $R \rightarrow +\infty$ ) прямоугольнике с вырезанным полукругом

$$\Pi^{\square}(R) = \{x \in \Pi^{\square} : x_1 > -R, |x| > 1/R\}$$

и вычислим предел при учете соотношений (1.10), (1.11) и (2.13). В результате обнаружим связь коэффициентов в представлениях (2.17)–(2.19)

$$isg + DW_1(\mathbb{C}) = 0 \quad (2.20)$$

Аналогичная формула Грина для вектор-функции  $G$  на обеих позициях вместе с равенствами (1.10), (1.11) и (2.13) дают соотношение

$$\begin{aligned} i|\mathbf{g}|^2 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} Q_{-R}(G, G) = \\ &= \operatorname{Im} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \overline{G(x)} \cdot \sigma^{(r)}(G; x) - G(x) \cdot \overline{\sigma^{(r)}(G; x)} \right) \Big|_{r=1/R} d\varphi = -D\bar{G} + DG \Rightarrow \quad (2.21) \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} G = \frac{|\mathbf{g}|^2}{2D} \end{aligned}$$

При этом  $(r, \varphi)$  – система полярных координат, а  $\sigma^{(r)}(u)$  – вектор с компонентами (1.6) и нормалью  $(-\cos\varphi, \sin\varphi)$ .

Полуполоса  $\Pi^{\square}$  получается из полуполосы  $\Pi^h_{-}$  заменой координат

$$x \mapsto (x_1 + \ell^h, x_2)$$

при сохранении вектора смещений. По причине изотропности упругого материала подстановки

$$x \mapsto (\ell^h - x_1, x_2), \quad u^h(x) \mapsto (-u_1^h(\ell^h - x_1, x_2), u_2^h(\ell^h - x_1, x_2)) \quad (2.22)$$

обеспечивает переход от  $\Pi^{\square}$  к  $\Pi^h_{+}$  и от задачи (2.14)–(2.16) в  $\Pi^{\square}$  к задаче (1.3)–(1.4) в  $\Pi^h_{+}$ . Замены (2.22) будут применены в асимптотических конструкциях на рукаве  $\Pi^h_{+}$ , а преобразованные таким образом поля  $G$  и  $W$  обозначим  $G_{\circ}$  и  $W_{\circ}$ . Аналогичные операции нужны и при формировании пограничного слоя в окрестности точки  $P^h_{+}$ .

**3. Построение асимптотики.** Простые асимптотические представления поля (1.15) на рукавах

$$\begin{aligned} W^h(x) &= W_-^h(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots := \\ &:= w^+(x_1 + \ell^h, x_2) + s_-^0 w^-(x_1 + \ell^h, x_2) + \tilde{W}_-^0(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$W^h(x) = W_+^h(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots := s_+^0 w^+(x_1 + \ell^h, x_2) + \tilde{W}_+^0(x_1 + \ell^h, x_2) + \dots \quad (3.2)$$

дополним усложненным согласно формулам (2.1) и (2.2) из разд. 2, 1<sup>o</sup>, представлением на перемычке

$$\begin{aligned} W^h(x) &= W_0^h(\eta; x_1) + \dots := \left( \frac{1}{h} c v(x_1) + v^0(x_1) \right) - \\ &- \frac{\lambda \eta}{\lambda + 2\mu} \left( c \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) + h \frac{\partial v^0}{\partial x_1}(x_1) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$



При этом остатки  $\tilde{W}_{\pm}^0$  в разложениях (3.1) и (3.2) затухают на бесконечности с экспоненциальной скоростью, а  $s_{\pm}^0$  – главные члены асимптотик коэффициентов рассеяния в поле (1.15)

$$s_{\pm}^h = s_{\pm}^0 + \dots \tag{3.4}$$

Как и ранее, многочлен заменяет младшие асимптотические члены, оцененные далее в разд. 5, 1°. Неизвестные коэффициент  $\mathbf{c}$  и функция  $v^0$ , удовлетворяющая уравнению (2.3) и продолженная по гладкости за пределы интервала  $(-\ell^0, \ell^0)$ , подлежат определению, а  $\mathbf{v}$  – собственная функция (2.6) задачи (2.3), (2.4), причем

$$\partial_1 v(\pm \ell^0) := \frac{\partial v}{\partial x_1}(\pm \ell^0) = (\pm 1)^m \alpha \tag{3.5}$$

В зонах присоединения перемычки к массивным частям волновода (1.2), т.е. около точек  $P_{\pm}^h$ , введем внутренние разложения поля (1.10)

$$W^h(x) = z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) + \dots \tag{3.6}$$

и согласуем их с внешними разложениями (3.1)–(3.3) при помощи процедуры сращения [20, 21].

Сначала обследуем окрестность точки  $P_-^h$  со стороны перемычки и, отбросив члены  $O(h)$  при учете формул (2.6) и (3.5), преобразуем разложение (3.3) к форме

$$\begin{aligned} W^h(x) &= h^{-1} e_{(1)}(v(-\ell^h) + (x_1 + \ell^h) \partial_1 v(-\ell^h) + \dots) + \\ &+ e_{(1)} v^0(-\ell^h) e_{(1)}(v(-\ell^h) + (x_1 + \ell^h) \partial_1 v(-\ell^h) + \dots) + e_{(1)} v^0(-\ell^h) + \dots - \\ &- \mathbf{c} e_{(2)} \frac{\lambda \eta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1) + \dots = (v^0(-\ell^0) - \mathbf{c} \alpha \ell') e_{(1)} + \mathbf{c} \alpha \left( \xi_1^- e_{(1)} - \frac{\lambda \xi_2^-}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) + \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Сравним правую часть соотношения (3.7) с представлением (2.11) решения  $Z^1$  задачи (2.7)–(2.9) и привлечем в конструкцию еще одно решение  $Z^0 = e_{(1)} Z$ . В итоге приходим к равенству

$$z_-^0(\xi^-) = 2c\alpha Z^1(\xi^-) + (v^0(-\ell^0) - c\alpha \ell') e_{(1)} \tag{3.8}$$

В силу формул (2.10) и (2.12) внутреннее разложение (3.6), (3.8) около точки  $P_-^h$  в рукаве  $\Pi_-^h$  принимает вид

$$W^h(x) = 2c\alpha B(x_1 + \ell^h, x_2) + (2c\alpha (B^0 \ln h + \mathbf{b}) + (v^0(-\ell^0) - c\alpha \ell')) e_{(1)} \tag{3.9}$$

Множитель  $\ln h$  возник из-за связи  $r_{h-} := |x - P_-^h| = hr$  радиальных переменных и присутствия логарифма в решении Буссинеска–Фламана (2.12). Согласно процедуре сращения [20, 21] сингулярность этого решения передается члену  $W_-^0$  внешнего разложения (3.1), который и соответствующий коэффициент отражения заданы формулами

$$\begin{aligned} W_-^0(x) &= W(x_1 + \ell^h, x_2) + 2c\alpha G(x_1 + \ell^h, x_2) = \\ &= W_1(\mathbb{C}) e_{(1)} + (2c\alpha B(x_1 + \ell^h, x_2) + \mathbf{G} e_{(1)}) + O(r_{h-}) \quad \text{при } x \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$s_-^0 = \mathbf{s} + 2\mathbf{c}\alpha\mathbf{g} \quad (3.11)$$

Закончим сращивание разложений (3.1) и (3.7), сравнив множители при жестком поступательном смещении  $e_{(1)}$  в правых частях соотношений (3.9) и (3.10). В результате получим краевое условие для функции  $v^0$  из представления (3.3)

$$v^0(-\ell^0) = f_-^0 := \mathbf{c}\alpha\ell' + W_1(\mathbb{O}) + 2\mathbf{c}\alpha(\mathbf{G} - \mathbf{b} - B^0 \ln h) \quad (3.12)$$

Сращивание внешних (3.1), (3.3) и внутреннего (3.6) разложений около точки  $P_+^h$  проводится по той же схеме при учете подстановок (2.22) и отсутствия приходящей волны  $w^-$  в рукаве  $\Pi_+^h$ . Формула (3.5) для собственной функции  $v$  задачи (2.3), (2.4) уточняет внешнее разложение (3.3) около концевой точки  $P_+^h$  перемычки  $\Theta^h$

$$W^h(x) = \left( v^0(-\ell^0) - (-1)^m \mathbf{c}\alpha\ell' \right) e_{(1)} + (-1)^m \mathbf{c}\alpha \left( \xi_1^- e_{(1)} - \frac{\lambda \xi_2^-}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) \quad (3.13)$$

Представление (2.11) решения  $Z^1$  задачи (2.7)–(2.9) и формулы (2.22), меняющие знак у первой компоненты преобразованного решения  $Z_{\mathbb{O}}^1$ , дают главный член внутреннего разложения (3.6)

$$z_+^0(\xi^+) = 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha Z_{\mathbb{O}}^1(\xi^+) + \left( v^0(-\ell^0) - (-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha\ell' \right) e_{(1)} \quad (3.14)$$

Полностью реализова процедуру сращивания разложений (3.6), (3.14) и (3.2) в окрестности точки  $P_+^h$ , находим выражения для поля  $W_+^0$  в  $\Pi_+^h$  и сопутствующего коэффициента прохождения  $s_+^0$  волны  $w^+$ , а также краевое условие в точке  $\ell^0$  для асимптотической поправки  $v^0$  на перемычке

$$W_+^0(x) = 2(-1)^m \mathbf{c}\alpha G_{\mathbb{O}}(x_1 + \ell^h, x_2) = 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha B_{\mathbb{O}}(\ell^h - x_1, x_2) - \mathbf{G}e_{(1)} + O(r_{h-}) \quad (3.15)$$

при  $x \rightarrow \mathbb{O}$

$$s_+^0 = 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha\mathbf{g} \quad (3.16)$$

$$v^0(\ell^0) = f_+^0 := (-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha\ell' + 2(-1)^{1+m} \mathbf{c}\alpha(\mathbf{G} - \mathbf{b} - B^0 \ln h) \quad (3.17)$$

В силу предположения о собственном числе (2.5) задача (2.3), (3.12), (3.17) приобретает одно условие разрешимости

$$0 = f_+^0 \partial_1 v(\ell^0) - f_-^0 \partial_1 v(-\ell^0) \quad (3.18)$$

Согласно формулам для величин  $f_{\pm}^0$  соотношение (3.18) принимает вид

$$4\mathbf{c}\alpha\ell' + W_1(\mathbb{O}) + 4\mathbf{c}\alpha(\mathbf{G} - \mathbf{b} - B^0 \ln h) = 0 \quad (3.19)$$

и связывает неизвестные  $\ell'$  и  $\mathbf{c}$  в представлениях (1.1) и (3.3).

