



*Российская Академия Наук*

**М.В. Хлебников**

**Квадратичная стабилизация  
дискретной билинейной системы  
управления: техника линейных  
матричных неравенств**

Москва 2017

УДК 512.644  
ББК 22.1  
Х55

ISBN 978-5-906906-13-7

© Российская академия наук, 2017  
© М.В. Хлебников, 2017

# Квадратичная стабилизация дискретной билинейной системы управления: техника линейных матричных неравенств

**М.В. Хлебников**

*доктор физико-математических наук*

**Аннотация:** *В статье рассматривается проблема стабилизации дискретной билинейной системы управления. На основе техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова предложен регулярный подход к построению так называемого эллипсоида стабилизируемости такого, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю.*

*Предложенный подход позволяет эффективно строить невыпуклые области стабилизируемости дискретных билинейных систем управления. Полученные результаты распространены на робастную постановку задачи – со структурированной неопределенностью в матрице системы*

## 1. Введение

Задачам, связанным со стабилизацией билинейных систем управления, посвящено множество публикаций; большая их часть была инициирована появлением знаменитой монографии [1], см. также работы [2–4]. Вопросам стабилизации билинейных систем управления с помощью релейных управлений посвящены публикации [5, 6], см. также [7–10]. Среди разнообразных подходов к решению соответствующих задач отметим поиск линейных преобразований, переводящих билинейную систему в управляемую линейную [11, 12]; другое известное направление связано с использованием наблюдателя [13, 14].

В работах [15,16] ищутся способы построения линейного управления в билинейных системах на основе достаточных условий устойчивости квадратичных систем дифференциальных

уравнений. В публикациях [13, 17] предпринимаются попытки эллипсоидального подхода к рассматриваемой проблематике; множество публикаций посвящено построению нелинейных законов управления для стабилизации билинейных систем, см., например, [18–21] и др.

Ряд недавних публикаций посвящен дискретным билинейным системам управления, см. [22, 23]; большая их часть ограничивается вопросами управляемости. В работах [17, 24] для стабилизации билинейных систем используются квадратичные функции Ляпунова.

Настоящая статья существенно отличается от упомянутых: помимо новой постановки задачи, в ней ставится и решается задача максимизации эллипсоида стабилизируемости по критерию объема. Кроме того, в отличие от указанных выше работ, в статье ставится и решается новая задача построения области стабилизируемости. Наконец, в статье используется новая техника, основанная на специальной модификации известной леммы Питерсена. А именно в настоящей работе на основе техники линейных матричных неравенств [25] и модификации леммы Питерсена предложен регулярный подход к стабилизации дискретной билинейной системы управления с помощью статической линейной обратной связи по состоянию. При этом в пространстве состояний системы строится эллипсоид (так называемый эллипсоид стабилизируемости) такой, что траектории замкнутой системы, начинаясь в нем, асимптотически стремятся к нулю. Естественное развитие данного подхода позволило просто и эффективно конструировать области стабилизируемости дискретных билинейных систем управления. Подчеркнем, что предложенный подход, базирующийся на решении задач выпуклой оптимизации, позволяет строить *невыпуклые* области стабилизируемости билинейных систем.

Статья ограничивается рассмотрением дискретных билинейных систем со скалярным управлением, однако предложенный подход в полной мере распространяем и на системы с многомерным управлением. При этом выкладки становятся несколько более громоздкими, в то время как идейная сторона меняется мало.

В дальнейшем изложении все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц:  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы;  $^T$  – символ транспонирования;  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим билинейную систему управления в дискретном времени

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k + Dx_k u_k, \quad (1)$$

с начальным состоянием  $x_0$ , фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$  и скалярным управлением  $u_k \in \mathbb{R}$ , где  $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Будем искать управление в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = k^\top x_k, \quad k \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

квадратично стабилизирующее билинейную систему (1) внутри некоторого эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x_k \in \mathbb{R}^n: x_k^\top P^{-1} x_k \leq 1\}, \quad P > 0,$$

с центром в начале координат. Иными словами, траектория системы (1), замкнутой управлением (2), исходящая из любой точки  $x_0$  внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$ , асимптотически стремится к нулю.

Эллипсоид  $\mathcal{E}$  будем называть *эллипсоидом стабилизируемости*, соответствующим управлению (2). В дальнейшем естественно стремиться максимизировать эллипсоид стабилизируемости по некоторому критерию.

Далее зададимся целью описать более сложно устроенное множество, которое вместе с каждой своей точкой  $x_0$  содержит некоторый эллипсоид стабилизируемости для системы (1); будем называть это множество *областью стабилизируемости* дискретной билинейной системы (с помощью статической линейной обратной связи по состоянию).

Наконец, полученные результаты будут обобщены на робастную постановку задачи – когда в матрице билинейной системы управления присутствует структурированная матричная неопределенность.

