СОДЕРЖАНИЕ

Применение наследственной формы определяющих соотношений вязкоупругости при описании процессов циклического высокотемпературного деформирования металлов

Г. З. Шарафутдинов 3

Влияние теплового расширения в неоднородном стационарном температурном поле на неоднородное напряженно-деформированное состояние тела из несжимаемого эластомера при статических конечных деформациях

Б. А. Жуков 17

Пространственная конструкция вида сильфон

Г. Т. Тарабрин 31

Анализ действия возмущений линейных резонансных систем с двумя степенями свободы

В. Ф. Журавлев, А. Г. Петров 42

Моделирование ледяного покрова при прогнозировании взаимодействия судов и морских сооружений со льдом

Е. М. Грамузов, Ю. А. Двойченко, В. А. Зуев, А. С. Себин 51

О пробивании слоистых структур твердым сферическим телом

Н. В. Баничук, С. Ю. Иванова, К. Ю. Осипенко 63

Управление динамикой составной конструкции со звеньями переменной длины

А. В. Борисов, И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов 72

Уравнение трогания поезда

И. П. Попов 88

Математическое моделирование амплитуды поперечных колебаний однородных стержней при продольном ударе

А. А. Битюрин 98

Анализ концентрации напряжений с контролируемой погрешностью в тонкостенных конструкциях (транспортно-пусковой стакан)

Ю. И. Виноградов 110

Задача оптимизации движения упругого следящего манипулятора

Г. А. Геворкян 124

О режимах авторотации двухроторной ветротурбины Дарье

М. З. Досаев, Л. А. Климина, Б. Я. Локшин, Ю. Д. Селюцкий, Е. С. Шалимова 133

Представление перемещений в пространственной гармонической задаче теории упругости с помощью двух винтовых векторов

Ю. Н. Радаев 148

О напряженно-деформированном состоянии стохастически неоднородной толстостенной трубы

Н. В. Минаева, Д. В. Сабынин 157

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 3–16

УДК 539.376

ПРИМЕНЕНИЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ФОРМЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ ЦИКЛИЧЕСКОГО ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ

© 2021 г. Г. З. Шарафутдинов

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
e-mail: sharaf@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 28.09.2020 г.
После доработки 04.10.2020 г.
Принята к публикации 11.10.2020 г.

Предложенная ранее кусочно-линейная форма определяющих соотношений связи между напряжениями и деформациями была применена к описанию процессов циклического высокотемпературного деформирования металлов и сплавов в областях линейной и нелинейной вязкоупругости. Исследовалось поведение двух сплавов: жаропрочного и жаростойкого сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С и дюралюминия Д16Т при температуре 150°С. Приводятся методики определения входящих в эти соотношения материальных функций и предела линейности по результатам экспериментальных исследований. Получены механические характеристики исследуемых сплавов и демонстрируется их применение при описании различных процессов деформирования, в том числе циклического деформирования в линейной и нелинейной областях при нагружении по кусочно-ступенчатому и синусоидальному законам.

Ключевые слова: высокотемпературное деформирование металлов, линейная и нелинейная вязкоупругость, одноосное растяжение стержней, кручение трубчатых образцов, циклическое деформирование

DOI: 10.31857/S0572329921010104

1. Введение. Хорошо известно, что металлы при повышенных температурах обладают свойством ползучести, при наличии которого в деформируемом материале развиваются необратимые вязкопластические деформации. Такие деформации не возникают изолированно; им предшествуют, начиная от исходного недеформированного состояния материалов, области упругого, линейно вязкоупругого и нелинейно вязкоупругого поведения. Наиболее адекватное описание процессов деформирования таких материалов, по мнению многих исследователей, изучавших эту проблему, возможно лишь при использовании определяющих соотношений связи между напряжениями и деформациями наследственного типа [1–6].

Определяющие соотношения наследственного типа, допускающие разделение процессов деформирования на указанные выше области и позволяющие корректно применять соответствующие им формы соотношений, предложены, в частности, в работе [7]. Основное достоинство такого подхода состоит не только в применении наследственных форм соотношений, представляющих собой альтернативу использованию дифференциальных форм определяющих соотношений при исследовании процессов

высокотемпературной ползучести металлов, но и в возможности ограничиться, при необходимости, определяющими соотношениями теории упругости, постепенно добавляя к ним, при увеличении деформирующих тело нагрузок и продолжительности их действия, соотношения линейной и нелинейной теории вязкоупругости и, наконец, теории вязкопластичности. Такой образ действий представляется оправданным, поскольку многие агрегаты и элементы конструкций функционируют при достаточно низких уровнях нагрузок, да и к тому же, не во всех конструкциях (например, в двигателях, турбинах и др.) допускаются необратимые пластические деформации.

Поскольку срок службы такого рода агрегатов и конструкций, как правило, достаточно высок, а их функционирование зачастую сопровождается вибрацией или какого-либо иного рода колебаниями, возникает необходимость их учета, наряду с действием других постоянных или изменяющихся во времени нагрузок. В связи с этим возникают два вида проблем; первая из них связана с разработкой способов описания процессов циклического деформирования металлов при высоких температурах, вторая – с разработкой методов и способов описания процессов сложного нагружения при совместном действии не связанных между собой нагрузок, в том числе, и различной природы.

Заметим также, что циклическое деформирование металлов, тем более при высоких температурах, зачастую происходит при относительно низких уровнях напряжений, в силу чего изучение и разработку методик описания процессов циклического деформирования в подобных ситуациях следует начинать, по нашему мнению, с применения наследственных форм определяющих соотношений линейной, а затем и нелинейной вязкоупругости. Полезность такого подхода, с методической точки зрения, очевидна, как и то, что эта проблема, наряду с перечисленными здесь другими проблемами, актуальна, и именно она будет предметом дальнейшего изложения.

2. Изучение процессов деформирования сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С. Коррозионностойкий, жаростойкий и жаропрочный сплав ХН55МВЦ (другие его обозначения – ХН55МВЦ-ВИ, ЧС57, ЧС57У-ВИ, ЧС57-ВИ) имеет широкое применение, поскольку может быть использован в нагруженном состоянии, и при высоких температурах, и в химически активных средах. Эксплуатационные свойства сплава ХН55МВЦ: диапазон температур – до 1100°С; модуль упругости 120000–210000 МПа; предел прочности – 230–485 МПа; предел текучести – 127–170 МПа; относительное удлинение – 42–58%; относительное сужение – 53–82%.

На рис. 1, на котором по оси абсцисс отложено время t (здесь и далее, на всех рисунках, – в часах), а по оси ординат – деформация ε, результаты экспериментального исследования процесса ползучести сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С, полученные в работе [8] при ступенчатом нагружении стержней для уровня напряжения 20 МПа, отмечены крестиками.

Предел текучести сплава ХН55МВЦ при температуре 900°С равен 163 МПа, что существенно выше действующего напряжения (20 МПа), а мгновенная деформация ограничена значением 0.0001–0.00015. По этой причине и в силу низкого уровня нагрузки заключаем, что деформирование производится в линейной области. При этом определяющее соотношение связи между напряжением σ и деформацией ε запишем в виде

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau) \tag{2.1}$$

где t – время, $\Pi(t)$ – функция ползучести. Заметим, что стандартная процедура определения линейной области поведения вязкоупругого материала предусматривает проведение серии экспериментов при различных уровнях нагрузки в окрестности нуля и установления на этой основе границ области, при переходе которой происходит нарушение условий однородности и аддитивности поведения материала. Такая граница

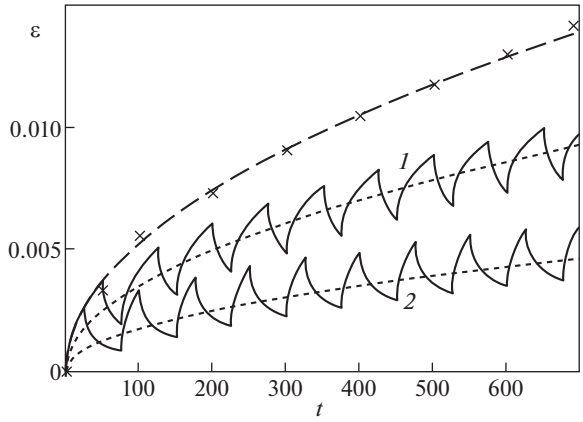

Рис. 1

как раз и позволяет выделить область линейного поведения материала, в которой справедливо применение соотношения (2.1). Именно отсутствие результатов достаточно подробных экспериментальных исследований такого рода вынуждают искать альтернативные пути, в силу чего в данном случае линейная функция ползучести была определена по единственной диаграмме ползучести, полученной при низком, относительно значения предела текучести, действующем напряжении.

Поскольку тарировочные эксперименты в работе [8] производились при ступенчатом приложении напряжения, т.е. при

$$\sigma(t) = \sigma_0 h(t) \tag{2.2}$$

где $h(t)$ – функция Хевисайда, то из приведенных в этой работе экспериментальных данных при помощи соотношения (2.1) легко находим линейную функцию ползучести:

$$\Pi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}$$

Ее график – на рис. 2. Из приведенных выше данных можно заключить, что $\Pi(0) < 10^{-5}$, в силу чего при практическом использовании функции ползучести будем считать, что $\Pi(0) = 0$; при этом аппроксимируем ее выражением

$$\Pi(t) = 2.63 \times 10^{-5}\sqrt{t} \tag{2.3}$$

Диаграмма ползучести, рассчитанная с использованием выражения (2.3), при нагружении по закону (2.2) при значении $\sigma_0 = 20$ МПа, представлена штриховой линией на рис. 1.

На рис. 1 приведены также диаграммы ползучести материала для двух случаев циклического нагружения. Они были получены при помощи соотношения (2.1), в котором закон изменения напряжения принимался в виде

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sum_{k=0}^{n} [h(t - t_{2k}) - h(t - t_{2k+1})]$$

$$t_{2k} = 0 + 75k; \quad t_{2k+1} = 50 + 75k, \quad k = 0,1,2,\ldots \text{ в первом случае и} \tag{2.4}$$

$$t_{2k} = 0 + 75k; \quad t_{2k+1} = 25 + 75k, \quad k = 0,1,2,\ldots \text{ – во втором.}$$

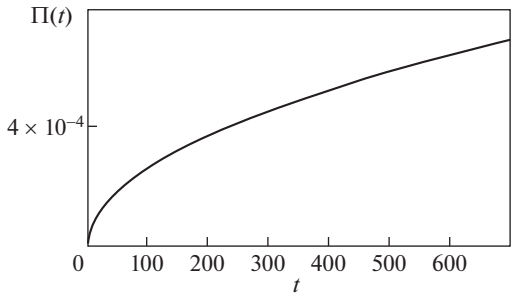

Рис. 2

На начальном этапе нагружения, при $t \leq 25$ ч, в обоих случаях деформации определяются одним и тем же значением σ_0, но далее различаются длительностями пауз нагрузки и разгрузки: в первом случае они равны 50 ч и 25 ч, во втором – 25 ч и 50 ч соответственно. Используя понятие "эффективное напряжение" из электротехники применительно к механике деформируемого тела, эффективное (механическое) напряжение определим соотношением

$$\sigma_{ef}^{(1)} = 2\sigma_0/3 \tag{2.5}$$

в первом случае и соотношением

$$\sigma_{ef}^{(2)} = \sigma_0/3 \tag{2.6}$$

– во втором. Диаграммы циклического деформирования для первого и второго случаев, при законе нагружения (2.4) для случая $\sigma_0 = 20$ МПа, на рис. 1 отмечены цифрами *1* и *2* соответственно. Следует отметить, что полученные здесь расчетные диаграммы циклического деформирования отражают основные особенности экспериментальной диаграммы циклического деформирования, полученной в [8] при реализации закона нагружения (2.4). Обозначенные выше как эффективные, диаграммы ползучести, полученные при помощи соотношения (2.1), в случае реализации законов нагружения (2.5) и (2.6) при $\sigma_0 = 20$ МПа, представлены пунктирными линиями, наложенными на соответствующие диаграммы циклического деформирования.

Из приводимых на рис. 1 данных видно, что эффективные диаграммы ползучести ни в чем не противоречат линейному закону деформирования, выражаемому соотношением (2.1), полностью удовлетворяя условиям однородности и аддитивности – свойствам, присущим линейным операторам. По нашему мнению, эффективные диаграммы ползучести в некоторых случаях, путем проверки выполнения условий однородности и/или аддитивности, могут быть полезными для контроля результатов исследований.

Рассчитаем теперь диаграммы циклического деформирования исследуемого сплава при перемене знака прикладываемого напряжения. Рассмотрим сначала ступенчатое изменение прикладываемой нагрузки. Будем считать, что закон изменения напряжения, обеспечивающего одноосное растяжение-сжатие стержня, задается соотношением

$$\sigma(t) = \sigma_0[h(t - t_0) - 2h(t - t_1) + 2h(t - t_2) - 2h(t - t_3) + \cdots] \tag{2.7}$$

где $t_k = 0 + 50k$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. Подставляя (2.7) при заданном значении $\sigma_0 = 20$ МПа в определяющее соотношение (2.1), получим кривую деформирования, представленную сплошной линией на рис. 3.

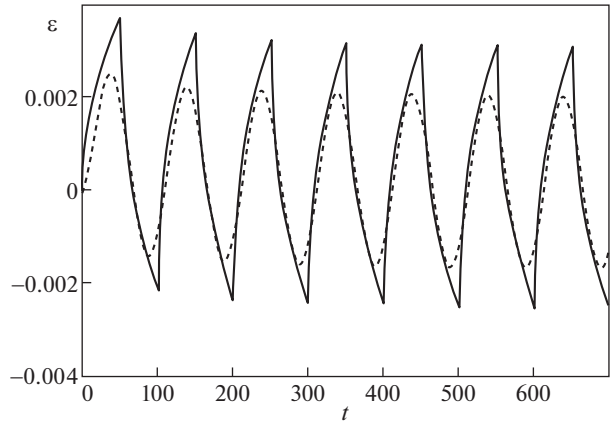

Рис. 3

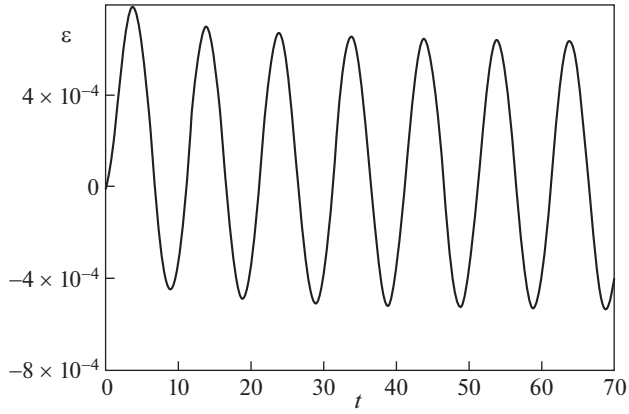

Рис. 4

На этом же рисунке пунктирной линией представлена диаграмма деформирования, полученная путем интегрирования соотношения (2.1) после подстановки в него синусоидально изменяющейся нагрузки

$$\sigma(t) = 20\sin\alpha t$$

где $\alpha = 2\pi/100$. Применение этого же закона нагружения для случая $\alpha = 2\pi/10$ приводит к кривой деформирования на рис. 4. Следует обратить внимание на существенное различие амплитуд, полученных при одном и том же значении действующего напряжения, кривых деформирования, представленных на рис. 3 и 4. Нетрудно понять, что причина этого состоит в изменении длительности периода колебаний напряжения и, по нашему мнению, объясняется свойством наследственности используемой формы определяющего соотношения, но не эффектами упрочнения или разупрочнения материала, тем более, деформируемого в линейной области его поведения.

3. Изучение процессов ползучести при циклическом кручении тонкостенных трубчатых образцов. Для изучения процессов деформирования в более сложном случае – при

прямом и обратном кручении тонкостенных трубчатых образцов в области линейного и нелинейного вязкоупругого поведения обратимся к результатам экспериментальных исследований по кручению тонкостенных трубок, выполненных из алюминиевого сплава Д16Т, при температуре 150°С [9].

Использованный в работе [9] материал был взят в состоянии поставки – в закаленном и естественно состаренном состоянии. При этом, исходя из широко представленных в сети справочных и рекламных материалов, примем следующие упругие характеристики сплава Д16Т для температуры 150°С: модуль упругости $E = 68200$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$. Нетрудно определить модуль сдвига $G = 25600$ МПа. Типичные предельные характеристики сплава Д16Т: предел прочности при растяжении $\sigma_B = 410–440$ МПа, предел текучести $\sigma_{0.2} = 280–300$ МПа.

Эксперименты в работе [9] проводились на трубчатых образцах с внешним диаметром 15.5 мм, внутренним – 14 мм и рабочей частью длиной 100 мм. Эксперименты выполнялись по следующей программе. К образцу прикладывался крутящий момент, создающий напряжение $\sigma = \mathrm{const}$, где σ представляет собой касательное напряжение $\sigma_{\vartheta z}$ (в цилиндрической системе координат $r\vartheta z$), удерживаемое на постоянном уровне в течение 50 ч. Затем образец разгружался, после чего нагружался таким же по величине, но обратным по направлению крутящим моментом, создающим в образце напряжение $-\sigma = \mathrm{const}$, и испытывался еще 50 ч.

Для анализа вязкоупругих характеристик деформируемого материала в настоящей работе были использованы результаты экспериментов [9], полученных при деформировании образцов с номерами 19, 7, 10, 4 и 16, при значениях напряжения σ, равных 101.1; 115.6; 130; 140 и 147.4 МПа соответственно. Припишем этим экспериментам последовательные номера от 1 до 5 и будем нумеровать ими, при необходимости, величины и графические данные, относящиеся к каждому из этих экспериментов.

Исходная экспериментальная информация – диаграммы ползучести во временном промежутке от 0 до 50 ч, приведены в работе [9] без учета мгновенной упругой деформации. Ее величина определяется путем деления действующего напряжения на $2G$: $\varepsilon_k(0) = \sigma_k/2G$, $k = 1, 2, \ldots, 5$. Эти величины, в сумме с конкретными значениями экспериментально полученных диаграмм ползучести для моментов времени $t = 0$; 2; 6; 10; 14; 20; 30; 40 и 50 чприведены на рис. 5. Здесь они обозначены крестиками, расположенными около сплошных кривых диаграмм ползучести, которые в представленном виде были получены далее расчетным путем; кривые и крестики обозначены номерами *1–5* в соответствии с принятым выше соглашением. Таким образом, будем исходить из того, что имеются наборы (крестики) дискретных значений экспериментально полученной деформации для пяти разных уровней напряжений, обозначенных соответствующими номерами.

Основная задача, возникающая в подобных случаях при использовании определяющих соотношений наследственного типа, состоит в определении необходимых функций ползучести и предельных параметров [7]. В первую очередь необходимо определить линейную функцию ползучести. Наиболее просто это можно сделать, ориентируясь на выполнение условий однородности и аддитивности. В частности, много полезной информации, на наш взгляд, можно получить из анализа отношений деформаций ε, полученных в экспериментах на ползучесть к ступенчато задаваемому напряжению σ: $p = \varepsilon/\sigma$. Эти величины для пяти указанных значений напряжений приведены на рис. 6, на котором экспериментальные данные, относящиеся к эксперименту № 1 обозначены крестиками, № 2 – знаками плюс, № 3 – квадратиками, № 4 – ромбиками и № 5 – кружками. Непосредственно из этого рисунка можно заключить следующее: в первую очередь, необходимо было бы провести дополнительные исследования, может быть, несколько экспериментов при значении напряжения $\sigma < \sigma_1$, результаты которых позволили бы установить область, в которой выполняются условия

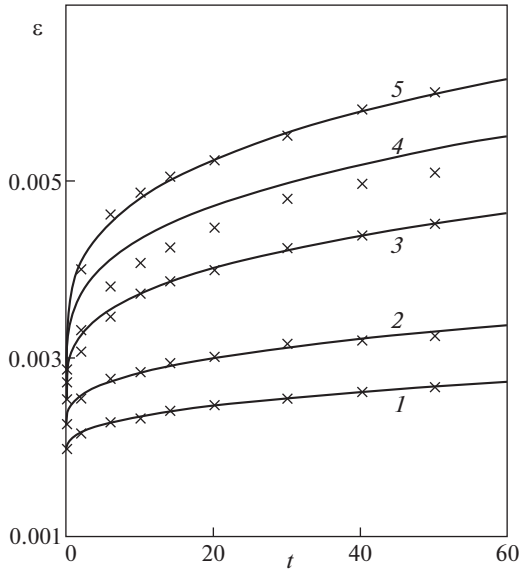

Рис. 5

однородности и аддитивности и, используя эту информацию, найти линейную функцию ползучести.

Другой важный момент связан с выбором используемых форм определяющих соотношений. Действительно, из рис. 5 легко устанавливается необходимость применения нелинейных форм соотношений. Вместе с тем, легко устанавливается также и ограничение: поскольку предел текучести сплава Д16Т при указанной температуре равен, по крайней мере, 280 МПа, а максимальное значение используемого в экспериментальных исследованиях напряжения $\sigma_5 = 147.4$ МПа, можно заключить, что в данном случае достаточно ограничиться соотношениями нелинейной теории вязкоупругости.

В работе [7] предложены практически равноценные между собой компакт-форма и кусочно-линейная форма определяющих соотношений нелинейной теории вязкоупругости. Там же подробно рассматривается процедура их применения; по этой причине на этих вопросах здесь останавливаться не будем. Для определенности выберем соотношения кусочно-линейной теории вязкоупругости. Применительно к нашему случаю такое соотношение примет вид:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau) + \int_0^t \Pi_1(t-\tau)d[\sigma(\tau) - \sigma^{(1)}] \tag{3.1}$$

где под ε в данном случае будем понимать компоненту тензора (девиатора) деформации $\varepsilon_{\vartheta z}$ $(e_{\vartheta z})$, а под σ – компоненту девиатора напряжений $s_{\vartheta z}(\tau)$, $\sigma^{(1)}$ – предел линейности, $\Pi(t)$ – линейная функция ползучести, $\Pi_1(t)$ – нелинейная функция ползучести.

Линейная функция ползучести определяется в линейной области поведения деформируемого материала, устанавливаемой по выполнению условий однородности и аддитивности, при помощи первого слагаемого в правой части соотношения (3.1) при задании действующего постоянного напряжения с помощью функции Хевисайда $h(t)$: $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$. Как правило, при достаточно широком наборе экспериментальных данных при наиболее низких значениях напряжения σ_0 несколько диаграмм ползучести,

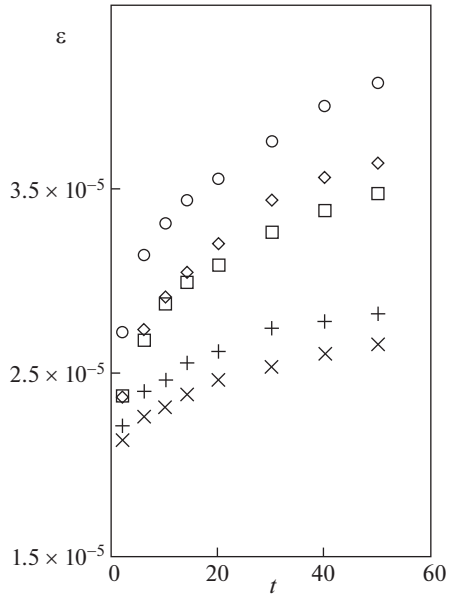

Рис. 6

будучи поделенными, как это следует из соотношения (2.1), на σ_0, совпадут, что сразу же и определяет линейную функцию ползучести:

$$\Pi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \tag{3.2}$$

В нашем случае, как это следует из рис. 6, такого не происходит, и поэтому следовало бы провести несколько экспериментов при значениях $\sigma_0 < 101.1$ МПа. Поскольку это невозможно, предложим несколько иной путь. В силу незначительного отклонения диаграммы *2* от диаграммы *1* на рис. 5 можно предположить, что диаграмма *1* позволяет установить линейную функцию ползучести, что мы и проверим, приняв это предположение. С этой целью, используя диаграмму *1*, при помощи соотношения (3.2) определим линейную функцию ползучести; она представлена на рис. 7. Здесь кривая, построенная по экспериментальным данным, отмечена крестиками, сплошная линия иллюстрирует ее аналитическую аппроксимацию

$$\Pi(t) = 1.95\times10^{-5} + 1.48\times10^{-6}t^{0.4} \tag{3.3}$$

Определим теперь нелинейную функцию ползучести $\Pi_1(t)$ [7]. Для этого возьмем экспериментальные данные – значения диаграмм ползучести *3* и *5*, представленные на рис. 5 крестиками с соответствующими номерами. Из соотношения (3.1) имеем

$$\Pi_1(t)[\sigma_0 - \sigma^{(1)}] = \varepsilon(t) - \Pi(t)\sigma_0$$

Тогда при помощи выбранных диаграмм ползучести получим систему уравнений:

$$\Pi_1(t)[\sigma_3 - \sigma^{(1)}] = \varepsilon_3(t) - \Pi(t)\sigma_3 \tag{3.4}$$

$$\Pi_1(t)[\sigma_5 - \sigma^{(1)}] = \varepsilon_5(t) - \Pi(t)\sigma_5 \tag{3.5}$$

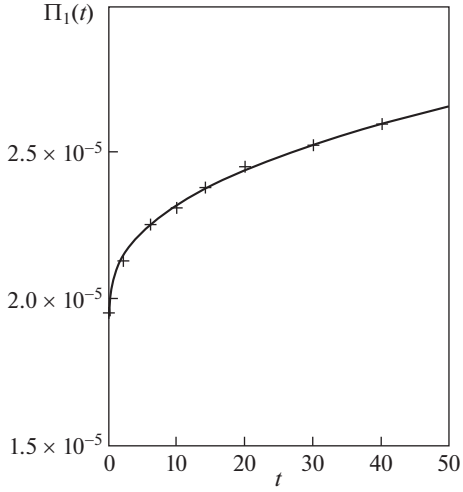

Рис. 7

Разделив первое из этих уравнений на второе, получим уравнение

$$\frac{\sigma_3 - \sigma^{(1)}}{\sigma_5 - \sigma^{(1)}} = \frac{\varepsilon_3(t) - \Pi(t)\sigma_3}{\varepsilon_5(t) - \Pi(t)\sigma_5}$$

Из него находим выражение для предела линейности $\sigma^{(1)}$:

$$\sigma^{(1)} = \frac{\sigma_3 - A\sigma_5}{1 - A}, \quad A = \frac{\varepsilon_3(t) - \Pi(t)\sigma_3}{\varepsilon_5(t) - \Pi(t)\sigma_5}$$

Его значения для фиксированных моментов времени в промежутке от 10 до 50 ч изменяются в пределах от 110.3 до 112.7 МПа, в силу чего принимаем $\sigma^{(1)} = 111.5$ МПа. Нелинейная функция ползучести $\Pi_1(t)$ может быть получена, как при помощи уравнения (3.4), так и при помощи уравнения (3.5). Расчетные, определенные по результатам экспериментов, значения нелинейной функции ползучести $\Pi_1(t)$ в фиксированные моменты времени отмечены крестиками на рис. 8. Сплошной линией здесь представлен график ее аналитической аппроксимации:

$$\Pi_1(t) = 2.17 \times 10^{-5}\sqrt[4]{t} \tag{3.6}$$

Таким образом, нами получены функции линейной и нелинейной ползучести $\Pi(t)$, $\Pi_1(t)$ соответственно и предел линейности $\sigma^{(1)} = 111.5$ МПа, что позволяет, используя соотношение (3.1), построить и сравнить расчетные и экспериментальные диаграммы ползучести для значений напряжения σ, равных 101.1; 115.6; 130; 140 и 147.4 МПа. Дискретные значения экспериментальных диаграмм отмечены крестиками на рис. 5, расчетные – приведены в виде сплошных линий. Отметим хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных всех диаграмм, за исключением диаграммы *4*. Следует отметить, однако, что, судя по данным, представленным на рис. 6, этот эксперимент нельзя признать удачным. Таким образом, предположение о возможности использования диаграммы ползучести *1* для определения линейной функции ползучести справедливо.

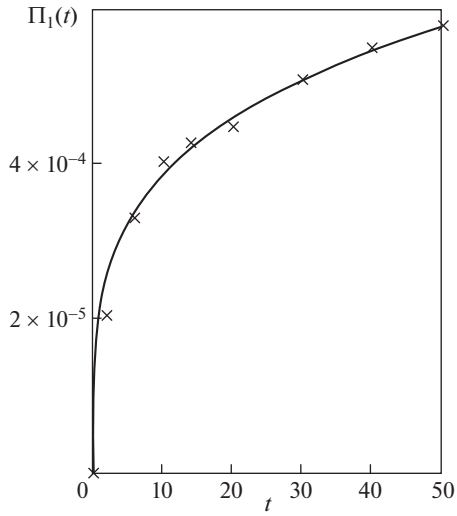

Рис. 8

Обратимся теперь ко второй части эксперимента, в ходе которой нагруженный трубчатый образец разгружался, а затем нагружался в промежутке времени от 50 до 100 ч таким же по величине, но обратным по направлению постоянным крутящим моментом. При этом, для обратного кручения время отсчитывается от момента, когда напряжение меняет знак [9]. В этой работе приведены диаграммы ползучести при обратном кручении для экспериментов, обозначенных нами номерами *2–5*. Диаграмма ползучести при обратном кручении под номером *1* на этой стадии эксперимента представлена только небольшим начальным участком, в силу чего она была исключена из рассмотрения и на рис. 9 представлены только экспериментальные значения деформаций, полученные во втором, третьем, четвертом и пятом экспериментах; они отмечены соответственно кружочками, крестиками, квадратиками и плюсиками.

Для получения расчетных диаграмм ползучести при обратном кручении обратимся к определяющему соотношению (3.1). Из структуры этого соотношения видно, что функции ползучести и предел линейности должны быть непосредственно определены в ходе прямых экспериментов в промежутке времени от 0 до 100 ч. Поскольку скоро этого в экспериментах в [9] сделано не было, предположим, что полученные аппроксимации функций ползучести достоверны во всем указанном промежутке времени. Кроме того, обратим внимание на то, что состояние нагрузки при обратном кручении в данном случае достигается заданием постоянного напряжения $-2\sigma_0$ при $t \geq 50$ ч. Тогда, в соответствии со сделанным предположением, при продолжении нагружения при $t > 50$ ч в данном случае имеем:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau) + \int_0^t \Pi_1(t-\tau)d[\sigma(\tau) - \sigma^{(1)}] -$$
$$- 2\int_{50}^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau) - 2\int_{50}^t \Pi_1(t-\tau)d[\sigma(\tau) - \sigma^{(1)}]$$

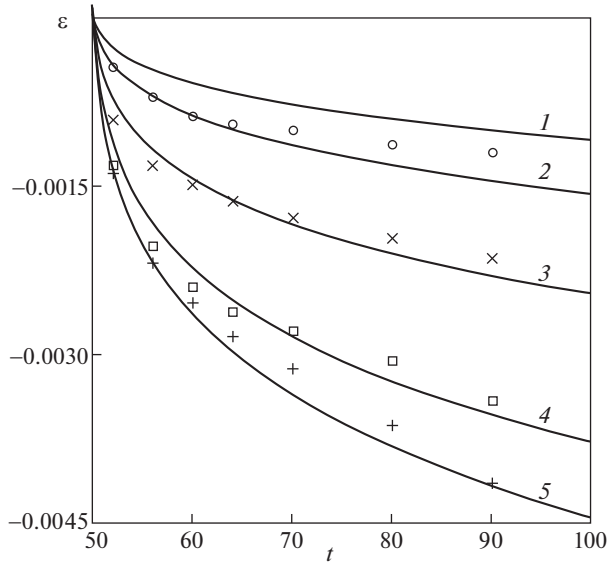

Рис. 9

Расчетное соотношение, в котором используются выражения (3.3) и (3.6), при учете задания напряжений при помощи функции Хевисайда, примет вид

$$\varepsilon(t) = \Pi(t)\sigma_0 + \Pi_1(t)[\sigma_0 - \sigma^{(1)}] - 2\{\Pi(t-50)\sigma_0 + \Pi_1(t-50)[\sigma_0 - \sigma^{(1)}]\}\,h(t-50) \qquad (3.7)$$

Следует отметить, нами были учтены замечания автора работы [9] о том, что обратное кручение в третьем эксперименте производилось при напряжении $|\sigma| = 122.2$ МПа вместо положенных 130 МПа и отсчет времени при обратном кручении начинался с того момента, когда напряжение меняет знак.

Полученные при обратном кручении экспериментальные данные также очень полезны для анализа применения различных форм определяющих соотношений при высокотемпературном деформировании металлов. Здесь они характеризуют только деформации ползучести, развивающиеся в трубчатом образце после перемены знака, без учета мгновенной упругой деформации. Это следует из того, что представленные в работе [9] диаграммы ползучести при обратном кручении начинаются с нуля, что и указывает на отсутствие мгновенных деформаций.

Соотношение (3.7) предполагает начало отсчета обратного кручения строго при $t = 50$ ч. Однако в реальном эксперименте реверс займет некоторое время; для определенности примем эту величину равной 5–6 мин. Таким образом, при расчете деформаций ползучести при обратном кручении начало отсчета времени примем равным 50.1 ч.

Как уже указывалось выше, использованные нами эксперименты, обозначенные номерами *1–5* соответственно, производились при значениях напряжения σ, равных 101.1; 115.6; 130; 140 и 147.4 МПа. При этом в первом эксперименте деформации ползучести при обратном кручении не определялись и сравнение экспериментальных и расчетных величин в этом случае не производилось. На рис. 9 сплошными кривыми под номерами *1–5* обозначены расчетные диаграммы ползучести для всех указанных случаев нагружения, однако экспериментальные данные приведены только для второго и последующих экспериментов.

Одним из важных приложений применения интегральных форм определяющих соотношений наследственного типа, несомненно, следует признать возможность их использования при описании процессов циклического деформирования, не связывая форму определяющих соотношений с видом используемого при их получении и в тарировочных испытаниях закона нагружения. Такие процессы характерны, по нашему мнению, для длительно работающих элементов конструкций. При этом наибольший интерес представляет область линейного вязкоупругого деформирования. Заметим, что нельзя исключать возможность их работы и в области нелинейного вязкоупругого деформирования, особенно в тех случаях, когда это связано с повышением эффективности работы различного рода двигателей, турбин и т.п. Наиболее важно – не допускать появления необратимых вязкопластических деформаций, не исчезающих после снятия нагрузок.

Продемонстрируем процедуру применения соотношений указанного типа, основываясь на определенных выше механических характеристиках алюминиевого сплава Д16Т при температуре 150°С. В качестве примеров рассмотрим два вида нагрузок: напряжения изменяются циклически, ступенчато и по синусоидальному закону с амплитудой 100 МПа в линейном случае и 200 МПа – в нелинейном, с периодом 10 ч. Исходя из этого, временной интервал исследования ограничим 15 ч.

Ступенчатая нагрузка задается так: при $t = 0^+$ она выводится на уровень 100 (200) МПа и удерживается на нем в течение 5 ч. Затем задается удвоенное отрицательное напряжение, в результате чего действующее напряжение становится равным –100 (–200) МПа и на таком уровне оно удерживается в промежутке от 5 до 10 ч. Далее, в промежутке от 10 до 15 ч напряжение выводится и удерживается на уровне 100 (200) МПа и т.д. Синусоидальная нагрузка задается законом

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\alpha t) \tag{3.8}$$

где величина σ_0 равна 100 МПа в первом случае или 200 МПа – во втором, а $\alpha = 2\pi/10$.

Исходя из условий приложения нагрузки, при ступенчатом нагружении в линейном случае ($\sigma_0 = 100$ МПа) имеем

$$\varepsilon(t) = \sigma_0[\Pi(t) - 2\Pi(t-5) + 2\Pi(t-10)] \tag{3.9}$$

в нелинейном же задаем $\sigma_0 = 200$ МПа, и тогда

$$\begin{gathered}\varepsilon(t) = \sigma_0[\Pi(t) - 2\Pi(t-5) + 2\Pi(t-10)] + \\ + (\sigma_0 - \sigma^{(1)})[\Pi_1(t) - 2\Pi_1(t-5) + 2\Pi_1(t-10)]\end{gathered} \tag{3.10}$$

Графики зависимостей (3.9) и (3.10) представлены на рис. 10 пунктирной и штрихпунктирной кривыми соответственно.

Расчетная зависимость деформаций от напряжений при нагружении по закону (3.8) в линейном случае примет вид:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \int_0^t \Pi(t-\tau) d[\sin(\alpha\tau)]$$

Ее график представлен штриховой линией на рис. 10. Существенно более сложный вид имеет зависимость деформации от напряжения при использовании соотношения (3.8) в нелинейном случае, которую, при учете принятых предположений, представим в виде:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \int_0^t \Pi(t-\tau) d[\sin(\alpha\tau)] + F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$$

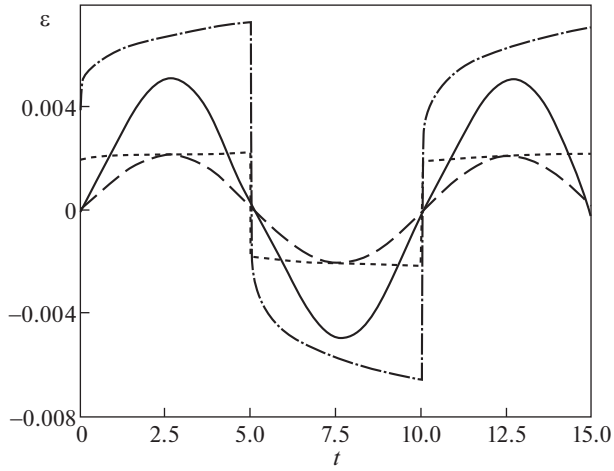

Рис. 10

В этом соотношении напряжению σ_0 в рассматриваемом случае придается значение 200 МПа, и

$$F_i(t) = \int_{t_i}^{T_i} \Pi_1(t-\tau)d[\sigma_0 \sin(\alpha\tau) - \sigma^{(1)}], \quad i = 1,2,3 \tag{3.11}$$

Значение времени t_i определяет нижний предел соответствующего интеграла в (3.11), а T_i – его верхний предел. Значение t_i представляет собой момент, при котором текущее напряжение совпадает с пределом линейности. Эта величина определяется из уравнения $\sin \alpha t = \sigma^{(1)}/\sigma_0$. При учете значений $\sigma^{(1)} = 111.5$ МПа, $\sigma_0 = 200$ МПа и $\alpha = 2\pi./10$, находим $t_1 = 0.941$ ч. Нетрудно видеть, что $t_2 = (5 + t_1)$ ч и $t_3 = (10 + t_1)$ ч. Верхние пределы интегралов в соотношении (3.11), в силу симметрии кривой изменения напряжения, следовало бы определить значениями $T_1 = (5 - t_1)$ ч, $T_2 = (10 - t_1)$ ч и $T_3 = (15 - t_1)$ ч. Однако в этом случае общая диаграмма ползучести, представленная сплошной линией на рис. 10, имеет разрывы по деформациям. Установлено, что разрывы по деформациям устраняются, если верхние пределы интегрирования принять равными: $T_1 = (5 - t_1/2)$ ч, $T_2 = (10 - t_1/2)$ ч и $T_3 = (15 - t_1/2)$ ч, что и было сделано при расчетах. Заметим, что в этом также проявляются эффекты наследственности используемой формы определяющих соотношений.

4. Заключение. Исходя из вышеизложенного, можно сделать следующие выводы:

1. При использовании наследственной формы определяющих соотношений желательно проведение экспериментальных исследований, пусть даже в незначительном объеме, во всех областях поведения деформируемого материала.

2. Наследственные формы определяющих соотношений вязкоупругости, как и аналогичные формы определяющих соотношений вязкопластичности, будучи определенными с использованием задаваемой при помощи функции Хевисайда ступенчатой функции, могут быть использованы для описания процессов деформирования, происходящих при любом законе нагружения.

3. Существенную зависимость амплитуды деформаций линейного вязкоупругого материала в процессах циклического нагружения, при значительно меньшей предела текучести величине действующего напряжения, от длительности цикла, следует отне-

сти к проявлению наследственного эффекта определяющих соотношений Вольтерра, не имеющего, по нашему мнению, никакого отношения к упрочнению или разупрочнению деформируемого материала.

Работа выполнена при частичном финансировании проекта РФФИ № 17-08-00210.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Ржаницин А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат. 1968. 416 с.
4. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
5. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
6. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
7. *Шарафутдинов Г.З.* Применение кусочно-аналитической и кусочно-линейной форм определяющих соотношений наследственного типа при исследовании ползучести металлов // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 27–38.
8. *Dushin .A., Gribov N.N., Ignatov V.A., Medvedev N.A.* Structure-stable alloy for structural components of the high-temperature gas-cooled reactor with temperature at 900°C // Energy. 1991. V. 16. № 1/2. P. 317–326.
9. *Наместников В.С.* Прямое и обратное кручение в условиях ползучести // ПМТФ. 1960. № 1. С. 121–122.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 17–30

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ НА НЕОДНОРОДНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО ЭЛАСТОМЕРА ПРИ СТАТИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

© 2021 г. Б. А. Жуков[a,b,*]

[a] *Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия*
[b] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*
**e-mail: zhukov.b.a@gmail.com*

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.
После доработки 20.10.2019 г.
Принята к публикации 21.10.2019 г.

Предложена модификация постановки задачи статики однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, учитывающая тепловое расширение. Рассмотрено влияние теплового расширения в неоднородном стационарном температурном поле на неоднородное напряженно-деформированное состояние тела на примере цилиндрической втулки, подвергнутой конечному продольному сдвигу. Исследовано влияние неоднородного поля температур на напряженно-деформированное состояние в поперечной плоскости цилиндрической втулки, порожденное как конечным продольным сдвигом, так и тепловым расширением.

Ключевые слова: термомеханика, тепловое расширение неоднородное, температурное поле, конечные деформации, гиперупругость, несжимаемость, продольный сдвиг

DOI: 10.31857/S057232992101013X

1. Введение. Будем описывать конечную деформацию с помощью тензора градиента деформации **F**, задаваемого выражением

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \tag{1.1}$$

Здесь **r** и **R** – векторы места точек тела в деформированной и недеформированной (отсчетной) конфигурациях соответственно. Точка означает скалярное произведение (свертку по одному тензорному индексу). В чисто механической теории нелинейной гиперупругости однородного изотропного материала выделяется класс несжимаемых материалов, для которых

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \tag{1.2}$$

а тензор напряжений Коши **S** определяется выражением [1, 2]

$$\mathbf{S} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + \gamma\mathbf{1}\right) \tag{1.3}$$

где **1** – единичный тензор; $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ – левый тензор деформации Коши–Грина [2] (в [1] это мера деформации Фингера), значок ^{T} обозначает транспонирование; $W = W(I_1, I_2)$ – удельная энергия упругой деформации (потенциал энергии деформа-

ции), отнесенная к единице объема отсчетной конфигурации; $I_1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{B}$, $I_2 = 1/2(I_1^2 - \mathbf{1} \cdot \cdot \mathbf{B}^2)$ – главные алгебраические инварианты тензора $\mathbf{B}$; γ – функция гидростатического давления (аддитивная часть напряжения, неопределяемая деформацией).

При изменении температуры все тела, независимо от того сжимаемые они или несжимаемые изотермически, подвергаются тепловому расширению, и для несжимаемых тел уравнения (1.2) и (1.3) не имеют места. Необходимо выражения (1.2) и (1.3) модифицировать так, чтобы учесть тепловое расширение, а в случае отсутствия теплового воздействия новые выражения должны редуцироваться к старым.

Существует довольно обширный список работ, в которых эта задача решалась тем или иным способом. В первой серии работ тепловое расширение выделяется из общей деформации. В работах [3–5] предлагается мультипликативное разложение тензора градиента деформации

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi}_\theta \cdot \mathbf{\Phi}_E \tag{1.4}$$

причем $\mathbf{\Phi}_\theta = g(\theta)\mathbf{1}$ – шаровой тензор, описывающий тепловое расширение в термически изотропных телах, а $\mathbf{\Phi}_E$ – тензор, описывающий упругую составляющую деформации, и для несжимаемых тел $\det \mathbf{\Phi}_E = 1$. Здесь $g(\theta)$ некоторая монотонная функция приращения температуры $\theta = T - T_0$, где T – абсолютная температура деформированной конфигурации, а T_0 – однородная абсолютная температура отсчетной конфигурации и $g(0) = 1$. Существенным недостатком такого представления является то, что в общем случае неоднородного распределения температуры T тензор $\mathbf{\Phi}_E$ не является градиентом упругой деформации. Действительно, введем материальную систему координат (q^1, q^2, q^3) тогда основной $\mathbf{R}_k$ и сопряженный $\mathbf{R}^k$ базисы этой системы в отсчетной конфигурации вычисляется по формулам

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^k}, \quad \mathbf{R}^1 = \frac{\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3}{v_0}, \quad \mathbf{R}^2 = \frac{\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1}{v_0}$$

$$\mathbf{R}^3 = \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2}{v_0}, \quad v_0 = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3$$

Крестик означает векторное произведение. Введем в отсчетной конфигурации оператор Гамильтона $\overset{0}{\nabla} = \mathbf{R}^k \partial / \partial q^k$, тогда из выражения (1.1) следует связь тензора градиента деформации с тензором градиентом вектора места $\mathbf{F}^T = \overset{0}{\nabla} \mathbf{r}$ [1] и необходимым условием интегрируемости (1.1) является выражение

$$\overset{0}{\nabla} \times \overset{0}{\nabla} \mathbf{r} = \overset{0}{\nabla} \times \mathbf{F}^T = \overset{0}{\nabla} \times (g(\theta) \mathbf{\Phi}_E^T) = 0$$

В развернутом виде это уравнение выглядит так

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} \overset{0}{\nabla} \theta \times \mathbf{\Phi}_E^T + g(\theta) \overset{0}{\nabla} \times \mathbf{\Phi}_E^T = 0$$

Поскольку $g(\theta)$ монотонно возрастает и отлична от нуля, а $\mathbf{\Phi}_E$ произвольный тензор с $\det \mathbf{\Phi}_E = 1$, то для выполнения условия $\overset{0}{\nabla} \times \mathbf{\Phi}_E^T = 0$ требуется чтобы $\overset{0}{\nabla} \theta = 0$. То есть тензор $\mathbf{\Phi}_E$ является градиентом деформации только в случае однородного температурного поля. В работе [7] предполагается аддитивное разбиение массовой плотности

свободной энергии Гельмгольца $\Psi = W/\rho_0$ на слагаемое, описывающее дисторсию, слагаемое, описывающие дилатацию и слагаемое, связанное с теплоемкостью

$$\Psi(J, I_1, I_2, T) = \frac{\mu}{\rho_0} f(I_1, I_2)\frac{T}{T_0} + \frac{\kappa}{\rho_0}\left(l(J)\frac{T}{T_0} - \bar{\alpha}h(J)(T - T_0)\right) - \int_{T_0}^{T}\left(\frac{T}{\bar{T}} - 1\right)c(\bar{T})\,d\bar{T} \quad (1.5)$$

Здесь $c(T)$ – удельная теплоемкость, ρ_0 – плотность массы, μ – модуль сдвига, κ – изотермический объемный модуль и $\bar{\alpha}$ – коэффициент объемного теплового расширения, отнесенные к недеформированной конфигурации, f, l и h – функции отклика. Но приложение этой гипотезы рассмотрено только для однородного температурного поля. В работе [8] дилатация и дисторсия разделяются путем введения модифицированных главных кратностей удлинения

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{J}, \quad \lambda_1^*\lambda_1^*\lambda_3^* = 1$$

далее вся работа выдержана в терминах главных удлинений и главных напряжений, а в качестве приложения рассмотрена задача об одноосном растяжении. В работе [9] оба предыдущих подхода объединяются, то есть удельная свободная энергия представляется в виде суммы энергии дилатации и энергии дисторсии, выраженной через I_1^*, I_2^* – модифицированные главные алгебраические инварианты тензора **B**

$$\Psi(J, I_1^*, I_2^*, T) = \frac{1}{\rho_0\kappa}(J-1)\left[(J-1) - 2(J_T - 1)\right] + \frac{1}{\rho_0}A(I_1^*, I_2^*)$$

$$I_1^* = J^{-\frac{2}{3}}I_1, \quad I_2^* = J^{-\frac{4}{3}}I_2, \quad I_3^* = J^{-\frac{6}{3}}I_3 = 1, \quad J_T = g(\theta)$$

Здесь $A(I_1^*, I_2^*)$ – функция отклика. Кроме общих рассуждений никаких приложений в работе не приводится. Попутно следует отметить [5], что поскольку $I_1 = J^{2/3}I_1^*$, $I_2 = J^{2/3}I_2^*$, то первое слагаемое в (1.5) не описывает чистую дисторсию. Более четкое разделение дилатации и дисторсии проведено в [5]

$$\Psi(J, I_1^*, I_2^*, T) = f(I_1^*, I_2^*) + \frac{\kappa}{2\rho}[g^3(T)J - 1]^2 - c_eT\left[1 - \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] + \varphi_0$$

Здесь c_e постоянная теплоемкость, а $\varphi_0 = c_eT_0$, но как было отмечено, это выражение получено в предположении (1.4).

Во второй серии работ модификация уравнений (1.2) и (1.3) либо полностью, либо частично не проводится. Так в работах [10–13] уравнения (1.2) и (1.3) не меняются, при этом полагается, что такая модель несжимаемости является грубым, но важным приближением к точной теории термоупругости. В работах [14–17] уравнение (1.2) модифицируется в $\det\mathbf{F} = g(\theta)$, а (1.3) остается неизменным. Список приведенных работ неисчерпывающий, обозначены основные направления. В нашей работе мы не делаем предположений о структуре термоупругой деформации, кроме того, что изменение объема происходит исключительно вследствие теплового расширения.

2. Основные соотношения. Термоупругую деформацию однородного и изотропного материала будем представлять с помощью тензора градиента деформации **F** определенного выражением (1.1). Положим, что изменение объема происходит только за счет теплового расширения (материал изотермически несжимаемый), то есть

$$\det\mathbf{F} = g(\theta) \quad (2.1)$$

где по [3, 4, 9, 14]

$$g(\theta) = e^{3\alpha\theta} \quad \text{или} \quad g(\theta) = 1 + 3\alpha\theta \tag{2.2}$$

Здесь α – коэффициент линейного расширения. Ниже будем пользоваться первой формулой из (2.2).

Согласно [1, 2] для простого однородного материала с массовой плотностью свободной энергии $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, T, \overset{0}{\nabla} T)$ уравнения состояния принимают вид

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^{Tr}}, \quad \hat{\eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \overset{0}{\nabla} T} = 0$$

Здесь $\mathbf{P}$ – тензор напряжений Пиолы [1] (по [2] это транспонированный первый тензор Пиолы – Кирхгофа), $\hat{\eta}$ – массовая плотность энтропии. Из последнего уравнения следует, что для простого однородного материала $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, T)$, а если он изотропен, то $\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3, T)$. Здесь $I_3 = \det \mathbf{B} = J^2$. Вспоминая, что $W = \rho_0 \Psi$, по [1] получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^{Tr}} &= 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^{Tr} = 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{F}^{Tr} + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\mathbf{1} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{F}^{Tr} + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{F}^{-1}\right] = \\ &= 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1\mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{1}\right] = \\ &= 2\mathbf{F}^{-1} \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - I_3\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + \left(I_2\frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)\mathbf{1}\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{Tr} \cdot \mathbf{F}$ – правый тензор деформации Коши–Грина [2] (по [1] это мера деформации Коши). Использована формула Гамильтона–Келли $I_1\mathbf{B} - \mathbf{B}^2 = I_2\mathbf{1} - I_3\mathbf{B}^{-1}$ [1].

Для несжимаемого материала ($I_3 = J^2 = e^{6\alpha\theta}$) вводится множитель Лагранжа h_1, зависящий от координат точек и температуры, так что удельная энергия деформации представляется выражением $W = W(I_1, I_2, T) + h_1(I_3 - e^{6\alpha\theta})$. Используя последнее выражение в (2.3) получим

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - e^{6\alpha\theta}\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + \left(I_2\frac{\partial W}{\partial I_2} + e^{6\alpha\theta}h_1\right)\mathbf{1}\right]$$

Введем обозначение $h = I_2 \partial W / \partial I_2 + e^{6\alpha\theta}h_1$, тогда

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - e^{6\alpha\theta}\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + h\mathbf{1}\right] = 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{F}^{Tr} - e^{6\alpha\theta}\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} + h\mathbf{F}^{-1}\right] \tag{2.4}$$

Вспоминая связь тензора напряжений Коши с тензором Пиолы $\mathbf{P} = J\,\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}$ [1] из (2.4) будем иметь

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - e^{6\alpha\theta}\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + h\mathbf{1}\right] = e^{3\alpha\theta}\mathbf{F}^{-1} \cdot 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B}e^{-3\alpha\theta} - e^{3\alpha\theta}\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + \gamma\mathbf{1}\right]$$

где $\gamma = e^{-3\alpha\theta}h$. Следовательно,

$$\mathbf{S} = 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B}e^{-3\alpha\theta} - e^{3\alpha\theta}\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} + \gamma\mathbf{1}\right] \tag{2.5}$$

Выражения (2.1), (2.5) и есть предлагаемая модификация выражений (1.2) и (1.3).

Среди простых, однородных и изотропных материалов будем рассматривать материалы, подчиняющиеся закону Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \overset{0}{\nabla} T = -\lambda \overset{0}{\nabla} \theta \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{q}$ – удельный тепловой поток, рассчитанный на единицу площади поверхности в отсчетной конфигурации, λ – коэффициент теплопроводности, тоже отнесенный к отсчетной конфигурации.

В отсутствие массовых сил и внутренних источников теплоты уравнения равновесия и теплового баланса имеют вид [1]

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = 0, \quad \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{q} = 0 \tag{2.7}$$

Из второго уравнения (2.7) и выражения (2.6) следует стационарное уравнение теплопроводности

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \overset{0}{\nabla} \theta = 0 \tag{2.8}$$

Первое уравнение в (2.7) можно переписать в виде [1]

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \tag{2.9}$$

Здесь $\nabla = \mathbf{r}^k \partial / \partial q^k$ – оператор Гамильтона в деформированной конфигурации, $\mathbf{r}^k$ – базис взаимный с базисом $\mathbf{r}_k$, то есть

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{r}^1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{v}, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1}{v}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{v}, \quad v = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$$

Согласно (2.5) из (2.9) получим

$$\nabla \gamma = -\nabla \cdot \left[e^{-3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] \tag{2.10}$$

Исключая в (2.10) функцию γ, будем иметь

$$\nabla \times \nabla \cdot \left[e^{-3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - e^{3\alpha\theta} \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] = 0 \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) совместно с уравнением (2.1) служат для нахождения деформированного состояния, а уравнение (2.10) совместно с выражением (2.5) или (2.4) используются для нахождения напряженного состояния. Эти уравнения дополняются силовыми и кинематическими граничными условиями. Для нахождения температурного поля используется уравнение (2.8) так же дополненное граничными условиями.

3. Приложение предложенной модели к случаю неоднородного температурного поля и неоднородного напряженно-деформированного состояния. Рассматривается свободное тепловое расширение цилиндрической эластомерной втулки, подвергнутой на внутренней и внешней боковых поверхностях действию уравновешенной системы продольных сдвигающих сил с модулем Q. На внутренней боковой поверхности поддерживается температура T_1, а на внешней T_2. Через R_1 и R_2 обозначаются внутренний и внешний радиусы втулки, а через H ее длина. В чисто механической постановке в рамках геометрической нелинейности эта задача решалась в [18], а в нелинейной постановке с потенциалом Муни–Ривлина в [20].

3.1. Постановка задачи в рамках полуобратного метода. Материальная система координат выбрана совпадающей в отсчетной конфигурации с цилиндрической системой (R, Φ, Z), причем ось OZ совпадает с осью симметрии втулки. Втулка считается достаточно длинной, чтобы пренебречь торцевыми эффектами и считать напряжен-

но-деформированное состояние независящим от Z. В этих условиях можно использовать кинематическую гипотезу коаксиальных сечений, то есть сечения цилиндрические и коаксиальные до деформации остаются таковыми и после деформации (ось единая для всех таких сечений совпадает с осью симметрии втулки). В цилиндрической системе координат в силу осевой симметрии вектор места в деформированной конфигурации задается соотношением

$$\mathbf{r} = f(R)\mathbf{e}_R + [Z + w(R)]\mathbf{k} \tag{3.1}$$

Здесь $w(R)$ и $f(R)$ подлежащие определению функции, $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{k}\}$ – единичный базис цилиндрической системы координат. Температурное поле так же полагается осесимметричным $\theta = \theta(R)$. Оператор Гамильтона материальной системы координат в отсчетной конфигурации записывается в форме

$$\overset{0}{\nabla} = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\mathbf{e}_\Phi}{R}\frac{\partial}{\partial \Phi} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial Z} \tag{3.2}$$

Тензор градиента вектора места по (3.1) и (3.2) получается в виде

$$\overset{0}{\nabla}\mathbf{r} = \mathbf{F}^{Tr} = \frac{df(R)}{dR}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \frac{dw(R)}{dR}\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{kk} \tag{3.3}$$

Так, что условие несжимаемости ($J = \det\overset{0}{\nabla}\mathbf{r} = e^{3\alpha\theta(R)}$) принимает форму дифференциального уравнения

$$ff' = R\,\mathrm{e}^{3\alpha\theta(R)} \tag{3.4}$$

Штрих означает производную по R.

Решение краевой задачи с уравнением (2.8) в цилиндрической системе координат

$$(R\theta')' = 0, \quad \theta(R_1) = \theta_1, \quad \theta(R_2) = \theta_2, \quad \theta_1 = T_1 - T_0, \quad \theta_2 = T_2 - T_0$$

известно и имеет вид

$$\theta(R) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{R}{R_1}\right) + \theta_1$$

Используя это решение, получим

$$A(R) = e^{3\alpha\theta(R)} = a\left(\frac{R}{R_1}\right)^b, \quad a = e^{3\alpha\theta_1}, \quad b = \frac{3\alpha(\theta_2 - \theta_1)}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

Подставим это выражение в (3.4) и решим его. Выбирая из двух решений положительное, получим

$$f(R) = R_1\sqrt{\eta + \frac{2a\left(\dfrac{R}{R_1}\right)^{2+b}}{2+b}} = R_1\sqrt{\eta + \frac{2\left(\dfrac{R}{R_1}\right)^2 A(R)}{2+b}} \tag{3.5}$$

Здесь η – безразмерная константа интегрирования, в дальнейшем играющая роль параметра.