**4. Подбор размеров перемычки.** В распоряжении имеется один свободный вещественный параметр  $\ell'$  из формулы (1.1) для размера  $\ell^h$ . Употребим его для упрощения формулы (3.19) и положим

$$\ell'_T(\ln h) = \mathbf{b} + B^0 \ln h - \text{Re } \mathbf{G} + \mathbf{T} \quad (4.1)$$

При этом  $T \in \mathbb{R}$  – новый свободный параметр. Тот факт, что величина (4.1) зависит от большого параметра  $\ln h$  не влияет на проведенные выкладки, так как поправочное

слагаемое  $h\ell'_T(\ln h)$  в представлении (1.1) остается малым, однако он привносит множитель  $1 + |\ln h|$  в мажоранту из оценки (5.5). Теперь равенство (3.19) принимает вид

$$4c\alpha\ell^0(T + i \operatorname{Im} \mathbf{G}) + W_1(\mathbb{C}) = 0 \Rightarrow c\alpha = -\frac{W_1(\mathbb{C})}{4(T + i \operatorname{Im} \mathbf{G})}$$

и при учете соотношений (3.11), (3.16) и (2.20), (2.21) находим главные члены асимптотик коэффициентов рассеяния

$$s_-^0 = s - \frac{\mathbf{g}W_1(\mathbb{C})}{2(T + i \operatorname{Im} \mathbf{G})} = s \left( \mathbf{1} + \frac{i|\mathbf{g}|^2}{2DT + i|\mathbf{g}|^2} \right) = s \frac{t}{t - i} \quad (4.2)$$

$$s_+^0 = (-1)^m s \frac{i}{t - i}, \quad t = 2 \frac{DT}{|\mathbf{g}|^2}$$

Закон сохранения энергии (1.18) предоставляет простую проверку проведенных вычислений

$$|s_-^0|^2 + |s_+^0|^2 = \frac{|\mathbf{s}|^2}{(t^2 + 1)^2} (t^2 |t + i|^2 + |it - 1|^2) = \mathbf{1}$$

Подведем итог, предположив, что  $\mathbf{g} \neq 0$  для придания смысла формулам (4.2). В случае  $T = 0$  имеем  $s_-^0 = 0$  и  $s_+^0 = (-1)^m$ , т.е. выполнены соотношения (1.5), означающие почти полное прохождение волны  $w^+$  из рукава  $\Pi_-^h$  через перемычку в рукав  $\Pi_+^h$ . Этот эффект неустойчив и требует точной настройки размера

$$\ell^*(h) = \ell^0 + h\ell'(\ln h) = \frac{\pi m}{2\kappa} \sqrt{\frac{D}{\rho}} + h(\mathbf{b} + B^0 \ln h - \operatorname{Re} \mathbf{G}) \quad (4.3)$$

прямоугольника  $\Theta^h$  согласно формулам (2.5) и (4.1) при  $T = 0$ .

Если нарушить базовое равенство (2.5), то при любом малом возмущении  $h\ell'$  длины  $\ell^0$  перемычки реализуется почти полное отражение волны  $w^+$ , приходящей с бесконечности в рукаве  $\Pi_-^h$ , а именно, соотношения (1.18). Вытекающие из равенств (4.2) формулы

$$|s_-^0| = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + 1}} \rightarrow 1, \quad s_+^0 = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty \quad (4.4)$$

для главных членов асимптотики (3.4) коэффициентов рассеяния показывают, как почти полное прохождение трансформируется в почти полное отражение волны при увеличении отклонения  $2h|T|$  от критического размера (4.4).

Гипотетическая ситуация  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  требует отдельного обсуждения. Во-первых, к связям (2.20) и (2.21) числовых параметров можно добавить еще одну связь

$$\mathbf{g} = s\bar{\mathbf{g}} \quad (4.5)$$

обеспеченное представлениями (2.18), (2.19) и вытекающим из них равенством  $G(x) = \overline{G(x)} - \bar{\mathbf{g}}W(x)$ , однако все эти связи не позволяют найти коэффициент  $\mathbf{g}$ . Во-вторых, поскольку ограничение  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  устраняет из представления (2.18) волну  $w^+$ , решение  $G$  задачи (2.14)–(2.16) исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью и становится вещественным, т.е.  $\operatorname{Im} \mathbf{G} = \mathbf{0}$ . Кроме того,  $W_1(\mathbb{C}) = 0$  согласно связи (2.20), а значит, при критическом размере  $\ell_0^*(\ln h)$  соотношение (3.19) справедливо при вся-

ком множителе  $\mathbf{c}$  (он определяется при построении младших асимптотических членов), но все-таки  $s_-^0 = \mathbf{s}$  и  $s_+^0 = 0$  в любом случае согласно соотношениям (3.11) и (3.16); иными словами, эффект почти полного прохождения пропадает.

Покажем, что неравенство  $\mathbf{g}^\kappa := \mathbf{g} \neq 0$  выполнено по крайней мере для малых частот  $\kappa > 0$ , при которых асимптотические формулы для волн (1.7) можно найти при помощи одномерной модели балки, подставив решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.3)

$$v^\pm(x) = e^{\pm i\theta^0 \kappa x_1}, \quad \theta^0 = \sqrt{\frac{\rho}{D}}$$

в разложение (3.16) с  $h = 1$ . При учете формул (2.2) и  $e^{\pm i\theta^0 \kappa x_1} = 1 \pm i\theta^0 \kappa x_1 + O(\kappa^2 x_1^2)$  получим соотношение

$$w^{\kappa\pm}(x) = \frac{a^0}{\sqrt{\kappa}} e^{\pm i\theta^0 \kappa x_1} \left( e_{(1)} \mp i\theta^0 \kappa \frac{\lambda x_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} + \dots \right), \quad a^0 = \frac{1}{2\sqrt{\rho D}} \quad (4.6)$$

Множитель  $a^0$  нужен для соблюдения в главном условия нормировки (1.10). Процедура ([28], гл. 9) вывода асимптотической формулы (4.6) применялась [29, 30] к двумерным и трехмерным изотропным и анизотропным упругим волноводам.

В качестве внешнего, справедливого на удалении от торца полуполосы, разложения возьмем выражение

$$G^\kappa(x) = \mathbf{g}^\kappa w^{\kappa-}(x) + \dots = \mathbf{g}^\kappa \frac{a^0}{\sqrt{\kappa}} \left( 1 - i\theta^0 \kappa x_1 + \dots \right) \left( e_{(1)} \pm i\theta^0 \kappa \frac{\lambda x_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} + \dots \right) \quad (4.7)$$

Коэффициент  $\mathbf{g}^\kappa$  определим при сращивании с внутренним, пригодным в конечной части волновода  $\Pi^\square$ , разложением

$$G^\kappa(x) = c^\kappa e_{(1)} + G^0(x) e_{(2)} + \dots \quad (4.8)$$

Здесь  $c^\kappa$  — неизвестный множитель, а  $G^0$  — решение задачи (2.14)–(2.16) при  $\kappa = 0$ , для которого верны представления

$$\begin{aligned} G^0(x) &= B(x) + \mathbf{G}^0 e_{(1)} + O(|x|); & x &\rightarrow \mathbb{O} \\ G(x) &= -\frac{1}{2} \left( x_1 e_{(1)} - \frac{\lambda x_2}{\lambda + 2\mu} e_{(2)} \right) + O(e^{\varepsilon x_1}); & x_1 &\rightarrow -\infty, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

В поле  $G^0$  сосредоточенная в точке  $\mathbb{O}$  сила компенсирована продольной силой на бесконечности. Приравнявая в разложениях (4.7) и (4.8), (4.9) коэффициенты при  $e_{(1)}$  и  $x_j e_{(j)}$ , находим, что  $c^\kappa = a^0 \kappa^{-1/2} \mathbf{g}^\kappa$  и

$$\mathbf{g}^\kappa = \frac{i}{\sqrt{\kappa}} \left( \mathbf{g}^0 + O(\sqrt{\kappa}) \right), \quad \mathbf{g}^0 = \frac{1}{2a^0 \theta^0} > 0$$

Соотношение (4.8) показывает, что в самом деле коэффициент  $\mathbf{g}^\kappa$  в представлении (2.18) решения  $G^\kappa$  задачи (2.14)–(2.16) о действии сосредоточенной продольной силы на торце полуполосы  $\Pi^\square = (-\infty, 0) \times (-1, 1)$  отличен от нуля при малой частоте  $\kappa > 0$ .

**5. Несколько замечаний.** 1°. *Подтверждение асимптотических конструкций.* Построению асимптотических разложений решений краевых задач на сочленениях областей с различными предельными размерностями посвящено большое количество публикаций, в которых рассмотрены спектральные [31–36], [8–10, 12, 13] и статические [37–40] скалярные уравнения и система уравнений теории упругости [23, 24, 41–45]. Симметрия волновода и постановка искусственных условий (1.5) значительно упрощают процедуру обоснования асимптотических представлений решения и его характеристик, так как введенные условия аннулируют повороты точек на оси абсцисс и тем самым по сути компенсируют векторную природу упругих полей. В частности, для вектор-функций, подчиненных первому ограничению (1.5), выполнено упрощенное неравенство Корна [46] на усеченном волноводе  $\Xi^h(R) = \{x \in \Xi^h: |x| < R\}$

$$\|u^h; H^1(\Xi^h(R))\|^2 \leq c_R E \left( \|u^h, u^h; \Xi^h(R)\| + \|u^h; L^2(\Xi^h(R) \setminus \Theta^h)\| \right)^2 \quad (5.1)$$

Для сохранения независимости множителя  $c_R$  от толщины  $2h$  балки  $\Theta^h$  в общей ситуации левая часть неравенства (5.1) должна быть заменена [46] суммой

$$\begin{aligned} & \|u^h; H^1(\Xi^h(R) \setminus \Theta^h)\|^2 + \\ & + \sum_{j=1,2} \left( \|\partial_j u_j^h; L^2(\Theta^h)\|^2 + h^2 \|\partial_{3-j} u_j^h; L^2(\Theta^h)\|^2 + h^{2(j-1)} \|u_j^h; L^2(\Theta^h)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Появление в сумме (5.2) степеней малого параметра  $h$  с положительными показателями значительно усложняет как асимптотические представления полей смещений и напряжений на перемычке, так и процедуру их обоснования (см., например, ([19], гл. 4) и [24]).

Как обычно в методе сращиваемых разложений, внешние (3.1)–(3.3) и внутренние (3.7) разложения соединяются в единое глобальное асимптотическое приближение посредством срезающих функций. Простейший способ – применить разбиение единицы [21], однако воспользуемся более точной конструкцией [18, 47, 48], привлекающей срезающие функции с “перехлестывающимися” носителями

$$\begin{aligned} X_{\pm}^h(x) &= 1 - \chi\left(h^{-1}(x - P_{\pm}^h)\right) \quad \text{на } \Pi_{\pm}^h, \quad \chi_{\pm}(x) = \chi(x - P_{\pm}^h) \\ X_0^h(x) &= \left(1 - \chi\left(h^{-1}(x - P_-^h)\right)\right) \left(1 - \chi\left(h^{-1}(x - P_+^h)\right)\right) \quad \text{на } \Theta^h \end{aligned}$$

Здесь  $\chi$  – гладкая функция с малым носителем, равная единице в окрестности начала координат и подобранная так, что  $\chi_- \chi_+ = 0$ . Положим

$$W_{(\text{as})}^h(x) = X_{\pm}^h(x) W_{\pm}^0(x) + \chi_{\pm}(x) z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) - X_{\pm}^h(x) \chi_{\pm}(x) M_{\pm}^h(x) \quad \text{на } \Pi_{\pm}^h \quad (5.3)$$

$$W_{(\text{as})}^h(x) = X_0^h(x) W_0^h(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x) z_{\pm}^0(\xi^{\pm}) - X_0^h(x) \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x) M_0^h(x; \ln h) \quad \text{на } \Theta^h \quad (5.4)$$

В обеих формулах (5.3) и (5.4) члены разложений, подвергшиеся сращиванию в разд. 3, учтены дважды – и в первых и во вторых слагаемых из правых частей, однако такое дублирование устранено вычитаемыми, содержащими суммы названных членов. Именно,  $M_0^h$  – выражение, полученное в конце преобразования (3.7), т.е. незатухающие при  $\xi_{\pm}^{\pm} \rightarrow \mp \infty$  члены вектор-функций (3.8) и (3.13), а  $M_+^h$  и  $M_-^h$  – главные члены представлений (3.10) и (3.15) или составляющие вектор-функций (3.8) и (3.13), ко-

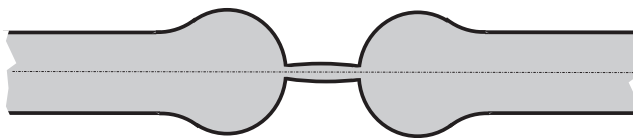


Рис. 3. Упругий волновод с резонаторами, соединенными тонкой перемычкой, и с осью симметрии (штрих-пунктирная линия).

