

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 66, номер 4, 2021

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Связанные EBG-волноводы

*С. Е. Банков, В. И. Калинин, Е. В. Фролова* 315

Управление частотой согласования резонансного радиопоглотителя со свободным пространством

*Ю. Н. Казанцев, В. А. Бабаян, Н. Е. Казанцева, Г. А. Крафтмахер, В. П. Мальцев, В. С. Солосин* 327

Решение задачи рассеяния полупрозрачной полуплоскостью методом Малюжинца

*К. Клионовски, С. Е. Банков* 333

Влияние слоистости литосферы на возбуждение крайне низкочастотных электромагнитных волн горизонтальным диполем

*Е. Д. Терещенко, П. Е. Терещенко* 339

Обобщенная формула для эффективной диэлектрической проницаемости среды с эллипсоидальными включениями

*В. И. Пономаренко, И. М. Лагунов* 345

Самосогласованная задача о колебаниях и волнах, присоединенных к источникам

*А. С. Раевский, С. Б. Раевский, А. Ю. Седаков, А. А. Титаренко* 351

---

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Метод конструктивного синтеза плоских антенных решеток с учетом взаимной связи между элементами

*С. Е. Мищенко, В. В. Шацкий, А. В. Литвинов, Д. Ю. Елисеев* 356

Теоретическое и экспериментальное исследование электродинамических свойств плоских щелевых антенн микроволнового диапазона

*Е. И. Нефёдов, В. П. Заярный, И. Н. Пономарев* 365

Дистанционное восстановление диаграммы направленности фазированных антенных решеток

*В. И. Гусевский, М. Д. Дуленкова, О. Н. Цветкова* 373

---

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Алгоритм формирования сверхдлинных последовательностей Гордона–Милса–Велча

*В. Г. Стародубцев* 380

---

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

Резонансные изменения неоднородности электромагнитного поля в искусственном кристалле с ферромагнитными частицами

*А. Б. Ринкевич, Д. В. Перов* 386

Излучение электромагнитных волн при спиновой инжекции током  
в туннельном магнитном переходе со спейсером из NiO

*Е. А. Вилков, С. Г. Чигарев, И. В. Маликов, А. В. Черных, С. Н. Марышев*

395

---

### **ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА**

Структура электрического поля вблизи кромки катода при эмиссии в  $\rho$ -режиме

*В. А. Сыровой*

402

---

### **ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

Сверхпроводящие структуры для исследования и фазовой синхронизации  
интегральных генераторов терагерцового диапазона

*П. Н. Дмитриев, А. Б. Ермаков, Н. В. Кинев, О. С. Киселев, Л. В. Филиппенко,  
М. Ю. Фоминский, В. П. Кошелец*

410

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

### СВЯЗАННЫЕ ЕВГ-ВОЛНОВОДЫ

© 2021 г. С. Е. Банков<sup>а, \*</sup>, В. И. Калинин<sup>а</sup>, Е. В. Фролова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: sbankov@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.03.2020 г.

После доработки 11.03.2020 г.

Принята к публикации 17.04.2020 г.

Исследованы характеристики собственных волн двух связанных ЕВГ-волноводов в электромагнитном кристалле. Рассмотрены два варианта реализации распределенной связи: через решетку более тонких цилиндров, чем цилиндры кристалла, и через решетку емкостных цилиндров с зазорами между их торцами и одним из экранов. Показано, что во втором варианте появляется дополнительная четная волна, нарушающая непрерывность перехода четных волн, существующих в соответствующих предельных волноводных структурах.

DOI: 10.31857/S003384942104001X

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последнее время интенсивно исследуются устройства, выполненные на основе фотонных и электромагнитных кристаллов, которые используются как в оптическом, так и в микроволновом диапазонах [1–6]. Принцип их построения состоит в создании определенных дефектов в решетке искусственного кристалла, который находится в запрещенной для всех возможных в нем типов волн зоне [7]. В этих условиях в однородном кристалле отсутствуют распространяющиеся волны. Однако появление дефектов создает условия для направленного распространения электромагнитных волн вдоль них. Структуры подобного типа получили название РВГ (photonic band gap) волноводов в оптическом диапазоне и ЕВГ (electromagnetic band gap) волноводов в микроволновом диапазоне [8].

В СВЧ-диапазоне наибольшее распространение получили ЕВГ-волноводы на основе электромагнитных кристаллов (ЭМК) в виде периодической решетки металлических цилиндров, расположенных между металлическими экранами плоского волновода (ПВ) [9]. Их исследованию посвящены работы [10–12]. Отметим, что в них использовались приближенные численно-аналитические модели. Результаты, представленные в более поздних работах [13, 14], получены при помощи строгих численных решений граничных задач. В этих работах исследованы однородные ЭМК на основе цилиндров с емкостными зазорами [13] и волноводы различной рядности,

образованные в ЭМК со сплошными цилиндрами [14].

Связанные волноводы с распределенной связью относятся к числу типовых СВЧ-элементов. Их анализ является важным этапом исследования новой элементной базы волноводных устройств. Данная работа является продолжением работ [13, 14]. В ней мы рассматриваем систему двух одинаковых связанных ЕВГ-волноводов, которые являются основой для построения широко применяемых на практике устройств – направленных ответвителей с распределенной связью. Рассмотрены два варианта реализации распределенной связи. В первом варианте два одинаковых волновода связаны через решетку более тонких цилиндров, чем цилиндры кристалла, во втором в качестве элемента связи используется решетка емкостных цилиндров с зазорами между их торцами и одним из экранов.

Цель данной работы – исследование дисперсионных характеристик собственных волн связанных ЕВГ-волноводов и распределенной связи в направленных ответвителях (НО) на их основе. В силу симметрии исследуемой структуры собственные волны в ней разделяются на четные и нечетные относительно плоскости симметрии [15]. Наибольший практический интерес представляет изучение частотных зависимостей постоянных распространения этих волн, а также линейного коэффициента связи (ЛКС), от которого зависят характеристики НО на связанных волноводах.

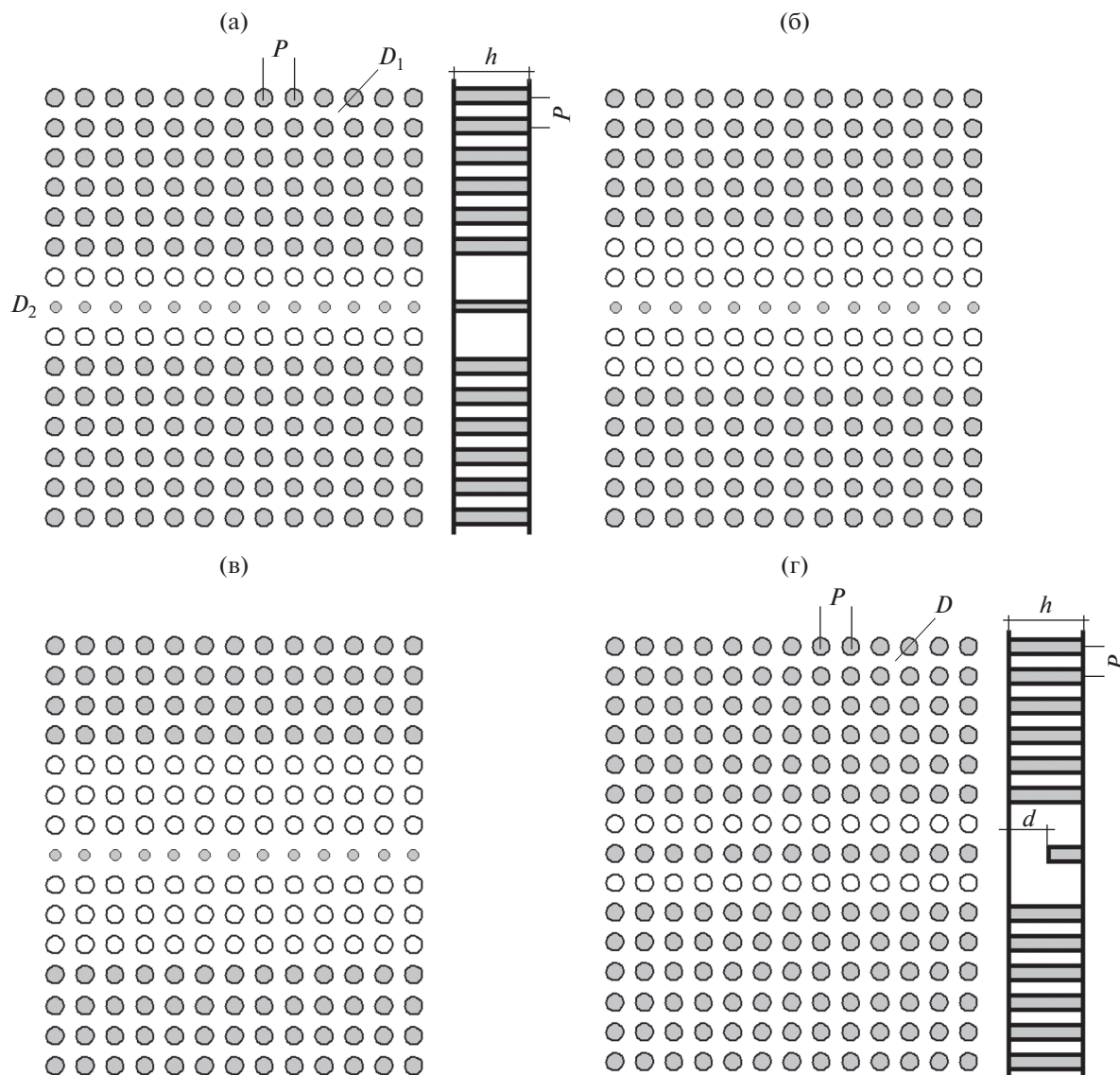


Рис. 1. Однорядные (а), двухрядные (б) и трехрядные (в) связанные EBG-волноводы с решеткой тонких цилиндров в общей стенке; однорядные связанные EBG-волноводы с решеткой емкостных цилиндров в общей стенке (г).

## 2. СТРУКТУРЫ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследуемые в данной работе связанные волноводы (рис. 1а–1г) отличаются рядностью, т.е. числом удаленных из ЭМК рядов цилиндров, которые формируют волноводной канал. На рис. 1а–1в показаны одно-, двух- и трехрядные EBG-волноводы с решеткой тонких цилиндров в общей стенке, диаметр которых меньше диаметра цилиндров кристалла; на рис. 1г – связанные однорядные волноводы с емкостными цилиндрами в общей стенке, диаметр которых равен диаметру цилиндров кристалла. Цилиндры в регулярном ЭМК сплошные и имеют контакт с обоими экранами ПВ. Расстояние между экранами  $h$ . Решетка цилиндров имеет квадратную сетку с одинаковыми

по двум координатам периодами  $P$ . Диаметр цилиндров в ЭМК обозначим через  $D_1$ . В вариантах на рис. 1а–1в элемент связи между волноводами выполнен в виде линейной решетки цилиндров с диаметром  $D_2 < D_1$  с периодом, равным периоду ЭМК. В варианте на рис. 1г с емкостными цилиндрами величину зазора обозначим через  $d$ . Предполагается, что величина  $d$  может изменяться с целью контроля степени связи между волноводами.

Метод исследования описан в работе [14]. Кратко рассмотрим его реализацию для случая связанных волноводов. Граничная задача на собственные волны решается для одного периода структуры (рис. 2). Отметим, что в силу наличия плоскости симметрии в структуре периода его анализ можно свести к решению двух задач для



парциальных структур, представляющих половины ширины периода. Эти структуры отличаются свойствами нижней стенки: электрическая стенка соответствует нечетным волнам, а магнитная – четным. Указанные виртуальные стенки расположены в плоскости симметрии исходной структуры, разделяя цилиндр в области связи на две половины.

На правой и левой стенках (см. рис. 2) установлены условия периодичности, связывающие поля на них. В граничных условиях имеется параметр  $\Delta\varphi$ , задающий фазовый сдвиг между полями на длине периода. Обозначим  $\Delta\varphi = \beta P$ , где  $\beta$  – постоянная распространения волны. Граничную задачу на собственные значения при заданной величине  $\Delta\varphi$  решаем с помощью программы HFSS трехмерного электромагнитного моделирования (<https://ansys.com>) в режиме *eigenmode*. В результате находим собственную частоту структуры  $f$ , являющуюся функцией переменной  $\Delta\varphi(\beta)$ . Изменяя  $\Delta\varphi$  в пределах от 0 до  $\pi$  и рассчитывая соответствующие значения  $f$ , находим дисперсионную характеристику собственной волны волновода  $\beta(f)$ .

По этой методике были найдены частотные зависимости постоянных распространения четной и нечетной волн  $\beta_{ч,н}$  и ЛКС  $C$ :

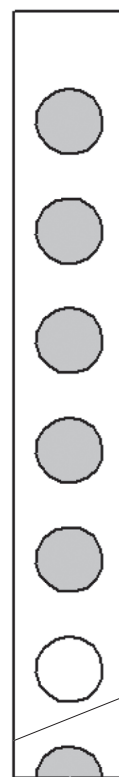
$$C = |\beta_{ч} - \beta_{н}|/2. \quad (1)$$

Отметим, что для структуры, показанной на рис. 1г с элементом связи в виде цилиндров с зазорами, ситуация отличается от обычно рассматриваемой в теории связанных линий [16]. Как правило, предполагают, что в системе связанных волноводов распространяются одна четная и одна нечетная волны. Такая ситуация рассматривается как одноволновый режим, в котором понятия четной и нечетной волн определяются однозначно. Однако в структуре на рис. 1г наличие зазоров между цилиндрами и экраном ПВ вызывает появление в спектре собственных волн дополнительной четной волны, которая при изменении зазора от 0 до  $h$  ведет к нарушению непрерывности перехода четных волн, существующих в соответствующих предельных волноводных структурах (подробнее см. далее, разд. 5).

### 3. ДИСПЕРСИЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН EBG-ВОЛНОВОДОВ С ТОНКИМИ ЦИЛИНДРАМИ В ОБЩЕЙ СТЕНКЕ НА УЧАСТКЕ СВЯЗИ

Сначала рассмотрим связанные EBG-волноводы с тонкими цилиндрами в общей стенке на участке связи (см. рис. 1а–1в). Исходя из физических представлений о том, что связь растет с ростом степени перекрытия полей связанных волноводов, можем предположить, что при достаточной степени прозрачности стенки, достигаемой при достаточно малом диаметре  $D_2$ , в данной структуре можно

Электрическая  
стенка



Условия  
периодичности

Электрическая  
или магнитная  
стенки

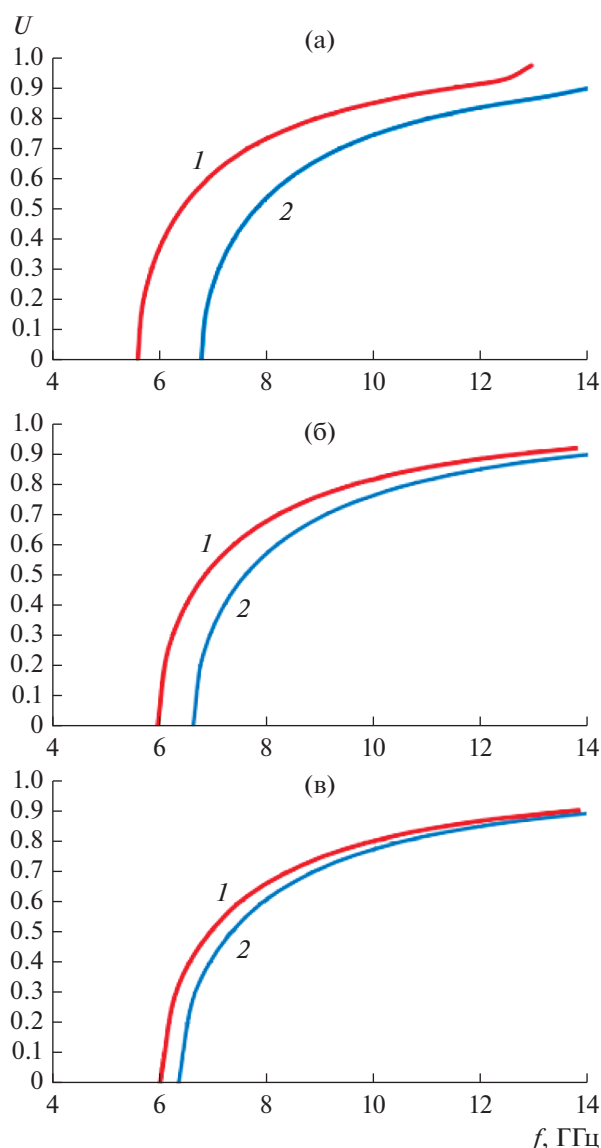
Рис. 2. Модель для численных расчетов.

получить требуемый уровень связи, например, часто используемый на практике режим равного деления входной мощности между двумя выходными плечами в НО.

По аналогии с другими типами волноводов определим относительную постоянную распространения волны  $\beta/k$  ( $k$  – волновое число свободного пространства) как ее коэффициент замедления  $U$ :  $U = \beta/k$ . Зависимость  $U$  от частоты будем называть дисперсионной кривой, или дисперсионной характеристикой. На рис. 3а–3в представлены примеры рассчитанных дисперсионных зависимостей для четной (кривые 1) и нечетной (кривые 2) собственных волн в системе связанных одно-, двух- и трехрядных EBG-волноводов с различными параметрами, указанными в табл. 1.

Видим, что с ростом рядности связанных волноводов при одном и том же диаметре  $D_2$  дисперсионные кривые четной и нечетной волн сближаются, что в соответствии с (1) приводит к уменьшению ЛКС.

Расчеты для других значений параметра  $D_2$  показывают, что с его уменьшением дисперсионные кривые для четных и нечетных волн расходятся,



**Рис. 3.** Дисперсионные кривые для собственных четных (1) и нечетных (2) волн системы связанных волноводов.

т.е. связь волноводов растет. И, наоборот: с ростом этого диаметра дисперсионные кривые для четных и нечетных волн сближаются, что приводит к уменьшению ЛКС. Такое поведение дис-

**Таблица 1.** Параметры (в мм) структур одно-, двух- и трехрядных ЕВГ-волноводов

Волновод	$P$	$D_1$	$D_2$
Однорядные	12	6	1
Двухрядные	8	4	1
Трехрядные	6	2	1

Примечание:  $D_1$  – диаметр цилиндров в кристалле,  $D_2$  – диаметр цилиндров в общей стенке на участке связи.

персионных кривых согласуется с физическим представлением о зависимости связи от прозрачности общей стенки и степени перекрытия полей связанных волноводов.

Примеры распределения напряженности электрического поля в поперечном сечении посередине длины периода для четной и нечетной волн в системе связанных однорядных волноводов на близких частотах в окрестности 10 ГГц приведены на рис 4а, 4б. Стрелки на них обозначают мгновенное направление вектора поля.

В качестве иллюстрации на рис. 5 показаны частотные зависимости ЛКС однорядных связанных волноводов для трех значений диаметра цилиндров в общей стенке.

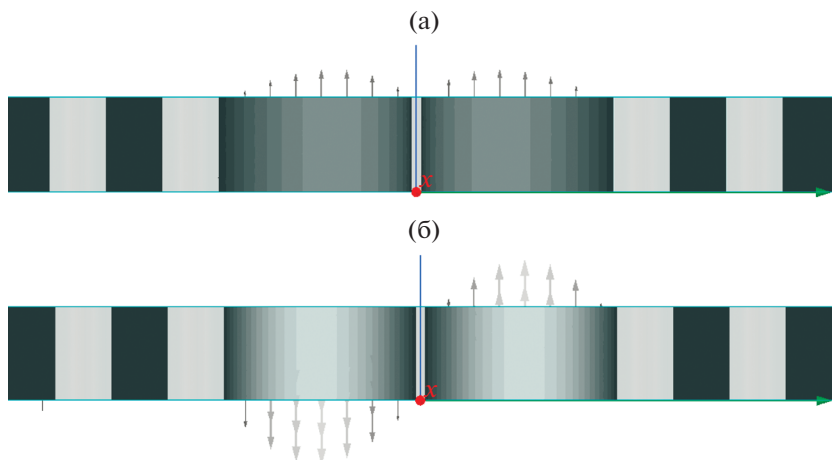
На рис. 6 представлены амплитуды коэффициента передачи из первого волновода во второй для двух связанных однорядных волноводов. Расчет проведен в рамках феноменологической теории связанных линий передачи по формуле  $S_{21} = \sin CL$ , где величина  $C$  определяется из графиков на рис. 3а и по формуле (1), длина участка связи  $L$  принимает три значения:  $5P$ ,  $6P$  и  $7P$ . В величине  $S_{21}$  индекс 1 обозначает входной порт первого волновода, индекс 2 – выходной порт второго волновода.

Характер зависимостей на рис. 6 позволяет предположить, что в рассмотренном диапазоне частот характеристика передачи в связанных однорядных волноводах имеет относительно слабую частотную зависимость. Это подтверждается далее расчетами элементов матрицы рассеяния НО.

#### 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ НА СВЯЗАННЫХ ЕВГ-ВОЛНОВОДАХ С ТОНКИМИ ЦИЛИНДРАМИ НА УЧАСТКЕ СВЯЗИ

Расчет дисперсионных характеристик собственных волн не является достаточным для определения характеристик НО, который представляет собой четырехполюсник (устройство с четырьмя плечами). Модель НО на связанных ЕВГ-волноводах показана на рис. 7. В этой модели два волновода на участке длиной  $L$  связаны через решетку цилиндров с уменьшенным диаметром по сравнению с диаметром цилиндров в ЭМК. Как уже отмечалось выше, использование тонких цилиндров позволяет добиться требуемой степени прозрачности общей стенки на участке связи. Модель НО содержит четыре выхода на прямоугольных металлических волноводах  $X$ -диапазона сечением  $23 \times 10$ .