Используя (3.4) из (3.3) будем иметь

$$\mathbf{F}^{Tr} = \frac{RA(R)}{f(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + w'(R)\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{kk}, \quad f'(R) = \frac{RA(R)}{f(R)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{RA(R)}{f(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{f(R)}{R}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + w'(R)\mathbf{k}\mathbf{e}_R + \mathbf{k}\mathbf{k} \\
(\mathbf{F}^{Tr})^{-1} &= \frac{f(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{R}{f(R)}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi - w'(R)\frac{f(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{k} \\
\mathbf{F}^{-1} &= \frac{f(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{R}{f(R)}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi - w'(R)\frac{f(R)}{RA(R)}\mathbf{k}\mathbf{e}_R + \mathbf{k}\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

По этим выражениям вычисляются

$$\mathbf{B} = \frac{R^2A^2(R)}{f^2(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{f^2(R)}{R^2}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + w'(R)\frac{RA(R)}{f(R)}(\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_R) + (1 + w'^2(R))\mathbf{k}\mathbf{k} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2A^2(R)}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \frac{R^2}{f^2(R)}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi - w'(R)\frac{f(R)}{RA(R)}(\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_R) + \mathbf{k}\mathbf{k} \tag{3.8}$$

Дальнейшее продвижение требует некоторых соглашений насчет удельной энергии деформации W. Имея ввиду учет влияния теплового расширения, будем считать в первом приближении, что удельная энергия деформации зависит от температуры неявно, только через главные инварианты тензора деформации $\mathbf{B}$. В литературе описано множество конститутивных моделей (выражений для удельной энергии деформации) несжимаемого материала, зависящих как от одного, так и от двух главных инвариантов. В [19–21] показано, что более простые, конститутивные модели, не включающие зависимость от второго инварианта, не в состоянии охватить некоторые физические эффекты. Поэтому будем использовать модель, зависящую от двух инвариантов. Простейшей конститутивной моделью, зависящей от двух главных инвариантов, является модель Муни–Ривлина

$$W = \frac{\mu}{4}[(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3)] \tag{3.9}$$

Здесь μ – модуль сдвига линейной теории, отнесенный к отсчетной конфигурации, $\beta \in [-1,1]$ безразмерный коэффициент. Полагаем, что $p = 4\gamma/\mu$ является осесимметричным $p = p(R)$. Используя (2.5), (3.7), (3.8) и (3.9) получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = \frac{\mu}{2}\Bigg\{&\left[(1 + \beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} - (1 - \beta)\frac{f^2(R)(1 + w'^2(R))}{R^2A(R)} + p(R)\right]\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \\
&+\left[(1 + \beta)\frac{f^2(R)}{R^2A(R)} - (1 - \beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} + p(R)\right]\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + \\
&+\left[(1 + \beta)\frac{R}{f(R)} + (1 - \beta)\frac{f(R)}{R}\right]w'(R)(\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_R) + \\
&+\left[(1 + \beta)\frac{(1 + w'^2(R))}{A(R)} - (1 - \beta)A(R) + p(R)\right]\mathbf{k}\mathbf{k}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Поскольку $\mathbf{r}_k = \mathbf{F}\cdot\mathbf{R}_k$, то используя (3.6), получим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{RA(R)}{f(R)}\mathbf{e}_R + w'(R)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = f(R)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}$$

Вычисляя сопряженный базис

$$\mathbf{r}^1 = \frac{f(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{f(R)}\mathbf{e}_\Phi, \quad \mathbf{r}^3 = -\frac{f(R)w'(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R + \mathbf{k}$$

будем иметь оператор Гамильтона в деформированной конфигурации

$$\begin{aligned}\nabla = \frac{f(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{f(R)}\mathbf{e}_\Phi\frac{\partial}{\partial \Phi} + \left[-\frac{f(R)w'(R)}{RA(R)}\mathbf{e}_R + \mathbf{k}\right]\frac{\partial}{\partial Z} = \\ = \mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\Phi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь $r = f(R)$, $\varphi = \Phi$, $z = Z + w'(R)$ координаты точек в деформированной конфигурации в цилиндрической системе координат. Теперь вычислим уравнение равновесия (2.10). Используя обозначения $\mathbf{S} = S_{RR}\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + S_{\Phi\Phi}\mathbf{e}_\Phi\mathbf{e}_\Phi + S_{RZ}(\mathbf{e}_R\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_R) + S_{ZZ}\mathbf{k}\mathbf{k}$, в компонентой форме будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial r}(rS_{RZ}) = \frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[(1+\beta)\frac{R}{f(R)} + (1-\beta)\frac{f(R)}{R}\right]w'(R)\right\} = 0 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}r\frac{\partial}{\partial r}S_{RR} + S_{RR} - S_{\Phi\Phi} = \\ = r\frac{\partial}{\partial r}\left[(1+\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta)\frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2A(R)} + p(R)\right] + \\ + \left[(1+\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta)\frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2A(R)}\right] - \\ - \left[(1+\beta)\frac{f^2(R)}{R^2A(R)} - (1-\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)}\right] = 0\end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнение (2.11) приводится к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left\{r\left[(1+\beta)\frac{R}{f(R)} + (1-\beta)\frac{f(R)}{R}\right]w'(R)\right\} = 0$$

и является следствием (3.12).

Первый интеграл уравнения (3.12) записывается в форме

$$r\left[(1+\beta)\frac{R}{f(R)} + (1-\beta)\frac{f(R)}{R}\right]w'(R) = c$$

или

$$\left[(1+\beta)\frac{R}{f(R)} + (1-\beta)\frac{f(R)}{R}\right]w'(R) = \frac{c}{f(R)} \tag{3.14}$$

Константа интегрирования c находится из силовых граничных условий на боковой поверхности. Вектор единичной нормали к боковой поверхности не меняется в про-

цессе деформации и совпадает с $\mathbf{e}_R$. Главный вектор на боковой поверхности получим, используя (3.10) и (3.14), в виде

$$\frac{Q}{H}\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{S}(R)\, r d\varphi = \int_0^{2\pi} [S_{RR}(R)\mathbf{e}_R + S_{RZ}(R)\mathbf{k}]\, f(R)\, d\Phi =$$

$$= 2\pi S_{RZ}(R) f(R)\mathbf{k} = \pi\mu\left[(1+\beta)\frac{R}{f(R)} + (1-\beta)\frac{f(R)}{R}\right] w'(R) f(R)\mathbf{k} = \pi\mu c\mathbf{k}$$

То есть $c = Q/(\pi\mu H)$. Теперь имеем выражение для касательных напряжений

$$S_{RZ} = \frac{Q}{2\pi H}\frac{1}{f(R)} \tag{3.15}$$

и уравнение для нахождения продольного смещения

$$w'(R) = \frac{Q}{\pi\mu H}\frac{1}{f(R)\left[(1+\beta)\dfrac{R}{f(R)} + (1-\beta)\dfrac{f(R)}{R}\right]} \tag{3.16}$$

Для предотвращения жесткого смещения втулки вдоль оси OZ положим, что внутренняя боковая поверхность продольно не смещается, а смещается внешняя боковая поверхность. Тогда

$$w(R) = \frac{Q}{\pi\mu H}\int_{R_1}^{R} \frac{dt}{f(t)\left[(1+\beta)\dfrac{t}{f(t)} + (1-\beta)\dfrac{f(t)}{t}\right]} \tag{3.17}$$

В выражения (3.15)–(3.17) входит параметр η. Для его определения обратимся к плоской части напряженного состояния. Из (3.11) следует выражение

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{f(R)}{RA(R)}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{w'(R) f(R)}{RA(R)}\frac{\partial}{\partial Z}$$

используя которое перепишем уравнение (3.13) в виде

$$\frac{f^2(R)}{RA(R)}\frac{\partial}{\partial R}\left[(1+\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta)\frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2A(R)} + p(R)\right] +$$

$$+ (1+\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta)\frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2A(R)} -$$

$$-\left[(1+\beta)\frac{f^2(R)}{R^2A(R)} - (1-\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)}\right] = 0$$

или

$$p'(R) = (1-\beta)\frac{w'^2(R)}{R} + 2\left(\frac{1}{R} - \frac{R^3A^2(R)}{f^4(R)}\right) -$$

$$-\left[(1+\beta)\frac{R^2A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta)\frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2A(R)}\right]'$$

Из этого уравнения, получаем выражение для p

$$p(R) = \int_{R_1}^{R} (1-\beta)\frac{w'^2(t)}{t} + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{f^4(t)}\right)dt - \\ -\left[(1+\beta)\frac{R^2 A(R)}{f^2(R)} - (1-\beta)\frac{f^2(R)(1+w'^2(R))}{R^2 A(R)}\right] + p_0 \tag{3.18}$$

Здесь p_0 – константа интегрирования. Для нахождения η и p_0 служат уравнения, полученные из силовых граничных условий на боковой поверхности

$$S_{RR}(R_1) = S_{RR}(R_2) = 0 \tag{3.19}$$

Перейдем к безразмерным величинам, переменным и параметрам.

$$\rho = \frac{R}{R_1}, \quad \kappa = \frac{R_2}{R_1}, \quad \delta = \frac{\Delta}{R_1}, \quad \omega = \frac{w}{R_1}, \quad \upsilon = \frac{f}{R_1}, \quad q = \frac{Q}{2\pi R_1 H \mu}$$

$$\sigma_{RZ} = \frac{S_{RZ}}{\mu}, \quad \sigma_{RR} = \frac{S_{RR}}{\mu}, \quad \sigma_{RZ} = \frac{S_{\Phi\Phi}}{\mu}, \quad \dot{\omega}(\rho) = \frac{\partial\omega(\rho)}{\partial\rho} = \frac{\partial w(R)}{\partial R} = w'(R)$$

Здесь Δ – продольное смещение внешней боковой поверхности втулки относительно внутренней. Используя эти соотношения и выражения (3.17), (3.18), получим

$$A(\rho) = a\rho^b, \quad a = e^{3\alpha\theta_1}, \quad b = \frac{3\alpha(\theta_2 - \theta_1)}{\ln\kappa}$$

$$\dot{\omega}(\rho) = \frac{2q}{\left[(1+\beta)\rho + (1-\beta)\dfrac{\upsilon^2(\rho)}{\rho}\right]}$$

$$p(\rho) = \int_1^{\rho} (1-\beta)\frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{\upsilon^4(t)}\right)dt - \\ -\left[(1+\beta)\frac{\rho^2 A(\rho)}{\upsilon^2(\rho)} - (1-\beta)\frac{\upsilon^2(\rho)(1+\dot{\omega}^2(\rho))}{\rho^2 A(\rho)}\right] + p_0 \tag{3.20}$$

Из (3.20) имеем

$$\sigma_{RR} = \frac{1}{2}\left[\int_1^{\rho} (1-\beta)\frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{\upsilon^4(t)}\right)dt + p_0\right]$$

Уравнения (3.19) для определения p_0 и η получаются в форме

$$p_0 = 0, \quad \int_1^{\kappa} (1-\beta)\frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3 A^2(t)}{\upsilon^4(t)}\right)dt = 0$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние полностью определено. Относительные продольное и радиальное смещения, а так же зависимость продольного смещения внешней обоймы от приложенной нагрузки (жесткостная характеристика) имеют вид

$$\omega(\rho) = 2q\int_1^{\rho} \frac{dt}{\left[(1+\beta)t + (1-\beta)\dfrac{\upsilon^2(t)}{t}\right]}, \quad \upsilon(\rho) = \sqrt{\eta + \frac{2\rho^2 A(\rho)}{2+b}}$$

$$\delta = 2q\int_1^{\kappa} \frac{d\rho}{\left[(1+\beta)\rho + (1-\beta)\dfrac{\upsilon^2(\rho)}{\rho}\right]}$$

Относительные касательное, радиальное и тангенциальное напряжения записываются в форме

$$\sigma_{RZ} = \frac{q}{\upsilon(\rho)}, \quad \sigma_{RR} = \frac{1}{2}\int_1^{\rho}(1-\beta)\frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3A^2(t)}{\upsilon^4(t)}\right)dt$$

$$\sigma_{\text{ФФ}} = \frac{1}{2}\left\{\int_1^{\rho}(1-\beta)\frac{\dot{\omega}^2(t)}{t} + 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t^3A^2(t)}{\upsilon^4(t)}\right)dt + \left[(1+\beta)\frac{\upsilon^2(\rho)}{\rho^2A(\rho)} - (1-\beta)\frac{\rho^2A(\rho)}{\upsilon^2(\rho)}\right] - \right.$$
$$\left. - \left[(1+\beta)\frac{\rho^2A(\rho)}{\upsilon^2(\rho)} - (1-\beta)\frac{\upsilon^2(\rho)(1+\dot{\omega}^2(\rho))}{\rho^2A(\rho)}\right]\right\}$$

3.2. Вычисления. В качестве значения коэффициента линейного расширения для эластомеров примем $\alpha = 2\times10^{-4}$°C [22]. Недеформированной конфигурации соответствует однородная температура $T_0 = 293$ K. Значение разностной температуры на внутренней поверхности $\theta_1 = T_1 - T_0$ возьмем равным нулю. Значение разностной температуры на внешней поверхности $\theta_2 = T_2 - T_0$ возьмем равным 60°C. Отсутствию дополнительного температурного поля соответствует разностная температура на внешней поверхности $\theta_2 = 0$°C.

Следует отметить влияние параметра β. При $\beta = 1$ потенциал энергии деформации Муни–Ривлина переходит в потенциал Трелоара $W = 0.5\mu(I_1 - 3)$, зависящий только от первого инварианта. Для такой модели материала при $\theta = 0$ поля напряжений и перемещений в поперечной плоскости не выявляются, и напряженно-деформированное состояние является антиплоским. С ростом θ проявляются поля напряжений и перемещений в поперечной плоскости, связанные с тепловым расширением, и напряженно-деформированное состояние является цилиндрическим (то есть комплексом из плоской и антиплоской деформации [21]). С уменьшением β от 1 до –1 появляется зависимость от I_2 и при $\beta = -1$ потенциал энергии деформации зависит только от I_2. Поля напряжений и перемещений в поперечной плоскости проявляются даже при $\theta = 0$, то есть поле в поперечной плоскости порождается продольным сдвигом, и плоская и антиплоская составляющие цилиндрической деформации связаны. Рост температуры усиливает этот эффект.

Для $[q = 1, \kappa = 2]$ на рис. 1 представлено удельное радиальное смещение $u = \upsilon(\rho) - \rho$ для $\beta = 1$ (a) и $\beta = -0.95$ (b). Кривая *1* соответствует $\theta = 60$°C, а кривая *2* – $\theta = 0$°C. Для $[q = 1, \beta = 1, \kappa = 2]$ на рис. 2 представлены распределения относительных радиальных (a) и тангенциальных (b) напряжений. Кривая *1* соответствует $\theta = 60$°C, а кривая *2* – $\theta = 0$°C Для $[q = 1, \beta = -0.95, \kappa = 2]$ на рис. 3 представлены распределения относительных радиальных (a) и тангенциальных (b) напряжений. Кривая *1* соответствует $\theta = 60$°C, а кривая *2* – $\theta = 0$°C. На рис. 4 представлены распределения касательного напряжения сдвига для $[q = 1, \beta = -0.95, \kappa = 2]$ (a) и кривые жесткости для $[\beta = -0.95, \kappa = 2]$ (b). Кривая *1* соответствует $\theta = 60$°C, а кривая *2* – $\theta = 0$°C.

4. Заключение. Предложена модификация постановки задачи статики однородного изотропного несжимаемого материала при конечных деформациях, учитывающая тепловое расширение. Рассмотрено влияние теплового расширения в неоднородном стационарном температурном поле на неоднородное напряженно-деформированное

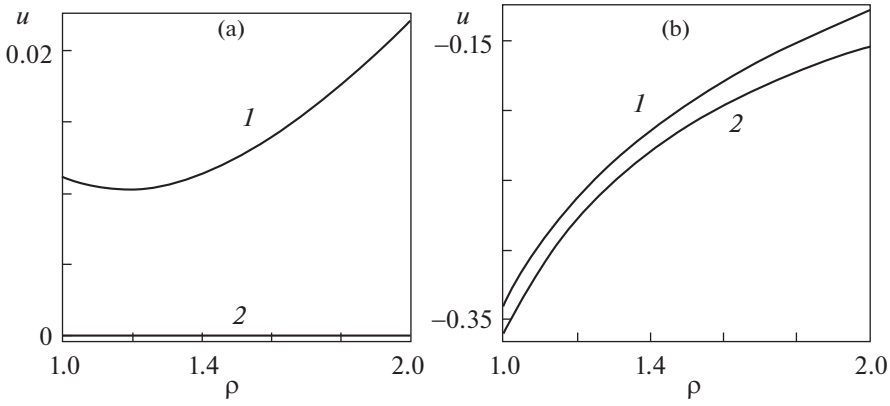

Рис. 1

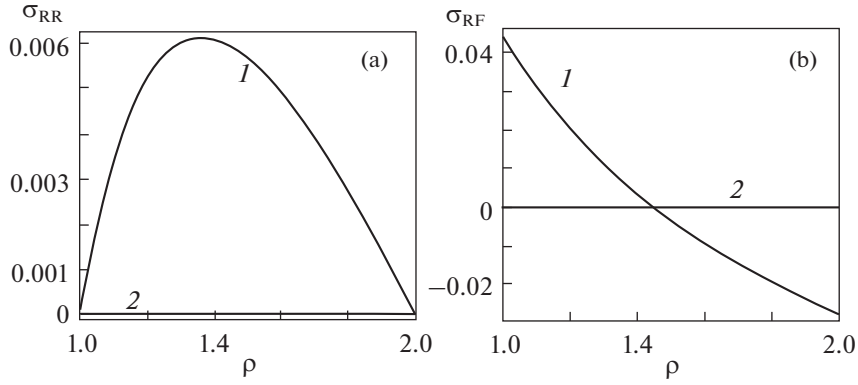

Рис. 2

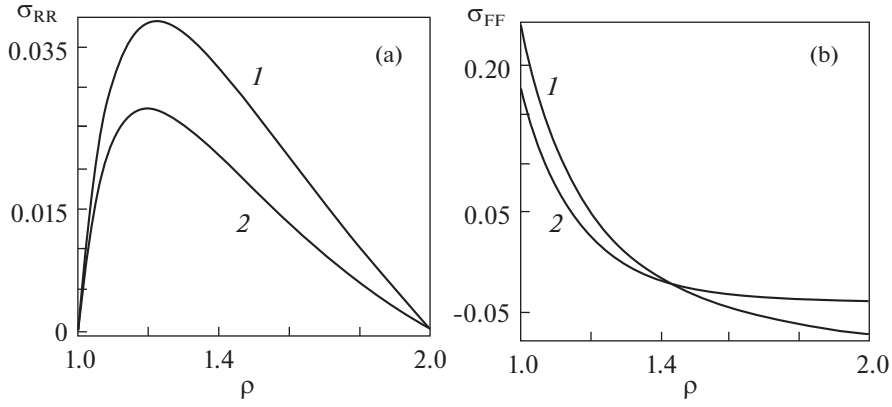

Рис. 3

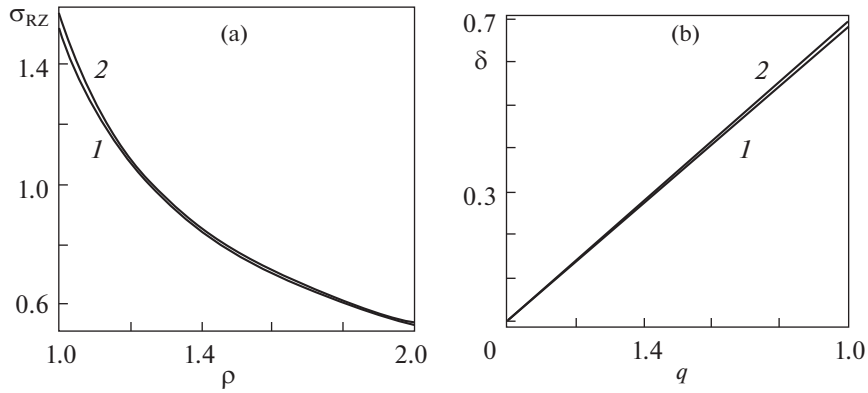

Рис. 4

состояние тела на примере цилиндрической втулки, подвергнутой конечному продольному сдвигу. Исследовано влияние неоднородного поля температур на напряженно-деформированное состояние в поперечной плоскости, порожденное как конечным продольным сдвигом, так и тепловым расширением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Truesdell C., Noll W.* The Non-linear Field Theories of Mechanics. N.Y.: Springer, 2003. 602 p.
3. *Macon J.D.* Thermal and mechanical behavior of rubber systems. (1997). Doctoral Dissertations 1896 – February 2014. 95. 956 p. http: // scholarworks.umass.edu/dissertations_1/956.
4. *Dippel B., Johlitz M., Lion A.* Thermo-mechanical couplings in elastomers – experiments and modelling // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2015. V. 95. No. 11. P. 1117–1128. DOI: 10.1002 /zamm. 201400110.
5. *Nicholson D.W., Lin B.* Theory of the termohyperelasticity for near-incompressible elastomers // Acta Mechanica. 1996. V. 116. Issue 1–4. P. 15–28. https://doi.org/10.1007/BF01171417
6. *Жуков Б.А.* Влияние однородного стационарного температурного поля на напряженно-деформированное состояние эластомеров при статических конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 136–147.
7. *Chadwick P.* Thermo-mechanics of rubberlike materials // Phll. Trans. Soc. Lond. A. 1974. V. 276. P. 371–403. https://doi.org/10.1098/rsta.1974.0026
8. *Ogden R.W.* On the thermoelastic modeling of rubberlike solids // Journal of Thermal Stresses. 1992. V. 15. P. 533–557. DOI: 10.1080 /01495739208946155.
9. *Пальмов В.А.* Определяющие уравнения термоупругих, термовязких и термопластических материалов: учеб. пособие / В.А. Пальмов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 138 с.
10. *Chen D.D., Petroski H.J.* Controllable states of elastic heat conductors obeying a Fourier law // Int. J. Eng. Sci. 1975. V. 13. P. 799–814.
11. *Muller W.C.* Universal solutions for thermodynamic Fourier material // Quarterly of applied mathematics. 1975. October. P. 281–290.
12. *Saccomandi G.* On inhomogeneous deformations in finite thermoelasticity // IMA Journal of Applied Mathematics. 1999. V. 63. P. 131–148.
13. *Petroski H.J.* On the finite deformation and heating of thermoelastic spherical sectors // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1975. V. 10. P. 327–332.
14. *Horgan C., Saccomandi G.* Finite thermoelasticity with limiting chain extensibility // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. V. 51. P. 1127–1146.

15. *Gurtin M.E., Guidugli P.P.* Thermodynamics of Constrained Materials // Arch. Rat. Mech. Anal. 1973. V. 51. 192–208.
16. *Erbe H.H.* Thermoelastic effects in incompressible elastic solids // Mech. Res. Commun. 1974. V. 1. P. 137–142.
17. *Trapp J.A.* Reinforced materials with thermo-mechanical constraints // Int. J. Eng. Sci. 1971. V. 9. P. 757–773.
18. *Григолюк Э.И., Носатенко П.Я.* Плоское геометрически нелинейное напряженно-деформированное состояние цилиндра при сдвиге // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. № 2. С. 28–31.
19. *Horgan C.* The importance of the second strain invariant in the constitutive modeling of elastomers and soft biomaterials // Mechanics of Materials. 2012. V. 51. P. 43–52. DOI: 10.1016 /j. mechmat.2012.03
20. *Жуков Б.А.* Плоское напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической втулки, порожденное конечным антиплоским сдвигом // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 136–144.
21. *Жуков Б.А.* Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 3. С. 127–135.
22. *Бухина М.Ф.* Техническая физика эластомеров. М.: Химия, 1984. 224 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 31–41

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ ВИДА СИЛЬФОН

© 2021 г. Г. Т. Тарабрин

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия
e-mail: tageti@mail.ru

Поступила в редакцию 30.09.2019 г.
После доработки 15.11.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Предлагается пространственная конструкция, внешне напоминающая сильфон, составленная из пологих оболочек в форме правильного усеченного конуса и кольцевых пластин, шарнирно прикрепленных внутри оснований конусов. Материал оболочек и пластин – упруго ортотропный с радиальными и тангенциальными осями изотропии. Конструкция подвергается продольно осевому сжатию, что создает во всех элементах конструкции осесимметричное плоское напряженное состояние. В результате решения в квадратурах задач теории упругости для этих элементов конструкции вычисляется предельное значение внешней сжимающей силы, до воздействия которой сильфон сохраняет устойчивое равновесие, и выводится формула корректно обоснованного расчета его напряженно-деформированного состояния. Отличительная особенность рассмотренной конструкции заключается в отсутствии кручения, изгиба и внецентренного нормального усилия в поперечном сечении любого ее элемента.

Ключевые слова: сильфон, упругие пластины и оболочки

DOI: 10.31857/S0572329921010116

Введение. Сильфон, как его определяет энциклопедия, это – тонкостенная (обычно металлическая) цилиндрическая оболочка с поперечной гофрированной боковой поверхностью. Сильфон расширяется или сжимается вдоль оси (подобно пружине) под действием разности давления внутри и снаружи или от внешнего силового воздействия. Применяется в пневмоавтоматике (как чувствительный орган), для гибкого соединения трубопроводов, для амортизации и др. Именно таким мы будем представлять себе сильфон. Но если предлагаемые заводами-изготовителями сильфоны являются, как правило, цельнометаллическими конструкциями из однородного и изотропного материала, то мы будем рассматривать сильфон как композиционную конструкцию, элементы которой изготовлены из композиционного материала. Причем такую пространственную конструкцию, которая может быть использована как гражданское или промышленное сооружение большой высоты и, вообще, большого объема. Забегая вперед скажем, что главным преимуществом предлагаемой конструкции является отсутствие изгибаемых, скручиваемых или сложно нагружаемых несущих элементов конструкции – все несущие элементы конструкции под действием внешней осевой нагрузки работают полным поперечным сечением только на растяжение или сжатие.

Мысль о потребности композиционного сильфона возникла у автора этих строк, когда в одной из телевизионных передач был показан американский научно-исследовательский аппарат, работающий на Марсе. Довольно заметную часть этого аппарата

занимало нечто, имеющее вид сильфона. Все агрегаты и конструкции, связанные с космическими исследованиями, должны подчиняться жестким требованиям прочности, устойчивости к сохранению формы, заданной степени деформируемости и при этом быть минимизированы по весу. Такая оптимизационная задача для такой геометрически сложной конструкции, как сильфон, с таким большим количеством параметров оптимизации может быть решена только как композиционная конструкция из композиционных материалов. Теоретическое решение такой задачи с построением минимизирующей функции в общем случае не представляется возможным. Разве что, для какого-то частного случая с существенными упрощениями. Мы не ставим перед собой такой задачи. Целью предлагаемой работы являются расчеты на прочность и жесткость отдельных элементов конструкции композиционного сильфона. При оптимизации сильфона методом вариантного проектирования возможность рассчитывать элементы конструкции на прочность и жесткость многократно сокращают трудозатраты оптимизации и поэтому расчеты на прочность и жесткость могут быть признаны главными при проектировании оптимального композиционного сильфона.

Конструкция сильфона. Мы будем рассматривать сильфон в виде конструкции, состоящей из некоторого числа одинаковых конструкционных фрагментов, которые условимся называть сильфониками. На рис. 1 изображена расчетная схема сильфоника. Каждый сильфоник имеет форму двояковыпуклой симметричной линзы. Поверхности такой линзы имеют вид круговых прямых усеченных конусов, полученных вращением вокруг оси конуса наклонного отрезка прямой линии. Мы будем называть боковые поверхности конусов оболочками сильфоника. Оболочки каждого сильфоника шарнирно соединены друг с другом краями своих больших оснований. Внутри сильфоника к соединению краев его оболочек шарнирно крепится кольцевая пластина, выполняющая роль диафрагмы. Эту пластину мы назовем большой диафрагмой, а отверстие в ней, край которого является окружностью, концентрической внешнему краю, назовем отверстием большой диафрагмы. Все сильфоники шарнирно соединены друг с другом краями меньших оснований своих оболочек. Внутри сильфона к соединению сильфоников шарнирно крепится еще одна кольцевая пластина, выполняющая роль диафрагмы, разделяющей два соседних сильфоника. Эту диафрагму мы назовем малой диафрагмой, а отверстие в ней, край которого является окружностью, концентрической внешнему контуру малой диафрагмы, – отверстием в малой диафрагме. Мы примем, что крайние сильфоники всего сильфона на концевых сторонах имеют малую диафрагму с отверстием такой же формы и размеров и сделаны из того же материала, что и внутренние малые диафрагмы, но имеют половинную толщину.

Геометрические характеристики сильфона: r – радиус окружности малого основания оболочки, R – радиус окружности большого основания оболочки, H – высота оболочки – расстояние между большим и малым ее основаниями, r_0 – радиус отверстия в малой диафрагме, R_0 – радиус отверстия в большой диафрагме, h – толщина оболочки, h_r – толщина малой диафрагмы, h_R – толщина большой диафрагмы.

Поместим одну оболочку сильфоника в цилиндрические координаты ρ, θ, z так, чтобы ось вращения оболочки совместилась с координатной осью z, а ее большое основание при этом совместилось с плоскостью полярных координат ρ, θ (ρ – полярный радиус, θ – угол направления полярного луча). Таким образом,

$$0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le H$$

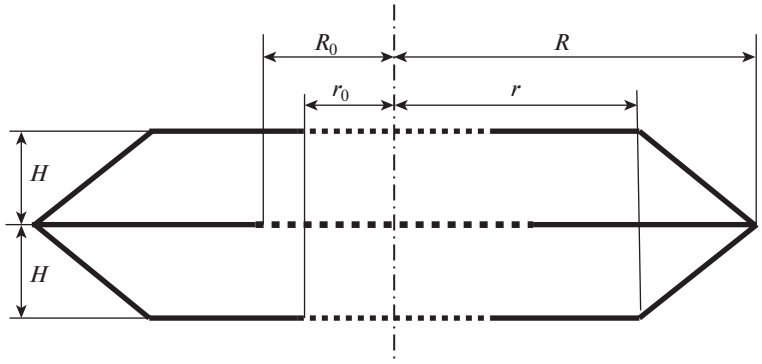

Рис. 1

Условимся, что нижний индекс ρ обозначает радиальное направление, а нижний индекс θ обозначает тангенциальное направление.

Деформационные характеристики ортотропного сильфона:

E_ρ, E_θ, ν_ρ, ν_θ – модули нормальной упругости и коэффициенты поперечной деформации оболочки,

E_ρ^r, E_ρ^r, ν_ρ^r, ν_θ^r – модули нормальной упругости и коэффициенты поперечной деформации малой диафрагмы,

E_ρ^R, E_ρ^R, ν_ρ^R, ν_θ^R – модули нормальной упругости и коэффициенты поперечной деформации большой диафрагмы.

1. Постановка задачи. Задачу о напряженно-деформированном состоянии всего сильфона мы сведем к расчету напряженно-деформированного состояния отдельных элементов сильфоника – оболочки, малой и большой диафрагм. При этом задача будет решаться в три этапа.

1-й этап. Рассматривается такое продольно-осевое сжатие сильфона внешними силами, когда все сильфоники, составляющие сильфон, превратятся в пластины. Иначе говоря, когда все оболочки всех сильфоников сплющатся в пластины. Ясно, что все перечисленные элементы каждого сильфоника окажутся при этом в осесимметричном состоянии. Это состояние мы будем полагать плоским напряженным состоянием. Это соответствует предположению, что в процессе эксплуатации сильфона он не будет подвергаться сжатию, требующему рассмотрения пространственного напряженного состояния его элементов.

Подчеркнем, что все расчеты будут выполняться в предположении, что все элементы конструкции и физически и геометрически сохраняют линейно упругую деформируемость. В рамках принятых гипотез получаемое решение при этом является точным.

Обратим внимание также, что мы исключаем возможность эксплуатации сильфона на растяжение. Принятая постановка задачи имеет эксплуатационный смысл только при работе сильфона на сжатие.

Читатель не найдет в списке цитируемой литературы ссылки на работы авторов, которые являлись бы прямо или косвенно предтечей работ [1, 2], выполненных автором настоящей статьи в 2008 году. Мысли о трансформировании пологой оболочки вращения в круглую пластину впервые возникли в далеком 1971 году. Тогда казалось маловероятным, что эта задача еще не решена. Уверенность, что это именно так, в результате упорных поисков, была обретена лишь спустя 37 лет.

2-й этап. Вычисляется предельное значение силы, сжимающей сильфон, до которой нагружение сильфона происходит в режиме устойчивого равновесия. На этом этапе в рамках принятых упрощений решение также является точным [3].

3-й этап. Квадратичной аппроксимацией крайних в процессе нагружения сильфона значений напряженно-деформированного состояния получается закон текущих значений напряженно-деформированного состояния от начала нагружения до предельного значения сжимающей сильфон силы.

Радиальное перемещение, деформации и напряжения во всех элементах сильфона мы условимся обозначать одинаково: $u(\rho)$ – перемещение; $\varepsilon_\rho(\rho)$, $\varepsilon_\theta(\rho)$ – радиальные и тангенциальные деформации; $\sigma_\rho(\rho)$, $\sigma_\theta(\rho)$ – радиальные и тангенциальные напряжения.

2. Мембранные усилия в оболочке, трансформированной в пластину. При трансформировании конической оболочки в пластину радиальная деформация ε_ρ складывается из двух деформаций: из деформации сжатия e_0 меридиана оболочки до ширины кольца $R - r$, представляющего собой проекцию оболочки на плоскость координат ρ, θ, и из радиальной деформации $u(\rho)$ от осесимметричного смещения точек этого кольца, которая равна $u'(\rho)$.

Дифференциал длины дуги меридиана оболочки

$$dl = \sqrt{1 + [H/(R - r)]^2}\,d\rho$$

является начальной длиной деформируемого элемента dl меридиана оболочки, а дифференциал $d\rho$ является результатом его укорочения, т.е. является конечной длиной деформируемого элемента. Относительная деформация сжатия e_0 меридиана до длины $R - r$ определяется отношением приращения длины $d\rho - dl$ деформируемого элемента к его первоначальной длине dl:

$$e_0 = \frac{d\rho - dl}{dl} \quad \Rightarrow \quad e_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + [H/(R - r)]^2}} - 1 \tag{2.1}$$

Тангенциальная деформация $\varepsilon_\theta(\rho)$ является следствием только осесимметричного смещения точек кольца $u(\rho)$ и, следовательно, равна $u(\rho)/\rho$. Таким образом, относительные радиальная и тангенциальная деформации кольца, представляющего собой проекцию усеченного конуса на плоскость его основания, определяются формулами:

$$\varepsilon_\rho(\rho) = u'(\rho) + e_0, \quad \varepsilon_\theta(\rho) = u(\rho)/\rho \tag{2.2}$$

По закону Гука при плоском напряженном состоянии для осесимметрично деформированной круглой пластины, когда оси изотропии совпадают с координатными линиями, мы имеем

$$\begin{gathered} \sigma_\rho = (\varepsilon_\rho + \nu_\rho\varepsilon_\theta)J_\rho, \quad \sigma_\theta = (\varepsilon_\theta + \nu_\theta\varepsilon_\rho)J_\theta \\ J_\rho = E_\rho/(1 - \nu_\rho\nu_\theta), \quad J_\theta = E_\theta/(1 - \nu_\rho\nu_\theta) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Осесимметричное плоское напряженное состояние описывается одним уравнением равновесия

$$\sigma'_\rho(\rho) + [\sigma_\rho(\rho) - \sigma_\theta(\rho)]/\rho = 0 \tag{2.4}$$

Исключив в уравнении (2.4) напряжения подстановкой (2.3), а потом деформации подстановкой (2.2), получим разрешающее дифференциальное уравнение в перемещениях

$$\begin{gathered} u''(\rho) + \frac{1 + 2\beta}{\rho}u'(\rho) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\rho^2}u(\rho) = -\frac{1}{\rho}e_0(1 - \nu_\theta E_\theta/E_\rho) \\ \beta = (\nu_\rho - \nu_\theta E_\theta/E_\rho)/2, \quad \alpha = \sqrt{\beta^2 + E_\theta/E_\rho} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) является неоднородным уравнением Эйлера [4]. Однородное уравнение с каноническими коэффициентами

$$u''(\rho) + \frac{1}{\rho}u'(\rho) - \frac{1}{\rho^2}u(\rho) = 0$$

является разрешающим уравнением осесимметричной задачи теории упругости, называемой задачей Ламе. Отсюда видно, что задача Ламе является частным случаем решаемой здесь задачи.

Общее решение уравнения Эйлера (2.5), полученное методом вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$u(\rho) = C_1\rho^{\alpha-\beta} + C_2\rho^{-(\alpha+\beta)} - e_0\left[\left(1 - \nu_\theta E_\theta/E_\rho\right)/2\alpha\right]\left[v(\rho) - \rho/(\alpha+\beta+1)\right] \tag{2.6}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные и

$$v(\rho) = \begin{cases} \rho/(1-\alpha-\beta) & \text{при} \quad \alpha-\beta \neq 1 \\ \rho\ln\rho & \text{при} \quad \alpha-\beta = 1 \end{cases}$$

$$v'(\rho) = v(\rho)/\rho = \begin{cases} 1/(1-\alpha-\beta) & \text{при} \quad \alpha-\beta \neq 1 \\ \ln\rho + 1 & \text{при} \quad \alpha-\beta = 1 \end{cases}$$

Чтобы избежать громоздких формул, введем дополнительные функции

$$e_\rho(\rho) = e_0\left\{1 - [(1 - \nu_\theta E_\theta/E_\rho)/2\alpha][v'(\rho) - 1/(\alpha+\beta+1)]\right\}$$

$$e_\theta(\rho) = -e_0[(1 - \nu_\theta E_\theta/E_\rho)/2\alpha][v(\rho)/\rho - 1/(\alpha+\beta+1)]$$

Используя эти функции и перемещения (2.6), по формулам (2.2) запишем деформации оболочки

$$\begin{gathered} \varepsilon_\rho(\rho) = C_1(\alpha-\beta)\rho^{\alpha-\beta-1} - C_2(\alpha+\beta)\rho^{-(\alpha+\beta+1)} + e_\rho(\rho) \\ \varepsilon_\theta(\rho) = C_1\rho^{\alpha-\beta-1} + C_2\rho^{-(\alpha+\beta+1)} + e_\theta(\rho) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Подставив эти деформации в формулы закона Гука (2.3), мы получим напряжения

$$\begin{gathered} \sigma_\rho(\rho) = [C_1(\alpha-\beta+\nu_\rho)\rho^{\alpha-\beta-1} - C_2(\alpha+\beta-\nu_\rho)\rho^{-(\alpha+\beta+1)} + \psi_\rho(\rho)]J_\rho \\ \sigma_\theta(\rho) = [C_1(1+\nu_\theta(\alpha-\beta))\rho^{\alpha-\beta-1} + C_2(1-\nu_\theta(\alpha+\beta))\rho^{-(\alpha+\beta+1)} + \psi_\theta(\rho)]J_\theta \end{gathered} \tag{2.8}$$

где

$$\psi_\rho(\rho) = e_\rho(\rho) + \nu_\rho e_\theta(\rho), \quad \psi_\theta(\rho) = e_\theta(\rho) + \nu_\theta e_\rho(\rho)$$

3. Мембранные усилия в малой диафрагме. Внутрь малого основания оболочки вставлена упругая пластина толщиной, равной полутолщине малой диафрагмы $h_r/2$, и шарнирно соединена с краем основания оболочки. Перемещения и напряжения в малой пластине являются осесимметричными, как и у оболочки. Поэтому перемещения, деформации и напряжения описываются формулами (2.6), (2.7), (2.8), в которых $e_0 \equiv 0$:

$$u(\rho) = C_1^r\rho^{\alpha^r-\beta^r} + C_2^r\rho^{-(\alpha^r+\beta^r)} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_\rho(\rho) = C_1^r(\alpha^r-\beta^r)\rho^{\alpha^r-\beta^r-1} - C_2^r(\alpha^r+\beta^r)\rho^{-(\alpha^r+\beta^r+1)} \\ \varepsilon_\theta(\rho) = C_1^r\rho^{\alpha^r-\beta^r-1} + C_2^r\rho^{-(\alpha^r+\beta^r+1)} \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\sigma_\rho(\rho) = [C_1^r(\alpha^r - \beta^r + \nu_\rho^r)\rho^{\alpha^r-\beta^r-1} - C_2^r(\alpha^r + \beta^r - \nu_\rho^r)\rho^{-(\alpha^r+\beta^r+1)}]J_\rho^r$$
$$\sigma_\theta(\rho) = [C_1^r(1 + \nu_\theta^r(\alpha^r - \beta^r))\rho^{\alpha^r-\beta^r-1} + C_2^r(1 - \nu_\theta^r(\alpha^r + \beta^r))\rho^{-(\alpha^r+\beta^r+1)}]J_\theta^r \quad (3.3)$$

где C_1^r, C_2^r – произвольные постоянные, и

$$\beta^r = (\nu_\rho^r - \nu_\theta^r E_\theta^r/E_\rho^r)/2, \quad \alpha^r = \sqrt{(\beta^r)^2 + E_\theta^r/E_\rho^r}$$
$$J_\rho^r = E_\rho^r/(1 - \nu_\rho^r\nu_\theta^r), \quad J_\theta^r = E_\theta^r/(1 - \nu_\rho^r\nu_\theta^r)$$

4. Мембранные усилия в большой диафрагме. Внутрь большого основания оболочки вставлена упругая пластина толщиной, равной полутолщине большой диафрагмы $h_R/2$, и шарнирно соединена с краем основания. Перемещения и напряжения в большой пластине являются осесимметричными, как и у оболочки. Поэтому перемещения, деформации и напряжения описываются формулами (2.6), (2.7), (2.8), в которых $e_0 \equiv 0$:

$$u(\rho) = C_1^R\rho^{\alpha^R-\beta^R} + C_2^R\rho^{-(\alpha^R+\beta^R)} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_\rho(\rho) = C_1^R(\alpha^R - \beta^R)\rho^{\alpha^R-\beta^R-1} - C_2^R(\alpha^R + \beta^R)\rho^{-(\alpha^R+\beta^R+1)}$$
$$\varepsilon_\theta(\rho) = C_1^R\rho^{\alpha^R-\beta^R-1} + C_2^R\rho^{-(\alpha^R+\beta^R+1)} \quad (4.2)$$

$$\sigma_\rho(\rho) = [C_1^R(\alpha^R - \beta^R + \nu_\rho^R)\rho^{\alpha^R-\beta^R-1} - C_2^R(\alpha^R + \beta^R - \nu_\rho^R)\rho^{-(\alpha^R+\beta^R+1)}]J_\rho^R$$
$$\sigma_\theta(\rho) = [C_1^R(1 + \nu_\theta^R(\alpha^R - \beta^R))\rho^{\alpha^R-\beta^R-1} + C_2^R(1 - \nu_\theta^R(\alpha^R + \beta^R))\rho^{-(\alpha^R+\beta^R+1)}]J_\theta^R \quad (4.3)$$

где C_1^R, C_2^R – произвольные постоянные, и

$$\beta^R = (\nu_\rho^R - \nu_\theta^R E_\theta^R/E_\rho^R)/2, \quad \alpha^R = \sqrt{(\beta^R)^2 + E_\theta^R/E_\rho^R}$$
$$J_\rho^R = E_\rho^R/(1 - \nu_\rho^R\nu_\theta^R), \quad J_\theta^R = E_\theta^R/(1 - \nu_\rho^R\nu_\theta^R)$$

5. Граничные условия сплющенного сильфоника. Внутренний контур малой диафрагмы свободен от внешних воздействий. Поэтому $\sigma_\rho(r_0) = 0$. Это условие дает

$$C_2^r = C_1^r r_0^{2\alpha^r}(\alpha^r - \beta^r + \nu_\rho^r)/(\alpha^r + \beta^r - \nu_\rho^r)$$

С учетом этого можно записать:

$$u(\rho) = C_1^r\rho^{-(\alpha^r+\beta^r)}\left(\rho^{2\alpha^r} + \frac{\alpha^r - \beta^r + \nu_\rho^r}{\alpha^r + \beta^r - \nu_\rho^r}r_0^{2\alpha^r}\right)$$

$$\sigma_\rho(\rho) = C_1^r(\alpha^r - \beta^r + \nu_\rho^r)\rho^{-(\alpha^r+\beta^r+1)}(\rho^{2\alpha^r} - r_0^{2\alpha^r})J_\rho^r$$

При сплющивании в сильфоне всех сильфоников в пластину малые диафрагмы сильфона оказываются объятыми кольцевыми пластинами, в которые превращаются оболочки. Поэтому в расчетной схеме шарнирное соединение малой пластины с краем малого основания оболочки мы принимаем такое, что нормальные напряжения σ_ρ по контакту пластины и оболочки равны и имеют одинаковые знаки.

Внутренний контур большой диафрагмы свободен от внешних воздействий. Поэтому $\sigma_\rho(R_0) = 0$. Это условие дает

$$C_2^R = C_1^R r_0^{2\alpha^R}(\alpha^R - \beta^R + \nu_\rho^R)/(\alpha^R + \beta^R - \nu_\rho^R)$$

С учетом этого можно записать:

$$u(\rho) = C_1^R \rho^{-(\alpha^R+\beta^R)}\left(\rho^{2\alpha^R} + \frac{\alpha^R - \beta^R + \nu_\rho^R}{\alpha^R + \beta^R - \nu_\rho^R} R_0^{2\alpha^R}\right)$$

$$\sigma_\rho(\rho) = C_1^R(\alpha^R - \beta^R + \nu_\rho^R)\rho^{-(\alpha^R+\beta^R+1)}(\rho^{2\alpha^R} - R_0^{2\alpha^R})J_\rho^R$$

При сплющивании сильфона его большие диафрагмы осесимметрично растягиваются краями больших оснований оболочек сильфоника. А так как оболочки проецируются на большие диафрагмы, то в расчетной схеме мы принимаем, что шарнирное соединение большой пластины с краем большого основания оболочки такое, что нормальные напряжения σ_ρ по контакту пластины и оболочки равны по абсолютной величине, но имеют разные знаки: край оболочки сжат, а край большой пластины растянут.

По контакту пластин со сплющенной оболочкой выполняются условия непрерывности радиальных смещений и условия непрерывности радиальных усилий. Отсутствие силовых факторов на внутренних контурах диафрагм мы уже учли. Поэтому перечисленные граничные условия выражаются четырьмя равенствами, которые образуют систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными: C_1, C_2, C_1^r, C_1^R. Запишем ее в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & 0 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & 0 & a_4^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_1^r \\ C_1^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \end{bmatrix}$$

Ненулевые элементы матриц этой системы уравнений:

$$a_1^1 = r^{\alpha-\beta}, \quad a_2^1 = r^{-(\alpha+\beta)}, \quad a_3^1 = -r^{-(\alpha^r+\beta^r)}\left(r^{2\alpha^r} + \frac{\alpha^r - \beta^r + \nu_\rho^r}{\alpha^r + \beta^r - \nu_\rho^r} r_0^{2\alpha^r}\right)$$

$$a_1^2 = (\alpha - \beta + \nu_\rho) r^{\alpha-\beta-1}, \quad a_2^2 = -(\alpha + \beta - \nu_\rho) r^{-(\alpha+\beta+1)}$$

$$a_3^2 = -(\alpha^r - \beta^r + \nu_\rho^r)r^{-(\alpha^r+\beta^r+1)}(r^{2\alpha^r} - r_0^{2\alpha^r})J_\rho^r h^r / 2J_\rho h$$

$$a_1^3 = R^{\alpha-\beta}, \quad a_2^3 = R^{-(\alpha+\beta)}, \quad a_4^3 = -R^{-(\alpha^R+\beta^R)}\left(R^{2\alpha^R} + \frac{\alpha^R - \beta^R + \nu_\rho^R}{\alpha^R + \beta^R - \nu_\rho^R} R_0^{2\alpha^R}\right)$$

$$a_1^4 = (\alpha - \beta + \nu_\rho) R^{\alpha-\beta-1}, \quad a_2^4 = -(\alpha + \beta - \nu_\rho) R^{-(\alpha+\beta+1)}$$

$$a_4^4 = (\alpha^R - \beta^R + \nu_\rho^R)R^{-(\alpha^R+\beta^R+1)}(R^{2\alpha^R} - R_0^{2\alpha^R})J_\rho^R h^R / 2J_\rho h$$

$$b^1 = e_0\left[(1 - \nu_\theta E_\theta / E_\rho)/2\alpha\right]\left[v(r) - r/(\alpha + \beta + 1)\right], \quad b^2 = -\psi_\rho(r)$$

$$b^3 = e_0\left[(1 - \nu_\theta E_\theta / E_\rho)/2\alpha\right]\left[v(R) - R/(\alpha + \beta + 1)\right], \quad b^4 = -\psi_\rho(R)$$

Решение этой системы уравнений открывает возможность вычисления перемещений деформаций и напряжений всех элементов расчетной схемы от действия мембранных усилий в сильфонике, трансформированном в пластину.

Обратим внимание, что результаты этих расчетов могут существенно превосходить пределы упругости применяемых в конструкции материалов. Однако это не должно быть основанием, чтобы признать их ошибочными. Следует вспомнить, что мы гипотетически приняли неограниченную упругость, имея при этом в виду, что рабочая на-

грузка на сильфон будет меньше нагрузки, при которой все сильфоники сплющиваются.

6. Предельное нагружение сильфона. Гипотетически мы примем, что в процессе трансформирования оболочки в кольцевую пластину прямолинейные образующие конуса остаются прямолинейными. Иными словами, мы будем считать, что потеря устойчивости формы оболочки прогибом ее стенки не наблюдается.

Пусть F_* – такое значение силы F, под действием которой оболочка в форме кругового усеченного конуса с прямолинейными образующими может сохранять первоначальную форму, но при увеличении F_* на как угодно малую величину выпуклость конуса может скачкообразно выгнуться в противоположную сторону. Произойдет прощелкивание оболочки. Мы назовем силу F_* критической силой прощелкивания.

Пусть ξ является тем текущим значением длины, на которое уменьшилось начальное расстояние между основаниями конуса под действием переменной силы F. Очевидно, что при трансформировании конуса в пластину значение ξ изменяется от 0 до H.

Мы обозначим ξ_* – такое значение $\xi \in (0, H)$, при котором F равно F_*.

Трансформирование конической оболочки в круглую кольцевую пластину будем осуществлять путем увеличения ξ не простым увеличением нагрузки на оболочку, а специальным методом нагружения, называемым нагружением перемещением.

Нагружение перемещением характеризуется следующими особенностями: 1) перемещение ξ монотонно увеличивается в течение всего процесса нагружения перемещением; 2) сила F увеличивается от начала нагружения до значения F_* и уменьшается от F_* до нуля; 3) оболочка остается в статическом равновесии все время нагружения.

Такое нагружение можно осуществить, если оболочку сделать сжимаемым элементом какой-то статически неопределимой системы.

На первом этапе роста ξ сила F увеличивается от $F = 0$ до $F = F_*$. Положительному приращению ξ соответствует положительное приращение F: $\Delta\xi > 0$, $\Delta F > 0$. Такое соотношение знаков приращений означает, что при $0 \le \xi < \xi_*$ оболочка находится в состоянии устойчивого равновесия.

На втором этапе роста ξ сила F уменьшается от $F = F_*$ при $\xi = \xi_*$ до нуля при $\xi = H$. Такое изменение F будет очевидным, если заметить, что при $\xi = H$ оболочка становится пластиной, которая находится в состоянии безразличного равновесия. Но при безразличном равновесии пластины мы имеем $F = 0$. При $\xi > \xi_*$ положительному приращению ξ соответствует отрицательное приращение F: $\Delta\xi > 0$, $\Delta F < 0$. Такое соотношение знаков приращений означает, что при $\xi_* < \xi \le H$ оболочка находится в состоянии неустойчивого равновесия. Неустойчивость является таким статическим равновесием оболочки под нагрузкой, при котором оболочка может сохранять начальную форму, но может также скачкообразно изменить направление выпуклости на противоположное.

Теперь рассмотрим поведение оболочки в двухсторонней окрестности точки ξ_*. При $\xi < \xi_*$ оболочка находится в состоянии устойчивого равновесия. При $\xi > \xi_*$ оболочка находится в состоянии неустойчивого равновесия. Следовательно, если $\delta F > 0$ суть как угодно малое приращение F, тогда при $F = F_* + \delta F$ оболочка изменит направление выпуклости. Произойдет явление, которое называют прощелкиванием оболочки. Таким образом, сила F_* является максимальным значением силы F, если

начальная нагрузка удовлетворяет неравенству $F < F_*$. Если начальное значение нагрузки удовлетворяет неравенству $F > F_*$, то начальная нагрузка сразу вызовет прощелкивание оболочки. Поэтому F_* является минимальной силой для любой силы $F \geq F_*$, вызывающей прощелкивание оболочки. Таким образом, эксплуатационные нагрузки на оболочку сильфоника и, следовательно, на весь сильфон заключены в интервале от $F = 0$ до $F \leq F_*$. Это дает основание называть F_* критической силой сжатия сильфона.

7. Критическая сила сжатия сильфона. Исследование функциональной зависимости $F(\xi)$ является самостоятельной задачей. Природа зависимости $F(\xi)$ не вытекает из результатов, которые были получены в предыдущих разделах этой работы. В то же время зависимость $F(\xi)$ является необходимой для решения задачи о критической силе F_*. Поэтому мы вынуждены ограничиться приближенной зависимостью $F(\xi)$. Возьмем квадратичную аппроксимацию $F(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2$.

Как установлено выше,

$$F(0) = 0, \quad F(\xi_*) = F_*, \quad F'(\xi_*) = 0, \quad F(H) = 0$$

Подчиняя квадратный трехчлен этим условиям, получаем

$$F(\xi) = 4F_* \frac{\xi}{H}\left(1 - \frac{\xi}{\mathrm{H}}\right), \quad \xi_* = \frac{H}{2} \tag{7.1}$$

При трансформировании круглой конической оболочки сильфоника с прямолинейными образующими в круглую пластину равнодействующая сжимающих сил $F(\xi)$ совершает работу

$$W = \int_0^H F(\xi)\,d\xi = \int_0^H 4F_* \frac{\xi}{H}\left(1 - \frac{\xi}{H}\right)d\xi = \frac{2}{3}F_* H \quad \Rightarrow \quad W = \frac{2}{3}F_* H$$

По формулам напряжений и деформаций элементов расчетной схемы, полученным выше, можно вычислить потенциальную энергию U упругой деформации всех элементов расчетной схемы: P – потенциальная энергия оболочки, трансформированной в кольцевую пластину; P^r – потенциальная энергия малой пластины, которая равна малой диафрагме половинной толщины, и P^R – потенциальная энергия большой пластины, которая равна большой диафрагме половинной толщины. Таким образом,

$$U = P + P^r + P^R$$

$$P = \frac{\pi h}{1 - \nu_\rho \nu_\theta} \int_r^R [E_\rho \varepsilon_\rho^2 + E_\theta \varepsilon_\theta^2 + (\nu_\rho E_\rho + \nu_\theta E_\theta)\varepsilon_\rho \varepsilon_\theta]\rho d\rho$$

$$P^r = \frac{\pi h^r/2}{1 - \nu_\rho^r \nu_\theta^r} \int_{r_0}^r [E_\rho^r \varepsilon_\rho^2 + E_\theta^r \varepsilon_\theta^2 + (\nu_\rho^r E_\rho^r + \nu_\theta^r E_\theta^r)\varepsilon_\rho \varepsilon_\theta]\rho d\rho$$

$$P^R = \frac{\pi h^R/2}{1 - \nu_\rho^R \nu_\theta^R} \int_{R_0}^R [E_\rho^R \varepsilon_\rho^2 + E_\theta^R \varepsilon_\theta^2 + (\nu_\rho^R E_\rho^R + \nu_\theta^R E_\theta^R)\varepsilon_\rho \varepsilon_\theta]\rho d\rho$$

Работа W силы F в процессе трансформирования расчетной схемы в виде полусильфоника в плоское тело расходуется на создание вычисленной выше потенциальной энергии U. Поэтому $W = U$. Отсюда следует

$$F_* = (3/2)U/H \tag{7.2}$$

8. Текущее напряженно-деформированное состояние сильфона. Мы будем рассматривать текущее состояние сильфона (будем считать сильфон практически применимым) в пределах $\xi \in (0, \xi_*)$, т.е. при сжатии сильфона докритической силой $F < F_*$.

Значение критической силы мы вычисляем по формуле (7.2).

Пусть $\Omega = \Omega(\xi, \rho)$ – матрица-столбец, элементами которой являются компоненты напряженно-деформированного состояния (перемещение, деформация, напряжение) любого из элементов сильфоника (оболочка, малая диафрагма, большая диафрагма).

Так как $F(0) = 0$, то $\Omega(0, \rho) = 0$.

В предыдущих параграфах мы вычислили все элементы матрицы $\Omega(H, \rho)$.

Если оболочка прощелкнет (сменит направление выгнутости), то она будет в напряженно-деформированном состоянии, описываемом матрицей $\Omega(\xi, \rho)$ при $\xi < H$. Поэтому $\xi = H$ является точкой локального экстремума функций матицы $\Omega(\xi, \rho)$. Следовательно, $\partial\Omega(H, \rho)/\partial\xi = 0$.

Подчиняя квадратичную зависимость $\Omega(\xi, \rho) = B_0 + B_1\xi + B_2\xi^2$ выявленным условиям, получаем

$$\Omega(\xi, \rho) = \Omega(H, \rho)(\xi/H)[2 - (\xi/H)] \tag{8.1}$$

При $\xi \to \xi_* = H/2$ (7.1) напрbяженно-деформированное состояние сильфона стремится к своему практически предельному (но не допустимому) состоянию. Подставляя $\xi = H/2$ в формулу (8.1), мы получаем матрицу, элементы которой определяют это состояние

$$\Omega(\xi_*, \rho) = (3/4)\Omega(H, \rho)$$

Формула (7.1) относительно ξ/H представляет собой квадратное уравнение

$$(\xi/H)^2 - \xi/H + F/4F_* = 0 \Rightarrow \xi/H = (1 \pm \sqrt{1 - F/F_*})/2$$

Выше мы установили, что $\xi < H/2$. С учетом этого принимаем

$$\xi/H = (1 - \sqrt{1 - F/F_*})/2$$

Подставляя это выражение в (8.1), мы получаем формулу

$$\begin{bmatrix} u(F,\rho) \\ \varepsilon_\rho(F,\rho) \\ \varepsilon_\theta(F,\rho) \\ \sigma_\rho(F,\rho) \\ \sigma_\theta(F,\rho) \end{bmatrix} = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{F}{F_*}}\right)\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{F}{F_*}}\right)\right]\begin{bmatrix} u(\rho) \\ \varepsilon_\rho(\rho) \\ \varepsilon_\theta(\rho) \\ \sigma_\rho(\rho) \\ \sigma_\theta(\rho) \end{bmatrix}$$

которая определяет все компоненты напряженно-деформированного состояния любого элемента сильфоника как функции прямо пропорциональные функциям этих компонентов в сплющенном сильфонике. Коэффициент пропорциональности является функцией значений текущей нагрузки на сильфон $F \in (0, F_*)$. Ясно, что в записанной выше формуле оболочка сильфоника заменяется проекцией оболочки на координатную плоскость ρ, θ.

Заключение. Полученный метод расчета напряженно-деформированного состояния пространственной конструкции, имеющей вид сильфона, не дает основания предлагать варианты конкретного практического применения такой конструкции. Однако не требуется богатого воображения, чтобы утверждать, что рассматриваемый сильфон, как обоснованно рассчитанная на прочность и устойчивость вариантно минимизированная по массе упругая композиционная конструкция, может быть востребован в разнообразных средах от океанических глубин до безвоздушного пространства в космосе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарабрин Г.Т.* Деформация пологой оболочки вращения, трансформируемой в круглую пластину // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 90–95.
2. *Тарабрин Г.Т.* Ортотропная пологая оболочка вращения, трансформируемая в круглую пластину // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 4. С. 491–498.
3. *Тарабрин Г.Т.* Устойчивость к прощелкиванию конической пологой оболочки // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 4. С. 59–63.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 42–50

УДК 534.015.1

АНАЛИЗ ДЕЙСТВИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 2021 г. В. Ф. Журавлев[a,*], А. Г. Петров[a,]**

[a] *Институт проблем механики, РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия*

** e-mail: zhurav@ipmnet.ru*

*** e-mail: petrovipmech@gmail.com*

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.
После доработки 14.03.2020 г.
Принята к публикации 16.03.2020 г.

Рассматривается система с двумя степенями свободы в случае двухкратной собственной частоты. Невозмущенная система состоит из двух независимых осцилляторов. Координаты системы описывают эллиптическую траекторию с четырьмя элементами орбиты. Проводится анализ действия линейных возмущений (сил) на элементы орбиты. Возмущения подразделяются на шесть типов сил и для каждого типа сил получена система дифференциальных уравнений для элементов орбиты. Для всех шести типов сил найдено общее решение системы дифференциальных уравнений в элементарных функциях.