торые не исчезают в пределе при  $|\xi_{\pm}^{\pm}| \rightarrow \infty$  в полуплоскости  $\mathbb{R}_{\pm}^2$ . Невязки, оставленные построенным приближенным асимптотическим решением  $W_{(as)}^h$  в уравнениях (1.3) и краевых условиях (1.4) оказывается малыми из-за достаточно быстрого затухания остатков в упомянутых представлениях. Последнее действие для вывода оценок

$$|s_{\pm}^h - s_{\pm}^0| \leq ch(1 + |\ln h|) \quad (5.5)$$

остатков в представлениях (3.4) коэффициентов рассеяния – применение техники весовых пространств с отделенной асимптотикой ([3], гл. 5), [15, 17]. Нормы в таких пространствах включают модули коэффициентов рассеяния, и поэтому малость функционала из правой части интегрального тождества (1.12) для разности  $W^h - W_{(as)}^h$  обеспечивает неравенства (5.5). Изложены [12, 17] особенности определения норм, связанные с наличием тонких элементов конструкций.

2°. *Доступные обобщения.* Если материал волновода ортотропный с осями  $x_1$  и  $x_2$  упругой симметрии, то приведенные выкладки и рассуждения требуют лишь незначительных изменений – нужные формулы для одномерной модели тонкой балки можно найти, например, в ([19], гл. 4, § 2). Допустимы симметричные относительно оси абсцисс возмущения формы волновода (1.2) (ср. рис. 3) – уравнение продольных колебаний искривленной балки также известны. Некоторые осложнения возникают в том случае, если основания балки и границы рукавов искривлены в окрестности зон присоединения перемычки. Именно, в окрестности точек  $P_{\pm}^h$  приходится ввести локальные криволинейные координаты  $(n_{\pm}, s_{\pm})$ , в которых оператор Ламе из системы (1.3) принимает вид  $(2 \times 2)$ -матрицы  $L(n_{\pm}, s_{\pm}, \partial_{n_{\pm}}, \partial_{s_{\pm}})$  дифференциальных операторов второго порядка с переменными коэффициентами, однако главные (после “заморозки” коэффициентов в точке  $P_{\pm}^h$  с координатами  $n_{\pm} = 0$  и  $s_{\pm} = 0$ ) части этих операторов принимают вид  $L(\partial_{n_{\pm}}, \partial_{s_{\pm}})$ , а значит, при построении пограничных слоев растяжение координат в  $h^{-1}$  раз по-прежнему приводит к задаче (2.7)–(2.9) на сочленении  $\Upsilon$  (рис. 2).

3°. *Изгибные колебания перемычки.* Для проведенного асимптотического анализа принципиальна зеркальная симметрия волновода (1.2) относительно оси абсцисс и постановка искусственных условий (1.5). Дело в том, что собственные частоты поперечных колебаний имеют вид  $\kappa_{\pm}^h = h\kappa_{\pm}^0$ , где  $\kappa_{\pm}^0$  – собственные частоты одномерной балки Кирхгофа с заземленными концами

$$\frac{D}{3} \frac{\partial^4 v_{\pm}}{\partial x_1^4}(x_1) = 2\rho(\kappa_{\pm}^0)^2 v_{\pm}(x_1); \quad x_1 \in (-\ell^0, \ell^0), \quad v_{\pm}(\pm\ell^0) = 0, \quad \frac{\partial v_{\pm}}{\partial x_1}(\pm\ell^0) = 0$$

Итак, спектр тонкой балки характеризуется концентрацией собственных частот около точки  $\kappa = 0$ , а значит, на частоте (1.14) количество распространяющихся волн, которые следует учесть в асимптотической процедуре из разд. 3, неограниченно возрастает при  $h \rightarrow +0$ . Это обстоятельство делает разработанную процедуру бесполезной, а переход к ультранизким частотам  $\kappa = O(h)$  требует существенной модификации процедуры, так как строение непрерывного спектра задачи теории упругости в полуполосах  $\Pi_{\pm}^h$  без искусственных условий (1.5) существенно искажается и обеспечивает иные непривычные эффекты [29].

4°. *Плоский акустический волновод.* Проиллюстрируем проведенные в разд. 2–4 выкладки на примере скалярной задачи, в которой доступны явные формулы, и воспроизведем в упрощенном виде результаты [12]. Рассмотрим краевую задачу для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u^h(x) = \kappa^2 u^h(x); \quad x \in \Xi^h, \quad \partial_n u^h(x) = 0, \quad x \in \partial \Xi^h$$

При этом  $u^h$  – давление в акустической среде, а частота  $\kappa$  берется из интервала (1.14) с точкой отсечки  $\kappa_{\dagger}^1 = \pi/2$  непрерывного спектра  $\wp_c = [0, +\infty)$ . Формулы (2.19) с поршневыми волнами (1.7) принимают вид

$$w^{\pm}(x) = \frac{e^{\pm i \kappa x_1}}{\sqrt{2\kappa}}, \quad W(x) = w^+(x) + w^-(x), \quad s = \mathbf{1}, \quad W(\mathbb{O}) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$$

Функция Грина  $G$  с особенностью в начале координат  $\mathbb{O}$  удовлетворяет соотношениям (2.17) и (2.18), в которых

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad B^0 = 1, \quad \text{Im } \mathbf{G} = \frac{1}{\kappa}, \quad \mathbf{g} = -i \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$$

Ключевые связи (2.20), (2.21) и (4.5), разумеется, сохраняются, и, что важно,  $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ . Процедура сращивания приводит к прежним соотношениям (3.11), (3.16) и (3.19), а выбор размера  $\ell'_0(\ln h)$  в определениях (1.1), (4.1) обеспечивает эффект почти полного прохождения волны  $w^+$  из рукава  $\Pi_-^h$  через тонкий акустический канал  $\Theta^h$  в рукав  $\Pi_+^h$ . Вместе с тем, явные аналитические формулы для величин  $\mathbf{b}$  и  $\text{Im } \mathbf{G}$  в представлениях (2.10) и (2.17) специальных решений задач Неймана для уравнения Пуассона в областях  $\Upsilon$  и  $\Pi^{\square}$  недоступны, т.е. и в скалярном случае для определения критической длины перемычки  $\Theta^h$  нужно применять численные методы.

5°. *Пространственные задачи.* Рассмотрим трехмерные цилиндры

$$\begin{aligned} \Pi_{\pm}^h &= \left\{ x = (x_1, x'): \pm x_1 > \ell^h, x' = (x_2, x_3) \in \Omega \right\} \\ \Theta^h &= \left\{ x: |x_1| < \ell^h, x' \in \omega \right\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

и составленный из них упругий однородный изотропный волновод (1.2). При этом  $\Omega$  и  $\omega$  – области на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченными кусочно-гладкими контурами и обладающие зеркальной симметрией относительно осей  $x_2$  и  $x_3$ . Одномерная модель Кирхгофа–Клебша тонкого стержня (5.6) представляет собой систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений – двух четвертого порядка, предоставляющих осредненные изгибы стержня, и двух второго порядка, описывающих продольную деформацию и закручивание. Для того чтобы применить предложенную в разд. 3 проце-

дуру, необходимо дополнить пространственную задачу теории упругости искусственными условиями, которые нейтрализуют собственные частоты поперечных колебаний в ультра-низкочастотном диапазоне.

Первый набор таких условий на срединной плоскости  $\Sigma_3^h = \{x \in \Xi^h: x_3 = 0\}$  тела  $\Xi^h$

$$\sigma_{12}(u^h; x_1, x_2, 0) := \mu(\partial_1 u_3^h(x_1, x_2, 0) + \partial_3 u_1^h(x_1, x_2, 0)) = 0$$

$$u_2^h(x_1, x_2, 0) = u_3^h(x_1, x_2, 0) = 0; \quad x \in \Sigma_3^h$$

оставляет в шестимерном линейном пространстве жестких смещений (крестом обозначено векторное произведение)

$$\mathcal{R} = \{u(x) = c^0 + c^1 \times x: c^0, c^1 \in \mathbb{R}^3\} \quad (5.7)$$

только продольное поступательное смещение  $c^0 e_{(1)}$  вдоль оси  $x_1$ . Таким образом, в одномерной модели стержня  $\Theta^h$  остаются лишь одно уравнение второго порядка, а исходную задачу можно сузить на половину  $\Xi_{\square}^h = \{x \in \Xi^h: x_1 = 0\}$  волновода  $\Xi^h \subset \mathbb{R}^3$ . Кроме того, продолжения компоненты  $u_1^h$  по четности и компонент  $u_2^h, u_3^h$  по нечетности через плоскость  $\{x: x_3 = 0\}$  сохраняют гладкость решения  $u_{\square}^h$ , удовлетворяющего искусственным краевым условиям на поверхности  $\Sigma_3^h \subset \partial \Xi_{\square}^h$ , а также систему уравнений (1.3) в теле  $\Xi^h$  и краевые условия (1.4) на поверхности  $\partial \Xi^h$ . Иными словами, восстановленное поле удовлетворяет всей задаче в трехмерном волноводе (1.2).

Приведем еще две группы приемлемых искусственных условий

$$\sigma_{12}(u^h; x_1, 0, x_3) = 0, \quad \sigma_{22}(u^h; x_1, 0, x_3) = 0, \quad u_2^h(x_1, 0, x_3) = 0; \quad x \in \Sigma_{2+}^h$$

$$\sigma_{13}(u^h; x_1, x_2, 0) = 0, \quad u_2^h(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \sigma_{33}(u^h; x_1, x_2, 0) = 0; \quad x \in \Sigma_{3+}^h$$

Здесь фигурируют декартовы компоненты  $\sigma_{pq}(u^h; x)$ ,  $p, q = 1, 2, 3$ , тензора напряжений и поверхности  $\Sigma_3^h = \{x \in \Xi^h: x_j = 0, x_{5-j} > 0\}$  при  $j = 2$  и  $j = 3$ . Теперь в линейном пространстве (5.7) остаются поступательные смещения  $c_1^0 e_{(1)}$  и повороты  $(0, -c_1^1 x_3, c_1^1 x_2)$  вокруг оси  $x_1$ , а подходящие продолжения через плоскости  $\{x: x_2 = 0\}$  и  $\{x: x_3 = 0\}$  вектора смещений  $u_{\square}^h$  в четвертушке  $\Xi_{\square}^h$  на весь волновод  $\Xi^h$  сохраняют гладкость поля и соотношения (1.3), (1.4).