Задача заключается в расчете элементов матрицы рассеяния такого НО. Для этого использовали ту же, что и выше, программу HFSS, в этом случае в режиме вынужденных колебаний. Ниже в этом разделе приведены результаты расчета модулей коэффициентов передачи  $|S_{ij}|$  ( $i = 1-4$ ) в



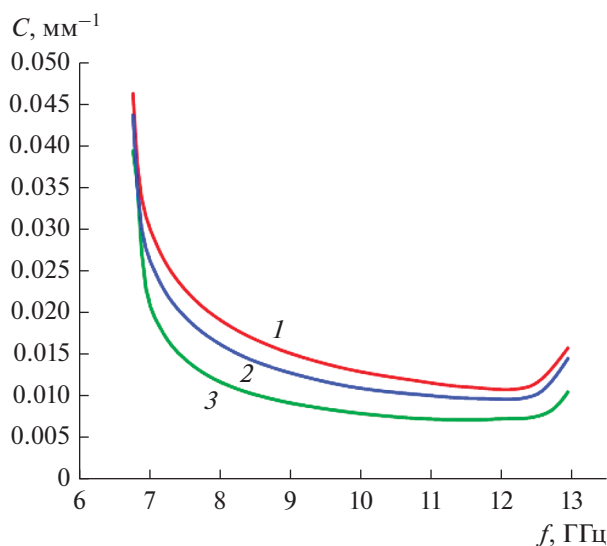
**Рис. 4.** Напряженность электрического поля четной волны на частоте 9.928 ГГц (а) и нечетной волны на частоте 9.936 ГГц (б) для связанных однорядных волноводов.

плечи такого НО на связанных волноводах различной рядности при возбуждении со стороны плеча 1. При этом величина  $|S_{11}|$  характеризует коэффициент отражения, величины  $|S_{21}|$  и  $|S_{31}|$  являются коэффициентами передачи в выходные плечи 2 и 3, а величина  $|S_{41}|$  показывает коэффициент изоляции входных плеч 1 и 4.

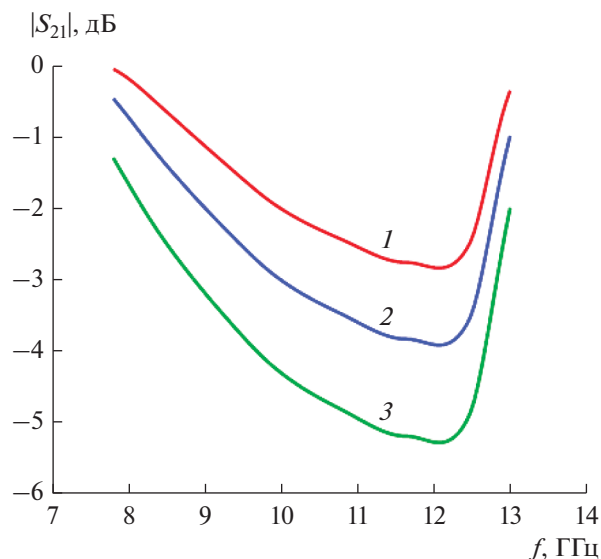
*Направленные ответвители на связанных однорядных волноводах.* На рис. 8а представлены результаты расчетов частотных характеристик НО в случае однорядных волноводов с периодом  $P = 12$  и с длиной участка связи  $L = 7P = 84$ . Видим, что коэффициенты передачи  $S_{21}$  и  $S_{31}$  сравнительно слабо изменяются по амплитуде в диапазоне ча-

стот 8.5...11.5 ГГц (относительная полоса 30%). Коэффициент отражения в этом диапазоне не превосходит  $-15$  дБ, за исключением узкой области частот в его нижней части. Коэффициент изоляции остается меньше  $-15$  дБ во всем указанном диапазоне. Режим равного деления мощности  $|S_{21}| = |S_{31}| \approx -3$  дБ при диаметре элементов связи  $D_2 = 1$  достигается на частоте 10.18 ГГц.

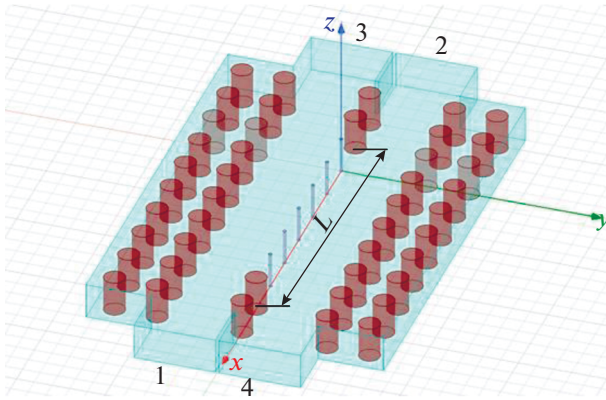
Если снизу рабочий диапазон частот ограничивается ростом отражения и ухудшением изоляции плеч 1 и 4, то сверху он ограничивается возникновением сильной неравномерности по частоте элемен-



**Рис. 5.** Частотные зависимости ЛКС для связанных однорядных волноводов для  $D_2 = 0.5$  (1), 1.0 (2), 2.0 (3) и  $P = 12$ ,  $D_1 = 6$ ,  $h = 10$ .



**Рис. 6.** Частотные зависимости модуля коэффициента передачи в связанных однорядных волноводах конечной длины  $L = 7P$  (1),  $6P$  (2),  $5P$  (3), рассчитанные в рамках феноменологической теории, при  $P = 12$ ,  $D_1 = 6$ ,  $D_2 = 1$ ,  $h = 10$ .

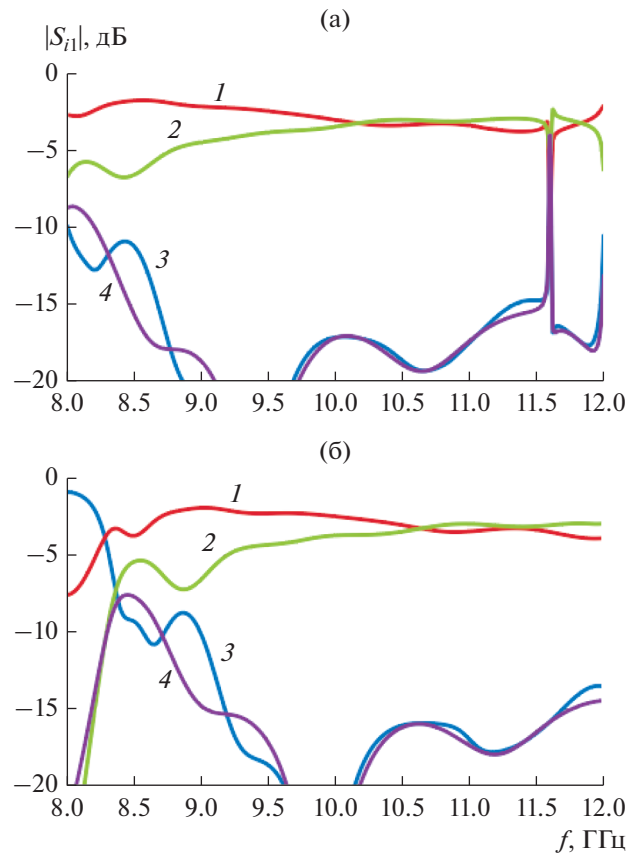


**Рис. 7.** Модель направленного ответвителя на связанных EBG-волноводах. Цифры обозначают номера плеч.

тов матрицы рассеяния. На рис. 8а эта неравномерность наблюдается на частотах выше 11.5 ГГц. Можно предполагать, что она обусловлена возбуждением на этих частотах высшего по ширине типа волны в связанных однорядных волноводах с периодом  $P = 12$ .

Для повышения критической частоты высшего типа волны и сдвига вверх по частоте области неравномерности частотных характеристик НО период структуры был немного уменьшен, до  $P = 11.5$ , при сохранении остальных параметров. Результаты расчетов для этого случая представлены на рис. 8б. Видим, что неравномерность в верхней части диапазона, присутствующая на рис. 8а, исчезла, но при этом в нижней части диапазона согласование и коэффициент изоляции ухудшились. Распределение поля в продольной плоскости связанных волноводов на рис. 9а демонстрирует интерференцию основного и высшего по ширине типов волн в структуре с периодом  $P = 12$ , что подтверждает предположение о влиянии высшего типа волны. В структуре с меньшим периодом  $P = 11.5$  в той же плоскости и на той же частоте распределение поля, показанное на рис. 9б, является более регулярным и характерным для одноволнового режима работы.

*Направленные ответвители на связанных двухрядных волноводах.* Далее провели исследование характеристик НО на связанных двухрядных волноводах с периодом  $P = 8$ . Дисперсия четной и нечетной собственных волн в такой структуре показана на рис. 3б. Модель НО аналогична показанной на рис. 7, однако из-за меньшего ЛКС и более слабого взаимодействия таких волноводов по сравнению с однорядными волноводами в этом случае для получения режима равного деления мощности между выходами 2 и 3 приходится увеличивать длину  $L$ . Оценка по (1) показывает, что, например, при диаметре цилиндров в общей стенке  $D_2 = 1$  для



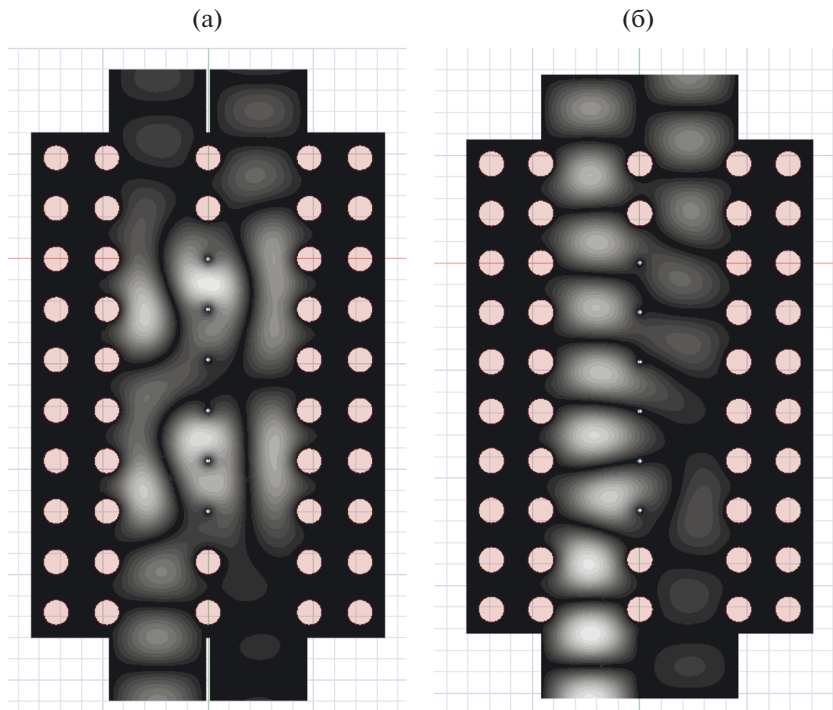
**Рис. 8.** Частотные зависимости модулей коэффициентов передачи в плечи НО на связанных однорядных волноводах при  $P = 12$  (а) и  $P = 11.5$  (б) для  $D_1 = 6$ ,  $D_2 = 1$ ,  $h = 10$ ,  $L = 7P$ :  $|S_{21}|$  (кривая 1),  $|S_{31}|$  (2),  $|S_{11}|$  (3),  $|S_{41}|$  (4).

получения требуемого режима на частоте 10 ГГц в этом случае надо выбирать  $L$  порядка  $18P$ .

На рис. 10 представлены результаты расчетов частотных зависимостей элементов матрицы рассеяния для диаметра цилиндров в общей стенке  $D_2 = 1$ , остальные параметры  $P = 8$ ,  $D_1 = 4$ ,  $h = 10$ ,  $L = 18P = 144$ . Сравнение с рис. 8 показывает, что характеристики согласования и изоляции в нижней части частотного диапазона для НО на связанных двухрядных волноводах улучшаются. Однако это достигается за счет большей длины  $L$ .

*Направленные ответвители на связанных трехрядных волноводах.* В завершение этого раздела рассмотрим также вариант связанных трехрядных волноводов, дисперсия собственных волн которых приведена на рис. 3в. При том же диаметре цилиндров в общей стенке в этом случае связь волноводов еще слабее по сравнению с двухрядными волноводами, и поэтому длину участка связи для достижения режима равного деления мощности между выходами 2 и 3 нужно выбирать еще больше. Та





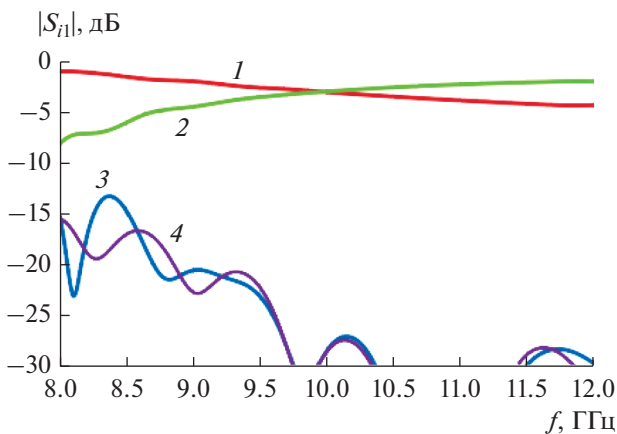
**Рис. 9.** Распределения амплитуды электрического поля в продольной плоскости НО на связанных однорядных волноводах с периодом  $P=12$  (а) и  $11.5$  (б) на частоте  $12$  ГГц при возбуждении со стороны плеча 1 (параметры структуры те же, что на рис. 8).

же оценка с помощью (1) показывает, что на частоте  $10$  ГГц необходимо выбирать  $L$  порядка  $41P$ .

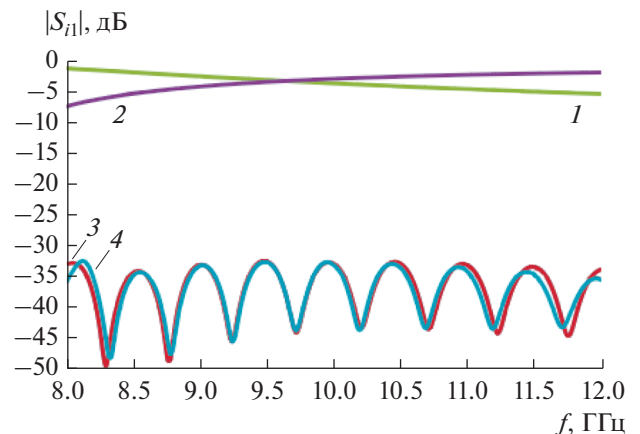
На рис. 11 представлены результаты расчета частотных характеристик НО на связанных трехрядных волноводах с периодом  $P=6$  и с длиной участка связи  $L=41P=246$ . Видим, что коэффициенты отражения и изоляции в рассмотренном диапазоне частот лучше  $-30$  дБ.

### 5. СВЯЗЬ ВОЛНОВОДОВ С ЕМКОСТНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ В ОБЩЕЙ СТЕНКЕ

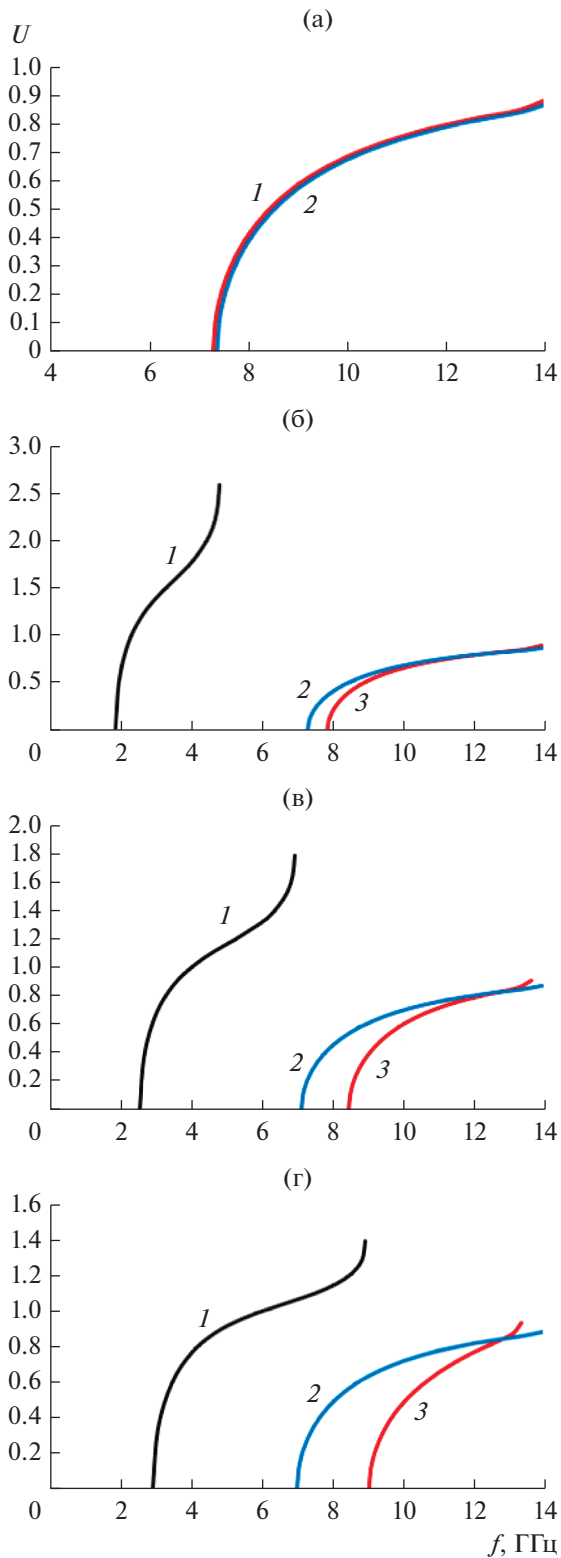
Другой возможный вариант реализации распределенной связи двух ЕВГ-волноводов состоит в использовании цилиндров с емкостными зазорами на участке связи. Этот вариант привлекателен тем, что в нем имеется переменный параметр – глубина по-



**Рис. 10.** Частотные зависимости модулей коэффициентов передачи в плечи НО на связанных двухрядных волноводах при  $P=8$ ,  $D_1=4$ ,  $D_2=1$ ,  $h=10$ ,  $L=18P$ :  $|S_{21}|$  (кривая 1),  $|S_{31}|$  (2),  $|S_{11}|$  (3),  $|S_{41}|$  (4).



**Рис. 11.** Частотные зависимости модулей коэффициентов передачи в плечи НО на связанных трехрядных волноводах при  $P=6$ ,  $D_1=2$ ,  $D_2=1$ ,  $h=10$ ,  $L=41P$ :  $|S_{21}|$  (кривая 1),  $|S_{31}|$  (2),  $|S_{11}|$  (3),  $|S_{41}|$  (4).



**Рис. 12.** Дисперсионные зависимости собственных волн системы однорядных связанных волноводов для  $d = 0$  (а), 1 (б), 3 (в), 5 (г) при  $P = 12$ ,  $D_1 = D_2 = 6$ ,  $h = 10$ ; кривые 1, 3 – четные волны, 2 – нечетные.

гружения цилиндров и величина зазора, при том же диаметре элементов связи, что и в решетке. В принципе этот параметр можно использовать для изменения связи. Здесь не будем рассматривать характеристики НО на волноводах, связанных через решетку емкостных цилиндров, а уделим основное внимание собственным волнам и эффектам трансформации их полей при изменении глубины погружения цилиндров в общей стенке.

*Дисперсия собственных волн EBG-волноводов с емкостными цилиндрами в общей стенке.* Рассмотрим дисперсионные характеристики двух связанных однорядных EBG-волноводов с решеткой емкостных цилиндров в общей стенке (см. рис. 1г). Как и в исследованных выше структурах, период этой решетки совпадает с периодом ЭМК. Цель данного исследования – проследить динамику перехода от волн волноводов, разделенных решеткой со сплошными цилиндрами, к волнам волновода удвоенной ширины, образуемого в отсутствие цилиндров. Указанный переход имеет ряд характерных особенностей, которые одинаково проявляются независимо от числа рядов, образующих волновод. Поэтому далее подробно рассмотрим только случай связанных однорядных волноводов, а аналогичные явления в двух- и трехрядных волноводах обсуждать не будем.

На рис. 12а–12г представлены дисперсионные характеристики четной и нечетной собственных волн в системе связанных однорядных EBG-волноводов для  $d = 0, 1, 3, 5$  при  $P = 12$ ,  $D_1 = D_2 = 6$ ,  $h = 10$  (как и выше, все размеры приведены в миллиметрах). (На рис. 12а для структуры без зазора  $d = 0$  кривые 1, 2 относятся к четной и нечетной волнам соответственно, а на рис. 12б–12г для структуры с  $d > 0$  кривые 1, 3 получены для четных волн, а кривая 2 – для нечетной.) В случае ненулевых зазоров прежде всего следует отметить существование двух четных волн I (кривая 1) и II (кривая 3). Четная волна I имеет нижнюю критическую частоту  $f_{cl}^H$  меньшую, чем волна II, поэтому ее следует считать основной.

При полном погружении цилиндров связи в ПВ ( $d = 0$ ) основной является четная волна, которая по своим свойствам близка к волне обычного прямоугольного волновода со сплошными металлическими стенками. Ее структура аналогична показанной на рис. 4а. В этом случае четная волна, соответствующая кривой 1 на рис. 12б–12г, не существует – она появляется только при ненулевом зазоре.