Ключевые слова: резонансные системы, две степени свободы, линейные возмущения, эволюции эллиптической траектории

DOI: 10.31857/S0572329921020185

Координаты системы с двумя степенями свободы в случае двухкратной собственной частоты изменяются по эллиптической траектории [1]. Под действием малых возмущающих сил эллиптическая траектория изменяется. Для описания изменений элементов эллиптической орбиты применяется система дифференциальных уравнений, полученная методом осреднения [2]. Прикладываемые к системе линейные по координатам и скоростям силы подразделяются на шесть типов. Три типа сил, зависящие от координат, называются позиционными силами, остальные три типа сил зависят от скоростей и называются скоростными силами [3, 4]. В [1, 3] показано, что к чистым эволюциям формы колебаний приводят четыре типа сил: силы первого типа приводят только к изменению частоты, второго и третьего типа – только к изменению полуосей эллипса и силы четвертого типа приводят к прецессии эллипса. Эти четыре типа сил удобны для решения задачи управления формой колебаний. Остальные два типа сил приводят сразу ко всем типам эволюции формы и разрушают ее. Разрушение формы для этих типов сил описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка. Данная статья посвящена интегрированию этих систем уравнений. В результате получено описание эволюции форм в элементарных функциях для любых начальных условий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, следуя [1], систему

$$\ddot{q}_i + q_i = \varepsilon Q_i(t, q, \dot{q}), \quad i = 1, 2 \tag{1.1}$$

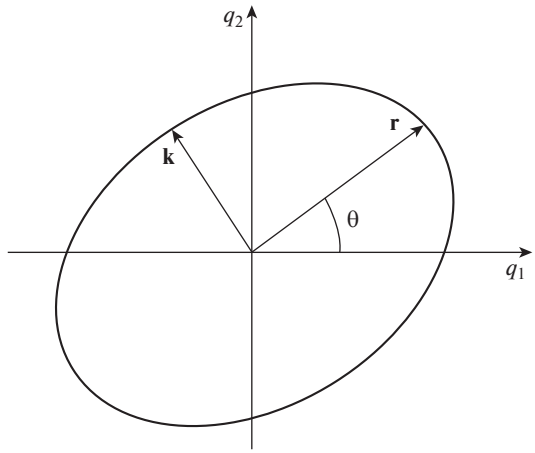

Рис. 1

Если $\varepsilon = 0$, то решение этой системы записывается в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos(t+\tau)\cos\theta - k\sin(t+\tau)\sin\theta \\ q_2 &= r\cos(t+\tau)\sin\theta + k\sin(t+\tau)\cos\theta \\ p_1 &= \dot{q}_1 = -r\sin(t+\tau)\cos\theta - k\cos(t+\tau)\sin\theta \\ p_2 &= \dot{q}_2 = -r\sin(t+\tau)\sin\theta + k\cos(t+\tau)\cos\theta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Постоянные интегрирования называются элементами орбиты. Их геометрический смысл ясен из рис. 1 (r и k – полуоси эллиптической траектории, параметр τ характеризует положение точки на эллипсе в начальный момент). Если правые части (1.1) ненулевые, то элbементы орбиты становятся функциями времени. Чтобы получить уравнения, описывающие их изменение, нужно сделать в (1.1) замену переменных по формулам (1.2). Это приводит к следующим уравнениям

$$\dot{r} = -\varepsilon(Q_1\cos\theta + Q_2\sin\theta)\sin t, \quad \dot{k} = -\varepsilon(Q_1\sin\theta - Q_2\cos\theta)\cos t$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{r^2 - k^2}\left[k(Q_1\cos\theta + Q_2\sin\theta)\cos t + r(Q_1\sin\theta - Q_2\cos\theta)\sin t\right]$$

$$\dot{\tau} = -\frac{\varepsilon}{r^2 - k^2}\left[r(Q_1\cos\theta + Q_2\sin\theta)\cos t + k(Q_1\sin\theta - Q_2\cos\theta)\sin t\right]$$

Осредненная по периоду автономная система уравнений для элементов орбиты имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{r} = -\varepsilon(Q_{12}\cos\theta + Q_{22}\sin\theta), \quad \dot{k} = -\varepsilon(Q_{11}\sin\theta - Q_{21}\cos\theta) \\ &\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{r^2 - k^2}\left[k(Q_{11}\cos\theta + Q_{21}\sin\theta) + r(Q_{12}\sin\theta - Q_{22}\cos\theta)\right] \\ &\dot{\tau} = -\frac{\varepsilon}{r^2 - k^2}\left[r(Q_{11}\cos\theta + Q_{21}\sin\theta) + k(Q_{12}\sin\theta - Q_{22}\cos\theta)\right] \\ &Q_{11} = \overline{Q_1\cos t}, \quad Q_{12} = \overline{Q_1\sin t}, \quad Q_{21} = \overline{Q_2\cos t}, \quad Q_{22} = \overline{Q_2\sin t} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь черта сверху означает знак осреднения по явному времени

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

Аналогичная система уравнений была получена в [2].

2. Анализ действия возмущений в линейном случае. Естественно начать анализ с линейных по координатам q_1, q_2 и скоростям $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ сил Q_1, Q_2

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Произвольные матрицы позиционных сил P и скоростных сил R единственным образом разлагаются на симметрическую и кососимметрическую части. В свою очередь, симметрические части этих матриц могут быть единственным образом разложены на скалярную матрицу и на матрицу с нулевым следом. В результате получаем для матриц P и R следующие представления:

$$P = C + H + N, \quad R = D + G + \Gamma$$

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad H = h\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad G = g\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Полученные шесть типов сил Q имеют следующие наименования: Cq – потенциальные силы сферического типа; Hq – потенциальные силы гиперболического типа; Nq – в литературе встречается несколько названий для этих сил: циркулярные силы, псевдогироскопические, собственно неконсервативные силы, силы радиальной коррекции; $D\dot{q}$ – диссипативные силы сферического типа, если $d < 0$; $G\dot{q}$ – скоростные силы гиперболического типа; $\Gamma\dot{q}$ – гироскопические силы. Симметрические матрицы H и G, имеющие нулевой след, называются девиаторами.

Коэффициенты h и g определяют нормы девиаторов гиперболических сил, а углы α и β ориентацию главных осей жесткости и демпфирования относительно осей q_1 и q_2.

При подстановке соответствующих сил в уравнения (1.3) и последующего осреднения получим шесть систем уравнений для параметров орбиты.

Рассмотрим более подробно эту процедуру на примере потенциальной силы.

Для невозмущенной системы (1.1) имеем решение (1.2)

$$q_1 = r\cos t\cos\theta - k\sin t\sin\theta, \quad q_2 = r\cos t\sin\theta + k\sin t\cos\theta$$

Находим компоненты потенциальных сил на невозмущенном решении $Q_1 = cq_1$, $Q_2 = cq_2$ и осредненные по периоду выражения

$$Q_{11} = \frac{1}{2}cr\cos\theta, \quad Q_{12} = -\frac{1}{2}ck\sin\theta$$

$$Q_{21} = \frac{1}{2}cr\sin\theta, \quad Q_{22} = \frac{1}{2}ck\cos\theta$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.2), получим следующие осредненные уравнения для элементов орбиты $\dot{r} = 0$, $\dot{k} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\tau} = -(1/2)c\varepsilon$.

С помощью найденных значений и (1.2) находим решение

$$q_1 = r\cos(1 - (1/2)c\varepsilon)t, \quad q_2 = k\sin(1 - (1/2)c\varepsilon)t$$

Для всех остальных случаев скорости изменений параметров орбиты находятся аналогично. Результаты представлены в таблице.

Из приведенной таблицы следует, что к чистым эволюциям формы колебаний приводят четыре типа сил из шести.

1. Потенциальные силы сферического типа Cq приводят только к изменению частоты $1 \to 1 - (1/2)c\varepsilon$.

2. Циркулярные силы Nq приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0\mathrm{ch}(n\varepsilon t/2) - k_0\mathrm{sh}(n\varepsilon t/2), \quad k = k_0\mathrm{ch}(n\varepsilon t/2) - r_0\mathrm{sh}(n\varepsilon t/2)$$

3. Диссипативные (или ускоряющие) силы $D\dot{q}$ также приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0 e^{d\varepsilon t/2}, \quad k = k_0 e^{d\varepsilon t/2}$$

4. Гироскопические силы приводят только к прецессии формы колебаний $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(k^2 - r^2)\gamma\varepsilon t$

Если возникает задача управления формой колебаний, то именно эти силы и следует выбирать для управления соответствующими эволюциями формы. Все эти результаты приведены в [1].

Гиперболические силы Hq и $G\dot{q}$ в общем случае приводят сразу ко всем типам эволюции формы. Эти случаи описываются достаточно сложной системой дифференциальных уравнений, но их тоже можно точно проинтегрировать. В этом и состоит цель данного исследования.

3. Эволюция системы под действием сил Hq. Систему уравнений под действием Hq можно записать в комплексной форме

$$\begin{gathered}\dot{r} + i\dot{k} = -\frac{1}{2}i\varepsilon h\sin 2(\theta - \alpha)(r + ik)\\ \dot{\theta} = -\frac{1}{2}\varepsilon h\frac{kr}{k^2 - r^2}\cos 2(\theta - \alpha), \quad \dot{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon h\frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2}\cos 2(\theta - \alpha)\end{gathered} \tag{3.1}$$

От переменных r, k, θ перейдем к новым переменных ρ, Φ, Θ с помощью замен

$$r + ik = \rho e^{i\Phi/2}, \quad \Theta = 2(\theta - \alpha), \quad t' = \varepsilon ht.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\frac{d\rho}{dt'} + \frac{1}{2}i\rho\frac{d\Phi}{dt'} = -\frac{1}{2}\rho i\sin\Theta, \quad \mathrm{tg}\Phi = \frac{2rk}{r^2 - k^2}, \quad \frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2} = -\frac{1}{\cos\Phi}$$

с помощью которых система уравнений (4) в новых переменных принимает вид

$$\$\frac{d\rho}{dt'} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt'} = -\sin\Theta, \quad \frac{d\Theta}{dt'} = \mathrm{tg}\Phi\cos\Theta, \quad 2\frac{d\tau}{dt'} = -\frac{\cos\Theta}{\cos\Phi} \tag{3.2}$$

Система уравнений имеет два интеграла

$$\rho = \sqrt{r_0^2 + k_0^2}, \quad \cos\Phi\cos\Theta = \cos\Phi_0\cos\Theta_0 \tag{3.3}$$

где индексом “0” обозначены начальные значения соответствующих переменных. Из соотношений для переменных r, k

$$r^2 + k^2 = r_0^2 + k_0^2, \quad r^2 - k^2 = (r_0^2 + k_0^2)\cos\Phi, \quad 2rk = (r_0^2 + k_0^2)\sin\Phi$$

выражаем r и k через Φ

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{r_0^2 + k_0^2}\left(\sqrt{1+\sin\Phi} + \sqrt{1-\sin\Phi}\right)$$
$$k = \frac{1}{2}\sqrt{r_0^2 + k_0^2}\left(\sqrt{1+\sin\Phi} - \sqrt{1-\sin\Phi}\right) \tag{3.4}$$

Зависимость от времени $\Phi(t')$ можно найти из уравнения $d^2\sin\Phi/dt'^2 + \sin\Phi = 0$, которое получается так. Преобразуем вторую производную $\sin\Phi$ с помощью уравнений (3.2) и интеграла (3.3).

$$\frac{d^2\sin\Phi}{dt'^2} = \frac{d}{dt}(\cos\Phi(-\sin\Theta)) = -\cos\Phi_0\cos\Theta_0\frac{d}{dt}\operatorname{tg}\Theta =$$
$$-\frac{\cos\Phi\cos\Theta}{\cos^2\Theta}\operatorname{tg}\Phi\cos\Theta = -\sin\Phi$$

Решение этого уравнения имеет вид $\sin\Phi = a\cos t' + b\sin t'$. Выразив постоянные a и b через начальные данные, получим

$$\sin\Phi = \sin\Phi_0\cos t' - \cos\Phi_0\sin\Theta_0\sin t'$$
$$\sin\Phi_0 = \frac{2r_0k_0}{r_0^2 + k_0^2}, \quad \cos\Phi_0 = \frac{r_0^2 - k_0^2}{r_0^2 + k_0^2} \tag{3.5}$$

Из уравнения (3.2) для τ с помощью (3.3) найдем

$$\tau = -\frac{1}{2}\int\frac{\cos\Theta_0\cos\Phi_0}{1-\sin^2\Phi}dt''$$

После подстановки выражения (3.5) интеграл вычисляется

$$\tau = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{(\sin\Phi_0)^2 + (\cos\Theta_0)^2(\cos\Phi_0)^2}{\cos\Theta_0\cos\Phi_0}\operatorname{tg}t' + \sin\Phi_0\operatorname{tg}\Theta_0\right] \tag{3.6}$$

Таким образом, найдены все зависимости от времени $t' = \varepsilon ht$: зависимости $\Phi(t')$ и $\Phi(t')$ находятся по (3.5) и (3.3) соответственно, зависимости $r(t')$ и $k(t')$ находятся подстановкой (3.5) в (3.4) и зависимость $\tau(t')$ находится по формуле (3.6).

Функцию $\tau(t')$ удобно выразить через функцию $T(t')$ так: $\tau(t') = \frac{1}{2}t'\sigma + T(t')$, где $\sigma = \operatorname{sign}[\cos\Theta_0\cos\Phi_0]$, а функция $T(t')$ имеет период равный π.

Все параметры орбиты претерпевают весьма сложное изменение, но через каждый период повторяются. Для функций r и k период равен $2\pi/(\varepsilon h)$, а для Θ и T период в два раза меньше.

На рис. 2 изображены графики функций $T(t') - 1$, $k(t') - 2$, $\cos\Theta(t') - 3$ при $\Phi_0 = 1$, $\Theta_0 = 0.5$. Они обозначены цифрами 1, 2 и 3 соответственно.

Отдельно рассмотрим вырожденный случай $\Theta = \pi/2$, $\tau = \tau_0$, $\Phi = \Phi_0 - t'$,

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{r_0^2 + k_0^2}\left(\sqrt{1+\sin(\Phi_0 - t')} + \sqrt{1-\sin(\Phi_0 - t')}\right)$$
$$k = \frac{1}{2}\sqrt{r_0^2 + k_0^2}\left(\sqrt{1+\sin(\Phi_0 - t')} - \sqrt{1-\sin(\Phi_0 - t')}\right)$$

Начальное значение Φ_0 находится из уравнений $\cos\Phi_0 = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + k_0^2}}$, $\sin\Phi_0 = \frac{k_0}{\sqrt{r_0^2 + k_0^2}}$.

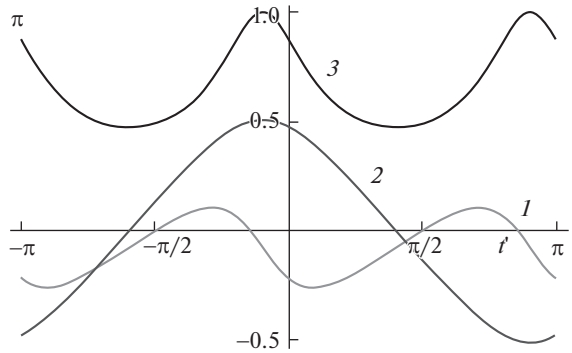

Рис. 2

4. Эволюция системы под действием сил $G\dot{q}$. Систему уравнений можно записать в комплексной форме

$$\dot{r} + i\dot{k} = \frac{1}{2}\varepsilon g \cos 2(\theta - \beta)(r - ik)$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}\varepsilon g \frac{r^2 + k^2}{k^2 - r^2}\sin 2(\theta - \beta), \quad \dot{\tau} = -\varepsilon g \frac{rk}{k^2 - r^2}\sin 2(\theta - \beta) \tag{4.1}$$

От переменных r, k, θ перейдем к новым переменным ρ, Φ, Θ с помощью замен

$$r + ik = \rho e^{i\Phi/2}, \quad \Theta = 2(\theta - \beta), \quad t' = \varepsilon g t \tag{4.2}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\frac{d\rho}{dt'} + \frac{1}{2}i\rho\frac{d\Phi}{dt'} = \frac{1}{2}\rho\cos\Theta e^{-i\Phi}$$
$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{2rk}{r^2 - k^2}, \quad \frac{r^2 + k^2}{r^2 - k^2} = \frac{1}{\cos\Phi}$$
$$r = \rho\cos(\Phi/2), \quad k = \rho\sin(\Phi/2) \tag{4.3}$$

с помощью которых система уравнений (3.1) в новых переменных принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt'} = \frac{1}{2}\rho\cos\Theta\cos\Phi, \quad \frac{d\Phi}{dt'} = -\cos\Theta\sin\Phi$$
$$\frac{d\Theta}{dt'} = -\frac{\sin\Theta}{\cos\Phi}, \quad 2\frac{d\tau}{dt'} = \sin\Theta\operatorname{tg}\Phi \tag{4.4}$$
$$\frac{dr}{dt'} = \frac{1}{2}r\cos\Theta, \quad \frac{dk}{dt'} = -\frac{1}{2}k\cos\Theta$$

Безразмерное время t' меняется в пределах $(0, \infty)$ при $g > 0$ и $(0, -\infty)$ при $g < 0$.

Система уравнений (4.4) имеет интегралы

$$rk = r_0k_0 \Rightarrow \rho^2\sin\Phi = \rho_0^2\sin\Phi_0, \quad \sin\Theta\operatorname{ctg}\Phi = \sin\Theta_0\operatorname{ctg}\Phi_0 \tag{4.5}$$

где индексом “0” обозначены начальные значения соответствующих функций.

С помощью последнего интеграла можно в уравнении для Φ исключить Θ

$$\frac{d\sin\Phi}{dt'} = -\sin\Phi\cos\Phi\cos\Theta = -\sigma\sin\Phi\sqrt{1 - s^2\sin^2\Phi}$$

$$s = \sqrt{1 + \left(\sin\Theta_0 \operatorname{ctg}\Phi_0\right)^2}, \quad \sigma = \operatorname{sign}(\cos\Phi_0\cos\Theta_0)$$

Общее решение этого уравнения

$$\sin\Phi = \pm(s\operatorname{ch}(t' \pm t_0))^{-1} \tag{4.6}$$

Из начального условия получаем уравнение $\sin\Phi_0 = (s\operatorname{ch}(\sigma t_0))^{-1}$. Из него находится положительное значение постоянной t_0. Знаки в решении (4.6) выбираются так. Первый знак должен совпадать со знаком $\sin\Phi_0$. Знак при t_0 положителен, если производная функции $(\sin\Phi(t'))^2$ при $t' = 0$ отрицательна, в противном случае знак отрицательный. Знак производной функции $(\sin\Phi(t'))^2$ совпадает со знаком числа $-\cos\Phi_0\cos\Theta_0$. С учетом выбора знаков решение (4.6) можно представить в виде

$$\sin\Phi = \operatorname{sign}(\sin\Phi_0)\left[s\operatorname{ch}(t' + \operatorname{sign}(\cos\Phi_0\cos\Theta_0)t_0)\right]^{-1} \tag{4.7}$$

Если знак $\operatorname{sign}(\cos\Phi_0\cos\Theta_0) = -1$ отрицателен и $g > 0$, то все функции меняются не монотонно, достигая следующих максимальных значений в точке $t = t_0$

$$\sin\Phi(t_0) = 1/s, \quad \sin\Theta_0 = 1,$$
$$r(t_0) = \sqrt{\frac{r_0k_0}{s + \sqrt{s^2 - 1}}}, \quad 2\tau'(t_0) = \frac{\operatorname{sign}(\sin\Theta_0\operatorname{ctg}\Phi_0)}{\sqrt{s^2 - 1}} \tag{4.8}$$

Через функцию $\sin\Phi$ выражаются все элементы орбиты. Из интегралов (4.5) находим

$$\rho = \rho_0\sqrt{\sin\Phi_0/\sin\Phi}, \quad \sin\Theta = \sin\Theta_0\operatorname{ctg}\Phi_0\operatorname{tg}\Phi$$

Переменные r и k находим из (4.3)

$$k = \sqrt{r_0k_0\left|\operatorname{tg}(\Phi/2)\right|}, \quad r = \sqrt{r_0k_0\left|\operatorname{ctg}(\Phi/2)\right|}$$

которые можно выразить через функцию времени $\sin\Phi$, определяемой по (4.7)

$$k = \sqrt{\frac{r_0k_0\left|\sin\Phi\right|}{1 + \cos\Phi}} = \sqrt{\frac{r_0k_0\left|\sin\Phi\right|}{1 - \cos\Phi}}$$
$$r = \sqrt{\frac{r_0k_0(1 - \cos\Phi)}{\left|\sin\Phi\right|}} = \sqrt{\frac{r_0k_0(1 + \cos\Phi)}{\left|\sin\Phi\right|}}$$

Из этого решения следует, что площадь эллиптической орбиты сохраняется, эллипс вытягивается в бесконечную прямую, а угол наклона к оси x большей полуоси эллиптической орбиты r стремится к нулю.

Уравнение для τ также интегрируется, откуда находится

$$2\tau = \frac{\operatorname{tg}\Phi_0}{\sin\Theta_0}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\Phi_0}{\sin\Theta_0}\operatorname{th}(t' \pm t_0)\right)$$

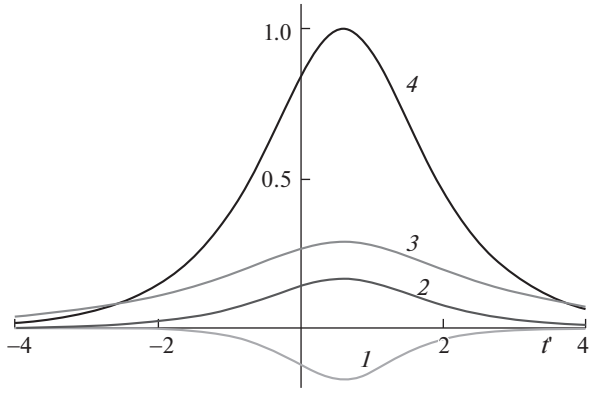

Рис. 3

На рис. 3 представлены графики зависимостей

$$2\tau'(t') = \sin\Theta(t')\mathrm{tg}\Phi(t'), \quad k(t'), \quad \sin\Theta(t'), \quad \sin\Phi(t')$$

при значениях параметров $\Theta_0 = 1$, $\Phi_0 = 3$. Они помечены цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно.

При $g > 0$ функции меняются на отрезке $(0, \infty)$, а при $g < 0$ – на отрезке $(0, -\infty)$.

При $t = t_0 = 0.597$ они достигают экстремума.

Экстремальные значения, вычисленные по формулам (18) таковы

$$\sin\Phi(t_0) = 0.167, \quad \sin\Theta_0 = 1, \quad r(t_0) = 0.29, \quad 2\tau'(t_0) = -0.169$$

Как при положительном так и при отрицательном значениях g при $t \to \infty$ полуоси эллипса стремятся принять направления декартовых осей q_1 и q_2, одна из осей стремится к нулю, а вторая растет до бесконечности. Площадь эллипса при этом сохраняется.

5. Заключение. К чистым эволюциям формы колебаний приводят четыре типа сил.

1. Потенциальные силы сферического типа Cq приводят только к изменению частоты $1 \to 1 - (1/2)c\varepsilon$.

2. Циркулярные силы Nq приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0\mathrm{ch}(n\varepsilon t/2) - k_0\mathrm{sh}(n\varepsilon t/2), \quad k = k_0\mathrm{ch}(n\varepsilon t/2) - r_0\mathrm{sh}(n\varepsilon t/2)$$

3. Диссипативные (или ускоряющие) силы $D\dot{q}$ также приводят только к изменению осей эллипса

$$r = r_0 e^{d\varepsilon t/2}, \quad k = k_0 e^{d\varepsilon t/2}$$

4. Гироскопические силы приводят только к прецессии формы колебаний $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(k^2 - r^2)\gamma\varepsilon t$.

Если возникает задача управления формой колебаний, то именно эти силы и следует выбирать для управления соответствующими эволюциями формы. Все эти результаты приведены в [1, 3, 4].

Гиперболические силы Hq и $G\dot{q}$ в общем случае описываются достаточно сложной нелинейной системой дифференциальных уравнений. Решение их в общем случае представлено в элементарных функциях. Для сил Hq функция $\sin\Phi$ меняется по гармоническому закону и через нее выражены все элементы орбиты: полуоси эллипса по

Таблица 1

	Cq	Hq	Nq	$D\dot{q}$	$G\dot{q}$	$\Gamma\dot{q}$
$\dot{r}$	0	$\frac{1}{2}hk\varepsilon\sin(2(\theta-\alpha))$	$-\frac{kn\varepsilon}{2}$	$\frac{dr\varepsilon}{2}$	$\frac{1}{2}gr\varepsilon\cos(2(\theta-\beta))$	0
$\dot{k}$	0	$-\frac{1}{2}hr\varepsilon\sin(2(\theta-\alpha))$	$-\frac{rn\varepsilon}{2}$	$\frac{dk\varepsilon}{2}$	$-\frac{1}{2}gk\varepsilon\cos(2(\theta-\beta))$	0
$\dot{\theta}$	0	$-hkr\varepsilon\frac{\cos(2(\theta-\alpha))}{k^2-r^2}$	0	0	$\frac{1}{2}g\varepsilon\frac{k^2+r^2}{k^2-r^2}\sin(2(\theta-\beta))$	$-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon$
$\dot{\tau}$	$-\frac{1}{2}c\varepsilon$	$\frac{1}{2}h\varepsilon\frac{r^2+k^2}{k^2-r^2}\cos(2(\theta-\alpha))$	0	0	$-\frac{gkr}{k^2-r^2}\varepsilon\sin(2(\theta-\beta))$	0

формулам (3.4), его площадь меняется по гармоническому закону $2rk = (r_0^2 + k_0^2)\sin\Phi$, угол прецессии θ выражается через функцию Φ по формулам $\Theta = 2(\theta - \alpha)$, $\cos\Phi\cos\Theta = \cos\Phi_0\cos\Theta_0$. Все элементы орбиты меняются по периодическому закону с периодом $2\pi/(\varepsilon h)$.

Из решения задачи о движении системы под действием силы Gq следует, что площадь эллиптической орбиты сохраняется, эллипс вытягивается в бесконечную прямую, а угол наклона к оси q большей полуоси эллиптической орбиты r стремится к нулю.

Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов// МТТ. 1997. Вып 6. С. 27–35.
2. *Friedland B., Hulton M.F.* Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1978. V. 23. № 4. P. 545–556.
3. *Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.” 2017. 194 с.
4. *Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 51–62

УДК 624.124.791

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СУДОВ И МОРСКИХ СООРУЖЕНИЙ СО ЛЬДОМ

© 2021 г. Е. М. Грамузов[a], Ю. А. Двойченко[a], В. А. Зуев[a], А. С. Себин[a,*]

[a] *Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: asebin@nntu.ru*

Поступила в редакцию 04.09.2019 г.
После доработки 15.09.2019 г.
Принята к публикации 18.09.2019 г.

Рассмотрены подходы к физическому моделированию льда как материала и ледяного покрова как специфического природного объекта при модельных испытаниях судов и морских инженерных сооружений в ледовых бассейнах. Выполнен анализ способов получения моделей льда частично удовлетворяющих условиям теории подобия. Показаны новые способы моделирования и получения ледяного покрова более полно удовлетворяющих методам теории моделирования.

Ключевые слова: ледовые опытовые бассейны, модели ледяного покрова, испытания моделей судов, теория подобия, анализ, физическое моделирование

DOI: 10.31857/S0572329921020094

1. Введение. Сложность процессов взаимодействия судов и сооружений со льдом не всегда позволяет составить достоверную математическую модель такого взаимодействия. Поэтому получение данных о ледовых качествах судов еще при проектировании приводит к необходимости обращаться к экспериментальным методам исследования на моделях. Сейчас в мире насчитывается более 15 работающих ледовых бассейнов, в которых проводятся испытания судов в сплошных, битых, торосистых льдах, моделируется работа буровых установок и мостовых опор в ледовых условиях с целью прогнозирования силового воздействия льда на суда и морские сооружения, исследуется работа различных устройств и систем, повышающих эффективность проведения операций во льдах.

Основной проблемой моделирования ледового сопротивления является создание физической модели льда, адекватно отображающей его взаимодействие с судами и сооружениями в натурных условиях.

Теоретические обоснования моделирования движения судов во льдах, разработаны в середине прошлого века Ю.А. Шиманским и Л.М. Ногидом (г. Санкт-Петербург) [1, 2]. Согласно этой теории, основными критериями подобия являются:

$$\rho_n^i = \rho_m^i, \quad \rho_n^w = \rho_m^w, \quad \mu_n = \mu_m, \quad f_n = f_m, \quad \frac{h_n}{h_m} = \lambda, \quad E_m = \frac{E_n}{\lambda} \tag{1.1}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_n}{\lambda}, \quad \frac{E}{\sigma} = \text{const}, \quad \text{Fr} = \text{const}, \quad \text{Re} = \text{const}, \quad Ch = \text{const}$$

где ρ_n^i, ρ_m^i – плотность натурного и модельного льда; ρ_n^w, ρ_m^w – плотность воды натуры и модели; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона для льда; σ_m, σ_n – разрушающие лед нормальные напряжения; f_n, f_m – коэффициенты трения льда о корпус для натуры и модели; λ – геометрический масштаб моделирования; h_n, h_m – толщина натурного и модельного ледяного покрова; $Fr = v/\sqrt{gL}$ – число Фруда; $Re = vL/\nu$ – число Рейнольдса; $Ch = \rho v^2/E$ – число Коши; v_n, v_m – скорости движения натуры и модели; ν_n, ν_m – кинематический коэффициент вязкости жидкости натуры и модели.

К этим критериям также иногда добавляют критерий А.С. Аткинса [3], учитывающий трещинообразование в ледяном покрове.

$$Yn = Ch^2\left(\frac{El}{k}\right)^{1/2} \tag{1.2}$$

где Yn – ледовое число; l – характерная длина дефектов кристаллической решетки; k – вязкость разрушения.

Полное сопротивление среды при движении судна во льдах R обычно представляется в виде:

$$R = R_d + R_{rub} + R_w \tag{1.3}$$

где R_d – сопротивление разрушения льда и трения его о корпус; R_{rub} – сопротивление обломков; R_w – сопротивление воды.

Различная природа сил, составляющих ледовое сопротивление, подчиняющихся разным законам, требует при моделировании одновременного выполнения перечисленных критериев подобия (формула (1.1)). Этого, как правило, достичь не удается, и обычно речь идет лишь о частичном подобии.

В этой статье выполнен анализ существующего опыта, а также приведены новые подходы к физическому моделированию льда как материала и ледяного покрова как специфического природного объекта в задачах оценки воздействия льда на суда и морские инженерные сооружения.

2. Анализ накопленного опыта моделирования ледяного покрова. Казалось бы, материалом для имитации ледовых условий мог бы стать тонкий естественный лед, но его повышенная прочность по сравнению с требуемой теорией моделирования при сохранении геометрического подобия по толщине ($h_m = h_n/\lambda$) делает его малопригодным для испытаний. В соответствии с условиями (1.1) необходимо, чтобы прочность и упругость модели льда были в масштаб раз меньше, чем у натуры при сохранении постоянного отношения E/σ. При таком подходе модельный лед становится более пластичным, чем упругим телом, что при его разрушении приводит к несоответствию геометрии образования трещин с натурными условиями и, как следствие, к нарушению динамического подобия.

Поэтому во всем мире ведутся поиски новых моделей льда как в отношении материала, его имитирующего, так и в отношении управления его характеристиками.

К настоящему времени в мировой практике накоплен широкий опыт моделирования льда, а также создано большое количество различных видов лабораторного льда.

Первая методика ледового модельного эксперимента была разработана в ААНИИ при участии Ю.А. Шиманского, Л.М. Ногида, И.И. Позняка, В.И. Каштеляна и использовалась в первом ледовом бассейне при исследовании ходкости судов в ровных однородных сплошных льдах [1]. Ее основу составляло предположение, что силы сопротивления, не зависящие от скорости движения (прямое сопротивление), можно строго моделировать по условию Фруда, а разрушение ровного однородного сплошного льда корпусом ледокола происходит главным образом под действием изгибных

напряжений. Поэтому в качестве главного параметра, характеризующего физическую модель льда, была выбрана прочность льда на изгиб, измеренная при разрушении плавающей балки-полоски.

Однако такой метод проверки адекватности модельного льда до сих пор является основным в российских и зарубежных ледовых бассейнах.

Для обеспечения в модельном эксперименте соответствующих характеристик движения эталонной модели Лавров разработал особую методику, основанную на известном тогда свойстве льда уменьшать прочность с ростом содержания соли [4]. Суть ее заключается в том, что в воде растворяется поваренная соль до концентрации 7‰. При замораживании водного раствора концентрированный солевой рассол не замерзает, а скапливается между кристаллами льда, уменьшая тем самым прочность ледяного покрова. Такая модель льда получила название «лабораторный лед Лаврова (“Na-Cl-ice”). Однако, полученный таким образом моделированный лед обладает повышенной пластичностью. Из-за этого не выполняется одно из главных условий моделирования – равенство отношения предела прочности к модулю упругости у натурного и у модельного льда ($(E/\sigma)_n = (E/\sigma)_m$). Это не позволяет непосредственно моделировать силы разрушения при движении ледокола.

Пересчет результатов опытов в лабораторном льду на натуру производится с помощью поправочных коэффициентов, определяемых эмпирическим путем с помощью прогона модели эталонного ледокола с известными натурными данными.

Главным недостатком модели Лаврова является невыполнение условия моделирования, заключающегося в отношении предела прочности к модулю упругости натурного и модельного ледяного покрова, что приводит несовпадению феноменологической картины разрушения натурного ледяного покрова и модельного льда. Это не позволяет получить в опытах силы, которые в соответствии с законом моделирования Ньютона были бы в куб масштаба раз меньше натурных. Поэтому последующие исследования были направлены на поиск новых критериев моделирования, позволяющих наиболее достоверно отражать взаимодействия корпуса судна с ледовыми образованиями, используя модель соленого льда Лаврова.

Исследования, направленные на поиск нового критерия моделирования, привели Е. Энквеста в 70-х годах прошлого века к осознанию важности критерия Коши при моделировании процесса разрушения ледяного покрова. Однако, предложенная им методика моделирования льда для бассейна WARC (сейчас Aker Arctic) [5] оказалась не очень удачной. Исследования показали, что для выполнения условия Коши необходимо использовать в модельном эксперименте лабораторный лед, динамический коэффициент трения которого о корпус модели в 2.0–2.5 раза больше натурного значения, что достигалось путем нанесения на корпус модели судна соответствующих покрытий. Подобная вариация не устраняла недостатки модели ААНИИ, но вносила дополнительную условность в проведение экспериментов.

Следующим важным этапом стал предложенный И. Шварцем новый метод и новая модель лабораторного льда [6]. Он предложил использовать при моделировании в качестве базовой характеристики льда отношение модуля упругости к пределу прочности на изгиб, что должно было обеспечить совместное выполнение критериев Фруда и Коши. Значение этого соотношения проверялось в ходе эксперимента по облому консольной балки-полоски на плаву. Этот метод получил очень широкое распространение в ледовых опытовых бассейнах. Почти все дальнейшие исследования были направлены на подбор такого материала для модели льда, который наиболее бы полно соответствовал критериям подобия метода Шварца. Однако, этот метод не позволяет достигнуть полного моделирования сил, связанных с взаимодействием тел со льдом, не позволяет уверенно предсказывать ледовое сопротивление движению судов и ледовые нагрузки на платформы. Причины этого разобраны далее при изложении опыта, полученного в этой области сотрудниками НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Тем не менее,

стоит отметить, что метод моделирования Шварца используется в настоящее время практически во всех опытовых бассейнах мира при создании новых образцов морской и речной ледотехники [7].

В гамбургском ледовом бассейне HSVA (Hamburg Ship Model Basin, Hamburg, Germany) под руководством И. Шварца были произведены специальные исследования лабораторного льда, полученного из раствора с низкой концентрацией NaCl (0.6‰) [8]. Эксперименты показали, что путем “подогрева” (“растепления”) моделированного льда непосредственно перед испытаниями (повышение температуры воздуха над поверхностью моделированного льда до 0°С за несколько часов до проведения эксперимента) можно существенно увеличить отношение модуля упругости к пределу прочности на изгиб.

Результаты этих исследований сильно повлияли на дальнейшее развитие ледового моделирования. Все бассейны, построенные после 1975 г. обладали системой «растепления», а также имели тенденцию к увеличению чаши бассейна. Однако, как показал последующий опыт, увеличение размеров бассейна не приводит к качественному улучшению и повышению надежности результатов, получаемых в модельном эксперименте. В настоящее время модельный лед Шварца используется при определении ледовых нагрузок в гамбургском ледовом бассейне HSVA [9], в большом ледовом бассейне КГНЦ (Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия) и в большом ледовом бассейне ААНИИ (Арктический и Антарктический научно-исследовательский институт, Санкт-Петербург, Россия) [7].

В 1980 г. в Канаде Г.В. Тимко после проведения серии опытов с растворами различных веществ в бассейне NRCC предложил использовать для получения модельного льда водный раствор карбамида (мочевины) [10, 11]. Однако, предложенная Тимко модель не смогла удовлетворить всем заявленным требованиям, а лишь частичное подобие свойств лабораторного и натурного льда не могло не сказаться на корректности моделирования силового взаимодействия инженерных сооружений с ледовыми образованиями [12]. Тем не менее, данная модель льда в настоящее время используется для экспериментов в ледовом опытовом бассейне IIHR (Iowa Institute of Hydraulic Research, Iowa, USA), в ледовом опытовом бассейне CRREL (Cold Region Research and Engineering Laboratory, Hanover, USA), в ледовом бассейне инженерной лаборатории университета Тянцзин (Ice Engineering Laboratory of Tianjin University, China) [13–15].

В 1985 г. Г.В. Тимко, продолжая совершенствовать созданную им модель, опубликовал результаты исследований, где предложил использовать новый материал модели при использовании старой технологии приготовления лабораторного льда. Этот лед получил название EG/AD/S-ice. Для получения прослоек жидкой фазы в лабораторном льду использовался раствор, включающий три химических компонента: незамерзающее вещество – этиленгликоль (EG), алифатический детергент (AD) и сахар (S). Каждый компонент выполнял определенную роль в формировании характеристик льда. Однако, технология приготовления такого лабораторного льда для практического применения оказалась очень сложной, а предложенная Тимко модель даже в модернизированном виде не смогла достичь необходимого для практики подобия натуре. В настоящее время эта модель с применением дополнительных поправочных коэффициентов пересчета на натуру используется для предсказания ледовых нагрузок преимущественно канадскими и корейскими исследователями-ледотехниками: ледовый бассейн NRC-CHC (National Research Council – Canadian Hydraulics Centre, Ottawa, Canada), ледовый бассейн NRC-IOT (National Research Council – Institute for Ocean Technology, St, John’s, Canada), ледовый опытовый бассейн MOERI (Marine and Ocean Engineering and Research Institute, Korea) [16–18].

К 1980-х годов был накоплен большой объем данных по трещиностойкости льда. Н. Урабе на основе законов механики хрупкого разрушения материалов сформулировал законы подобия, дополняющие законы подобия Фруда и Коши [19]. Анализ на-

турных данных по трещиностойкости льда показал, что критический коэффициент интенсивности напряжений льда зависит от абсолютной температуры, объема рассола и размеров кристаллов льда. Температуру и объем рассола моделированного льда нельзя изменять произвольно, поскольку ими определяется прочность льда на изгиб и модуль упругости, которые моделируются согласно указанным выше законам подобия. Для удовлетворения дополнительного критерия размеры кристаллов необходимо уменьшить не пропорционально масштабу модели, а по более сложной зависимости.

Технология получения моделированного льда с кристаллами заданных размеров еще не разработана, и в настоящее время нет оснований полагать, что удастся наморозить моделированный лед не только с кристаллами заданных размеров, но и с заданным распределением размеров кристаллов по толщине ледяного покрова. Эта модель не получила распространения в современных ледовых бассейнах, однако явилась первым опытом применения законов механики хрупкого разрушения в моделировании разрушения ледяного покрова.

Аткинс [3] сделал попытку учесть разрушения ледяного покрова, связанное с появлением трещин. Поэтому было предложено пересчитывать сопротивление вводя безразмерное число Аткинса, зависящее от коэффициента интенсивности напряжения.

В первой половине 80-х годов Э. Энквист и С. Мякинен в ледовом бассейне WARC (Aker Arctic) предложили новый тип лабораторного льда – тонкогранулированный лед (FG-ice) [20, 21]. Технология получения этого льда заключается в постоянном распылении над чашей бассейна солевого раствора в течение всего времени его приготовления. В результате образуется гранулированный лед, структура которого схожа с двухкомпонентным материалом лед-снег. Технология получения такого льда позволяет управлять физико-механическими свойствами лабораторного льда путем изменения концентрации распыляемого раствора и времени его распыления над поверхностью бассейна. Все исследования, проводимые после, заключались в применении технологии «распыления» к различным материалам, используемым в моделировании льда.

В 1988 г. по результатам исследований, проведенных в ледовом бассейне NKK под руководством С. Нарита, был разработан гранулированный структурированный лабораторный лед [22]. Технология приготовления этого льда схожа с технологией получения FG-ice. Принципиальная разница состоит в том, что новая модель получена путем распыления над чашей ледового бассейна раствора карбамида. В 1990 г. Э. Энквист и А. Нортала-Хойкканен [23, 24] в ледовом бассейне Aker Arctic (бывший WARC) разработали новый тип высокозернистого льда – FGX-ice. Этот лед является усовершенствованной модификацией FG-ice. Методика приготовления FGX-ice базируется на использовании техники ламинирования – создании слоев льда с различными свойствами. Лабораторный лед с заданными физико-механическими характеристиками получается за счет варьирования количеством компонентов (присадок) в распыляемом над поверхностью бассейна водном растворе. Однако, результаты испытаний моделей судов в этом лабораторном льду также не показали хорошей сходимости с натурными данными и также требовали применения специальных коэффициентов при пересчете на натуру. В настоящее время модель FGX-ice используется в ледовом бассейне Aker Arctic (бывш. WARC – Wartsila Arctic Research Center, Helsinki, Finland) [25].

Р. Яалонен и Л. Илвес из Технического университета Финляндии в 1990 г. разработали другую модель лабораторного льда – GE-ice [26]. Методика приготовления льда основана на распылении над чашей ледового бассейна мелких капель водного раствора этанола. Замерзая, капли выпадают на поверхность воды, образуя слой ледяного сала, которое является основой для дальнейшего роста льда. В настоящее время эта модель используется при исследовании ледовой ходкости и ледовых нагрузок преимущественно в опытовых бассейнах Финляндии: ледовый бассейн университета Аалто

(Aalto University) [27], ледовые бассейны университета Хельсинки – Arctic Offshore Research Center of Helsinki University of Technology [28, 29].

В 1990 г. Д.С. Спенсер и Г.В. Тимко представили новую концепцию приготовления замораживаемого лабораторного льда. Они разработали систему внедрения пузырьков воздуха в лабораторный лед во время его роста (CD-ice). Эта система позволяет управлять плотностью лабораторного льда в процессе его приготовления. Воздух внедряется в растущий слой льда с помощью двигающегося подводного устройства, которое проходит под нижней поверхностью льда и подает пузырьки воздуха в заданное время в заданном месте. Д.С. Спенсер и Г.В. Тимко установили, что добавление воздуха наряду с плотностью позволяет управлять и другими физико-механическими характеристиками лабораторного льда [30].

Выше приведен мировой опыт моделирования ледяного покрова кроме опыта коллектива сотрудников Нижегородского государственного технического университета (НГТУ) им. Р.Е. Алексеева. Эти данные позволяют сделать вывод, что использование (на данный момент) ледовыми опытовыми бассейнами той или иной модели лабораторного льда определяется не ее способностями наиболее точного моделирования разрушения естественного льда как специфического природного сооружения или практичностью и технологичностью использования, а историчностью возникновения в том или ином бассейне, научном центре. Также можно заметить, что последние наиболее существенные результаты в этой области были достигнуты Шварцем в 1975 году. Все последующие исследования были направлены на поиск такого материала лабораторного льда, который бы наиболее полно удовлетворял методу Шварца. Поиск каждого следующего материала модельного льда обуславливался существенными недостатками существующих материалов, однако с появлением новых ледовые опытовые бассейны не отказывались от старых материалов, а продолжали их активно использовать в исследовании ледового сопротивления новых образцов морской ледотехники. Это связано в первую очередь с тем, что ни один материал, используемый в настоящее время для моделирования разрушения ледяного покрова, не позволяет достичь хорошей сходимости результатов экспериментов с натурными данными, а модельные эксперименты требуют в каждом случае применения особых поправочных коэффициентов. Эти коэффициенты разрабатываются каждым бассейном отдельно на основе собственного опыта (как правило используется эталонная модель ледокола с известными натурными данными) и зависят не только от модели льда, но и от условий конкретного бассейна и даже отличаются от опыта к опыту [31].

В 1996 году ледовый комитет МКОБ (Международная конференция опытовых бассейнов) попытался собрать и обобщить опыт различных ледовых бассейнов в применении поправочных коэффициентов [32] и в 2002 году разработал рекомендации по проведению ледовых модельных экспериментов и определению ледового сопротивления [32–35]. Сущность вычисления поправочного коэффициента по методике МКОБ заключается в «подгонке» фактических толщины и прочности модельного льда на изгиб к требуемым значениям на основе проведения испытаний “эталонной” модели. Однако, определяющие составляющие этого коэффициента предлагается вычислять каждому экспериментатору эмпирически, на основе собственного опыта без строгих рекомендаций. Кроме того, этот коэффициент не учитывает разницу и особенности в использовании различных материалов лабораторного льда, а также не имеет достаточно адекватного физического обоснования и применим со всеми оговорками, строго говоря, только в достаточно частных случаях [31]. Причиной столь широкой трактовки формулы поправочного коэффициента служит большой разброс результатов модельных экспериментов, невозможность моделирования с достаточной для практики точностью с помощью существующих методов и материалов модельного льда.

В начале 1980-х годов появилось другое направление в теории и практике модельного эксперимента в ледовом бассейне, которое развивали сотрудники НГТУ им. Р.Е. Алексе-

ева (бывш. ГПИ им. Жданова) Б.П. Ионов, В.А. Зуев, Е.М. Грамузов, В.Б. Беляков, Ю.А. Двойченко, В.В. Князьков и др. Авторы полагали, что трудности, которые возникли на пути практической реализации метода И. Шварца (концепция сохранения отношения модуля упругости к пределу прочности на изгиб), имеют не методический, а принципиальный характер [36–38]. Так, предел прочности льда на изгиб далеко не полно описывает поведение льда под нагрузкой, поскольку лед после пролома еще долго сохраняет несущую способность за счет взаимодействия льдин по берегам сквозных трещин, представляя своеобразную конструкцию [39, 40]. Кроме того, попытка моделирования льда по безразмерному соотношению требует соблюдения в модельном эксперименте не только численного значения этого соотношения, но и моделирования абсолютных значений составляющих этого соотношения, что практически невозможно из-за существования масштабного эффекта [4].

3. Моделирование с использованием естественного льда. Поиски решения данной проблемы привели Зуева В.А., Грамузова Е.М. и др. к созданию метода, основанного на частичном подобии модельного льда натурному ледяному покрову [4, 38].

Он основан на преднамеренном соблюдении частичного подобия лишь картины разрушения ледяного покрова. Необходимым условием моделирования разрушения ледяного покрова было определено геометрическое подобие картин разрушения в плане, при выполнении которого число и расположение точек контакта льда с корпусом модели при движении соответствовало бы натуре. Подобие картин разрушения определяется подобием напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин на упругом основании, для определения которого используется дифференциальное уравнение изгиба. В качестве материала лабораторного льда используется естественный пресноводный лед.

Подход к использованию в качестве модельной среды лабораторного пресноводного льда применялся и ранее Д. Вэнсом и О. Гримом в HSVA [41]. Однако, этот метод не нашел большого числа последователей по ряду объективных причин, связанных с отсутствием оборудования.

Тонкий лед имеет повышенную прочность [42] и, очевидно, именно поэтому получило широкое распространение мнение о невозможности его применения в качестве материала модели. Однако, при использовании такой модели льда компенсировать повышенную прочность ледяного покрова при разрушении изгибом можно меньшей толщиной, чем требуется в формуле (1.1).

Для определения дополнительных критериев подобия при проведении модельных испытаний в тонком естественном льду с сохранением геометрии образования обломков используется уравнение НДС ледяной пластины на упругом основании под действием поперечной нагрузки в безразмерном виде:

$$\frac{D}{\rho_w g L^4}\nabla^4\overline{w} + \overline{w} = 0 \tag{3.1}$$

где $\overline{w} = w/L$ – безразмерный прогиб; L – характерный линейный размер в плане; $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ – цилиндрическая жесткость ледяной пластины; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона для льда; h – толщина ледяной пластины.

Из выражения (3.1) можно получить условие подобия НДС ледяного покрова натуры и модели:

$$\frac{D}{\rho_w g L^4} = idem \tag{3.2}$$

или, имея в виду, что $\rho_n = \rho_m$ и $g = \text{const}$, получим:

$$\frac{D_n}{D_m} = \frac{L_n^4}{L_m^4} = \lambda^4 \tag{3.3}$$

где λ – геометрический масштаб моделирования.

Учитывая, что при моделировании должно выполняться условие $\mu_n = \mu_m$, получим:

$$\lambda_h = \frac{h_n}{h_m} = \lambda^{4/3}\lambda_E^{-1/3} \tag{3.4}$$

где λ_h, λ_E – масштабы толщины и модуля упругости льда.

Следует отметить, что анализ несущей способности, основанный на теории изгиба упругих пластин, позволяет получить лишь НДС ледяной пластины. Комплексные исследования сопротивления льда при движении ледоколов зависят не только от критических напряжений при изгибе, но и от прочности льда при срезе, смятии и др., возникающих одновременно. Однако, в работе [43] показано, что увеличение одних прочностных характеристик приводит к уменьшению других и наоборот. При этом, сопротивление льда при его разрушении ледоколом остается практически постоянным при его неизменной толщине.

К началу 1980-х годов нижегородскими учеными был накоплен достаточно большой объем данных по наблюдению за разрушением натурного ледяного покрова. Это позволило достаточно точно описать этот процесс [40]:

1) к ледяному покрову прикладывается вертикальная нагрузка, ледяной покров изгибается;

2) происходит образование первой группы радиальных трещин, частично нарушается сплошность ледяного покрова, но ледяные клинья от него не отделены;

3) происходит образование первой концентрической трещины, отсекающей ледяные клинья от основного ледяного покрова, сопротивление нагрузке сохраняется благодаря “арочному эффекту”, заменяющему изгибные напряжения на усилия распора по кромкам клиньев;

4) происходит дальнейшее развитие радиальных трещин и появление новых групп концентрических трещин;

5) далее лед сопротивляется возрастанию нагрузки, сохраняя несущую способность как конструкция; ледяные блоки, ограниченные трещинами, проворачиваются, их края сминаются, происходит образование внутренних трещин от внецентренного сжатия;

6) в результате смятия кромок и растрескивания одного из наиболее слабых блоков, он перестает сопротивляться сжатию и поддерживать соседние блоки – ледяная конструкция рассыпается, происходит пролом льда.

Предложенный метод моделирования ледяного покрова с использованием тонкого естественного льда в качестве материала модели позволяет достаточно надежно моделировать разрушение натурного льда. Однако использование такого подхода в задачах определения ледового сопротивления судов и ледовой нагрузки на инженерные сооружения сталкивается с определенными трудностями.

Данная методика основана на предположении о возможности моделирования прочности ледяного покрова с помощью пропорционального уменьшения толщины модельного льда. При этом толщина образующихся при разрушении льда обломков не соответствует требуемой для моделирования составляющей сопротивления, связанной с взаимодействием корпуса с обломками. Таким образом, совместное моделирование составляющих сопротивления льда от разрушения (R_d) и движения в обломках (R_{rub}) в этом способе невозможно. Наибольшее несоответствие сил сопротивления при моделировании возникает из-за сил плавучести и трения обломков о корпус, ли-

нейно зависящих от толщины льда. Инерционные составляющие, связанные с поворотом и раздвиганием льдин, а также с присоединенными массами воды, меньше зависят от толщины и площади льдин.

Поэтому для более строгого моделирования R_r и R_{rub} используется способ экспериментального разделения составляющих, требующий дополнительных испытаний в битом льду. Эти испытания могут быть и самостоятельными при определении сопротивления в битых льдах.

Большое разнообразие ледовых условий, нестабильность характеристик битых льдов делают достаточно сложным выполнение многочисленных условий, характеризующих натурную ледовую обстановку (в том числе форму и размеры отдельных льдин, их сплоченность). Поэтому в эксперименте движение судна моделируется приближенно, в некоторой условной среде с обломками льда. Условия подобия соблюдаются в отношении наиболее важных характеристик битого льда (толщины льдин, сплоченности, ширине канала, коэффициента трения льда о корпус, размеров обломков в плане, плотности).

Это дает возможность моделировать битый лед с помощью пластинок из полиэтилена высокого давления, предложенного нами ранее [44]. Пластинки могут быть квадратной или треугольной формы, одинаковых размеров, что обеспечивает повторяемость опытов. Эти опыты можно проводить в обычном (не ледовом) бассейне.

У полиэтилена высокого давления $\rho_i = 0.91 \div 0.92$ т/м^3, $f \approx 0.12 \div 0.15$, что соответствует условиям (1.1).

4. О модели льда композитной конструкции “GP-ice”. Предложенный способ моделирования взаимодействия судов и морских сооружений со льдом с разделением составляющих, хотя и позволяет быстро, достаточно надежно и с низкой стоимостью получить результаты, но он не свободен от ряда недостатков. В частности, раздельное моделирование значительно усложняет испытания, которые необходимо проводить в разных средах: в моделированном тонком естественном сплошном льду и в битом льду из плиток полиэтилена, также усложняется обеспечение требуемого коэффициента трения.

Кроме того, использование данного метода возможно только при низких скоростях движения. На больших скоростях возникает динамическая составляющая сопротивления, обусловленная толщиной (массовыми характеристиками) льда, что усложняет испытания по прогнозированию ледового сопротивления и вводит дополнительные условности.

Однако, предложенный способ можно усовершенствовать, не разделяя составляющие. Этого можно добиться, используя материал модели льда композитной структуры, представленной на рис. 1 [45].

Поверхность воды засыпается гранулами полиэтилена высокого давления. При отрицательных температурах на поверхности воды (между гранулами) намораживается тонкий слой (h_{freez}) естественного льда, характеристики которого соответствуют условиям в отношении толщины, прочности и упругости. Диаметр гранул подобран таким образом, чтобы толщина сформировавшегося слоя полиэтилена (h_p) после проморозки его льдом на толщину h_{freez} соответствовала бы требуемой толщине модельного льда (h_m) по условию моделирования.

В этом случае не требуется проводить испытания в двух средах и удается выполнить требуемые условия моделирования (как указывалось ранее условия частичного подобия).

Некоторая сложность в этих испытаниях заключается в том, что относительный объем (и, следовательно, масса модели) льда в виде гранул меньше при взаимодействии с моделью, чем относительная масса льда, взаимодействующая с судном. По-

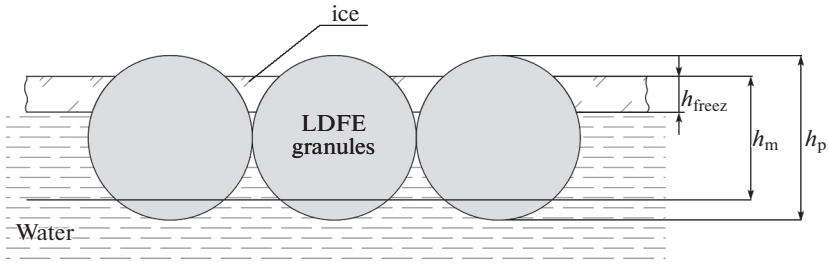

Рис. 1

этому в расчет сопротивления льда необходимо вводить коэффициент (аналогичный коэффициенту упаковки гранул, равный отношению объема гранул полиэтилена с учетом объема промороженного слоя к объему описанного вокруг них прямоугольного параллелепипеда).

Как показали наши опыты, функциональная зависимость $E^*(h)$ для композитной структуры остается с точностью до постоянной такой же, как и для естественного льда. Прочностные свойства льда соответствуют моделированию по толщине промороженного слоя h_{freez} [46].

Модельный лед композитной структуры со стабильными характеристиками легко приготовить в открытых опытовых бассейнах в зимнее время, причем даже значительные колебания температуры воздуха практически не оказывают влияния на адгезионные свойства полиэтилена и влияют лишь на скорость роста льда.

К положительным эффектам новой технологии относится близость диаграммы разрушения композитного и естественного льда реальных толщин, что приводит к соответствию работ разрушения и геометрии обломков льда в натуральных и модельных условиях.

Метод прошел проверку в ледовом бассейне НГТУ и показал удовлетворительную сходимость результатов натурного и модельного экспериментов для речного льда [4, 47, 48].

Анализ итогов экспериментальной работы с композитным льдом с применением гранул полиэтилена высокого давления позволил сделать следующие выводы:

1) Диаграммы разрушения (зависимость усилия нагружения ледяного покрова от его прогиба под нагрузкой) лабораторного (“GP-ice”) и натурного льда в безразмерных координатах практически совпадают, т.е. процессы разрушения обоих видов льда подобны. В лабораторном льду при скоростях нагружения, соответствующих скоростям движения моделей судов в бассейне, релаксационные явления не успевают проявиться, так же как и в натурном льду.

2) Плотность лабораторного льда соответствует плотности речного льда, что обеспечивает моделирование сопротивления, обусловленного преодолением сил весового характера.

3) Коэффициент трения соответствует движению корпуса судна в натурном заснеженном льду, что обеспечивает моделирование сил трения при соблюдении подобия по плотности и массовым характеристикам.

4) Изменение температуры окружающего воздуха от −1 до −19°C не влияет на физико-механические характеристики льда в течение 5 лет с момента изготовления гранул.