Указаны [49] и другие способы постановки искусственных условий на срединных плоскостях тела  $\Xi^h$ , устраняющие из одномерной модели тонкого стержня оба уравнения четвертого порядка. Аналогичные проведенным в разд. 3 и 4 выкладки и рассуждения позволят обнаружить аномальное прохождение упругих волн через тонкий соединительный стержень в пространственном упругом волноводе, однако результаты в этом направлении не публиковались.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00046).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
3. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.
4. Назаров С.А. Условия излучения Умова—Мандельштама в упругих периодических волноводах // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 7. С. 43—72.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
6. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
7. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
8. Kriegsmann G.A. Complete transmission through a two-dimensional diffraction grating // SIAM J. Appl. Math. 2004. V. 65. № 1. P. 24—42.
9. Shipman S.P., Venakides S. Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 2. 026611.
10. Lin J. Zhang H. Scattering and field enhancement of a perfect conducting narrow slit // SIAM J. Appl. Math. 2017. V. 77. № 3. P. 951—976.
11. Lin J. Zhang H. Scattering by a periodic array of subwavelength slits I: field enhancement in the diffraction regime // Multiscale Model. Sim. 2018. V. 16. № 2. P. 922—953.
12. Назаров С.А., Шенель Л. Аномалии распространения акустических волн в двух полубесконечных цилиндрах, соединенных тонким уплощенным каналом // ЖВММФ. 2021. Т. 61. № 4. С. 135—152.
13. Назаров С.А., Шенель Л. Аномальное прохождение волн через тонкий канал, соединяющий два акустических волновода // Докл. РАН. 2021. Т. 496. С. 22—27.
14. Назаров С.А. Принудительная устойчивость собственного значения на непрерывном спектре волновода с препятствием // ЖВММФ. 2012. Т. 52. № 3. С. 521—538.
15. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функци. анал. и его прил. 2013. Т. 47. № 3. С. 37—53.
16. Боннэ-Бен Диа А.-С., Назаров С.А. Препятствия в акустическом волноводе, становящиеся “невидимыми” на заданных частотах // Акустич. ж. 2013. Т. 59. № 6. С. 685—692.
17. Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J. Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // Asympt. Anal. 2020. V. 118. № 1, 2. P. 81—122.
18. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
19. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга. 2002.
20. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
21. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
22. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic Analysis of Fields in Multistructures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
23. Назаров С.А. Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сибирск. матем. ж. 2012. Т. 53. № 2. С. 345—364.
24. Назаров С.А. Асимптотика собственных колебаний массивного упругого тела с тонкой перегородкой // Изв. РАН. Сер. Матем. 2013. Т. 77. № 1. С. 91—144.
25. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
26. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

27. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
28. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
29. Назаров С.А. Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах // Пробл. матем. анализ. Вып. 72. 2013. С. 101–146.
30. Назаров С.А. Почти полное прохождение низкочастотных волн в локально поврежденном упругом волноводе // Пробл. матем. анализ. Вып. 100. 2019. С. 83–121.
31. Beale J.T. Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
32. Арсеньев А.А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // ЖВММФ. 1976. Т. 16. 3. С. 718–724.
33. Гадильшин Р.Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
34. Гадильшин Р.Р. О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой” // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. № 2. С. 45–110.
35. Joly P., Tordeux S. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion // SIAM Multiscale Model. Simul. 2006. V. 5. № 1. P. 304–336.
36. Бахарев Ф.Л., Назаров С.А. Лакуны в спектре волновода, составленного из областей с различными предельными размерностями // Сиб. матем. ж. 2015. Т. 56. № 4. С. 732–751.
37. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // Asympt. Anal. 1994. V. 8. № 2. P. 105–143.
38. Назаров С.А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 18. 1995. С. 3–78.
39. Назаров С.А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 20. 1997. С. 155–195.
40. Назаров С.А., Соколовский Я. Топологическая производная интеграла Дирихле при образовании тонкой перемычки // Сиб. матем. ж. 2004. Т. 45. № 2. С. 410–426.
41. Nazarov S.A. Junction problem of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. Т. 320. № 11. P. 1419–1424.
42. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1995. V. 11. № 4. P. 343–415.
43. Nazarov S.A. Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20. № 3. P. 219–243.
44. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B. Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multistructures // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2001. V. 54. № 2. P. 177–212.
45. Назаров С.А. Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. Вып. 24. 2004. С. 95–214.
46. Назаров С.А. Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // УМН. 2008. Т. 63. № 1. С. 37–110.
47. Назаров С.А., Ромашев Ю.А. Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами // Изв. АН АрмССР. Механика. 1982. № 4. С. 30–40.
48. Назаров С.А. Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сшиваемых асимптотических разложений // Тр. Санкт-Петербург. матем. о-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
49. Назаров С.А. Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой // ЖВММФ. 2008. Т. 48. № 5. С. 863–881.

**Abnormal Transmission of Elastic Waves Through a Thin Ligament Connecting Two Planar Isotropic Waveguide****S. A. Nazarov<sup>a,#</sup>**<sup>a</sup>*Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russia*<sup>#</sup>*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

Asymptotics of transmission and reflection coefficients are constructed for the longitudinal elastic wave which incomes from infinity and scatters in the resonator, namely a thin ligament connecting two trunks of the waveguide, i.e., homogeneous isotropic half-strips. By choosing of sizes of the ligament, it is detected an unexpected effect of almost complete transition of a wave from one trunk to the other at a prescribed frequency in the first interval of the continuous spectrum. In general situation the almost complete reflection is realized. Open questions are discussed.

## REFERENCES

1. *Umov N.A.* Equations of Motion of Energy in Bodies. Odessa: Ul'rikh and Shultze Typography, 1974.
2. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamical mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains. Moscow: Nauka, 1979. (in Russian)
3. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
4. *Nazarov S.A.* Umov–Mandel'stam radiation conditions in elastic periodic waveguide // *Mat. sb.*, 2014, vol. 205, no. 7. pp. 953–982.
5. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics // *Appl. Math. Sci.*, 1985, vol. 49.
6. *Fichera G.* Existence Theorems in the Theory of Elasticity. Handbuch der Physic. Berlin: Springer, 1972.
7. *Birman M.Sh., Solomyak M.Z.* Spectral Theory of Selfadjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1987.
8. *Kriegsmann G.A.* Complete transmission through a two-dimensional diffraction grating // *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, vol. 65, no. 1, pp. 24–42.
9. *Shipman S.P., Venakides S.* Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 71, no. 2, 026611.
10. *Lin J. Zhang H.* Scattering and field enhancement of a perfect conducting narrow slit // *SIAM J. Appl. Math.*, 2017, vol. 77, no. 3, pp. 951–976.
11. *Lin J. Zhang H.* Scattering by a periodic array of subwavelength slits I: field enhancement in the diffraction regime // *Multiscale Model. Sim.*, 2018, vol. 16, no. 2, pp. 922–953.
12. *Nazarov S.A., Chesnel L.* Anomalies of transmission of acoustic waves in two semi-infinite cylinders connected by thin flattened canal // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 4, pp. 646–663.
13. *Nazarov S.A., Chesnel L.* Abnormal transition of waves through a thin canal connecting two acoustic waveguides // *Dokl. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 1, pp. 45–50.
14. *Nazarov S.A.* Enforced stability of an eigenvalue in the continuous spectrum of a waveguide with an obstacle // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 3, pp. 448–464.
15. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // *Funct. Anal. Appl.*, 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
16. *Bonnet-Ben Dhia A.-S., Nazarov S.A.* Obstacles in acoustic waveguides becoming “invisible” at given frequencies // *Acoust Phys.*, 2013. vol. 59, no. 6, pp. 633–639.
17. *Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J.* Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // *Asympt. Anal.*, 2020, vol. 118, no. 1, 2, pp. 81–122.

18. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991.
19. *Nazarov S. A.* Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Dimension Reduction and Integral Bounds, Novosibirsk: Nauch. Kn., 2002. (in Russian)
20. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Acad. Press. 1964.
21. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Transl. Math. Monogr., Vol. 102. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992.
22. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic Analysis of Fields in Multistructures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
23. *Nazarov S.A.* Asymptotics of solutions to the spectral elasticity problem for a spatial body with a thin coupler // *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 274–290.
24. *Nazarov S.A.* Asymptotics of eigen-oscillations of a massive elastic body with a thin baffle // *Math. Izvestiya.*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 87–142.
25. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. McGraw Hill Book Co., 1951.
26. *Rabotnov Yu. N.* Mechanics of a Deformable Solid. Moscow: Nauka, 1988.
27. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // *Uspehi Mat. Nauk.*, 1999, vol. 54, no. 5, pp. 77–142.
28. *Vainberg M.M., Trenogin V.A.* Theory of Branching of Non-Linear Equations. Noordhoff, Leyden: Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 1974.
29. *Nazarov S.A.* The Mandelstam energy radiation conditions and the Umov–Poynting vector in elastic waveguides // *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 195, no. 5, pp. 676–729.
30. *Nazarov S.A.* Almost complete transmission of low frequency waves in a locally damaged elastic waveguide // *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 244, no. 3, pp. 451–497.
31. *Beale J.T.* Scattering frequencies of resonators // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1973, vol. 26, no. 4, pp. 549–563.
32. *Aren'ev A.A.* The existence of resonance poles and scattering resonances in the case of boundary conditions of the second and third kind // *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1976, vol. 16, no. 3, pp. 171–177.
33. *Gadyl'shin R.R.* Characteristic frequencies of bodies with thin spikes. I. Convergence and estimates // *Math. Notes.*, 1993, vol. 54, no. 6, pp. 1192–1199.
34. *Gadyl'shin R.R.* On the eigenvalues of a “dumbbell” with a thin handle // *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 2, pp. 265–329.
35. *Joly P., Tordeux S.* Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion // *SIAM Multiscale Model. Simul.*, 2006, vol. 5, no. 1, pp. 304–336.
36. *Bakharev F.L., Nazarov S.A.* Open waveguides in doubly periodic junctions of domains with different limit dimensions // *Sib. Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 575–592.
37. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // *Asympt. Anal.*, 1994, vol. 8, no. 2, pp. 105–143.
38. *Nazarov S.A.* Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. 1 // *J. Math. Sci.*, 1996, vol. 80, no. 5, pp. 1989–2034.
39. *Nazarov S.A.* Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions. 2 // *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 97, no. 3, pp. 155–195.
40. *Nazarov S.A., Sokolowski J.* The topological derivative of the Dirichlet integral under formation of a thin bridge // *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 2, pp. 341–355.
41. *Nazarov S.A.* Junction problem of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1*, 1995, T. 320, no. 11, pp. 1419–1424.
42. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // *Asympt. Anal.*, 1995, vol. 11, no. 4, pp. 343–415.
43. *Nazarov S.A.* Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1997, vol. 20, no. 3, pp. 219–243.

- 
44. *Kozlov V.A., Maz'ya V. G., Movchan A.B.* Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multi-structures // *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 2001, vol. 54, no. 2, pp. 177–212.
  45. *Nazarov S.A.* Asymptotic analysis and modeling of the jointing of a massive body with thin rods // *J. Math. Sci.*, 2003, vol. 127, no. 5, pp. 2172–2263.
  46. *Nazarov S.A.* Korn's inequalities for elastic junctions of massive bodies and thin plates and rods // *Russ. Math. Surv.*, 2008, vol. 63, no. 1, pp. 35–107.
  47. *Nazarov S.A., Romashev Yu.A.* Variation of the intensity factor under rupture of the ligament between two collinear cracks // *Izv. Akad. Nauk Armenian SSR. Mekh.*, 1982, no. 4, pp. 30–40. (in Russian)
  48. *Nazarov S.A.* Asymptotic conditions at a point, self-adjoint extensions of operators and the method of matched asymptotic expansions // *Trans. Am. Math. Soc. Ser. 2*, 1999, vol. 193, pp. 77–126.
  49. *Nazarov S.A.* Trapped modes for a cylindrical elastic waveguide with a damping gasket // *Comput. Math. & Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 5, pp. 863–881.