Можно было предположить, что в процессе увеличения зазора  $d$  четная волна II постепенно трансформируется в основную четную волну волновода удвоенной ширины. При этом ее критическая частота должна сдвигаться в область нижних частот. Такое преобразование основной волны одной структуры в основную волну другой структуры

можно было бы рассматривать как непрерывное преобразование волн при переходе от одной структуры к другой. Однако численные расчеты не подтвердили данное предположение. Как видно из рис. 12б–12г, критическая частота четной волны II не только не уменьшается с ростом величины зазора  $d$ , но, наоборот, увеличивается.

Критическая частота четной волны I также растет при увеличении зазора. Можно предположить, что в предельном случае при  $d$ , стремящемся к нулю, она также стремится к нулю. При малых зазорах ее коэффициент замедления очень быстро растет до величины  $U = \pi/kP$ , которая на низких частотах стремится к бесконечности. Частота  $f_{c1}^B$ , на которой  $U_1 = \pi/kP$ , является верхней критической частотой для волны I. На частотах, которые выше  $f_{c1}^B$ , волна данного типа не распространяется.

Можно выделить следующие две ситуации:

$$f_{c1}^B < f_{c3}^H \quad \text{и} \quad f_{c1}^B > f_{c3}^H. \quad (2)$$

В первом случае в области частот между верхней критической частотой волны I и нижней критической частотой волны II имеется полоса запираения, в которой распространяющиеся волны отсутствуют. При этом можно говорить об обычном одноволновом режиме распространения четной и нечетной волн системы связанных волноводов при  $f > f_{c3}^H$ . В этом режиме в связанных волноводах распространяются две волны: четная и нечетная. При выполнении второго неравенства (2) на частотах  $f_{c3}^H < f < f_{c1}^B$  условия одноволнового режима нарушаются, так как в структуре одновременно распространяются три волны — две четные и одна нечетная.

При увеличении зазора  $d$  замедление четной волны I уменьшается. В частотной зависимости коэффициента замедления появляется участок, на котором  $U < 1$  (быстрая волна). В пределе  $d \rightarrow h$  вся кривая зависимости  $U(f)$  лежит ниже единичного уровня. Такое поведение типично для собственной волны ЕВГ-волновода со сплошными цилиндрами. Нижняя критическая частота четной волны I при этом меньше нижней критической частоты волны II, т.е. волна I является основной волной. Поскольку при  $d = h$  рассматриваемая структура представляет собой ЕВГ-волновод удвоенной ширины, то можем сделать вывод, что в его основную волну трансформировалась четная волна I. Четная волна II преобразовалась в следующую по номеру четную волну волновода удвоенной ширины. Таким образом, исследование показывает, что применение цилиндров с зазорами в общей стенке связанных волноводов не обеспечивает непрерывной трансформации основной волны структуры в одном предельном случае в основную

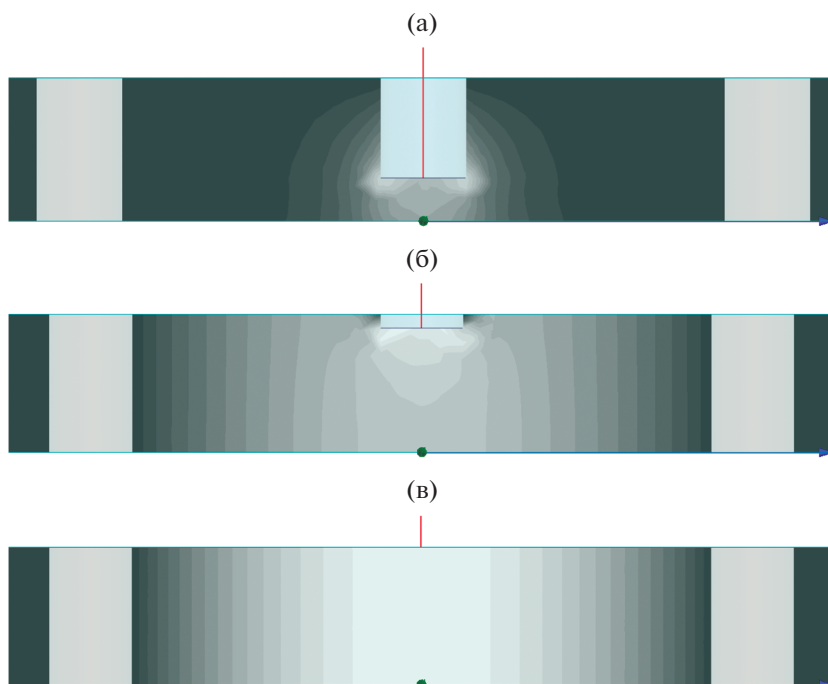
волну в другом предельном случае. Появление зазора приводит к скачкообразному изменению волновых свойств структуры, которое выражается в появлении дополнительной четной волны I. Как уже отмечалось выше, описанный выше эффект наблюдается не только в однорядных волноводах, но и в структурах с другим количеством рядов. Следует также отметить наличие точки пересечения дисперсионных кривых четной волны II и нечетной волны в случае ненулевых зазоров (см. рис. 12б–12г). В теории связанных линий передачи равенство коэффициентов замедления четной и нечетной волн означает отсутствие распределенной связи между линиями, так как ЛКС (1) при этом равен нулю.

С точки зрения электродинамики существование частоты, на которой  $C = 0$ , означает, что решетка цилиндров с зазорами на этой частоте становится непрозрачной для электромагнитных волн, и это препятствует энергетическому обмену между волноводами. Вероятно, наличие такой частоты связано с явлением последовательного резонанса [13] в решетке емкостных цилиндров, через которую осуществляется связь двух волноводов. С практической точки зрения существование точки нулевой связи является негативным фактором, который затрудняет или делает невозможным создание таких устройств как направленные ответвители на связанных волноводах.

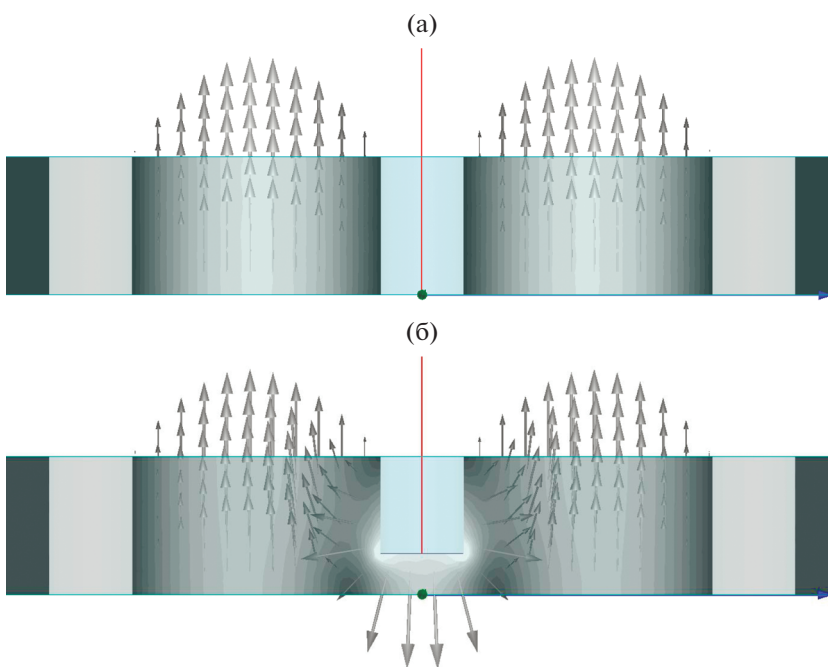
*Трансформация полей собственных волн.* Выше мы рассмотрели трансформацию коэффициентов замедления собственных волн в системе связанных ЕВГ-волноводов. Далее мы представим результаты, полученные для пространственных распределений их полей.

На рис. 13–15 показаны поперечные амплитудные распределения полей собственных волн (напряженности электрического поля). На рис. 13а, 13б изображены распределения полей четной волны I двух связанных однорядных волноводов. Видно, что при сравнительно небольших зазорах поле этой волны концентрируется между цилиндром и экраном ПВ (рис. 13а). Волна сильно замедлена, и ее поле быстро убывает при удалении от образующей цилиндров. В ситуации, когда решетка цилиндров практически полностью удалена из ПВ (рис. 13б), поле волны относительно равномерно распределено по сечению структуры и близко к полю основной волны волновода удвоенной ширины, показанному на рис. 13в. Это распределение построено на частоте 3.38 ГГц, которая соответствует критической частоте эквивалентного прямоугольного металлического волновода с размером широкой стенки 44.4 мм.

Поле четной волны II показано на рис. 14а, 14б. Видно, что при увеличении зазора формируются минимумы поля, которые в предельном случае  $d = h$  переходят в нули, характерные для четной



**Рис. 13.** Напряженность электрического поля четной волны I в системе связанных однорядных волноводов при  $d = 3$  на частоте 6.95 ГГц (а), при  $d = 9$  на частоте 3.34 ГГц (б) и при полностью удаленной решетке цилиндров на частоте 3.38 ГГц (в).

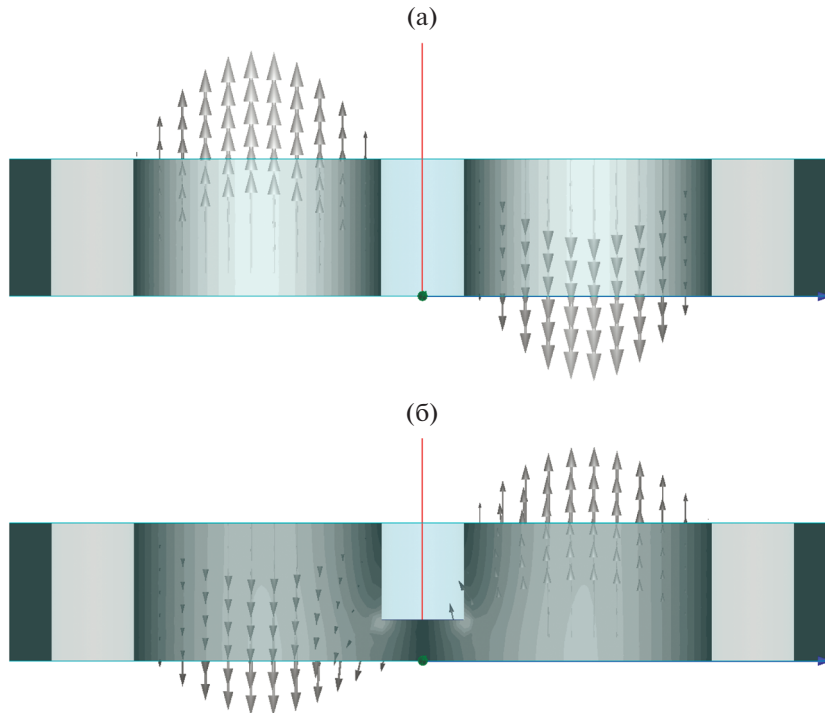


**Рис. 14.** Напряженность электрического поля четной волны II в системе связанных однорядных волноводов при  $d = 0$  на частоте 9.59 ГГц (а) и при  $d = 3$  на частоте 10.07 ГГц (б).

волны высшего типа в волноводе удвоенной ширины. Здесь и ниже на рис. 15 стрелки показывают мгновенное направление вектора поля.

На рис. 15а, 15б представлено распределение поля нечетной волны. Отметим, что оно меняется сравнительно слабо при увеличении зазора  $d$ . Об





**Рис. 15.** Напряженность электрического поля нечетной волны в системе связанных однорядных волноводов при  $d=0$  на частоте 9.65 ГГц (а) и при  $d=3$  на частоте 9.46 ГГц (б).

этом также свидетельствует слабая зависимость ее коэффициента замедления от величины  $d$  (см. рис. 12а–12г).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система двух связанных EBG-волноводов с тонкими цилиндрами в общей стенке характеризуется двумя основными типами собственных волн – четной и нечетной. Линейный коэффициент связи, пропорциональный разности их постоянных распространения, сравнительно слабо зависит от частоты в исследованном диапазоне. Выбор параметров структуры – диаметра цилиндров в общей стенке и длины участка связи – дает возможность получить режим равного деления мощности в выходных плечах направленного ответвителя на таких волноводах. При этом коэффициенты передачи в эти плечи имеют достаточно слабую частотную зависимость в полосе частот до 30%. С ростом рядности связанных волноводов коэффициенты отражения и изоляции в полосе частот улучшаются, при этом длина участка связи для обеспечения режима равного деления мощности между выходными плечами увеличивается.

Система связанных EBG-волноводов с использованием емкостных цилиндров в общей стенке характеризуется существованием дополнительной связанной с зазором собственной волны. Эта волна существует только при ненуле-

вых зазорах и при увеличении величины зазора постепенно трансформируется в основную волну EBG-волновода удвоенной ширины. В то же время обычные четная и нечетная волны трансформируются в высшие типы волн этого волновода. Таким образом, дополнительная волна нарушает непрерывность перехода четных волн, существующих в соответствующих предельных волноводных структурах.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания по теме 0030-2019-0014.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joannopoulos J.D., Meade R.D., Winn J.N.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press., 1995.
2. *Gonzalo R., Ederra I., Martinez B., de Maagt P.* // *Electron. Lett.* 2005. V. 41. № 7. P. 421.
3. *Abdo Y.S.E., Chaharmir M.R., Shaker J., Antar Y.M.M.* // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett.* 2010. V. 9. P. 167.
4. *Abdo Y.S.E., Chaharmir M.R., Shaker J., Antar Y.M.M.* // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett.* 2010. V. 9. P. 1002.
5. *Grine F., Djerafi T., Benhabiles M.T., Riabi M.L.* // 2019 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS). 20–23 Jan.

2019. Orlando, FL, USA.  
<https://doi.org/10.1109/RWS.2019.8714324>.
6. *Suntives A., Abhari R.* // IEEE Trans. 2007. V. AP-30. № 2. P. 163.
  7. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
  8. *Банков С.Е.* Электромагнитные кристаллы. М.: Физматлит, 2010.
  9. *Банков С.Е., Пангонис Л.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 11. С. 1285.
  10. *Bankov S.E.* // PIRS Proc. Moscow, Russia. August 18–21. 2009. P. 1680.
  11. *Банков С.Е., Дупленкова М.Д.* // Журн. радиоэлектроники. 2009. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr09/4/text.html>.
  12. *Банков С.Е., Калошин В.А., Фролова Е.В.* // Журн. радиоэлектроники. 2009. № 3. <http://jre.cplire.ru/jre/mar09/1/text.html>.
  13. *Банков С.Е., Калинин В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 855.
  14. *Банков С.Е., Калинин В.И., Фролова Е.В.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 9. С. 852.
  15. *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ. М.: Высш. школа, 1988.
  16. *Унгер Г.Г.* Оптическая связь. М.: Связь, 1979.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874;621.396

УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТОЙ СОГЛАСОВАНИЯ РЕЗОНАНСНОГО  
РАДИОПОГЛОТИТЕЛЯ СО СВОБОДНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

© 2021 г. Ю. Н. Казанцев<sup>а, \*</sup>, В. А. Бабаян<sup>б</sup>, Н. Е. Казанцева<sup>а, б</sup>,  
Г. А. Крафтмахер<sup>а</sup>, В. П. Мальцев<sup>а</sup>, В. С. Солосин<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>б</sup>Центр Полимерных Систем университета им. Томаша Бати,  
ул. Томаша Бати 5678, 760 01 Злин, Чешская Республика

\*E-mail: yukazantsev@mail.ru

Поступила в редакцию 25.02.2020 г.

После доработки 25.02.2020 г.

Принята к публикации 05.04.2020 г.

Численные расчеты согласования резонансного радиопоглотителя (РП) подтвердили, что идеальное согласование такого РП со свободным пространством может быть реализовано при использовании практически любых диэлектриков с потерями на любой нужной частоте. Рассмотрены условия, обеспечивающие наиболее широкую полосу согласования РП, причем показано, что отношение ширины полосы по уровню отражения  $-10$  дБ к толщине РП (bandwidth to thickness ratio) составляет около 3.7, т.е. больше, чем для обычного однослойного РП Далленбаха (около 3.2).

DOI: 10.31857/S0033849421040057

ВВЕДЕНИЕ

Среди большого разнообразия радиопоглотителей (РП) различного назначения широкое распространение получили однослойные РП Далленбаха ввиду их надежности и простоты реализации. РП этого типа представляет собой слой диэлектрика (магнетодиэлектрика) с потерями, расположенный на металлическом экране [1–7]. Частотная зависимость коэффициента отражения от такого РП характеризуется рядом минимумов на так называемых частотах согласования [4]. Глубина этих минимумов и их расположение на шкале частот зависит от электромагнитных свойств и толщины слоя. Управляя этими свойствами и толщиной слоя, возможно минимизировать коэффициенты отражения в рабочем диапазоне РП, хотя добиться идеального согласования даже на центральной частоте этого диапазона таким способом обычно не удается. В работе [5] предложен иной способ решения проблемы идеального согласования в середине рабочего диапазона однослойного РП с помощью решетки из проводящих квадратных элементов на слое диэлектрика с потерями, металлизированном с противоположной стороны. Эффект радиопоглощения обусловлен резонансами в объемах, образованных элементами решетки и электропроводящим экраном. Было по-

казано, что, изменяя размеры решетки и толщину диэлектрического слоя, возможно решить проблему идеального согласования РП на заданной (резонансной) частоте для самых различных диэлектрических материалов.

Цель статьи – определить факторы, обеспечивающие наиболее широкую полосу согласования резонансного РП.

1. ВОЛНОВОДНАЯ МОДЕЛЬ ЩЕЛИ  
МЕЖДУ СОСЕДНИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ  
РЕШЕТКИ РЕЗОНАНСНОГО  
РАДИОПОГЛОТИТЕЛЯ

Конструкция резонансного РП представляет собой слой диэлектрика с потерями толщиной  $d$ , на одной стороне которого расположена решетка с периодом  $P$  из металлических квадратов размером  $2a \times 2a$ , а другая сторона слоя металлизирована (рис. 1а). При выполнении условий  $d \ll 2a$  и  $d \ll \lambda$  ( $\lambda$  – длина волны) поле в объеме между элементом решетки и электропроводящей поверхностью имеет вид *ТЕМ*-волны, способной резонировать, отражаясь от открытых границ этого объема. Радиопоглощающие свойства этой структуры обусловлены резонансным поглощением мощности в диэлектрике внутри резонато-

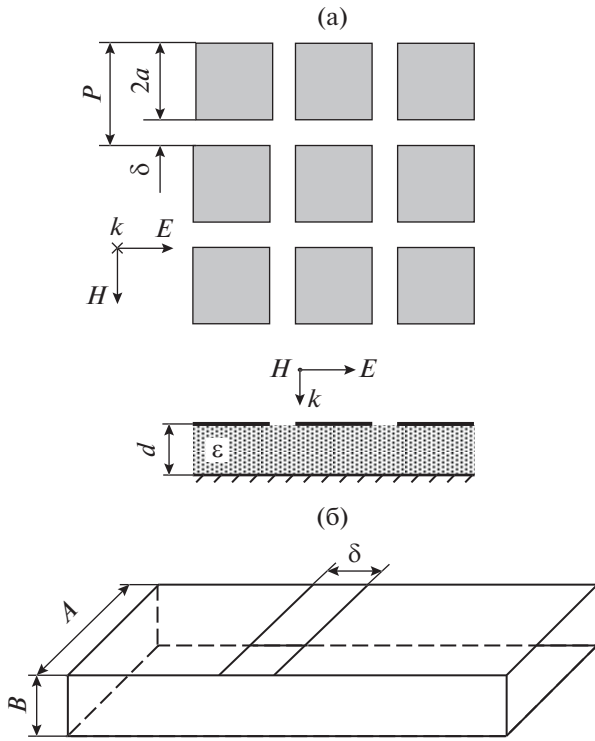


Рис. 1. Резонансный радиопоглотитель: а – схема, б – волноводная модель щели между элементами решетки.

ров. Поглощение мощности в отдельном резонаторе на резонансной частоте максимально, когда потери на излучение (определяющие связь с внешним пространством) равны тепловым потерям при двойном пробеге  $TEM$ -волны в резонаторе [6]. При этом ширина полосы поглощения тем больше, чем больше эти потери. Численная оценка потерь на излучение в зависимости от ширины щели между соседними резонаторами  $\delta$  ( $\delta = P - 2a$ ) была проведена на волноводной модели.