## 3. Вспомогательный результат: лемма Питерсена

Пусть  $G \in \mathbb{S}^{n \times n}$  – вещественная симметричная матрица; рассмотрим ее возмущение вида

$$G + M\Delta N^\top + N\Delta^\top M^\top, \quad (3)$$

где  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n \times q}$  – постоянные «обрам-

ляющие» матрицы соответствующих размерностей, задающие структуру неопределенности.

Подчеркнем, что в этой схеме симметричное возмущение задается с помощью матрицы  $\Delta$ , которая не обязана быть симметричной и даже квадратной.

Такая симметризованная схема структурированной неопределенности естественным образом возникает в задачах, связанных с построением квадратичной функции Ляпунова для динамической системы, матрица которой содержит произвольную, но ограниченную по норме матричную неопределенность  $\Delta$ . Именно этим фактом прежде всего объясняется многообразие приложений, в которых встречается модель (3).

Следующий результат, известный под названием *лемма Питерсена* [26], эффективно применяется в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. Лемма Питерсена отвечает на вопрос, при каких условиях возмущенная матрица (3) остается знакоопределенной при всех ограниченных по норме возмущениях  $\Delta$ ; приведем ее в следующей формулировке.

**Лемма 1.** (Питерсен). Пусть  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n \times q}$ . Неравенство

$$G + M\Delta N^T + N\Delta^T M^T < 0$$

справедливо для всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}; \quad \|\Delta\| \leq 1$$

тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^T & N \\ N^T & -\varepsilon I \end{pmatrix} < 0.$$

Таким образом, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства  $G + M\Delta N^T + N\Delta^T M^T$  с матричной неопределенностью  $\Delta$  к задаче разрешимости матричного неравенства относительно одной скалярной переменной  $\varepsilon$ .

Некоторые обобщения леммы Питерсена рассмотрены в работах [27, 28]. Следующая ее модификация охватывает случай векторной неопределенности, удовлетворяющей эллипсоидальному ограничению.

**Лемма 2.** Пусть  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $N \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $0 \prec Q = Q^T \in \mathbb{R}^{q \times q}$ .

Матричное неравенство

$$G + M\delta N^T + N\delta^T M^T \prec 0$$

справедливо для всех

$$\delta \in \mathbb{R}^q: \quad \delta^T Q \delta \leq 1$$

тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G & M & N \\ M^T & -\varepsilon Q & 0 \\ N^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} \prec 0.$$

В дальнейшем изложении этот результат будет использоваться самым существенным образом. Важно отметить, что для всех допустимых  $\Delta$  справедлива простая оценка

$$G + M\Delta N^T + N\Delta^T M^T \preceq G + \frac{1}{\varepsilon} M Q^{-1} M^T + \varepsilon N N^T \quad (4)$$

для любого  $\varepsilon > 0$ .

## 4. Основной результат

Замкнув систему (1) линейной обратной связью по состоянию (2), приходим к замкнутой системе

$$x_{k+1} = A_c x_k + D x_k k^T x_k \quad (5)$$

с матрицей  $A_c = A + b k^T$ .

Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q \succ 0,$$

которая будет служить функцией Ляпунова для замкнутой системы (5) при выполнении условия

$$V(x_{k+1}) < V(x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Вычислив на траекториях системы величину

$$\begin{aligned}
 V(x_{k+1}) &= x_{k+1}^\top Q x_{k+1} = \\
 &= (A_c x_k + D x_k k^\top x_k)^\top Q (A_c x_k + D x_k k^\top x_k) = \\
 &= x_k^\top A_c^\top Q A_c x_k + x_k^\top A_c^\top Q D x_k k^\top x_k + x_k^\top k x_k^\top D^\top Q A_c x_k + \\
 &+ x_k^\top k x_k^\top D^\top Q D x_k k^\top x_k = x_k^\top (A_c^\top Q A_c + A_c^\top Q D x_k k^\top + k x_k^\top D^\top Q A_c + \\
 &+ k x_k^\top D^\top Q D x_k k^\top) x_k,
 \end{aligned}$$

приходим к условию

$$\begin{aligned}
 x_k^\top (A_c^\top Q A_c + A_c^\top Q D x_k k^\top + k x_k^\top D^\top Q A_c + \\
 + k x_k^\top D^\top Q D x_k k^\top) x_k < x_k^\top Q x_k.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условия

$$A_c^\top Q A_c + A_c^\top Q D x_k k^\top + k x_k^\top D^\top Q A_c + k x_k^\top D^\top Q D x_k k^\top < Q$$

квадратичная форма  $V(x)$  будет служить функцией Ляпунова для замкнутой системы (5).