Благодарности. Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-08-00820.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каштелян В.И., Позняк И.И., Рывлин А.Я.* Сопротивление льда движению судна. Л.: Судостроение, 1968. 238 с.
2. *Шиманский Ю.А.* Теория моделирования движения судна в сплошном ледяном поле // Сб. науч. тр. ААНИИ. Т. 237. 1960. С. 29–39.
3. *Atkins A.G.* Icebreaking modelling // Journal of Ship Research. 1975. V. 19. Issue 1. P. 40–43.
4. *Ионов Б.П., Грамузов Е.М.* Ледовая ходкость судов. 2 издание, исправленное. СПб.: Судостроение, 2014. 504 с.
5. *Enkvist E.* On the ice resistance encountered by ships operating in the continuous mode of icebreaking // The Swedish academy of engineering sciences in Finland. Helsinki, Finland, 1972. V. 24. 181 p.
6. *Schwarz J.* New Development in Modelling Ice Problems // Proc. of the POAC'77. St. John's. Nfld, Canada, 1977. V. 1. P. 45–61.
7. *Molyneux D., von Bock und Polach R.U.F.* Model Ice: A Review of its Capacity and Identification of Knowledge Gaps // Proc. of the 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. Trondheim, Norway, 2017. P. 1–10.
8. *Schwarz J.* On The Flexural Strength and Elasticity of Saline Ice // Proc. of the IAHR Int. Symp. on Ice. Hanover, Germany, 1975. P. 373–386.
9. *Ziemer G., Evers K.U.* Model Tests With a Compliant Cylindrical Structure to Investigate Ice-Induced Vibrations // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 2016. V. 138. Issue 4. P. 041501-1–041501-8.
10. *Timco G.W.* A comprasion of several Chemically-Dopes Types of Model Ice // Proc. of the IAHR Symp. on Ice. Quebec City, Canada, 1981. V. 2. P. 489–502.
11. *Timco G.W.* EG/AD/S/F new type of model ice for refrigerated towing tanks // Cold Regions Science and Technology. 1986. V. 2. P. 175–195.
12. *Timco G.W.* The mechanical properties of salive-doped and carbomide (urea) – Doped model ice // Cold Regions Science and Technology. 1980. V. 3. Issue 1. P. 45–56.
13. *Ettema R., Nixon W.A.* Ice tank tests on ice rubble loads against a cable-moored conical platform // Journal of Cold Regions Engineering. 2005. V. 19. Issue 4. P. 103–116.
14. *Huang Y.* Model test study of the nonsimultaneous failure of ice before wide conical structures // Cold Regions Science and Technology. 2010. V. 63. Issue 3. P. 87–96.
15. *Kim J.H., Choi K.S.* An Experimental Study on the Material Properties of the EG/AD Model Ice Used for Ice Model Basins // Journal of Ocean Engineering and Technology. 2011. V. 25. Issue 1. P. 49–55.
16. *Akinturk A., Jones S.J.* Ice loads on azimuthing podded // Proceedings of the OMAE04 23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. Vancouver, Canada, American Society of Mechanical Engineers, 2004. P. 903–910.
17. *Jeong S.Y., Lee C.J., Cho S.R.* Ice resistance prediction for standard icebreaker model ship // Proc. of the Twentieth International Offshore and Polar Engineering Conference. Beijing, China, 2010. P. 1300–1304.
18. *Barker A., Timco G., Gravesen H., Vølund P.* Ice loading on Danish wind turbines: part 1: dynamic model tests // Cold Regions Science and Technology. 2005. V. 41. Issue 1. P. 1–23.
19. *Urabe N., Yoshitake A.* Similitude Law of Ice Based on Fracture Mechanics // Proceedings of the 3rd International OMAE Symposium. 1984. V. 3. P. 178–182.
20. *Enkvist E.* The new fine-grained model ice of Wartsila Arctic Research Centre. // Wärtsila report D 33. Helsinki, Finland. 1983.
21. *Enkvist E., Mäkinen S.* A Fine-Grain model ice // Proceedings of the IAHR Ice Symposium. Hamburg, Germany, 1984. V. 2. P. 217–227.
22. *Narita S., Inoue M., Kishi S., Yamauchi Y.* The model ice of the NKK ice model basin // Proceedings of the IAHR Ice Symposium. Sapporo, Japan, 1988. V. 1. P. 782–892.
23. *Enkvist E.* Ice model tests as a ship design tool // Proceedings of the IAHR Ice Symposium. Espoo, Finland, 1990. V. 1. P. 15–45.
24. *Nortala-Hoikkanen A.* FGX model ice at the Masa-Yards Arctic Research Centre // Proceedings of the IAHR Ice Symposium. Espoo, Finland, 1990. V. 3. P. 247–259.

25. *Wilkman G., Forsén A.C., Mattsson T.* Recent advancements in ice model testing at Aker Arctic // Proc. of the 20th IAHR Int. Symp. on Ice. Lahti, Finland, 2010.
26. *Jalonen R., Ilves L.* Experience with a chemically-doped Fine-Grained model ice // Proceeding of the IAHR Ice Symposium. Espoo, Finland, 1990. V. 2. P. 639–651.
27. *von Bock und Polach R.U.F., Ehlers S., Kujala P.* Model-scale ice – Part A: Experiments // Cold Regions Science and Technology. 2013. V. 94. P. 74–81.
28. *Li Z., Riska K.* Index for estimating physical and mechanical parameters of model ice // Journal of cold regions engineering. 2002. V. 16. Issue 2. P. 72–82.
29. *Tuhkuri J., Lensu M.* Laboratory tests on ridging and rafting of ice sheets // Journal of Geophysical Research: Oceans. 2002. V. 107. Issue C9. P. 8-1–8-14.
30. *Spencer D.S., Timco G.W.* CD model ice: a process to produce correct density model ice // Proceeding of the IAHR Ice Symposium. Espoo, Finland, 1990. V. 2. P. 745–755.
31. *Сазонов К.Е.* Методы коррекции экспериментальных данных по ледовой ходкости судна в модельных и натурных условиях // Полярная механика. 2016. №. 3. С. 406–416.
32. *Riska K., Kato K., Beljashov M.V. et al.* Report of the performance in ice-covered waters committee // Proc. of the 21th International Towing Tank Conference. Trondheim, Norway, 1996. V. 1. P. 212–270.
33. ITTC – Recommended procedures and guidelines. Testing and extrapolation methods ice testing resistance test in level ice. 7.5-02-04-02.1. 2002.
34. *Derradji-Aouat A., Hellman J.H., Rheem C.K. et al.* The specialist committee on ice. Final report and recommendations to the 24th ITTC // Proc. of the 24th International Towing Tank Conference. Edinburg, UK, 2005. V. 2. P. 439–470.
35. *Jochmann P., Lau M., Sazonov K.E. et al.* The specialist committee on ice. Final report and recommendations to the 27th ITTC // Proc. of the 27th International Towing Tank Conference. Denmark, Copenhagen, 2014. V. 2. P. 726–747.
36. *Грамузов Е.М.* Моделирование сопротивления льда движению судов // Вопросы теории, прочности и моделирования судов, плавающих во льдах: межвуз. сб. Горький: изд-во ГПИ, 1984. С. 38–43.
37. *Зуев В.А., Грамузов Е.М., Двойченко Ю.А.* Экспериментальные исследования разрушения ледяного покрова // Вопросы теории, прочности и проектирования судов, плавающих во льдах: межвуз. сб. Горький: изд-во ГПИ, 1984. С. 4–13.
38. *Зуев В.А.* Средства продления навигации на внутренних водных путях. Л.: Судостроение, 1986. 207 с.
39. *Двойченко Ю.А.* К вопросу о предельной деформации ледяного покрова // Теория и прочность ледокольного корабля: межвуз. сб. Горький: изд-во ГПИ, 1978. С. 47–49.
40. *Двойченко Ю.А.* Деформация и пролом ледяного поля // Теория и прочность ледокольного корабля: межвуз. сб. Горький: изд-во ГПИ, 1980. Т. 2. С. 38–44.
41. *Vance F.P.* Model testing in ice // Naval Engineers Journal. 1968. V. 80. Issue 2. P. 259–264.
42. *Лавров В.В.* Деформация и прочность льда. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 206 с.
43. *Kivisild H.R., Iyer S.H.* Mathematical and physical modelling of ice // Proc. of the IAHR Symposiun on ice problems. Lulla, Sweden, 1978. Part 1. P. 379–391.
44. *Зуев В.А., Грамузов Е.М.* Новые подходы к моделированию ледовой среды при модельных испытаниях судов // Полярная механика. 2016. № 3. С. 31–42.
45. *Беляков В.Б.* Новая модель льда // Вопросы теории, прочности и проектирования судов, плавающих во льдах: межвуз. сб. Горький: изд-во ГПИ, 1984. С. 48–52.
46. *Zuev V.A., Gramuzov E.M., Appolonov E.M., Vaganov A.B.* Physical simulation of ice cover for investigation into icebreaking ship performance // International Journal of Mechanical Engineering and Technology (IJMET). 2018. V. 9. Issue 11. P. 1637–1646.
47. *Беляков В.Б.* Экспериментальные исследования ледопроходимости судов в новой модели льда // Проектирование средств продления навигации: межвуз. сб.. Горький: изд-во ГПИ, 1986. С. 79–84.
48. *Беляков В.Б.* Исследование физико-механических свойств композитной модели льда // Вопросы проектирования судов, плавающих во льдах: межвуз. сб. Горький: изд-во ГПИ, 1988. С. 76–88.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 63–71

УДК 539.3

О ПРОБИВАНИИ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР ТВЕРДЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ТЕЛОМ

© 2021 г. Н. В. Баничук[a], С. Ю. Иванова[a,*], К. Ю. Осипенко[a]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
** e-mail: syuivanova@yandex.ru*

Поступила в редакцию 05.03.2020 г.
После доработки 12.04.2020 г.
Принята к публикации 20.04.2020 г.

Экспериментально исследовано пробивание по нормали сферическим жестким ударником пакета из нескольких пластин, обладающих различными прочностными свойствами. Изучено влияние на процесс пробивания наличия дополнительных свободных поверхностей (расслоения) и порядка расположения пластин с различными прочностными свойствами в пробиваемом пакете.

Ключевые слова: экспериментальные исследования, пробивание, слоистые преграды, жесткие ударники

DOI: 10.31857/S0572329921020033

1. Введение. Исследование процессов проникания в деформируемую среду жестких тел, движения тел в среде и процессов пробивания различных преград являются актуальной проблемой, представляющей как теоретический, так и практический интерес. С использованием в технике новых материалов и их различных комбинаций становится важным проведение исследований движения твердых тел в неоднородных, в том числе слоистых средах. Данной проблематике посвящено значительное число научных публикаций. Некоторые задачи оптимизации однородных покрытий и слоистых конструкций, подверженных внедрению в них жестких ударников (в случае нормального удара), были изучены в [1–5]. При этом на основе использования принципа максимума Понтрягина решались дискретные задачи оптимизации слоистых пластин, состоящих из нескольких слоев из различных материалов. Было установлено, что оптимальное решение характеризуется кусочно-постоянным распределением материальных свойств. В монографиях [6, 7] отражены исследования по анализу и проектированию слоистых конструкций, оптимизации покрытий, подверженных удару, оптимизации слоистых механических систем, включая проблемы проникания ударников в сплошные среды. В книге [8] исследовались задачи оптимизации формы жестких ударников, проникающих в пластические, бетонные и некоторые композитные среды. Третий раздел этой книги посвящен оптимизации многослойных покрытий. В монографии [9] представлены важные теоретические результаты и данные численного моделирования по проблеме динамического контактного взаимодействия жестких тел и деформируемых сред. Экспериментальные и теоретические результаты по проблеме проникания в слоистые материалы содержатся в работах [10–12]. В статье [12] представлены результаты экспериментальных исследований проникания сферических и конических твердых тел в среду, составленную из слоев пластилина разной прочности (выдержанных при различной температуре). Работы [13, 14] посвящены отысканию оптимальной структуры слои-

Таблица 1

Номер эксперимента (i)	Кол-во слоев в пакете	$t_1 = t_2$, °C	v_0, м/с	v_f, м/с	$\delta_i = \dfrac{v_0 - v_f}{v_0}$	$\Delta = \delta_{n+1} - \delta_n$
1, совмещ.	2	5	259	88.8	0.657	–0.056
2, разнес.	2	5	253.8	99.1	0.601	
3, совмещ.	2	24.8	256.1	179.9	0.277	0.033
4, разнес.	2	24.8	252	173.7	0.31	
5, совмещ.	3	25	250.4	152.2	0.392	0.07
6, разнес.	3	25	255.9	137.5	0.462	

стой защитной плиты, формируемой из заданного конечного набора материалов с известными прочностными и инерционными характеристиками. Поиск решения осуществлялся численно на основе применения эволюционного метода отыскания нелокального экстремума (генетического алгоритма). Также данные вопросы освещены в книге [15].

Целью настоящего исследования является экспериментальное изучение процесса пробивания слоистых преград из упругопластического материала жесткими ударниками. Исследуется пробивание по нормали сферическим жестким телом пакета из нескольких пластин, обладающих различными прочностными свойствами. Изучается влияние на процесс пробивания наличия дополнительных свободных поверхностей (пробивание разнесенных пластин) и порядка расположения пластин с различными прочностными свойствами в пробиваемом пакете.

2. Исследование влияния свободных поверхностей на процесс пробивания слоистых пластин жестким ударником. Пробивание пакета из двух или трех пластин осуществлялось стальным сферическим ударником, имеющим диаметр $d = 0.01$ м и массу $m = 0.004$ кг. Пластины толщиной $H = 0.02$ м, изготовленные из однородного и изотропного упругопластического материала (формованного пластилина), устанавливались и жестко закреплялись перпендикулярно направлению движения ударника, который разгонялся пневматической пушкой. Давление в камере пушки выставлялось таким образом, чтобы скорость вылета ударника составляла приблизительно 250 м/с. Скорость ударника на вылете из ствола пушки принималась за скорость входа в пластину v_0, сопротивлением воздуха движению тела можно было пренебречь в силу небольших размеров экспериментальной установки. Скорости входа v_0 и выхода из пластины v_f измерялись с помощью хронографов. Во всех экспериментах пластинам присваивались номера 1, 2 или 3, считая по направлению движения тела. Целью данного исследования было изучение влияния свободных поверхностей на изменение скорости ударника при пробивании пакета из пластин, разнесенных на расстояние $h = 0.02$ м. Для экспериментов использовались пластины, выдержанные при комнатной температуре, которая измерялась лабораторным термометром, и пластины, выдержанные в термостате при заданной температуре не менее 24 часов. Температуры первой, второй и третьей пробиваемых пластин обозначались через t_1, t_2 и t_3, соответственно.

Для выявления влияния свободных поверхностей на защитные свойства слоистой преграды была проведена серия экспериментов, в которых отдельные слои имели одинаковую температуру, то есть обладали одинаковыми прочностными свойствами. Результаты проведенных экспериментов с пластинами, имеющими одинаковые температуры, приведены в табл. 1.

На рис. 1 и 2, соответствующих экспериментам 1 и 2, схематично показано, как изменялась скорость ударника (м/с) при пробивании двух пластин при одинаковой тем-

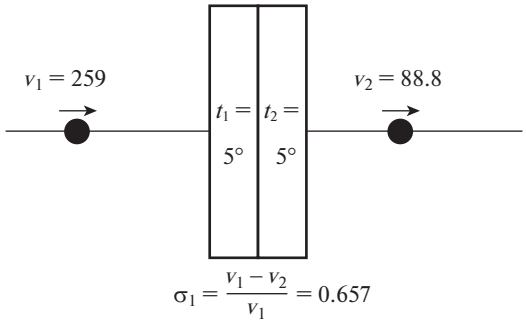

Рис. 1

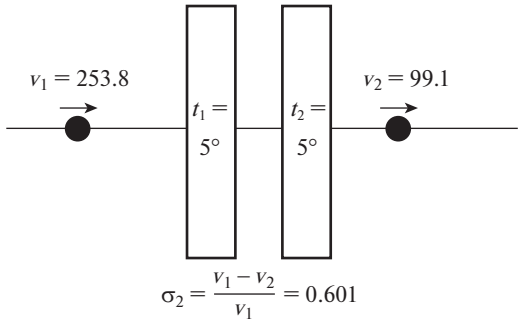

Рис. 2

пературе $t_1 = t_2 = 5°C$. Видно, что совмещенные пластины представляют собой более эффективную защиту при пробивании сферическим ударником. В рассмотренном примере появление двух дополнительных свободных поверхностей (рис. 2) приводит к ослаблению пакета в целом, т.е. $\delta_2 < \delta_1$.

Эксперименты 3 и 4 по пробиванию двух пластин с одинаковой температурой были проведены также для случая, когда $t_1 = t_2 = 24.8°C$. В этом случае прочностные свойства пластилина были существенно снижены, а плотность (инерционная характеристика) оставалась практически неизменной. В результате экспериментов было установлено, что появление двух свободных поверхностей при рассматриваемой повышенной температуре (эксперимент 4) улучшают защитные свойства пакета в целом, и в этом случае $\delta_4 > \delta_3$.

В случае пробивания пакета из трех одинаковых пластин, имеющих температуры $t_1 = t_2 = t_3 = 25°C$ (эксперименты 5 и 6), эффект влияния четырех свободных поверхностей (эксперимент 6) усиливался примерно в два раза по сравнению с эффектом от двух свободных поверхностей (эксперимент 4). Вводя обозначения $\Delta_{43} = \delta_4 - \delta_3$ и $\Delta_{65} = \delta_6 - \delta_5$, видим, что $\Delta_{65} = 0.07 > 0.033 = \Delta_{43}$.

На рис. 3,a,b представлены фотографические изображения входного (15-1) и выходного (15-2) отверстий в случае пробивания пластины при $t = 5°C$. На рис. 4,a,b, соответственно, показаны входное (13-1) и выходное (13-2) отверстия при температуре пробиваемой пластины $t = 24°C$. Из снимков видно, что размер каверны, образовав-

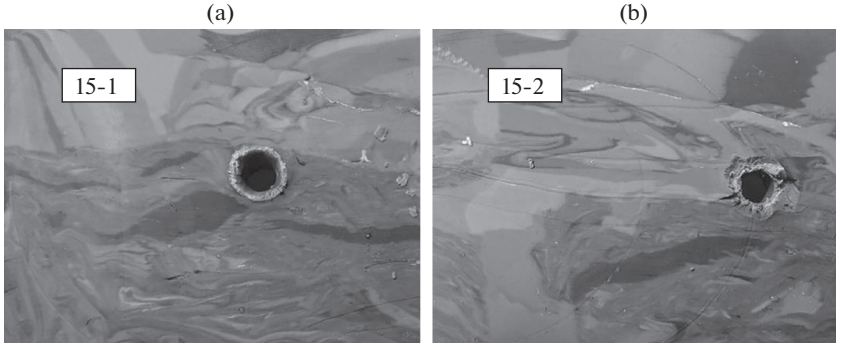

Рис. 3

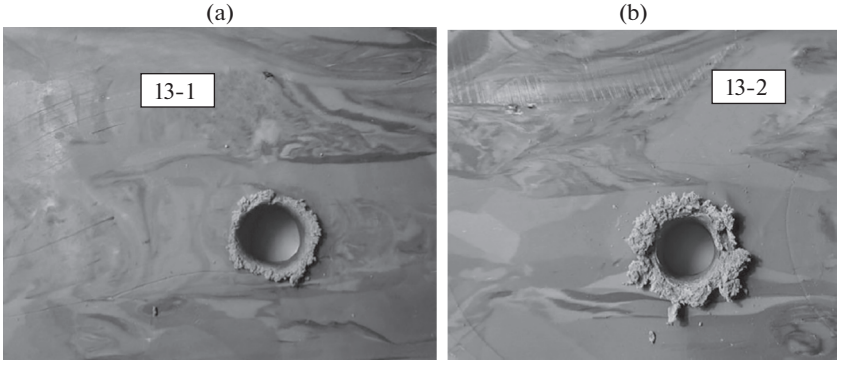

Рис. 4

шейся после пробивания пластины сферическим ударником при $t = 24°C$, существенно больше, чем при $t = 5°C$. Канал, образовавшийся в холодной пластине, сужается по ходу движения шарика, и его остаточный диаметр становится меньше диаметра тела за счет упругого сжатия. Более мягкая пластина при $t = 24°C$ имеет широкий канал (большего диаметра, чем диаметр тела) и более выраженные “выбросы” материала на входе и выходе из каверны. Это можно объяснить проявлением свойств пластичности при повышении температуры пластины.

Анализируя результаты описанной серии экспериментов, можно сделать вывод, что пакет из двух охлажденных пластин при $t = 5°C$, как совмещенных, так и разнесенных, лучше гасит скорость ударника, чем пакет из двух или трех более мягких пластин при $t = 25°C$. Однако, если условия эксплуатации таковы, что прочностные свойства используемых материалов слоев пакета могут изменяться (например, при нагреве или охлаждении), то разнесение или совмещение слоев пакета может дать дополнительный защитный эффект при его пробивании.

Возможное объяснение выявленных экспериментально закономерностей может быть основано на том факте, что ударное воздействие тела на свободную поверхность приводит к локальному возрастанию силы сопротивления непосредственно вблизи этой поверхности. Для затупленных тел [16, 17] сила сопротивления на некотором небольшом участке входа тела в среду (удара) пропорциональна скорости тела и не зави-

Таблица 2

Номер эксперимента (i)	Кол-во слоев в пакете	t_1; t_2, °C	v_0, м/с	v_f, м/с	$\delta_i = \dfrac{v_0 - v_f}{v_0}$	$\Delta = \delta_{n+1} - \delta_n$
7, совм.	2	24; 5	255.5	132.5	0.481	−0.039
8, разнес.	2	24; 5	257.2	143.4	0.442	
9, совм.	2	5; 24	250.1	141.7	0.433	−0.025
10, разнес.	2	5; 24	255.2	151	0.408	

сит от его прочностных свойств. В случае разнесенных пластин возникает повторный удар на поверхности второй пластины. Однако, так как скорость тела после прохождения твердого слоя может быть существенно меньше, чем в том случае, когда слой мягкий, второй удар будет более слабым и слабее сможет влиять на последующее прохождение телом второй пластины. Если оба слоя прочные (холодные), то возрастание силы сопротивления в момент второго удара будет незначительным, а если слои мягкие (теплые), то возрастание силы сопротивления будет почти как в первом слое, и это приведет к усилению защитных свойств пакета. При выходе тела из пластины сопротивление среды ослабевает за счет деформирования свободной поверхности (происходит ослабление защитных свойств пакета) [18]. В теплых слоях ударное воздействие может быть сильнее, чем ослабляющее влияние на выходе, что и приводит к усилению сопротивления пакета при разнесении мягких пластин. В холодных прочных слоях, наоборот, ослабление силы сопротивления на выходе оказывается более существенным, чем слабый рост сопротивления при втором ударе. Для более точного прогнозирования влияния разнесения пластин на скорость выхода ударника ниже в параграфе 3 предложена математическая модель, учитывающая как усиливающее ударное воздействие, так и ослабляющее влияние свободных поверхностей на выходе.

Были проведены также эксперименты 7–10, когда пробиваемые пластины имели различные температуры, а, следовательно, различные прочностные характеристики. Результаты этих экспериментов приведены в табл. 2.

Разнесение пластин в эксперименте 10 так же, как и в эксперименте 8, приводило к ослаблению защитных свойств пакета. Это позволяет сделать вывод, что в рассмотренном диапазоне температур расслоение пакета, то есть появление в пакете пластин дополнительно одной холодной и одной теплой свободной поверхности (независимо от их расположения) приводит только к ослаблению защитных свойств.

Сравнивая измеренные скорости ударника на выходе из пакета пластин, можно видеть, что расположение более холодных (обладающих большими прочностными свойствами) слоев в конце пакета (эксперименты 7 и 8) более эффективно снижает скорость тел на выходе, чем их альтернативное расположение (эксперименты 9 и 10). Это подтверждает справедливость известного [8, 15] двучленного соотношения для силы сопротивления D упругопластической среды, действующей на движущееся в ней тело: $D = A_0 + A_2 v^2$. Здесь v – скорость движения тела в среде, зависящая от его положения, а коэффициенты A_0 и A_2 – интегральные характеристики, описывающие прочностные и инерционные свойства среды при движении в ней жесткого тела заданной формы. По мере пробивания пакета пластин скорость тела снижается, и больший вклад в силу сопротивления вносят прочностные свойства.

3. Моделирование процесса пробивания слоистой преграды. Рассматривается пробивание жестким сферическим ударником массы m и радиуса R упругопластического слоя толщиной H с дозвуковой скоростью. Материал преграды имеет плотность ρ, модуль упругости E, динамический предел текучести τ_d и считается несжимаемым.

Движение ударника происходит по нормали к поверхности плиты вдоль оси Ox (x – координата фронтальной точки ударника, точка $x = 0$ соответствует моменту касания ударником плиты, точку $x = H + R$ будем считать точкой выхода тела из преграды). В точке $x = 0$ скорость тела имеет заданное значение v_0. Сила сопротивления среды движению ударника определяется выражением

$$D = \int_S (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})\sigma(v_n)\,dS = 2\pi \int_{\eta_*}^{\eta_{**}} r r_\eta \sigma(v_n)\,d\eta, \quad r = \sqrt{R^2 - \eta^2}$$

где $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ – единичные векторы в направлении движения тела и в направлении внешней нормали к его поверхности, $\sigma(v_n)$, v_n – нормальное напряжение и нормальная составляющая скорости на поверхности тела, S – поверхность тела, контактирующая со средой, $r(\eta)$ – функция формы тела, $r_\eta = dr/d\eta$, η – координата, отсчитываемая от фронтальной точки ударника в направлении, противоположном его движению, η_*, η_{**} – пределы интегрирования, определяемые областью контакта.

Введем безразмерные переменные $s = x/2R$, $l = \eta/2R$ и разделим процесс пробивания плиты на четыре этапа.

Первый этап (от $s = 0$ до $s = s_1$) соответствует прониканию ударника от момента касания да момента, когда край области контакта перемещается по поверхности полупространства со скоростью распространения продольных волн a. Нормальное давление на этом этапе и значение $s = s_1$ определяются формулами [16, 17]

$$\sigma_{n1} = -\rho a v$$
$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{v_1^2 + a^2}}, \quad v_1 = v(s_1)$$

Второй этап внедрения ударника (от $s = s_1$ до $s = 1/2$) соответствует процессу погружения тела в среду на половину диаметра. Будем считать, что на этом участке происходит переход к режиму квазистационарного обтекания, когда скорость расширения границы контакта меняется от $dr_c/dt = a$ до $dr_c/dt = 0$ (r_c – радиус границы контакта сферы и среды). Нормальное давление на поверхности тела будем аппроксимировать следующим образом:

$$\sigma_{n2} = \sigma_{n3} + \frac{\sigma_{n1} - \sigma_{n3}}{a}\frac{dr_c}{dt}, \quad \frac{dr_c}{dt} = \frac{(1-2s)v}{2\sqrt{s(1-s)}}$$
$$\sigma_{n3} = \alpha v^2 + \gamma, \quad \alpha = \alpha(s), \quad \gamma = \gamma(s)$$

Третий этап внедрения ударника соответствует его движению от момента погружения на половину диаметра ($s = 1/2$) до остановки тела или момента пробивания преграды ($s = H/2R + 1/2$). Считаем, что на этом участке шар обтекается квазистационарно. По аналогии с методом сферического приближения [8, 18–23] давление в каждой точке поверхности контакта отождествим с давлением на внутреннюю поверхность сферического слоя несжимаемой упругопластической среды толщины $b - R$ и внутреннего радиуса R, расширяющегося со скоростью v_n. Через b обозначено расстояние по нормали от данной точки поверхности контакта до тыльной поверхности пробиваемой преграды (радиус внешней поверхности сферического слоя). При $l > 0.5$ взаимодействие с преградой отсутствует.

Выражение для давления на внутренней поверхности расширяющегося сферического слоя из несжимаемой упругопластической среды определяется формулой [18]:

$$\alpha = \rho R\left\{[2(1-2l)^2 - 4l(1-l)]\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{b}\right) - \frac{R^3(1-2l)^2}{2}\left(\frac{1}{R^4}-\frac{1}{b^4}\right)\right\}$$

$$\gamma = \frac{4}{3}\tau_d\left[1+\ln\left(\frac{R_*}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_*}{b}\right)^3\right]$$

$$R_*^3 = \begin{cases} R^3\dfrac{E}{3\tau_d}, & R_* < b \\ b^3, & R_* \geq b \end{cases}$$

На четвертом этапе ($1/2 + H/2R < s$) ударник движется по инерции до момента касания с новой преградой.

Сила сопротивления D для шара, пробивающего преграду, определяется следующей трехчленной формулой в виде суммы инерционного, вязкостного и прочностного слагаемых:

$$D = A_2 v^2 + A_1 v + A_0, \quad A_0 = A_0(s), \quad A_1 = A_1(s), \quad A_2 = A_2(s)$$

Коэффициенты в этой формуле меняются при движении ударника сквозь преграду из-за влияния свободной поверхности.

Запишем уравнение движения ударника на каждом из участков пробивания

$$\frac{mv}{2R}\frac{dv}{ds} = \begin{cases} -4\pi R^2\rho a(1-s)sv, & 0 < s \leq s_1 \\ -4\pi R^2\int\limits_0^s \sigma_{n2}(1-2l)\,dl, & s_1 < s \leq 0.5 \\ -4\pi R^2\int\limits_0^{0.5} \sigma_{n3}(1-2l)\,dl, & 0.5 < s \leq H/2R \\ -4\pi R^2\int\limits_{s-H/2R}^{0.5} \sigma_{n3}(1-2l)\,dl, & H/2R < s \leq 0.5 + H/2R \\ 0, & 0.5 + H/2R < s \end{cases}$$

при начальном условии $v(0) = v_0$. Вводя новые безразмерные параметры (штрихи далее опускаем)

$$m' = \frac{m}{8\rho R^3}, \quad v' = v\sqrt{\frac{\rho}{\tau_d}}, \quad a' = a\sqrt{\frac{\rho}{\tau_d}}, \quad \sigma'_{n2} = \frac{\sigma_{n2}}{\tau_d}, \quad \sigma'_{n3} = \frac{\sigma_{n3}}{\tau_d}$$

получим

$$mv\frac{dv}{ds} = \begin{cases} -\pi a(1-s)sV, & 0 < s \leq s_1 \\ -\pi\int\limits_0^s \sigma_{n2}(1-2l)\,dl, & s_1 < s \leq 0.5 \\ -\pi\int\limits_0^{0.5} \sigma_{n3}(1-2l)\,dl, & 0.5 < s \leq H/2R \\ -\pi\int\limits_{s-H/2R}^{0.5} \sigma_{n3}(1-2l)\,dl, & H/2R < s \leq 0.5 + H/2R \\ 0, & 0.5 + H/2R < s \end{cases}$$

На отрезке $0 < s < s_1$ данное уравнение можно проинтегрировать аналитически. Имеем

$$v = \frac{-\pi a}{m} s^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{3}\right) + v_0, \quad v_0 = v(0)$$

Учитывая, что $s_1 = 1/2 - a\Big/(2\sqrt{v_1^2 + a^2})$, получим нелинейное уравнение для определения значения скорости $v_1 = v(s_1)$:

$$f(v_1) = 0, \quad f(v_1) = v_1 - v_0 + \frac{\pi a}{24m}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{v_1^2 + a^2}}\right)^2 \left[2 + \frac{a}{\sqrt{v_1^2 + a^2}}\right]$$

которое необходимо для интегрирования уравнения движения на отрезке $s_1 < s < 0.5$. Функция $f(v_1)$ является отрицательной при $v_1 = 0$, положительной при $v_1 = v_0$ и непрерывной на отрезке $[0, v_0]$, поэтому на этом отрезке имеется корень уравнения $f(v_1) = 0$. Дальнейшее интегрирование дифференциального уравнения движения может быть проведено численно, в результате чего определяется значение скорости ударника v_f на выходе из преграды.

4. Некоторые замечания и выводы. В работе представлены результаты экспериментов по пробиванию жесткими сферическими ударниками пакета из разнесенных или совмещенных пластин, обладающих различными прочностными свойствами. Варьирование прочностных свойств достигалось за счет нагревания или охлаждения используемого материала (формованного пластилина). Установлено, что пакет из двух охлажденных пластин, как совмещенных, так и разнесенных, лучше гасит скорость ударника, чем пакет из двух или трех более мягких нагретых пластин. Однако две разнесенные нагретые пластины лучше гасят скорость ударника, чем эти же пластины, но совмещенные. Для охлажденных (более прочных) пластин эффект был обратный. Поэтому можно сделать вывод, что если условия эксплуатации таковы, что прочностные свойства используемых материалов слоев пакета могут изменяться (например, при нагреве или охлаждении), то разнесение или совмещение слоев пакета может дать дополнительный защитный эффект при его пробивании. Сравнивая измеренные скорости ударника на выходе из пакета пластин, можно видеть, что расположение слоев, обладающих большими прочностными свойствами, в конце пакета более эффективно снижает скорость тел на выходе, чем их альтернативное расположение. Это подтверждает справедливость двучленного соотношения для силы сопротивления упругопластической среды, в котором есть прочностное и инерционное слагаемое, пропорциональное квадрату скорости ударника. По мере пробивания пакета пластин скорость тела снижается, и больший вклад в силу сопротивления вносят прочностные свойства.

В работе предложен также метод оценивания скорости ударника при пробивании отдельного слоя, основанный на поэтапном учете силы сопротивления среды на различных участках движения ударника. В случае упругопластической среды для упрощения вычислений можно в выражениях для силы сопротивления пренебречь вязкостью и ограничиться только инерционным и прочностным слагаемыми.

Работа выполнена по теме Госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптуков В.Н.* Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 149–152.

2. *Аптуков В.Н., Поздеев А.А.* Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 47–55.

3. *Аптуков В.Н., Петрухин Г.И., Поздеев А.А.* Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 165–170.

4. *Аптуков В.Н., Белоусов В.Л., Каниболотский М.А.* Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композит. материалов. 1986. № 2. С. 252–257.

5. *Аптуков В.Н., Мурзакаев А.В., Фонарев А.В.* Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 105 с.

6. *Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С.* Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.

7. *Алехин В.В., Уржумцев Ю.С.* Оптимизация слоистых систем. Якутск: ЯФ изд-ва СО РАН, 2002. 177 с.

8. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Applied high-speed plate penetration dynamics. Solid Mechanics and its Applications. V. 132. Dordrecht: Springer, 2006. 364 p.

9. *Баженов В.Г., Котов В.Л.* Математическое моделирование нестандартных процессов удара и проникания осесимметричных тел и задачи идентификации свойств грунтовых сред. М.: Физматлит, 2011. 208 с.

10. *Бивин Ю.К.* Проникание твердых тел в сыпучие и слоистые среды // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 154–160.

11. *Бивин Ю.К.* Пробивание, проникание, рикошет. Saarbrücken: Lap Lambert, 2012. 235 p.

12. *Бивин Ю.К.* Проникание твердого тела в слоистую преграду // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 64–68.

13. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В.* Проникание жестких ударников в слоистые пластины и некоторые задачи глобальной многоцелевой структурной оптимизации // Проблемы прочности и пластичности. 2012. Вып. 74. С. 124–133.

14. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Игровой подход к решению задачи оптимизации формы ударника и структуры слоистой среды при высокоскоростном пробивании // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Вып. 78. № 4. С. 426–435.

15. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю.* Оптимизация: контактные задачи и высокоскоростное проникание. М.: Физматлит, 2016. 176 с.

16. *Симонов И.В.* Динамическая задача о вдавливании осесимметричного штампа в упругое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 2. С. 163–165.

17. *Бивин Ю.К., Осипенко К.Ю.* Измерения электромагнитного излучения в динамических процессах с твердыми телами. Препринт ИПМех РАН № 830. Москва, 2007. 32 с.

18. *Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др.* Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.

19. *Warren T.L., Hanchak S.J., Kevin L.* Penetration of 6061-T6511 aluminum targets by ogive-nosed VAR 4340 steel projectiles at oblique angles: experiments and Simulations // International Journal of Impact Engineering. 2001. V. 25. P. 993–1022.

20. *Masri R., Durban D.* Deep penetration analysis with dynamic cylindrical cavitation fields // International Journal of Impact Engineering. 2009. V. 36. P. 830–841.

21. *Котов В.Л., Линник Е.Ю., Макарова А.А., Тарасова А.А.* Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегород. ун-т. 2011. Вып. 73. С. 58–63.

22. *Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г.* Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегород. ун-т. 2012. Вып. 74. С. 49–58.

23. *Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А.* Определение параметров квадратичной модели локального взаимодействия при внедрении сферического ударника в мягкий грунт // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75. № 1. С. 47–55.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 72–87

УДК 531.3

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

© 2021 г. А. В. Борисов[a,*], И. Е. Каспирович[b,], Р. Г. Мухарлямов[b,***]**

[a] *Филиал ФГБОУ ВО НИУ "МЭИ" в г. Смоленске. Смоленск, Россия*
[b] *Российский университет дружбы народов. Москва, Россия*
**e-mail: borisowandrej@yandex.ru*
***e-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru*
****e-mail: robgar@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.12.2019 г.
После доработки 12.01.2020 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Рассматривается моделирование механической системы с произвольным числом звеньев переменной длины, составленных из двух невесомых участков переменной длины и расположенного между ними массивного абсолютно твердого стержня. Рассматривается задача управления целенаправленным движением системы с произвольным количеством звеньев переменной длины. Управление осуществляется изменением длины невесомых участков звеньев и изменением углов между звеньями. Связь между звеньями реализуется двумя цилиндрическими шарнирами, обеспечивая значительную механическую прочность, простоту конструкции и расположения управляющих приводов. Составляется система дифференциальных уравнений движения и записывается в векторно-матричной форме записи.

В качестве примера использования разработанной модели рассматривается антропоморфная механическая система в виде лыжника-сноубордиста. В модели лыжника-сноубордиста учитывается неголономная связь лыжи с поверхностью. Составляется система дифференциальных уравнений движения и проводится анализ изменения уравнений при учете неголономной связи. Рассматривается численный пример моделирования движения лыжника-сноубордиста с использованием управления на основе метода стабилизации связи.

Ключевые слова: механическая система, звено переменной длины, произвольное число звеньев, система дифференциальных уравнений движения, управление, целенаправленное движение, возмущения связей, лыжник-сноубордист, лыжа, неголономная связь, звено переменной длины, шарнир

DOI: 10.31857/S0572329921020057

1. Введение. Исследованию динамики антропоморфных систем, моделируемых системой твердых тел, посвящено значительное число работ. Исследования ведутся по проектированию экзоскелетов и созданию антропоморфных роботов. Разработке экзоскелетов на основе системы твердых тел посвящены работы [1–5]. Моделирование антропоморфных роботов системами твердых тел рассматривается в работах [6–10]. Однако, практически во всех работах, для описания движения антропоида не используются звенья переменной длины и понятие связи. Построению алгоритмов составления уравнений динамики пространственной модели экзоскелета и антропоморфного робота посвящены работы [11, 12]. В [12] был предложен рекуррентный метод постро-

ения уравнений движений экзоскелета, содержащего звенья переменной длины и управляемого моментами в суставах. Реальные условия функционирования управяемых антропоморфных систем и экзоскелетов предполагают наличие действие сил трения и наличие неголономных связей. Использование уравнений неголономной динамики [13, 14] позволяет существенно сократить размерность системы. Задачи динамики систем с трением и с неголономными связями рассмотены в работах [13–18]. В настоящей работе рассматривается модель антропоморфного механизма сложной конструкции, содержащего звенья переменной длины. Звеном переменной длины называется часть механизма между шарнирами-суставами, составляющая прямолинейную конструкцию, способную изменять расстояние между шарнирами-суставами, т.е. реализовывать растяжение-сжатие, но не подверженное деформациям изгиба и кручения.

В связи с тем, что задача моделирования неголономных систем является весьма сложной, для лучшего понимания модели, рассмотрим вначале модель звена переменной длины без учета неголономной связи. Отработаем на ней методику составления дифференциальных уравнений движения, получим обобщения дифференциальных уравнений движения и разработем методику составления для антропоморфной системы с произвольным числом звеньев. Далее рассмотрим задачу управления целенаправленным движением системы твердых тел, содержащей звенья переменной длины. Затем обобщим и перенесем полученные результаты на модель лыжника-сноубордиста, с учетом неголономной связи и управления движением такой неголономной модели с использованием метода стабилизации связей. Далее рассмотрим числовой пример для модели лыжника-сноубордиста с выбранным количеством звеньев и заданными числовыми параметрами.

2. Описание модели закрепленного звена переменной длины и постановка задачи. Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма. Пусть стержень переменной длины имеет конструкцию, показанную на рис. 1. Звено AB переменной длины, состоящее из двух невесомых частей изменяющих свою длину $AC = \xi_{11}(t)$ и $DB = \xi_{12}(t)$ и весомой абсолютно твердой части $CD = l_1$ [2]. На рис. 1 схематично изображено звено переменной длины и введены соответствующие обозначения.

Положение весомого участка звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Обозначим через $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A. Продольную силу, действующую вдоль стержня на участке AC, обозначим F_{11}, на участке DB, обозначим F_{12}.

Длина звена складывается из суммы длин переменной части и постоянной длины:

$$l(t) = l_1 + \xi_{11}(t) + \xi_{12}(t) \tag{2.1}$$

Масса участка звена постоянной длины $m_1 = \rho_1 l_1$, где ρ_1 – плотность материала из которого изготовлена часть стержня постоянной длины. Участки звена, в которых реализуется переменность его длины $\xi_{11}(t)$ и $\xi_{12}(t)$, считаем невесомыми. Это означает, что момент инерции стержня относительно точки C, расположенной на конце весомого участка, не меняется.

Координаты бесконечно малой частицы весомого участка звена, отсчитываемые от точки A, записываются в виде:

$$x_1 = (x + \xi_{11})C_1^{\psi}C_1^{\varphi}, \quad y_1 = (x + \xi_{11})C_1^{\psi}S_1^{\varphi}, \quad z_1 = (x + \xi_{11})S_1^{\psi} \tag{2.2}$$

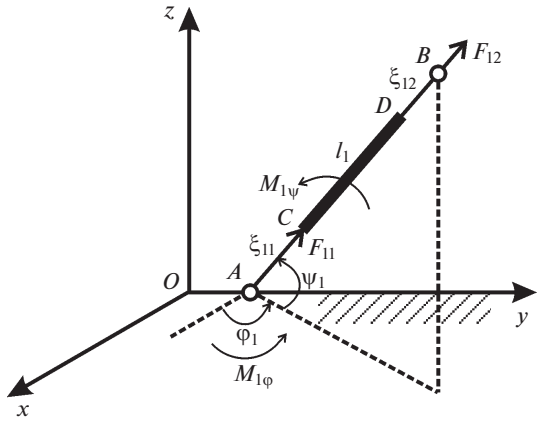

Рис. 1

где $C_1^\varphi = \cos\varphi_1$, $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\varphi = \sin\varphi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$, x – расстояние от точки C до точки, задающей положение бесконечно малой частицы весомого участка CD звена AB. Квадрат скорости частицы весомого участка CD равен:

$$v_1^2 = \dot{\xi}_{11}^2 + (x + \xi_{11})^2(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2(C_1^\psi)^2) \tag{2.3}$$

Кинетическая энергия механизма, с учетом выражения момента инерции тонкого однородного стержня, если ось проходит через его конец

$$I_1 = m_1 l_1^2/3 \tag{2.4}$$

имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} v_1^2 \rho dx = \frac{1}{2}[m_1\dot{\xi}_{11}^2 + \zeta_{11}(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2(C_1^\psi)^2)] \tag{2.5}$$

где $\zeta_{11} = I_1 + m_1 l_1 \xi_{11} + m_1 \xi_{11}^2$

Потенциальная энергия звена записывается в виде:

$$\Pi = gm_1(l_1/2 + \xi_{11})S_1^\psi \tag{2.6}$$

Составляя уравнения Лагранжа второго рода, получаем дифференциальные уравнения движения для модели одного подвижного звена переменной длины в трехмерном пространстве:

$$\zeta_{11}(C_1^\psi)^2\ddot{\varphi}_1 + 2m_1\lambda_{11}(C_1^\psi)^2\dot{\xi}_{11}\dot{\varphi}_1 - 2\zeta_{11}C_1^\psi S_1^\psi\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1 = M_{1\varphi} \tag{2.7}$$

$$\zeta_{11}\ddot{\psi}_1 + \zeta_{11}C_1^\psi S_1^\psi\dot{\varphi}_1^2 + 2m_1\lambda_{11}\dot{\xi}_{11}\dot{\psi}_1 + gm_1\lambda_{11}C_1^\psi = M_{1\psi} \tag{2.8}$$

$$m_1\ddot{\xi}_{11} - m_1\lambda_{11}(C_1^\psi)^2\dot{\varphi}_1^2 - m_1\lambda_{11}\dot{\psi}_1^2 + gm_1S_1^\varphi = F_1 \tag{2.9}$$

где $\zeta_{11} = I_1 + m_1 l_1 \xi_{11} + m_1 \xi_{11}^2$, $\lambda_{11} = \xi_{11} + l_1/2$, $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$.

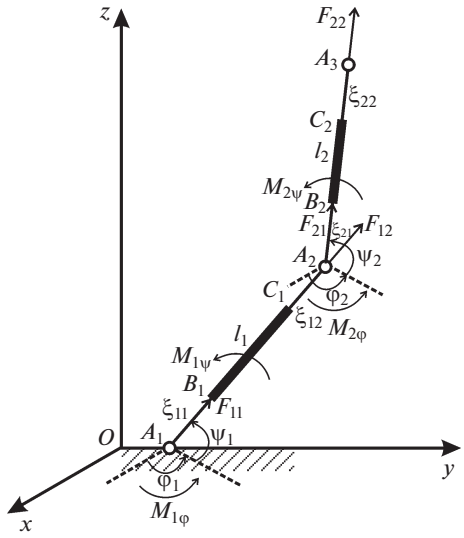

Рис. 2

Общее решение системы уравнений движения зависит от 6 произвольных постоянных, которые определяются заданными начальным условиями:

$$\varphi_1\big|_{t=0} = \varphi_{1_0}, \quad \dot{\varphi}_1\big|_{t=0} = \dot{\varphi}_{1_0}, \quad \psi_1\big|_{t=0} = \psi_{1_0}, \quad \dot{\psi}_1\big|_{t=0} = \dot{\psi}_{1_0}$$
$$\xi_{11}\big|_{t=0} = \xi_{11_0}, \quad \dot{\xi}_{11}\big|_{t=0} = \dot{\xi}_{11_0} \tag{2.10}$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику звена переменной длины.

Задача исследования заключается в создании математической модели механизмов, составленных из таких звеньев. Требуется записать систему дифференциальных уравнений движения в векторно-матричном виде для модели с произвольным конечным количеством звеньев и получить общие формулы для матриц, входящих в дифференциальные уравнения движения. Перенести полученные результаты на систему с неголономной связью. Провести исследование ее динамики, численным методом на основе метода стабилизации связи для выбранной в качестве примера модели лыжника-сноубордиста. Для этого необходимо получить решение системы дифференциальных уравнений движения с эмпирически определенными методами биомеханики параметрами системы, соответствующими опорно-двигательному аппарату реального лыжника и сноуборда. Результатом должна быть проверка возможности получения устойчивого движения механической модели лыжника-сноубордиста за счет неголономной связи.

3. Модель механизма с двумя звеньями переменной длины. Составим систему дифференциальных уравнений движения для механизма с двумя последовательными подвижными звеньями переменной длины (рис. 2).

Система имеет два звена A_1A_2 и A_2A_3, состоящее каждое из двух невесомых частей изменяющих свою длину $A_1B_1 = \xi_{11}(t)$, $C_1A_2 = \xi_{12}(t)$, $A_2B_2 = \xi_{21}(t)$, $C_2A_3 = \xi_{22}(t)$ и весомых абсолютно твердых частей $B_1C_1 = l_1$, $B_2C_2 = l_2$ (рис. 2). Положение весомого участка B_1C_1 звена A_1A_2 зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\psi_1(t)$, $\varphi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Положение весомого участка B_2C_2

звена A_2A_3 зависит от семи параметров и определяется углами $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и переменными длинами участков стержней $\xi_{11}(t)$, $\xi_{12}(t)$, $\xi_{21}(t)$. Обозначим через $M_{1\psi}$, $M_{1\varphi}$ – управляющие моменты, развиваемые в шарнире A_1, через $M_{2\psi}$, $M_{2\varphi}$ – в шарнире A_2. Продольную силу, действующую вдоль стержня на участке A_1B_1, обозначим F_{11}, на участке C_1A_2, обозначим F_{12}, на участке A_2B_2, обозначим F_{21}.

Кинетическая энергия звена A_1A_2, совершающего вращательное движение вокруг неподвижного шарнира A_1, имеет вид, аналогичный модели с одним звеном (2.5).

Для вычисления кинетической энергии звена A_2A_3 найдем скорость v_2^2. Весомый участок данного звена совершает сложное движение. В качестве полюса выберем точку A_2. Определим квадрат ее скорости:

$$v_{A_2}^2 = \lambda_{12}^2(\dot\psi_1^2 + \dot\varphi_1^2(C_1^\psi)^2) + \dot\lambda_{12}^2 \tag{3.1}$$

где $\lambda_{12} = \xi_{11} + l_1 + \xi_{12}$, $\dot\lambda_{12} = \dot\xi_{11} + \dot\xi_{12}$

Тогда скорость v_2^2 бесконечно малой частицы участка звена A_2A_3 определяется в соответствии с теоремой о сложении скоростей.

$$\begin{gathered}
v_2^2 = \lambda_{12}^2(\dot\psi_1^2 + \dot\varphi_1^2(C_1^\psi)^2) + \dot\lambda_{12}^2 + (\xi_{21} + x_2)^2(\dot\psi_2^2 + \dot\varphi_2^2(C_2^\psi)^2) + \dot\xi_{21}^2 + \\
+ 2\{[(\xi_{21} + x_2)\dot\lambda_{12}\dot\varphi_2 - \lambda_{12}\dot\xi_{21}\dot\varphi_1]S_{12}C_1^\psi C_2^\psi + \\
+ [(\xi_{21} + x_2)\lambda_{12}\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + \dot\lambda_{12}\dot\xi_{21}]C_{12}C_1^\psi C_2^\psi + \\
+ (\xi_{21} + x_2)(\lambda_{12}\dot\varphi_1\dot\psi_2 S_{12}C_1^\psi S_2^\psi + \dot\lambda_{12}C_{12})\dot\psi_2 C_1^\psi S_2^\psi + \dot\lambda_{12}\dot\xi_{21}S_1^\psi S_2^\psi - \\
- \lambda_{12}[(C_{12}S_1^\psi C_2^\psi - C_1^\psi S_2^\psi)\dot\xi_{12} + \\
+ (\xi_{21} + x_2)(S_{12}S_1^\psi C_2^\psi\dot\varphi_2 - (C_1^\psi C_2^\psi + C_{12}S_1^\psi S_2^\psi)\dot\psi_2)]\dot\psi_1\}
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\lambda_{12} = \xi_{11} + l_1 + \xi_{12}$, $\dot\lambda_{12} = \dot\xi_{11} + \dot\xi_{12}$, $C_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $S_{12} = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

Кинетическая энергия второго звена является весьма громоздким выражением равно как и система дифференциальных уравнений движения, составленных с помощью уравнений Лагранжа второго рода, состоящая из восьми уравнений. Поэтому в качестве примера, поясняющего изменения, происходящие в системе уравнений, приведем только предпоследнее, седьмое уравнение полученной системы, соответствующее обобщенной координате ξ_{21} – нижнему невесомоу участку переменной длины второго звена.

$$\begin{gathered}
-m_2\lambda_{12}S_{12}C_1^\psi C_2^\psi\ddot\varphi_2 - m_2\lambda_{12}(C_{12}S_1^\psi C_2^\psi - C_1^\psi S_2^\psi)\ddot\psi_1 + \\
+ m_2(C_{12}C_1^\psi C_2^\psi + S_1^\psi S_2^\psi)(\ddot\xi_{11} + \ddot\xi_{12}) + m_2\ddot\xi_{21} - \\
- m_2\lambda_{12}C_{12}C_1^\psi C_2^\psi\dot\varphi_1^2 - m_2\lambda_{21}(1 + \cos(2\psi_2))\dot\varphi_2^2/2 - \\
- m_2\lambda_{12}(C_{12}C_1^\psi C_2^\psi + S_1^\psi S_2^\psi)\dot\psi_1^2 - m_2\lambda_{21}\dot\psi_2^2 - \\
- 2m_2S_{12}C_1^\psi C_2^\psi(\dot\xi_{11} + \dot\xi_{12})\dot\varphi_1 + 2m_2\lambda_{12}S_{12}S_1^\psi C_2^\psi\dot\varphi_1\dot\psi_1 - \\
- 2m_2(C_{12}S_1^\psi C_2^\psi - C_1^\psi S_2^\psi)(\dot\xi_{11} + \dot\xi_{12})\dot\psi_1 + gm_2S_2^\psi = F_{21}
\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\lambda_1 = \xi_{11} + l_1$, $\lambda_{11} = \xi_{11} + l_1/2$, $\lambda_{12} = \xi_{11} + l_1 + \xi_{12}$, $\lambda_2 = \xi_{21} + l_2$, $\lambda_{21} = \xi_{21} + l_2/2$, $C_j = \cos\varphi_j$, $S_j = \sin\varphi_j$, $j = 1, 2$, $C_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $S_{12} = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.

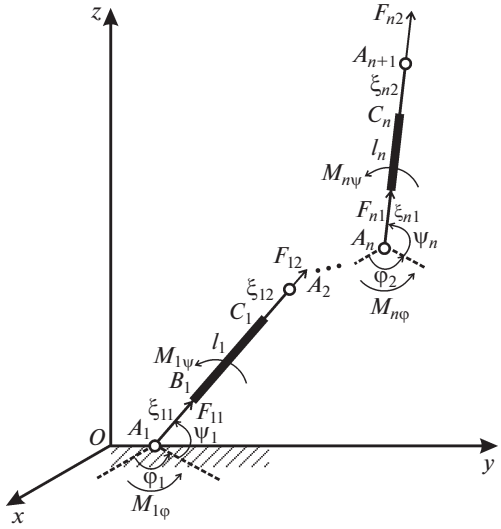

Рис. 3

В дифференциальное уравнение (3.3) входит информация о движении первого звена, к которому прикрепляется рассматриваемое второе звено. Кроме того, в сравнении с аналигичным уравнением системы (2.9) для модели с одним звеном, в уравнении для модели с двумя подвижными звеньями (3.3) возникает достаточно много новых слагаемых, связанных с тем, что движение второго звена сложное.

4. Обобщение модели механизма на случай произвольного количества звеньев переменной длины. Рассмотрим многозвенную стержневую модель с n звеньями. Система имеет звенья переменной длины, конструкция которых была описана выше. Все длины стержней складываются из участка постоянной длины l_i ($i = 1, ..., n$) и переменной длины $\xi_{i\alpha} = \xi_{i\alpha}(t)$ ($\alpha = 1, 2$ – номер невесомого участка переменной длины на звене). На рис. 3 изображена модель со звеньями переменной длины в одноопорной фазе движения и введены соответствующие обозначения.

Положение однозначно определяется углами φ_i и участками переменной длины стержней $\xi_{i\alpha}$. Рассматриваемая система имеет $4n - 1$ степеней свободы, так как движение каждого звена описывается набором из четырех параметров: углов $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ и изменением длин невесомых участков $\xi_{i1}(t)$, $\xi_{i2}(t)$. При этом на конце последнего звена находится невесомый участок, который не оказывает влияния на движение звена, поэтому $\xi_{n2}(t)$ не включается в обощенные координаты. Массы звеньев обозначим m_i, моменты инерции звеньев относительно осей, проходящих через один из концов весомого стержня, перпендикулярно плоскости движения – I_i. Обозначим: $M_{i\varphi}$, $M_{i\psi}$ – моменты, развиваемые в i-м шарнире; $F_{i\alpha}$ – продольные силы, действующие вдоль i-го стержня, обеспечивающие изменение его длины требуемым образом. Моменты и продольные силы являются управлением в данной механической системе.

Уравнения движения элементов n-звенной механической системы в одноопорной фазе представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме можно записать в виде:

$$A_\kappa(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\ddot{\varphi} + B_\kappa(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\ddot{\psi} + \sum_{\alpha=1}^{2} C_{\kappa\alpha}(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\ddot{\xi}_\alpha + D_\kappa(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\dot{\Phi}\dot{\varphi}$$
$$+ E_\kappa(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\dot{\Psi}\dot{\psi} + 2\sum_{\alpha=1}^{2} F_{\kappa\alpha}(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\dot{\Phi}\dot{\xi}_\alpha + 2G_\kappa(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\dot{\Phi}\dot{\psi} + \tag{4.1}$$
$$+ 2\sum_{\alpha=1}^{2} H_{\kappa\alpha}(\varphi,\psi,\xi_\alpha)\dot{\Psi}\dot{\xi}_\alpha + gK_\kappa(\psi) = M_\kappa(\varphi,\psi,\xi_\alpha)$$

где нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $\kappa = 1, ..., 4$, где 1 соответствует обобщенной координате φ, 2 – ψ, 3 – ξ_{i1}, 4 – ξ_{i2}; $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^{\mathrm{T}}$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^{\mathrm{T}}$ – векторы углов; $\xi_\alpha = (\xi_{1\alpha}, ..., \xi_{n\alpha})^{\mathrm{T}}$ – вектор переменных длин звеньев участка α ($\alpha = 1, 2$); $l = (l_1, ..., l_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор длин звеньев участков постоянной длины; $\dot{\varphi}$ – вектор угловых скоростей; $\ddot{\varphi}$ – вектор угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \mathrm{diag}(\dot{\varphi}_1, ..., \dot{\varphi}_n)$ – диагональная матрица; M, F_α – векторы управляющих моментов и сил на участке α ($\alpha = 1, 2$) звена; A, B, G_α, H_α – матрицы, учитывающие инерционные свойства системы; C, K_α – матрицы, определяемые моментами силы тяжести; D_1, D_2, E_1, E_2, $L_{\alpha1}$, $L_{\alpha2}$, $P_{\alpha1}$, $P_{\alpha2}$ – матрицы, учитывающие переменную длину звеньев.

Приведем, в качестве примера, формулу для матрицы A. Матрица $A = (a_{ij})$ является симметрической: $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1, 2, ..., n$, при этом $j \geq i$.

Элементы симметрической матрицы A имеют вид:

$$a_{ij} = \delta_{ij} I_i + (l_i + \xi_{i1} + (1 - \delta_{ij})\xi_{i2}) \times$$
$$\times\left(m_j(l_j\tilde{\delta}_{ij} + \xi_{j1}) + (l_j + \xi_{j1} + \xi_{j2})(l_j\delta_{ij} + \xi_{j1}\delta_{ij} + \xi_{j2}\delta_{ij}) \sum_{k=j+1}^{n} m_k \right) \times \tag{4.2}$$
$$\times \cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i \cos\psi_j$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, тогда $\tilde{\delta}_{ij}$ – половинный антикронекер:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \tilde{\delta}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1/2, & i \neq j \end{cases}$$

Матричная форма записи уравнений движения (4.1) является универсальной и может быть применена к описанию движения экзоскелета или антропоморфного робота с любым числом звеньев.

Дальнейшей задачей является разработка методов управления рассмотренными выше системами с произвольным числом звеньев переменной длины.

5. Управление целенаправленным движением системы твердых тел, содержащей звенья переменной длины. Система уравнений (4.1) содержит управляющие моменты M_κ и силы F_κ, призванные обеспечить выполнение уравнений связей, наложеннных на обобщенные координаты и скорости:

$$f^\mu(q,t) = 0, \quad g^\gamma(q,v,t) = 0$$
$$\mu = 1, \ldots, m, \quad \gamma = m+1, \ldots, r, \quad r < 4n \tag{5.1}$$

Здесь $v = dq/dt$, $q = (q^1, \ldots, q^{4n})$ – вектор обобщенных координат, соответствующих переменным φ_j, ψ_j, ξ_{j1}, ξ_{j2}, $j = 1, \ldots, n$. В новых переменных дифференциально-ал-

гебраические уравнения динамики замкнутой системы и уравнения возмущений связей запишутся в следующем виде:

$$\frac{dq^i}{dt} = v^i$$
$$\frac{dv^i}{dt} = Q^i(q,v,t) + \sum_{s=1}^{S} b^{is}(q,v,t)u_s \tag{5.2}$$
$$q^i(t_0) = q_0^i, \quad i = 1, \ldots, 4n$$

$$y^\mu - f^\mu(q,t) = 0 \tag{5.3}$$

$$z^\rho - g^\rho(q,v,t) = 0, \quad g^\mu = \frac{df^\mu}{dt} \tag{5.4}$$

$$\frac{dy^\mu}{dt} = z^\mu$$
$$\frac{dz^\rho}{dt} = \sum_{\mu=1}^{m} h_\mu^\rho(q,v,t)y^\mu + \sum_{\sigma=1}^{r} k_\sigma^\rho(q,v,t)z^\sigma \tag{5.5}$$
$$\rho = 1, \ldots, r$$

Число S управляющих воздействий зависит от числа звеньев переменной длины, коэффициенты h_μ^ρ, k_σ^ρ уравнений (5.5) возмущений связей определяются из условий асимптотической устойчивости тривиального решения.