УДК 532.5

## ДАВЛЕНИЕ И ДЕБИТ ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА

© 2022 г. Р. А. Башмаков<sup>1,2,\*</sup>, Н. О. Фокеева<sup>1,\*\*</sup>, В. Ш. Шагапов<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального  
исследовательского центра РАН, Уфа, Россия*

<sup>2</sup>*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

\**e-mail: Bashmakov\_Rustem@mail.ru*

\*\**e-mail: ffoxnina@gmail.com*

\*\*\**e-mail: Shagapov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 21.07.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принята к публикации 30.08.2022 г.

В работе получены точные аналитические решения системы уравнений, описывающих фильтрацию жидкости в пластах, подверженных ГРП, при переходных режимах работы скважины. Рассмотрены случаи, когда забойное давление или дебит скважины изменяются, принимая кусочно-постоянные значения. Данные решения обобщены для случая, когда давление на забое и дебит от времени являются непрерывными функциями. Полученные решения позволяют определить дебит или забойное давление при заданном законе изменения давления на забое или дебита скважины, а также эволюцию давления в трещине ГРП. В определенных случаях, например, при П-образном законе изменения дебита полученные решения из сравнения промышленных кривых дебита и забойного давления позволяют определить проводимость трещины ГРП. Показано хорошее совпадение теоретических кривых изменения давления, построенных по данным изменения дебита, и результатов полевых наблюдений.

*Ключевые слова:* гидроразрыв пласта, трещина ГРП, нефтяная скважина, фильтрация флюида, эволюция давления, дебит, ГДИС

DOI: 10.31857/S0032823522060017

**1. Введение.** К настоящему времени вышло много работ, описывающих распределение давления в трещине ГРП при работе нефтяной скважины. В большинстве из них рассматривается стационарная фильтрация (см., напр., [1]). Модели, приведенные в [2–5], описывают нестационарную фильтрацию жидкости в трещине и показывают связь между постоянным давлением, поддерживаемым после ее начала работы, и расходом жидкости на скважине или изменением давления при поддержании постоянного расхода. В статье [5] приводятся решения для нахождения распределения давления в трещине ГРП конечной длины и, окружающем трещину пласте. В работе [6] рассмотрены режимы работы скважины с кусочно-постоянными изменениями давления на скважине или расхода жидкости.

В данной работе рассматриваются более общие режимы работы нефтяной скважины; случаи ступенчатого и непрерывного изменения давления или изменения дебита скважины. И в том и другом случае получены точные аналитические решения, описывающие распространение давления в трещине, по которым, в свою очередь, используя

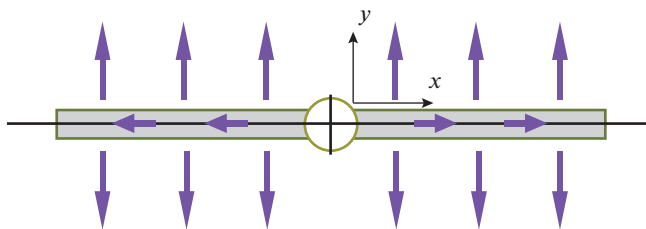


Рис. 1. Схема течения жидкости из скважины в трещину и из трещины в пласт (вид сверху).

закон Дарси, можно определить фильтрационные потоки в пласте и трещине. Показана практическая значимость полученных результатов.

Полученные теоретические результаты апробируются на данных измерений суточного дебита и изменения давления на забое реальной нефтяной скважины. По начальному П-образному режиму изменения дебита скважины и, соответствующим данным изменения давления был найден коэффициент, определяемый характеристиками пласта и трещины ГРП (значениями проницаемостей и пористости трещины и пласта, шириной и высотой трещины, вязкостью флюида). Далее, по аналитическим решениям, полученным в работе, по кривой годового изменения дебита скважины получена кривая изменения давления на забое. Из представленных в работе графиков следует достаточно хорошее совпадение теоретических кривых с промысловыми данными.

**2. Основные уравнения.** Рассмотрим нефтяную скважину с вертикальной, закрепленной пропантом трещиной, полученной путем гидроразрыва пласта (ГРП) (рис. 1). Пласт предполагается однородным, ширина трещины  $d_f$  значительно меньше ее высоты  $h_f$ . Считаем, что жидкость в пласте течет перпендикулярно плоскости трещины и, далее, по трещине течет от скважины (билинейная схема). Предполагается, что давление жидкости в пласте и трещине мало зависит от изменения глубины, поэтому рассматриваем движение флюида в трещине, как квазиодномерное вдоль оси  $Ox$ , направленной вдоль трещины. В силу симметрии можно рассматривать одно крыло трещины. Начало координат поместим на стенку забойного участка. Ось  $Oy$  направим перпендикулярно трещине. Отсчет будет идти от границы “пласт–трещина”. Скелет пористой среды пласта и трещины считаем несжимаемым, длину трещины бесконечной.

Основываясь на законе сохранения масс, законе Дарси в работах [2–5] получена система уравнений, описывающая фильтрацию флюида в трещине ГРП и пласте:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \left( \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} \right) + \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f} \left( \frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \left( \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \right) \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \infty), \quad (2.2)$$

где  $\alpha_i = (\rho_0 C^2 k_i) / (\mu m_i)$  – коэффициент пьезопроводности. Здесь и в дальнейшем индексы  $i = f$  и  $p$  соответствуют значениям параметров в трещине и пласте, окружающем трещину. Через  $\rho_0$  обозначим первоначальную невозмущенную плотность жидкости,  $v_i$  – скорость жидкости,  $m_i$  – пористость,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $k_i$  – коэффициент проницаемости,  $d_f$  – ширина трещины,  $C$  – скорость звука для флюида,  $P_f = P_f(t, x)$ ,  $P_p = P_p(t, x, y)$  – давление в трещине и пласте, соответственно. Второе слагаемое в правой части уравнения (2.1) выражает интенсивность притока флюида через стенки в

трещину. Жидкость считаем слабосжимаемой  $|\rho_i - \rho_0| \ll \rho_0$ . Индекс (0) соответствует начальному состоянию.

Давление в трещине и в пласте на поверхности стенки трещины совпадает:

$$P_f = P_p|_{y=0} \quad (2.3)$$

Вдали от трещины считаем, что давление постоянно и равно первоначальному значению  $P_0$ :

$$P_p|_{y=\infty} = P_0 \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1)–(2.2) сводится в работе [4] к одному интегро-дифференциальному уравнению, описывающему распределение давления в трещине ГРП:

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} = \alpha_f \left( \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f} \right) \int_{-\infty}^t \left( \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \right) \left( \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}} \right) \quad (\Delta P_f = P_f - P_0) \quad (2.5)$$

Здесь мы считаем, что при  $t \rightarrow -\infty$  система находится в покое, т.е.

$$P_f|_{t=-\infty} = P_p|_{t=-\infty} = P_0$$

Из сравнения слагаемых в уравнении (2.5) можно получить критические условия для характерного времени  $\tilde{t}$ , когда левая часть этого уравнения, отвечающая за упругость флюида в трещине несущественна (см. [4]).

Для рассматриваемых задач справедлива оценка

$$\tilde{t} \gg t^*; \quad t^* = \frac{\pi}{4} \left( \frac{m_f}{m_p} \right)^2 \left( \frac{d_f^2}{\alpha_p} \right) \quad (2.6)$$

Для нефтепромысловых задач обычно рассматриваются времена, удовлетворяющие условию (2.6) (минуты, часы, сутки). Поэтому будем вместо (2.5) пользоваться упрощенным уравнением

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \frac{2m_p \alpha_p}{m_f d_f \alpha_f} \int_{-\infty}^t \left( \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_p (t - \tau)}} \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (2.7)$$

**3. Случай последовательного скачкообразного закона изменения давления в скважине.** В работе [4] получено решение задачи о распространении давления в трещине ГРП при резком изменении давления в момент времени  $\tau$  на постоянную величину  $\Delta P_{(w)} = P_{(w)} - P_0$ . Предполагается, что далее давление поддерживается постоянным ( $\Delta P_{(w)} = \text{const}$ ,  $t \geq \tau$ ). Для определенности будем в дальнейшем считать, что  $\Delta P_{(w)} > 0$ , т.е. рассматривается случай, когда жидкость нагнетается в пласт, случай откачивания жидкости из скважины приводит лишь к изменению знака величины  $\Delta P_{(w)}$ .

Эти условия запишем в виде

$$\Delta P_f = 0 \quad (t < \tau, x > 0)$$

$$\Delta P_f = \Delta P_{(w)} \quad (t \geq \tau, x = 0)$$



В работе [4] получено решение поставленной задачи через специальную функцию

$$\text{Gil}(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin\left(z\eta^4\right)}{\eta} \right) e^{-\eta - z\eta^4} dz \quad (3.1)$$

Распределение давления в трещине находится, как

$$\Delta P_f = \Delta P_{(w)} \text{Gil}\left(\sqrt{\mathcal{X}_f/2x}(t - \tau)^{\frac{1}{4}}\right); \quad t > \tau \quad \left(\mathcal{X}_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\mathfrak{a}_p}}{\mathfrak{a}_f}\right) \quad (3.2)$$

На основе этого решения можно определить формулу для объемного расхода флюида в одном крыле трещины на единицу высоты трещины:

$$q = \left(\frac{d_f k_f}{\mu}\right) \left(\frac{\partial P_f}{\partial x}\right)_{x=0} = -\sqrt{\frac{\mathcal{X}_f}{2}} \left(\frac{4d_f k_f \Delta P_{f(w)}}{\mu \pi}\right) \int_0^{\infty} e^{-(t-\tau)\xi^4} d\xi$$

Введем величину  $\mathcal{F} = \frac{\mu}{\sqrt{\mathcal{X}_f/2} d_f k_f}$  (от англ. Feature – характеристика, свойство), характеризующую проводимость трещины. Используя выражение для  $\mathcal{X}_f$  из (3.2) и выражения для коэффициентов пьезопроводности  $\mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}_f$ , входящих в уравнения (2.1) и (2.2), для параметра  $\mathcal{F}$  можем записать:

$$\mathcal{F} = \frac{\mu^{\frac{3}{4}} \sqrt{C} \rho^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{d_f k_f} \sqrt{m_p k_p}} \quad (3.3)$$

Отсюда

$$q \approx -\frac{3.6}{\pi} \frac{\left(\Delta P_{f(w)}(t - \tau)^{\frac{1}{4}}\right)}{\mathcal{F}}; \quad t > \tau \quad (3.4)$$

Здесь использовано

$$\int_0^{\infty} e^{-(t-\tau)\xi^4} d\xi = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)(t - \tau)^{\frac{1}{4}},$$

где  $\Gamma$  – Гамма-функция, и  $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.906$ .

Рассмотренное уравнение (2.7), линейное для  $\Delta P_f$ , это позволяет (см. [6]), представленную формулу (3.2) для нахождения расхода, обобщить для случая, когда давление изменяется скачкообразно в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  и на участках  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  принимает постоянные значения.