Полученное условие представим в блочно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} A_c^\top Q A_c - Q + A_c^\top Q D x_k k^\top + k x_k^\top D^\top Q A_c & k x_k^\top D^\top Q \\ Q D x_k k^\top & -Q \end{pmatrix} < 0$$

или

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} A_c^\top Q A_c - Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_c^\top Q D \\ Q D \end{pmatrix} x_k \begin{pmatrix} k^\top & 0 \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} x_k^\top \begin{pmatrix} D^\top Q A_c & D^\top Q \end{pmatrix} < 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Потребуем, чтобы матричное неравенство (6) выполнялось при всех  $x_k$  из эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x_k \in \mathbb{R}^n: V(x_k) \leq 1\} = \{x_k \in \mathbb{R}^n: x_k^\top Q x_k \leq 1\}.$$

При этом внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  квадратичная форма  $V(x_k)$  будет служить функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Воспользовавшись леммой 2, приходим к эквивалентному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A_c^T Q A_c - Q & 0 & A_c^T Q D & k \\ 0 & -Q & Q D & 0 \\ D^T Q A_c & D^T Q & -\varepsilon Q & 0 \\ k^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (7)$$

**Замечание 1.** Из разрешимости матричного неравенства (7) вытекает (см. [29]), что матрица  $A_c$  шуровская. Это означает, что искомое управление (2) стабилизирует линейную систему

$$x_{k+1} = A x_k + b u_k. \quad (8)$$

Далее, применив к (7) лемму Шура [31], приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A_c^T Q A_c - Q & A_c^T Q D & k \\ D^T Q A_c & D^T Q D - \varepsilon Q & 0 \\ k^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} \prec 0$$

представимому в виде

$$\begin{pmatrix} -Q & 0 & k \\ 0 & -\varepsilon Q & 0 \\ k^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_c^T \\ D^T \\ 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} A_c & D & 0 \end{pmatrix} \prec 0,$$

откуда по лемме Шура имеем

$$\begin{pmatrix} -Q & 0 & k & A_c^T \\ 0 & -\varepsilon Q & 0 & D^T \\ k^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I & 0 \\ A_c & D & 0 & -Q^{-1} \end{pmatrix} \prec 0.$$

Обозначив  $P = Q^{-1}$  и умножив полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

приходим к соотношению

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & Pk & P(A + bk^T)^T \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^T \\ k^T P & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I & 0 \\ (A + bk^T)P & DP & 0 & -P \end{pmatrix} < 0.$$

Далее введем вспомогательную векторную переменную

$$y = Pk \in \mathbb{R}^n,$$

исключая  $k$ ; при этом в силу  $P \succ 0$  вектор  $k$  восстанавливается единственным образом:  $k = P^{-1}y$ . В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^T + yb^T \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^T \\ y^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I & 0 \\ AP + by^T & DP & 0 & -P \end{pmatrix} < 0$$

со скалярным параметром  $\varepsilon$ , линейному относительно матричной переменной  $P$  и векторной переменной  $y$ .

Таким образом, получен следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть матрица  $P$  и вектор  $y$  удовлетворяют матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^T + yb^T \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^T \\ y^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I & 0 \\ AP + by^T & DP & 0 & -P \end{pmatrix} < 0$$

при некотором значении скалярного параметра  $\varepsilon$ .

Тогда линейная обратная связь (2) с регулятором

$$k = P^{-1}y$$

стабилизирует систему (1) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T P^{-1}x \leq 1\}.$$

При этом квадратичная форма

$$V(x) = x^T P^{-1}x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы (5) внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$ .

Естественно стараться максимизировать эллипсоид стабилизируемости по некоторому критерию. В данной работе будем максимизировать его объем; в результате получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть  $\hat{P}, \hat{y}$  – решение задачи выпуклой оптимизации

$$\max \log \det P$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^T + yb^T \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^T \\ y^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^T & DP & 0 & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (9)$$

относительно матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , и скалярного параметра  $\varepsilon$ .

Тогда

$$\hat{\mathcal{E}} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T \hat{P}^{-1}x \leq 1\}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для системы (1), замкнутой линейной обратной связью (2) с регулятором

$$\hat{k} = \hat{P}^{-1}\hat{y}.$$

Сделаем важное техническое замечание. Задача, сформулированная в следствии 1, предполагает минимизацию целевой функции при *строгом* ограничении (9); для ее корректного решения рассмотрим нестрогое матричное неравенство

## Квадратичная стабилизация дискретной билинейной системы управления

$$\begin{pmatrix} -\mu P & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \quad (10)$$

при некотором  $0 < \mu < 1$ , на которое и заменим ограничение (9). Матричное неравенство (10) эквивалентно

$$\begin{pmatrix} A_c^\top QA_c - \mu Q & 0 & A_c^\top QD & k \\ 0 & -Q & QD & 0 \\ D^\top QA_c & D^\top Q & -\varepsilon Q & 0 \\ k^\top & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