Из уравнений (5.2)–(5.5) следуют выражения управляющих воздействий

$$u_s = u^0 u_s^\tau + u_s^v \tag{5.6}$$

Здесь u^0 – произвольная скалярная величина, u_s^τ вычисляется как определитель, первая строка которого состоит из величин $\delta^{sl} = 0$, $l \neq s$, $\delta^{ss} = 1$, $s, l = 1, \ldots, S$, последующие строки составлены из элементов матрицы $(g^{\rho s})$,

$$g^{\rho s} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\partial g^\rho}{\partial v^i} b^{is}$$

и произвольных величин $g^{\kappa s}$, $\kappa = r+1, \ldots, S-1$, которые не обращают в нуль величину определителя. Второе слагаемое определяется выражением

$$u_s^v = -\sum_{l=1}^{S} \delta_{sl} \sum_{\rho,\sigma=1}^{r} X_i g^{\rho l} \omega_{\rho\sigma}(h_\mu^\sigma y^\mu + k_\eta^\sigma z^\eta + \tilde{g}^\sigma),$$

$$\delta_{sl} = 0, \quad s \neq l, \quad \delta_{ss} = 1, \quad (\omega_{\sigma\rho}) = (\omega^{\sigma\rho})^{-1}, \quad \omega^{\sigma\rho} = \sum_{l,s=1}^{S} g^{\sigma l}\delta_{ls} g^{\rho s}$$

Выражения (5.6) управлений соответствуют асимптотической устойчивости многообразия, определяемого уравнениями связей, и при дальнейшем уточнении коэффициентов уравнений возмущений связей позволяет обеспечить стабилизацию связей при численном решении уравнений динамики замкнутой системы [5].

6. Модели лыжника-сноубордиста. В качестве примера решения прикладной задачи, модифицируем предложенный выше подход к моделированию системы с произвольным числом звеньев на случей антропоморфных систем с неголономными связями в виде лыжника-сноубордиста.

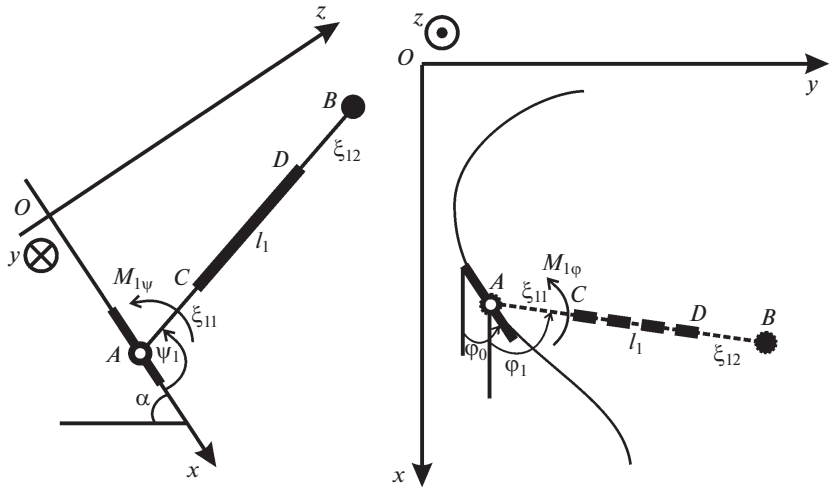

Рис. 4

Модель лыжника-сноубордиста с одним подвижным звеном переменной длины, конструкция которого рассмотрена выше, представлена на рис. 4. Координаты крепления звена AB к лыже x_A, y_A. Угол φ_0 определяет направление лыжи относительно оси OX. Масса лыжи m_0, момент инерции I_0. Положение центра масс звена AB определяется двумя углами: φ_1 – углом между осью OX и проекцией звена AB на плоскость XOY, отсчитываемым от оси OX против часовой стрелки; ψ_1 – углом между звеном AB и его проекцией на плоскость XOY, отсчитываемым от проекции звена AB на плоскость XOY против часовой стрелки и изменением его длины, координатами крепления звена к лыже x_A, y_A и переменными длинами участков стержня $\xi_{11}(t)$ и $\xi_{12}(t)$. Рассматриваемая система имеет семь степеней свободы. Остальные обозначения совпадают с рис. 1.

В точке B имеется сосредоточенная масса m_G, моделирующая корпус лыжника-сноубордиста, а звено AB моделирует ноги в целом. Рассмотрим модель с двумя звеньями переменной длины. Нижнее звено моделирует ноги в целом сноубордиста, верхнее – корпус, точечная масса – голову (рис. 5). В дополнение к рис. 4 вводится звено A_2A_3, обозначения для которого совпадают с рис. 2. Положение звена A_2A_3 описывается углами φ_2, ψ_2 и участками переменной длины ξ_{21} и ξ_{22}. Рассматриваемая система имеет одиннадцать степеней свободы. Такая модель является более реалистичной и ближе к биомеханическому прототипу, позвляя в совокупности моделировать нижние конечности и отдельно корпус.

Рассмотрим модель с произвольным конечным количеством n звеньев переменной длины (рис. 6), с помощью которой можно моделировать динамику лыжника-сноубордиста с необходимой точностью. Количество степеней свободы такой механической системы определяется по формуле: $4n + 3$.

С помощью такой модели можно моделировать лыжника-сноубордиста с нижними конечностями, состоящими из голени и бедра, корпуса из нескольких основных блоков, шеи, головы, рук. Следовательно, используя данную модель, можно описать лыжника-сноубордиста очень близко к биомеханическому прототипу.

7. Составление системы дифференциальных уравнений движения с учетом неголономной связи. Рассмотрим модель с одним звеном переменной длины (рис. 4). Процедура

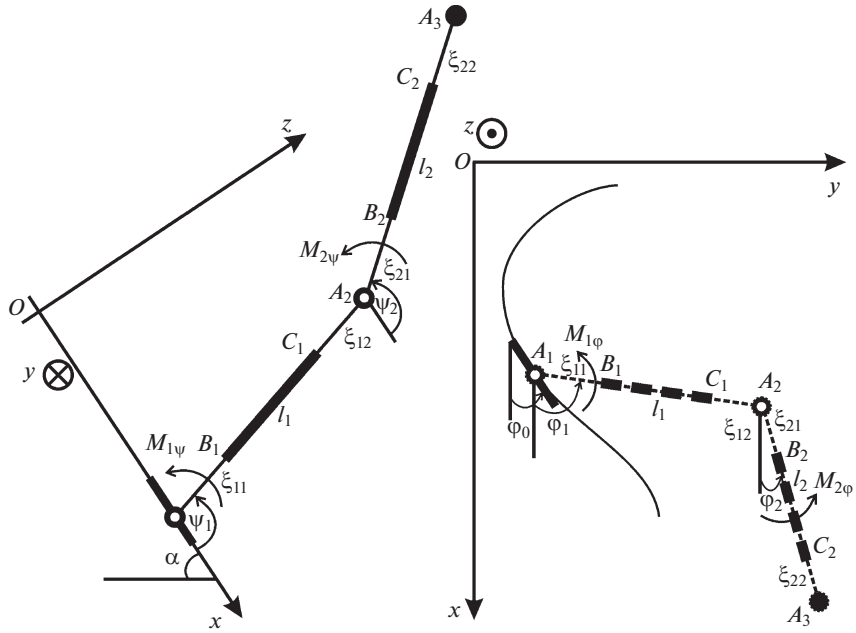
A3
ξ22
C2
z
z
O
y
l2
B2
M2ψ
ξ21
A2
ψ2
O
C1
ξ12
y
M1φ
A1
ξ11
B1
C1
A2
l1
l1
φ0
φ1
ξ12
ξ21
M1ψ
B1
B2
ξ11
l2
M2φ
φ2
ψ1
C2
α
ξ22
x
x
A3

Рис. 5

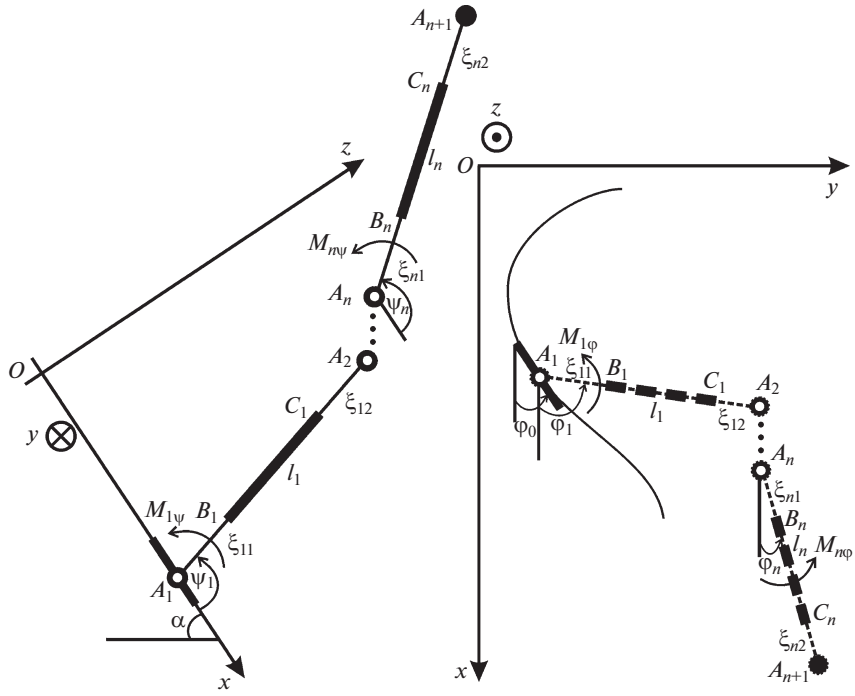
An+1
ξn2
Cn
z
z
ln
O
y
Bn
Mnψ
ξn1
An
ψn
A2
O
C1
ξ12
y
M1φ
A1
ξ11
B1
C1
A2
l1
l1
φ0
φ1
ξ12
An
ξn1
M1ψ
B1
Bn
ln
Mnφ
ξ11
φn
A1
ψ1
Cn
α
ξn2
x
x
An+1

Рис. 6

получения выражения для кинетической энергии с использованием бесконечно малых участков стержня и интегрированием по весомому отрезку CD описана выше.

Кинетическая энергия всего механизма складывается из кинетической энергии лыжи, звена CD и сосредоточенной массы в точке B.

$$T = T_0 + T_{CD} + T_B \tag{7.1}$$

Кинетическая энергия механизма в выписанном виде имеет вид:

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2}[\theta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_0\dot{\varphi}_0^2 + m_1\dot{\xi}_{11}^2 + m_G(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12})^2 + \zeta(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2(C_1^\psi)^2)] + \\ + \dot{x}[(m_1\dot{\xi}_{11} + m_G(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}))C_1^\varphi C_1^\psi - \\ - (l_1(m_G + m_1/2) + m_1\xi_{11} + m_G(\xi_{11} + \xi_{12}))(C_1^\psi S_1^\varphi\dot{\varphi}_1 + C_1^\varphi S_1^\psi\dot{\psi}_1)] + \\ + \dot{y}[(m_1\dot{\xi}_{11} + m_G(\dot{\xi}_{11} + \dot{\xi}_{12}))S_1^\varphi C_1^\psi + \\ + (l_1(m_G + m_1/2) + m_1\xi_{11} + m_G(\xi_{11} + \xi_{12}))(C_1^\psi C_1^\varphi\dot{\varphi}_1 - S_1^\varphi S_1^\psi\dot{\psi}_1)] \end{gathered} \tag{7.2}$$

где $\theta = m_0 + m_1 + m_G$ – масса всего механизма в виде лыжника-сноубордиста вместе с лыжей, ногами и корпусом, $\zeta = I_1 + m_1\xi_{11}(l_1 + \xi_{11}) + m_G(l_1 + (\xi_{11} + \xi_{12}))^2$.

Сравнивая полученное выражение для кинетической энергии лыжника-сноубордиста (7.2) и отдельного звена (2.5) видно, что ее структура изменилась незначительно, только добавились слагаемые, соответствующие дополнительно введенным обобщенным координатам и массе лыжи и корпуса лыжника-сноубордиста.

Связь по поверхности контакта лыжи и снега является неголономной. Уравнение связи имеет вид:

$$\dot{x}\mathrm{tg}\varphi_0 - \dot{y} = 0 \tag{7.3}$$

Траектория сноубордиста (рис. 4) описывается синусоидой

$$y = A\sin(kx), \quad \dot{y} = Ak\cos(kx) \tag{7.4}$$

где A – амплитуда траектории. Тогда уравнение связи принимает вид:

$$\mathrm{tg}\varphi_0 - Ak\cos(kx) = 0 \tag{7.5}$$

и накладывает ограничение на вариации координат:

$$\mathrm{tg}\varphi_0 \cdot \delta x - \delta y = 0 \tag{7.6}$$

Для описания движения неголономной системы используем уравнения Рауса с множителями Лагранжа. В данном случае, на систему наложена одна неголономная связь (7.3). Система дифференциальных уравнений для модели, представленной на рис. 4 имеет вид:

$$\begin{gathered} \theta\mathrm{sc}^2\varphi_0\ddot{x} + (\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - S_1^\varphi)C_1^\psi\ddot{\varphi}_1 - \\ - (\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 + C_1^\varphi)S_1^\psi\ddot{\psi}_1 - (m_1 + m_G)(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - C_1^\varphi)C_1^\psi\ddot{\xi}_{11} - \\ - m_G(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - C_1^\varphi)C_1^\psi\ddot{\xi}_{12} - (\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 + C_1^\varphi)C_1^\psi\dot{\varphi}_1^2 - \\ - (\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 + C_1^\varphi)C_1^\psi\dot{\psi}_1^2 - 2(\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - S_1^\varphi)S_1^\psi\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1 + \\ + (m_1 + m_G)(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - S_1^\varphi)C_1^\psi\dot{\varphi}_1\dot{\xi}_{11} + m_G(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - S_1^\varphi)C_1^\psi\dot{\varphi}_1\dot{\xi}_{12} - \\ - 2(m_1 + m_G)(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - C_1^\varphi)C_1^\psi\dot{\psi}_1\dot{\xi}_{11} - 2m_G(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0 - S_1^\varphi)C_1^\psi\dot{\psi}_1\dot{\xi}_{12} + \\ + \theta\mathrm{sc}^2\varphi_0\mathrm{tg}\varphi_0\dot{x}\dot{\varphi}_0 = \theta g_1 + R_x + R_y\mathrm{tg}\varphi_0 \end{gathered} \tag{7.7}$$

$$\ddot{\varphi}_0 = 0 \tag{7.8}$$

$$\begin{gathered}(\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^{\varphi}\mathrm{tg}\varphi_0 - S_1^{\varphi})C_1^{\psi}\ddot{x} + \zeta_{11}(C_1^{\psi})^2\ddot{\varphi}_1 + 2(\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^{\psi})^2\dot{\xi}_{11}\dot{\varphi}_1 + \\ + 2\vartheta_1(C_1^{\psi})^2\dot{\xi}_{12}\dot{\varphi}_1 - 2\zeta_1 C_1^{\psi}S_1^{\psi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1 + \\ + (\eta_1 + \vartheta_1)C_1^{\psi}C_1^{\varphi}\mathrm{sc}^2\varphi_0\dot{x}\dot{\varphi}_0 = M_{1\varphi} + R_x(\xi_{11} + l_1)\sin\varphi_1 + R_y(\xi_{11} + l_1)\cos\varphi_1\end{gathered} \tag{7.9}$$

$$\begin{gathered}-(\eta_1 + \vartheta_1)(S_1^{\varphi}\mathrm{tg}\varphi_0 + C_1^{\varphi})S_1^{\psi}\ddot{x} + \zeta_1\ddot{\psi}_1 + \zeta_1 C_1^{\psi}S_1^{\psi}\dot{\varphi}_1^2 + 2(\eta_1 + \vartheta_1)\dot{\xi}_{11}\dot{\psi}_1 + \\ + 2\vartheta_1\dot{\xi}_{12}\dot{\psi}_1 + g\eta_1 C_1^{\psi} - \\ - (\eta_1 + \vartheta_1)S_1^{\varphi}S_1^{\psi}\mathrm{sc}^2\varphi_0\dot{x}\dot{\varphi}_0 = M_{1\psi} + R_x(\xi_{11} + l_1)\sin\psi_1 + R_z(\xi_{11} + l_1)\cos\psi_1\end{gathered} \tag{7.10}$$

$$\begin{gathered}(m_1 + m_G)(S_1^{\varphi}\mathrm{tg}\varphi_0 + C_1^{\varphi})C_1^{\psi}\ddot{x} + (m_1 + m_G)\ddot{\xi}_{11} + m_G\ddot{\xi}_{12} - (\eta_1 + \vartheta_1)(C_1^{\psi})^2\dot{\varphi}_1^2 - \\ - (\eta_1 + \vartheta_1)\dot{\psi}_1^2 + gm_1 S_1^{\psi} + (m_1 + m_G)S_1^{\varphi}C_1^{\psi}\mathrm{sc}^2\varphi_0\dot{x}\dot{\varphi}_0 = F_1\end{gathered} \tag{7.11}$$

$$\begin{gathered}m_G(S_1^{\varphi}\mathrm{tg}\varphi_0 + C_1^{\varphi})C_1^{\psi}\ddot{x} + m_G\ddot{\xi}_{11} + m_G\ddot{\xi}_{12} - \vartheta_1(C_1^{\psi})^2\dot{\varphi}_1^2 - \vartheta_1\dot{\psi}_1^2 + gm_G S_1^{\psi} + \\ + m_G S_1^{\varphi}C_1^{\psi}\mathrm{sc}^2\varphi_0\dot{x}\dot{\varphi}_0 = F_2\end{gathered} \tag{7.12}$$

где $\zeta_1 = I_1 + m_1\xi_{11}(l_1 + \xi_{11}) + m_G(l_1 + (\xi_{11} + \xi_{12}))^2$, $\eta_1 = m_1(\xi_{11} + l_1/2)$, $\vartheta_1 = m_G(\xi_{11} + l_1 + \xi_{12})$, $\theta = m_0 + m_1 + m_G$, $\theta_1 = m_1 + m_G$, $C_1^{\psi} = \cos\psi_1$, $S_1^{\psi} = \sin\psi_1$.

Были составлены также дифференциальные уравнения движения для сноубордиста с двумя звеньями переменной длины. Система дифференциальных уравнений для модели сноубордиста сохраняет вид (4.1). Однако, матрицы становятся матрицами следующего набора аргументов: $A_\kappa(x, \varphi_0, \varphi, \psi, \xi_\alpha)$, нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $\kappa = 1, ..., 6$, где 1 соответствует обобщенной координате x, 2 – φ_0, 3 – φ, 4 – ψ, 5, 6 – ξ_α ($\alpha = 1, 2$ – номер невесомого участка переменной длины на звене). Теперь в векторы обобщенных координат включаются дополнительные координаты: $\varphi = (x, \varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)^{\mathrm{T}}$ и $\psi = (x, \varphi_0, \psi_1, ..., \psi_n)^{\mathrm{T}}$; $\xi_\alpha = (x, \varphi_0, \xi_{1\alpha}, ..., \xi_{n\alpha})^{\mathrm{T}}$; $l = (x, \varphi_0, l_1, ..., l_n)^{\mathrm{T}}$. $\dot{\Phi} = \mathrm{diag}(\dot{x}, \dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, ..., \dot{\varphi}_n)$, $\dot{\Psi} = \mathrm{diag}(\dot{x}, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_1, ..., \dot{\psi}_n)$ – диагональные матрицы.

Матрицы A_κ, B_κ и т.д. распадаются на блочные матрицы, с различными блоками, соответствующими первым двум обощенным координатам, и остальным обобщенным координатам, аналогично тому, как это было в модели антропоморфного механизма в безопорной и двухопорной фазах движения, рассмотренных в работе [10].

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11}(x, \varphi_0, \varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & 0 & a_{13}(x, \varphi_0, \varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & \dots & a_{1n}(x, \varphi_0, \varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{31}(x, \varphi_0, \varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & 0 & a_{33}(\varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & \dots & a_{3n}(\varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x, \varphi_0, \varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & 0 & a_{n3}(\varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) & \dots & a_{nn}(\varphi_i\psi_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}) \end{array}\right) \tag{7.13}$$

Были получены обобщения матриц для модели n-звенного лыжника-сноубордиста. Приведем, для примера, обобщающие формулы для матрицы A. Матрица A распалась на блоки, показанные в формуле (7.13). Верхний левый блок матрицы A (показанный сплошной линией), содержащий первые две строки и столбца дает уравнения, описывающие движение точки крепления ноги к лыже

$$a_{11} = \sum_{k=0}^{n}(m_k + m_G), \quad a_{22} = 1, \quad a_{2j} = a_{i2} = 0 \quad (i = j \neq 2) \tag{7.14}$$

Формулу для части матрицы A блоков, содержащих информацию о движении лыжи и неголономной связи, показанных штрих-пунктирным выделением, запишем только для верхней строки, так как эти блоки являются симметрическими. Как и прежде i – номер строки, j – номер столбца. Для верхнего правого блока: $i = 1$, $j = 3, 4, ..., n$, при этом $a_{1j} = a_{i1}$.

$$a_{1j} = (\eta_{j-2} + \vartheta_{j-2,2})(C^{\varphi}_{j-2}\mathrm{tg}\varphi_0 - S^{\varphi}_{j-2})C^{\psi}_{j-2} \tag{7.15}$$

Формула для части матрицы A блока, расположенного снизу справа и выделенного пунктиром, содержащего информацию об угловых переменных представим следующим образом. Часть матрицы A является симметрической, поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1, 2, ..., n$, при этом $j \geq i$.

Элементы симметрического блока матрицы A имеют вид:

$$a_{ij} = (\delta_{ij}\zeta_{j-2} + (1 - \delta_{ij})(\eta_{j-2} + \vartheta_{j-2})\cos(\varphi_{i-2} - \varphi_{j-2}))\cos\psi_{i-2}\cos\psi_{j-2} \tag{7.16}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$

$$\zeta_j = I_j + m_j(\xi_{j1}(l_j + \xi_{j1}) + l_{j+1}(2(\xi_{j1} + \xi_{j2}) + l_j))$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} m_{j+1}(\xi_{j1} + \xi_{j2})^2 + m_G(l_j + (\xi_{j1} + \xi_{j2}))^2,$$

$$\eta_j = m_j\left(\xi_{j1} + l_j/2 + \sum_{j=1}^{n} l_{j+1}\right) + \sum_{j=1}^{n}(\xi_{j1} + \xi_{j2}), \quad \vartheta_j = m_G(\xi_{j1} + l_j + \xi_{j2})$$

Остальные элементы: $a_{ji} = a_{ij}$. Эта формула аналогична выражению (4.2), однако, ввиду добавления элемнтов в модели и увеличившейся громоздкости записана в более компактных выражениях, а не в полностью выписанном виде.

Таким образом, на основании формулы (4.2) возможно построить выражение (7.16), что позволяет упростить получение системы дифференциальных уравнений движения.

8. Численное моделирование динамики лыжника-сноубордиста. Рассмотрим динамику модели, состоящей из двух звеньев. Для этого систему уравнений движения (7.7)–(7.12) и связей (7.3), (7.5) необходимо дополнить с целью удержания звеном околовертикального положения. Дополнительные связи позволяют однозначно определить управляющие воздействия, обеспечивающие заданное состояние звеньев.

Рассматрим следующий набор связей:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = 0 \tag{8.1}$$

$$(\xi_{11} + l_1)\sin\psi_1 = l_c \tag{8.2}$$

где l_c – заданное значение совместной длины.

Неголономная связь (7.3) может быть учтена, применив метод Чаплыгина. Связь (8.1) можно сразу учесть в выражении для функции Лагранжа. Таким образом, связи (8.2) и (5.5) определяют управляющие воздействия для движения по φ_0, ξ_{11} и ψ_1.

Для анализа полученной системы (7.7)–(7.12), (7.3), (7.5), (8.1) и (8.2) используется численное интегрирование при помощи разностной схемы первого порядка. Для получения устойчивого численного решения применяется метод стабилизации связей.

Рассмотрим значение отклонений численного решения от уравнений связей со временем, представленном на рис. 7, 8. По рисункам видно, что управляющее воздействие, полученное численным методом с учетом стабилизации связей обеспечивает почти вертикальное положение верхнего звена.

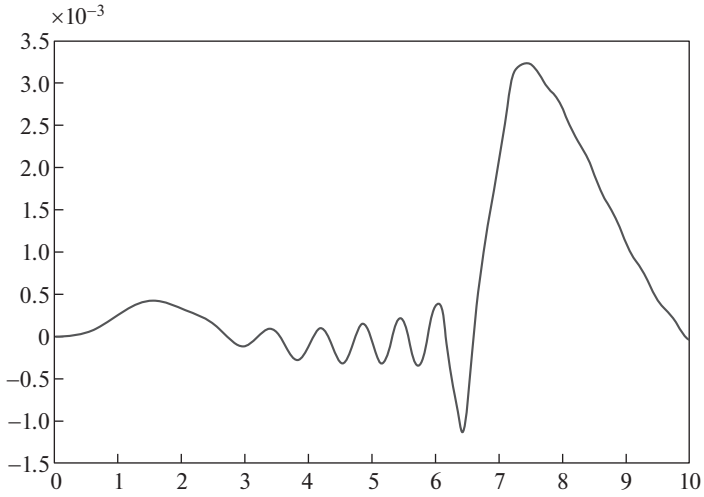

Рис. 7

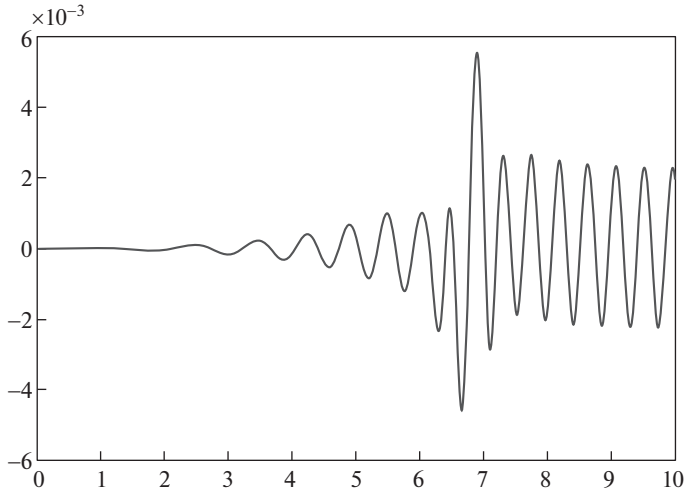

Рис. 8

9. Заключение. Разработана динамическая модель системы твердых тел с произвольным числом звеньев переменной длины, соединенных между собой шарнирами. Предложен матричный метод записи системы дифференциальных уравнений движения и получены обобщающие формулы для матриц, одна из которых приводится в качестве примера. Поставлена задача управления такой системой на основе метода стабилизации связей.

В качестве примера использования разработанной механической системы предложена пространственная модель лыжника-сноубордиста с неголономной связью и звеньями переменной длины. Каждое звено переменной длины состоит из двух невесо-

мых участков переменной длины и абсолютно твердого весомого звена между ними. Проведено численное моделирование управляемого движения лыжника-сноубордиста. Установлено, что метод стабилизации связи позволяет реализовывать управляемое, устойчивое, целенаправленное движение такой неустойчивой системой как лыжник-сноубордист. Результаты моделирования могут быть использованы в дальнейшем для решения задач управления антропоморфными системами с неголономными связями.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 19-08-00261 А, и Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН “5-100”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вукобратович М., Христич Д.* Управление антропоморфическими системами // Управление в пространстве. М.: Наука, 1976. Т. 2. С. 180–187.
2. *Иванов А.В.* Исследование математической модели экзоскелетона нижних конечностей // Ломоносовские чтения: тезисы докладов науч. конф. (16–25 апреля 2012, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова). М.: Издательство Московского университета, 2012. С. 84.
3. *Лавровский Э.К., Письменная Е.В.* Алгоритмы управления экзоскелетоном нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2014. № 1. С. 44–51.
4. *Павловский В.Е. и др.* Биомехатронный комплекс нейрореабилитации – концепция, конструкция, модели и управление // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 111. 19 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-111
5. Механика и управление экзоскелетами нижних конечностей для нейрореабилитации спинальных больных / А.П. Алисейчик, И.А. Орлов, В.Е. Павловский, В.В. Павловский, А.К. Платонов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: аннотации докладов. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. С. 319.
6. *Формальский А.М.* Об одном способе управления экзоскелетоном // Ломоносовские чтения: тезисы докладов науч. конф. (16–25 апреля 2012, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова). М.: Издательство Московского университета, 2012. С. 151–152.
7. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
8. *Белецкий В.В.* Двуногая ходьба: модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
9. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова думка, 1989. 192 с.
10. *Охоцимский Д.Е. и др.* Опыт проектирования многоцелевого гидравлического шагающего шасси // Механика и управление движением шагающих машин. 1995. № 2. С. 103–111.
11. *Борисов А.В.* Механика пространственной модели экзоскелета и антропоморфного робота // Вопросы оборонной техники. Научно-технический журнал. Технические средства противодействия терроризму. Серия 16. Вып. 3–4. 2018. С. 46–55.
12. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 148–174.
13. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М. Наука, 1967. 519 с.
14. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация. М.: Издательство ИПМех РАН (Препринт № 1128), 2016. 154 с.
15. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 15–28.
16. *Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* Применение метода стабилизации связей к задачам неголономной механики // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики

частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 17–19 мая 2016 г. Москва: РУДН, 2016. С. 112–116.

17. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А.* Избранные задачи неголономной механики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 289 с.
18. *Калёнова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А.* Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117–158.
19. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 5. С. 511–522.
20. *Борисов А.В.* Дифференциальные уравнения движения плоских стержневых систем со звеньями переменной длины в безопорной и двухопорной фазах движения для моделирования опорно-двигательного аппарата человека, экзоскелета и антропоморфного робота // Международный научный теоретико-практический альманах 2017. Вып. 2. Смоленск, 2017. С. 153–165.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 88–97

УДК 531.8

УРАВНЕНИЕ ТРОГАНИЯ ПОЕЗДА

© 2021 г. И. П. Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.
После доработки 18.11.2019 г.
Принята к публикации 20.11.2019 г.

Показано, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом, чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого над вторым.

Ключевые слова: поезд, трогание, сцепки, трение, перемещение, скорость

DOI: 10.31857/S0572329921020148

Введение. Сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Это приводит к тому, что режим трогания для наземного транспортного средства является наиболее тяжелым. Для поездов этот режим представляет настолько серьезную проблему, что иногда приходится принимать специальные меры, такие как использование песка в зоне контакта бандажа колеса с рельсом или вспомогательного локомотива.

Эффективным способом трогания поезда является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение последовательно и инертная масса непосредственно в момент трогания минимальна [1].

Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа и ударный характер передачи импульса, что отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда.

Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки.

Целью работы является построение математической модели “легкого” трогания поезда с упругими сцепками.

Расчет механической системы в составе массивных локомотива, вагонов и упругих сцепок является достаточно громоздким. Для его минимизации принимаются следующие допущения: сила F, развиваемая локомотивом, – величина постоянная; массы локомотива и вагонов равны между собой и составляют m.

1. Локомотив и один вагон. Уравнение сил, приложенных к локомотиву, имеет вид:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2) \tag{1.1}$$

где x_1, x_2 – перемещение, соответственно, локомотива и вагона, k – коэффициент упругости сцепки.

Силы, приложенные к вагону, удовлетворяют уравнению:

$$0 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2)$$

Из последнего уравнения следует

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 \tag{1.2}$$

Подстановка этого выражения в (1.1) дает

$$F = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + 2m\frac{d^2x_2}{dt^2} \tag{1.3}$$

$$\text{Пусть } d^2x_2\big/dt^2 = z \tag{1.4}$$

Тогда (1.3) запишется в виде

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2} \tag{1.5}$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0$$

Его корни равны

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t$$

Частное решение в соответствии с (1.5) имеет вид

$$z_2 = A$$

Подстановка его в (1.5) дает

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2}$$

откуда

$$A = \frac{F}{2m}$$

Общее решение уравнения (1.5) находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

В момент времени $t = 0$ сцепка не деформирована, следовательно, на вагон сила не действует и величина (1.4) равна нулю. Поэтому для $t = 0$ последнее выражение примет вид:

$$z(0) = 0 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{2m}$$

откуда

$$C_1 = -\frac{F}{2m}$$

С учетом этого

$$z = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m} \tag{1.6}$$

В соответствии с (1.4)

$$v_2 = \int z dt = -\frac{F}{2m}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3$$

$$x_2 = \int v_2 dt = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3 t + C_4 \tag{1.7}$$

С учетом (1.2), (1.4), (1.6) и (1.7)

$$x_1 = -\frac{F}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2k} + \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + C_3 t + C_4$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{F}{2k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-\frac{F}{4k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}t + C_3$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{F}{2k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t - C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t -$$
$$-\frac{F}{4k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

$$x_2(0) = 0 = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 - C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{4m}0^2 + C_3 0 + C_4$$

$$\frac{F}{4k} + C_4 = 0$$

$$C_4 = -\frac{F}{4k}$$

$$v_2(0) = 0 = -C_2\sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3$$

$$v_1(0) = 0 = C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k} - C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k} + C_3 = C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k} + C_3$$

$$\left.\begin{aligned} -C_2\sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3 &= 0 \\ C_2\sqrt{\frac{m}{2k}} + C_3 &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow C_2 = 0, \quad C_3 = 0$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 + \frac{F}{4k}$$

$$x_2 = \frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{4m}t^2 - \frac{F}{4k}$$

$$v_1 = \frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}t$$

$$v_2 = -\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}t$$

$$a_1 = \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

$$a_2 = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}$$

Характерный отрезок времени τ_2 (индекс “$_2$” означает количество составных частей поезда) для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_2) - \frac{F}{2m} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau_2 = 0$$

$$\sqrt{2\frac{k}{m}}\tau_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

За время τ_2 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_2) = -\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k} + \frac{F}{4k} = \frac{F\pi^2}{32k} + \frac{F}{4k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_2) = \frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F}{2\sqrt{2km}} + \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава.

$$a = \frac{F}{2m}, \quad v = \frac{F}{2m}t, \quad x = \frac{F}{4m}t^2$$

$$x(\tau_2) = \frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k} = \frac{F\pi^2}{32k}$$

$$v(\tau_2) = \frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)} = \frac{F\pi^2/(32k) + F/(4k)}{F\pi^2/(32k)} = 1 + \frac{32}{4\pi^2} \approx 1.81$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = \frac{F/(2\sqrt{2km}) + F\pi/(4\sqrt{2km})}{F\pi/(4\sqrt{2km})} = 1 + \frac{2}{\pi} \approx 1.64$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)} = 2.69$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого.

2. Локомотив и два вагона. Уравнения сил, приложенных, соответственно, к локомотиву и вагонам, имеют вид:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2) \tag{2.1}$$

$$k(x_1 - x_2) = m\frac{d^2x_2}{dt^2} + k(x_2 - x_3) \tag{2.2}$$

$$k(x_2 - x_3) = m\frac{d^2x_3}{dt^2}$$

Из последнего уравнения следует

$$x_2 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3 \tag{2.3}$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{d^2x_3}{dt^2}$$

Подстановка последних двух выражений в (2.2) дает

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2x_2 - x_3 = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + 2\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + 2x_3 - x_3 = \\ = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 3\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{d^2x_3}{dt^2}$$

Подстановка полученных выражений в (2.1) дает

$$\begin{aligned} \frac{F}{k} = \frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 3\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + \\ + x_3 - \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} - x_3 = \frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 4\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^6x_3}{dt^6} + 4\frac{k}{m}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{k^2}{m^2}\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{k^2F}{m^3} \tag{2.5}$$

Пусть

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = z \tag{2.6}$$

Тогда (2.5) запишется в виде

$$z'''' + 4\frac{k}{m}z'' + 3\frac{k^2}{m^2}z = \frac{k^2F}{m^3} \tag{2.7}$$

Характеристическое уравнение

$$r^4 + 4\frac{k}{m}r^2 + 3\frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$r_{1,2}^2 = -2\frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}, \quad r_1^2 = -3\frac{k}{m}, \quad r_2^2 = -\frac{k}{m}, \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{3\frac{k}{m}}, \quad r_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{3\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t + C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Частное решение имеет вид

$$z_2 = A$$

Подстановка его в (2.7) дает

$$3\frac{k^2}{m^2}A = \frac{k^2F}{m^3}, \quad A = \frac{F}{3m}$$

Общее решение находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m} \tag{2.8}$$

В соответствии с (2.6)

$$\begin{aligned} v_3 = \int z dt = C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \\ + C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} x_3 = \int v_3 dt = -C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \\ - C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 \end{aligned} \tag{2.10}$$

С учетом (2.3), (2.6), (2.8) и (2.10)

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m}{k}\frac{F}{3m} - \\ - C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - \\ - C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 = \\ = \frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5t + C_6 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 = \\ = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -2C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - 2C_2 \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m} \tag{2.13}$$

С учетом (2.4), (2.13), (2.11) и (2.10)

$$x_1 = -2C_1 \frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - 2C_2 \frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}\frac{m}{k} +$$

$$+ 2\frac{2m}{3k}C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + 2\frac{2m}{3k}C_2 \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{2F}{3k} + \frac{2F}{6m}t^2 + 2C_5 t + 2C_6 -$$

$$+ C_1 \frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_2 \frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3 \frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t +$$

$$+ C_4 \frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{F}{6m}t^2 - C_5 t - C_6 =$$

$$= -C_1 \frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2 \frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3 \frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t +$$

$$+ C_4 \frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{k} + \frac{F}{6m}t^2 + C_5 t + C_6$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t +$$

$$+ C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t + C_5 \tag{2.14}$$

$$a_1 = C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

В соответствии с (2.13)

$$a_2(0) = -2C_1 + \frac{F}{3m} = 0, \quad C_1 = \frac{F}{6m}$$

В соответствии с (2.8)

$$z(0) = 0 = \frac{F}{6m} + C_3 + \frac{F}{3m}, \quad C_3 = -\frac{F}{2m}$$

В соответствии с (2.11)

$$x_2(0) = \frac{2m}{3k}C_1 + \frac{F}{3k} + C_6 = 0$$

$$\frac{F}{9k} + \frac{F}{3k} + C_6 = 0, \quad C_6 = -\frac{4F}{9k}$$

В соответствии с (2.14), (2.9) и (2.12)

$$v_1(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} + C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0$$

$$v_3(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} - C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0, \quad C_4 = 0$$

$$v_2(0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2 + C_5 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_5 = 0$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + \frac{5F}{9k}$$

$$x_2 = \frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{F}{9k}$$

$$x_3 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{4F}{9k}$$

$$v_1 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t$$

$$v_2 = -\frac{F}{3\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t$$

$$v_3 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t$$

$$a_1 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

$$a_2 = -\frac{F}{3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

$$a_3 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}$$

Характерный отрезок времени τ_3 для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_3) - \frac{F}{3m} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3 + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 + \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0.427\pi$$

$$\tau_3 = 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

За время τ_3 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{6m}\left(0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0.427\pi - \frac{1}{2}\cos 0.427\pi + \frac{1}{6}(0.427\pi)^2 + \frac{5}{9}\right] =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0.427\pi - \frac{1}{2}\cos 0.427\pi + \frac{1}{6}(0.427\pi)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0.78\frac{F}{k}$$

Таблица 1

Количество секций поезда	$\frac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\frac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1.81	1.64	2.69
3	2.6	2.22	4.93

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m}0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$
$$= \frac{F}{\sqrt{km}}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\cdot 0.427\pi + \frac{1}{2}\sin 0.427\pi + \frac{1}{3}0.427\pi\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава.

$$a = \frac{F}{3m}, \quad v = \frac{F}{3m}t, \quad x = \frac{F}{6m}t^2$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0.3\frac{F}{k}$$

$$v(\tau_3) = \frac{F}{3m}\cdot 0.427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.45\frac{F}{\sqrt{mk}}$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2.6$$

$$\frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2.22$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4.93$$

Заключение. Применение упруго деформируемых сцепок решает проблему трогания тяжелого поезда.

В таблицу сведены перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива для моментов максимального растяжения упругой сцепки, отнесенные к соответствующим параметрам недеформируемого состава.

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом, чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого над вторым.

Полученные выражения для перемещений, скоростей и ускорений локомотива и вагонов имеют гармонические составляющие [2–4]. Для исключения продольных колебаний состава после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность ее гармонического сжатия с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронков В.Н.* Метод нахождения параметров связей для составных линейных систем с дискретными связями между подсистемами // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 100–108.
2. *Брискин Е.С., Калинин Я.В., Малолетов А.В.* Об оценке эффективности цикловых механизмов // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 13–19.
3. *Попов И.П.* Свободные гармонические колебания в системах с однородными элементами // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 546–549.
4. *Попов И.П.* Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. № 2. С. 37–40.
https://doi.org/10.25791/pfim.02.2019.599
5. *Быков Д.Л., Мартынова Е.Д.* Идентификация численно-графическим методом характеристик вязкоупругих материалов при повторном сжатии после разгрузки // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 3–9.
6. *Валеев А.Р., Зотов А.Н., Зубкова О.Е., Ризванов Р.Г., Свиридов М.В.* Системы с разрывной квазинулевой восстанавливающей силой // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 130–136.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 98–109

УДК 531.36

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АМПЛИТУДЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

© 2021 г. А. А. Битюрин

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия
e-mail: sntk_2015@maul.ru

Поступила в редакцию 01.01.2020 г.
После доработки 14.01.2020 г.
Принята к публикации 17.01.2020 г.

Решение динамических задач продольного удара системы однородных стержней в нелинейной постановке представляет, как известно, существенные математические трудности. Существующие подходы имеют довольно ограниченное применение главным образом из-за существенной приближенности решения поставленной задачи. Помимо этого такие подходы затрагивают обширный математический аппарат, что затрудняет их использование в инженерных расчетах. На практике немалый интерес представляет моделирование амплитуды поперечных колебаний системы однородных стержней при продольном ударе, имеющих различную длину и толщину. Решение поставленной задачи осложняется хаотичностью интерференционной картины продольных волн при их переходе через ударное сечение стержней, являющееся границей однородных участков рассматриваемой стержневой системы. В этой связи деформации и продольные силы по длине стержней быстро меняются во времени. Настоящая работа посвящена математическому моделированию амплитуды поперечных колебаний физически и геометрически однородных стержней, один из которых неподвижен и взаимодействует с абсолютно жесткой преградой, а другой, двигаясь с предударной скоростью, соударяется с первым стержнем. В первом случае соударение рассматривается с учетом эксцентриситета в ударном сечении стержней. Во втором случае учитывается начальная кривизна одного из стержней. Моделирование осуществляется с применением метода начальных параметров и волновой модели продольного удара. Получены результаты моделирования максимального прогиба при различных величинах начальной кривизны и эксцентриситета в зависимости от предударной скорости. При анализе результатов выявлена так называемая “зона максимальных прогибов” – интервал изменения предударной скорости, на котором наблюдается максимальная амплитуда поперечных колебаний однородных стержней. Дополнительно отмечается ряд закономерностей, выявленных при сравнении результатов для обоих случаев. Подчеркивается актуальность применения данной методики расчета в решении динамических задач, возникающих при проектировании инженерных сооружений, имеющих динамически нагруженные стержневые системы.

Ключевые слова: поперечные колебания, прогиб, продольный удар, волновая модель, метод начальных параметров, предударная скорость, стержень

DOI: 10.31857/S0572329921020045

Введение. Задачи расчета на устойчивость и динамический прогиб при поперечных колебаниях в работах [1–6] реализовывались в основном для идеальных стержней с прямолинейной осью при отсутствии каких либо посторонних внешних воздействий.

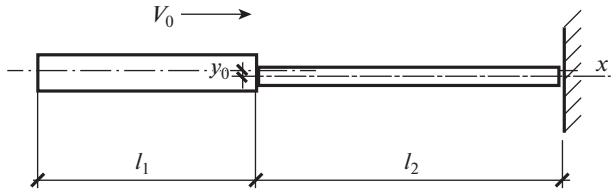

Рис. 1

В реальной ситуации очень часто необходимо учитывать различные дополнительные факторы, такие как ударное взаимодействие с эксцентриситетом или с начальной кривизной стержня. В этом случае решение поставленной задачи усложняется. Особую важность представляет учет динамического характера продольного нагружения стержней, что приводит к дальнейшему усложнению поставленной задачи, как это было справедливо отмечено в работах [7–10].

Как показал проведенный обзор литературы, проблема продольного изгиба стержня при динамической нагрузке известна довольно широко. Основную сложность решения динамических задач представляет их нелинейность. Исследователями предлагаются различные подходы к решению поставленной задачи, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

Необходимо отметить, что если рассматривать продольный удар нескольких стержней различной длины и толщины, составляющих единую стержневую систему с несколькими однородными участками, то решение задачи известными методами [1–10] может оказаться невозможным из-за хаотичности интерференционной картины продольных волн при их переходе через границы таких участков.

Ранее были рассмотрены задачи поперечных колебаний однородного стержня при продольном ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса [11] и продольного удара ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну одного из участков [12]. Был реализован подход, заключавшийся в совместном применении метода начальных параметров [13] и волновой модели продольного удара [14–17]. В настоящей работе этот подход реализуется для решения задачи ударного взаимодействия системы двух однородных стержней.

1. Постановка задачи. Ниже приводится модель расчета максимального прогиба однородных стержней *1* и *2* при их продольном ударе о жесткую преграду. Первый стержень длиной l_1 и площадью поперечных сечений A_1 движется с предударной скоростью V_0 и соударяется со стержнем *2*, длина которого l_2 площадь поперечных сечений A_2, соприкасающимся с абсолютно жесткой преградой. Учитывается эксцентриситет ударного взаимодействия y_0 (рис. 1) и начальная кривизна одного из стержней (рис. 2). Суммарная длина обоих стержней l равна $l_1 + l_2$.

Разработанная математическая модель расчета позволяет учесть силы инерции, действующие на рассматриваемую стержневую систему и вызванные кратковременностью действия ударной силы. Методом начальных параметров рассчитываются максимальные поперечные смещения и скорость сечений стержней, сжатых постоянной продольной силой. Далее с применением волновой модели продольного удара и метода характеристик [14–17] вычисляется продольная сила, возникающая в стержнях при продольном ударе, и рассчитывается время ее воздействия. После прекращения действия продольной силы оба стержня представляют из себя колебательную систему, выведенную из положения равновесия и совершающую затухающие поперечные ко-

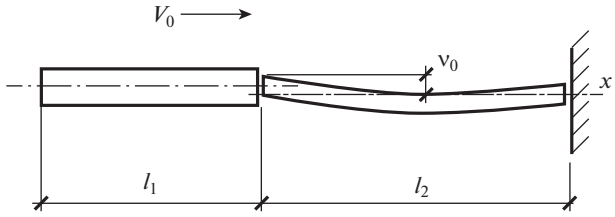

Рис. 2

лебания, имея вначале процесса приобретенную скорость и начальное смещение поперечных сечений.

2. Применение метода начальных параметров. Для определения максимальной амплитуды поперечных колебаний или максимального прогиба, которые будут иметь место вначале колебательного процесса стержней после соударения, можно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня постоянного поперечного сечения, несущего равномерно распределенную массу [1, 13]:

$$(dy^4/d\xi^4) + \nu^2(d^2y/d\xi^2) - u^4y = 0 \tag{2.1}$$

где y – прогиб оси стержня, $\xi = x/l$ относительная координата, $\nu_2 = Nl^2/EI$; $u^4 = (m\omega^2l^4/EI)$, N – продольная сила (положительная, если стержень сжат), l – длина стержня или его однородного участка, EI – жесткость стержня при изгибе, m – интенсивность массы, ω – частота свободных колебаний.

При решении поставленной задачи, уравнение (2.1) решается для каждого стержня в отдельности.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (2.1)

$$\lambda^4 + \nu^2\lambda^2 - u^4 = 0 \tag{2.2}$$

и его корни будут [13]

$$\lambda_1^2 = -(\nu^2/2) - \sqrt{(\nu^4/4) + u^4}; \quad \lambda_2^2 = -(\nu^2/2) + \sqrt{(\nu^4/4) + u^4} \tag{2.3}$$

В зависимости от направления продольной силы (сжатие или растяжение) u^4 и ν^2 принимают как положительные, так и отрицательные значения, поэтому корни (2.3) могут быть вещественными, чисто мнимыми или комплексными сопряженными числами.

Общий интеграл уравнения (2.1) при отсутствии кратных корней можно записать в виде ряда

$$y = \sum_{j=1,2} (A_j \mathrm{sh}\lambda_j\xi + B_j \mathrm{ch}\lambda_j\xi) \tag{2.4}$$

где A_j, B_j – постоянные интегрирования, λ_j – корни характеристического уравнения (2.2).

Выражение (2.4) для прогибов стержня дает возможность составить формулы усилий и углов поворота сечений стержней, если воспользоваться дифференциальными зависимостями [13]

$$\varphi = (dy/dx)$$

$$M = -EI(d^2y/dx^2), \quad Q^N = -EI(d^3y/dx^3) \tag{2.5}$$

Здесь φ, M – амплитуды угла поворота и изгибающего момента в сечениях, Q^N амплитуда поперечной силы, перпендикулярной к изогнутой оси стержня [13].

Для удобства обозначения примем

$$\tilde{\varphi} = l\varphi, \quad \tilde{M} = Ml^2/EI, \quad \tilde{Q}^N = Q^N l^3/EI \tag{2.6}$$

Тогда искомые зависимости запишутся в более простой форме

$$\tilde{\varphi} = dy/d\xi, \quad \tilde{M} = -d^2y/d\xi^2, \quad \tilde{Q}^N = -d^3y/d\xi^3 \tag{2.7}$$

или в рядах:

$$\tilde{\varphi} = \sum_{j=1,2} \lambda_j \left(A_l \mathrm{ch}\lambda_j\xi + B_j \mathrm{sh}\lambda_j\xi\right) \tag{2.8}$$

$$\tilde{M} = -\sum_{j=1,2} \lambda_j^2 \left(A_j \mathrm{sh}\lambda_j\xi + B_j \mathrm{ch}\lambda_j\xi\right) \tag{2.9}$$

$$\tilde{Q}^N = -\sum_{j=1,2} \lambda_j^3 \left(A_j \mathrm{ch}\lambda_j\xi + B_j \mathrm{sh}\lambda_j\xi\right) \tag{2.10}$$

В дальнейшем поставленную задачу удобнее решать методом начальных параметров, как это предлагалось В.Г. Чудновским [13]. Для получения формул метода начальных параметров необходимо постоянные интегрирования A_j и B_j выразить через усилия и перемещения сечения стержня, совпадающего с началом координат. Эти усилия и перемещения и будут называться начальными параметрами: y_0, φ_0, M_0 и Q_0. Или введем их приведенные величины: $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{M}_0$, $\tilde{Q}_0$, определяемые (2.6).

Подчинив (2.5), (2.8)–(2.10) условиям при $\xi = 0$, $y = y_0$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0$, $\tilde{M} = \tilde{M}_0$, $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0$, получим следующую систему уравнений для определения постоянных A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{gathered} B_1 + B_2 = y_0, \quad A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = \tilde{\varphi}_0, \quad -B_1\lambda^2 - B_2\lambda_2^2 = \tilde{M}_0, \\ \lambda_1^2\lambda_2^2((A_1/\lambda_1) + (A_2/\lambda_2)) = \tilde{Q}_0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Если значения постоянных A_1, A_2, B_1, B_2, найденные из системы (2.11) подставить в зависимости (2.5), (2.8)–(2.10), получим формулы метода начальных параметров [13]:

$$y = -y_0\lambda_1^2\lambda_2^2 F_\xi' + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{\mathrm{IV}} - \tilde{M}_0 F_\xi^{\mathrm{III}} - \tilde{Q}_0 F_\xi'' \tag{2.12}$$

$$\tilde{\varphi} = -y_0\lambda_1^2\lambda_2^2 F_\xi'' + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{\mathrm{V}} - \tilde{M}_0 F_\xi^{\mathrm{IV}} - \tilde{Q}_0 F_\xi''' \tag{2.13}$$

$$\tilde{M} = y_0\lambda_1^2\lambda_2^2 F_\xi''' + \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{\mathrm{VI}} - \tilde{M}_0 F_\xi^{\mathrm{V}} - \tilde{Q}_0 F_\xi^{\mathrm{IV}} \tag{2.14}$$

$$\tilde{Q} = -y_0\lambda_1^4\lambda_2^4 F_\xi + \tilde{\varphi}_0\lambda_1^2\lambda_2^2 F_\xi^{\mathrm{III}} - \tilde{M}_0\lambda_1^2\lambda_2^2 F_\xi'' - Q_0\lambda_1^2\lambda_2^2 F_\xi' \tag{2.15}$$

где

$$F_\xi = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\mathrm{sh}\lambda_2\xi/\lambda_2^3 - \mathrm{sh}\lambda_1\xi/\lambda_1^3) \tag{2.16}$$

$$F_\xi' = (dF_\xi/d\xi) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\mathrm{ch}\lambda_2\xi/\lambda_2^2 - \mathrm{ch}\lambda_1\xi/\lambda_1^2) \tag{2.17}$$

$$F_\xi'' = (d^2F_\xi/d\xi^2) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\mathrm{sh}\lambda_2\xi/\lambda_2 - \mathrm{sh}\lambda_1\xi/\lambda_1) \tag{2.18}$$

$$F_\xi''' = (d^3F_\xi/d\xi^3) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\mathrm{ch}\lambda_2\xi - \mathrm{ch}\lambda_1\xi) \tag{2.19}$$

$$F_\xi^{\mathrm{IV}} = (d^4F_\xi/d\xi^4) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\lambda_2\mathrm{sh}\lambda_2\xi - \lambda_1\mathrm{sh}\lambda_1\xi) \tag{2.20}$$

$$F_\xi^{\mathrm{V}} = (d^5F_\xi/d\xi^5) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\lambda_2^2\mathrm{ch}\lambda_2\xi - \lambda_1^2\mathrm{ch}\lambda_1\xi) \tag{2.21}$$

$$F_\xi^{\mathrm{VI}} = (d^6 F_\xi / d\xi^6) = [1/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)](\lambda_2^3 \mathrm{sh}\lambda_2\xi - \lambda_1^3 \mathrm{sh}\lambda_1\xi) \tag{2.22}$$

Здесь λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения, которые могут быть вещественными, мнимыми или комплексными числами в зависимости от величины и знака начальных параметров.

Формулы (2.12)–(2.15), полученные Чудновским В.Г., выражают перемещения и усилия в любом сечении колеблющихся стержней в зависимости от начальных параметров. Таким образом, данный подход дает возможность ответить на интересующие нас вопросы, касающиеся поперечных колебаний соударяющихся стержней с учетом эксцентриситета ударного взаимодействия или начальной кривизны.

При горизонтальном соударении однородных стержней с учетом эксцентриситета ударного взаимодействия (рис. 1), используя метод начальных параметров, выражение для максимальных прогибов сечений стержней с учетом (2.12), запишется в виде

$$y_{\max} = -\tilde{M}_0 F_\xi^{\mathrm{III}} \tag{2.23}$$

Здесь $\tilde{M}_0 = M_0 l^2 / ad^2$, где M_0 – начальный изгибающий момент равный произведению возникающей продольной силы N на плечо, равное эксцентриситету y_0 в ударном сечении. Поскольку, при данных условиях начальные угловое и линейное перемещения ударных сечений стержней отсутствуют, то следовательно, начальные угол поворота φ_0 и вертикальное перемещение y_0 равны нулю. Коэффициент F_ξ^{III} зависит от величины продольной силы N, возникающей в стержнях в процессе удара.

Если при ударе учитывать начальную кривизну одного из стержней (рис. 2), то помимо начального изгибающего момента M_0 появится дополнительный параметр – начальный угол поворота ударного сечения искривленного стержня φ_0. В этом случае выражение для максимальных прогибов запишется в виде

$$y_{\max} = \tilde{\varphi}_0 F_\xi^{\mathrm{IV}} - \tilde{M}_0 F_\xi^{\mathrm{III}} \tag{2.24}$$

Здесь $\tilde{\varphi}_0$ – относительный угол поворота ударного сечения, связанный с начальной кривизной стержня, F_ξ^{IV} – коэффициент, зависящий от возникающей продольной силы, и определяемый по формуле (2.20).

3. Определение продольной силы. Для определения продольной силы N используется волновая модель продольного удара однородного стержня о жесткую преграду [14–17]. Решается волновое уравнение для первого и второго стержней:

$$\partial^2 u_1(x,t)/\partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_1(x,t)/\partial t^2) = 0, \quad 0 \le x \le l_1 \tag{3.1}$$

$$\partial^2 u_2(x,t)/\partial x^2 - (1/a^2)(\partial^2 u_2(x,t)/\partial t^2) = 0, \quad l_1 \le x \le l_1 + l_2 \tag{3.2}$$

где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – продольное перемещение поперечного сечения первого и второго стержней, x – координата сечения, t – время, a – скорость распространения продольной волны деформации.

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением [14, 15]: при $t = t_0 = 0$

$$\partial u_1(x,t_0)/\partial t = V_0, \quad \partial u_1(x,t_0)/\partial x = 0, \quad \partial u_2(x,t)/\partial t = 0, \quad \partial u_2(x,t_0)/\partial x = 0 \tag{3.3}$$

Граничные условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l_1 + l_2$ при взаимодействии второго стержня с жесткой преградой

$$\partial u_1(0,t)/\partial x = 0, \quad \partial u_2(l_1 + l_2, t)/\partial t = 0, \quad \text{если} \quad \partial u_2(l_1 + l_2, t)/\partial x < 0 \tag{3.4}$$

а также определяют равенство сил и условия сопряжения стержней в сечении $x = l_1$ при непосредственном их взаимодействии

$$EA_1\,\partial u_1(l_1,t)/\partial x = EA_2\,\partial u_2(l_1,t)/\partial x, \quad \text{если} \quad \partial u_1(l_1,t)/\partial x < 0 \tag{3.5}$$

$$\partial u_1(l_1,t)/\partial t = \partial u_2(l_1,t)/\partial t, \quad \text{если} \quad \partial u_1(l_1,t)/\partial x < 0 \tag{3.6}$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\partial u_1(l_1,t)/\partial x = 0, \quad \partial u_2(l_1,t)/\partial x = 0. \tag{3.7}$$

Для решения волновых уравнений (3.1), (3.2) применяется метод Даламбера [14, 15]:

$$u_1(x,t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \le x \le l_1 \tag{3.8}$$

$$u_2(x,t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \le x \le l_1 + l_2 \tag{3.9}$$

$$\partial u/\partial x = -f'(at - x) + \varphi'(at + x), \quad \partial u/\partial t = a[f'(at - x) + \varphi'(at + x)] \tag{3.10}$$

где $f_1(at - x)$, $f_2(at - x)$, – функции, описывающие прямую волну, распространяющиеся соответственно по первому и второму стержням в направлении оси x; $\varphi_1(at + x)$ и $\varphi_2(at + x)$ – функции, описывающие обратные волны, распространяющиеся по первому и второму стержням в противоположном направлении; $f_1'(at - x)$, $f_2'(at - x)$, $\varphi_1'(at + x)$, $\varphi_2'(at + x)$ – производные функций.

Целесообразно перейти к относительным величинам, определяющим прямые и обратные волны: $\bar{f}'(at - x) = af'(at - x)/V_0$; $\bar{\varphi}'(at + x) = a\varphi'(at + x)/V_0$

$$\bar{\varepsilon}(x,t) = -\bar{f}'(at - x) + \bar{\varphi}'(at + x) \tag{3.11}$$

$$\bar{\nu}(x,t) = \nu(x,t)/V_0 = \bar{f}'(at - x) + \bar{\varphi}'(at + x) \tag{3.12}$$

В дальнейшем, для удобства определения продольной силы N в сечениях стержней, методом характеристик строим поле волновых состояний [14–17]. Наклонные линии определяют прямые и обратные волны деформаций. Относительная продольная деформация $\bar{\varepsilon}(x,t)$, позволяющая в дальнейшем рассчитать продольную сжимающую силу N, возникающую в рассматриваемых стержнях, связана с параметрами прямых и обратных волн зависимостью (3.11). При известной величине $\bar{\varepsilon}(x,t)$ можно определить продольную силу:

$$N = EA\bar{\varepsilon}\left(V_0/a\right) \tag{3.13}$$

В дальнейшем, используя метод начальных параметров, можно рассчитать прогиб y и скорость $y' = dy/dt$ в момент прекращения действия продольной силы N. Далее сечения рассматриваемого стержня, имея приобретенную поперечную скорость y' и двигаясь по инерции до некоторого максимального отклонения $y^*_{\max}$ от положения равновесия, начинают совершать свободные поперечные колебания.