Пусть в исходном состоянии жидкость в скважине и трещине неподвижна

$$v_p = v_f = 0, \quad P_p = P_f = P_0 \quad \text{при} \quad t < \tau_0$$

В момент времени  $t = \tau_1$  скважина начинает функционировать при постоянном перепаде давления  $\Delta P_{(w)1}$  до момента времени  $\tau_2$ , с момента времени  $\tau_2$  скважина функционирует при перепаде давления  $\Delta P_{(w)2}$  до момента времени  $\tau_3$  и т.д. Для удобства записи

формулы будем считать, что  $\Delta P_{(w)0} = 0$ . Тогда решение, описывающее изменение давления в трещине, может быть записано в виде

$$\Delta P_f(t, x) = \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2} x (t - \tau_i)^{-\frac{1}{4}} \right), \quad (3.5)$$

здесь  $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$  — функция Хевисайда.

Далее, по аналогии с (3.2), получим величину расхода на единицу высоты трещины:

$$q = -\frac{3.6}{\pi \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \left[ H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) (t - \tau_i)^{-\frac{1}{4}} \right] \quad (3.6)$$

Объем флюида, поступающий (расходуемый) за время, прошедшее с момента  $\tau$  начала работы скважины до момента времени  $t$  через два крыла трещины высотой  $h_f$ , будет определяться формулой

$$V = 2h_f \int_{\tau}^t q(\tau) d\tau = -9.6 \frac{h_f}{\pi \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{3}{4}} \quad (3.7)$$

**4. Случай непрерывного изменения давления на скважине.** Пусть первоначальное давление в пласте и на забое равно  $P_0$ , давление в скважине изменяется непрерывно:

$$\Delta P_{(w)}(t) = \Delta P_f(t, 0); \quad \Delta P_f = P_f - P_0, \quad t \geq \tau_0$$

Разобьем временной промежуток  $[\tau_0, t)$  точками  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Введем следующую сумму:

$$\Delta P_f(t, x) = \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2} x (t - \tau_i)^{-\frac{1}{4}} \right) (\Delta P_{(w)}(\tau_i) - \Delta P_{(w)}(\tau_{i-1})) \quad (4.1)$$

Согласно (3.5), выражение (4.1) соответствует ступенчатому изменению давления на скважине. При  $\max(\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$  оно может рассматриваться, как интегральная сумма для интеграла

$$\Delta P_f(t, x) = \int_{\tau_0}^t \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2} x (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) dP_{(w)}(\tau) \quad (4.2)$$

Отсюда можно найти расход жидкости на скважине:

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\text{Gil}'(0)}{\mathcal{F}} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$\text{где } \text{Gil}'(0) = \left( \frac{d}{dz} \text{Gil}(z) \right)_{z=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{3}{4}} e^{-\eta} d\eta = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}.$$

Поэтому

$$q = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi \mathcal{F}} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad t > \tau_0,$$

то есть

$$q = -1.154 \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{\tau_0}^t (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{\partial P_{(w)}(\tau)}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) позволяют, зная непрерывный закон изменения давления на скважине, определять закон изменения расхода жидкости в скважине с вертикальной трещиной ГРП и в самой трещине.

**5. Решения, соответствующие кусочно-постоянным законам изменения расхода жидкости на скважине.** Пусть до момента времени  $\tau$  флюид в пласте и трещине находится в покое ( $v_p = v_f = 0$ ). В работах [3], [4] получен закон изменения давления при постоянном расходе. Пусть, первоначальный расход жидкости на скважине до момента времени  $t = \tau$  нулевой, и, начиная с момента времени  $t = \tau$  поддерживается постоянный расход  $q$ . Тогда распределение давления в трещине ГРП выражается формулой при ( $\tau \leq t$ )

$$\Delta P_f(t, x) = -(t - \tau)^{\frac{1}{4}} q \mathcal{F} \text{Zil} \left( x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2} (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \right), \quad (5.1)$$

где (см. [3, 4])  $\text{Zil}(z) = \int_0^z \text{Gil}(\xi) d\xi$  – специальная функция.

Так как  $\Delta P_{(w)} = \Delta P_f|_{x=0}$ , из (5.1) получим закон изменения перепада давления на скважине:

$$\Delta P_{(w)} = -\text{Zil}(0) (t - \tau)^{\frac{1}{4}} q \mathcal{F} \quad (5.2)$$

Величина  $\text{Zil}(0) \approx 0.78$ . Графики функций  $\text{Gil}(z)$  и  $\text{Zil}(z)$  приведены в работе [4].

В силу линейности уравнения (2.7), выше представленное решение (5.1), можно обобщить для случаев, когда расход представляет кусочно-постоянную функцию.

Пусть до момента  $\tau_1$  флюид в пласте находится в покое и расход жидкости на скважине  $q_0 = 0$ , в момент времени  $\tau_1$  расход выходит на значение  $q_1$  и поддерживается постоянным до момента времени  $\tau_2$ , когда он резко изменяется до величины  $q_2$  и держится постоянным до момента  $\tau_3$ , и так далее.

Решение, описывающее эволюцию давления в трещине, принимает вид:

$$\Delta P_f(t, x) = -\mathcal{F} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2} (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right) \quad (5.3)$$

Для перепада давления  $\Delta P_{(w)}$  между значениями на забое скважины и пластом ( $\Delta P_{(w)} = \Delta P_f(t, 0)$ ) получим

$$\Delta P_{(w)} = -\text{Zil}(0) \mathcal{F} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \quad (5.4)$$

**6. Случай непрерывного изменения расхода жидкости на скважине.** Рассмотрим теперь случай, когда расход жидкости на скважине изменяется непрерывно, начиная с нулевого значения  $q = q(t)$ ,  $q(0) = 0$ ,  $t \geq 0$ .

Разобьем временной промежутки  $[\tau_0, t)$  точками  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Введем следующую сумму:

$$-\mathcal{F} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q(\tau_i) - q(\tau_{i-1})) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2} (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right)$$

При  $\max(\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) она может рассматриваться, как интегральная сумма для интеграла

$$\Delta P_f(t, x) = -\mathcal{F} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( (x \sqrt{\mathcal{L}_f / 2}) (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) dq(\tau), \quad (6.1)$$

позволяющего определить распространение давления в трещине ГРП. Отсюда, подставляя значение  $x = 0$ , получаем закон изменения давления на забое скважины при известном непрерывном изменении расхода:

$$\Delta P_{(w)}(t) = -\text{Zil}(0) \mathcal{F} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1}{4}} dq(\tau) \quad (6.2)$$

**7. Результаты расчетов.** На основе полученных аналитических решений, рассмотрим численные примеры. Для параметров, определяющих физические свойства флюида, а также пласта, подверженного ГРП (если специально не оговорено иное) примем следующие величины:  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $m_f = 0.3$ ,  $\mu = 10^{-3}$  Па · с,  $C = 1500$  м/с,  $k_p = 10^{-15}$  м<sup>2</sup>,  $m_p = 0.1$ ,  $k_f = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>,  $d_f = 5 \times 10^{-3}$  м.

Рассмотрим эволюцию фильтрационных полей в трещине и дебит жидкости через нее при заданном законе изменения давления в забое скважины. Поскольку уравнения, описывающие поле давления движения в трещине и окружающем ее пласте, представляют собой линейно однородные интегро-дифференциальные уравнения, то решения, описывающие возмущения давления в пласте и трещине, пропорционально изменяются относительно исходного пластового давления, то есть задание начального пластового давления при получении решений роли не играет. Допустим в исходном состоянии пластовое давление однородно и вдали от скважины сохраняется постоянное значение. Это означает, что здесь рассматриваем “начальный” этап эксплуатации скважины, в течение которого дальняя граница трещины ГРП и пласта слабо влияют на эволюцию давления в трещине и пласте. Пусть (рис. 2а) в момент времени  $t = 0$  давление в забое повышается на 10 МПа и поддерживается постоянным в течение суток. Далее, давление опускается до исходного значения и сохраняется постоянным. Видно (рис. 2б), что в течение суток происходит нагнетание ( $q < 0$ ), а далее ( $t > 1$  сутки) происходит поступление жидкости в скважину. На рис. 2в представлена эволюция давления в трещине ГРП. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют моментам времени  $t = 6$  часов, 1 сутки, 1 сутки и 30 минут, 2 суток.

Заметим, что в моменты скачкообразного изменения давления расход жидкости на скважине приобретает бесконечное значение (всплеск), но количество извлекаемой или закачиваемой жидкости за любой промежуток времени конечно и изменяется непрерывно.

Рассмотрим случай, когда перепад давления  $\Delta P_{(w)}$  растет по линейному закону от нулевого значения до значения  $\Delta P_{(w)1}$  за время  $\tau_1$ . Тогда

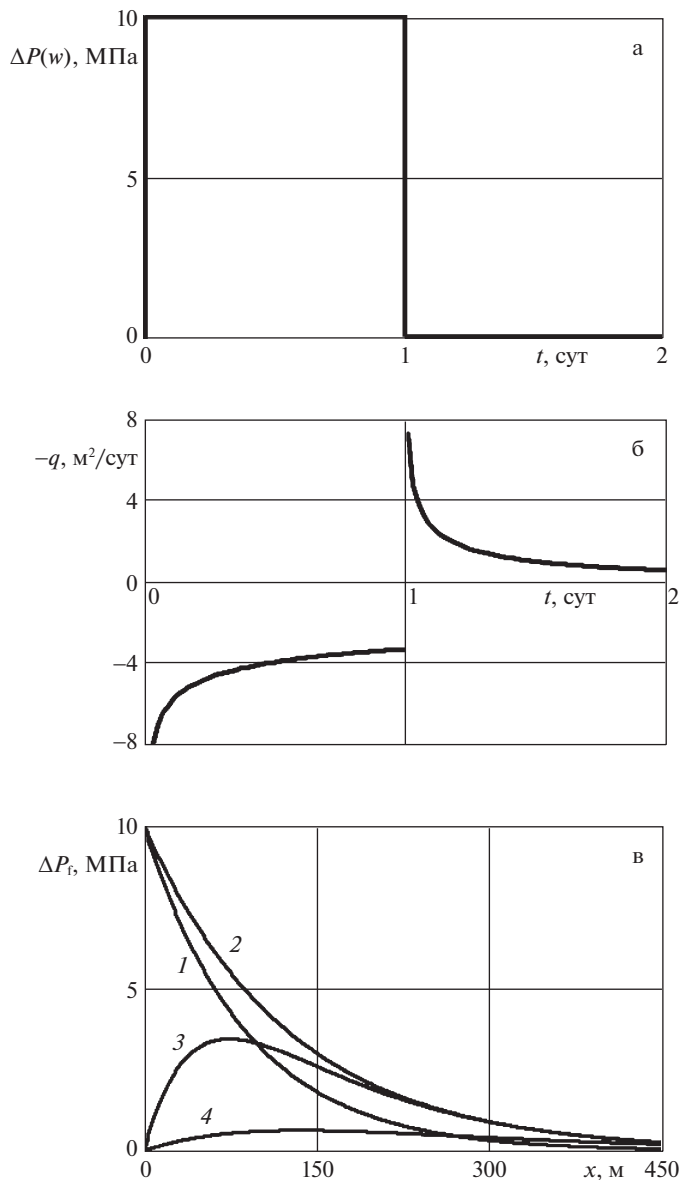
$$\Delta P_{(w)}(t) = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} t \quad (7.1)$$