откуда с учетом (4) имеем

$$A_c^\top QA_c + A_c^\top QDx_kk^\top + kx_k^\top D^\top QA_c + kx_k^\top D^\top QDx_kk^\top \preccurlyeq \mu Q,$$

поэтому

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) &= x_k^\top (A_c^\top QA_c + A_c^\top QDx_kk^\top + kx_k^\top D^\top QA_c + \\ &\quad + kx_k^\top D^\top QDx_kk^\top) x_k \leq x_k^\top (\mu Q) x_k = \mu V(x_k). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем простую оценку скорости убывания функции Ляпунова:

$$V(x_k) \leq \mu^k V(x_0).$$

Наконец, из (10) вытекает, что

$$(A + bk^\top)P(A + bk^\top)^\top \prec \mu P,$$

т.е.

$$\left(\frac{A + bk^\top}{\sqrt{\mu}}\right)P\left(\frac{A + bk^\top}{\sqrt{\mu}}\right)^\top \prec P,$$

откуда заключаем, что спектральный радиус матрицы  $A_c = A + bk^\top$  замкнутой системы (5) заведомо меньше  $\sqrt{\mu}$ .

**Пример 1.** Рассмотрим билинейную систему в дискретном времени вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Воспользовавшись следствием 1, находим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1.4062 & 0.5314 \\ 0.5314 & 0.4248 \end{pmatrix}$$

максимального по критерию объема эллипса стабилизируемости и соответствующий регулятор

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.6209 \end{pmatrix}.$$

При этом спектральный радиус матрицы замкнутой системы равен  $\rho(A_c) = 0.6209$ , тогда как  $\rho(A) = 1.6180$ .

Соответствующий эллипс стабилизируемости и фазовая траектория замкнутой системы показаны на рис. 1.

Эти и последующие вычисления выполнялись в среде MATLAB с использованием программного пакета cvx [30].

## 5. Область стабилизируемости билинейной системы

В предыдущем разделе был найден эллипсоид стабилизируемости  $\mathcal{E}$  для дискретной билинейной системы (1). Теперь зададимся целью описать гораздо более сложно устроенное множество  $\mathcal{A}$ , которое вместе с каждой своей точкой  $x_0$  содержит некоторый эллипсоид стабилизируемости для системы (1):

$$x_0 \in \mathcal{E} \subset \mathcal{A}.$$

Множество  $\mathcal{A}$  будем называть *областью стабилизируемости* дискретной билинейной системы (1) с помощью статической линейной обратной связи по состоянию.

Подчеркнем, что, в отличие от эллипсоида стабилизируемости, всем точкам которого соответствует общий стабилизирующий регулятор, здесь ситуация принципиально иная: различным точкам области стабилизируемости могут соответствовать различные регуляторы, стабилизирующие систему (1).

Мы покажем, что по произвольному вектору  $c$  можно эффективно построить точку, лежащую на границе множества  $\mathcal{A}$  по направлению  $c$ . Нахождение соответствующей точки сводится к решению задачи выпуклой оптимизации. Отметим, что поскольку множество  $\mathcal{A}$  по существу является объединением эллипсоидов стабилизируемости, то в общем случае оно может оказаться невыпуклым.

Итак, выберем направление, определяемое вектором с единичной длины, и будем требовать принадлежности точки  $\gamma c$  эллипсоиду стабилизируемости, максимизируя параметр  $\gamma$ . Этого нетрудно добиться в рамках предложенного подхода, основанного на технике линейных матричных неравенств. В самом деле, условие

$$(\gamma c)^\top P^{-1}(\gamma c) \leq 1$$

принадлежности точки  $\gamma c$  эллипсоиду с матрицей  $P$  представимо по лемме Шура в линейном по  $P$  и  $\gamma$  эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma c^\top \\ \gamma c & P \end{pmatrix} \succeq 0.$$

В следующей теореме устанавливается простая характеристика множества  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $c$  – заданный вектор, а  $\hat{\gamma}$  – решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P \end{pmatrix} \prec 0, \begin{pmatrix} 1 & \gamma c^\top \\ \gamma c & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (12)$$

где оптимизация проводится по матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярной переменной  $\varepsilon$  и скалярному параметру  $\gamma$ .

Тогда точка  $\gamma c$  лежит на границе области стабилизируемости  $\mathcal{A}$  по направлению  $c$  для дискретной билинейной системы (1).

Как и раньше, для корректного решения задачи первое из ограничений (12) может быть заменено на линейное матричное неравенство (10).

**Пример 2.** На рис. 2 показана область стабилизируемости  $\mathcal{A}$  для системы из примера 1. Для сравнения пунктиром показан найденный выше эллипс стабилизируемости для рассматриваемой системы.

## 6. Робастная постановка задачи

Этот раздел посвящен робастным модификациям полученных выше результатов в случае, когда в матрице билинейной системы управления присутствует неопределенность.