4. Вычисление максимального прогиба. Максимальное отклонение сечений стержней от положения равновесия, которые и будут максимальными прогибами, легко определится по известной формуле [1]:

$$y^*_{\max} = \sqrt{y^2 + y'^2/\omega^2} \tag{4.1}$$

где y – максимальный прогиб, равный максимальной координате рассматриваемого сечения в момент прекращения действия продольной силы N, ω – циклическая частота свободных поперечных колебаний стержней при отсутствии продольной силы. Учитывая формы связей рассматриваемых стержней, устанавливаем для первого

стержня $\xi = 1$, для второго $\xi = 0.5$. Для первой формы поперечных колебаний ($n = 1$), как наиболее часто встречающейся на практике, а также с учетом зависимости (3.13), имеем для каждого стержня круглого поперечного сечения выражение циклической частоты поперечных колебаний:

$$\vartheta = \omega\sqrt{1 - 64V_0\tilde{\varepsilon}l^2/(\pi^2 d^2 a)} \tag{4.2}$$

Анализируя формулу (4.2) можно заключить, что с ростом предударной скорости частота поперечных колебаний сжатого стержня ϑ будет уменьшаться и будет равна нулю при достижении продольной силы величины P_{cr} по Эйлеру, что отмечено в [1, 13].

Частоту свободных поперечных колебаний первого стержня ω_1, имеющего свободный торец, по первой форме $n = 1$ можно рассчитать по формуле [1, 13]

$$\omega_1 = (\wp_1^2/l_1^2)\sqrt{EI_1/m_1} \tag{4.3}$$

и для второго стержня

$$\omega_2 = (\wp_2/l_2)^2\sqrt{EI_2/m_2} \tag{4.4}$$

Параметр $\wp$ выбирается с учетом сопряжения первого и второго стержней, а также сопряжения второго стержня с жесткой преградой [1].

Предполагая гармонический закон колебательного процесса обоих стержней, имеем

$$y = y_{\max}\sin(\vartheta t) \quad \text{и} \quad y' = y_{\max}\omega^*\cos(\vartheta t) \tag{4.5}$$

При малых значениях t максимальная скорость сечений будет

$$y' \approx y_{\max}\vartheta \tag{4.6}$$

Подставляя значения частоты свободных колебаний первого и второго стержней ω_1 и ω_2 и скорость y' в формулу (4.1), получим искомый максимальный прогиб стержней, равный максимальному перемещению его сечений $y^*_{\max}$. В этом случае имеет место учет сил инерции, действующих на стержни при динамической нагрузке, что представляло в традиционных моделях расчета довольно сложную задачу.

5. Пример. Рассмотрим продольный удар однородного стержня 1 о покоящийся однородный стержень 2, соприкасающийся с жесткой преградой одним из торцевых сечений. Длина первого стержня выбрана $l_1 = 1.6$ м, длина второго $l_2 = 2.4$ м. Диаметры первого и второго соответственно: $d_1 = 0.2$ м и $d_2 = 0.12$ м. Предударная скорость первого стержня о второй $V_0 = 1$ м/с. Материал обоих стержней – сталь СТ 5. Массы первого и второго стержней 588 и 212 кг соответственно, погонные массы m на единицу длины стержней 367 и 88 кг на метр. Циклическая частота ω_1 собственных поперечных колебаний первого стержня, рассчитанная по (4.3) будет равна 214 р/с. Для второго стержня ω_2, рассчитанная по (4.4), будет равна 605 р/с.

Применим метод характеристик [14–17] для построения поля состояний (рис. 3). Области состояний $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_{12}$, $\mathbf{II}_0 - \mathbf{II}_{14}$ с соответствующими значениями $\bar{f}(at - x)$, $\bar{\varphi}'(at + x)$, $\bar{\varepsilon}(x,t)$, $\bar{v}(x,t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, относительную продольную деформацию и относительную скорость поперечных сечений. Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат t, которые имеют точки наклонных линий для этого сечения. Метод характеристик позволяет определить моменты отрыва стержней в ударном сечении в процессе удара (кружок **3** на рис. 2) и отскок второго стержня от жесткой преграды (кружок **4** на рис. 3).

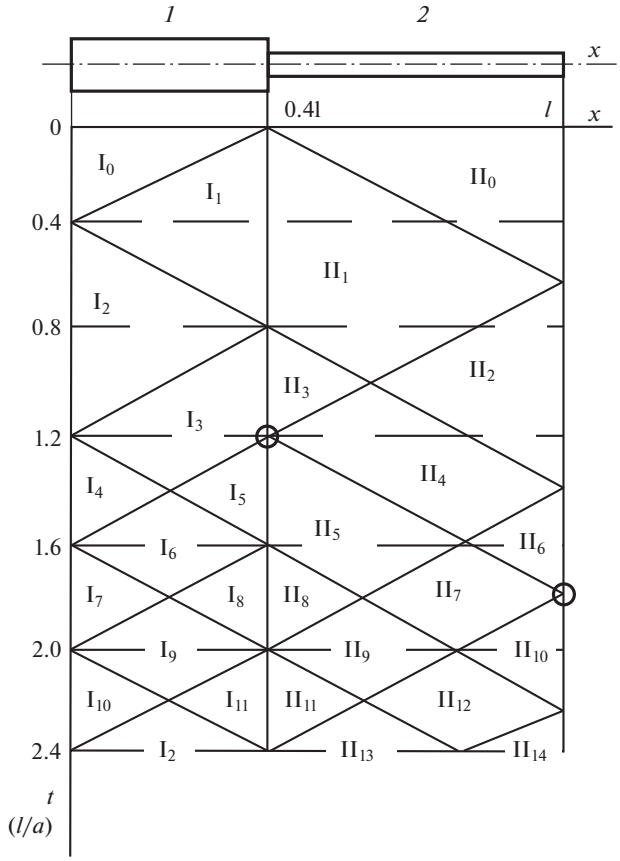

Рис. 3

Из анализа поля состояний (рис. 3) выделяем максимальные по модулю значения относительной продольной деформации для первого и второго стержня в рассматриваемом ударном процессе. Для стержня 1 максимальное значение $\bar{\varepsilon}_1(x,t) = -0.5$ в области состояний $\mathbf{I}_2$ при длительности действия $\Delta t_1 = 0.4\left(l/a\right)$; для стержня 2 максимальные значения $\bar{\varepsilon}_2(x,t) = -1.5$ в области состояний $\mathbf{II}_2$ при длительности $\Delta t_2 = 0.4(l/a)$ и $\bar{\varepsilon}_2(x,t) = -1.125$ в области $\mathbf{II}_3$ при длительности $\Delta t_3 = 0.2(l/a)$. При $t = 1.2(l/a)$ происходит отрыв стержней в ударном сечении (кружок на рис. 3) и деформация в первом стержне становится равной нулю. После разрыва стержней в областях волновых состояний $\mathbf{II}_5$–$\mathbf{II}_7$ второго стержня, его деформации становятся незначительными и не оказывают влияние на колебательный процесс. При $t = 1.8\left(l/a\right)$ происходит отрыв второго стержня от жесткой преграды (кружок на рис. 3) и ударный процесс завершается.

Из анализа поля состояний с учетом конфигурации рассматриваемой системы заключаем, что наибольший прогиб будет иметь место для второго стержня. В этой связи расчет амплитуды поперечных колебаний первого стержня опускаем.

По формуле (3.13) определяем максимальную продольную силу для второго стержня: $(N_2)_{\max} = 712.5$ кН. При учете эксцентриситета ударного взаимодействия стержней, начальным параметром является момент M_0, равный произведению эксцентриситета $y_0 = 1$ мм на значение возникающей продольной силы N. Для удобства ведения расчета преобразуем выражения для ν^2 и u^4 относительно V_0, d и l; $\nu_2^2 = 16\bar{\varepsilon}V_0 l_2^2 / a d_2^2 = 1.92$; $u_2^4 = m_2\omega_2^2 l_2^4 / EI_2 = 501$. Правильность составленных выражений проверена методом размерностей.

Для второго стержня вычисляем корни характеристического уравнения по формулам (2.3): $\lambda_1^2 = -23.36$; $\lambda_2^2 = 21.44$.

Подставляя полученные значения $\lambda_{1,2}$ в формулу (2.19) и, учитывая $\bar{\lambda}_1 = i\lambda_1$, получим значение коэффициента $F_\xi^{\mathrm{III}} = -0.012$. После подстановки этих значений в выражение (2.23) для $y_{\max}$, получим $y_{\max} = 0.023$ мм. Такое значение прогиба возникает при постоянной продольной силе N. При кратковременном ее действии стержень будет только выведен из положения равновесия и далее предоставлен самому себе. Для гармонического закона изменения координаты торцевого сечения стержня имеем (4.5):

$$y = 0.023 \sin \vartheta t \tag{5.1}$$

Циклическая частота колебаний кратковременно сжатого стержня, рассчитанная по (4.2), будет равна $\vartheta = 284.46$ р/с. С учетом длительностей состояний $\mathbf{II}_2$ и $\mathbf{II}_3$ и соответствующих им величинах $\bar{\varepsilon}_2(x,t)$, максимальное отклонение сечения, имеющего координату $x = 0.5l_2$, в течение промежутка времени $\Delta t = \Delta t_2 + \Delta t_3 = 0.6\, l/a$, в соответствии с (4.5) будет равно 0.0039 мм. В соответствии с (4.6) поперечная скорость рассматриваемого сечения будет равна 0.082 м/с. Тогда получаем максимальное его отклонение от положения равновесия при свободных колебаниях в соответствии с (4.1): $y_{\max}^* = 0.011$ мм.

Аналогично рассчитываем $y_{\max}^*$ второго стержня с учетом его начальной кривизны, используя те же параметры ν^2, u^4, λ и поле состояний (рис. 3). Коэффициент F_ξ^{IV} вычисляем в соответствии с (2.20). Относительный угол поворота ударного сечения второго стержня $\tilde{\varphi}_0 = 0.5 y_0 l_2 / l_2$ (рис. 2), равен 0.002. В соответствии с (4.1) $y_{\max}^*$ составит 0.094 мм, что примерно в 9 раз больше по сравнению с предыдущим случаем.

6. Анализ результатов и выводы. Используя для расчета представленную математическую модель, в работе были получены значения амплитуд поперечных колебаний второго стержня при различных значениях предударной скорости V_0 с учетом эксцентриситета ударного взаимодействия 1 мм и с учетом начальной кривизны 1 мм. Результаты моделирования $y_{\max}^*$ для первого и второго случаев представлены соответственно на графиках (рис. 4 и 5).

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы:

1. На обоих графиках максимальные значения амплитуд поперечных колебаний второго стержня наблюдаются на интервале изменения предударной скорости V_0 примерно 0.75 м/с до 1 м/с с небольшим смещением влево на графике (рис. 5) по сравнению с графиком (рис. 4). При дальнейшем увеличении предударной скорости, несмотря на ожидаемый рост $y_{\max}^*$, наблюдается его довольно резкое снижение вплоть до нуля, что отмечалось ранее при анализе результатов в работе [12].

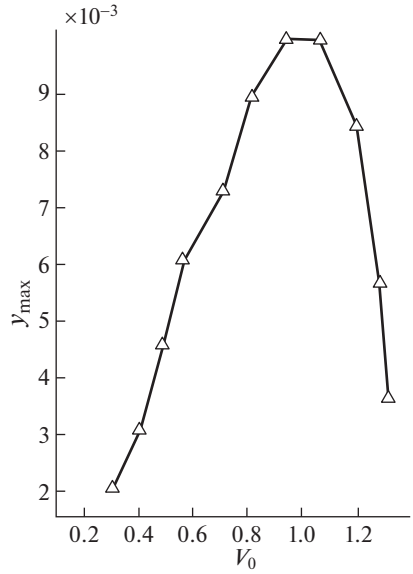

Рис. 4

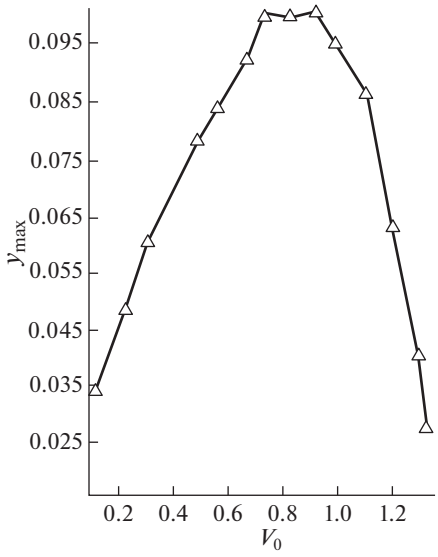

Рис. 5

2. Величины амплитуд поперечных колебаний второго стержня, изначально искривленного (рис. 5) примерно в 9–10 раз превышают соответствующие величины амплитуд при эксцентричном ударе этого же стержня (рис. 4) несмотря на равные величины кривизны и эксцентриситета.

3. Анализируя зависимости (2.23) и (2.24), можно сделать вывод, что при возрастании величин эксцентриситета ударного взаимодействия стержней и начальной кривизны, амплитуда поперечных колебаний увеличивается.

Заключение. Метод расчета величины максимального прогиба однородного стержня при продольном ударе с учетом эксцентриситета и начальной кривизны, описанный выше, позволил эффективно совместно применить метод начальных параметров и волновую модель продольного удара. Как уже отмечалось во введении, описанный подход можно использовать для моделирования поперечных колебаний системы однородных стержней с различной конфигурацией и предударным состоянием. Примененный подход позволяет учесть инерционные силы при расчете прогиба, что представляло в традиционных методах довольно непростую задачу. Дальнейшее развитие данного подхода будет представлять интерес для решения целого ряда прикладных задач механики.

В выводах, сделанных в ходе анализа результатов моделирования, отмечается различие величин амплитуд поперечных колебаний искривленного стержня и стержня прямолинейного, но воспринимающего продольную нагрузку с эксцентриситетом. Это подчеркивает большее влияние неровности стержня на его состояние при восприятии продольных динамических нагрузок, что необходимо учитывать на практике.

При анализе результатов обращается внимание на уменьшение величины максимального прогиба рассматриваемого стержня с увеличением предударной скорости. Это связано с уменьшением частоты поперечных колебаний сжатого стержня при увеличении сжимающей нагрузки, пропорциональной скорости соударения. При достижении продольной силы критической величины по Эйлеру частота поперечных колебаний стержня стремится к нулю, что означает потерю устойчивости [1].

Подход, описанный в работе, актуален в расчетах системы однородных и ступенчатых стержней, совершающих поперечные колебания при продольном ударе, которые часто встречаются в современных ударных механизмах. В строительной сфере важен учет амплитуд поперечных колебаний жестко закрепленных стержней, являющихся элементами ферм, рамных конструкций, а также колонн, стоек и прочее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение. 1970. – 734 с.
2. *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады АН СССР, 1949. Т. 65. № 6.
3. *Малый В.И.* Длинноволновое приближение в задачах о потере устойчивости при ударе // Известия АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 138–144.
4. *Малый В.И.* Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы // Известия АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 181–186.
5. *Малый В.И.* Выпучивание стержня при продольном ударе. Большие прогибы // Известия АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 52–61.
6. *Малышев Б.М.* Устойчивость стержня при ударном сжатии // Известия АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 137–142.
7. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 131–141.
8. *Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф.* Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 28–33.
9. *Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* О статической и динамической неустойчивости тонких стержней // Тр. 7 Всерос. конф. “Механика деформируемого твердого тела”. Ростов н/Д.: Изд. ЮФУ, 2013. С. 80–84.
10. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей Эйлеровой // Докл. АН. 2013. Т. 453. № 3. С. 282–285.
11. *Битюрин А.А.* Моделирование амплитуды поперечных колебаний однородного стержня при ударе о жесткую преграду с учетом собственного веса // Вестник ПНИПУ. Механика. 2018. № 2. С. 16–23.

12. *Битюрин А.А.* Моделирование максимального прогиба ступенчатого стержня, имеющего начальную кривизну при ударе о жесткую преграду // Известия РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 131–141.
13. *Чудновский В.Г.* Методы расчета колебаний стержневых систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 403 с.
14. *Битюрин А.А., Манжосов В.К.* Моделирование продольного удара однородных стержней при неудерживающих связях // Вестник УлГТУ. 2005. № 3. С. 23–25.
15. *Битюрин А.А., Манжосов В.К.* Моделирование продольного удара однородного и неоднородного стержней о жесткую преграду при неудерживающих связях // Вестник УлГТУ. 2006. № 1. С. 20–23.
16. *Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э.* Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука, 1985. 354 с.
17. *Битюрин А.А., Манжосов В.К.* Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду. Ульяновск, 2009. – 164 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 110–123

УДК 519.7

АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ С КОНТРОЛИРУЕМОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ В ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ (ТРАНСПОРТНО-ПУСКОВОЙ СТАКАН)

© 2021 г. Ю. И. Виноградов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

e-mail: yuvino@rambler.ru

Поступила в редакцию 14.06.2019 г.
После доработки 15.08.2019 г.
Принята к публикации 04.09.2019 г.

Выбор транспортно-пускового стакана (ТПС) для анализа концентрации напряжений в его элементах не снижает общности предлагаемой методики решения задач для других тонкостенных конструкций. ТПС представляет собой, как правило, цилиндрический стакан со сферическим днищем, у полюса которого – жесткая монтажная плита. ТПС нагружается внутренним давлением при испытании, по круглым площадкам сферического днища при транспортировке и внутренним давлением при пуске летательного аппарата с опорой на жесткую плиту. В работе для всех случаев нагружения предлагаются расчетные схемы и определяются места локализации напряжений в элементах ТПС, определяются размеры локализации и величина концентрации напряжений на основе математических моделей механики деформирования оболочек с априори заданной погрешностью, то есть аналитически.

Ключевые слова: оболочка, напряжения, локализация, распределение

DOI: 10.31857/S0572329921020173

1. Введение. Проблемы прочности тонкостенных конструкций по напряженно-деформированному состоянию имеют ярко выраженную специфику. Весовое совершенство конструкций может быть достигнуто только при равнопрочном состоянии всех элементов. Однако задача совершенствования не может иметь окончательного решения ввиду бесконечного многообразия возможных конструкций одного целевого назначения, условий изготовления, эксплуатации и возможных, порой непредсказуемых, внешних воздействий.

Практика эксплуатации тонкостенных конструкций показывает, что разрушение начинается в местах концентрации напряжений с образования и катастрофического развития трещин. Явление это носит выраженный локальный характер для каждой конкретной конструкции. Из опыта испытаний и эксплуатации места концентрации напряжений, как правило, известны. Они обусловлены скачками жесткостей, изломами геометрии тонкостенных элементов и локальными внешними воздействиями при передаче усилий в конструкциях. Избежать локальных воздействий и передачи нагрузок на тонкостенные элементы не удается. В таких случаях мы сталкивается с проблемой концентрации напряжений и их определение становится необходимым. Задача расчета сводится к определению размеров мест концентрации напряжений, характера распределения напряжений и, самое главное, максимальных значений напряжений в этих местах.

Концентрация напряжений как физическое явление требует математического моделирования и анализа математических моделей в виде дифференциальных уравнений. Если в качестве математических моделей использовать линейные дифференциальные уравнения механики деформирования оболочек [1], то актуальным остается построение эффективных методов их исследования с априори задаваемой погрешностью, то есть аналитически. Такие задачи решаются при проектировании ТПС. Решение для заданной конструкции не снижает общности методики для поставленных задач, так как исследуется влияние на концентрацию напряжений в оболочках скачка жесткости (жесткая плита – сферическая оболочка), излома геометрии (сферическая – цилиндрическая оболочка), локальное воздействие (по площадкам сферического днища).

2. Постановка задачи. Транспортно-пусковой стакан имеет следующие параметры.

Цилиндрическая оболочка выполнена из слоистого ортотропного композиционного материала. Относительные размеры оболочки $l_c/R_c = 1.6$ и $R_c/h_c = 25.92$. Относительное удлинение l_c/R_c цилиндрической части ТПС значительно больше. Мы ограничились удлинением 1.6, так как уже при этом значении краевые условия не оказывали влияния на напряжения в местах их концентрации. Механические характеристики для слоистого пакета композиционного материала, которые получены экспериментально, имеют значения вдоль образующей оболочки $E_1 = 2.744 \times 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0.11$ и по окружной координате $E_2 = 3.332 \times 10^4$ МПа, $\nu_{21} = 0.14$, а $G = 0.392 \times 10^3$ МПа.

Сферическая оболочка выполнена из титана – изотропного материала с механическими характеристиками $E = 1.078 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $G = 4.15 \times 10^4$ МПа. Относительная толщина оболочки $R_{sf}/h_{sf} = 86$.

Расчеты выполнены для случаев эксплуатации ТПС, когда нагрузка приходила на малую площадку сферического днища, испытания ТПС внутренним давлением и пуска из него летательного аппарата. Расчетами определяли с контролируемой погрешностью, то есть аналитически, внутренние силовые факторы [1], возникающие в его элементах. Определяли напряжения и размеры мест их концентрации. Определяли влияние различных параметров ТПС на максимальные значения напряжений.

2.1. Расчетная схема транспортно пускового стакана и математическая модель механики деформирования. Расчетная схема для ТПС показана на рис. 1. l_c, R_c, h_c – длина, радиус, толщина цилиндрической оболочки; R_{sf}, h_{sf} – радиус, толщина сферической оболочки; R_d – радиус абсолютно жесткого диска в полюсе сферической оболочки; R – расстояние от оси цилиндрической оболочки до центра площадок внешнего локального воздействия на сферическую оболочку; a_m – размер площадки нагружения оболочки силами P, направленными вдоль оси ТПС, и моментами M, действующими в меридиональной плоскости сферического днища ТПС. Здесь же показаны положительные направления перемещений и внутренних силовых факторов для оболочки.

Безразмерные параметры ТПС и параметры нагрузки, которые принимались в расчетах, следующие

$$l_c/R_c = 1.6, \quad R_c/h_c = 25.92, \quad R_{sf}/h_{sf} = 86, \quad R_d/R_c = 0.46$$

$$R/R_c = 0.765, \quad a_m/R_d = 0.167$$

Здесь a_m – радиус окружности площадок локального воздействия.

Результаты получены для площадок, очерченных линиями главных кривизн и круглых, при условии, что их площади одинаковые. Локальное воздействие на сферическое днище обусловлено креплением ТПС в походном состоянии.

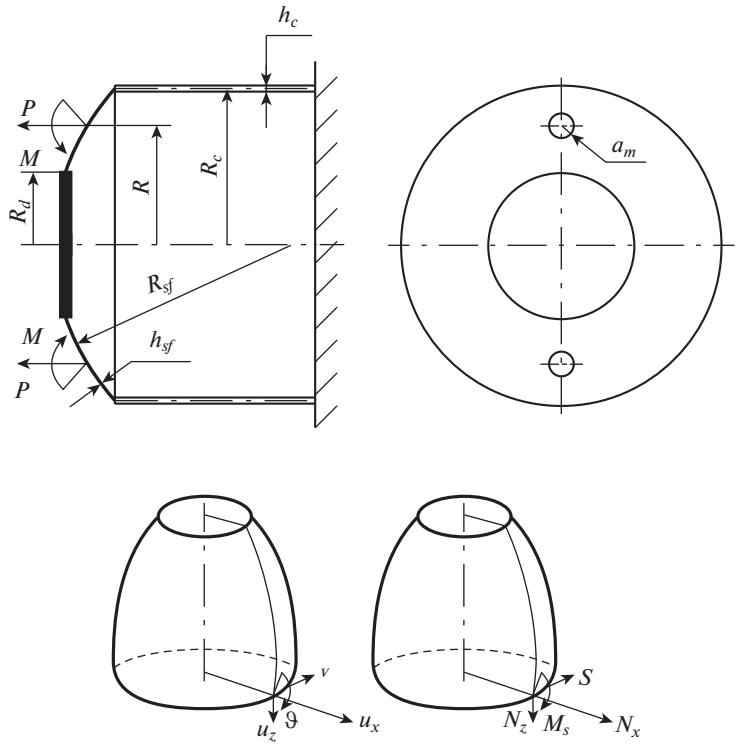

Рис. 1

Математическую модель Власова [1] в виде обыкновенных дифференциальных уравнений после разделения переменных методом Фурье механики деформирования цилиндрической оболочки представляем в матричном виде

$$y' = Ay + f, \quad y = |u_n, u_n', v_n, v_n', w_n, w_n', w_n'', w_n'''|^T \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} a_{12} = 1, \quad a_{21} = \frac{1-\nu}{2}n^2, \quad a_{24} = -\frac{1+\nu}{2}n, \quad a_{26} = -\nu, \quad a_{34} = 1, \quad a_{42} = \frac{1+\nu}{1-\nu}n \\ a_{43} = \frac{2n^2}{1-\nu}, \quad a_{45} = \frac{2n}{1-\nu}, \quad a_{56} = 1, \quad a_{67} = 1 \\ a_{78} = 1, \quad a_{82} = -\frac{\nu}{c^2}, \quad a_{83} = -\frac{n}{c^2} \\ a_{85} = -\left(n^4 + \frac{1}{c^2}\right), \quad a_{87} = 2n^2 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Физические соотношения с учётом представления погонных усилий T_1, S, Q_1 и M_1 в виде рядов Фурье и добавлением тождеств $u_n = u_n$, $v_n = v_n$, $w_n = w_n$, $w_n' = w_n'$ представляем в матричной форме

$$t = Gy, \quad t = |u_n, v_n, w_n, w_n', \overline{T_{1n}}, \overline{S_n}, \overline{Q_{1n}}, \overline{M_{1n}}|^T \tag{2.3}$$

$$\overline{T_{1n}} = T_{1n}\frac{R}{B}, \quad \overline{M_{1n}} = M_{1n}\frac{R^2}{D}, \quad \overline{Q_{1n}} = Q_{1n}^*\frac{R^3}{D}, \quad \overline{S_n} = S_n^*\frac{R}{B} \tag{2.4}$$

Ненулевые элементы матрицы **G** имеют вид:

$$g_{11} = 1, \quad g_{23} = 1, \quad g_{35} = 1, \quad g_{46} = 1$$
$$g_{52} = 1, \quad g_{53} = nv, \quad g_{55} = v, \quad g_{61} = -\frac{1-v}{2}n$$
$$g_{64} = \frac{1-v}{2}, \quad g_{66} = (1-v)nc^2, \quad g_{76} = (2-v)n^2, \quad g_{78} = -1 \tag{2.5}$$
$$g_{85} = -vn^2, \quad g_{87} = 1$$

При решении задач для каждого номера n гармоники определяются функциональные коэффициенты u_n, v_n, w_n, w'_n, T_{1n}, S^*_m, Q^*_{1n}, M_{1n} тригонометрических рядов искомых величин, характеризующих состояние сечения оболочки при $\xi = \text{const}$. Параметры T_{2n} и M_{2n} для сечения $\varphi = \text{const}$ определяются из соотношений $\overline{T}_{1n} = du_n/d\xi + \nu(nv_n + w_n)$, $\overline{T_{2n}} = vdu_n/d\xi + nv_n + w_n$

Тогда $\overline{T_{2n}} = v\overline{T_{1n}} + (1-v^2)(nv_n + w_n)$, а $\overline{T}_2 = \sum_n \overline{T_{2n}}\cos(n\varphi)$

Аналогично, $\overline{M_{2n}} = v\overline{M_{1n}} + n^2(v^2 - 1)w_n$, а $\overline{M_2} = \sum_n \overline{M_{2n}}\cos(n\varphi)$

Тригонометрические ряды метода Фурье разделения переменных начинаются при $n = 1$. Нулевой член $n = 0$ опущен, так как он соответствует осесимметричному нагружению и деформированию оболочки. При этом математическая модель – обыкновенные дифференциальные уравнения шестого порядка. При матричной записи уравнений ненулевые элементы матрицы $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_1^6$ определяются из матрицы $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_1^8$, если положить $n = 0$,а из столбца $\boldsymbol{y}$ исключить $v_n = 0$ и $v'_n = 0$. Тогда

$$a_{12} = 1, \quad a_{24} = -v, \quad a_{34} = 1, \quad a_{45} = 1, \quad a_{56} = 1, \quad a_{62} = -\frac{v}{c^2}, \quad a_{63} = -\frac{1}{c^2} \tag{2.6}$$

Аналогично определяются ненулевые элементы матрицы $\mathbf{G} = \|g_{ij}\|_1^6$

$$g_{11} = 1, \quad g_{23} = 1, \quad g_{34} = 1, \quad g_{42} = 1, \quad g_{43} = v, \quad g_{56} = -1, \quad g_{65} = 1 \tag{2.7}$$

Математическая модель механики деформирования сферической оболочки также как и цилиндрической записывается в матричном виде с переменными элементами матрицы $\mathbf{A}(\theta)$. Ненулевые элементы матриц $\mathbf{A}(\theta)$ и $\mathbf{G}(\theta)$ уравнений (2.1) и (2.3) имеют вид:

$$a_{12} = 1, \quad a_{21} = \frac{1-v}{2}\frac{n^2}{\sin^2\theta} + v + \operatorname{ctg}^2\theta$$
$$a_{22} = -\operatorname{ctg}\theta, \quad a_{23} = \frac{(3-v)n}{2\sin\theta}\operatorname{ctg}\theta$$
$$a_{24} = -\frac{(1+v)n}{2\sin\theta}_{26} - (1+v), \quad a_{34} = 1$$
$$a_{41} = \frac{(3-v)n}{(1-\nu)\sin\theta}\operatorname{ctg}\theta, \quad a_{42} = \frac{(1+v)n}{(1-v)\sin\theta}$$
$$a_{43} = \frac{2n^2}{(1-v)\sin^2\theta} - 1 + \operatorname{ctg}^2\theta, \quad a_{44} = -\operatorname{ctg}\theta \tag{2.8}$$
$$a_{45} = \frac{2n(1+v)}{(1-v)\sin\theta}, \quad a_{56} = 1, \quad a_{67} = 1$$
$$a_{78} = 1, \quad a_{81} = -\frac{1+v}{c^2}\operatorname{ctg}\theta, \quad a_{82} = -\frac{1+v}{c^2}, \quad a_{83} = -\frac{n(1+v)}{c^2\sin\theta}$$

$$a_{85} = \frac{n^2}{\sin^2\theta}\left[2 + \frac{2 - n^2}{\sin^2\theta} + 2\mathrm{ctg}^2\theta\right] - \frac{2(1+\nu)}{c^2}$$

$$a_{86} = \left[-2 - (2n^2 + 1)\frac{1}{\sin^2\theta}\right]\mathrm{ctg}\theta$$

$$a_{87} = -1 + \frac{2n^2 + 1}{\sin^2\theta}, \quad a_{88} = -2\mathrm{ctg}\theta$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{23} = 1, \quad g_{35} = 1, \quad g_{46} = 1, \quad g_{51} = \nu\mathrm{ctg}\theta$$

$$g_{52} = 1, \quad g_{53} = \frac{n\nu}{\sin\theta}, \quad g_{55} = 1 + \nu$$

$$g_{61} = -\frac{(1-\nu)n}{2\sin\theta}, \quad g_{63} = -\frac{(1-\nu)\mathrm{ctg}\theta}{2}$$

$$g_{64} = \frac{1-\nu}{2}, \quad g_{65} = -\frac{c^2(1-\nu)n}{\sin\theta}\mathrm{ctg}\theta \tag{2.9}$$

$$g_{66} = \frac{(1-\nu)nc^2}{\sin\theta}, \quad g_{75} = -\frac{(3-\nu)n^2}{\sin^2\theta}\mathrm{ctg}\theta$$

$$g_{76} = \nu + \mathrm{ctg}^2\theta - \frac{(\nu-2)n^2}{\sin^2\theta}, \quad g_{77} = -\mathrm{ctg}\theta$$

$$g_{78} = -1, \quad g_{85} = -\frac{\nu n^2}{\sin^2\theta}, \quad g_{86} = \nu\mathrm{ctg}\theta, \quad g_{87} = 1$$

При этом

$$\overline{T_{2n}} = \nu\overline{T_{1n}} + (1-\nu^2)\left(\mathrm{ctg}\theta u_n + w_n + \frac{n}{\sin\theta}v_n\right)$$

$$\overline{M_{2n}} = \nu\overline{M_{1n}} + (1-\nu^2)\left(\mathrm{ctg}\theta\frac{dw_n}{d\theta} - \frac{n^2}{\sin^2\theta}w_n\right)$$

При решении задач механики осесимметричного деформирования сферических оболочек ненулевые элементы матриц $\mathbf{A}(\theta)$ и $\mathbf{G}(\theta)$ имеют вид:

$$a_{12} = 1, \quad a_{21} = \nu + \mathrm{ctg}^2\theta, \quad a_{22} = -\mathrm{ctg}\theta$$

$$a_{24} = -(1+\nu), \quad a_{34} = 1, \quad a_{45} = 1, \quad a_{56} = 1$$

$$a_{61} = -\frac{1+\nu}{c^2}\mathrm{ctg}\theta, \quad a_{62} = -\frac{1+\nu}{c^2}$$

$$a_{63} = -\frac{2(1+\nu)}{c^2}, \quad a_{64} = -\left(2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\mathrm{ctg}\theta \tag{2.10}$$

$$a_{65} = -1 + \frac{1}{\sin^2\theta}, \quad a_{66} = -2\mathrm{ctg}\theta$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{23} = 1, \quad g_{34} = 1, \quad g_{41} = \nu\mathrm{ctg}\theta,$$

$$g_{42} = 1, \quad g_{43} = 1 + \nu, \quad g_{54} = \nu + \mathrm{ctg}^2\theta$$

$$g_{55} = -\mathrm{ctg}\theta, \quad g_{56} = -1, \quad g_{64} = \nu\mathrm{ctg}\theta, \quad g_{65} = 1$$

Математическая модель механики деформирования ортотропной цилиндрической оболочки не приводится. Основанием является то, что ее использование существенно не сказалось на интересующих нас результатах исследований.

2.2. Математическое моделирование локальной нагрузки. Моделирование площадки локального нагружения, границы которой не совпадают с линиями главных кривизн, следующее [2].

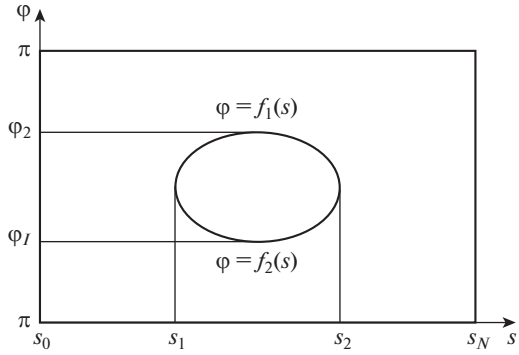

Рис. 2

Допустим, что граница площадки приложения нагрузки в области изменения координат s, φ ($s_0 \le s \le s_l$, $0 \le \varphi \le 2\pi$) исходной поверхности описывается уравнением $F(s,\varphi) = 0$ для $s_1 \le s \le s_2$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$. Кривая $F(s,\varphi) = 0$ допускает разбиение на отдельные участки, на которых ее уравнение может быть записано различным образом. Уравнение $F(s,\varphi) = 0$ разрешается относительно φ. В данном случае рассматриваемую кривую, ограничивающую поверхность приложения нагрузки, целесообразно представлять состоящей из двух участков, описываемых уравнениями $\varphi = f_1(s)$ и $\varphi = f_2(s)$, рис. 2.

Эти функции могут быть представлены различными выражениями для различных интервалов изменения аргумента s.

Для определения элементов столбца $\mathbf{f}_n(S)$ правой части дифференциального уравнения, необходимо действующую по заданной площадке нагрузку разложить в ряд Фурье по окружной координате φ.

Приложенную нагрузку $q_x(s,\varphi)$ представляют в виде:

$$q_x(s,\varphi) = \frac{A_0(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(s)\cos(n\varphi) + B_n(s)\sin(n\varphi)\right] \tag{2.11}$$

где коэффициенты $A_n(s)$, $B_n(s)$ определяют следующим образом

$$A_n(s) = \frac{1}{\pi}\int_{f_2(s)}^{f_1(s)} q(s,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, \qquad B_n(s) = \frac{1}{\pi}\int_{f_2(s)}^{f_1(s)} q(s,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi \tag{2.12}$$

Очевидно, что в (2.12) пределы интегрирования являются функциями от s. Коэффициенты A_n, B_n зависят от меридиональной координаты s, что усложняет решение рассматриваемой задачи по сравнению со случаем, когда оболочка нагружена по площадке, ограниченной координатными линиями.

3. Метод решения. *3.1. Однородное дифференциальное уравнение.* Решение однородного уравнения (2.1) с постоянными элементами матрицы **A** механики деформирования цилиндрической оболочки, длина которой $\Delta x = x_n - x_0$, определяется аналитически формулой [3]

$$\mathbf{K}_{x_0}^{x_n}(A) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}\Delta x)^m}{m!}, \qquad \Delta x = x_n - x_0 \tag{3.1}$$

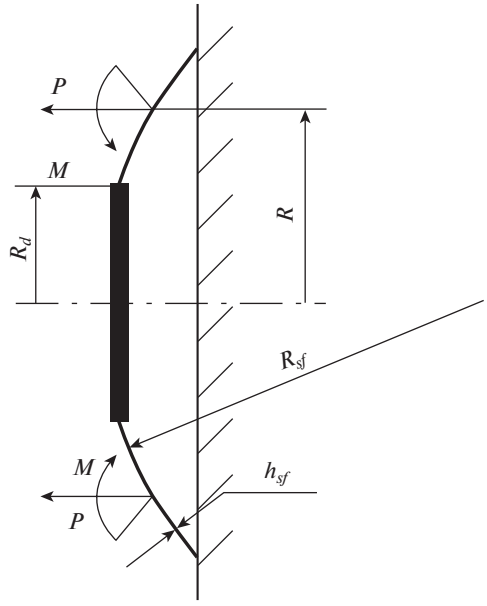

Рис. 3

в виде сходящегося ряда, который является разложением матричной экспоненты в ряд Тейлора.

Для сферической оболочки с переменными элементами матрицы $\mathbf{A}(\theta)$ – аналитически формулой [3]

$$\mathbf{K}_{x_0}^{x_n}(\mathbf{A}(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{B}\Delta x_i)^m}{m!} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}(\tau_i), \quad \Delta x_i = \frac{\Delta x}{n}, \quad \Delta x = x_n - x_0, \quad \tau_i \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

3.2. Частное решение. Частное решение для правой части неоднородного дифференциального уравнения определяется аналитически формулой

$$\boldsymbol{y}^{*x_n}_{x_0} = \mathbf{K}_{x_0}^{x_n}(\mathbf{A}(x))\sum_{i=1}^{i=n} \overline{\mathbf{T}}_i \mathbf{f}_i \Delta x_i, \quad \overline{\mathbf{T}}_i = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}_i\Delta x_i}{2!} + \frac{(\mathbf{A}_i\Delta x_i)^2}{3!} - \frac{(\mathbf{A}_i\Delta x_i)^3}{4!} + \ldots \tag{3.3}$$

Если в дифференциальном уравнении $\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A} = \text{const}$, $\mathbf{f}(\theta) = \mathbf{f} = \text{const}$, то для основного интервала $[x_0, x_n]$ [4]

$$\boldsymbol{y}^{*x_n}_{x_0} = \mathbf{T}\mathbf{f}\Delta x, \quad \mathbf{T} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}\Delta x}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta x)^2}{3!} + \frac{(\mathbf{A}\Delta x)^3}{4!} + \ldots, \quad \Delta x = x_n - x_0 \tag{3.4}$$

Аналитические решения дифференциальных уравнений в виде матриц функций Коши–Крылова [5, 6] обладают мультипликативным свойством [7], положенным в основу алгоритмов исследования концентрации напряжений в ТПС.

4. Анализ результатов. *4.1. Исследование концентрации напряжений в днище.* Для исследования концентрации напряжений в сферическом днище ТПС от локального воздействия только силами P и только моментами М принимались различные расчетные схемы, которые показаны на рис. 1 и рис. 3.

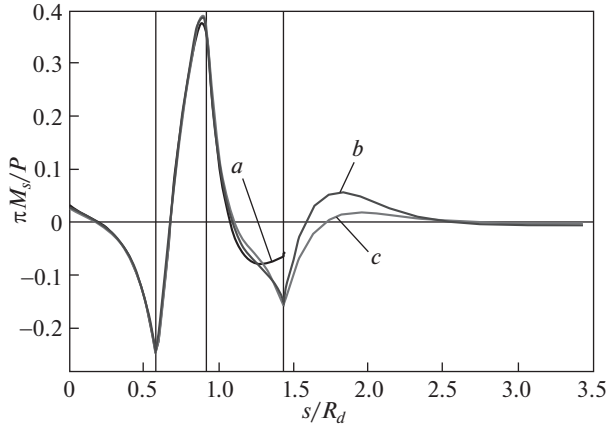

Рис. 4

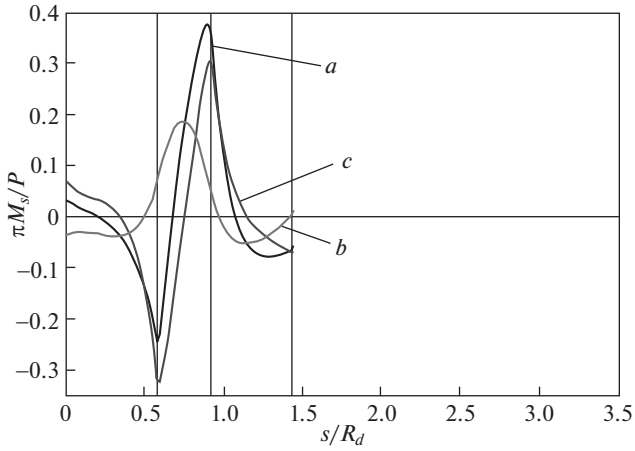

Рис. 5

Концентрацию напряжений исследовали различными алгоритмами. Для расчетной схемы на рис. 1 напряженно деформированное состояние исследовали мультипликативным методом [8], когда краевая задача приводились к начальной у мест концентрации напряжений: концентрация напряжений определялась решением начальной задачи мультипликативным методом [9].

Напряжения в местах их концентрации исследовали простейшими методами приведения краевых задач к начальным [8]. Начальные условия формировали на краю сферической оболочки. Расчетная схема показана на рис. 3. Сравнительный численный анализ показал, что форма площадки не влияет на концентрацию и величину напряжений.

Напряжения были получены мультипликативным методом решения краевых задач, приведением краевых задач к начальным у места концентрации напряжений по расчетной схеме на рис. 1 и приведением краевой задачи к начальной по расчетной схеме на рис. 3. Они практически совпали. Следует вывод, что напряжения в сферической

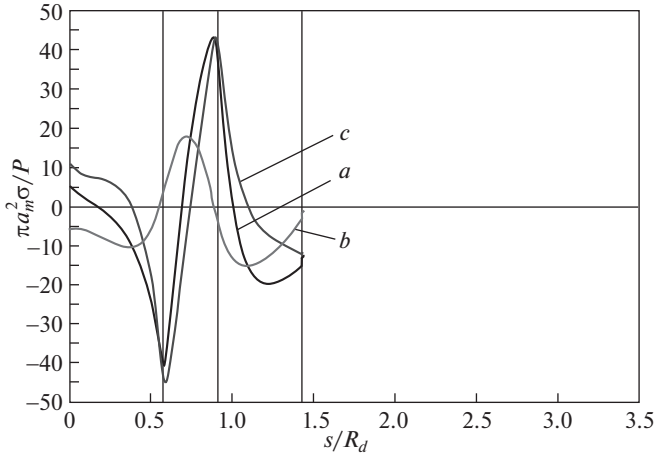

Рис. 6

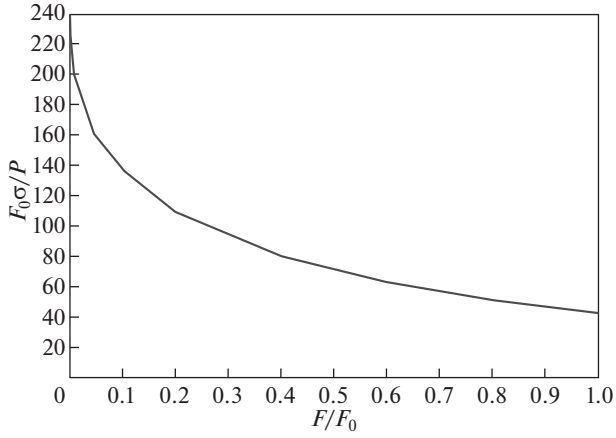

Рис. 7

оболочке от локального воздействия не зависят от напряженно-деформированного состояния сопряженной цилиндрической оболочки. Расчеты выполняли как для ортотропной цилиндрической оболочки, так и выполненной из титана. Замена материала цилиндрической оболочки на концентрацию напряжений в сферической оболочке не влияла.

В качестве примера на рис. 4 представлен график изменения безразмерного погонного изгибающего меридионального момента $M_S\pi/P$, проходящего через центр площадки локального воздействия, рис. 1. Начало отсчета относительной величины s/R координаты s вдоль образующей ТПС совпадает с точкой пересечения её с абсолютно жестким диском.

На рис. 4 вертикальными линиями отмечены границы площадки локального воздействия и показано сечение сопряжения сферической и цилиндрической оболочек ТПС. Буквой а отмечены результаты, полученные на основании расчетной схемы на

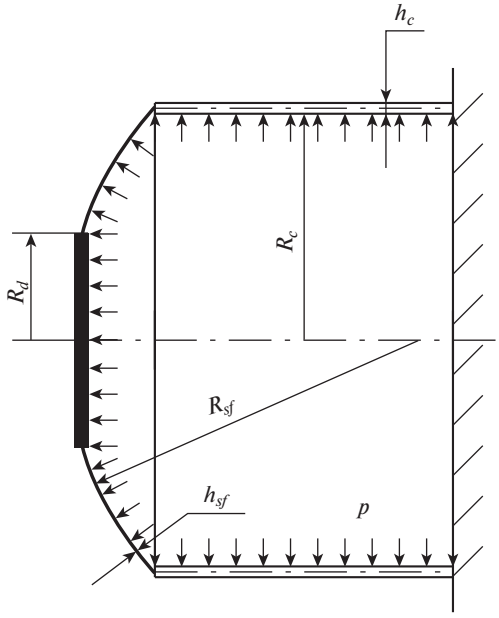

Рис. 8

рис. 3, буквами b, c – результаты, полученные на основании расчетной схемы на рис. 1, когда цилиндрическая оболочка титановая или из композиционного материала соответственно. Локальное воздействие – равномерное распределение по площадке силы P.

На рис. 5 приводятся значения $M_s\pi/P$, полученные при воздействии на площадку a – одновременно силы P и момента M, b – только силы P, c – только момента M на основе расчетной схемы рис. 3.

На рис. 6 приводятся графики изменения напряжения σ в сечениях сферической оболочки у наружной поверхности вдоль ее нулевого меридиана. Результаты получены с использованием расчетной схемы на рис. 3. Буквами отмечены результаты, полученные a – при локальном воздействии силой P и моментом M, b – при локальном воздействии только силой P, c – при воздействии только моментом M.

На рис. 7 показана зависимость величин максимальных напряжений σ в безразмерном виде у внешней поверхности сферической оболочки от относительной величины F/F_0 площадки F локального воздействия силой P. F_0 определяли для площадки с относительной величиной ее радиуса $a_m/R_\partial = 0.167$. Иначе – зависимость максимальных напряжений с увеличением площадки локального воздействия до заданной величины.

При расчетах определяли все параметры состояния сечений оболочек ТПС при локальном воздействии по площадке, очерченной окружностью, а также по площадке, очерченной линиями главных кривизн. Результаты совпали при равных размерах площадей не зависимо от их формы.

4.2. Исследование концентрации напряжений под внутренним давлением.

Расчетная схема показана на рис. 8. Краевые условия – $N_z = 0$, $u_x = 0$, $\vartheta_s = 0$ при $s = 0$; $u_x = 0$, $u_z = 0$, $\vartheta_s = 0$ при $s = s_k$. Начало отсчета координаты s в точке пересечения образующей ТПС с жестким диском. Некоторые результаты приведены в виде графиков.

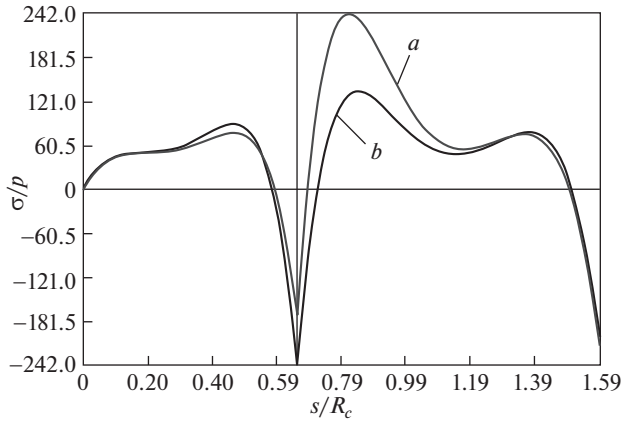

Рис. 9

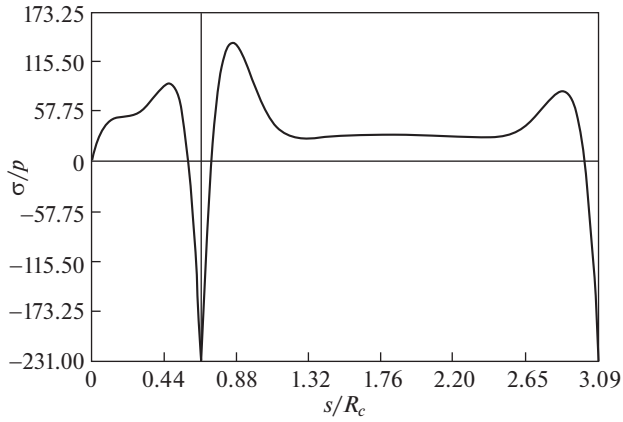

Рис. 10

На этих рисунках вертикальной линией отмечено сечение сопряжения сферической и цилиндрической оболочек ТПС.

С целью оценки влияния краевых условий на концентрацию напряжений у излома геометрии оболочки ТПС, то есть у места сопряжения сферической и цилиндрической оболочек, расчеты выполняли при $S_k/R_c = 1.59$ и $S_k/R_c = 3.09$.

На рис. 9 и рис. 10 в виде графиков показано изменение безразмерного напряжения σ в сечениях ТПС у наружной поверхности. На рис. 9: *a* – напряжения в оболочках ТПС из титана, *b* – цилиндрическая оболочка ТПС из композиционного материала.

На рис. 10 – цилиндрическая оболочка выполнена из композиционного материала. Сравнительный анализ результатов показывает незначительное влияние краевых условий.

4.3. Исследование при пуске летательного аппарата. На рис. 11 показана расчетная схема. ТПС жестким диском опирается на жесткое основание. Давление, которое генерируется в ТПС, выталкивает летательный аппарат как поршень из цилиндра. Сле-

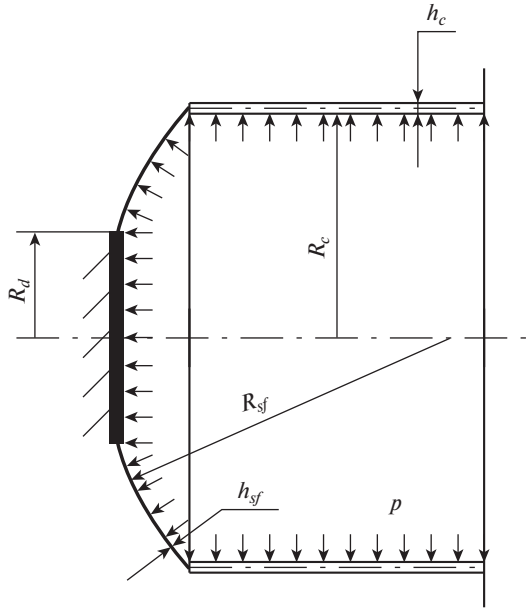

Рис. 11

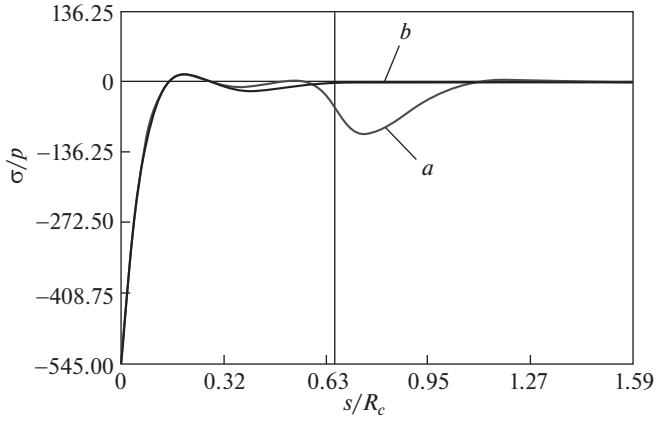

Рис. 12

довательно, левые краевые условия имеют вид жесткой заделки $u_x = 0$, $u_z = 0$, $\vartheta_s = 0$, а для правого свободного края условия имеют вид $N_x = 0$, $N_z = 0$, $M_s = 0$.

Задачи решались для ТПС из титана и для ТПС, у которого цилиндрическая оболочка – из композиционного материала. Определяли все величины, характеризующие напряженно деформированное состояние ТПС. Некоторые результаты приведены в виде графиков на рис. 12 и рис. 13. Вертикальной линией отмечено место сопряжения сферической и цилиндрической оболочек ТПС.

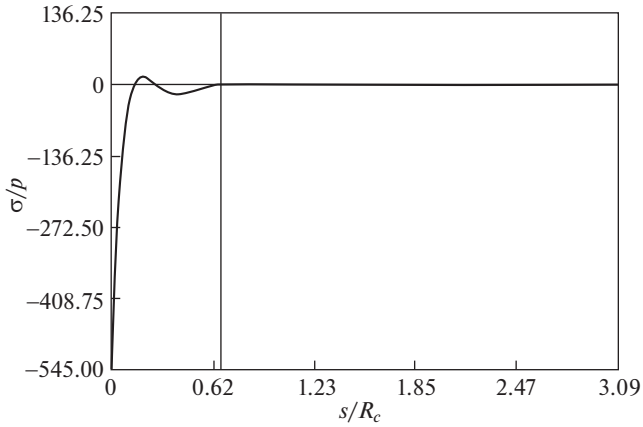

Рис. 13

На рис. 12 буквой *a* отмечены безразмерные напряжения для ТПС из титана. Если цилиндрическая оболочка из композиционного материала, то результаты обозначены буквой *b*.

Сравнительный анализ результатов, приведенных в виде графиков на рис. 12 и рис. 13 показывает концентрацию напряжений у жесткого диска ТПС и показывает на отсутствие влияния на эти напряжения правых краевых условий. Следовательно, исследование напряжений в местах их концентрации возможно с помощью простейших алгоритмов формирования соответствующих начальных условий и решения начальной задачи мультипликативным методом [8, 9].

5. Заключение. С целью достижения возможного весового совершенства при принятых конструктивных решениях выполнено исследование тонкостенной конструкции, транспортно пускового стакана, по напряженному состоянию. Авторская методика и эффективные алгоритмы исследования позволяют с помощью ЭВМ аналитически определить места локализации напряжений и их максимальные значения с контролируемой погрешностью на основании известных математических моделей механики деформирования тонкостенных элементов конструкций. Результаты исследования делают возможным обосновано снижать значение коэффициента запаса прочности тонкостенной конструкции, транспортно пускового стакана, и, следовательно, снижать ее вес.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-08-00840/18.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В.З.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР. 1962. Т. 1. 528 с.
2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 336 с.
3. *Виноградов Ю.И.* Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений //Докл. РАН. 2006. Т. 409. № 1. С. 15–18.
4. *Виноградов Ю.И., Меньков Г.Б.* Модификация мультипликативного метода решения класса краевых задач строительной механики аэрокосмических систем ограниченного возможностью метода Фурье разделения переменных // Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2019). 2019. С. 40–42.

5. *Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И.* Функции Коши–Крылова и алгоритмы решения краевых задач теории оболочек // ДАН РФ. 2000. Т. 375. № 3. С. 331–333.
6. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: АН СССР. 1931. 154 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
8. *Виноградов Ю.И.* Методы исследования концентрации напряжений в оболочках тонкостенных конструкций приведением краевых задач к начальным // Докл. РАН. 2006. Т. 411. № 5. С. 613–616.
9. *Виноградов Ю.И., Петров В.И.* Высокопроизводительные методы исследования концентрации напряжений в оболочках на основе математических моделей механики их деформирования и приведения краевых задач к начальным // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 9. С. 121–128.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 124–132

УДК 517.938

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО СЛЕДЯЩЕГО МАНИПУЛЯТОРА

© 2021 г. Г. А. Геворкян

Институт механики НАН, Ереван, Армения
e-mail: hrgevorkian@mail.ru

Поступила в редакцию 05.02.2020 г.
После доработки 08.02.2020 г.
Принята к публикации 12.02.2020 г.

Актуальные задачи моделирования механизмов с упругими звеньями предполагают усовершенствование существующих формализмов и алгоритмов динамического анализа, синтеза и оптимального управления рассматриваемого класса систем. В то же время, современные исследования в указанной области главным образом ориентированы на повышение быстродействия расчетных алгоритмов без причинения ущерба точности вычислительного процесса. Если упругие многозвенные динамические системы, не включающие в себя замкнутых кинематических цепей, могут быть исчерпывающим образом исследованы на основе стратегии без обращения матрицы масс (обобщенный метод Ньютона–Эйлера), то упругие механизмы с замкнутыми кинематическими цепями подлежат исследованию с использованием стратегии обращения матрицы масс. К последнему классу принадлежат задачи на нахождение условного минимума функционала действия по Остроградскому при наличии голономных (геометрических) дополнительных связей. Здесь предстоит ознакомиться с задачей оптимизации движения упругого трехзвенного следящего манипулятора, заключающейся в минимизации функции отклонения исполнительного органа от наперед заданной окружной траектории. Эта задача также сводится к нахождению условного минимума функционала действия по Остроградскому при наличии голономной дополнительной связи.

Ключевые слова: следящий манипулятор, оптимизация движения, траектория движения исполнительного органа, функция отклонения, упругие деформации

DOI: 10.31857/S0572329921020070

Введение. В предлагаемой статье представлены итоги численного решения задачи точного воспроизведения упругим манипулятором заданной траектории движения исполнительного органа. В качестве воспроизводимой траектории движения выступает окружная траектория, а в роли следящей динамической системы – трехзвенный манипулятор с упруго-деформируемым звеном [1].

В указанной постановке задача оптимизации движения следящего манипулятора сводится к нахождению условного экстремума (минимума) функционала действия по Остроградскому при наличии дополнительной склерономной связи [2]. В качестве критерия оптимизации движения манипулятора используется условие тождественности функций положений исполнительного органа с учетом и без учета упругого отклонения [1].

Численное решение задачи осуществляется на основе стратегии, использующей процедуру обращения матрицы масс, в силу разработанного модифицированного ме-

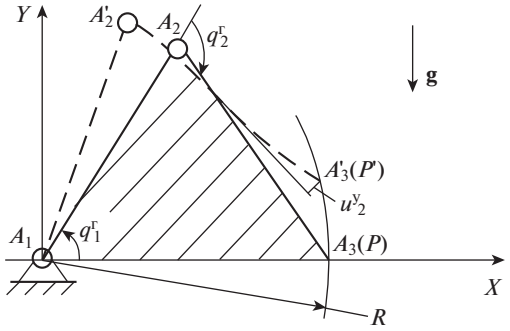

Рис. 1

тода Лагранжа, нашедшего успешное применение в процессе динамического анализа сложного класса упругих многозвенных систем с замкнутыми кинематическими цепями [3–18].

1. Моделирование движения упругого следящего манипулятора. Рассматривается трехзвенный манипулятор (рис. 1), состоящий из неподвижной и недеформируемой опорной стойки C_0, абсолютно жесткого звена C_1 и линейно-упругого звена C_2. В предположении идеальности связей между звеньями (кинематических пар A_i, $i = 1, 2$), упругий манипулятор помещается в потенциальное поле силы тяжести.