В этом случае из (4.2) для эволюции давления в трещине получим

$$\Delta P_f(t, x) = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} \int_0^t \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f / 2x} (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau \quad (7.2)$$

На основе (4.3), используя решение (7.2), для расхода жидкости на единицу высоты трещины получим

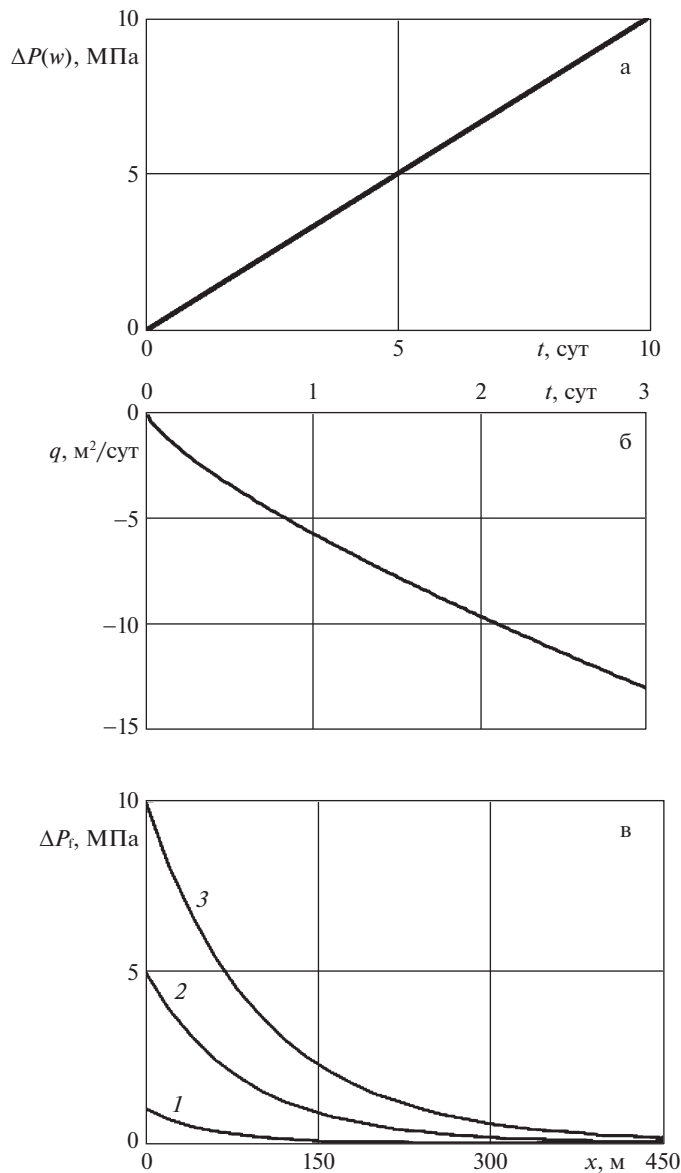
$$q = -1.53 \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} t^{\frac{3}{4}} \quad (7.3)$$



**Рис. 2.** П-образное изменение давления на забое – а; соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины – б; распределение давления в трещине спустя (1– 6 часов, 2 – 1 сут, 3 – 1 сут и 30 мин, 4 – 2 сут) – в.

На рис. 3 представлено линейное изменение давления (а) в скважине и соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины (б), а также эволюция поля давления (в) в трещине ГРП для линейного изменения давления. Приняты следующие значения  $\Delta P_{(w)1} = 10$  МПа,  $\tau_1 = 1$  сутки, линии 1, 2, 3 соответствуют моментам времени  $t = 1, 5$  и 10 сут.

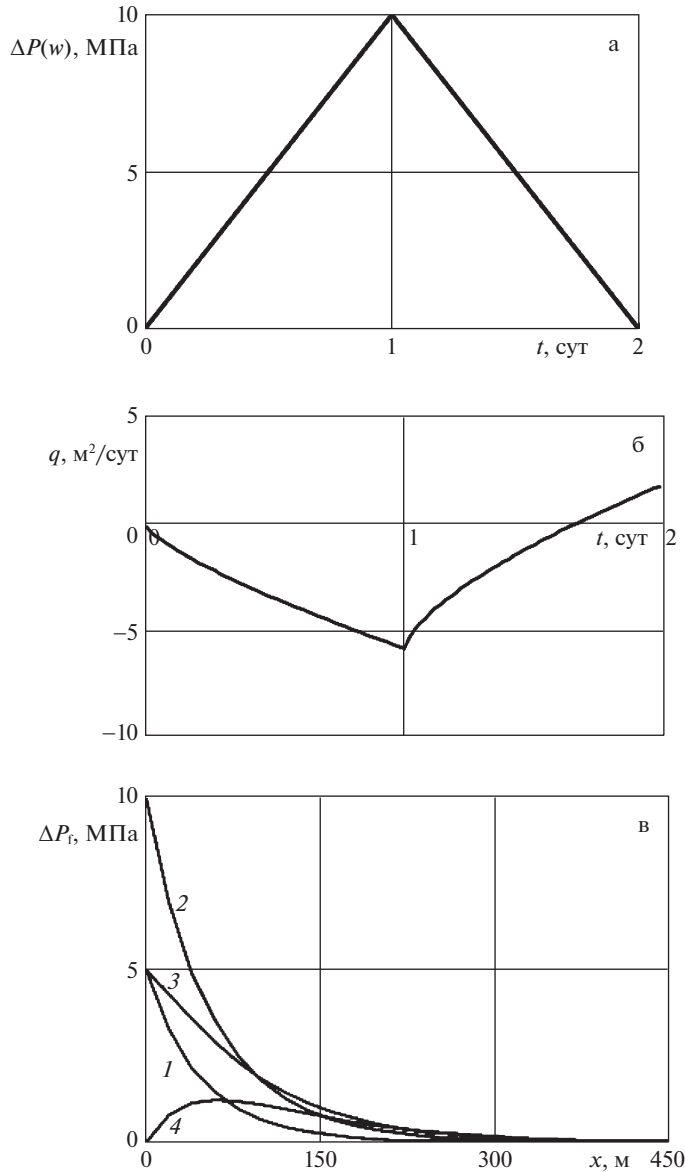
Пусть теперь давление  $\Delta P_{(w)}$  в скважине в течение времени  $\tau_1$  линейно растёт до значения  $\Delta P_{(w)1}$ , затем снижается по линейному закону до нулевого значения до мо-



**Рис. 3.** Линейное изменение давления на забое – а; соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины – б; распределение давления в трещине спустя (1 – сут, 2 – 5 сут, 3 – 10 сут) – в.

мента времени  $\tau_2$  ( $\Lambda$  – образное изменение). Тогда для значений времени  $t$  между  $\tau_1$  и  $\tau_2$  получим значения давления в трещине:

$$\Delta P_f = \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2x} (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau - \frac{\Delta P_{(w)1}}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^t \text{Gil} \left( \sqrt{\mathcal{L}_f/2x} (t - \tau)^{-\frac{1}{4}} \right) d\tau \quad (7.4)$$



**Рис. 4.** Λ-образное изменение давления на забое – а; соответствующее изменение расхода жидкости на единицу высоты трещины – б; распределение давления в трещине (1 – 0.5 сут, 2 – 1 сут, 3 – 1.5 сут, 4 – 2 сут) – в.

Если  $\tau_2 = 2\tau_1$  для несжимаемой жидкости при значениях времен  $0 < t < \tau_1$  величина расхода будет изменяться по формуле (7.3), а при временах  $\tau_1 < t < \tau_2$  при принятых выше параметрах трещины и вязкости жидкости по формуле

$$q = -1.53 \frac{\Delta P(w)l}{\mathcal{F}_p} \left( t^{\frac{3}{4}} - 2(t - \tau_1)^{\frac{3}{4}} \right) \tag{7.5}$$

На рис. 4а представлено Λ-образное изменение давления, соответствующий закон изменения расхода на единицу высоты трещины (б), а также эволюция давления в

трещине (в) при  $\Delta P_1 = 10$  МПа,  $\tau_2 = 2\tau_1 = 2$  суток. Линии 1, 2, 3 и 4 соответствуют моментам времени  $t = 0.5$  суток, 1 сутки, 1.5 суток и 2 суток.

Наиболее важной с целью приложения является задача определения графика изменения давления, когда известен закон изменения дебита скважины. Решение таких задач и их сопоставление с промысловыми данными для кривых “дебит – забойное давление” позволяет судить о коллекторских характеристиках в призабойной зоне пласта. Наиболее простой и интересной задачей в этом плане является задача определения характеристик пласта для П-образного по времени дебиту.

Пусть до момента времени  $\tau_0 = 0$  расход был нулевой и, затем мгновенно повышается до значения  $q$  и это значение поддерживается постоянным до момента времени  $\tau$ . Начиная с этого момента расход становится нулевым. Тогда на основе общего решения (5.3) будем иметь

$$\Delta P_f = -\mathcal{F}q \left( H(t)t^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x\sqrt{\mathcal{R}_f/2t^{\frac{1}{4}}} \right) - H(t-\tau)(t-\tau)^{\frac{1}{4}} \text{Zil} \left( x\sqrt{\mathcal{R}_f/2(t-\tau)^{\frac{1}{4}}} \right) \right) \quad (7.6)$$

Отсюда при  $x = 0$  получим выражение для перепада давления между забойным и пластовым значениями

$$\Delta P_{f(w)} = -\text{Zil}(0) \mathcal{F}q \left( H(t)t^{\frac{1}{4}} - H(t-\tau)(t-\tau)^{\frac{1}{4}} \right); \quad \text{Zil}(0) = 0.78 \quad (7.7)$$

Величины всех параметров, входящих в формулы (3.2) и (3.3), обычно являются известными, кроме проводимости трещины  $d_f k_f$ . Значение этого параметра можно определить из П-образного закона изменения дебита и соответствующего изменения давления на забое скважины.

На рис. 5 представлено для П-образного изменения дебита (а) – изменение давления на забое скважины (б), и эволюция давления в трещине ГРП (в) при величине расхода на единицу высоты трещины  $q = 1$  м<sup>2</sup>/сут. Цифры 1, 2, 3 и 4 на линиях соответствуют моментам времени  $t = 0.5, 1, 1.5, 2$  суток.

Видно, что для П-образного закона изменения давления соответствующая кривая для перепада давления  $\Delta P_{(w)}$  имеет форму зубчика. Причем максимальная величина зубчика достигается при  $t = \tau$ .

Согласно формуле (7.7) для величины зубчика можем записать

$$\Delta P_{(w)}(\tau) = \text{Zil}(0) \mathcal{F}q\tau^{1/4} \quad (7.8)$$

Эта формула по величине “зубчика”  $\Delta P_{(w)}(\tau)$  наблюдаемого при П-образном дебите определяет неизвестную величину проводимости трещин  $d_f k_f$ .