Итак, рассмотрим билинейную систему управления

$$x_{k+1} = (A + F\Delta H)x_k + bu_k + Dx_k u_k, \quad (13)$$

где  $A, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , с начальным состоянием  $x_0$ , фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , скалярным управлением  $u_k \in \mathbb{R}$  и матричной неопределенностью

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}: \quad \|\Delta\| \leq 1.$$

Будем искать управление в форме статической линейной обратной связи по состоянию (2), квадратично стабилизирующее систему (13) внутри некоторого эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

при всех допустимых неопределенностях  $\Delta$ .

Иными словами, траектория системы (13), замкнутой управлением (2), исходя из любой точки  $x_0$  внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$ , будет асимптотически стремиться к нулю при всех допустимых  $\Delta$ . Такой эллипсоид  $\mathcal{E}$  будем называть *робастным эллипсоидом стабилизируемости*, соответствующим управлению (2).

**Замечание 2.** Обратим внимание на то, что матричная неопределенность  $\Delta$  не предполагается фиксированной; единственное требование – ее ограниченность по норме. Таким образом, полученные далее результаты справедливы в том числе и для нестационарной неопределенности  $\|\Delta(t)\| \leq 1$ .

## Квадратичная стабилизация дискретной билинейной системы управления

Итак, воспользовавшись результатом теоремы 1, приходим к соотношению

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & P(A + F\Delta H)^\top + yb^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ (A + F\Delta H)P + by^\top & DP & 0 & -P \end{pmatrix} \prec 0,$$

которому можно придать вид

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F^\top \end{pmatrix} \prec 0.$$

Воспользовавшись леммой 1, получаем эквивалентное условие существования  $\varepsilon_1$  такого, что

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^\top + yb^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P \end{pmatrix} + \\ + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F^\top \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \prec 0,$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top & 0 \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P + \varepsilon_1 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \prec 0.$$

В результате приходим к следующему робастному аналогу теоремы 1.

**Теорема 3.** Пусть матрица  $P$  и вектор  $y$  удовлетворяют матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top & 0 \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P + \varepsilon_1 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \prec 0 \quad (14)$$

при некоторых значениях скалярных параметров  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$ .

Тогда линейная обратная связь (2) с регулятором

$$k = P^{-1}y$$

робастно стабилизирует билинейную систему (13) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P^{-1}x \leq 1\}$$

при всех допустимых неопределенностях.

При этом квадратичная форма

$$V(x) = x^\top P^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  при всех допустимых  $\Delta$ .

**Замечание 3.** Из разрешимости матричного неравенства (14) вытекает, что матрица  $A_c = A + F\Delta H + bk^\top$  замкнутой системы (13) является шуровской при всех допустимых значениях неопределенности  $\Delta$ .

Следующий результат является робастным аналогом следствия 1.

**Следствие 2.** Пусть  $\hat{P}, \hat{y}$  – решение задачи выпуклой оптимизации

$$\max \log \det P$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top & 0 \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P + \varepsilon_1 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \prec 0 \quad (15)$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярной переменной  $\varepsilon_1$  и скалярного параметра  $\varepsilon$ .

Тогда

$$\hat{\mathcal{E}} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top \hat{P}^{-1} x \leq 1\}$$

является робастным эллипсоидом стабилизируемости для системы (13), замкнутой линейной обратной связью (2) с регулятором

$$\hat{k} = \hat{P}^{-1} \hat{y}.$$

Для корректного решения сформулированной в следствии 2 оптимизационной задачи строгое матричное неравенство (15) заменим на нестрогое неравенство

$$\begin{pmatrix} -\mu P & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^\top & 0 \\ y^\top & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & DP & 0 & -P + \varepsilon_1 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (16)$$

при некотором  $0 < \mu < 1$ , гарантирующее, что спектральный радиус матрицы  $A_c$  замкнутой системы (13) не превосходит  $\sqrt{\mu}$ .

**Пример 3.** Рассмотрим систему вида (13) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \delta_1 & 1 + \delta_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ -0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\|(\delta_1 \quad \delta_2)\| \leq 0.2.$$

Иными словами, в матрицу  $A$  системы из примера 1 привнесены неопределенности  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , удовлетворяющими указанному ограничению.

В соответствии со следствием 2 при

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = 0.2I$$

находим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.8189 & 0.2900 \\ 0.2900 & 0.2853 \end{pmatrix}$$

максимального по критерию объема эллипса робастной стабилизируемости и соответствующий регулятор

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5633 \end{pmatrix}.$$

На рис. 3 сплошной линией показан полученный эллипс робастной стабилизируемости для системы (17). Для сравнения пунктиром показан максимальный эллипс стабилизируемости для системы (11) без неопределенностей, см. пример 1.