Когда звено C_2 предполагается абсолютно жестким, исполнительный орган A_3 в точности описывает дугу окружности $A_3A'_3$ (рис. 1) при движении манипулятора по законам, удовлетворяющим условию: $A_1A_3 = R = \text{const}$. Очевидно, что это условие обеспечивается в том случае, если замкнутый контур $A_1A_2A_3A_1$ сохраняется неизменным на протяжении всего интервала действия следящего манипулятора.

Когда же звено C_2 принимается упругим, точное воспроизведение желаемой траектории путем несложного выбора законов движения не представляется возможным. В самом деле, вследствие наличия упругих деформаций второго звена, проблема соблюдения постоянства кривизны траектории точки A_3 сводится к задаче минимизации функции отклонения исполнительного органа A_3 от заданной окружной траектории. А это означает, что воспроизводимая траектория выражает не что иное, как дополнительную геометрическую связь, налагаемую на движение упругого трехзвенного манипулятора [1].

2. Задача нахождения абсолютного минимума функционала действия. При отсутствии дополнительной связи, налагаемой на движение исполнительного органа манипулятора, первая задача динамики трехзвенного манипулятора с упругим выходным звеном сводится к нахождению абсолютного экстремума (минимума) функционала действия по Остроградскому:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[(T - \Pi) + \sum_{i=1}^{n=2} Q_i^r q_i^r \right] dt \tag{2.1}$$

где Q_i, $i = 1, 2$ – неконсервативные силы, действующие в сопряжениях звеньев манипулятора.

В развернутом виде условие минимума функционала (2.1) сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_{rr}} & \mathbf{M_{re}} \\ \mathbf{M_{er}} & \mathbf{M_{ee}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{\mathbf{q}}}^{\mathbf{r}} \\ \ddot{q}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{C}}^{\mathbf{r}} \\ C^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{Q}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (2.2) предполагает численное решение путем их линеаризации относительно обобщенных координат q_i^r, $i = 1, 2$, их скоростей $\dot{q}_i^r$, $i = 1, 2$, а также варьируемых параметров $\vec{q}_i^e$, $i = 1, 2$ и их скоростей $\dot{\vec{q}}_i^e$, $i = 1, 2$ [3–12].

3. Задача нахождения условного минимума функционала действия. При наличии дополнительной связи, налагаемой на движение исполнительного органа манипулятора, первая задача динамики трехзвенного манипулятора с упругим выходным звеном сводится к нахождению условного экстремума (минимума) функционала действия по Остроградскому, а именно – к нахождению минимума функционала (2.1) с учетом условия

$$\begin{gathered} [L_1\cos q_1^r + L_2\cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y \sin(q_1^r + q_2^r)]^2 + \\ + [L_1\sin q_1^r + L_2\sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y\cos(q_1^r + q_2^r)]^2 = R^2 \\ |L_1 - L_2| \le R \le |L_1 + L_2| \end{gathered} \tag{3.1}$$

которое выражает в развернутом виде критерий оптимизации движения исполнительного органа следящего манипулятора по окружной траектории (см. рис. 1).

В таком случае, система алгебро-дифференциальных уравнений движения упругого следящего манипулятора, объединяющих (2.2) и (3.1), принимает вид [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_{rr}} & \mathbf{M_{re}} & \mathbf{M_{r\lambda}} \\ \mathbf{M_{er}} & \mathbf{M_{ee}} & \mathbf{M_{e\lambda}} \\ \mathbf{M_{\lambda r}} & \mathbf{M_{\lambda e}} & \mathbf{M_{\lambda\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{\mathbf{q}}}^{\mathbf{r}} \\ \ddot{q}^e \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{C}}^{\mathbf{r}} \\ C^e \\ C^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{Q}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Критерий оптимизации. Отождествление функций положений исполнительного органа P трехзвенного манипулятора с учетом и без учета упругого отклонения (см. рис. 1) выступает необходимым и достаточным признаком минимизации начального упругого отклонения следящего манипулятора, причем минимизация этого отклонения при отсутствии сил сопротивления подчиняется зависимости, близкой к линейной.

Доказательство. Рассмотрим функции отклонений исполнительного органа следящего манипулятора (см. рис. 1) с учетом и без учета начального упругого отклонения:

$$\begin{aligned} x_{P'} &= L_1\cos q_1^r + L_2\cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y\sin(q_1^r + q_2^r) \\ y_{P'} &= L_1\sin q_1^r + L_2\sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y\cos(q_1^r + q_2^r) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} x_P &= R\cos\omega t \\ y_P &= R\sin\omega t \end{aligned} \tag{3.4}$$

где ω – угловая скорость вращения контура $A_1A_2A_3'$ относительно оси вращения, проходящей через точку A_1.

После приравнивания функций отклонений в системах равенств (3.3) и (3.4), их возведения в квадрат и последующего почленного сложения образуется уравнение дополнительной связи (3.1). Можно показать, что тригонометрическое уравнение (3.1) в

результате двойного дифференцирования и последующих упрощений приводится к следующему эквивалентному дифференциальному уравнению дополнительной связи:

$$\ddot{u}_2^y \approx 0 \tag{3.5}$$

Следовательно, при соответствующих ненулевых начальных условиях (например, при положительном начальном отклонении и отрицательной скорости) упругая следящая система, изображенная на рис. 1 и подчиненная условию (3.5), будет стремиться к обнулению этого отклонения при отсутствии демпфирования, следуя линейной зависимости.

Что и требовалось доказать.

4. Численная реализация задачи при отсутствии дополнительной связи. Процесс численной реализации сформулированной задачи предполагается произвести в два этапа с применением явной схемы численного интегрирования Ньюмарка [16]. Первый этап усматривает моделирование движения трехзвенного манипулятора при отсутствии дополнительной геометрической связи (3.1) на основании системы дифференциальных уравнений (2.2), тогда как второй этап подразумевает решение задачи в полной постановке, т.е. принимая во внимание дополнительную связь (3.1), в силу системы алгебро-дифференциальных уравнений (3.2).

Положим длины звеньев C_1 и C_2 изображенного на рис. 1 следящего манипулятора равными радиусу описываемой окружности, т.е. $R = L_1 = L_2 = 0.35$ м, вследствие чего замкнутый контур $A_1A_2A_3A_1$ отождествляется с правильным треугольником. Поперечные сечения звеньев принимаются круглыми радиусов $r_1 = 6.0 \times 10^{-3}$ м и $r_2 = 3.0 \times 10^{-3}$ м, массы звеньев – равными $m_1 = 0.309$ кг и $m_2 = 0.0772$ кг, а модуль Юнга второго звена – $E_2 = 200$ ГПа.

Исследуемый манипулятор функционирует в интервале $t \in [0, T]$, где $T = 0.7$ с, согласно следующим законам движения:

$$\begin{gathered} \omega \equiv \dot{q}_1^r(t) \equiv 10 \\ \dot{q}_2^r(t) \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

которые при размерности рад/с формулируют условие равномерного обращения замкнутого контура $A_1A_2'A_3'A_1$ как жесткого целого вокруг оси вращения, проходящей через точку A_1.

Ограничиваясь рассмотрением одной изгибной степени свободы звена C_2, т.е. $N_2 = N_2^y = 1$, задаются начальные условия в обобщенных координатах и скоростях: $q_1^r(0) = \pi/3$ рад, $q_2^r(0) = -2\pi/3$ рад и $\dot{q}_1^r(0) = 10$ рад/с, $\dot{q}_2^r(0) = 0$. На первом этапе тестирования задачи начальные условия для упругого перемещения и скорости будут полагаться нулевыми: $u_2^y(P,0) = \dot{u}_2^y(P,0) = 0$. Шаг численного интегрирования полагается равным $\Delta t = 10^{-5}$ с.

На рис. 2, a представлен график зависимости упругого перемещения (м) концевой точки звена C_2 (исполнительного органа P) во времени (с) [16]; на рис. 2, b, c предлагаются графики функций обобщенных сил (Н · м), действующих в кинематических парах A_1 и A_2.

Для оценки отклонения исполнительного органа P следящего манипулятора от заданной окружной траектории вследствие деформирования звена C_2 предусматривает-

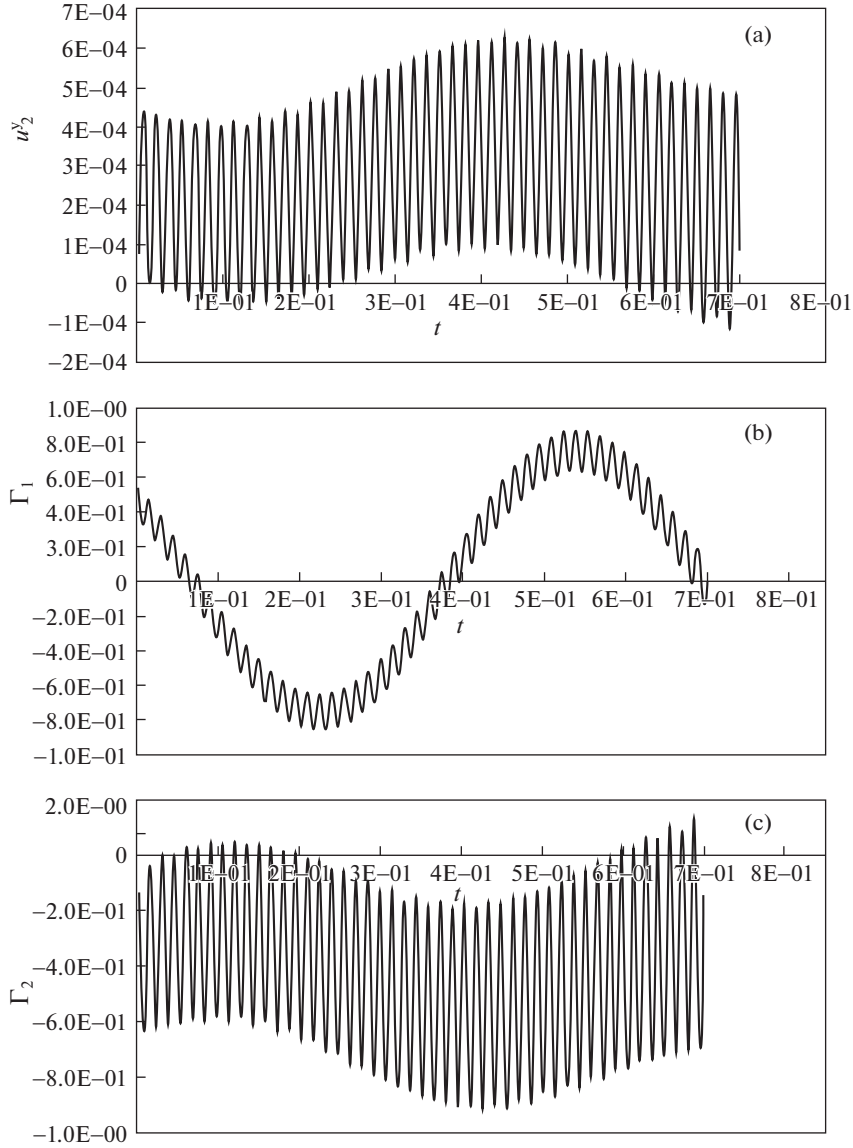

Рис. 2

ся функция ошибки Er, которая в проекциях на оси неподвижной системы координат *OXY* определяется следующими равенствами [16]:

$$\begin{aligned} Er_X &= |P_X - P_X'| = |R\cos\omega t - [L_1\cos(q_1^r) + L_2\cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y\cos(q_1^r + q_2^r)]| \\ Er_Y &= |P_Y - P_Y'| = |R\sin\omega t - [L_1\sin(q_1^r) + L_2\sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y\cos(q_1^r + q_2^r)]| \end{aligned} \tag{4.2}$$

Графики первого теста функции отклонения (функции ошибки, м) исполнительного органа P от окружной траектории в проекциях на оси неподвижной системы координат *XOY* представлены на рис. 3, a, b [16].

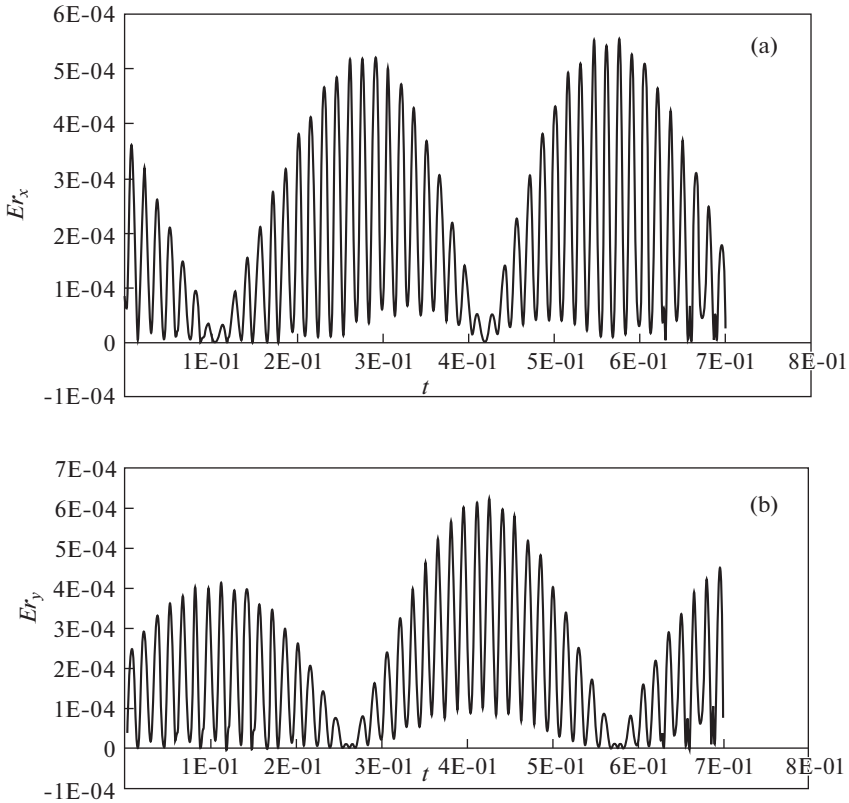

Рис. 3

5. Численная реализация задачи при наличии дополнительной связи. Вторичный тест моделирования движения упругого следящего манипулятора проводится с учетом дополнительной геометрической связи (3.1) путем численного решения системы алгебро-дифференциальных уравнений (3.2).

При аналогичных начальных условиях в обобщенных координатах и обобщенных скоростях начальные условия в упругом перемещении и в скорости упругого перемещения принимаются следующими (размерность перемещения – м, размерность скорости – м/с):

$$\begin{aligned} u_2^y(P,0) &= 10^{-5} \\ \dot{u}_2^y(P,0) &= -7\times 10^{-6} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Принимая шаг численного интегрирования равным $\Delta t = 10^{-4}$ с, осуществляется тест численной реализации задачи минимизации упругого отклонения исполнительного органа от заданной окружной траектории следящего манипулятора (см. рис. 1). Результаты тестирования задачи приводятся на рис. 4, a, b, c [16]. Как видно из рис. 4, a, вблизи значения $u_2^y(P,0) = 0$ имеет место искажение численного решения, что объясняется наличием особенности в этой точке.

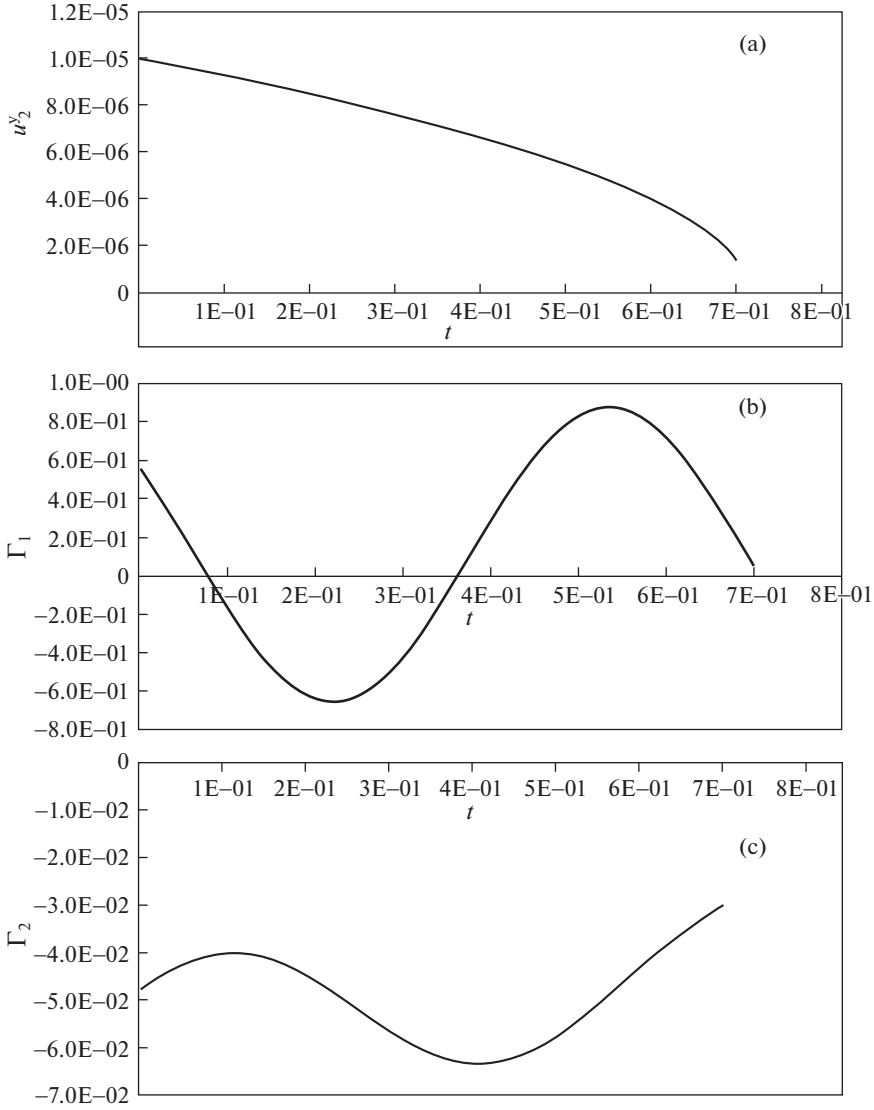

Рис. 4

Графики второго теста функции отклонения (функции ошибки, м) исполнительного органа P от окружной траектории в проекциях на оси неподвижной системы координат XOY представлены на рис. 5, a и 5, b [16].

6. Заключение. В представленной статье проведено моделирование следящего трехзвенного манипулятора с упругим звеном на основе численного решения задачи нахождения условного минимума функционала действия по Остроградскому. По итогам минимизации начального упругого отклонения исполнительного органа следящего манипулятора от наперед заданной окружной траектории можно утверждать о хороших предпосылках приложения методов, алгоритмов и программного обеспечения

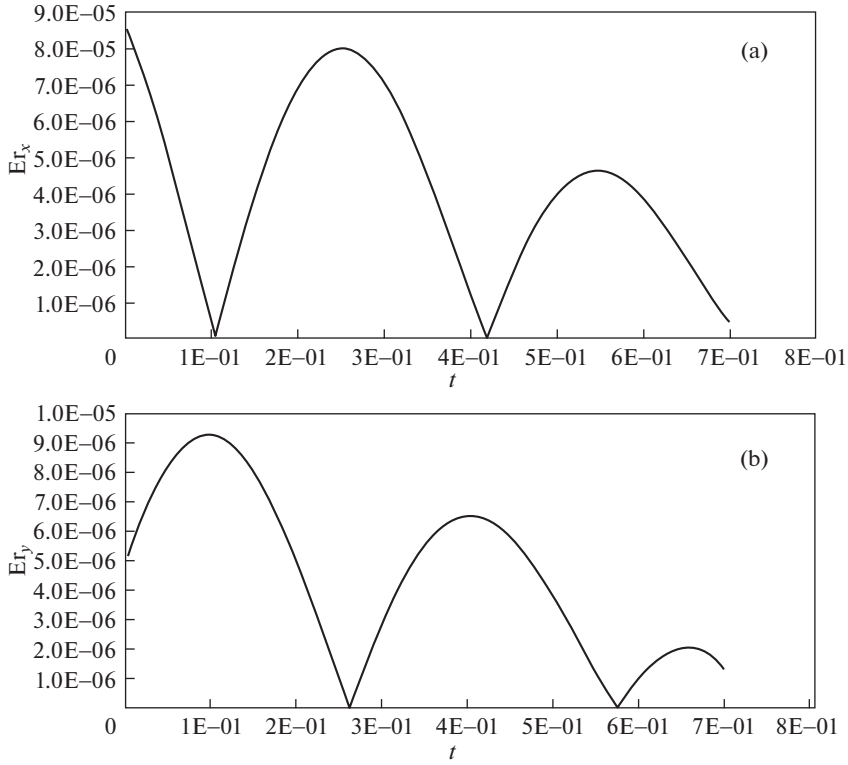

Рис. 5

динамического анализа упругих многозвенных систем к решению задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pascal M., Gagarina T.* A pseudo-rigid model for the dynamical simulation of flexible mechanisms // Multibody System Dynamics. 1999. V. 3. P. 303–331.
2. *Gofron M., Shabana A.A.* Control structure interaction in the nonlinear analysis of flexible mechanical systems // International Journal of Nonlinear Dynamics. 1993. V. 4. P. 183–206.
3. *Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.* On-line computational scheme for mechanical manipulators // Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1980. V. 74. P. 251–269.
4. *Featherstone R.* The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias // International Journal of Robotics Research. 1983. V. 2. № 1. P. 13–30.
5. *Dombre E., Khalil W.* Modélisation et commande des robots. Edition Hermès, 1988. 448 p.
6. *Dombre E., Khalil W.* Modélisation, identification et commande des robots. Edition Hermès, 1999. 480 p.
7. *Verlinden O.* Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe: Doctoral Thesis of the Polytechnic Faculty of Mons. 1994. 222 p.
8. *Fisette P., Samin J.-C.* Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicite Newton-Euler recursive scheme // Archive of Applied Mechanics. 1996. V. 66. P. 187–199.

9. *Boyer F., Coiffet P.* Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators // International Journal of Robotic Systems. 1996. V. 13. № 1. P. 11–24.
10. *Boyer F., Coiffet P.* Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model // International Journal Mechanism and Machine Theory. 1996. V. 31. № 1. P. 45–56.
11. *Boyer F., Khalil W.* An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics // International Journal of Robotics Research. 1998. V. 17. № 3. P. 282–293.
12. *Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А.* Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона–Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. – 2004. Т. 57. № 1. С. 3–10.
13. *Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А.* Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. 2006. Т. 59. № 1. С. 3–9.
14. *Геворкян Г.А.* Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // Information Technologies and Management. Encyclopedia-Armenica. 2004. № 4. С. 36–43.
15. *Геворкян Г.А.* Динамическое моделирование механизмов с упругими звеньями переменной длины // Вестник ГИУА. Серия: Механика, машиноведение, машиностроение. 2014. Выпуск 17. № 2. С. 34–41.
16. *Геворкян Г.А.* Приложение обобщенного метода Ньютона–Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2010. Т. 63. № 2. С. 133–138.
17. *Геворкян Г.А.* Об одной разновидности динамического анализа манипуляторов посредством обращения их матрицы масс // Мат. V межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, окт. 02–07, 2017, Цахкадзор, Армения. С. 61–62.
18. *Геворкян Г.А.* Динамическое моделирование механизма шарнирного четырехзвенника с упругим шатуном // Труды VIII международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, сентябрь 22–26, 2014, Горис-Степанакерт. Ереван.: Чартарагет, 2014. С. 143–147.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 133–147

УДК 531.36

О РЕЖИМАХ АВТОРОТАЦИИ ДВУХРОТОРНОЙ ВЕТРОТУРБИНЫ ДАРЬЕ

© 2021 г. М. З. Досаев[a], Л. А. Климина[a,*], Б. Я. Локшин[a], Ю. Д. Селюцкий[a], Е. С. Шалимова [a]

[a] *НИИ механики МГУ, Москва, Россия*

**e-mail: klimina@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2020 г.
После доработки 14.01.2020 г.
Принята к публикации 17.01.2020 г.

Рассматривается движение малой ветроэнергетической установки с вертикальной осью вращения в стационарном потоке воздуха. Установка состоит из двух соосных роторов Дарье, вращающихся в противоположных направлениях. На валу одного из них жестко закреплен ротор электрогенератора, на валу другого – статор. Построена замкнутая малопараметрическая математическая модель ветротурбины, учитывающая аэродинамическое воздействие на роторы и электрическую нагрузку в локальной цепи генератора. Соответствующая динамическая система является двухчастотной. Проведено усреднение системы по двум углам в предположении, что значение каждой из частот отделено от нуля. В качестве первого приближения для описания рабочих режимов ветроустановки рассматриваются притягивающие неподвижные точки усредненной системы. Построены бифуркационные диаграммы, описывающие эволюцию неподвижных точек усредненной системы при изменении параметра модели, который характеризует значение внешнего сопротивления в локальной цепи генератора установки. Проведен параметрический анализ условий устойчивости неподвижных точек. Путем численного интегрирования уравнений с различными начальными условиями и значениями параметров получены оценки отклонения решений усредненной системы от медленных переменных полной системы. Отдельно рассмотрены условия поддержания в системе резонансного соотношения частот.

Ключевые слова: двухроторная ветротурбина Дарье, замкнутая динамическая модель, стационарные режимы, двухчастотное усреднение, резонанс, устойчивость, переходные процессы

DOI: 10.31857/S0572329921020069

1. Введение. Идея использования в конструкции ветроустановки пары роторов, вращающихся в противоположных направлениях, наиболее популярна для турбин с горизонтальными осями вращения (например, [1–5]). В подобных устройствах ротор генератора закреплен на валу одного пропеллера, а статор – на валу другого, так что угловая скорость ротора относительно статора увеличивается при вращении пропеллеров в противоположных направлениях. Помимо этого для горизонтально-осевых турбин присутствует значительное влияние каждого пропеллера на характеристики потока воздуха, взаимодействующего с другим пропеллером. Таким образом, в подобных ветроэнергетических установках присутствует и электромеханическое и аэродинамическое взаимодействие между пропеллерами, вращающимися в противоположных направлениях.

Ситуация с вращающимися навстречу друг другу вертикально-осевыми роторами значительно отличается. Можно выделить как минимум два типа таких турбин. Предполагается, что для турбин первого типа имеет место существенное аэродинамическое взаимодействие между встречно вращающимися роторами без какого-либо электромеханического взаимодействия (например, [6, 7]). Для второго типа присутствует электромеханическое взаимодействие, тогда как аэродинамическим взаимодействием можно пренебречь: например, один ротор расположен над другим ([8]). Последний тип ветроустановок описан в литературе лишь фрагментарно.

В этой статье рассмотрим тот тип двухроторных вертикально-осевых ветроустановок, для которого можно пренебречь аэродинамическим взаимодействием между элементами. Такие установки имеют следующее преимущество по сравнению с классическими: скорость вращения ротора генератора относительно статора увеличивается без использования зубчатой передачи. Важность увеличения относительной угловой скорости обсуждалась ранее (например, в [9]). Отметим также, что вертикально-осевые ветроустановки (в частности, двухроторные) в отличие от горизонтально-осевых не нуждаются в ориентации относительно направления ветра.

В [10] была предложена малопараметрическая математическая модель для классической однороторной вертикально-осевой установки типа Дарье. Подобные модели позволяют проводить детальный параметрический анализ режимов работы турбины. В [10] для анализа поведения системы был применен метод, включающий процедуру одночастотного усреднения.

В предлагаемой работе рассматривается малая двухроторная вертикально-осевая установка типа Дарье (рис. 1). Построена замкнутая малопараметрическая математическая модель этой системы, учитывающая электрическую нагрузку в локальной цепи генератора. Для анализа режимов работы установки применено двухчастотное усреднение. Получены общие условия, при которых двухчастотное усреднение в модели двойной ветротурбины Дарье является корректным на конечном интервале времени. Проведен качественный параметрический анализ динамики усредненной системы. Получены оценки механической мощности ветротурбины. Проведено численное сравнение поведения полной и усредненной систем.

2. Описание механической системы. Рассмотрим ротор типа Дарье, который состоит из центрального вала, нескольких жестко закрепленных на нем радиальных державок, на каждой державке жестко закреплена лопасть – профилированное крыло. Как правило, на практике используют две или три лопасти. Будем рассматривать ротор с тремя лопастями. Система состоит из двух таких роторов. Роторы установлены в горизонтальном потоке воздуха один над другим так, что валы роторов соосны и вертикальны. Схема механической системы приведена на рис. 1.

Считаем, что лопасти роторов профилированы одинаково, но ориентированы “навстречу друг другу” – таким образом, чтобы по возможности обеспечивать вращение роторов в противоположных направлениях. На валу одного ротора жестко закреплен ротор электрогенератора; на валу другого – статор того же генератора. Генератор подключен к локальной электрической цепи. Внешнее сопротивление R в цепи генератора является варьируемым параметром модели.

Пусть φ_1 и φ_2 – углы поворота нижнего и верхнего роторов. Эти углы отсчитываются от направления скорости потока против часовой стрелки и по часовой стрелке, соответственно, если наблюдать с конца оси вращения Oz.

Предполагается, что φ_1 – это угол между направлением ветра и державкой одной из лопастей нижнего ротора, которая выбрана в качестве “первой” лопасти. Тогда угол между направлением ветра и державкой лопасти “с номером k” составляет $\varphi_1 + 2\pi(k - 1)/3$. Заменяя φ_1 на φ_2, получаем аналогичные формулы для углов положения радиальных державок верхнего ротора.

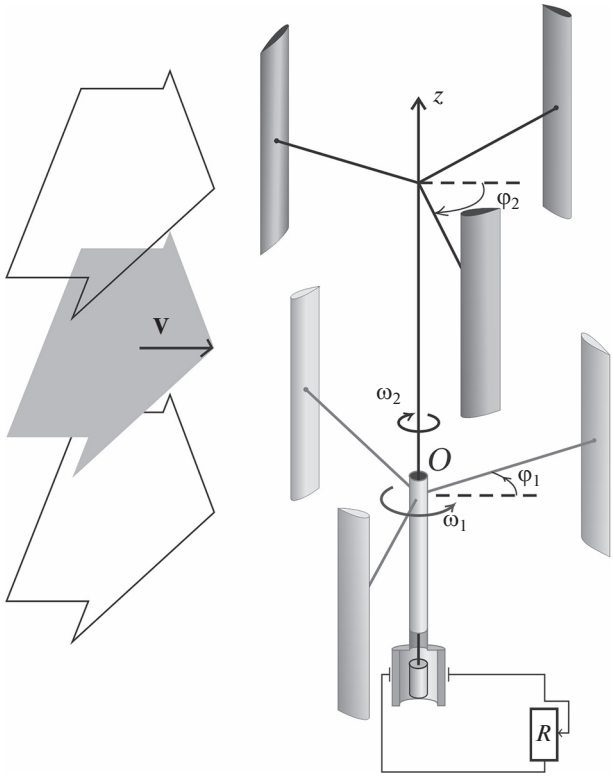

Рис. 1

Пусть J_1, J_2 – моменты инерции относительно оси вращения Oz для первого и второго роторов.

Пусть h – высота лопасти, S – характерная площадь лопасти. Аэродинамический профиль каждой лопасти характеризуется коэффициентами $C_d(\alpha)$ и $C_l(\alpha)$ силы сопротивления и подъемной силы, соответственно. Здесь α – мгновенный угол атаки. При численных расчетах будем использовать для аэродинамических коэффициентов аналитические аппроксимации (рис. 2) экспериментальных данных, которые соответствуют профилю RAF34 (результаты экспериментов взяты из [11]). Считаем, что хорда профиля лопасти перпендикулярна направлению от центра давления (точки приложения аэродинамических сил) к оси вращения ротора. Пренебрегаем возможным перемещением центра давления вдоль профиля. Расстояние от центра давления до оси Oz вращения ротора обозначим r.

Пусть $\mathbf{V}$ – скорость потока воздуха, ρ – плотность воздуха, $\omega_1 = r\dot{\varphi}_1/V$ – быстроходность первого ротора, $\omega_2 = r\dot{\varphi}_2/V$ – второго.

Для описания аэродинамических сил, действующих на каждую лопасть, используется квазистатическая модель [12–14]. Далее, $\mathbf{D}$ – сила сопротивления, $\mathbf{L}$ – подъемная сила, $\mathbf{U}$ – воздушная скорость центра давления лопасти, величины u и w являются промежуточными переменными, k – номер лопасти:

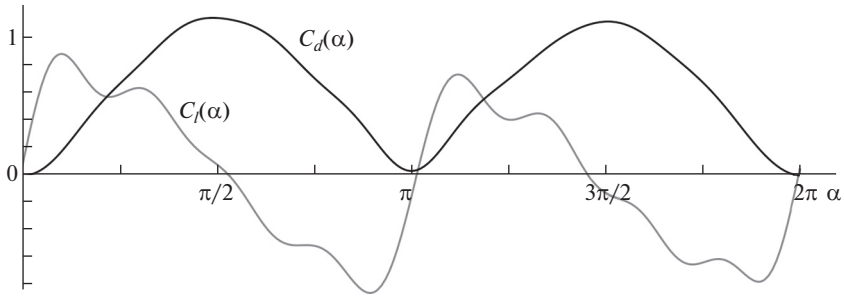

Рис. 2

$$D_k = 0.5\rho S U_k^2 C_d(\alpha_k), \quad L_k = 0.5\rho S U_k^2 C_l(\alpha_k), \quad U_k^2 = V^2(u_k^2 + w_k^2)$$
$$\alpha_k = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{u_k(\varphi)}{w_k(\varphi,\omega)}\right), & \text{если} \quad w_k(\varphi,\omega) \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{u_k(\varphi)}{w_k(\varphi,\omega)}\right) + \pi, & \text{если } w_k(\varphi,\omega) < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$
$$u_k = \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}k\right), \quad w_k = \omega + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}k\right)$$

При вычислении величин u_k, w_k для первого/второго ротора подставляем $\varphi = \varphi_i$, $\omega = \omega_i$, соответственно.

Взаимодействие между ротором и статором генератора описывается электромеханическим моментом. Предполагается, что этот момент является линейной функцией угловой скорости ротора относительно статора [12]:

$$T = \frac{VC}{r(\sigma + R)}(\omega_1 + \omega_2)$$

Здесь C – коэффициент электромеханического взаимодействия, σ – внутреннее сопротивление генератора, R – внешнее сопротивление в локальной электрической цепи генератора. Момент **T** действует со стороны первого ротора на второй и направлен так, что замедляет вращение второго ротора. Такой же по величине момент действует со стороны второго ротора на первый и направлен так, что замедляет вращение первого ротора.

3. Уравнения движения и постановка задачи. Уравнения движения системы могут быть представлены в следующем безразмерном виде:

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = \varepsilon(f(\varphi_1,\omega_1) - c(\omega_1 + \omega_2)) \\ \dot{\omega}_2 = a\varepsilon(f(\varphi_2,\omega_2) - c(\omega_1 + \omega_2)) \\ \varepsilon = \frac{\rho S r^3}{2J_1}, \quad a = \frac{J_1}{J_2}, \quad c = \frac{2C}{V\rho S r^2(\sigma + R)} \\ f = \sum_{k=1}^{3} \sqrt{u_k^2 + w_k^2}\,(C_l(\alpha_k)u_k - C_d(\alpha_k)w_k) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Система (3.1) дополняется соотношениями (2.1).

Коэффициент c внешней нагрузки характеризует изменяемые условия работы ветроустановки, а именно скорость ветра и внешнее сопротивление в цепи генератора. Чем больше потребителей в цепи, тем меньше R и больше c. Решение системы уравнений (3.1) с периодическими или близкими к периодическим (например, квазипериодическими) функциями $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ соответствует режиму перманентного вращения обоих роторов. Если это решение притягивающее, оно соответствует рабочему режиму устройства.

Представляет интерес найти и описать установившиеся периодические и квазипериодические решения $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ системы (3.1) в предположении, что ε – малый параметр, а также оценить механическую мощность ветротурбины на соответствующих режимах. На практике достаточно малые значения ε могут быть получены путем увеличения моментов инерции роторов.

4. Усреднение по двум углам. Предположим, что ε – малый параметр системы (3.1). Рассмотрим поведение системы в фазовой области $G = \{\omega_1 > \omega_0 > 0, \omega_2 > \omega_0 > 0\}$, где ω_0 – некоторое положительное значение (не являющееся малой величиной). Тогда оба угла φ_1 и φ_2 являются быстрыми переменными, а обе безразмерные угловые скорости ω_1 и ω_2 – медленными.

Для проведения конструктивного параметрического анализа фазовых траекторий (3.1) удобно начать с усреднения по обеим быстрым переменным. Формальное усреднение по двум углам приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \varepsilon(F(\Omega_1) - c(\Omega_1 + \Omega_2)), \\ \dot{\Omega}_2 &= a\varepsilon(F(\Omega_2) - c(\Omega_1 + \Omega_2)), \end{aligned} \qquad F(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi, \Omega)d\varphi \tag{4.1}$$

Здесь переменные Ω_1, Ω_2 соответствуют осредненным значениям переменных ω_1 и ω_2. Решения системы (4.1) будем рассматривать в качестве первого приближения поведения переменных ω_1 и ω_2. Однако, если в некоторый момент времени отношение частот ω_1 и ω_2 станет близким к рациональному числу, то дальнейшая эволюция переменных ω_i может, вообще говоря, существенно отличаться от эволюции переменных Ω_i, поскольку прохождение через резонансы зачастую приводит с весьма сложным динамическим эффектам [15–22]. Для резонансного случая построим систему первого приближения, используя подход аналогичный [16, 19].

В области G угол φ_1 можно принять за новое время. Тогда система (3.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} f_1(\varphi_1, \omega_1, \omega_2) \\ \frac{d\omega_2}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} f_2(\varphi_2, \omega_1, \omega_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $f_1(\varphi_1, \omega_1, \omega_2) = f(\varphi_1, \omega_1) - c(\omega_1 + \omega_2)$, $f_2(\varphi_2, \omega_1, \omega_2) = a(f(\varphi_2, \omega_2) - c(\omega_1 + \omega_2))$.

Обе функции f_1 и f_2 являются 2π-периодическими по отношению к первому аргументу и являются бесконечно дифференцируемыми по всем аргументам. Отметим, что дальнейшие аналитические преобразования не используют сходства функций f_1 и f_2 друг с другом.

Предположим, что система находится в ε-окрестности резонанса:

$$m\omega_1 - n\omega_2 = \varepsilon g(\omega_1, \omega_2)$$

Здесь m, n – натуральные числа, $g(\omega_1, \omega_2)$ – некоторая бесконечно дифференцируемая функция порядка $O(1)$ или выше.

Введем новую угловую координату:

$$\psi = m\varphi_1 - n\varphi_2, \quad \frac{d\psi}{d\varphi_1} = \frac{\varepsilon}{\omega_1} g(\omega_1, \omega_2)$$

Координата ψ является медленной переменной. Перепишем систему (4.2) в переменных ψ, ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} g(\omega_1, \omega_2) \\ \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} f_1(\varphi_1, \omega_1, \omega_2) \\ \frac{d\omega_2}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} f_2\left(\frac{m}{n}\varphi_1 - \frac{1}{n}\psi, \omega_1, \omega_2\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Все переменные системы (4.3) являются медленными переменными, все функции в правой части бесконечно дифференцируемы, период правой части относительно φ_1 равен $2\pi n$. Применяя классическое одночастотное усреднение [18] к системе (4.3), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} g(\omega_1, \omega_2), \\ \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} F_1(\omega_1, \omega_2), \\ \frac{d\omega_2}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} F_2(\omega_1, \omega_2), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_1(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x, \omega_1, \omega_2)dx \\ F_2(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi n} f_2\left(\frac{m}{n}x - \frac{1}{n}\psi, \omega_1, \omega_2\right)dx \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отметим, что первое уравнение (4.4) отделено от двух других. Кроме того, имеет место следующее равенство:

$$F_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi n} f_2\left(\frac{m}{n}x - \frac{1}{n}\psi, \omega_1, \omega_2\right)dx = \frac{1}{2\pi n}\frac{n}{m}\int_{-\frac{1}{n}\psi}^{2\pi m - \frac{1}{n}\psi} f_2(y, \omega_1, \omega_2)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{m}\int_0^{2\pi m} f_2(y, \omega_1, \omega_2)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(y, \omega_1, \omega_2)dy$$

Таким образом, два последних уравнения (4.4) преобразуются в следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} F_1(\omega_1, \omega_2), \quad F_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x, \omega_1, \omega_2)dx \\ \frac{d\omega_2}{d\varphi_1} &= \frac{\varepsilon}{\omega_1} F_2(\omega_1, \omega_2), \quad F_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x, \omega_1, \omega_2)dx \end{aligned} \tag{4.5}$$

Система (4.5) с точностью до замены времени совпадает с результатом (4.1) прямого двухчастотного усреднения системы (3.1). Система (4.5) не зависит от резонансного

отношения n/m. Таким образом, показано, что в области G система первого приближения для уравнений (3.1) имеет вид (4.1) в том числе и в окрестностях резонансов.

Отметим, что система вида близкого к (4.1) обсуждалась в [5] в рамках модели горизонтально-осевой турбины с двумя пропеллерами, вращающимися в противоположных направлениях.

На интервале времени порядка ε^{-1} отличие между решениями $\omega_i(t)$ системы (3.1) и $\Omega_i(t)$ системы (4.1) имеет порядок ε при $\omega_i \in G$, если система (3.1) в соответствующей области удовлетворяет условиям теоремы об усреднении по двум углам, приведенной в [16] (в окрестности резонанса достаточно использовать результат об усреднении по времени [18]). Однако не удается применить результаты [18] для описания соответствия систем (4.3) и (4.4) на бесконечном интервале времени, поскольку отделение уравнения для ψ сопряжено с дополнительным вырождением системы.

5. Неподвижные точки усредненной системы как первое приближение рабочих режимов ветроустановки. Стационарные и квазистационарные режимы работы двойной ветротурбины Дарье соответствуют периодическим и близким к периодическим решениям системы (3.1). В качестве первого приближения для таких решений рассмотрим неподвижные точки системы (4.1), а также циклы системы (4.1), если последние существуют. Подобный подход применен для описания установившихся ротационных движений твердого тела в [23, 24].

Неподвижная точка (Ω_1^*, Ω_2^*) системы (4.1) определяется из соотношений:

$$F(\Omega_1^*) = F(\Omega_2^*), \quad \frac{F(\Omega_1^*)}{\Omega_1^* + \Omega_2^*} = c \tag{5.1}$$

В частности, для любого Ω_1^* существует неподвижная точка, в которой $\Omega_2^* = \Omega_1^*$. Такие неподвижные точки образуют одну из ветвей бифуркационной диаграммы $\Omega_1^*(c)$. Далее будем называть такую ветвь диаграммы неподвижных точек *основной*. Если функция $F(\Omega)$ немонотонна, то для Ω_1^* из некоторого диапазона существуют одно или несколько (в зависимости от числа экстремумов функции $F(\Omega)$) значений $\Omega_2^* \neq \Omega_1^*$ таких, что $F(\Omega_1^*) = F(\Omega_2^*)$. Соответствующие ветви бифуркационной кривой будем называть *дополнительными*. Отметим, что для одиночного (классического) ротора типа Дарье, идентичного одному из роторов пары, бифуркационная диаграмма с точностью до масштабирования оси абсцисс совпадает с основной ветвью диаграммы $\Omega_1^*(c)$; при этом дополнительные ветви диаграммы стационарных режимов в случае одиночного ротора отсутствуют ([10]).

Достаточные условия асимптотической устойчивости неподвижной точки:

$$G_1 = -F'(\Omega_1^*) - aF'(\Omega_2^*) + c(a+1) > 0$$

$$G_2 = F'(\Omega_1^*)F'(\Omega_2^*) - c(F'(\Omega_1^*) + F'(\Omega_2^*)) > 0$$

Здесь использованы обозначения: $F'(\Omega_1^*) = (dF/d\Omega)|_{\Omega=\Omega_1^*}$, $F'(\Omega_2^*) = (dF/d\Omega)|_{\Omega=\Omega_2^*}$.

Характеристический полином, соответствующий стационарной точке системы (4.1), имеет вид: $\lambda^2 + \varepsilon G_1\lambda + a\varepsilon^2 G_2 = 0$.

Если выполнено хотя бы одно из неравенств $G_1 < 0$ или $G_2 < 0$, то соответствующая неподвижная точка неустойчива.

5.1. Случай $G_1 = 0$. В этом случае можно ожидать бифуркацию Андронова–Хопфа. Проверим возможность ее существования в системе (4.1). Предположим, что при некоторых значениях параметров существует неподвижная точка, для которой $G_1 = 0$

(т.е. $F'(\Omega_1^*) = -aF'(\Omega_2^*) + c(a+1)$). Для такой точки получаем $G_2 = -a(F'(\Omega_2^*) + c)^2 - c^2$. Таким образом, ситуация $G_1 = 0$, $G_2 > 0$, а, следовательно, и бифуркация Андронова–Хопфа, в системе (4.1) невозможны. Случай $G_1 = G_2 = 0$ возможен, но является негрубым (устраняется сколь угодно малым изменением функции $F(\Omega)$).

5.2. Случай $G_2 = 0$. Рассмотрим случай потери устойчивости неподвижной точки, сопровождающийся сменой знака коэффициента G_2 (т.е. $F'(\Omega_1^*)F'(\Omega_2^*) = c(F'(\Omega_1^*) + F'(\Omega_2^*))$). В то же время для неподвижных точек системы выполнены соотношения (5.1), а, следовательно:

$$\frac{dc}{d\Omega_1^*} = \frac{F'(\Omega_1^*)F'(\Omega_2^*) - c(F'(\Omega_1^*) + F'(\Omega_2^*))}{F'(\Omega_2^*)(\Omega_1^* + \Omega_2^*)}$$

Таким образом, если $G_2 = 0$ и при этом $F'(\Omega_2^*)(\Omega_1^* + \Omega_2^*) \neq 0$, то выполнено $dc/d\Omega_1^* = 0$, т.е. в точках смены знака коэффициента G_2 бифуркационная кривая $\Omega_1^*(c)$ имеет вертикальную касательную, по крайней мере, если $F'(\Omega_2^*)(\Omega_1^* + \Omega_2^*) \neq 0$. Аналогичное рассуждение справедливо для бифуркационной кривой $\Omega_2^*(c)$.

Рассмотрим отдельно случай $G_2 = 0$, $F'(\Omega_2^*) = 0$. Тогда при $c > 0$ выполнено $F'(\Omega_1^*) = 0$. В частности, при $\Omega_1^* = \Omega_2^*$ такая неподвижная точка представляет собой седло-узел и в зависимости от направления изменения параметра c либо становится седлом, либо распадается на три неподвижные точки: два седла и устойчивый узел.

Не будем останавливаться на ситуации $F'(\Omega_1^*) = F'(\Omega_2^*) = 0$, $\Omega_1^* \neq \Omega_2^*$, поскольку такой случай устраняется сколь угодно малым изменением функции $F(\Omega)$.

Наконец, рассмотрим случай $\Omega_1^* + \Omega_2^* = 0$. Как видно из системы (5.1), этот случай требуется учитывать только для таких функций $F(\Omega)$, при которых существуют корни уравнения $F(\Omega) = F(-\Omega)$. При этом значение c стремится к бесконечности. Такие неподвижные точки не реализуются. При значениях Ω_i^*, отвечающих корням уравнения $F(\Omega) = F(-\Omega)$, имеет место разрыв бифуркационных кривых $\Omega_i^*(c)$ с горизонтальной асимптотой.

Из рассмотренных случаев, в частности, следует, что значения параметров a и ε не влияют на то, в каких точках бифуркационных кривых $\Omega_i^*(c)$ происходит потеря устойчивости. При этом уравнения (5.1) симметричны относительно значений Ω_i^*. Поэтому при построении бифуркационных кривых в зависимости от параметра c достаточно рассмотреть любую из кривых $\Omega_i^*(c)$. В связи с этим далее будем говорить об одной бифуркационной диаграмме $\Omega^*(c)$.

6. Пример бифуркационной диаграммы неподвижных точек усредненной системы. Стационарные значения $\Omega^*(c)$ определяются уравнениями (5.1) и не зависят от параметров a и ε. Точки потери устойчивости определяются, как было показано, сменой знака G_2, и также не зависят от значений a и ε. Таким образом, значения параметров модели, определяющие величины безразмерных параметров a и ε, не влияют на вид бифуркационных кривых $\Omega^*(c)$. Иными словами, первое приближение для установившихся режимов движения ветроустановки полностью определяется только аэродинамическими свойствами профиля лопасти и числом лопастей роторов (т.е. функцией $F(\Omega)$).

Рассмотрим ветроустановку с конкретными аэродинамическими характеристиками лопастей, соответствующими профилю RAF34 (рис. 2).

На рис. 3 приведена зависимость $F(\Omega)$, отвечающая рассматриваемому примеру. Значения, при которых достигаются локальный минимум и максимум функции $F(\Omega)$,

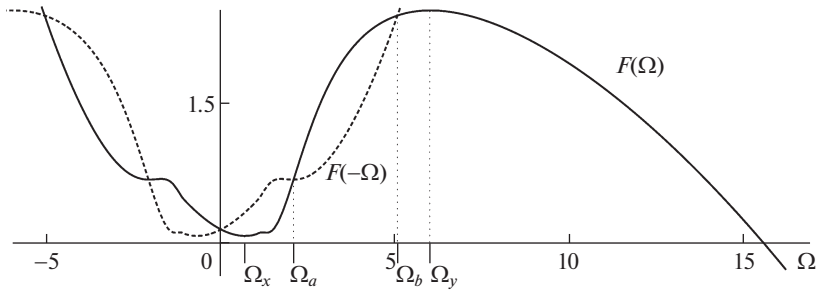

Рис. 3

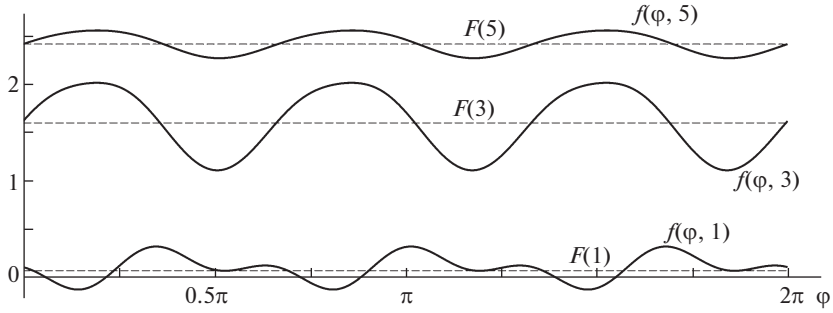

Рис. 4

обозначены через Ω_x и Ω_y. Помимо функции $F(\Omega)$ на рис. 3 пунктирной линией показана зависимость $F(-\Omega)$ и отмечены значения Ω_a, Ω_b, являющиеся наряду с $\Omega = 0$ корнями уравнения $F(\Omega) = F(-\Omega)$. Заметим, что при других аэродинамических характеристиках профиля уравнение $F(\Omega) = F(-\Omega)$ вполне может не иметь корней отличных от нулевого. Такой случай рассмотрен в работе [25].

На рис. 4 приведены примеры, иллюстрирующие отклонения неосредненной функции $f(\varphi, \Omega)$ аэродинамического момента от ее среднего значения $F(\Omega)$ при $\Omega = 1$, 3, 5. Из рисунка видно, что отклонения функции $f(\varphi, \Omega)$ от ее среднего значения достаточно существенны, по крайней мере, если значения Ω не очень велики. Следует отметить, что при конструировании ротора эти отклонения можно уменьшать, увеличивая число лопастей ротора.

Бифуркационная кривая $\Omega^*(c)$ – первое приближение бифуркационной диаграммы стационарных движений – приведена на рис. 5,a. На рис. 5,b показана зависимость $\Omega_2^*(\Omega_1^*)$ между стационарными значениями безразмерных угловых скоростей в осредненной системе при различных значениях c. Точка A соответствует значению $c = 0$. Точки B_{1-4} и точка $(0, 0)$ отвечают предельному случаю $c \to \infty$. На рис. 5 сплошные кривые отвечают притягивающим неподвижным точкам системы (4.1), пунктирные – отталкивающим.

Точки B_{1-4} на диаграмме (Ω_1^*, Ω_2^*) (рис. 5,b) соответствуют корням уравнения $F(\Omega) = F(-\Omega)$. Если последнее не имеет корней, то дополнительная ветвь диаграммы

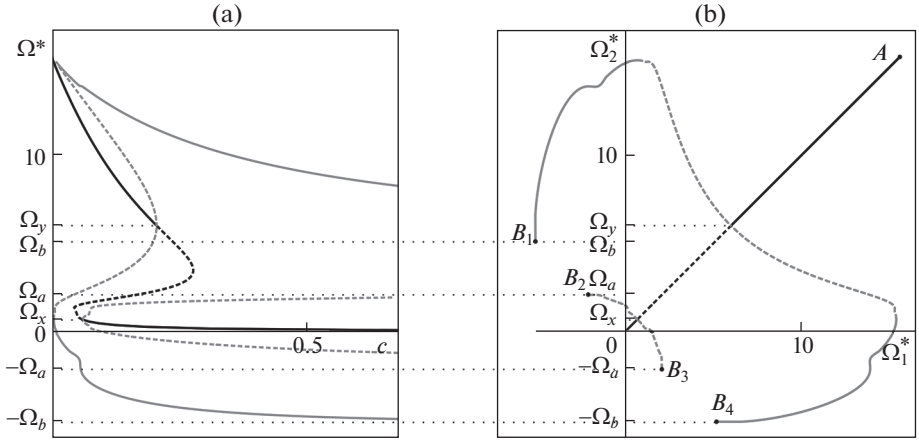

Рис. 5

(Ω_1^*, Ω_2^*) будет замкнутой. Пример соответствующей диаграммы приведен в работе [25].

На рис. 5 основная ветвь бифуркационной кривой (та, на которой $\Omega_1^* = \Omega_2^*$) показана черным цветом, дополнительные ветви ($\Omega_1^* \neq \Omega_2^*$) – серым цветом. На рис. 5,а точечными горизонтальными линиями обозначены асимптоты $\Omega^* = \Omega_a$, $\Omega^* = \Omega_b$ и точки ветвления $\Omega^* = \Omega_x$, $\Omega^* = \Omega_y$. Для рассмотренного профиля функция $F(\Omega)$ имеет еще дополнительную "слабо выраженную" пару локальных экстремумов, аргументы которых расположены между Ω_x и Ω_a. Соответствующие им ветви бифуркационной диаграммы не приведены на рисунках, так как связанные с ними особенности поведения системы локализованы в незначительной области фазового пространства.

Отметим, что участки диаграмм $\Omega^*(c)$ и $\Omega_2^*(\Omega_1^*)$, характеризующиеся достаточно малыми значениями хотя бы одной из величин Ω_i^*, не соответствуют поведению полной системы, так как вне области G процедура усреднения по двум углам некорректна.

Для ветроэнергетических установок традиционно в качестве базовой характеристики эффективности выступает значение коэффициента c_p механической мощности на рабочем режиме. На рис. 6 представлена зависимость коэффициента c_p механической мощности ветротурбины от коэффициента c внешней нагрузки на установившихся режимах, построенная в первом приближении (т.е. неподвижные точки системы (4.1) используются в качестве приближения для установившихся режимов). На рисунке сплошные линии соответствуют притягивающим неподвижным точкам системы (4.1), пунктирные – отталкивающим. Черная линия соответствует основной ветви бифуркационной диаграммы неподвижных точек, серая отвечает дополнительным ветвям. Коэффициент механической мощности, отбираемой у потока, в первом приближении определен по следующей формуле:

$$c_p = \frac{3S}{S_0}(F(\Omega_1^*)\Omega_1^* + F(\Omega_2^*)\Omega_2^*)$$

Здесь S_0 – площадь поперечного сечения ветротурбины. Расчет c_p выполнен в предположении, что $3S/S_0 = 0.01$.

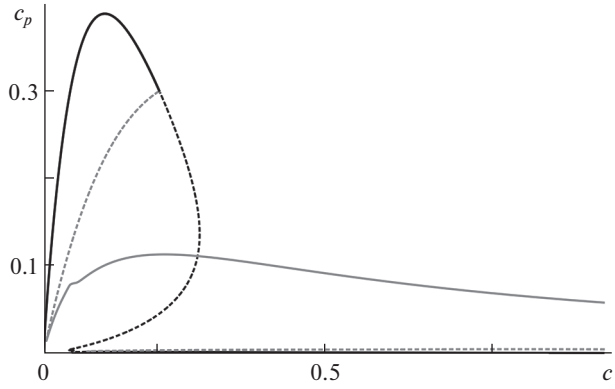

Рис. 6

Отметим, что наибольшие значения механической мощности достигаются на стационарных режимах, которые отвечают основной ветви бифуркационной диаграммы ($\Omega_1^* = \Omega_2^*$) и характеризуются значениями Ω^*, превосходящими Ω_y. Существенно меньше значения мощности на стационарных режимах, отвечающих дополнительной ветви ($\Omega_1^* \neq \Omega_2^*$), даже при $\Omega_1^* > \Omega_y$. Стационарные режимы, на которых ни одно из значений Ω_i^* не превосходит Ω_a, характеризуются весьма малыми значениями мощности и для практических приложений не представляют интереса.

Отметим, что в рассмотренном примере в усредненной системе (4.1) не было обнаружено циклов.

Итак, зависимости, представленные на рис. 5, 6, в первом приближении описывают установившиеся режимы движения двухроторной ветроустановки. Справедливость предположения о соответствии между неподвижными точками системы (4.1) и периодическими/квазипериодическими траекториями полной системы (3.1) и, в особенности, вопрос о “переносе” свойств устойчивости на траектории системы (3.1) требуют дополнительного исследования. При описании аттракторов речь идет о соответствии между решениями полной и усредненной систем на бесконечном интервале времени. Аналитическое рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной работы. Отметим, что такого рода исследование может быть проведено на основе подходов, разработанных в [16–21]. В настоящей работе остановимся на численном исследовании соответствия между решениями $\omega_i(t)$ и $\Omega_i(t)$ систем (3.1) и (4.1).

7. Сходство и отличия между траекториями полной и усредненной систем. Влияние величины ε. Численное сравнение решений $\omega_i(t)$ и $\Omega_i(t)$, проведенное путем прямого интегрирования систем (3.1) и (4.1) при различных наборах начальных условий и различных значениях параметров a и ε, подтвердило следующие, вообще говоря, ожидаемые тенденции:

1) Пусть $\omega_i(0) = \Omega_i(0)$ принадлежат некоторой области W, образованной на плоскости (Ω_1, Ω_2) окрестностями прямых $\Omega_i = 0$, а также окрестностями сепаратрисных траекторий системы (4.1), и пусть $\varphi_i(0)$ выбраны из некоторого диапазона, зависящего от $\Omega_i(0)$. Тогда наблюдаются следующие варианты радикального отличия между решениями полной и усредненной систем: *a*) $\omega_i(t)$ выходит в окрестность аттрактора, расположенного около неподвижной точки системы (4.1) отличной от той, в области

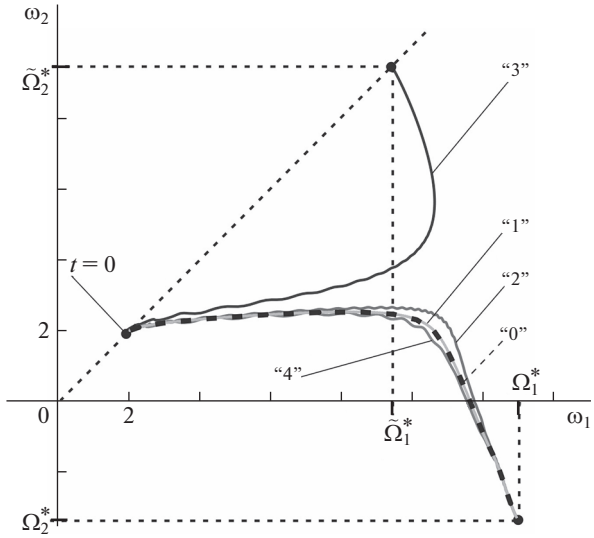

Рис. 7

притяжения которой расположена точка $(\Omega_1(0), \Omega_2(0))$; *б*) хотя бы одна из переменных $\omega_i(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$ или неограниченное число раз меняет знак при $t \to \infty$ (один из роторов останавливается или переходит на режим колебаний). Эта область W, в которой нецелесообразно использовать решения усредненной системы для прогнозирования поведения решений полной системы, расширяется с ростом параметра ε (например, рис. 7, 8).