В качестве расчетной модели был взят прямоугольный волновод сечением  $A \times B$  ( $A = 2\lambda$ ,  $B = 4\lambda/75$ ,  $\lambda = 75$  мм) с поперечной щелью шириной  $\delta$  в одной из широких стенок (рис. 1б). Рассчитывались коэффициенты отражения  $|S_{11}|^2$  и прохождения  $|S_{12}|^2$  (по мощности). Коэффициент излучения из щели  $|S_{13}|^2$  определяется как

$$|S_{13}|^2 = 1 - |S_{11}|^2 - |S_{12}|^2. \quad (1)$$

На рис. 2 приведены зависимости этих коэффициентов от ширины щели  $\delta$  для двух значений диэлектрической проницаемости среды внутри волновода,  $\epsilon = 1$  и 4. Как следует из рис. 2а и 2б, при увеличении ширины щели коэффициенты

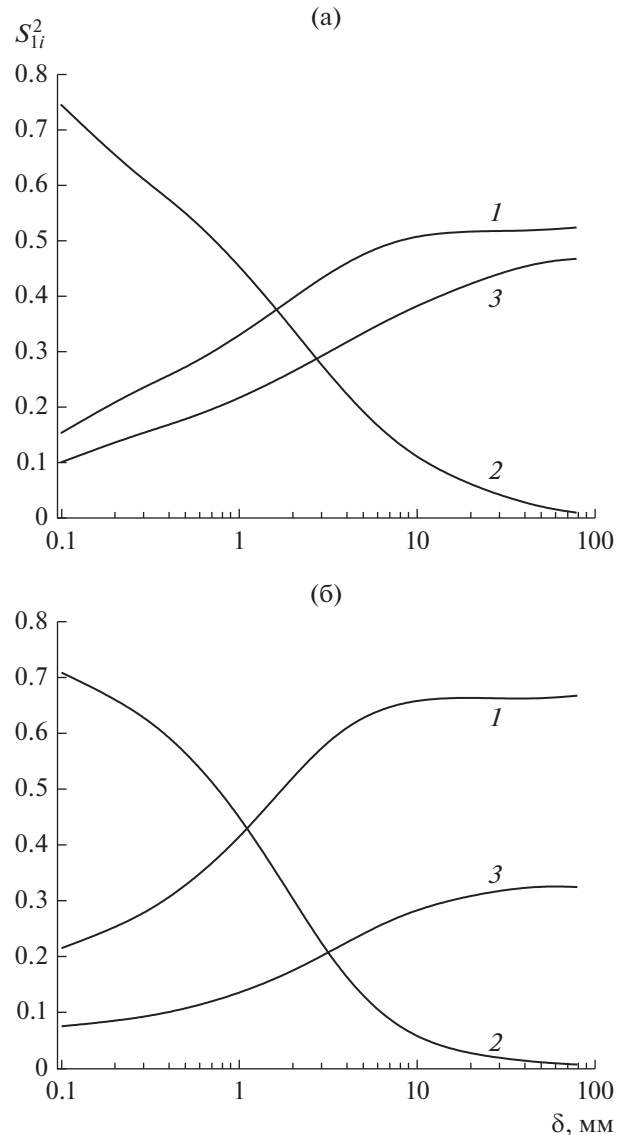


Рис. 2. Зависимость коэффициентов отражения  $S_{11}^2$  (кривая 1), прохождения  $S_{12}^2$  (кривая 2) и излучения  $S_{13}^2$  (кривая 3) от ширины щели  $\delta$  при  $\epsilon = 1$  (а) и 4 (б).

$|S_{11}|^2$  и  $|S_{13}|^2$  монотонно возрастают, а коэффициент  $|S_{12}|^2$  монотонно убывает.

Таким образом, при увеличении ширины щелей между элементами решетки РП ширина полосы поглощения отдельного резонатора должна увеличиваться (вследствие увеличения излучения во внешнее пространство), однако число резонаторов на единицу площади РП при этом уменьшается, что, наоборот, должно уменьшать полосу поглощения РП. Результатом действия этих двух факторов является существование некоторой оптимальной ширины щели, при которой обеспечивается наиболее широкая полоса поглощения РП.

## 2. ЗАВИСИМОСТЬ ПОЛОСЫ ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ ШИРИНЫ ЩЕЛЕЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ РЕШЕТКИ РАДИОПОГЛОТИТЕЛЯ

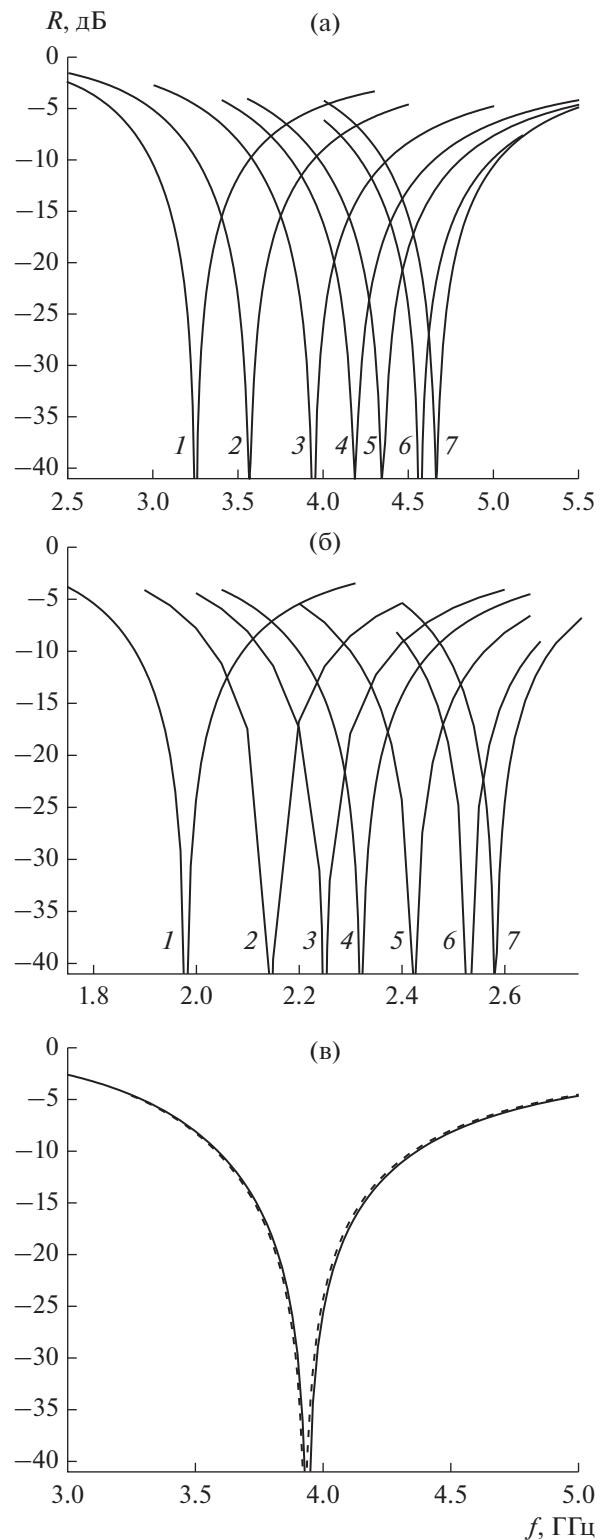
Целью численного расчета зависимости полосы поглощения РП от ширины щелей  $\delta$  является оценка оптимального значения этой ширины. Для этого рассчитывали частотные зависимости коэффициента отражения от РП в широком интервале значений  $\delta$ . В качестве расчетных моделей взяты структуры со следующими характеристиками:

*I случай*  $\varepsilon = 1 - j\varepsilon''$ ,  $2a = 26$  мм,  $d = 4$  мм,  $\delta = 1; 2; 4; 6; 8; 12; \text{ и } 16$  мм,

*II случай*  $\varepsilon = 4 - j\varepsilon''$ ,  $2a = 26$  мм,  $d = 4$  мм,  $\delta = 1; 2; 3; 4; 6; 10 \text{ и } 14$  мм.

Значение  $\varepsilon''$  подбиралось так, чтобы на резонансных частотах имело место полное согласование РП со свободным пространством (коэффициент отражения меньше  $-40$  дБ).

На рис. 3 представлены частотные зависимости коэффициента отражения от РП для случаев I и II, а в табл. 1 приведены соответствующие этим зависимостям характеристики. Из табл. 1 следует, что максимальные величины полос поглощения  $\Delta f/f_p = 20\%$  в случае I и  $\Delta f/f_p = 11.6\%$  в случае II достигаются при значениях  $\delta = 4$  и  $3$  мм соответственно (см. рис. 3а и 3б, кривые 3), т.е. при значениях, равных или близких к толщине  $d$  слоя диэлектрика. Существенно меньшая ширина полосы поглощения в случае II связана с меньшим значением резонансной частоты. Поэтому корректное сравнение обоих случаев проведено при одинаковых резонансных частотах. С этой целью для случая  $\varepsilon' = 4$ ,  $d = 4$  мм,  $\delta = 3$  мм рассчитана частотная зависимость коэффициента отражения от РП при таком размере элемента  $2a = 12.7$  мм решетки, при котором резонансная частота совпадает с резонансной частотой  $f_p = 3.94$  ГГц (см. рис. 3а, кривая 3). На рис. 3в демонстрируется, что рассчитанные частотные зависимости (штриховая и сплошная кривые) практически совпадают и идентичны кривой 3 на рис. 3а. Таким образом, ширина полосы поглощения в обоих случаях одинакова и равна  $20\%$ , что подтверждает эффективность применения в конструкции РП материалов с достаточно широким интервалом значений  $\varepsilon'$ . При этом настройка на требуемую частоту реализуется путем изменения размера  $2a$  элементов решетки при неизменной (близкой к оптимальной) ширине  $\delta$  щели между элементами. Так, на рис. 4 показаны частотные зависимости коэффициента отражения от РП с параметрами  $d = 4$  мм,  $\delta = 4$  мм,  $\varepsilon = 1 - j\varepsilon''$  и различных значениях размера  $2a$ , а в табл. 2 приведены их характеристики.



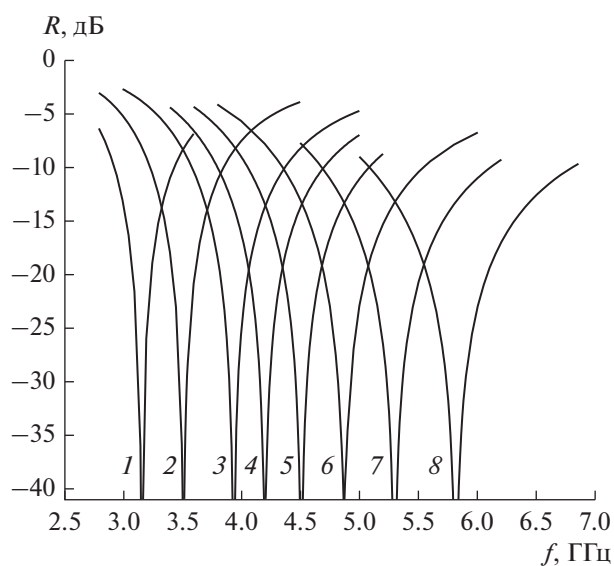
**Рис. 3.** Частотные зависимости коэффициента отражения от РП для  $2a = 26$  мм (а–в) и  $12.7$  мм (в),  $d = 4$  мм и разных  $\varepsilon$  и  $\delta$ : а)  $\varepsilon = 1 - j\varepsilon''$ ,  $\delta = 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16$  мм (кривые 1...7 соответственно, см. табл. 1); б)  $\varepsilon = 4 - j\varepsilon''$ ,  $\delta = 1, 2, 3, 4, 6, 10, 14$  мм (1...7 соответственно, см. табл. 1); в)  $\varepsilon = 1 - j0.49$ ,  $2a = 26$  мм (сплошная),  $\varepsilon = 4 - j1.36$ ,  $2a = 12.7$  мм (штриховая).

**Таблица 1.** Характеристики частотных зависимостей коэффициента отражения от РП для случая  $2a = 26$  мм,  $d = 4$  мм и разных  $\epsilon''$

Номер кривой	$\delta$ , мм	$\epsilon''$	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %
$\epsilon = 1 - j\epsilon''$ (см. рис. 3а)				
1	1	0.47	3.25	17.8
2	2	0.50	3.565	19.3
3	4	0.49	3.94	20.0
4	6	0.47	4.18	19.85
5	8	0.42	4.34	19.1
6	12	0.36	4.565	17.1
7	16	0.30	4.66	14.4
$\epsilon = 4 - j\epsilon''$ (см. рис. 3б)				
1	1	0.73	1.98	10.6
2	2	0.76	2.148	11.2
3	3	0.77	2.25	11.6
4	4	0.76	2.32	11.2
5	6	0.72	2.425	10.7
6	10	0.60	2.53	9.1
7	14	0.51	2.58	8.1

Примечание:  $\delta$  – ширина щели,  $f_p$  – резонансная частота,  $\Delta f/f_p$ , % – ширина полосы поглощения по уровню отражения  $-10$  дБ,  $\epsilon''$  – оптимальные значения.

Из рис. 4 и данных табл. 2 следует, что при повышении резонансной частоты  $f_p$  монотонно увеличивается ширина полосы поглощения



**Рис. 4.** Частотные зависимости коэффициента отражения от РП для  $\epsilon = 1 - j\epsilon''$ ,  $\delta = 4$  мм,  $d = 4$  мм,  $2a = 34, 30, 26, 24, 22, 20, 18, 16$  мм (кривые 1...8 соответственно, см. табл. 2).

**Таблица 2.** Характеристики частотных зависимостей коэффициента отражения от РП для случая  $\epsilon = 1 - j\epsilon''$ ,  $\delta = 4$  мм,  $d = 4$  мм

Номер кривой (см. рис. 4)	$2a$ , мм	$\epsilon''$	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %
1	34	0.38	3.16	16.1
2	30	0.42	3.515	17.9
3	26	0.49	3.94	20.0
4	24	0.53	4.20	21.4
5	22	0.56	4.51	23.1
6	20	0.60	4.87	24.4
7	18	0.67	5.30	26.8
8	16	0.73	5.81	31.0

Примечание: отношение  $\Delta\lambda/d$  для всех кривых равно 3.7.

$\Delta f/f_p$ , % достигая 31% при  $2a = 16$  мм, что объясняется увеличением связи с внешним пространством резонаторов, образованных элементами решетки и электропроводящим экраном. В то же время величина  $\Delta\lambda/d$  остается практически неизменной.

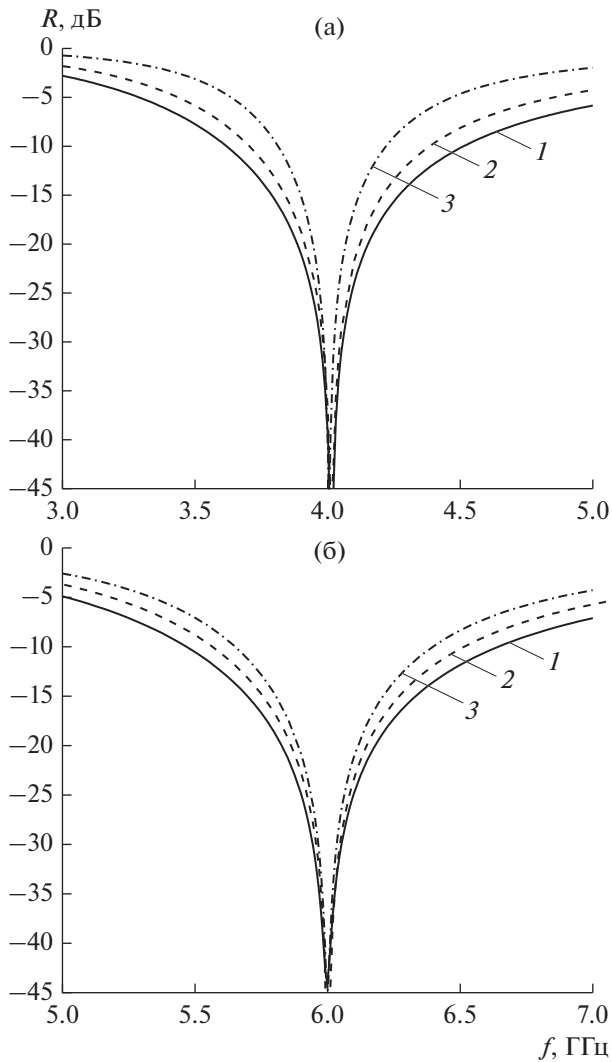
### 3. РАСЧЕТ ОБРАЗЦОВ РАДИОПОГЛОТИТЕЛЯ С РЕАЛЬНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

В качестве диэлектриков с потерями для резонансных РП рассмотрены композиты двух типов.

*Тип I* – слоистая структура из чередующихся слоев пенополистирола толщиной 6 мм и углеродсодержащей бумаги. Толщина слоя углеродсодержащей бумаги в разных образцах была различна и составляла 0.07; 0.14 и 0.21 мм. Комплексная диэлектрическая проницаемость бумаги, измеренная на частоте 4 ГГц, равна  $\epsilon = 20 - j15$ , а расчетные значения диэлектрической проницаемости композитов  $\epsilon_k$  приблизительно равны:  $1.2 - j0.25$ ,  $1.4 - j0.5$  и  $1.6 - j0.75$ , соответственно.

*Тип II* – полиуретановый эластомер, наполненный сажей с концентрацией 2, 4 и 6 об. %. Диэлектрические проницаемости композитов  $\epsilon_k$ , измеренные на частоте 6 ГГц, равны  $5 - j1$ ,  $6.4 - j1.6$  и  $9 - j2.7$  соответственно.

На рис. 5 представлены расчетные частотные зависимости коэффициента отражения от РП на основе композитов I и II типа, а в табл. 3 – их характеристики. При расчете характеристик РП были заданы резонансные частоты  $f_p = 4$  и 6 ГГц в случае I и II типа соответственно. Из результатов расчета, приведенных в табл. 3, следует, что при увеличении мнимой части диэлектрической проницаемости материала растет полоса рабочих



**Рис. 5.** Частотные зависимости коэффициента отражения от РП на основе композитов I и II типа: а)  $\epsilon = 1.2 - j0.25$  (кривая 1),  $\epsilon = 1.4 - j0.5$  (кривая 2),  $\epsilon = 1.6 - j0.75$  (кривая 3) (см. табл. 3), б)  $\epsilon = 5 - j1$  (кривая 1),  $\epsilon = 6.4 - j1.6$  (кривая 2),  $\epsilon = 9 - j2.7$  (кривая 3) (см. табл. 3).

частот  $\Delta f/f_p$  и толщина РП  $d$ , но отношение  $\Delta\lambda/d$  остается практически неизменным и приблизительно равным 3.7. Для сравнения укажем, что для обычного однослойного тонкого РП Далленбаха на основе диэлектрического материала без частотной дисперсии диэлектрической проницаемости это отношение в гипотетическом случае идеального согласования РП со свободным пространством равно 3.2 [7–9].

Результаты расчета также показывают, что идеальное согласование резонансного РП со свободным пространством может быть реализовано для любого диэлектрика с потерями на любой заданной частоте.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные расчеты показали, что наибольшее значение ширины полосы поглощения при заданной резонансной частоте резонансного РП обеспечивается при определенном отношении ширины щели  $\delta$  между соседними элементами решетки к толщине  $d$  слоя материала между решеткой и экраном, которое сравнительно слабо зависит от диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$  материала. При  $\epsilon' = 1$  это отношение равно единице, а с увеличением до  $\epsilon' = 4$  уменьшается до 3/4.

Расчеты, проведенные для различных композитов в широком диапазоне значений  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  подтвердили возможность обеспечить коэффициент отражения от РП меньше  $-40$  дБ на заданной частоте только путем управления размерами структуры РП без изменения характеристик диэлектрика. При этом было показано, что по уровню коэффициента отражения  $-10$  дБ отношение ширины полосы поглощения  $\Delta\lambda$  к толщине слоя диэлектрика  $d$  составляет около 3.7, что больше аналогичного отношения для классического четвертьволнового РП Далленбаха равного 3.2. Эти расчеты показали, что идеальное согласование резонансного РП со свобод-

**Таблица 3.** Характеристики частотных зависимостей коэффициента отражения от РП для композитов I и II типа

Номер кривой	$2a$ , мм	$\delta$ , мм	$d$ , мм	$\epsilon'$	$\epsilon''$	$f_p$ , ГГц	$\Delta f/f_p$ , %	$\Delta\lambda/d$
Композит I типа (см. рис. 5а)								
1	27	2	2.05	1.2	0.25	4.01	12.5	3.71
2	23.5	4	3.45	1.4	0.5	4.01	16	3.7
3	20.1	4	4.4	1.6	0.75	4.01	19.8	3.72
Композит II типа (см. рис. 5б)								
1	8.5	1.2	1.7	5	1	6	12.5	3.65
2	6.9	2	2.15	6.4	1.6	6	6	3.7
3	4.7	2	2.6	9	2.7	6	19.8	3.78

ным пространством может быть достигнуто практически для любого диэлектрика с поглощением на любой заданной частоте.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Часть работы была выполнена в университете им. Томаша Бати в городе Злин (Чешская Республика) в рамках проекта FW 010100327 “Разработка перспективной технологии полимерных композиционных материалов”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Idrisa F.M., Hashima M., Abbas Z. et al.* // J. Magn. Mater. 2016. V. 405. P. 197
2. *Choi I., Lee D., Lee D.G.* // J. Magn. Mater. 2015. V. 122. P. 23.
3. *Stergiou C.A., Koledintseva M.Y. Rozanov K.N.* // Hybrid Polymer Composite Materials: Applications. Cambridge: Elsevier Inc., 2017. P. 53.
4. *Лопатин А.В., Казанцев Ю.Н., Казанцева Н.Е. и др.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 5. С. 517.
5. *Казанцев Ю.Н., Крафтмахер Г.А., Мальцев В.П., Солосин В.С.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 6. С. 537.
6. *Казанцев Ю.Н.* // РЭ. 1959. Т. 4. № 9. С. 1480.
7. *Rozanov K.N.* // IEEE Trans. 2000. V. AP-48. № 8. P. 1230.
8. *Розанов К.Н.* // РЭ. 1999. Т. 44. № 5. С. 526.
9. *Rick G.* Radar Cross-Section Handbook. N.Y.: Plenum Press, 1970.



ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.396.67

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЙЯНИЯ ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ  
ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ МЕТОДОМ МАЛЮЖИНЦА

© 2021 г. К. Клионовски<sup>а</sup>, \*, С. Е. Банков<sup>б</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Научно-технологический университет короля Абдаллы,  
Тувваль, 23955-6900, Королевство Саудовская Аравия

<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: kirill.klionovski@kaust.edu.sa

\*\*E-mail: sbankov@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.