Перейдем к вопросу построения *области робастной стабилизируемости*  $\mathcal{A}_{\text{роб}}$ , вместе с каждой своей точкой  $x_0$  содержащей некоторый робастный эллипсоид стабилизируемости для системы (13). Как и в неробастном случае, будем искать точку, лежащую на границе множества  $\mathcal{A}_{\text{роб}}$  по направлению произвольного вектора  $s$ .

Следующая теорема является робастным аналогом теоремы 2.

**Теорема 4.** Пусть  $c$  – заданный вектор и пусть  $\hat{\gamma}$  – решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & y & PA^T + yb^T & PH^T \\ 0 & -\varepsilon P & 0 & PD^T & 0 \\ y^T & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^T & DP & 0 & -P + \varepsilon_1 FF^T & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma c^T \\ \gamma c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $y \in \mathbb{R}^n$ , скалярным переменным  $\gamma, \varepsilon_1$  и скалярному параметру  $\varepsilon$ .

Тогда точка  $\hat{\gamma}$  лежит на границе области робастной стабилизируемости  $\mathcal{A}_{\text{роб}}$  по направлению  $c$  для системы (13).

Как и ранее, для корректного решения задачи первое из ограничений может быть заменено на нестрогое линейное матричное неравенство (16).

**Пример 4.** На рис. 4 показана область робастной стабилизируемости для билинейной системы (17); пунктиром показан максимальный эллипс робастной стабилизируемости, см. пример 3. Для сравнения, на рис. 5 пунктиром показана область робастной стабилизируемости для системы (17), сплошной линией – область стабилизируемости для системы (11).

## 7. Заключение

Предложен регулярный подход к решению задачи стабилизации дискретной билинейной системы управления. На основе техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова предложен подход к построению так называемого эл-

липсоида стабилизируемости. Полученные результаты позволяют эффективно конструировать невыпуклые области стабилизируемости дискретных билинейных систем управления.

Предложенный подход легко реализуем с вычислительной и технической точек зрения, а полученные результаты могут быть распространены на иные робастные постановки задач, на билинейные системы с многомерным управлением, а также на билинейные системы, подверженные воздействию внешних возмущений.

Автор признателен Б.Т. Поляку за интерес к работе, плодотворные обсуждения и полезные предложения.