Рисунки 7, 8 построены для значения $c = 0.11$ коэффициента внешней нагрузки, поскольку именно это значение представляет особый интерес для приложений как значение, при котором достигается максимальная механическая мощность ветроустановки. Значение $a = 0.5$ выбрано для иллюстративного примера.

На рис. 7 приведен пример влияния параметра ε и начальных условий по углам $(\varphi_i(0))$ при значениях $\Omega_i(0)$ относительно близких к неустойчивому узлу усредненной системы ($\Omega_i^* = 1.84\ldots$). На рис. 7 цифрами обозначены следующие траектории: "0" – траектория усредненной системы (4.1); "1–4" – решения ω_i полной системы (3.1) при различных значениях параметра ε и различных начальных условиях: "1" $\varepsilon = 0.1, \varphi_i(0) = 1$, "2" $\varepsilon = 0.5$, $\varphi_i(0) = 1$, "3" $\varepsilon = 1$, $\varphi_i(0) = 1$, "4" $\varepsilon = 1$, $\varphi_1(0) = 3$, $\varphi_2(0) = 1$.

На рис. 8 приведен пример влияния параметра ε при значениях ω_i близких к нулю. На рисунке "0" – траектория усредненной системы (4.1); "1–4" – решения ω_i полной системы (3.1) при различных значениях параметра ε и одних и тех же начальных условиях по угловым переменным: $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 1$. Значения параметра ε: "1" $\varepsilon = 0.1$, "2" $\varepsilon = 0.5$, "3" $\varepsilon = 1$. В частности, в случае $\varepsilon = 1$ ротор с меньшим моментом инерции переходит на режим колебаний.

2) Притягивающим неподвижным точкам (4.1) при достаточно малых ε отвечают аттракторы системы (3.1). Для неподвижных точек, представляющих наибольший интерес с практической точки зрения – отвечающих режимам с большими значениями коэффициента c_p механической мощности, – диапазон по параметру ε, при котором в

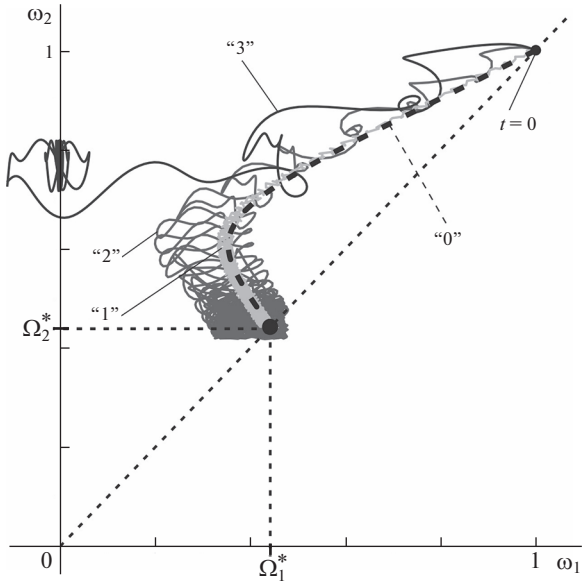

Рис. 8

полной системе сохраняется соответствующий аттрактор, значительно (на несколько порядков) превосходит физически-осмысленный диапазон значений ε.

3) При $a \neq 1$ не поддерживаются резонансные соотношения между отделенными от нуля ω_1 и ω_2, кроме тех резонансов, которые отвечают притягивающим неподвижным точкам системы (4.1) (например, рис. 7, 8).

8. Обсуждение результатов. В качестве первого приближения для полной системы (3.1), описывающей динамику двухроторной ветроустановки типа Дарье, рассмотрена усредненная по двум углам система (4.1). Проводится аналитическое и численное исследование. При аналитическом исследовании предполагается малым значение параметра ε, который косвенно характеризует отношение плотности воздуха к средней плотности материала конструкции турбины. Отличия между медленными переменными полной системы и решениями усредненной системы имеют порядок ε на интервале времени порядка ε^{-1}, если полная система при нерезонансном соотношении частот удовлетворяет условиям теоремы [16] (при резонансном соотношении частот задача сводится к одночастотному усреднению и выполнены условия теоремы Крылова–Боголюбова [18]).

Для описания аттракторов полной системы в качестве первого приближения используются притягивающие неподвижные точки усредненной системы. Для оценки точности такого приближения требуется определить отличия между решениями полной и усредненной систем на бесконечном интервале времени. Эта задача выходит за рамки настоящей статьи и является одним из возможных направлений дальнейшего исследования рассмотренной системы.

Численное исследование влияния величины параметра ε на отличия между траекториями на плоскости медленных переменных полной системы и траекториями усредненной системы подтвердило, что для прикладных задач достаточно использовать данные о поведении усредненной системы (кроме движений с малыми угловыми скоростями). На практике параметр ε принимает значения порядка 0.1 (или меньше).

Для неподвижных точек усредненной системы построены бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра модели, характеризующего внешнюю электрическую нагрузку в локальной цепи генератора ветроустановки. Выявлено наличие основной ветви бифуркационной диаграммы, которая в точности аналогична бифуркационной диаграмме для одиночного ротора типа Дарье, а также продемонстрировано наличие дополнительной ветви диаграммы. Наибольшее значение коэффициента мощности достигается на основной ветви диаграммы и совпадает со значением, достижимым для однороторной ветротурбины Дарье. Основное отличие от однороторной ветротурбины на соответствующем режиме: угловая скорость ротора генератора относительно статора вдвое больше, что может снять необходимость использования дополнительной повышающей передачи в конструкции установки и тем самым значительно снизить потери энергии. Двукратное увеличение угловой скорости ротора относительно статора не приводит к росту мощности, поскольку сопровождается двукратным уменьшением эффективного электромеханического момента.

9. Заключение. Построена замкнутая математическая модель двухроторной ветротурбины типа Дарье. Выполнено двухчастотное усреднение соответствующей динамической системы по двум угловым координатам. Проанализировано влияние резонансов.

Описана область значений параметров модели и начальных условий, при которых целесообразно использовать усредненную систему для прогнозирования поведения полной системы. Построена бифуркационная диаграмма неподвижных точек усредненной системы. В первом приближении притягивающая неподвижная точка усредненной системы соответствует рабочему режиму ветротурбины.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ: грант № 18-31-20029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stobart A.* Wind turbine. International Patent No. WO1992012343, 1992.
2. *Shen W.Z., Zakkam V.A.K., Sorensen J.N., Appa K.* Analysis of counter-rotating wind turbines // J. Phys. Conf. Ser. 2007. V. 75. P. 012003.
3. *Farthing S.P.* Robustly optimal contra-rotating HAWT // Wind Eng. 2010. V. 34. Iss. 6. P. 733–742.
4. *Cho W., Lee K., Choy I., Back J.* Development and experimental verification of counter-rotating dual rotor/dual generator wind turbine: generating, yawing and furling // Renew. Energy. 2017. V. 114. P. 644–654.
5. *Климина Л.А., Шалимова Е.С.* Двухпропеллерная ветроэнергетическая установка с дифференциальной планетарной передачей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18. № 10. С. 679–684.
6. *Dabiri J.O.* Potential order-of-magnitude enhancement of wind farm power density via counter-rotating vertical-axis wind turbine arrays // J. Renew. Sustain. Energy. 2011. V. 3. Iss. 4. P. 043104.
7. *Tjiu W., Marnoto T., Mat S., Ruslan M.H., Sopian K.* Darrieus vertical axis wind turbine for power generation I: assessment of Darrieus VAWT configurations // Renew. Energy. 2015. V. 75. P. 50–67.
8. *Flaherty R.A., Burton C.A.* Counter-rotating vertical axis wind turbine assembly. US Patent No. 20120148403 A1, 2011.
9. *Климина Л.А., Голуб А.П.* Регулирование рабочих режимов ВЭУ с помощью дифференциальной планетарной передачи // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 4. С. 24–32.
10. *Klimina L., Lokshin B., Samsonov V.* Parametrical analysis of the behaviour of an aerodynamic pendulum with vertical axis of rotation // Modelling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. State-of-the-Art, Perspectives and Applications. Springer, Dordrecht. 2009. P. 211–220.
11. *Кравец А.С.* Характеристики авиационных профилей. М.: Гос. изд-во оборонной промышленности, 1939. 332 с.

12. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д.* О динамике малой ветроэлектростанции // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 1. С. 50–53.
13. *Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Вен-Лон Лю, Чин-Хуэй Линь*, Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 59–66.
14. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Особенности движения тела-вертушки // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 64–73.
15. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
16. *Волосов В.М.* О методе усреднения // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 1. С. 21–24.
17. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во Московского университета, 1971. 508 с.
18. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с. (второе издание).
19. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
20. *Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems. New York: Springer, 2007. 433 p.
21. *Нейштадт А.И.* Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах // УМН. 2014. Т. 69. № 5 (419). С. 3–80.
22. *Awrejcewicz J., Starosta R., Sypniewska-Kamińska G.* Decomposition of governing equations in the analysis of resonant response of a nonlinear and non-ideal vibrating system // Nonlinear Dynamics. 2015. V. 82. Iss. 1–2. P. 299–309.
23. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
24. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движений твердого тела относительно центра масс // М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. 308 с.
25. *Klimina L., Shalimova E., Dosaev M., Lokshin B., Samsonov V.* Two-Frequency Averaging in the Problem of Motion of a Counter-Rotating Vertical Axis Wind Turbine // Dynamical Systems Theory and Applications. Springer, Cham., 2017. P. 183–192.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 148–156

УДК 539.374

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ДВУХ ВИНТОВЫХ ВЕКТОРОВ

© 2021 г. Ю. Н. Радаев[a,*,]**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: radayev@ipmnet.ru*

***e-mail: y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.
После доработки 18.11.2019 г.
Принята к публикации 20.11.2019 г.

Рассматриваются дифференциальные уравнения для потенциалов, обеспечивающие выполнение основного векторного дифференциального уравнения линейной теории упругости в случае гармонической зависимости поля перемещений от времени. Развивается альтернативная схема расщепления векторного дифференциального уравнения линейной теории упругости на несвязанные уравнения. Она основана на понятии о гамма-векторе, удовлетворяющем винтовому уравнению. В результате проблема нахождения вихревой составляющей поля перемещений сводится к последовательному решению несвязанных между собой винтовых дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Сформулирована и доказана теорема о полноте представления поля перемещений с помощью двух винтовых вихревых векторных полей.

Ключевые слова: теория упругости, вектор перемещения, скалярный потенциал, векторный потенциал, гамма-вектор, вихревой вектор, винтовое уравнение, полнота представления

DOI: 10.31857/S057232992102015X

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Пространственная гармоническая задача теории упругости за свою многолетнюю историю не потеряла своей актуальности и по-прежнему может характеризоваться как важнейший инструмент исследования целого спектра прикладных задач механики деформируемого твердого тела, строительной механики, механики кораблестроения, механики грунтов, моделирования работы механизмов и машин. Ей посвящена обширная научная литература (см., например, [1–6]). Родственные проблемы и постановки задач возникают также в термоупругости [7] и особенно в вопросах распространения гармонических волн в *гиперболических* термоупругих средах [8]. В настоящей работе развивается альтернативная (по отношению к обычно применяемым в прикладных проблемах) схема расщепления основного векторного дифференциального уравнения гармонической линейной теории упругости на несвязанные уравнения. Последние будут иметь форму винтовых уравнений, поэтому ниже будут приведены необходимые сведения, касающиеся таких уравнений (см., например, [9]).

Векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ называется винтовым (screw field), если оно удовлетворяет следующему свойству:

$$\boldsymbol{\Upsilon} \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0}$$

т.е. вихрь векторного поля оказывается коллинеарным направлению поля

$$\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} = A\boldsymbol{\Upsilon}$$

где множитель A характеризуется термином анормальность (abnormality) поля. В том случае, когда множитель A есть постоянная величина, все кратные вихри поля $\boldsymbol{\Upsilon}$

$$\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}, \quad \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}), \quad \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon})), \ldots$$

также будут винтовыми полями с той же самой анормальностью A; поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ будет удовлетворять векторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\boldsymbol{\Upsilon} + A^2\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0}$$

винтовое поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ с постоянной анормальностью A представимо в форме

$$\boldsymbol{\Upsilon} = A(\nabla h) \times \mathbf{d} + A^2 h\mathbf{d} + (\mathbf{d} \times \nabla)\nabla h$$

где $\mathbf{d}$ – постоянный единичный директор, h – скалярное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$\Delta h + A^2 h = 0$$

Скажем несколько слов о содержании работы. Сразу после вводной части, во втором разделе, рассматриваются основные уравнения линейной теории упругости в терминах вектора перемещения в случае его гармонической зависимости от времени. Вводятся скалярный и векторный потенциалы, из которых складывается представление поля перемещений в форме Ламе. Приводятся дифференциальные уравнения (уравнения Гельмгольца) для потенциалов, обеспечивающие выполнение основного векторного дифференциального уравнения линейной теории упругости (дифференциального уравнения Ламе), и обсуждаются условия калибровки векторного потенциала.

В третьем разделе статьи развивается альтернативная схема расщепления дифференциального уравнения Ламе на независимые уравнения, в основе которой лежит вектор, представляющий собой вихревую составляющую поля перемещений. В отличии от векторного потенциала указанный вектор заведомо удовлетворяет естественному калибровочному условию, устанавливающему его нулевую расходимость. В этом же разделе вводится понятие о гамма-векторах в гармонической задаче теории упругости. Получено уравнение первого порядка, которому должен удовлетворять гамма-вектор (так называемое винтовое уравнение (screw equation)). С помощью полученных результатов проблема нахождения вихревой составляющей поля перемещений сводится к последовательному решению двух (с учетом чередования знаков – четырех) дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными.

Четвертый раздел посвящен исследованию одного общего представления гамма-вектора через вихревое векторное поле. Показано, что, если указанное вихревое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то дифференциальное уравнение для гамма-вектора будет выполнено в силу самого представления гамма-вектора. Здесь изложение может быть в значительной степени упрощено, если ввести два дифференциальных оператора, действующих в линейном пространстве вихревых (т.е. обладающих нулевой расходимостью) векторных полей: один из операторов имеет второй порядок, а другой – первого.

Содержание пятого раздела целиком связано с формулировкой и доказательством полноты построенных в предыдущих разделах работы представлений поля перемеще-

ний. Результаты, полученные в этом направлении, завершают описание рассматриваемой схемы решения гармонической задачи теории упругости в перемещениях.

2. Основное векторное дифференциальное уравнение гармонической линейной теории упругости. Рассмотрим трехмерную систему дифференциальных уравнений гармонической линейной теории упругости в стандартной векторной форме [6]:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \times \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho\partial_{\cdot}\partial_{\cdot}\mathbf{u} \tag{2.1}$$

где ρ – плотность; $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; λ, μ – определяющие постоянные (упругие постоянные Ламе); ∇ – трехмерный оператор Гамильтона; $\partial_{\cdot}$ – частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных.

Векторное дифференциальное уравнение (2.1) будет исследоваться в областях трехмерного пространства, обладающих свойством поверхностной односвязанности: любая замкнутая поверхность, целиком расположенная в области может быть стянута в точку, не выходя за границу области. Такое требование совершенно необходимо для того, чтобы любое безвихревое векторное поле имело бы потенциал, а любое векторное поле с нулевой расходимостью оказывалось бы вихревым, т.е. имело бы векторный потенциал.

В дальнейшем изложении зависимость от времени предполагается гармонической, т.е. физические поля представляются как произведения комплексных амплитуд (за которыми мы сохраним те же обозначения, что и для самих полей) на комплексную гармоническую экспоненту $e^{i\omega t}$, где ω – циклическая частота.

Поле перемещений $\mathbf{u}$ при любых обстоятельствах может быть представлено в форме разложения (разложения Ламе) на потенциальную и вихревую части

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi} \tag{2.2}$$

где Φ – скалярный потенциал перемещений, $\mathbf{\Psi}$ – векторный потенциал перемещений. Необходимо отметить, что разложение Ламе обычно сопровождается тем или иным калибровочным условием на векторный потенциал. Оно, в принципе, не является обязательным и мы пока не будем выставлять никакого условия калибровки. Разложение Ламе, как известно, обладает необходимой степенью *полноты* [6], т.е. любое решение основного векторного дифференциального уравнения теории упругости представимо в форме (2.2).

Прежде чем переходить к уравнениям для потенциалов перемещений введем фазовые скорости двух основных типов волн в упругой среде и соответствующие волновые числа

$$c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad k_{\parallel}^2 = \frac{\omega^2}{c_{\parallel}^2}; \quad c_{\perp}^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c_{\perp}^2} \tag{2.3}$$

Дальнейший стандартный ход рассуждений состоит в следующем. Подстановка представления Ламе (2.2) в векторное дифференциальное уравнение (2.1) позволяет перейти к уравнению

$$\nabla(k_{\parallel}^{-2}\Delta\Phi + \Phi) + \nabla \times (-k_{\perp}^{-2}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Psi}) + \mathbf{\Psi}) = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

или – к эквивалентному уравнению

$$\nabla(k_{\parallel}^{-2}\Delta\Phi + \Phi) + \nabla \times (k_{\perp}^{-2}\Delta\mathbf{\Psi} + \mathbf{\Psi}) = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

откуда получаются скалярное и векторное уравнения Гельмгольца для потенциалов поля перемещений:

$$\Delta\Phi + k_{\parallel}^2\Phi = \mathbf{0}, \quad \Delta\mathbf{\Psi} + k_{\perp}^2\mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Как видно из проведенного вывода, если потенциалы Φ и $\mathbf{\Psi}$ удовлетворяют уравнениям (2.6), то поле (2.2) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1). При этом нет необходимости привлекать какое бы то ни было условие калибровки. Ясно, что приведенное выше заключение актуально также при навязывании того или иного калибровочного условия; в частности, стандартного условия калибровки (когда расходимость векторного потенциала объявляется равной нулю)

$$\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0 \tag{2.7}$$

или более общего условия –

$$\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = H \tag{2.8}$$

где H – произвольная a priori заданная функция пространственных переменных и времени.

Заключая этот раздел работы обратим внимание также на то, что, несущественно изменяя ход рассуждений, вместо уравнений Гельмгольца для потенциалов (2.6) можно установить несколько более общие уравнения (h – произвольная функция пространственных переменных и времени)

$$\Delta\Phi + k_{\|}^2\Phi = 0, \quad \Delta\mathbf{\Psi} + k_{\perp}^2\mathbf{\Psi} = \nabla h \tag{2.9}$$

3. Вихревая составляющая поля перемещений и гамма-векторы. Интересную теорию гармонической задачи линейной теории упругости удается построить, если вместо векторного потенциала в качестве фундаментального элемента теории рассматривать вихревую составляющую поля перемещений, т.е. исходить из следующего представления:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \mathbf{\Upsilon} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{\Upsilon}$ — вихревая часть перемещений $\mathbf{u}$, которая заведомо обладает нулевой расходимостью:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Upsilon} = 0$$

В терминах векторного потенциала вихревая часть перемещений, очевидно, вычисляется как

$$\mathbf{\Upsilon} = \nabla \times \mathbf{\Psi}$$

откуда также следует данное выше равенство.

Векторное поле $\mathbf{\Upsilon}$ с формальной точки зрения удовлетворяет точно таким же дифференциальным уравнениям, что и векторный потенциал $\mathbf{\Psi}$. Действительно, как нетрудно видеть уравнение (2.4) эквивалентно

$$\nabla(k_{\|}^{-2}\Delta\Phi + \Phi) - k_{\perp}^{-2}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Upsilon}) + \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

а это уравнение, в свою очередь, – уравнению

$$\nabla(k_{\|}^{-2}\Delta\Phi + \Phi) - k_{\perp}^{-2}\Delta\mathbf{\Upsilon} + \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

Таким образом, новая пара Φ, $\mathbf{\Upsilon}$ должна удовлетворять тем же самым уравнениям Гельмгольца, что и пара потенциалов Φ, $\mathbf{\Psi}$:

$$\Delta\Phi + k_{\|}^2\Phi = 0, \quad \Delta\mathbf{\Upsilon} + k_{\perp}^2\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

правда, с уже естественным калибровочным условием

$$\nabla \cdot \mathbf{\Upsilon} = 0 \tag{3.5}$$

Стоит указать на то обстоятельство, что вектор $\mathbf{\Upsilon}$ значительно более удобен, чем векторный потенциал $\mathbf{\Psi}$, поскольку формулировка, например, граничных условий в случае использования $\mathbf{\Upsilon}$ не будет содержать лишних дифференцирований по про-

странственным координатам. Однако наиболее важное преимущество вектора $\boldsymbol{\Upsilon}$ заключается в том, что с его помощью появляется возможность развития альтернативного подхода к исследованию уравнений гармонической линейной теории упругости.

Будем исходить из дифференциального уравнения (3.2). В левой части указанного уравнения произведем следующее формальное преобразование: добавим и отнимем одно и то же слагаемое

$$\mp k_\perp \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}$$

Умножая уравнение на $k_\perp^2$ и группируя затем очевидным образом слагаемые, приходим к уравнению

$$k_\perp^2 \nabla (k_\parallel^{-2} \Delta\Phi + \Phi) - (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) \mp k_\perp \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) \mp k_\perp (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0}$$

Из полученного уравнения находится еще одно уравнение для определения вихревой части поля перемещений:

$$-\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon}) \mp k_\perp (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0} \tag{3.6}$$

Если далее ввести вектор (точнее, два вектора, которые мы будем в дальнейшем называть гамма-векторами)

$$\boldsymbol{\Gamma}_\mp = \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon} \tag{3.7}$$

то в результате уравнение (3.6) приобретет форму

$$-\nabla \times \boldsymbol{\Gamma}_\mp \mp k_\perp \boldsymbol{\Gamma}_\mp = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) в механике и математической физике называется винтовым. Оно имеет основное значение во всем последующем изложении. Сейчас лишь заметим, что каждое решение дифференциального уравнения *первого* порядка (3.8) будет на основании уравнения (3.11) определять вихревую часть поля перемещений $\boldsymbol{\Upsilon}$. Следовательно, указанная вихревая часть получается последовательным интегрированием (если оно оказывается возможным) двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Точно так же, как и $\boldsymbol{\Upsilon}$, гамма-вектор $\boldsymbol{\Gamma}_\mp$ заведомо будет удовлетворять естественному калибровочному условию

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}_\mp = 0 \tag{3.9}$$

В изложенной выше схеме важным является то, что речь идет по существу о двух независимых векторах $\boldsymbol{\Upsilon}_-$ и $\boldsymbol{\Upsilon}_+$, сумма которых также может выступать в качестве вихревой составляющей поля перемещений, т.е. о решениях основного векторного дифференциального уравнения следующего вида:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \boldsymbol{\Upsilon}_- + \boldsymbol{\Upsilon}_+ \tag{3.10}$$

В качестве простого примера рассмотрим случай нулевого гамма-вектора $\boldsymbol{\Gamma}_\mp$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_\mp = \mathbf{0}$$

Ясно, что дифференциальное уравнение (3.8) удовлетворяется, поэтому вихревая составляющая поля перемещений будет интегралом векторного дифференциального уравнения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

который обладает естественной калибровкой (3.5). Точнее, здесь речь идет о паре независимых интегралов уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} - k_\perp \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathbf{0} \\ \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} + k_\perp \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.12}$$

4. Гамма-вектор и уравнение Гельмгольца для вихревого поля. Проведенные в предыдущем разделе работы рассуждения, а именно определение гамма-векторов и вывод дифференциальных уравнений для них[1], на самом деле оказываются тесно связанными с решениями векторного уравнения Гельмгольца с естественной калибровкой. Сейчас мы точно сформулируем соответствующее утверждение.

Если гамма-вектор $\boldsymbol{\Gamma}$ представим с помощью вихревого векторного поля $\boldsymbol{\Upsilon}$ в форме

$$\boldsymbol{\Gamma} = \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon} \tag{4.1}$$

с вектором $\boldsymbol{\Upsilon}$, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца и естественному условию калибровки, то гамма-вектор (4.1) является решением дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$-\nabla \times \boldsymbol{\Gamma} \mp k_\perp \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

и также удовлетворяет естественному условию калибровки.

Сформулированное утверждение допускает простое доказательство. Действительно, поскольку вектор $\boldsymbol{\Upsilon}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и обладает нулевой расходимостью, то

$$\Delta\boldsymbol{\Upsilon} + k_\perp^2\boldsymbol{\Upsilon} = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) + k_\perp^2\boldsymbol{\Upsilon} =$$
$$= -(\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) \mp k_\perp \nabla \times \boldsymbol{\Upsilon}) \mp k_\perp(\nabla \times \boldsymbol{\Upsilon} \mp k_\perp \boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0}$$

откуда на основании (4.1) следует (4.2).

Ситуация становится намного более ясной, если принять более компактные обозначения. С этой целью введем в рассмотрение два дифференциальных оператора, действующих в линейном пространстве вихревых векторных полей, согласно

$$\mathcal{T}\mathbf{v} = (\Delta + k_\perp^2)\mathbf{v}, \quad \underset{\mp}{\mathcal{P}}\,\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \mp k_\perp \mathbf{v} \tag{4.3}$$

где $\mathbf{v}$ – произвольное вихревое векторное поле.

Прежде всего заметим, что для любого вихревого векторного поля выполняется

$$\mathcal{T}\mathbf{v} = -\nabla \times (\underset{\mp}{\mathcal{P}}\,\mathbf{v}) \mp k_\perp \underset{\mp}{\mathcal{P}}\,\mathbf{v} = -\underset{\pm}{\mathcal{P}}\,\underset{\mp}{\mathcal{P}}\,\mathbf{v}$$

т.е. для дифференциального оператора Гельмгольца справедливо следующее мультипликативное разложение:

$$\mathcal{T} = -\underset{\pm}{\mathcal{P}}\,\underset{\mp}{\mathcal{P}} \tag{4.4}$$

Дифференциальное уравнение для гамма-вектора (4.2) в операторной форме будет иметь вид

$$-\underset{\pm}{\mathcal{P}}\,\boldsymbol{\Gamma}_\mp = \mathbf{0} \tag{4.5}$$

Ясно, что последнее уравнение имеет решение в форме

$$\boldsymbol{\Gamma}_\mp = \underset{\mp}{\mathcal{P}}\,\boldsymbol{\Upsilon}$$

только при условии

$$\mathbf{0} = -\underset{\pm}{\mathcal{P}}\,\underset{\mp}{\mathcal{P}}\,\boldsymbol{\Upsilon}$$

и в силу (4.4), только при условии

$$\mathbf{0} = \mathcal{T}\Upsilon$$

т.е. когда векторное поле $\boldsymbol{\Upsilon}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

[1] Речь идет о двух дифференциальных уравнениях первого порядка (3.8); как указывалось в вводной части работы, эти уравнения имеют простой геометрический смысл, связанный с ориентацией характерных направлений векторного поля: вектор вихря поля должен быть коллинеарен направлению самого поля.

Заключая этот раздел работы, заметим, что

$$\underset{\mp}{\mathcal{P}}\underset{\pm}{\mathcal{P}} = -\underset{\mp}{\mathcal{P}}^2$$

5. Представление с помощью винтовых векторных полей. Полнота представления поля перемещений. Как следует из полученных в предыдущих разделах работы результатов интерес представляют решения уравнений гармонической задачи теории упругости в перемещениях в форме (3.10), в которой вихревые составляющие удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка (3.12), скалярный потенциал Φ уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + k_{\|}^2\Phi = 0 \tag{5.1}$$

Ясно, прежде всего, что такая форма представления вектора перемещений должна быть весьма ограниченной, поскольку она характеризуется нулевыми гамма-векторами. В принципе, набор гамма-векторов значительно шире, но даже этот вариант обладает необходимой полнотой: любое решение гармонического векторного уравнения линейной теории упругости может быть представлено в форме

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \boldsymbol{\Upsilon}_- + \boldsymbol{\Upsilon}_+ \tag{5.2}$$

с потенциалом Φ и вихревыми винтовыми полями (screw fields) $\boldsymbol{\Upsilon}_-$, $\boldsymbol{\Upsilon}_+$, удовлетворяющими несвязанным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\Delta\Phi + k_{\|}^2\Phi = 0\\ \nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}_- - k_\perp\boldsymbol{\Upsilon}_- = \mathbf{0}\\ \nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}_+ + k_\perp\boldsymbol{\Upsilon}_+ = \mathbf{0}\end{gathered} \tag{5.3}$$

Приведем формальное *доказательство* сформулированного утверждения о полноте. Допустим, что $\mathbf{u}$ – произвольное решение гармонических уравнений теории упругости. На основании векторного гармонического уравнения теории упругости разложим поле перемещений на две составляющие (вихревую и безвихревую):

$$\mathbf{u} = \overset{*}{\mathbf{u}} + \underset{*}{\mathbf{u}}$$

где

$$\overset{*}{\mathbf{u}} = -\frac{1}{k_{\|}^2}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}$$

$$\underset{*}{\mathbf{u}} = \frac{1}{k_\perp^2}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})$$

Поскольку

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\overset{*}{\mathbf{u}}, \quad \nabla\times\mathbf{u} = \nabla\times\underset{*}{\mathbf{u}}$$

то данные выше формулы преобразуются к виду

$$\overset{*}{\mathbf{u}} = -\frac{1}{k_{\|}^2}\nabla\nabla\cdot\overset{*}{\mathbf{u}}$$

$$\underset{*}{\mathbf{u}} = \frac{1}{k_\perp^2}\nabla\times(\nabla\times\underset{*}{\mathbf{u}})$$

т.е. записываются только в терминах безвихревой $\overset{*}{\mathbf{u}}$ и вихревой $\underset{*}{\mathbf{u}}$ составляющих поля перемещений.

Обозначим через $\overset{*}{\Phi}$ потенциал безвихревого векторного поля $\overset{*}{\mathbf{u}}$ так, что

$$\overset{*}{\mathbf{u}} = \nabla \overset{*}{\Phi}$$

Как нетрудно заметить

$$\nabla(\Delta \overset{*}{\Phi} + k_{\parallel}^2 \overset{*}{\Phi}) = 0$$

откуда (C – произвольная постоянная)

$$\Delta \overset{*}{\Phi} + k_{\parallel}^2 \overset{*}{\Phi} = k_{\parallel}^2 C$$

и, вводя функцию

$$\Phi = \overset{*}{\Phi} - C$$

находим, что

$$\overset{*}{\mathbf{u}} = \nabla \Phi$$

с потенциалом, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Phi + k_{\parallel}^2 \Phi = 0$$

Остается рассмотреть вихревую часть поля перемещений $\underset{*}{\mathbf{u}}$. Она удовлетворяет уравнению

$$-\nabla \times (\nabla \times \underset{*}{\mathbf{u}}) + k_{\perp}^2 \underset{*}{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

или также

$$-(\nabla \times (\nabla \times \underset{*}{\mathbf{u}}) - k_{\perp} \nabla \times \underset{*}{\mathbf{u}}) - k_{\perp}(\nabla \times \underset{*}{\mathbf{u}} - k_{\perp} \underset{*}{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$$

Полученное уравнение, обозначая

$$\mathbf{P}_{-} = \nabla \times \underset{*}{\mathbf{u}} - k_{\perp} \underset{*}{\mathbf{u}}$$

переписываем в форме

$$-\nabla \times \mathbf{P}_{-} - k_{\perp} \mathbf{P}_{-} = \mathbf{0}$$

Рассуждая аналогично, введем вектор

$$\mathbf{P}_{+} = \nabla \times \underset{*}{\mathbf{u}} + k_{\perp} \underset{*}{\mathbf{u}}$$

для которого, в свою очередь, получается уравнение

$$-\nabla \times \mathbf{P}_{+} + k_{\perp} \mathbf{P}_{+} = \mathbf{0}$$

Замечая, наконец, что

$$\underset{*}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{P}_{+} - \mathbf{P}_{-}}{2k_{\perp}}$$

и производя переобозначения

$$\mathbf{P}_{+} = 2k_{\perp} \boldsymbol{\Upsilon}_{-}, \quad \mathbf{P}_{-} = -2k_{\perp} \boldsymbol{\Upsilon}_{+}$$

приходим к следующему соотношению для вихревой части поля перемещений:

$$\underset{*}{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Upsilon}_{-} + \boldsymbol{\Upsilon}_{+}$$

Таким образом, произвольное решение гармонического векторного уравнения теории упругости всегда представляется в форме (5.2), составляющие которой должны удовлетворять несвязанным уравнениям (5.3).

6. Заключение. 1. Исследуется трехмерное векторное дифференциальное уравнение линейной теории упругости в случае гармонической зависимости поля перемещений от времени.

2. Обсуждаются уравнения для скалярного и векторного потенциала, задающих поле перемещений в соответствии с представлением Ламе, выполнение которых обеспечивает выполнение основного векторного уравнения линейной теории упругости.

3. Показано, что теория гармонической задачи может быть развита, не опираясь на какое бы то ни было калибровочное условие, навязываемое на векторный потенциал поля перемещений.

4. Предложена альтернативная схема расщепления векторного дифференциального уравнения Ламе сначала на два, а затем на три несвязанных дифференциальных уравнения.

5. Вводится понятие о гамма-векторах, определяющих сложность форм дифференциальных уравнений в процессе расщепления уравнения Ламе. Гамма-векторы удовлетворяют винтовому уравнению и образуют винтовое векторное поле.

6. Найдено общее представление гамма-вектора через вихревое векторное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца.

7. Сформулирована и доказана теорема о полноте рассматриваемых в работе представлений гармонического поля перемещений с помощью двух винтовых векторных полей.

Работа выполнена по теме государственного задания (госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00844 Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саусвелл Р.В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 676 с.

2. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 192 с.

3. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. 220 с.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. Изд. третье. М.: Наука, 1965. 204 с.

5. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.

6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.

8. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

9. *Truesdell C., Toupin R.* The Classical Field Theories / Encyclopedia of Physics. V. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Berlin—Gottingen—Heidelberg: Springer, 1960. P. 226—902.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 2, с. 157–164

УДК 539.374,539.214

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

© 2021 г. Н. В. Минаева[a],*, Д. В. Сабынин[a]

[a] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**e-mail: nminaeva@yandex.ru*

Поступила в редакцию 01.11.2020 г.
После доработки 15.11.2020 г.
Принята к публикации 02.12.2020 г.

Найдено решение методом возмущений с точностью до величин второго порядка малости, описывающее состояние неоднородной упругопластической толстостенной трубы, находящейся под действием сжимающих усилий. Отклонения контура поперечного сечения трубы от окружности и неоднородность материала характеризуются независимыми малыми параметрами. Получено условие, при выполнении которого в случае экспериментального анализа состояния трубы средние значения напряжений и перемещений будут близки к значениям при осесимметричном состоянии.

Ключевые слова: толстостенная труба, метод малого параметра, сходимость, стохастическая неоднородность

DOI: 10.31857/S0572329921020136

Разработка аналитических методов решения стохастических задач сталкивается с серьезными трудностями, основными из которых являются нелинейность определяющих уравнений. Одним часто используемых методов аналитического решения стохастических краевых задач является метод возмущений. В [1, 2] разработаны методы решений стохастических краевых задач для квазиоднородных линейноупругих материалов. Применение метода малого параметра при исследовании напряженно-деформированного состояния упругопластических тел приведено в монографии Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова [3]. Влияние случайных возмущений механических характеристик материалов на поля деформации и напряжений исследуется во многих работах [4–7]. В [6, 7] метод малого параметра используется при исследовании влияния стохастических неоднородностей материала в задачах ползучести. Было получено аналитическое решение краевой задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего давления до третьего приближения [7]. В работах [8, 9] используется метод малого параметра при решении нелинейных краевых задач для элементов конструкций с возмущенными границами. Этот подход связан с трудностями вычислительного характера, поэтому при решении конкретных стохастических задач обычно ограничиваются первым приближением.

Оценка погрешности решений и анализ сходимости полученных разложений проводились в основном в некоторых частных случаях, а также путем сравнения с известными точными или численными решениями [6, 10, 11].

Вопросы получения решений краевых задач с более высоким порядком членов разложения для неодномерных задач, проблема сходимости решений пока остаются мало изученными.

В данной работе рассматривается поведение неоднородной упругопластической толстостенной трубы с поперечным сечением, близком к круговому кольцу, при сжатии. Труба выполнена из несжимаемого материала, находится под действием сжимающих внутреннего и внешнего давлений. В упругой области ее состояние описывается решением следующей задачи [3]:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^e}{\partial\theta}+\frac{\sigma_\rho^e-\sigma_\theta^e}{\rho}=0,\quad \frac{\partial\tau^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^e}{\partial\theta}+\frac{2\tau^e}{\rho}=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial u^e}{\partial\rho}+\frac{\partial v^e}{\partial\theta}+u^e=0 \tag{2}$$

$$\sigma_\rho^e-\sigma_\theta^e=4\frac{\partial u^e}{\partial\rho},\quad \tau^e=\frac{\partial v^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^e}{\partial\theta}-\frac{v^e}{\rho} \tag{3}$$

$$\sigma_n^e\Big|_{\rho=\Psi_2(\theta)}=-q_2;\quad \tau_n^e\Big|_{\rho=\Psi_2(\theta)=0} \tag{4}$$

В пластической зоне уравнения равновесия и условие несжимаемости имеют вид аналогичный (1), (2). Реологические соотношения будут следующими:

$$(\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p)^2+4(\tau^p)^2=4k^2,\quad 4\frac{\partial u^p}{\partial\rho}\tau^p-\left(\frac{\partial v^p}{\partial\rho}-\frac{v^p}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^p}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^p-\sigma_\theta^p)=0 \tag{5}$$

Граничные условия на внутреннем контуре трубы

$$\sigma_n^p\Big|_{\rho=\Psi_1(\theta)}=-q_1,\quad \tau_n^p\Big|_{\rho=\Psi_1(\theta)}=0 \tag{6}$$

В (1)–(6) характеристики материала примем в виде $G=1+\varepsilon_1 f_1(\theta)$, $k=k_0/G_0+\varepsilon_1 f_1(\theta)$, где k_0 – предел текучести однородного материала. Все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю упругости однородного материала G_0. Компоненты вектора перемещений отнесены к внешнему радиусу сечения. Функции $\Psi_1(\theta)$, $\Psi_2(\theta)$ описывают форму поперечного сечения трубы в деформированном состоянии. В ненагруженном эти контуры с точностью до малых параметров характеризуются функциями $r=\alpha+\varepsilon_2 f_2(\theta)$ и $r=1+\varepsilon_2 f_2(\theta)$. Здесь ε_1 и ε_2 – независимые случайные величины. К (1)–(6) следует добавить условия сопряжения решений на контуре $\rho=\rho_s(\theta)$, отделяющем пластическую зону от упругой [3].

Воспользуемся методом возмущений для решения задачи, согласно которому:

$$\sigma_\rho^p=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sigma_\rho^{mnp}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n$$

$$\sigma_\theta^p=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sigma_\theta^{mnp}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n,\ \ldots\ v^e=\sum_{m,n=0}^{\infty}v^{mne}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n \tag{7}$$

$$\rho_s=\sum_{m,n=0}^{\infty}\rho_s^{mn}(\theta)\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n$$

где в качестве нулевого приближения используется осесимметричное решение

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{0p} = 2\kappa\ln\rho + C_1; \quad \sigma_\theta^{0p} = 2\kappa + 2\kappa\ln\rho + C_1,\\ \sigma_\rho^{0e} = A\rho^{-2} + C_2; \quad \sigma_\theta^{0e} = -A\rho^{-2} + C_2\\ \tau^{0p} = \tau^{0e} \equiv 0; \quad u^{0p} = u^{0e} = -A\rho^{-1}, \quad v^{0p} = v^{0e} \equiv 0\\ \kappa = \pm k/G, \quad A = -\frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2, \quad C_1 = -q_1 - 2\kappa\ln\left[\alpha + \frac{\kappa}{2\alpha}(\rho_s^0)^2\right]\\ C_2 = \kappa - q_2 + 2\kappa\ln\rho_s^0 - 2\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2\alpha}\rho_s^0\right]\end{gathered} \tag{8}$$

Величина ρ_s^0 находится из уравнения

$$q_2 - q_1 + \kappa - 2\kappa\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2}\rho_s^0\alpha^{-1}\right] - \kappa(\rho_s^0)^2\left[1 + \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2\right]^{-2} = 0 \tag{9}$$

Ряды (7) будут сходящимися, если удовлетворяются требования, содержащиеся в критерии аналитичности по малым параметрам в окрестности $\varepsilon_i = 0$ $(i = 1, 2)$ [13]. В результате проведенных исследований было получено следующее условие

$$q_1 - q_2 = q_*, \quad q_1 - q_2 = q_{**} \tag{10}$$

Здесь через q_* наибольший отрицательный корень системы уравнений (9) и (11) при $q_2 = 0$, $\kappa = -k/G$,

$$\begin{gathered}\Delta = \kappa(\rho_s^0)^4\left\{\kappa(\rho_s^0)^2\alpha^{-2} - 1 - \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2 - \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^{-2} + 2\kappa\ln\frac{\alpha}{\rho_s^0} + \right.\\ \left. + \left[(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2}\rho_s^0\right]^4\right\} = 0\end{gathered} \tag{11}$$

а через q_{**} – наименьший положительный корень этой системы уравнений при $q_2 = 0$, $\kappa = k/G$.

Таким образом, если значения параметров сжимающих усилий q_1, q_2 не выходят за пределы области, ограниченной (10), то решение исходной задачи будет аналитическими функциями параметров ε_i в окрестности точки $\varepsilon_i = 0$.

Для определения компонент разложения (7) были получены задачи, в которых уравнения равновесия, условие несжимаемости аналогичны (1) и (2), а реологические соотношения и граничные условия принимают вид:

Для компонент с индексом “10”

$$\sigma_\rho^{10e} - \sigma_\theta^{10e} = 4\frac{\partial u^{10e}}{\partial\rho}, \quad \tau^{10e} = \frac{\partial v^{10e}}{\partial\rho} - \frac{v^{10e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10e}}{\partial\theta} \tag{12}$$

$$\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p} = 0, \quad 4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{10p} = \left(\frac{\partial v^{10p}}{\partial\rho} - \frac{v^{10p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) \tag{13}$$

при $\rho = g_0 = \rho_0 + u^0(\rho_0)$ ($\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = \alpha$)

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{10} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}\left[\left(1 - \frac{u^0(\rho_0)}{\rho_0}\right)f_2(\theta) + u^{10}(\theta, \rho_0)\right] = 0\\ \tau^{10} + \frac{\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0}{\rho}\left[\left(1 - \frac{u^0(\rho_0)}{\rho_0}\right)\frac{df_2}{d\theta} + \frac{\partial u^{10}(\theta, \rho_0)}{\partial\theta}\right] = 0\end{gathered} \tag{14}$$

Для компонент с индексом “01”

$$(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p}) = 4\kappa f_1(\theta),$$
$$4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{01p} = \left(\frac{\partial v^{01p}}{\partial\rho} - \frac{v^{01p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) \tag{15}$$

$$\sigma_\rho^{01e} - \sigma_\theta^{01e} = 4\left(\frac{\partial u^{01e}}{\partial\rho} + f_1(\theta)\frac{\partial u^{0e}}{\partial\rho}\right),$$
$$\tau^{01e} = \frac{\partial v^{01e}}{\partial\rho} - \frac{v^{01e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01e}}{\partial\theta} + f_1(\theta)\tau^{0e} \tag{16}$$

при $\rho = g_0 = \rho_0 + u^0(\rho_0)$ ($\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = \alpha$)

$$\sigma_\rho^{01} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}u^{01p}(\theta,\rho_0) = 0, \quad \tau^{01} + \frac{\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0}{\rho}\frac{\partial u^{01}}{\partial\theta}(\theta,\rho_0) = 0 \tag{17}$$

Вид граничных условий (14) при пренебрежении u^{10} соответствуют приведенным в [3], а условия (17) с точностью до обозначений совпадает с полученными в [12].

Для компонент с индексом “20” реологические соотношения упругой зоны аналогичны (12), а для пластической области принимают вид

$$2(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{20p} - \sigma_\theta^{20p}) + (\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p})^2 + 4(\tau^{10p})^2 = 0$$
$$4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{20p} - \left(\frac{\partial v^{20p}}{\partial\rho} - \frac{v^{20p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{20p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) = \tag{18}$$
$$= \left(\frac{\partial v^{10p}}{\partial\rho} - \frac{v^{10p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p}) - 4\frac{\partial u^{10p}}{\partial\rho}\tau^{10p}$$

Граничные условия при $\rho = g_0 = \rho_0 + u^0(\rho_0)$ ($\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = \alpha$) следующие:

$$\sigma_\rho^{20} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}g^{20} + \frac{\partial\sigma_\rho^{10}}{\partial\rho}g^{10} + \frac{1}{2}\frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}(g^{10})^2 + (\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)\left(\frac{\dot g^{10}}{g^0}\right)^2 - 2\tau^{10}\frac{\dot g^{10}}{g^0} = 0;$$
$$\tau^{20} + \left(\frac{\partial(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)}{\partial\rho}\frac{\dot g^{10}}{g^0} + \frac{\partial\tau^{10}}{\partial\rho}\right)g^{10} + \tag{19}$$
$$+ (\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0)\left(\frac{g^{10}\dot g^{10}}{(g^0)^2} - \frac{\dot g^{20}}{g^0}\right)^2 + (\sigma_\rho^{10} - \sigma_\theta^{10})\frac{\dot g^{10}}{g^0} = 0$$

Здесь точка наверху означает дифференцирование по θ.

Для приближения “02” физические соотношения имеют вид

$$\sigma_\rho^{02e} - \sigma_\theta^{02e} = 4\left(\frac{\partial u^{02e}}{\partial\rho} + f_1(\theta)\frac{\partial u^{01e}}{\partial\rho}\right)$$
$$\tau^{02e} = \frac{\partial v^{02e}}{\partial\rho} - \frac{v^{02e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{02e}}{\partial\theta} + f_1(\theta)\left(\frac{\partial v^{01e}}{\partial\rho} - \frac{v^{01e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01e}}{\partial\theta}\right)$$
$$2(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{02p} - \sigma_\theta^{02p}) + (\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p})^2 + 4(\tau^{01p})^2 = 4\left(f_1(\theta)\right)^2 \tag{20}$$
$$4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{02p} - \left(\frac{\partial v^{02p}}{\partial\rho} - \frac{v^{02p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{02p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) =$$
$$= \left(\frac{\partial v^{01p}}{\partial\rho} - \frac{v^{01p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p}) - 4\frac{\partial u^{01p}}{\partial\rho}\tau^{01p}$$

Граничные условия в этом случае аналогичны (19), в которых следует индексы “20” и “10” заменить соответственно на “02” и “01”.

Для приближения “11” получены реологические соотношения в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho^{11e} - \sigma_\theta^{11e} = 4\left(\frac{\partial u^{11e}}{\partial\rho} + f_1(\theta)\frac{\partial u^{10e}}{\partial\rho}\right)\\
\tau^{11e} = \frac{\partial v^{11e}}{\partial\rho} - \frac{v^{11e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{11e}}{\partial\theta} + f_1(\theta)\left(\frac{\partial v^{10e}}{\partial\rho} - \frac{v^{10e}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10e}}{\partial\theta}\right)\\
(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{11p} - \sigma_\theta^{11p}) + (\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p})(\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p}) + 4\tau^{01p}\tau^{10p} = 0\\
4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{11p} - \left(\frac{\partial v^{11p}}{\partial\rho} - \frac{v^{11p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{11p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) =\\
= \left(\frac{\partial v^{01p}}{\partial\rho} - \frac{v^{01p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{01p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p}) + \left(\frac{\partial v^{10p}}{\partial\rho} - \frac{v^{10p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{01p} - \sigma_\theta^{01p}) -\\
- 4\left(\frac{\partial u^{10p}}{\partial\rho}\tau^{01p} + \frac{\partial u^{01p}}{\partial\rho}\tau^{10p}\right)
\end{gathered} \tag{21}$$

Граничные условия при $\rho = g_0 = \rho_0 + u^0(\rho_0)$ ($\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = \alpha$) такие

$$\begin{gathered}
\sigma_\rho^{11} + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho}g^{11} + \frac{d^2\sigma_\rho^0}{d\rho^2}g^{01}g^{10} + \frac{\partial\sigma_\rho^{01}}{\partial\rho}g^{10} + \frac{\partial\sigma_\rho^{10}}{\partial\rho}g^{01} = 0\\
\tau^{11} + \frac{\partial\tau^{01}}{\partial\rho}g^{10} + \frac{\partial\tau^{10}}{\partial\rho}g^{01} = 0
\end{gathered} \tag{22}$$

В (19), (22) компоненты разложения функции, характеризующей контуры сечения трубы в деформированном состоянии, будут следующими (с учетом $v^0 = 0$, $\dot g_0 = 0$):

$$g^{10}(\theta,\rho_0) = u^{10} + \left(\frac{du^0}{d\rho} + 1\right)f_2(\theta), \quad g^{01}(\theta,\rho_0) = u^{01}$$

$$g^{20}(\theta,\rho_0) = u^{20} + \frac{d^2u^0}{d\rho^2}\frac{(f_2(\theta))^2}{2} + f_2(\theta)\frac{\partial u^{10}}{\partial\rho} + \frac{(v^{10})^2 - (u^{10})^2 - 2u^{10}\left(\frac{du^0}{d\rho} + 1\right)f_2(\theta) - 2v^{10}\dot g^{10}}{2g_0}$$

$$g^{02}(\theta,\rho_0) = u^{02} + \frac{(v^{01})^2 - 2v^{01}\dot g^{01}}{2g_0},$$

$$g^{11}(\theta,\rho_0) = u^{11} + f_2(\theta)\frac{\partial u^{01}}{\partial\rho} + \frac{v^{01}v^{10} - v^{01}\dot g^{10} - v^{10}\dot g^{01}}{g_0}$$

Условия сопряжения при $\rho = \rho_s^0 + u^0(\rho_s^0)$ имеют вид вполне аналогичный соотношениям из [3].

Поскольку задачи, включающие (18)–(22), весьма сложны для нахождения аналитического решения, ограничимся рассмотрением часто встречающегося на практике случая, когда $|A/\rho_0| \ll 1$.

Для функций, характеризующих отклонение свойств материала трубы от однородных и контуров сечения от окружностей, $f_i(\theta) = \cos\theta$ ($i = 1, 2$) было найдено решение с точностью до величин второго порядка малости.

Поскольку случайные величины ε_1 и ε_2 являются независимыми, то

$$\langle\sigma_\rho^p\rangle = \sigma_\rho^{0p} + \langle\varepsilon_1^2\rangle\sigma_\rho^{20p} + \langle\varepsilon_2^2\rangle\sigma_\rho^{02p}, \ldots, \langle v^e\rangle = v^{0e} + \langle\varepsilon_1^2\rangle v^{20e} + \langle\varepsilon_2^2\rangle v^{02e} \tag{23}$$

где

$$\sigma_\rho^{20p} = \frac{\sqrt{3}}{\rho}\left(-C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) + C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{(C_1^{10})^2}{2\sqrt{3}\kappa\rho}\right)\cos 2\theta + \frac{(C_1^{10})^2}{4\kappa\rho^2}$$

$$\sigma_\theta^{20p} = -\frac{\sqrt{3}}{\rho}(C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho))\cos 2\theta - \frac{(C_1^{10})^2}{4\kappa\rho^2}$$

$$\tau^{20p} = \frac{\sqrt{3}}{2\rho}\left((C_1^{20} - \sqrt{3}C_2^{20})\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - (C_2^{20} + \sqrt{3}C_1^{20})\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \frac{(C_1^{10})^2}{2\sqrt{3}\kappa\rho}\right)\sin 2\theta$$

$$u^{20p} = -\left(\left(2C_3^{20} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_2^{20}\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(2C_4^{20} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_1^{20}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{C_1^{10}\rho_s^0}{6\kappa\rho^3} - \frac{C_1^{10}C_3^{10}}{2\kappa\rho}\right)\cos 2\theta$$

$$v^{20p} = \left(\left(C_3^{20} + \sqrt{3}C_4^{20} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_2^{20} + \sqrt{3}C_1^{20})\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(C_4^{20} - \sqrt{3}C_3^{20} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_1^{20} - \sqrt{3}C_2^{20})\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{C_1^{10}\rho_s^0}{6\kappa}\rho^{-3}\right)\sin 2\theta$$

$$\sigma_\rho^{20e} = 4(2C_5^{20}\rho^{-2} - C_6^{20} + 3C_7^{20}\rho^{-4})\cos 2\theta + \frac{3}{4}A\rho^{-2}$$

$$\sigma_\theta^{20e} = 4(C_6^{20} + 6C_8^{20}\rho^2 - 3C_7^{20}\rho^{-4})\cos 2\theta - \frac{3}{4}A\rho^{-2}$$

$$\tau^{20e} = 4(C_5^{20}\rho^{-2} + C_6^{20} + 3C_7^{20}\rho^{-4} + 3C_8^{20}\rho^2)\sin 2\theta$$

$$u^{20e} = -2(C_5^{20}\rho^{-1} + C_6^{20}\rho + C_7^{20}\rho^{-3} + C_8^{20}\rho^3 + C_9^{20})\cos 2\theta - \frac{3}{4}A\rho^{-1}$$

$$v^{20e} = (2C_6^{20}\rho - 2C_7^{20}\rho^{-3} + 4C_8^{20}\rho^3 - C_9^{20})\sin 2\theta, \quad \rho_s^{20} = C_9^{20}\cos 2\theta$$

$$\sigma_\rho^{02p} = \frac{\sqrt{3}}{\rho}\left(-C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) + C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho) - \frac{(C_2^{01})^2}{2\sqrt{3}\kappa\rho} - \frac{2C_2^{01}}{3\sqrt{3}\kappa}\right)\cos 2\theta + \frac{(C_2^{01})^2}{4\kappa\rho^2} + \frac{2C_2^{01}}{3\kappa\rho} + \frac{1}{9\kappa}$$

$$\sigma_\theta^{02p} = -\frac{\sqrt{3}}{\rho}(C_1^{20}\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - C_2^{20}\cos(\sqrt{3}\ln\rho))\cos 2\theta - \frac{(C_2^{01})^2}{4\kappa\rho^2} + \frac{1}{9\kappa};$$

$$\tau^{02p} = \frac{2\sqrt{3}}{\rho}\left((C_1^{02} - \sqrt{3}C_2^{02})\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - (C_2^{02} + \sqrt{3}C_1^{02})\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \frac{(C_2^{01})^2}{8\sqrt{3}\kappa\rho}\right)\sin 2\theta;$$

$$u^{02p} = -\left(\left(2C_3^{02} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_2^{02}\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \left(2C_4^{02} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}C_1^{02}\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) - \right.$$

$$\left. - \frac{(C_2^{01})^2\rho_s^0}{8\kappa}\rho^{-3} - \frac{17C_2^{01}\rho_s^0}{84}\rho^{-2} + \left(\frac{\rho_s^0}{18} + \frac{C_2^{01}C_4^{01}}{4}\right)\rho^{-1} - \frac{2}{9}C_4^{01}\right)\cos 2\theta;$$

$$v^{02p} = \left(\left(C_3^{02} + \sqrt{3}C_4^{02} - \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_2^{02} + \sqrt{3}C_1^{02})\right)\cos(\sqrt{3}\ln\rho) + \right.$$

$$\left. + \left(C_4^{02} - \sqrt{3}C_3^{02} + \frac{\sqrt{3}}{4}\rho_s^0\rho^{-2}(C_1^{02} - \sqrt{3}C_2^{02})\right)\sin(\sqrt{3}\ln\rho) + \frac{(C_2^{01})^2\rho_s^0}{4\kappa}\rho^{-3} + \frac{17C_2^{01}\rho_s^0}{84}\rho^{-2} - \frac{2}{9}C_4^{01}\right)\sin 2\theta$$

$$\sigma_\rho^{02e} = \left(-4C_5^{02} + 8C_6^{02}\rho^{-2} + 12C_8^{02}\rho^{-4} - \frac{4}{15}C_5^{01}\rho + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{4A}{3}\rho^{-2}\ln\rho + \frac{5A}{3}\rho^{-2}\right)\cos 2\theta + 4C_5^{01}\rho + \frac{4}{3}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{4A}{3}\rho^{-2}$$
$$\sigma_\theta^{02e} = \left(4C_5^{02} + 24C_7^{02}\rho^2 - 12C_8^{02}\rho^{-4} + \frac{8}{5}C_5^{01}\rho - \frac{8}{15}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{A}{3}\rho^{-2}\right)\times$$
$$\times\cos 2\theta + 8C_5^{01}\rho - \frac{8}{3}C_6^{01}\rho^{-3} - \frac{4A}{3}\rho^{-2}$$
$$\tau^{02e} = \left(4C_5^{02} + 4C_6^{02}\rho^{-2} + 12C_7^{02}\rho^2 + 12C_8^{02}\rho^{-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{16}{15}C_5^{01}\rho + \frac{16}{15}C_6^{01}\rho^{-3} + \frac{A}{3}\rho^{-2}(\ln\rho + 1)\right)\sin 2\theta$$
$$u^{02e} = -2\left(C_5^{02}\rho + C_6^{02}\rho^{-1} + C_7^{02}\rho^3 + C_8^{02}\rho^{-3} + \right.$$
$$\left. + C_9^{02} - \frac{2}{15}C_5^{01}\rho^2 - \frac{2}{15}C_6^{01}\rho^{-2} + \frac{A}{6}\rho^{-1}\ln\rho\right)\cos 2\theta$$
$$v^{02e} = \left(2C_5^{02}\rho + 4C_7^{02}\rho^3 - 2C_8^{02}\rho^{-3} - C_9^{02} - \frac{2}{5}C_5^{01}\rho^2 + \frac{2}{15}C_6^{01}\rho^{-2} + \frac{A}{6}\rho^{-1}\right)\sin 2\theta,$$
$$\rho_s^{02} = C_9^{02}\cos 2\theta$$

Выражения для констант C_k^{ij} достаточно громоздкие и поэтому не приводятся.

Из (23) следует, что в случае экспериментального исследования среднестатистические значения напряжений и перемещений будут отличаться от значений, соответствующих осесимметричному состоянию (8), на величину $\langle\varepsilon_i^2\rangle$ при условии, что параметры внешних воздействий содержатся внутри полосы (10). Если же характеристики материала, размеры поперечного сечения и сжимающие усилия таковы, что нарушается условие (10), то среднестатистические значения напряжений и перемещений превзойдут значения, соответствующие нулевому приближению (8), более, чем на величину второго порядка малости. В этом случае (7) уже не являются сходящимися рядами, позволяющими определять напряженно-деформированного состояния трубы с заданной погрешностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 137 с.
2. *Ломакин В.А., Шейнин В.И.* Статистические характеристики полей напряжений в случайно-неоднородной упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 124–130.
3. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
4. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. 208 с.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
6. *Радченко В.П., Попов Н.Н.* Использование метода малого параметра для решения стохастических нелинейных задач теории установившейся ползучести // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). С. 185–194.
7. *Должковой А.А., Попов Н.Н., Радченко В.П.* Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 1. С. 161–171.
8. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Выща школа, 1989. 352 с.

9. *Качанов Л.М.* Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра // ПММ. 1948. Т. 12. № 4. С. 375–386.
10. *Кунташев П.А., Немировский Ю.В.* О сходимости метода возмущений в задачах теории упругости неоднородных тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 75–78.
11. *Башканкова Е.А., Вакаева А.Б., Греков М.А.* Метод возмущений в задаче о почти круговом отверстии в упругой плоскости // Изв. РАН МТТ. 2015. № 2. С. 106–117.
12. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
13. *Минаева Н.В.* Метод возмущений в механике деформируемых тел. М.: Научная книга, 2002. 156 с.