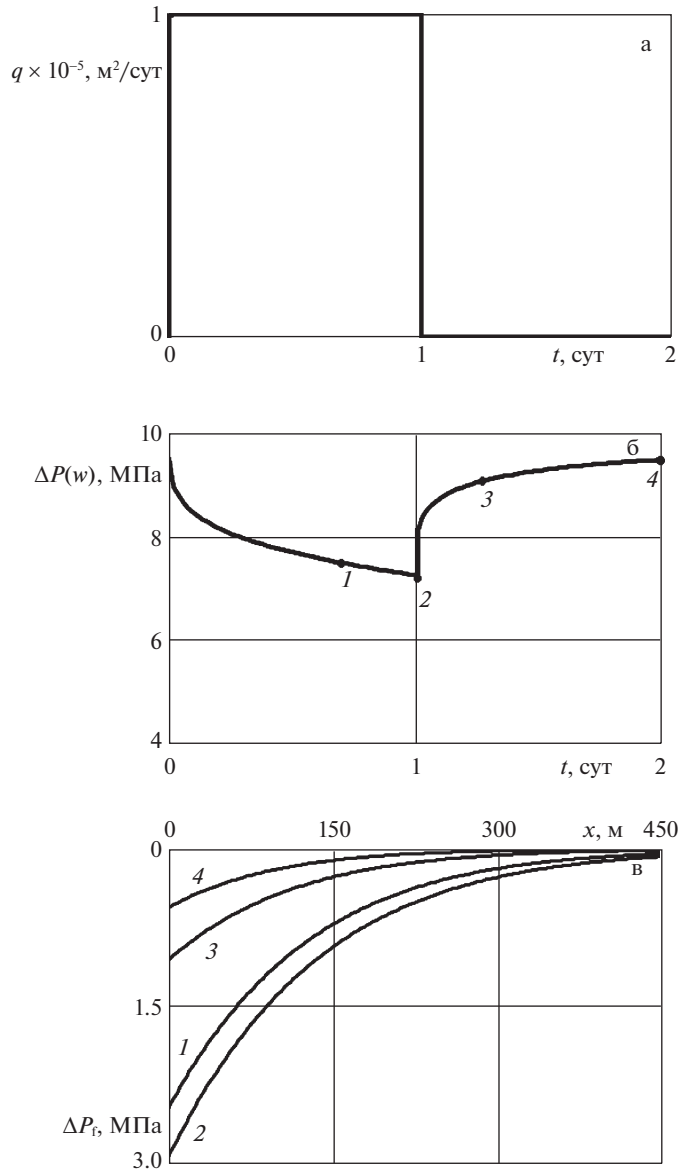
Действительно, из (7.8), учитывая выражение для  $\mathcal{F}$  из (3.3), получаем

$$\sqrt{d_f k_f} = -0.78 \frac{\mu^{\frac{3}{4}} \sqrt{C\rho^{\frac{1}{4}} q \tau^{\frac{1}{4}}}}{\sqrt[4]{m_p k_p \Delta P_{(w)}(\tau)}} \quad (7.9)$$

При положительном значении дебита ( $q > 0$ ) значения “зубчика” отрицательны, поэтому в правой части выражения (7.9) стоит знак минус.

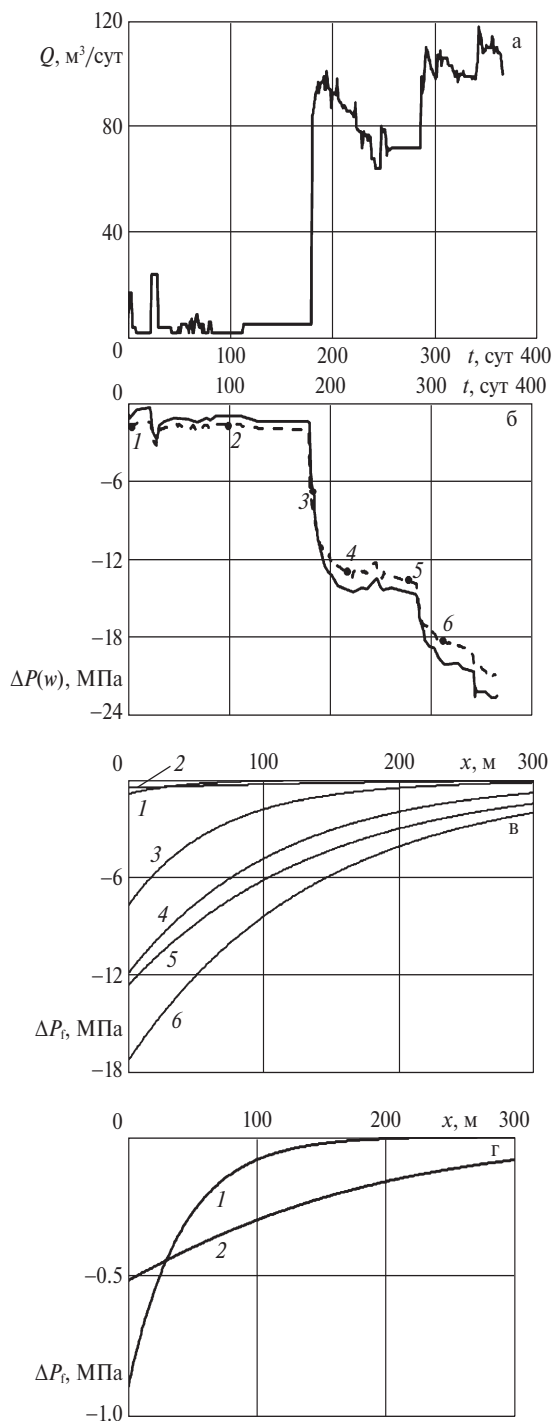
**8. Сравнение результатов численных расчетов с промысловыми данными.** На рис. 6а представлена кривая изменения дебита во времени для реальной промысловой сква-





**Рис. 5.** П-образное изменение дебита скважины на единицу высоты трещины – а; соответствующее изменение давления в скважине – б; распределение давления в трещине спустя (1 – 0.5, 2 – 1, 3 – 1.5, 4 – 2 сут) – в.

жины. Для параметров скважины и пласта использованы следующие данные:  $m_p = 0.17$ ,  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ ,  $\mu = 0.00115 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , высота трещины  $h = 18.3 \text{ м}$ . Кривая для дебита аппроксимировалась кусочно-постоянными значениями с интервалом  $\Delta t = 1 \text{ сут}$ . Видно, что в начальный период (примерно до 28 суток) скважина два цикла работала в режиме П-образного дебита с общим расходом  $Q_1^{(1)} = 17 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $Q_2^{(2)} = 2.4 \text{ м}^3/\text{сут}$ .



**Рис. 6.** Промысловый дебит — а; сопоставление давления: исходных промысловых данных (сплошная линия) и результатов вычислений (пунктирная линия) — б; давление в трещине спустя (1 — 2, 2 — 100, 3 — 185, 4 — 220, 5 — 280, 6 — 320 сут) согласно промысловым данным изменения дебита, приведенным на рис. 6б — в; фрагмент рис. 6в (1 — 2, 2 — 100 сут) — г.

Причем величины зубчиков для изменения давления составляют  $\Delta P_{(w)}^{(1)} = 1.26$  МПа (для  $\tau_1 = 4$  сут),  $\Delta P_{(w)}^{(2)} = 2.14$  МПа (для 29 сут).

Для практического применения запишем формулу (5.4) изменения давления на забое скважины в виде

$$\Delta P_{(w)} = -C_f \left[ Q_0 H(t) t^{\frac{1}{4}} + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (Q_i - Q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (8.1)$$

Здесь  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  – значения дебита скважины в моменты времени  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . При этом может быть выбрана любая единица измерения времени (часы, сутки) и дебита ( $\text{м}^3/\text{ч}$ ,  $\text{т}/\text{сут}$ ,  $\text{бар}/\text{сут}$ ). По величине первого “зубчика” определим величину  $C_f = \Delta P_{(w)}^{(1)} / \tau_1^{1/4}$ , которую при подстановке в формулу (8.1) можем использовать для определения изменения давления на скважине.

Согласно формуле (7.9) определяется проводимость трещины. В рассматриваемом примере  $d_f k_f = 2.2 \times 10^{-12} \text{ м}^3$ .

Проводились расчеты, согласно решению (5.4), для продолжительного этапа, который длился 365 суток. На рис. 6б сплошная линия давления соответствует промысловым значениям, а пунктирная линия – рассчитанным по формулам (5.4). На рис. 6в представлена эволюция давления в трещине, согласно решению (5.3). Линии 1, 2, 3, 4, 5 и 6 показывают распределение давления в трещине ГРП в моменты времени  $t = 2, 100, 185, 220, 280, 320$  сут, соответствующим различным характерным изменениям дебита скважины.

**Заключение.** Получены аналитические решения, описывающие эволюцию давления в трещине по известным законам изменения давления на забое скважины или дебита скважины. Эти решения позволяют получить кривые “дебит–давление на забое”. Наиболее важным результатом, представляется решение для П-образного изменения дебита: сопоставление кривых “дебит–давление на забое” с промысловыми данными, что позволяет оценить по величине “зубчика” на кривой давления проводимость трещины ГРП.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: ООО “Недра-Бизнесцентр”, 1999. 212 с.
2. Cinco-Ley H. Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // Int. Petrol. Exh. and Tech. Symp., Beijing (China). Mar 18–26, SPE 10043, 1982.
3. Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5 (345). С. 121–130.
4. Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
5. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14.
6. Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Фокеева Н.О. Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 3 (373). С. 117–127.

## Some Features of Fluid Filtration in a Hydraulic Fracture under Transient Conditions of Well Operation

R. A. Bashmakov<sup>a,b,#</sup>, N. O. Fokeeva<sup>a,##</sup>, and V. Sh. Shagapov<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup>*Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center RAS, Ufa, Russia*

<sup>b</sup>*Bashkir State University, Ufa, Russia*

<sup>#</sup>*e-mail: Bashmakov\_Rustem@mail.ru*

<sup>##</sup>*e-mail: ffoxnina@gmail.com*

<sup>###</sup>*e-mail: Shagapov@rambler.ru*

In this paper, analytic solutions of the equations system are obtained. The system of equations describes the pressure evolution in the hydraulic fracture during transient well operation modes. Options are considered: when the bottom hole pressure or the well flow rate changes and get piecewise constant value. These solutions are generalized for the case when the bottom pressure and the flow rate versus time are continuous functions. The solution makes it possible to determinate the flow rate or bottom hole pressure according to the given pressure change law in the bottom or well flow rate and, as well as pressure evolution in the hydraulic fracture. In special cases, for example, with П-shaped flow rate law change, the solutions obtained from comparing the field flow rate curves and bottom hole pressure make it possible to determine the conductivity of a hydraulic fracture.

*Keywords:* hydraulic fracturing, hydraulic fracture, oil well, fluid filtration, pressure evolution, flow rate, well testing

## REFERENCES

1. *Kanevskaya R.D.* Mathematical Modeling of Oil and Gas Field Development Using Hydraulic Fracturing. Moscow: OOO Nedra-Businesscenter, 1999. 212 p.
2. *Cinco-Ley H.* Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // SPE 10043 Petrol. Exh.&Techn. Symp., Beijing, China. Mar 18–26. 1982.
3. *Shagapov V.Sh., Nagaeva Z.M.* On the theory of seepage waves of pressure in a fracture located in a porous permeable medium // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2017, vol. 58, no. 5, pp. 862–870.
4. *Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh.* Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir // Appl. Mat. Mech., 2017, vol. 81, no. 3, pp. 214–222.
5. *Khabibullin I.L., Khisamov A.A.* Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture // Fluid Dyn., 2019; vol. 54, no. 5, pp. 594–602.
6. *Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Fokeeva N.O.* Fluid filtration in reservoirs subjected to hydraulic fracturing during transient well operation // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2022, vol. 63, no. 3, pp. 474–483.