## Иллюстрации

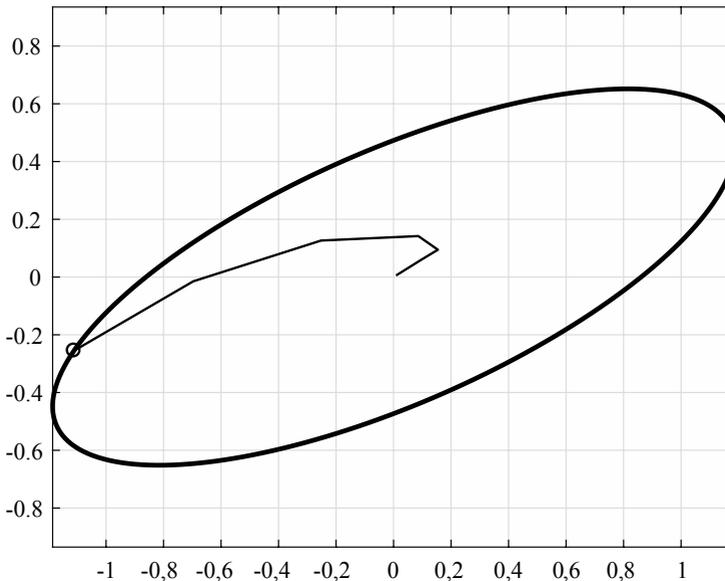


Рис. 1. Эллипс стабилизируемости из примера 1

## Квадратичная стабилизация дискретной билинейной системы управления

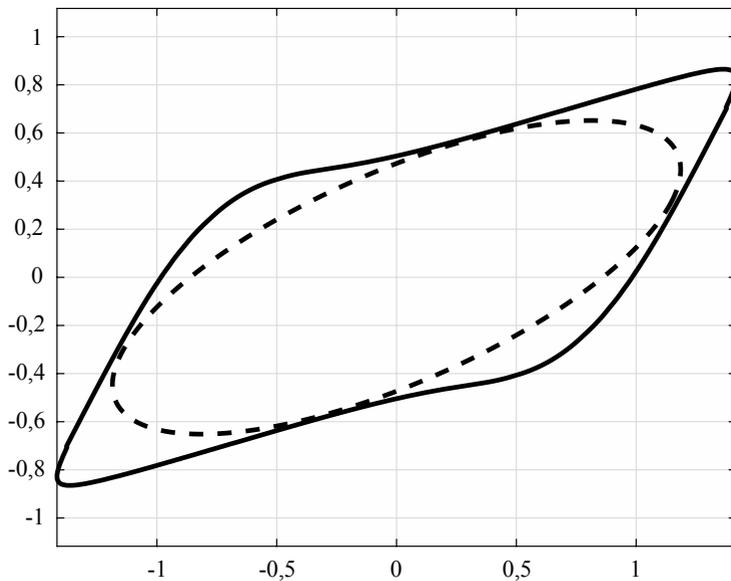


Рис. 2. Область стабилизируемости из примера 2

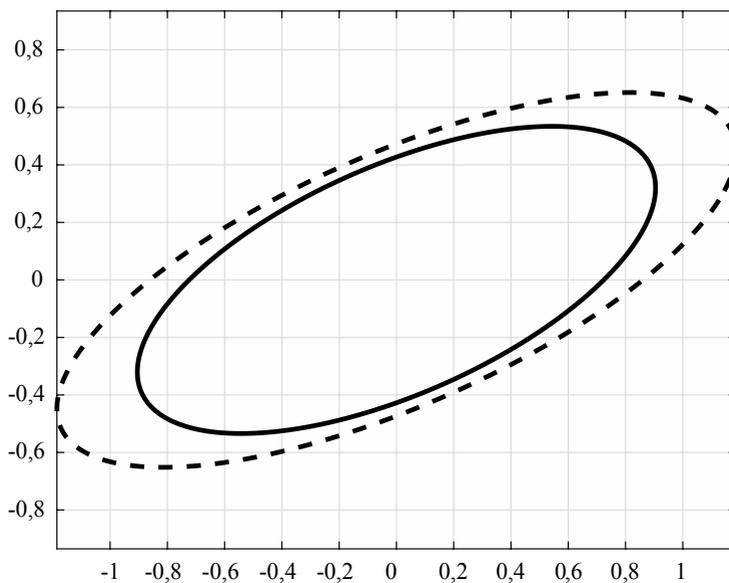


Рис. 3. Эллипс робастной стабилизируемости из примера 3

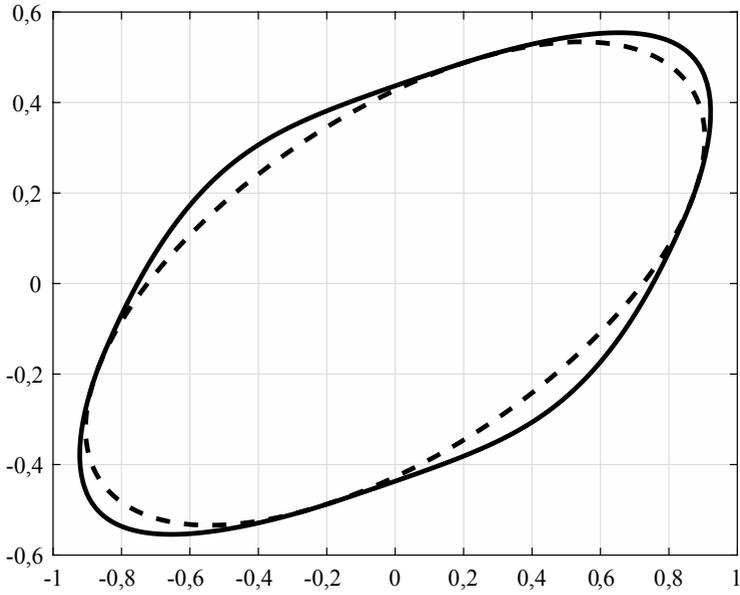


Рис. 4. Область робастной стабилизируемости из примера 4

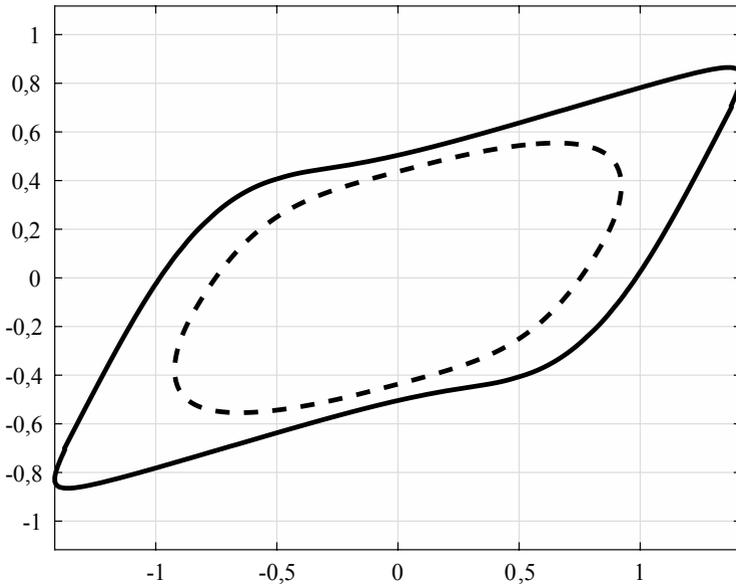


Рис. 5. Области стабилизируемости из примеров 2 и 4

## Список литературы

1. Mohler R.R. Bilinear Control Processes. N.Y.: Academic Press, 1973.
2. Khalil H.K. Nonlinear Systems. N.Y.: Prentice Hall, 2002.
3. Isidori A. Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995.
4. Krsti'c M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. Nonlinear and Adaptive Control Design. N.Y.: Wiley, 1995.
5. Емельянов С.В., Крищенко А.П. Стабилизируемость билинейных систем канонического вида // Доклады Академии наук. 2012. Т. 445. № 6. С. 636–639.
6. Емельянов С.В., Коровин С.К., Шепитько А.С. Стабилизация билинейных систем на плоскости посредством постоянных и релейных управлений // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1021–1028.
7. Ryan E., Buckingham N. On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1983. V. 28. № 8. P. 863–864.
8. Chen L.K., Yang X., Mohler R.R. Stability Analysis of Bilinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. V. 36. № 11. P. 1310–1315.
9. Фомичев В.В., Шепитько А.С. Метод вращающих функций Ляпунова в задаче стабилизации двумерных билинейных систем // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1136–1138.
10. Hu B., Zhai G., Michel A.N. Stabilization of Two-Dimensional Single-Input Bilinear Systems with a Finite Number of Constant Feedback Controllers // Proc. American Control Conference (ACC 2002). Anchorage, USA, May 2002. V. 3. P. 1874–1879.
11. Čelikovský S. On the Global Linearization of Bilinear Systems // Systems & Control Letters. 1990. V. 15. № 5. P. 433–439.
12. Čelikovský S. On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Systems & Control Letters. 1993. V. 21. № 6. P. 503–510.
13. Tibken B., Hofer E.P., Sigmund A. The Ellipsoid Method for Systematic Bilinear Observer Design // Proc. 13th IFAC World Congress. San Francisco, USA, June–July 1996. P. 377–382.
14. Коровин С.К., Фомичев В.В. Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // ДАН. Теория управления. 2004. Т. 398. № 1. С. 38–43.
15. Belozyorov V.Y. Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2002. V. 11. № 2. P. 493–511.
16. Belozyorov V.Y. On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential Equations // Journal of Dynamical and Control Systems. 2005. V. 11. № 3. P. 329–351.