После доработки 21.05.2020 г.

Принята к публикации 28.06.2020 г.

Представлено строгое решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на полупрозрачной полуплоскости, полученное методом интеграла Зоммерфельда–Малюжинца для двух поляризаций падающего поля. Используя данное строгое решение, получено аналитическое представление цилиндрической волны, рассеянной ребром полупрозрачной полуплоскости. Точность данного аналитического представления проверена сравнением численных результатов, полученных методом Винера–Хопфа.

DOI: 10.31857/S0033849421040069

ВВЕДЕНИЕ

Проблема дифракции плоской электромагнитной волны на полупрозрачной полуплоскости является актуальной задачей теории дифракции. Ее решение расширяет множество структур, для которых рассеянное поле может быть записано в строгой и достаточно простой аналитической форме. Кроме того, оно расширяет область применения асимптотических методов теории дифракции, включая в нее полупрозрачные рассеиватели с острыми кромками.

Среди аналитических методов решения граничных задач для полубесконечных структур, таких как полуплоскости, полупластины и клинья, следует отметить два основных подхода: метод Винера–Хопфа и метод Малюжинца. Метод Малюжинца часто называют также методом интеграла Малюжинца или Зоммерфельда–Малюжинца. Оба метода неоднократно и весьма успешно применялись для анализа указанных выше структур. Строгое решение задачи рассеяния плоской волны на полуплоскости с идеально проводящими граничными условиями и импедансными граничными условиями Леонтовича получено методом интеграла Зоммерфельда–Малюжинца соответственно в работах [1] и [2]. Задача рассеяния плоской волны полупрозрачной полуплоскостью исследовалась в [3–11]. В работе [3] предложено использовать метод интеграла Зоммерфельда–Малюжинца для решения задачи рассеяния плоской волны на

диэлектрических пластинах. Метод Винера–Хопфа используется в [4–8, 11] для определения интегрального представления рассеянного поля. В работе [11] также приводятся эвристические формулы для определения диаграммы направленности цилиндрической волны, рассеянной краем полупрозрачной полуплоскости. Метод интеграла Зоммерфельда–Малюжинца используется в [9] для определения решения задачи рассеяния  $E$ -поляризованной плоской волны на полупрозрачной полуплоскости с граничными условиями частного вида, которое выражается через специальные функции Малюжинца. Решение, полученное в [9], непригодно для расчета рассеянного поля, так как в нем отсутствует информация о виде специальной функции Малюжинца. Как будет показано в данной работе, для корректного вычисления данной функции для произвольного комплексного аргумента, необходимо использовать ее представление через двойное бесконечное произведение. Метод интеграла Зоммерфельда–Малюжинца используется также в [10] для определения решения задачи рассеяния  $E$ -поляризованной плоской волны на сочленении импедансного клина и полупрозрачной полуплоскости. Несмотря на то, что формулы, полученные в [10], могут быть модифицированы для случая рассеяния  $E$ -поляризованной плоской волны на полупрозрачной полуплоскости, решения такой задачи в [10] не представлено.

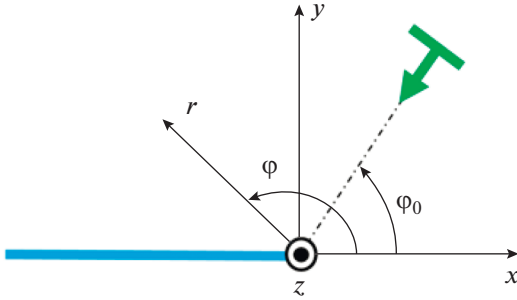


Рис. 1. Геометрия задачи.

Таким образом, можем сделать вывод, что в настоящее время решение для полупрозрачной полуплоскости с граничными условиями достаточно общего вида получено только методом Винера–Хопфа. Основной целью нашего исследования является развитие метода Малюжинца в направлении применения его для анализа полупрозрачных структур. В данной работе рассматриваем задачу рассеяния плоской волны, падающей под произвольным углом на полупрозрачную полуплоскость. Для решения граничной задачи используется метод интеграла Зоммерфельда–Малюжинца для двух поляризаций падающего поля. При помощи указанного строгого решения, мы найдем аналитическое представление для диаграммы направленности поля, рассеянного полупрозрачной полуплоскостью. Верификация полученного решения проводится путем сравнения численных результатов по методу Малюжинца с известным решением по методу Винера–Хопфа.

## 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим полупрозрачную бесконечно тонкую полуплоскость, расположенную при  $y = 0$ ,  $x \leq 0$  (рис. 1). Граничные условия на поверхности полуплоскости имеют вид

$$\begin{aligned} [\vec{n}, \vec{E}^+] - [\vec{n}, \vec{E}^-] &= 0, \quad [\vec{n}, \vec{H}^+] - [\vec{n}, \vec{H}^-] = \vec{j}^e, \\ [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{E}^+]] &= -\mathbf{Z}\vec{j}^e. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь,  $\vec{E}^\pm$  ( $\vec{H}^\pm$ ) – вектор напряженности электрического (магнитного) поля на поверхности полуплоскости при  $\varphi = \pm\pi$ ;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к освещенной стороне полуплоскости;  $\vec{j}^e$  – электрический ток на полуплоскости;  $\mathbf{Z}$  – тензор импеданса. Условия (1) могут быть записаны через компоненты векторов напряженности электрического ( $E_{x,z}^\pm$ ) и магнитного ( $H_{x,z}^\pm$ ) полей и

компоненты электрического тока ( $j_{x,z}^e$ ) в декартовых координатах ( $x, y, z$ ):

$$\begin{pmatrix} E_x^\pm \\ E_z^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{zx} \\ Z_{xz} & Z_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x^e \\ j_z^e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} j_x^e \\ j_z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_z^+ - H_z^- \\ H_x^- - H_x^+ \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $Z_{xx}$ ,  $Z_{xz}$ ,  $Z_{zx}$ , и  $Z_{zz}$  – компоненты тензора импеданса, которые характеризуют свойства полуплоскости. В общем случае, данные компоненты являются комплексными числами с аргументами, лежащими в интервале  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

Рассмотрим отдельно возбуждение полуплоскости волнами электрической ( $H_z = 0$ ) и магнитной ( $E_z = 0$ ) поляризации. При этом взаимодействие между ортогональными компонентами тока  $j_x^e$  и  $j_z^e$  отсутствует, т.е.  $Z_{zx} = Z_{xz} = 0$ . Тогда условия (2) могут быть выражены через скалярные функции  $u_{E,H}$ , которые представляют компоненты  $E_z$  или  $H_z$  для электрической ( $E$ ) или магнитной ( $H$ ) поляризации соответственно. Используя соотношения, следующие из уравнений Максвелла:

$$E_x = \frac{Z_0}{ik} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_x = \frac{i}{Z_0 k} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (3)$$

можем записать условия (2) в цилиндрических координатах ( $r, \varphi, z$ ) через соотношение  $du/dy = -du/(r d\varphi)$  следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_E^+}{r \partial \varphi} - \frac{\partial u_E^-}{r \partial \varphi} + ik \frac{Z_0}{Z_{zz}} u_E^\pm = 0, & u_E^+ = u_E^-, \\ \frac{\partial u_H^+}{r \partial \varphi} + ik \frac{Z_{xx}}{Z_0} (u_H^+ - u_H^-) = 0, & \frac{\partial u_H^+}{\partial \varphi} = \frac{\partial u_H^-}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $Z_0$  – волновой импеданс падающей волны;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $\lambda$  – длина волны в вакууме;  $i$  – мнимая единица. Условия (4) становятся условиями  $u_E = 0$  и  $du_H/d\varphi = 0$  для идеально проводящей полуплоскости при  $Z_{xx,zz} = 0$ .

## 2. МЕТОД МАЛЮЖИНЦА

Рассмотрим падающую волну в форме

$$u_{E,H}^\pi(r, \varphi) = \exp(ikr \cos(\varphi - \varphi_0))$$

в полярных координатах ( $r, \varphi$ ), распространяющуюся из верхнего полупространства при  $0 \leq \varphi_0 < \pi$ . Предполагаем зависимость от времени вида  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота,  $t$  – время. Как известно, решение уравнения Гельмгольца  $\Delta u_{E,H} + k^2 u_{E,H} = 0$  было использовано Зоммерфельдом [1] для решения задачи рассеяния плоской волны

идеально проводящей полуплоскостью в следующем виде:

$$u_{E,H}(r, \varphi) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \exp(ikr \cos \alpha) S_{E,H}(\alpha + \varphi) d\alpha, \quad (5)$$

где  $\gamma$  – контур интегрирования в комплексной плоскости  $\alpha$  (рис. 2);  $S_{E,H}$  – амплитуды парциальных плоских волн. Контур  $\gamma$  и подынтегральная функция  $S_{E,H}$  определяются таким образом, чтобы удовлетворить условию сходимости интеграла (5), граничным условиям, а также условиям излучения на бесконечности. Для определения диаграммы направленности цилиндрической волны, рассеянной краем идеально проводящей полуплоскости, в [1] используется метод перевала применительно к интегралу (5). Контур интегрирования  $\gamma$  деформируется так, что он преобразуется в контур  $\gamma_1$  (см. рис. 2), имеющий две ветви, которые проходят через точки перевала  $\alpha = \pm\pi$ . Ветви контура  $\gamma_1$  определяются как  $\text{Re}\alpha = \pm\pi + \text{gd}(\text{Im}\alpha)$ , где  $\text{gd}(x) = \arcsin(\text{th}x)$  – функция Гудермана. Применение метода перевала при условии  $kr \gg 1$  позволяет представить (5) как сумму геометрического поля и поля цилиндрической волны, рассеянной краем полуплоскости. Рассеянное идеально проводящей полуплоскостью поле для электрической ( $u_E^{\text{pp}}$ ) и магнитной ( $u_H^{\text{pp}}$ ) поляризаций падающей волны имеет вид:

$$u_{E,H}^{\text{pp}}(r, \varphi) = \left( \frac{-1}{\cos\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)} - \frac{\xi_{E,H}}{\cos\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)} \right) \times \exp(-i(kr + \pi/4)) / \sqrt{8\pi kr}. \quad (6)$$

Здесь  $\xi_{E,H}$  равно 1 или  $-1$  для  $E$ - и  $H$ -поляризации соответственно.

Интеграл вида (5) также используется в [2] для строгого решения задачи рассеяния плоской волны непрозрачной полуплоскостью, на которой заданы импедансные граничные условия Леонтовича (полуплоскость – это частный случай клина, рассмотренного в [2]). Данные граничные условия имеют вид

$$\partial u_{E,H}^{\pm} / (r \partial \varphi) \pm ik \sin \vartheta_{E,H}^{\pm} u_{E,H}^{\pm} = 0.$$

Отметим, что в [3] показано, что в записи граничных условий в [2] допущена опечатка. Перед  $ik$  в формуле (1) работы [2] должно быть  $\mp$  вместо  $\pm$ ). Параметры  $\vartheta_{E,H}^{\pm}$ , характеризующие свойства поверхностей при  $\varphi = \pm\pi$ , являются углами Брюстера, при которых коэффициент отражения  $R_{E,H}^z$

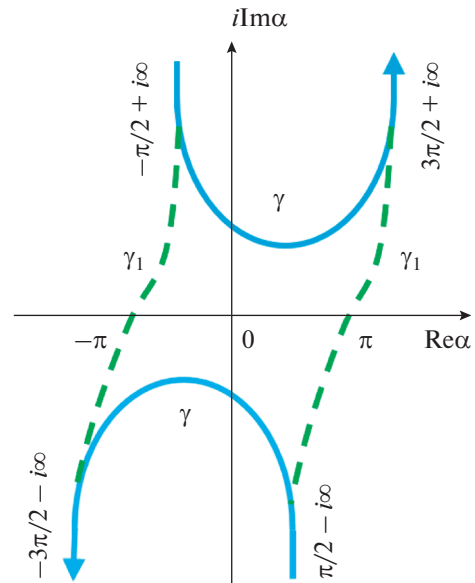


Рис. 2. Контур интегрирования  $\gamma$  и  $\gamma_1$ .

от бесконечной плоскости с граничными условиями Леонтовича обращается в нуль:

$$R_{E,H}^z = (\sin \varphi_0 - \sin \vartheta_{E,H}^{\pm}) / (\sin \varphi_0 + \sin \vartheta_{E,H}^{\pm}).$$

Углы Брюстера связаны с импедансами непрозрачной поверхности полуплоскости ( $Z_{L\pm}$ ) как  $\sin \vartheta_{E,H}^{\pm} = (Z_{L\pm} / Z_0)^{-\xi_{E,H}}$ . Подынтегральное выражение в (5), соответствующее импедансным граничным условиям, имеет вид

$$S_{E,H}^z(\alpha, \varphi_0, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-) = \frac{\cos(\varphi_0/2) \Psi(\alpha, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-)}{2(\sin(\alpha/2) - \sin(\varphi_0/2)) \Psi(\varphi_0, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-)}, \quad (7)$$

где  $\Psi$  выражается через специальную функцию Малюжинца  $\Psi_{\pi}$ :

$$\Psi(\alpha, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-) = (\Psi_{\pi}(\pi/2))^4 \times \cos((\alpha + \pi - \vartheta_{E,H}^+)/4) \cos((\alpha - \pi + \vartheta_{E,H}^-)/4) \times \frac{\Psi_{\pi}(\alpha + \pi/2 + \vartheta_{E,H}^+) \Psi_{\pi}(\alpha - \pi/2 - \vartheta_{E,H}^-)}{\Psi_{\pi}(\alpha + \pi/2 - \vartheta_{E,H}^+) \Psi_{\pi}(\alpha - \pi/2 + \vartheta_{E,H}^-)}.$$

Наиболее общий вид функции Малюжинца  $\Psi_{\pi}(\alpha)$ , который позволяет определить ее для любых, в том числе комплексных значений аргумента  $\alpha$ , выражается через двойное бесконечное произведение [2]:

$$\Psi_{\pi}(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{2\pi(2n-1) + (2m-1)\pi/2} \right)^2 \right]^{(-1)^{m+1}}. \quad (8)$$

Другое представление  $\Psi_\pi$ , выраженное через экспоненциальную функцию с интегралом в показателе, также имеется в [2]. Однако данное представление содержит опечатки. Корректное выражение  $\Psi_\pi$  через экспоненциальную функцию с интегралом в показателе имеет следующий вид [10]:

$$\Psi_\pi(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{8\pi} \int_0^\alpha \frac{2\sqrt{2}\pi \sin(\zeta/2) - 2\zeta - \pi \sin \zeta}{\cos \zeta} d\zeta\right). \quad (9)$$

Представление функции  $\Psi_\pi$  через выражение (9) пригодно только для значений аргумента, лежащих в пределах  $|\operatorname{Re}\alpha| \leq 5\pi/2$ . Для вычисления функции  $\Psi_\pi$  через выражение (9) для аргумента  $\alpha$  вне указанного интервала необходимо использовать следующие рекуррентные соотношения [2]:

$$\Psi_\pi(\alpha + 2\pi)/\Psi_\pi(\alpha - 2\pi) = \operatorname{ctg}((\alpha + \pi/2)/2), \quad (10)$$

$$\Psi_\pi(\alpha + \pi/2)\Psi_\pi(\alpha - \pi/2) = (\Psi_\pi(\pi/2))^2 \cos(\alpha/4).$$

Применение метода перевала к интегралу (5) с подынтегральной функцией (7) дает представление поля в дальней зоне как сумму геометрической части, поля цилиндрической волны, рассеянной краем импедансной полуплоскости, и поля поверхностных волн, возбуждаемых на поверхностях полуплоскости [2]. Выражение поля цилиндрической волны, рассеянной краем импедансной полуплоскости, для электрической ( $u_E^{\text{PH}}$ ) и магнитной ( $u_H^{\text{PH}}$ ) поляризации падающей волны имеет вид:

$$u_{E,H}^{\text{PH}}(r, \varphi, \varphi_0, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-) = -\frac{\cos(\varphi_0/2) \exp(-i(kr + \pi/4))}{\Psi(\varphi_0, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-) \sqrt{8\pi kr}} \times \left( \frac{\Psi(\varphi - \pi, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-)}{\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi_0/2)} + \frac{\Psi(\varphi + \pi, \vartheta_{E,H}^+, \vartheta_{E,H}^-)}{\cos(\varphi/2) - \sin(\varphi_0/2)} \right). \quad (11)$$

### 3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассмотрим задачу рассеяния плоской волны, падающей на полуплоскость с полупрозрачными граничными условиями (4). Симметрия структуры относительно оси  $x$  позволяет представить полное поле  $u_{E,H}^t$  как суперпозицию симметричного  $u_{E,H}^c$  и антисимметричного  $u_{E,H}^a$  полей:

$$u_{E,H}^t(r, \varphi) = u_{E,H}^c(r, \varphi) + u_{E,H}^a(r, \varphi), \quad (12)$$

где

$$u_{E,H}^c(r, -\varphi) = u_{E,H}^c(r, \varphi),$$

$$\frac{\partial u_{E,H}^c(r, -\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u_{E,H}^c(r, \varphi)}{\partial \varphi},$$

$$u_{E,H}^a(r, -\varphi) = -u_{E,H}^a(r, \varphi),$$

$$\frac{\partial u_{E,H}^a(r, -\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial u_{E,H}^a(r, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Поля  $u_{E,H}^c$  и  $u_{E,H}^a$  возбуждаются падающими (п) плоскими волнами соответственно

$$u_{E,H}^{\text{nc}}(r, \varphi) = (\exp(ikr \cos(\varphi - \varphi_0)) + \exp(ikr \cos(\varphi + \varphi_0)))/2, \quad (13a)$$

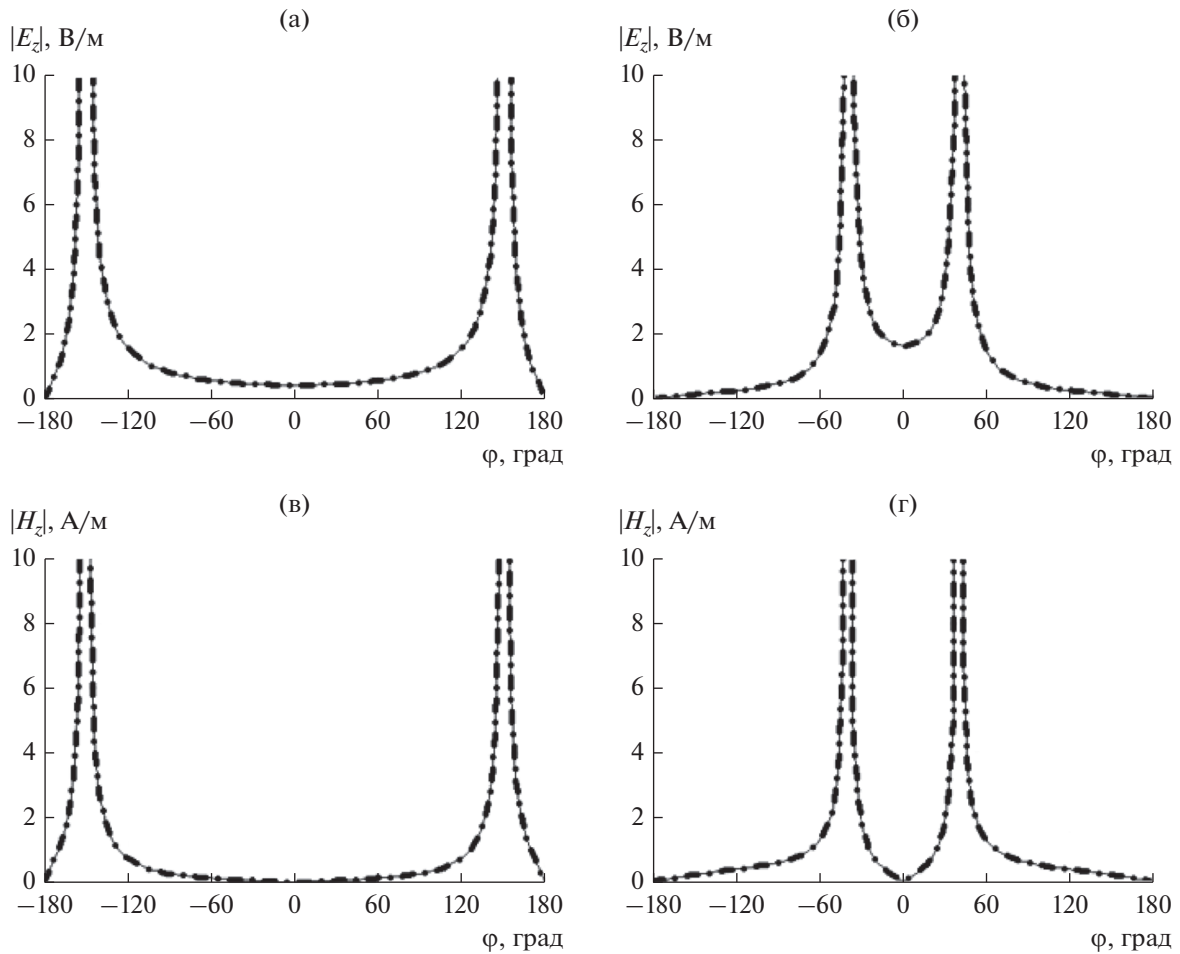
и

$$u_{E,H}^{\text{na}}(r, \varphi) = (\exp(ikr \cos(\varphi - \varphi_0)) - \exp(ikr \cos(\varphi + \varphi_0)))/2. \quad (13b)$$

Функции  $u_{E,H}^{c,a}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца  $\Delta u_{E,H}^{c,a} + k^2 u_{E,H}^{c,a} = 0$  везде, кроме поверхности полуплоскости. На поверхности полуплоскости данные функции удовлетворяют следующим условиям, полученным после подстановки (12) в (4):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_E^{c\pm}}{r \partial \varphi} \pm ik \frac{Z_0}{2Z_{zz}} u_E^{c\pm} = 0, & u_E^{a\pm} = 0, \\ \frac{\partial u_H^{a\pm}}{r \partial \varphi} \pm ik \frac{2Z_{xx}}{Z_0} u_H^{a\pm} = 0, & \frac{\partial u_H^{c\pm}}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Из (14) следует, что для  $E$ -поляризации симметричное и антисимметричное поля удовлетворяют при  $x < 0$  с учетом обозначения  $\sin \vartheta_E^\pm = Z_0/(2Z_{zz})$  импедансному граничному условию Леонтовича и граничному условию идеальной проводимости соответственно. Для  $H$ -поляризации, антисимметричное и симметричное поля удовлетворяют импедансному граничному условию Леонтовича при замене  $\sin \vartheta_H^\pm = 2Z_{xx}/Z_0$  и граничному условию идеальной проводимости соответственно. Однако видно, что для  $E$ - и  $H$ -поляризаций граничные условия  $u_E^{a\pm} = 0$  и  $\partial u_H^{c\pm}/\partial \varphi = 0$  удовлетворяются для падающего поля автоматически. Поэтому рассеянное антисимметричное поле  $E$ -поляризации или симметричное поле  $H$ -поляризации отсутствует, а полное поле совпадает с полем падающей волны. Таким образом, строгое решение зада-



**Рис. 3.** Диаграммы направленности компонент  $|E_z|$  (а, б) и  $|H_z|$  (в, г), построенные с использованием метода интеграла Зоммерфельда–Малюжинца (сплошная кривая) и метода Винера–Холфа (штрих-пунктирная) для следующих параметров: а, в)  $Z_{xx,zz} = -100i$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ$ ; б, г)  $Z_{xx,zz} = 200i$ ,  $\varphi_0 = 140^\circ$ .

чи рассеяния плоской волны полупрозрачной полуплоскостью сводится к следующей сумме:

$$\begin{aligned}
 u_E^t(r, \varphi) &= u_E^{na}(r, \varphi) + \\
 &+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \exp(ikr \cos \alpha) S_E^{st}(\alpha + \varphi) d\alpha, \\
 u_H^t(r, \varphi) &= u_H^{nc}(r, \varphi) + \\
 &+ \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \exp(ikr \cos \alpha) S_H^{st}(\alpha + \varphi) d\alpha,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_{E,H}^{st}(\alpha) &= S_{E,H}^z(\alpha, \varphi_0, \vartheta_{E,H}^{st}, \vartheta_{E,H}^{st})/2 + \\
 &+ \xi_{E,H} S_{E,H}^z(\alpha, -\varphi_0, \vartheta_{E,H}^{st}, \vartheta_{E,H}^{st})/2, \\
 \vartheta_{E,H}^{st} &= \arcsin\left(\left(2Z_{zz,xx}/Z_0\right)^{-\xi_{E,H}}\right).
 \end{aligned}$$

Применение метода перевала к интегралам в (15) позволяет представить полное поле в дальней зоне как сумму геометрической части ( $u_{E,H}^{GO}$ )

и поля цилиндрической волны, рассеянное краем полуплоскости. Геометрооптическое поле вычисляется через коэффициенты отражения ( $R_{E,H}^{st}$ ) и прохождения ( $T_{E,H}^{st}$ )  $E$ - или  $H$ -поляризованной плоской волны, падающей на бесконечную полупрозрачную плоскость, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_{E,H}^{GO}(r, \varphi) &= \exp(ikr \cos(\varphi - \varphi_0)) + \\
 &+ R_{E,H}^{st} \exp(-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)) + \\
 &+ T_{E,H}^{st} \exp(-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)), \\
 R_{E,H}^{st} &= \frac{-\xi_{E,H} Z_0 (\sin \varphi_0)^{-\xi_{E,H}}}{2Z_{zz,xx} + Z_0 (\sin \varphi_0)^{-\xi_{E,H}}}, \\
 T_{E,H}^{st} &= 1 + \xi_{E,H} R_{E,H}^{st}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Выражение поля цилиндрической волны, рассеянной краем полупрозрачной полуплоскости,

для электрической ( $u_E^{\text{ppn}}$ ) и магнитной ( $u_H^{\text{ppn}}$ ) поляризации падающей волны имеет вид

$$u_{E,H}^{\text{ppn}}(r, \varphi) = u_{E,H}^{\text{pi}}(r, \varphi, \varphi_0, \vartheta_{E,H}^{\text{st}}, \vartheta_{E,H}^{\text{st}}) / 2 + \xi_{E,H} u_{E,H}^{\text{pi}}(r, \varphi, -\varphi_0, \vartheta_{E,H}^{\text{st}}, \vartheta_{E,H}^{\text{st}}) / 2, \quad (17)$$

где  $u_{E,H}^{\text{pi}}(r, \varphi, \varphi_0, \vartheta_{E,H}^{\text{st}}, \vartheta_{E,H}^{\text{st}})$  определяется выражением (11).

Отметим, что применение метода перевала к интегралам в (15) дает также член, соответствующий поверхностной волне, возбуждаемой на полуплоскости при некоторых значениях угла Брюстера. Однако можно показать, что амплитуда данной поверхностной волны убывает как  $\exp(-\zeta r)$  ( $\zeta$  – положительная постоянная) при  $r \rightarrow \infty$ , в то время как амплитуда поля цилиндрической волны, рассеянной краем полуплоскости, убывает как  $r^{-1/2}$ . Поэтому амплитуда поля поверхностной волны в дальней зоне много меньше амплитуды  $u_{E,H}^{\text{ppn}}$ , и мы не рассматриваем ее вклад в формирование диаграммы направленности.

#### 4. ЧИСЛЕННАЯ ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ

Для проверки точности полученного решения, сравним графики диаграмм направленности волны, рассеянной краем полупрозрачной полуплоскости, построенные по формуле (17) и с помощью метода Винера–Хопфа [11]. Модули компонент электрического и магнитного рассеянного полей, построенные для  $k = \pi/10$  и различных значений импедансов полуплоскости и углов падения плоской волны, представлены на рис. 3. Кривые получены методом интеграла Зоммерфельда–Малюжинца и Винера–Хопфа и рассчитаны для двух вариантов:  $Z_{xx,zz} = -100i$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ$  и  $Z_{xx,zz} = 200i$ ,  $\varphi_0 = 140^\circ$ . Структура возбуждается в случае как  $E$ -, так и  $H$ -поляризации волной единичной амплитуды,  $|u_{E,H}^{\text{pi}}| = 1$ . Из рис. 3 видно, что амплитудные диаграммы направленности, полученные двумя методами, совпадают для всех углов наблюдения. Дополнительно-

ный анализ показывает, что фазовые диаграммы также совпадают для всех углов наблюдения для обеих поляризаций.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получено строгое решение задачи дифракции плоской волны на полупрозрачной полуплоскости методом интеграла Зоммерфельда–Малюжинца для двух поляризаций падающего поля. Используя данное строгое решение, мы получаем аналитическое выражение для поля цилиндрической волны, рассеянной краем полуплоскости, которое выражается через специальную функцию Малюжинца. Результаты сопоставления полученного решения с методом Винера–Хопфа показали хорошее совпадение двух подходов, что является подтверждением правильности приведенных в работе соотношений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Издательство иностранной литературы, 1953.
2. Малюжинец Г.Д. // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 3. С. 436.
3. Малюжинец Г.Д., Винель Г.В. // Рефераты докладов II всесоюзного симпозиума по дифракции волн. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 86.
4. Пистолькорс А.А., Каплун В.А., Князева Л.В. // РЭ. 1959. Т. 4. № 6. С. 911.
5. Хребет Н.Г. // РЭ. 1968. Т. 13. № 3. С. 387.
6. Коршунова Е.Н., Сивов А.Н. // РЭ. 1973. Т. 18. № 11. С. 2253.
7. Senior T.V.A. // Radio Science. 1975. V. 10. № 6. P. 645.
8. Нефедов Е.И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979.
9. Senior T.V.A. // Electromagnetics. 1991. V. 11. № 2. P. 183.
10. Бабич В.М., Лялинов М.А., Грикуров В.Э. Метод Зоммерфельда–Малюжинца в теории дифракции. СПб: ВВМ, 2004.
11. Банков С.Е., Весник М.В., Кравченко В.Ф. // РЭ. 2020. Т. 65. № 4. С. 363.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 551.510.535,537.868

### ВЛИЯНИЕ СЛОИСТОСТИ ЛИТОСФЕРЫ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ КРАЙНЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ

© 2021 г. Е. Д. Терещенко<sup>а</sup>, П. Е. Терещенко<sup>б, в, \*</sup><sup>а</sup>Полярный геофизический институт РАН,

ул. Халтурина, 15, Мурманск, 183010 Российская Федерация

<sup>б</sup>Санкт-Петербургский филиал Института земного магнетизма,

ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН,

Университетская набережная, 5Б, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация

<sup>в</sup>Санкт-Петербургский научный центр РАН,

Университетская набережная, 5, Санкт-Петербург, 199034 Российская Федерация

\*E-mail: tereshchenko@gmail.com

Поступила в редакцию 11.06.2020 г.

После доработки 26.08.2020 г.

Принята к публикации 01.09.2020 г.

Получено аналитическое решение задачи возбуждения электромагнитных волн горизонтальным диполем, расположенным на границе раздела между вакуумом и проводящей двуслойной средой, опирающееся на малость длины волны в проводящей среде по сравнению с вакуумом. Проведены численные расчеты, позволившие оценить эффективность такого подхода и показать, что приближенные формулы описывают поведение поля с высокой точностью. Получено асимптотическое представление для магнитного поля на границе раздела между плоскостройной Землей и атмосферой, имеющее вид волны в однородном полупространстве с коэффициентом возбуждения, зависящим от эффективной проводимости нижнего полупространства, что полезно для определения электропроводности литосферы на основе экспериментальных данных регистрации электромагнитного поля активного источника. Отмечена большая чувствительность к проводимости среды вертикальной компоненты магнитного поля по сравнению с горизонтальными.

DOI: 10.31857/S0033849421040148

#### ВВЕДЕНИЕ

Задача возбуждения электромагнитного поля диполем, расположенным на границах двух сред, анализировалась в ряде работ [1–5]. Исследования, начатые Зоммерфельдом, были дополнены Фоком, получившим аналитические решения, удобные для практического использования. В [2] было введено понятие “квазистационарное приближение” (волновое число в вакууме  $k_0 = 0$ ), в рамках которого решение задачи было представлено в виде модифицированных функций Бесселя. При этом обобщение на случай  $k_0 \neq 0$  имело вид разложения по параметру  $q = (k_0^2 - k_1^2) / (k_0^2 + k_1^2)$ , где  $k_1$  – волновое число, относящееся к проводящему полупространству. В дальнейшем результаты и выводы, полученные в [2], использовались для обоснования многих работ, связанных с дистанционным электромагнитным зондированием глубинной структуры Земли [6, 7].

В практике генерации электромагнитного поля сверх- и крайне низкочастотного диапазона используют антенны с горизонтальным током [8, 9], возбуждающие поле, которое не обладает

азимутальной симметрией. Это приводит к необходимости даже для изотропной среды определять две составляющие электрического вектор-потенциала.

Ниже рассмотрим возбуждение низкочастотного электромагнитного поля горизонтальным заземленным диполем с гармонической зависимостью от времени. Считаем, что Земля состоит из плоских слоев разной проводимости, расположенных друг над другом. В отличие от традиционного подхода при построении аналитического решения будем использовать малость параметра  $|k_0/k_j|$ , где  $k_j$  – волновое число в  $j$ -слое. Такое предположение является вполне естественным в свете реальной проводимости литосферы для частот  $f < 10^5$  Гц [4].

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим возбуждение горизонтальным заземленным вибратором поля в плоской трехслойной среде. Одну среду будем считать практически вакуумом, а две другие – проводящими средами с различными значениями проводимости. Вибратор с

током, меняющимся по монохроматическому закону  $\exp(-i\omega t)$ , где  $t$  – время,  $\omega$  – циклическая частота, расположим на границе между вакуумом и проводящей областью. Для решения такой задачи можно использовать подход, описанный ранее [10], отличим от прежней работы будет отсутствие ионосферы и учет конечности  $k_0$ .

Введем декартову систему координат  $(x, y, z)$  с центром в середине диполя, осью  $Ox$ , направленной вдоль диполя, осью  $Oy$  – в перпендикулярном горизонтальном направлении, осью  $Oz$  – перпендикулярной границе раздела. Тогда для электрического вектор-потенциала  $\vec{A}$ , относящегося к области над Землей ( $z \geq 0$ ), можно написать следующее представление:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_z \vec{e}_z,$$

$$A_x = \frac{J \Delta x}{4\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\lambda}{v_0} + \alpha_0 \right) \exp(-v_0 z) J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad (1)$$

$$A_z = -\frac{J \Delta x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \eta_0 \exp(-v_0 z) \frac{1}{\lambda} J_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

где  $\vec{e}_x, \vec{e}_z$  – орты, направленные вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ ,  $iv_j = \sqrt{k_j^2 - \lambda^2} = i\sqrt{\kappa_j^2 + \lambda^2}$ ,  $\text{Re } v_j > 0$ ,  $j = 0, 1, 2$  – указывает на среду,  $\kappa_j = -ik_j$ ,  $k_j = \omega/c \times \sqrt{\varepsilon_j/\varepsilon_0 + i\sigma_j/(\omega\varepsilon_0)}$  – волновое число в  $j$ -й среде,  $\varepsilon_0 \approx 10^{-9}/(36\pi)$  Ф/м,  $\varepsilon_j$  и  $\sigma_j$  – диэлектрическая проницаемость и проводимость,  $J \Delta x$  – момент тока,  $J_0(\lambda \rho)$  – функция Бесселя первого рода,  $\rho$  – расстояние между элементарным диполем и проекцией точки, в которой вычисляется потенциал, на плоскость  $(x, y, 0)$ .

Коэффициенты  $\alpha_0$  и  $\eta_0$  находятся из граничных условий для потенциала. Для трехслойной среды получаем

$$\alpha_0 = -\frac{\lambda}{v_0} \frac{D(-v_0)}{D(v_0)},$$

где

$$D(v_0) = (v_0 + v_1)(v_1 + v_2) + (v_0 - v_1)(v_1 - v_2) \exp(-2v_1 d),$$

$$D(-v_0) = D(v_0)|_{v_0 \rightarrow -v_0},$$

$d$  – толщина первого слоя, примыкающего к вакууму.

Выражение для  $\eta_0$  имеет более сложную структуру и может быть представлено для трехслойной среды в следующем виде:

$$\eta_0 = D_\eta \left( \frac{\lambda}{v_0} + \alpha_0 \right) + \frac{8\lambda^2 k_0^2 v_1^2}{D(v_0) D_z} (k_1^2 - k_2^2) \exp(-2v_1 d), \quad (2)$$

где

$$D_\eta = \frac{\lambda}{D_z} (k_0^2 - k_1^2) \times \times \left[ (k_1^2 v_2 + k_2^2 v_1) - (k_1^2 v_2 - k_2^2 v_1) \exp(-2v_1 d) \right],$$

$$D_z = (k_0^2 v_1 + k_1^2 v_0)(k_1^2 v_2 + k_2^2 v_1) + (k_0^2 v_1 - k_1^2 v_0)(k_1^2 v_2 - k_2^2 v_1) \exp(-2v_1 d).$$

Из формулы (2) следуют предельные соотношения. Для однородной Земли  $d \rightarrow \infty$  или  $k_1 = k_2$

$$\eta_0 = \frac{2(\kappa_0^2 - \kappa_1^2)\lambda^2}{(v_0 + v_1)(\kappa_0^2 v_1 + \kappa_1^2 v_0)} \quad (3)$$

и приближение, справедливое для малых значений  $|k_0^2/k_j| \ll 1$  ( $j = 1, 2$ ), имеет вид

$$\eta_0 = -\frac{\lambda}{v_0} \left( \frac{\lambda}{v_0} + \alpha_0 \right). \quad (4)$$

Подстановка (4) в (1) показывает, что такое приближение эквивалентно выполнению в области  $z \geq 0$  условия  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

Магнитное поле  $\vec{H}(\rho, z)$  связано с вектор-потенциалом формулой  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ . Воспользовавшись соотношением (1), получаем

$$H_x(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial y} A_z, \quad H_y(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z. \quad (5)$$

В качестве первого шага воспользуемся полученными результатами для обоснования возможности использования приближения  $|k_0^2/k_1^2| \ll 1$  при вычислении поля на границе двух сред.

## 2. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ЗЕМЛИ

Подстановка в (5) выражения (3) для  $\eta_0$  позволяет представить выражение для  $H_x$ -компоненты магнитного поля на границе раздела в следующем виде:

$$H_x(\rho, 0) = \frac{J \Delta x}{2\pi} \left( 1 - \frac{k_0^2}{k_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \times \int_0^\infty \frac{\exp(-v_0 z)}{(v_1 + v_0)(v_0 + k_0^2/k_1^2 v_1)} J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda, \quad z \rightarrow +0. \quad (6)$$

Здесь знак плюс “+” указывает, что подходим к границе между вакуумом и проводящей средой сверху. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{y}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho},$$



выполним дифференцирование по  $y$  в формуле (6). В результате получим

$$H_x(\rho, 0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\rho^3} F_x, \quad (7)$$

где обозначено

$$F_x = \rho^2 \kappa_1 \left(1 - \frac{\kappa_0^2}{\kappa_1^2}\right) \int_0^\infty \frac{\exp(-v_0 z)}{(v_1 + v_0)(v_0 + \kappa_0^2/\kappa_1^2 v_1)} \times J_1(\lambda \rho) \lambda^2 d\lambda, \quad z \rightarrow +0.$$

Здесь  $J_1(\lambda \rho)$  – функция Бесселя с индексом, равным единице. Если ввести безразмерные величины  $r_1 = \rho \kappa_1$ ,  $r_0 = \rho \kappa_0$ ,  $s = \lambda \rho$  и  $\tau_j = \sqrt{s^2 + r_j^2}$ ,  $j = (0, 1)$ , то в этих обозначениях  $F_x$  можно записать следующим образом:

$$F_x = r_1 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) \times \int_0^\infty \frac{1}{(\tau_1 + \tau_0)(\tau_0 + r_0^2/r_1^2 \tau_1)} J_1(s) s^2 ds. \quad (8)$$

Пренебрегая членами, содержащими  $r_0^2/r_1^2 = k_0^2/k_1^2$ , получим приближенную формулу для  $F_x$ , связанную с  $H_x$  компонентой магнитного поля:

$$\tilde{F}_x = F_x \Big|_{k_0^2/k_1^2 \ll 1} = r_1 \int_0^\infty \frac{J_1(s) s^2}{(\tau_1 + \tau_0) \tau_0} ds.$$

В отличие от функции  $F_x$  для  $\tilde{F}_x$  несложно найти аналитическое представление, выполнив интегрирование по  $s$ . Воспользовавшись схемой, предложенной в работе [2], после ряда преобразований можно получить

$$\tilde{F}_x = r_1 I_1 \left( \frac{r_1 - r_0}{2} \right) K_1 \left( \frac{r_1 + r_0}{2} \right) + \frac{r_1 r_0}{2} \times \left[ I_0 \left( \frac{r_1 - r_0}{2} \right) K_1 \left( \frac{r_1 + r_0}{2} \right) + I_1 \left( \frac{r_1 - r_0}{2} \right) K_0 \left( \frac{r_1 + r_0}{2} \right) \right], \quad (9)$$

где  $I_0, I_1, K_0, K_1$  – цилиндрические функции мнимого аргумента. Для квазистационарного приближения  $r_0 = 0$  и, соответственно,

$$\tilde{F}_x \Big|_{r_0=0} = r_1 I_1 \left( \frac{r_1}{2} \right) K_1 \left( \frac{r_1}{2} \right).$$

Если  $|r_1 \pm r_0|/2 \gg 1$ , то имеет место асимптотическое представление:

$$\tilde{F}_x \sim (1 + r_0) \exp(-r_0), \quad |r_1 \pm r_0|/2 \gg 1, \quad (10)$$

т.е. функция, имеющая структуру волны в верхнем полупространстве, не зависящая от проводимости нижнего полупространства, определяемая расстоянием до точки наблюдения и частотой.

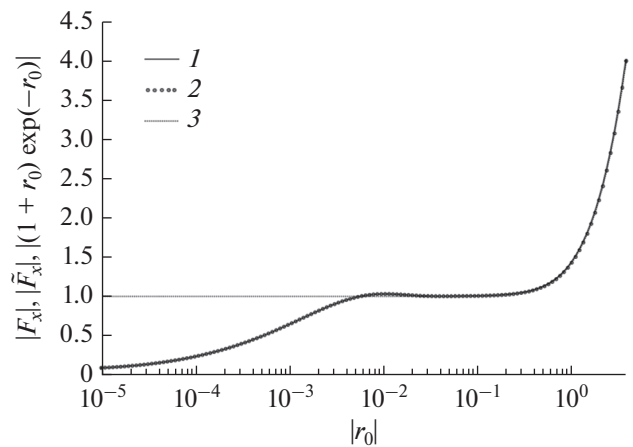


Рис. 1. Зависимость от безразмерного расстояния  $|r_0|$  функции  $|F_x|$  (1), аппроксимации  $|\tilde{F}_x|$  (2) и функции  $|(1 + r_0) \exp(-r_0)|$  (3) для горизонтального диполя на границе двух однородных сред.