17. *Amato F., Cosentino C., Merola A.* Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control // IEEE Transactions on Circuits and Systems II. Express Briefs. 2009. V. 56. № 1. P. 76–80.
18. *Andrieu V., Tarbouriech S.* Global Asymptotic Stabilization for a Class of Bilinear Systems by Hybrid Output Feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. V. 58. № 6. P. 1602–1608.
19. *Coutinho D., de Souza C.E.* Nonlinear State Feedback Design with a Guaranteed Stability Domain for Locally Stabilizable Unstable Quadratic Systems // IEEE Transactions on Circuits and Systems I. Regular Papers. 2012. V. 59. № 2. P. 360–370.
20. *Omran H., Hetel L., Richard J.-P., Lamnabhi-Lagarrigue F.* Stability Analysis of Bilinear Systems under Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2014. V. 50. № 4. P. 1288–1295.
21. *Kung C.-C., Chen T.-H., Chen W.-C., Su J.-Y.* Quasi-Sliding Mode Control for a Class of Multivariable Discrete Time Bilinear Systems // Proc. 2012 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). Seoul, Korea, October 2012. P. 1878–1883.
22. *Goka T., Tarn T.J., Zaborszky J.* On the Controllability of a Class of Discrete Bilinear Systems // Automatica. 1973. V. 9. № 5. P. 615–622.
23. *Tie L., Lin Y.* On Controllability of Two-Dimensional Discrete-Time Bilinear Systems // International Journal of Systems Science. 2015. V. 46. № 10. P. 1741–1751.
24. *Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., Peres P.L.D.* Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece, June 2009. P. 809–814.
25. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan B.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
26. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Letters. 1987. V. 8. № 4. P. 351–357.
27. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // Автоматика и телемеханика. 2008. № 11. С. 125–139.
28. *Хлебников М.В.* Новые обобщения леммы Питерсена // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 137–142.
29. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
30. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
31. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

М. В. Хлебников

**Квадратичная стабилизация  
дискретной билинейной системы управления:  
техника линейных матричных неравенств**

Формат 60 x 84/16  
Гарнитура Таймс  
Усл. печ. л. 1,5. Усл. изд. л. 0,6  
Тираж 20 экз.

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати  
Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано на оборудовании Управления делами РАН

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением  
президиума Российской академии наук  
от 24 октября 2017 г. №10106-765,  
распространяется бесплатно.