Оценим возможность замены функции  $F_x$  на ее приближение  $\tilde{F}_x$  в сверхнизкочастотном и крайне низкочастотном (СНЧ-КНЧ) и более низкочастотном диапазоне. С этой целью выполним численные расчеты по формуле (8) и сравним их с результатами, определяемыми выражением (9). Результаты сравнения  $F_x$  и  $\tilde{F}_x$  удобно представить в виде зависимости от параметра  $|r_0|$ . При этом для рассматриваемого диапазона можно представить  $r_1$  в следующем виде:

$$r_1 = r_0^{1/2} \frac{\sqrt{\sigma_1 \rho}}{\sqrt{c \epsilon_0}} = r_0^{1/2} \sqrt{120 \pi \sigma_1 \rho}.$$

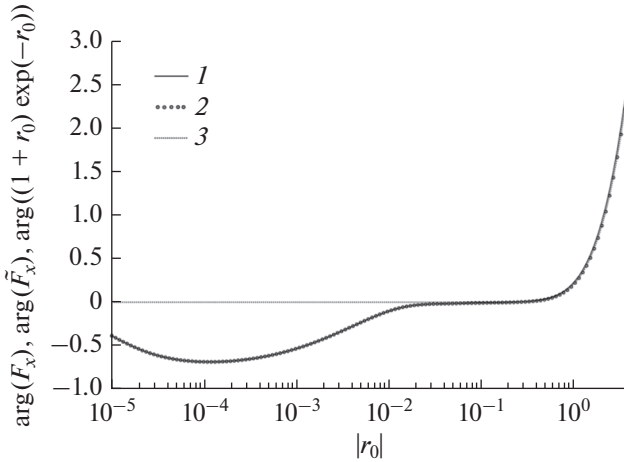
На рис. 1, 2 приведены результаты расчета модуля и фазы функций  $F_x, \tilde{F}_x$  и  $(1 + r_0) \exp(-r_0)$ . Значение  $\sigma_1 \rho = 6$  См близко к реальной ситуации в эксперименте FENICS-2014 [10] при регистрации поля в обсерватории Ловозеро. Из графиков видно совпадение функций  $F_x$  и  $\tilde{F}_x$  во всем диапазоне изменения  $r_0$ .

Следующий шаг – анализ  $H_y(\rho, z)$ . Запишем эту компоненту магнитного поля в виде

$$H_y(\rho, 0) = \frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1} \left[ \frac{1}{\rho^3} F_y + \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\rho^3} F_x \right],$$

где  $F_x$  определена формулой (8), а

$$F_y = \frac{r_1}{2} \int_0^\infty \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 + \tau_0} J_0(s) s ds.$$



**Рис. 2.** Зависимость от безразмерного расстояния  $|r_0|$  функции  $\arg(F_x)$  (1), аппроксимации  $\arg(\tilde{F}_x)$  (2) и функции  $\arg((1+r_0)\exp(-r_0))$  (3) для горизонтального диполя на границе двух однородных сред.

Выполняя интегрирование по  $s$ , получим

$$F_y = \frac{(r_1^2 - r_0^2)r_1}{8} \times \left[ I_0\left(\frac{r_1 - r_0}{2}\right) K_0\left(\frac{r_1 + r_0}{2}\right) - I_2\left(\frac{r_1 - r_0}{2}\right) K_2\left(\frac{r_1 + r_0}{2}\right) \right]. \quad (11)$$

$$H_x(\rho, 0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \times \int_0^\infty \frac{[v_1 + v_2 + (v_1 - v_2)\exp(-2v_1d)]\exp(-2v_0z)}{v_0[(v_0 + v_1)(v_1 + v_2) + (v_0 - v_1)(v_1 - v_2)\exp(-2v_1d)]} J_0(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \quad z \rightarrow +0.$$

Выполняя дифференцирование по  $y$ , находим

$$H_x(\rho, 0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_{\text{эф}}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\rho^3} (\tilde{F}_x)_{\text{эф}}, \quad (12)$$

где

$$(\tilde{F}_x)_{\text{эф}} = \rho\kappa_{\text{эф}} \int_0^\infty \frac{[\tau_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)\exp(-2\tau_1d/\rho)]}{\tau_0[(\tau_0 + \tau_1)(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_0 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2)\exp(-2\tau_1d/\rho)]} J_1(s)s^2 ds.$$

Для аналогии с (7) ввели коэффициент  $\kappa_{\text{эф}}$ . Выберем его так, а соответственно, и проводимость, чтобы  $\tilde{F}_{\text{эф}}$  как при  $d \rightarrow \infty$ ,  $|r_1/2| > 1$ , так и при  $d \rightarrow 0$ ,  $|r_2/2| > 1$ , совпадало с асимптотическим значением  $\tilde{F}_x$ , определяемым формулой (10). Если взять значение  $\sigma_{\text{эф}}$ , следующее из выражения для импеданса плоской волны для двухслойной среды [4]

$$\sqrt{\sigma_{\text{эф}}} = \sqrt{\sigma_1} \frac{1 + R\exp(-2\kappa_1d)}{1 - R\exp(-2\kappa_1d)}, \quad R = \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2} + \sqrt{\sigma_1}},$$

При совместном выполнении ограничений  $|r_0/r_1| \ll 1$  и  $|(r_1 \pm r_0)/2| > 1$  формула (11) имеет асимптотическое представление, аналогичное  $\tilde{F}_x$ :

$$\tilde{F}_y \sim (1 + r_0)\exp(-r_0).$$

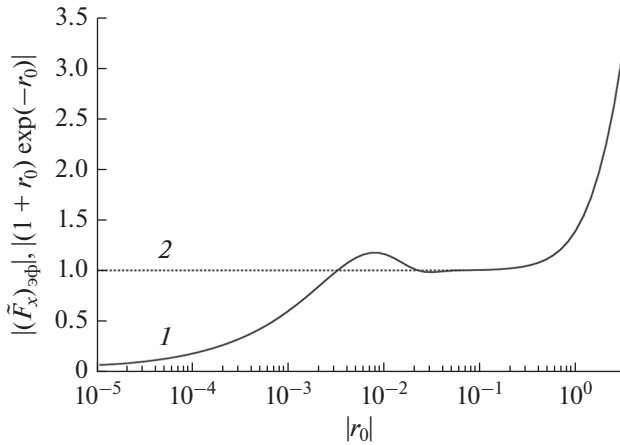
Подводя итог, можно сказать, что для однородного полупространства приближенные формулы, полученные в предположении  $|k_0/k_1| < 1$ , достаточно полно описывают поведение поля и дают хорошее количественное согласие с точными формулами. Причиной такого совпадения являются осциллирующие функции Бесселя в подынтегральных выражениях, из-за которых вклад в интеграл областей с большими значениями переменной интегрирования мал. Поэтому в задаче со слоистой Землей возможен переход от точного выражения для  $\eta_0$  к его приближению (3).

### 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

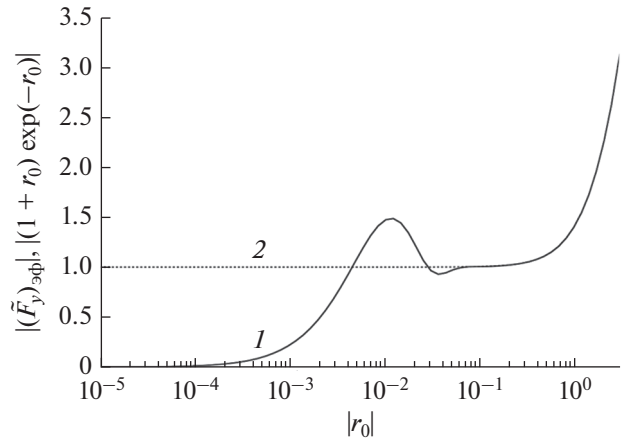
Рассмотрим возбуждение горизонтальным диполем магнитного поля для модели Земли в виде двух слоев с различной проводимостью. Используя приближение  $|k_0^2/k_j^2| \ll 1$ ,  $j = 1, 2$ , для низкочастотного диапазона из (5) с учетом (4) получим

то с учетом того, что  $\kappa_{\text{эф}} = (1 - i)/\sqrt{2}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_{\text{эф}}}$ , несложно показать справедливость высказанного требования.

Рассмотрим поведение функции  $(\tilde{F}_x)_{\text{эф}}$  в случае конечной, не равной нулю, толщины первого слоя. На рис. 3 представлены результаты расчета модуля и фазы функции  $(\tilde{F}_x)_{\text{эф}}$  для двухслойной модели Земли с проводимостью  $\sigma_1 = 10^{-4}$  См/м,  $\sigma_2 = 10^{-5}$  См/м и толщиной первого слоя  $d = 12 \times 10^3$  м. Для сравнения на этих графиках



**Рис. 3.** Сравнение функций  $|(F_x)_{эф}|$  (1) и  $|(1+r_0)\exp(-r_0)|$  (2) при двухслойной среде под диполем.



**Рис. 4.** Сравнение функций  $|(F_y)_{эф}|$  (1) и  $|(1+r_0)\exp(-r_0)|$  (2) при двухслойной среде под диполем.

показаны значения функции  $(1+r_0)\exp(-r_0)$ . Видим, что при  $|r_0| > 8 \times 10^{-2}$ , функция  $(F_x)_{эф}$  хорошо аппроксимируется этим выражением. Преобразуем (12) следующим образом

$$H_x(\rho, 0) = -\frac{J\Delta x \kappa_1}{2\pi \kappa_{эф}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{\rho^3} \frac{(F_x)_{эф} \tilde{F}_x}{\tilde{F}_x \kappa_1} \right).$$

При равенстве функций  $(F_x)_{эф}$  и  $\tilde{F}_x$  получаем

$$H_x(\rho, 0) = \frac{Z_g}{Z_1} H_x(\rho, 0)|_{\sigma_1=\sigma_2}, \quad (13)$$

$$\frac{Z_g}{Z_1} = \frac{1 - R \exp(-\kappa_1 d)}{1 + R \exp(-\kappa_1 d)},$$

т.е. произведение отношения импедансов двухслойного и однородного полупространства и поля, возбуждаемого диполем, расположенным на границе между вакуумом и проводящей средой.

Для компоненты  $H_y(\rho, 0)$  вычисления подобны сделанным для  $H_x(\rho, 0)$ . Так как второе слагаемое в (5) сводится к составляющей поля  $H_x(\rho, 0)$ , то рассмотрим  $\partial/\partial z A_x$ . Для двухслойной среды представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} A_x|_{z=0} = \frac{J\Delta x}{2\pi \kappa_{эф} \rho^3} (F_y)_{эф},$$

где

$$(F_y)_{эф} = \frac{r_{эф}}{2} \int_0^\infty \frac{(\tau_1 - \tau_0)(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_0 + \tau_1)(\tau_2 - \tau_1) \exp(-2\tau_1 d/\rho)}{(\tau_0 + \tau_1)(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_1 - \tau_0)(\tau_2 - \tau_1) \exp(-2\tau_1 d/\rho)} J_0(s) s ds,$$

$$r_{эф} = \rho \kappa_{эф}.$$

На рис. 4 приведены результаты расчета модуля и фазы функций  $(F_y)_{эф}$  и  $(1+r_0)\exp(-r_0)$  с теми же параметрами, что и для рис. 3. Видим поведение  $(F_y)_{эф}$  подобно ранее рассмотренному для  $(F_x)_{эф}$ . При этом  $(F_y)_{эф}$  идентична  $(1+r_0)\exp(-r_0)$  при  $|r_0| > 8 \times 10^{-2}$ . Поэтому и составляющую  $H_y(\rho, 0)$  можно записать аналогично (13), а значит, и для

тангенциальной составляющей будет иметь место соотношение

$$\vec{H}_\tau(\rho, 0) = \frac{Z_g}{Z_1} \vec{H}_\tau(\rho, 0)|_{\sigma_1=\sigma_2}. \quad (14)$$

Такие же преобразования можно применить и к вертикальной составляющей магнитного поля. В результате можно прийти к следующему выражению:

$$H_z(\rho, 0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi \kappa_{эф}^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{(F_z)_{эф}}{\rho^3},$$

$$(F_z)_{эф} = r_{эф}^2 \int_0^\infty \frac{\tau_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2) \exp(-2\tau_1 d/\rho)}{(\tau_0 + \tau_1)(\tau_1 + \tau_2) + (\tau_0 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_2) \exp(-2\tau_1 d/\rho)} J_0(s) s ds. \quad (15)$$

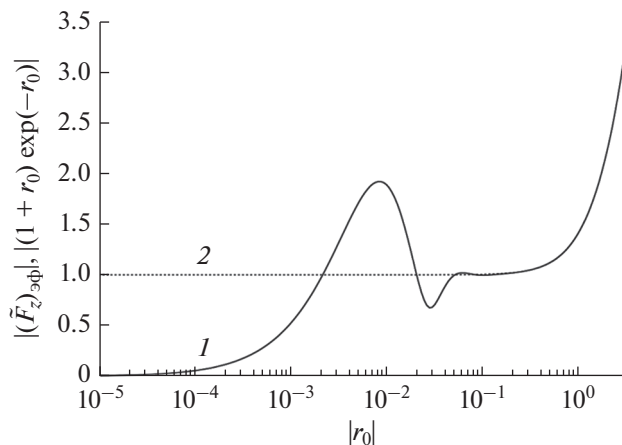


Рис. 5. Сравнение функций  $|(F_z)_{эф}|$  (1) и  $|(1 + r_0) \exp(-r_0)|$  (2) при двухслойной среде под диполем.

На рис. 5 приведен результат сравнения  $(F_z)_{эф}$  и  $(1 + r_0) \exp(-r_0)$ . Видно, что с ростом  $|r_0|$  происходит совпадение этих функций. Наличие  $\kappa_{эф}^2$  в (15), в отличие от горизонтальных составляющих, где в определяющие их выражения входит  $\kappa_{эф}$  в первой степени, указывает на большую чувствительность к проводимости среды вертикальной компоненты магнитного поля, что отмечалось и в экспериментальных данных [11].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решение задачи возбуждения электромагнитных волн горизонтальным диполем, расположенным на границе раздела между вакуумом и проводящей двухслойной средой, позволило оценить эффективность подхода к определению поля, опирающегося на малость длины волны в проводящей среде по сравнению с вакуумом. Сравнение численных расчетов по точным и приближенным формулам показало целесообразность такого подхода как в задаче с однородным полупространством, так и для слоистой среды.

Для расстояний от источника, превышающих величину скин-слоя любого из проводящих слоев, найдено асимптотическое представление для магнитного поля на границе раздела между плоско-слоистой Землей и атмосферой, имеющее вид волны в однородном полупространстве с коэффициен-

том возбуждения, зависящим от эффективной проводимости нижнего полупространства.

Этот результат полезен для интерпретации данных экспериментов с активным источником, где известны параметры источника и геометрия эксперимента, а требуется определить электропроводность Земли. Используя формулу (14), легко перейти от поля диполя к полю реальной антенны. Результат интегрирования по длине антенны будет зависеть лишь от поля диполя, расположенного на границе двух сред.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-05-00823).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sommerfeld A. // Ann. Phys. 1909. V. 333. № 4. P. 665. <https://doi.org/10.1002/andp.19093330402>
2. Fock V. // Ann. Phys. 1933. V. 409. № 4. P. 401. <https://doi.org/10.1002/andp.19334090405>
3. Wait J.R. *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. N.Y.: Pergamon press, 1962.
4. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. *Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью*. М.: Наука, 1991.
5. Терещенко Е.Д., Терещенко П.Е. // РЭ. 2018. Т. 63. № 4. С. 323. <https://doi.org/10.7868/S0033849418040034>
6. Ваньян Л.Л. *Электромагнитные зондирования*. М.: Научный мир, 1997.
7. Ковтун А.А. *Строение коры и верхней мантии на северо-западе Восточно-Европейской платформы по данным магнитотеллурического зондирования*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.
8. Bannister P.B. // Radio Sci. 1986. V. 21. № 3. P. 529. <https://doi.org/10.1029/RS021i004p00605>
9. Велухов Е.П., Кононов Ю.М., Шорин В.И. и др. *Способ электромагнитного зондирования земной коры с использованием нормированных источников поля* // Пат. РФ № 2093863. Оpubл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" № 30 от 20.10.1997.
10. Терещенко Е.Д., Сидоренко А.Е., Терещенко П.Е. // ЖТФ. 2019. Т. 89. № 7. С. 1098. <https://doi.org/10.21883/JTF.2019.07.47805.388-18>
11. Терещенко Е.Д., Григорьев В.Ф., Терещенко П.Е., Юрик Р.Ю. // Вестн. Кольского науч. центра РАН. Апатиты: Кольский научный центр РАН, 2013. № 3. С. 34.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874

### ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СРЕДЫ С ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2021 г. В. И. Пономаренко<sup>а, \*</sup>, И. М. Лагунов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,  
просп. акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007 Российская Федерация

\*E-mail: vponom@gmail.com

Поступила в редакцию 29.03.2020 г.

После доработки 22.11.2020 г.

Принята к публикации 23.11.2020 г.

Рассмотрен композиционный материал на основе одинаково ориентированных эллипсоидальных включений, распределенных в связующей среде. Введено представление о действующем в композите поле и действующей диэлектрической проницаемости. Получена формула для эффективной диэлектрической проницаемости композита, в частных случаях переходящая в известные формулы Лорентца и Лоренца, Максвелла Гарнетта и Бругемана. Сравнением результатов расчетов с экспериментом показана применимость действующей диэлектрической проницаемости как подгоночного параметра.

DOI: 10.31857/S0033849421040094

#### ВВЕДЕНИЕ

Композиционные материалы на основе частиц наполнителя (включений), распределенных в связующей среде (матрице), перспективны для применения в технике СВЧ, в частности, в качестве радиопоглощающих [1, 2]. Взаимодействие таких немагнитных материалов с электромагнитным полем определяется их эффективной диэлектрической проницаемостью (ЭДП). При ее вычислении в приближении Максвелла Гарнетта (МГ) предполагается, что частицы-включения находятся в среде с диэлектрической проницаемостью, равной проницаемости материала матрицы, при этом действующее на включения поле равно объемно усредненному полю в матрице [3]. Такое предположение наиболее соответствует случаю пространственно упорядоченного распределения включений в композите. Адекватность такой трактовки приближения МГ подтверждают результаты работ [4–6]. В [4] на основе точного решения задачи для потенциала показано, что формула МГ для композита со сферическими включениями является первым приближением в формуле для ЭДП кубической решетки, образованной сферическими частицами. В [5] на основе решения задачи дифракции получена приближенная формула для ЭДП композита на основе кубической решетки сферических включений, которая в частном случае отсутствия скин-эффекта переходит в формулу МГ. В [6] показано,

что учет упорядочения расположения в композите сферических включений, возникающего при наличии матричного слоя на включениях, приводит к формуле МГ, если все вещество матрицы входит в оболочки включений.

В теории эффективной среды Бругемана предполагается, что включения погружены в среду, диэлектрическая проницаемость которой равна ЭДП, при этом действующее на включение поле равно среднему полю в композите [3]. Такое предположение наиболее соответствует случаю, когда композит представляет собой идеально перемешанную смесь частиц матрицы и частиц-включений или, в случае сплошной матрицы, предельно разупорядоченному расположению включений в матрице. На адекватность такой трактовки указывает и то, что в формулу Бругемана для композита со сферическими включениями объемные концентрации и диэлектрические проницаемости включений и матрицы входят симметрично.

Таким образом, теории МГ и Бругемана следует рассматривать как относящиеся к крайним вариантам расположения включений в композите. В реальности, однако, в композите нет как полного хаоса, так и полного упорядочения. Поэтому в общем случае следует предположить, что частицы композита и матрицы находятся в некотором поле  $\vec{E}$ , которое назовем действующим, в общем случае не совпадающем ни со средним по-

лем в матрице, ни со средним полем в композите. При этом частицы матрицы и включения погружены в среду с некоторой диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}$ , которую назовем действующей, не совпадающей ни с проницаемостью матрицы (теория МГ), ни с ЭДП (теория Бруггемана).

## 1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Рассмотрим композит, состоящий из смеси эллипсоидальных частиц, главные оси которых направлены вдоль среднего поля в композите (ось  $x$ ). Эффективную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  зададим обычным образом как отношение усредненной по объему индукции к среднему полю [3]:

$$\epsilon = \frac{\sum_k c_k \epsilon_k E_k}{\sum_k c_k E_k}, \quad (1)$$

где  $c_k$  — объемная концентрация компоненты смеси с номером  $k$ ,  $\epsilon_k$  — диэлектрическая проницаемость частиц этой компоненты,  $E_k$  — среднее поле в них. Имеем

$$c_k = N_k v_k, \quad \sum_k N_k v_k = 1, \quad (2)$$

где  $N_k$  — число частиц компоненты  $k$  в единице объема,  $v_k$  — объем одной частицы этой компоненты. Формулу (1) запишем в тождественном виде:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} \left\{ 1 + \frac{\sum_k N_k v_k \frac{\epsilon_k - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} E_k}{\sum_k N_k v_k E_k} \right\}. \quad (3)$$

Применим формулу для поляризуемости  $\alpha_k$  в однородном поле эллипсоида, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}$  [7]:

$$\alpha_k = v_k \frac{\epsilon_k - \tilde{\epsilon}}{1 + n_k \frac{\epsilon_k - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}}}, \quad (4)$$

где  $n_k$  — коэффициент деполяризации вдоль оси  $x$ . Из (4) получим

$$\frac{\epsilon_k - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} = \frac{\alpha_k}{v_k \tilde{\epsilon} - \alpha_k n_k}. \quad (5)$$

Считая эллипсоид находящимся во внешнем поле  $\tilde{E}$ , для значения поля в эллипсоиде применим формулу [3]

$$E_k = \frac{\tilde{E}}{1 + n_k \frac{\epsilon_k - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}}}. \quad (6)$$

Из (5), (6) находим

$$E_k = \frac{\tilde{E} (v_k \tilde{\epsilon} - \alpha_k n_k)}{v_k \tilde{\epsilon}}. \quad (7)$$

Подставляя (5), (7) в (3) и учитывая (2), получим в результате простых преобразований

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} \left( 1 + \frac{\sum_k N_k \alpha_k}{\tilde{\epsilon} - \sum_k N_k \alpha_k n_k} \right). \quad (8)$$

Установим связь между величинами  $\tilde{\epsilon}$  и  $\tilde{E}$ . С учетом (7) имеем

$$\sum_k N_k v_k E_k = \frac{\tilde{E}}{\tilde{\epsilon}} \left( \sum_k N_k v_k \tilde{\epsilon} - \sum_k N_k \alpha_k n_k \right). \quad (9)$$

Левая часть (9) равна среднему полю  $E$  в композите. С учетом (2) находим отношение действующего поля к среднему полю:

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - \sum_k N_k \alpha_k n_k}. \quad (10)$$

Пусть композит состоит из непрерывной матрицы с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  и включений. Матрицу можно рассматривать как состоящую из бесконечного множества заполняющих пространство между включениями эллипсоидов, как сплюснутых, так и вытянутых, имеющих разные размеры, в том числе предельно малые. Формулы (8), (10) примут вид

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} \left( 1 + \frac{S_1 + \sum_m N_m \alpha_m}{\tilde{\epsilon} - S_2 - \sum_m N_m \alpha_m n_m} \right), \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - S_2 - \sum_m N_m \alpha_m n_m}, \quad (12)$$

где номера  $m$  относятся лишь к компонентам из частиц-включений,

$$S_1 = \sum_k N_k^{(1)} \alpha_k^{(1)}, \quad S_2 = \sum_k N_k^{(1)} \alpha_k^{(1)} n_k^{(1)}, \quad (13)$$

$$\alpha_k^{(1)} = v_k^{(1)} \frac{\epsilon_1 - \tilde{\epsilon}}{1 + n_k^{(1)} \frac{\epsilon_1 - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}}}. \quad (14)$$

Верхний индекс 1 в скобках означает, что данная величина относится к частицам матрицы. В сред-

нем будем считать частицы матрицы сферическими. Полагая  $n_k^{(1)} = 1/3$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , получим

$$S_1 = \frac{3(1-c)(\epsilon_1 - \tilde{\epsilon})\tilde{\epsilon}}{2\tilde{\epsilon} + \epsilon_1}, \quad S_2 = \frac{1}{3}S_1, \quad (15)$$

где

$$c = 1 - \sum_k N_k^{(1)} v_k^{(1)}$$

— объемная концентрация включений.

Если нет оснований считать структуру композита полностью хаотичной или достаточно упорядоченной, то величину  $\tilde{\epsilon}$  можно использовать как подгоночный параметр, например, варьируя ее путем изменения параметра  $x$  в формуле

$$\tilde{\epsilon}(x) = \epsilon_1 + (\epsilon_B - \epsilon_1)x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (16)$$

где  $\tilde{\epsilon}(0) = \epsilon_1$  соответствует приближению МГ,  $\tilde{\epsilon}(1) = \epsilon_B$  соответствует теории Бруггемана ( $\epsilon_B$  — значение ЭДП, полученное из (11) при  $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ ).

При различной ориентации включений примененный подход к нахождению ЭДП остается в силе, но имеет место существенное усложнение формул вследствие необходимости выражать величины через углы ориентации включений по отношению к оси  $x$ , параллельной среднему полю, по которой вычисляется эффективная проницаемость, а также через коэффициенты деполяризации по трем главным осям эллипсоидальных частиц.

Полученные формулы для вычисления ЭДП очевидным образом применимы для вычисления эффективной магнитной проницаемости композитов на основе магнитодиэлектрических частиц.

## 2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Для композита с одним видом включений с проницаемостью  $\epsilon_2$  и коэффициентом деполяризации  $n$  формулы (11), (12) имеют вид

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} \left( 1 + \frac{S_1 + N\alpha}{\tilde{\epsilon} - S_2 - N\alpha n} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - S_2 - N\alpha n}, \quad (18)$$

где  $N$  — число частиц-включений в единице объема,

$$\alpha = v \frac{\epsilon_2 - \tilde{\epsilon}}{1 + n \frac{\epsilon_2 - \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}}}, \quad (19)$$

$v$  — объем одного включения.

Применяя приближение МГ, получим из (17), (15) при  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1$

$$\epsilon = \epsilon_1 \left( 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_1 - N\alpha n} \right). \quad (20)$$

Формула (20) совпадает при  $n = 1/3$  с формулой Лорентц—Лоренца, полученной на основе представления о локальном поле, действующем на включения [8]. Учитывая, что  $Nv = c$ , из (20) получим

$$\epsilon = \epsilon_1 \left( 1 + \frac{c(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 + n(1-c)(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \right). \quad (21)$$

Применяя приближение Бруггемана, положим в (15), (17), (19)  $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ . Получим

$$\frac{3(1-c)(\epsilon_1 - \epsilon)}{2\epsilon + \epsilon_1} + \frac{c(\epsilon_2 - \epsilon)}{(1-n)\epsilon + n\epsilon_2} = 0. \quad (22)$$

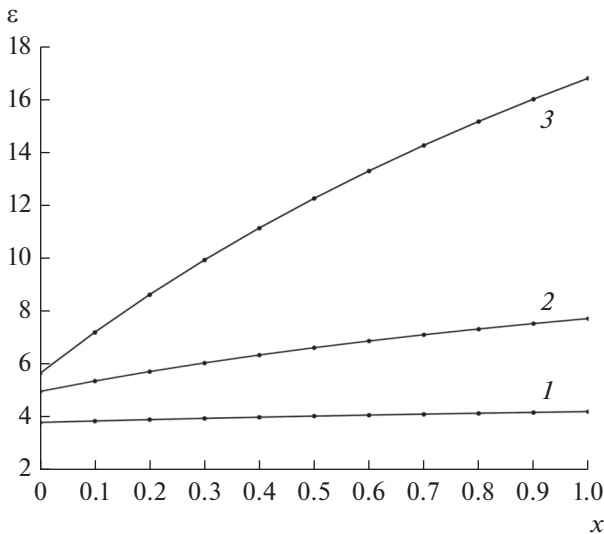
Простыми преобразованиями формула (22) приводится к квадратному уравнению относительно  $\epsilon$ . При  $n = 1/3$  (21), (22) переходят в формулы МГ и Бруггемана для композита со сферическими включениями [3].

В случае переменных полей полученные формулы для ЭДП формально применимы лишь в случае слабого скин-эффекта во включениях, поскольку при их выводе применялись статические формулы (4), (6). Однако, как показано в [6], в случае сферических включений подстановка в (20) на место величины  $\alpha$  квазистатической поляризуемости сферической частицы в среде с проницаемостью, равной проницаемости матрицы, приводит к известной формуле Левина, полученной путем приближенного решения задачи дифракции на кубической решетке сферических частиц [5]. Такой результат дает основания считать возможным применение формул (11), (17) и в случае существенного скин-эффекта в частицах, если подставить в эти формулы квазистатическую поляризуемость частиц.

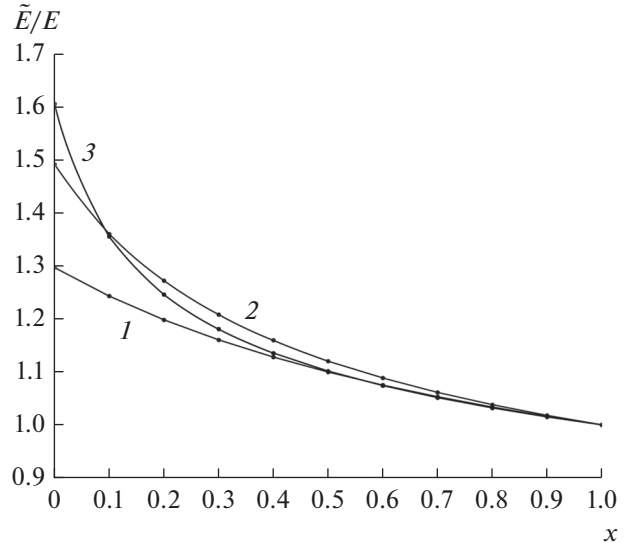
Одним из перспективных радиопоглощающих материалов является композит на основе отрезков углеродных волокон-диполей, длина которых на порядки превосходит их толщину. Моделью такого цилиндрического включения служит вытянутый эллипсоид вращения, объем которого равен объему включения [9]. Такой иглообразный эллипсоид эффективно взаимодействует лишь с составляющей электрического поля вдоль его длинной оси. Это позволяет сопоставить композиту с хаотически ориентированными в плоскости иглообразными включениями композит с одинаково ориентированными в направлении поля включениями и применить формулу (17), произведя в ней замену:

$$N \rightarrow KN, \quad (23)$$





**Рис. 1.** Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости композита на основе сферических включений от параметра  $x$ , определяющего величину  $\tilde{\epsilon}$  при  $\epsilon_2 = 10$  (1), 30 (2) и 100 (3).



**Рис. 2.** Зависимость отношения действующего поля к среднему полю для композита на основе сферических включений от параметра  $x$  при  $\epsilon_2 = 10$  (1), 30 (2) и 100 (3).

где  $K$  – фактор ориентации;  $K = 1$  при ориентации длинных осей эллипсоидов вдоль поля,  $K = 1/3$  при хаотической ориентации включений в пространстве и  $K = 1/2$  при хаотической ориентации в плоскости, параллельной среднему полю в композите [9].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 1 приведены зависимости ЭДП композита со сферическими включениями от параметра  $x$ , определяющего величину  $\tilde{\epsilon}$  согласно зависимости (16). При расчетах ЭДП по формулам (17), (19) полагалось  $\epsilon_1 = 2$ ,  $Nv = c = 0.4$ ,  $n = 1/3$ . Значения диэлектрической проницаемости включений  $\epsilon_2$  были равны 10, 20, 100. Соответствующее теории Бруггемана значение  $\epsilon_B$  эффективной диэлектрической проницаемости вычисляли по формуле (22). Видно, что зависимость ЭДП от действующей диэлектрической проницаемости (параметра  $x$ ) тем сильнее, чем больше проницаемость включений  $\epsilon_2$ , при этом ЭДП тем больше, чем ближе значение  $\tilde{\epsilon}$  к величине  $\epsilon_B$ . Соответствующие зависимости отношения действующего поля к среднему полю в композите, вычисленные по формулам (16), (19), приведены на рис. 2.

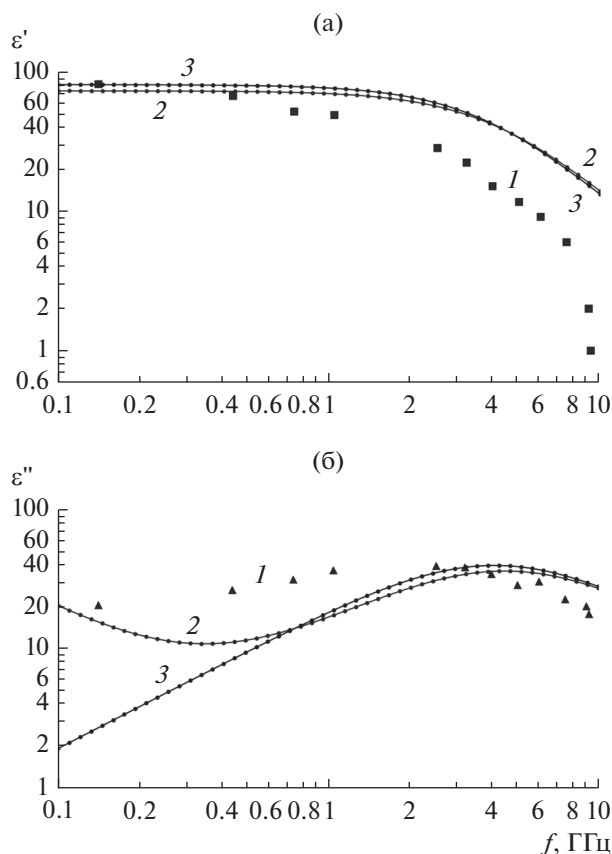
Расчет ЭДП композита на основе хаотически ориентированных в плоскости цилиндрических диполей проводился на основе сопоставления диполям равнообъемных эллипсоидов с использова-

нием формул (17), (19). Длина диполей  $2h = 10$  мм, их радиус  $r = 4$  мкм, проводимость  $\sigma = 71429$  См,  $\epsilon_1 = 1.8$ ,  $c = 0.05\%$ . Такие значения параметров соответствуют композиту на основе углеродных волокон, экспериментально исследованному в [9]. Экспериментальные зависимости компонент ЭДП этого композита от частоты  $f$  приведены на рис. 3а, 3б (кривые 1).

Большая полуось сопоставляемого диполю эллипсоида  $a = h$ , малая полуось  $b = \sqrt{\frac{3}{2}} r$  определена из условия равенства объемов диполя и эллипсоида. Коэффициент деполяризации вычисляли по известной статической формуле [7]. Допустимость применения статической формулы определяется тем, что в расчетном диапазоне частот 0.1 ... 10 ГГц глубина скин-слоя велика по сравнению с радиусом диполей. Диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_2$  эллипсоида вычисляли по формуле  $\epsilon_2 = (i\sigma/\omega)/\epsilon_0$ , где  $i$  – мнимая единица,  $\omega$  – циклическая частота,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума [10]. Параметр  $x$  в формуле (16) варьировался с целью сближения расчетных и экспериментальных значений ЭДП и оказался равным 0.00035. Результаты расчетов приведены на рис. 3а, 3б (кривые 2).

Представляет интерес сравнение полученных результатов расчета ЭДП с результатами расчетов по известной формуле с подгоночным параметром. В [11] показана удовлетворительная применимость к анализу композита на основе пластинчатых прово-





**Рис. 3.** Зависимость вещественной (а) и мнимой (б) части эффективной диэлектрической проницаемости композита на основе отрезков углеродных волокон от частоты: 1 – экспериментальные данные; 2 – расчет по обобщенной формуле; 3 – расчет по модифицированной формуле Оделевского.

для включений модифицированной формулы Оделевского, которую запишем с учетом различной ориентации диполей в виде

$$\epsilon = \epsilon_1 \left( 1 + \frac{Kc}{\left(1 - \frac{Kc}{p_c}\right)n + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \right), \quad (24)$$

где  $p_c$  – параметр, трактуемый как порог перколяции. Условием применимости формулы (24) является выполнение неравенства  $c < p_c$ . Обоснованное в [9] значение  $p_c$  для композитов на основе проводящих цилиндрических включений определяется отношением диаметра диполя к его длине и составляет для рассматриваемого композита 0.0008, что превышает концентрацию включений  $c = 0.0005$  в композите. Таким образом, применение формулы (24) достаточно корректно. Варьирование параметра  $p_c$  в пределах  $c < p_c \leq 1$  показало, что его значение, равное 0.0029, обес-

печивает оптимальное соответствие расчетных значений  $\epsilon$  экспериментальным, в частности, близость вещественной части  $\epsilon$  на минимальной частоте к ее статическому значению, равному 80 [9]. Результаты расчетов приведены на рис. 3а, 3б (кривые 3). Сравнение кривых 2 и 3 с экспериментальными значениями ЭДП (см. рис. 3а, 3б) показывает, что результаты расчетов вещественной части ЭДП по формуле (24) при частотах ниже 3 ГГц несколько точнее, чем по формуле (17). Расчетные значения мнимой части ЭДП, вычисленные по формуле (17), ближе к экспериментальным значениям на частотах ниже 0.8 ГГц и выше 4 ГГц, чем при использовании формулы (24).

Отметим следующее обстоятельство. Найденное оптимальное значение 0.0029 параметра  $p_c$  в формуле (24) существенно отличается от экспериментально обоснованного значения порога перколяции, равного 0.0008. Это указывает на то, что применительно к композиту рассмотренного типа входящий в (24) параметр  $p_c$  следует рассматривать не как реальный порог перколяции, а как подгоночный параметр.

Неполное соответствие расчетных значений ЭДП экспериментальным значениям связано с тем, что при расчете не учитывался тот факт, что поляризуемость включений различна в глубине экспериментального образца и на его границах [9]. Возможность учета этого эффекта путем введения зависимости параметра  $\tilde{\epsilon}$  и, соответственно, действующего поля от расстояния до границ образца требует отдельного исследования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен композит на основе ориентированных эллипсоидальных частиц. Введено понятие действующей диэлектрической проницаемости среды, в которую погружены частицы матрицы и включения, а также понятие действующего на частицы поля. Получена формула для эффективной диэлектрической проницаемости композита, переходящая в частных случаях в формулы Лоренца и Лоренца, Максвелла Гарнетта и Бруггемана. При выводе формулы не была использована гипотеза о локальном поле. На примере композита со сферическими включениями показана возможность применения полученной формулы в случае сильного скин-эффекта в материале включений. Для композита на основе отрезков углеродных волокон показана путем сравнения результатов расчетов с экспериментом возможность применения действующей диэлектрической проницаемости как подгоночного параметра.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность К.Н. Розанову за любезно предоставленные экспериментальные данные, использованные в настоящей работе для сравнения с ними результатов численных расчетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagarkov A.N., Sarychev A.K., Smychkovich Y.R., Vinogradov A.P.* // J. Elect. Waves Appl. 1992. V. 6. № 9. P. 1159.
2. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2019. Т. 64. № 5. С. 440.
3. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
4. *Петрина Д.Я., Пилявский А.И.* // Физика многочастичных систем. 1985. Вып. 7. С. 82.
5. *Левин Л.* Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. М.: Радио и связь, 1981.
6. *Тимошенко А.М., Пономаренко В.И.* // РЭ. 1996. Т. 41. № 4. С. 412.
7. *Балагуров Б.Я.* Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория. М.: Ленанд, 2015.
8. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
9. *Розанов К.Н.* Частотно-зависимые магнитные и диэлектрические свойства композитных материалов для широкополосных СВЧ-применений. Дис... докт. физ.-мат. наук. М.: ИТПЭ РАН, 2018. 326 с.
10. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989.
11. *Старостенко С.Н., Розанов К.Н., Ширяев О.А. и др.* // ФТТ. 2017. Т. 59. № 11. С. 2183.

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

УДК 621.396

**САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ И ВОЛНАХ,  
ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ИСТОЧНИКАМ**

© 2021 г. А. С. Раевский<sup>a, \*</sup>, С. Б. Раевский<sup>a</sup>, А. Ю. Седаков<sup>b</sup>, А. А. Титаренко<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,  
ул. Минина, 24, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

<sup>b</sup>Научно-исследовательский институт измерительных систем им. Ю.Е. Седакова  
Филиал Всероссийского научно-исследовательского института Российского Федерального ядерного центра,  
Бокс № 486, Нижний Новгород, 603950 Российская Федерация

\*E-mail: raevsky@nntu.ru

Поступила в редакцию 02.07.2019 г.

После доработки 02.07.2019 г.

Принята к публикации 19.07.2019 г.

Показано, что функция источника, стоящая в правой части уравнения Гельмгольца, являющаяся решением однородной краевой задачи на этом уравнении, обеспечивает возбуждение присоединенной волны (колебания). Поскольку указанная волна (колебание) существует только в присутствии источника обозначенного типа, предложено классифицировать их (волну, колебания) как присоединенные к источнику, а задачу, “порождающую” их, считать самосогласованной, поскольку возбуждаемая волна (колебание) находится в синхронизме с источником по всем волновым числам и по энергетическому балансу.

DOI: 10.31857/S0033849421040112

**ВВЕДЕНИЕ**

В работах [1–4] показано, что в экранированных волноводах с неоднородным заполнением наряду с собственными волнами могут существовать присоединенные к источнику несобственные волны. Эти волны описываются краевыми задачами на присоединенном уравнении Гельмгольца, под которым понимается уравнение с правой частью, являющейся решением однородной краевой задачи на том же самом уравнении, но с нулевой правой частью. Такие краевые задачи являются самосогласованными, поскольку в них учитывается обратное влияние возбуждаемого поля на первичный источник, а волновые числа в функциях поля и источника совпадают. Источники указанного вида можно классифицировать как источники типа бегущей волны, находящейся в синхронизме с возбуждаемым ею полем. Постоянная “подпитка” поля распределенным (бегущим) источником приводит к его (поля) линейному нарастанию в направлении распространения. Возникает эффект, подобный взаимодействию волноводного поля с полем пространственного заряда, наблюдаемому в лампе бегущей волны. Можно предположить, что эффект возбуждения распределенным источником присоединенной волны должен наблюдаться не только в неоднородных направляющих структурах.

Понятие “собственные и несобственные волны (колебания)” обычно связывают с формулировкой соответствующих краевых задач. Собственные волны (колебания) описываются решениями полностью однородных краевых задач — однородное дифференциальное уравнение и однородные граничные условия, однородное интегральное уравнение. Несобственные волны (колебания) связывают либо с неоднородными краевыми задачами, в которых решается неоднородное уравнение Гельмгольца, либо с полуоднородными краевыми задачами — однородное уравнение и частично неоднородные (ненулевые) граничные условия [5]. Несобственные волны второй категории по классификации, введенной в [6], характерны, например, для открытых направляющих структур — волны, не удовлетворяющие нулевому граничному условию на бесконечности. В данной работе рассматриваются несобственные волны (колебания), описываемые краевыми задачами на присоединенном уравнении Гельмгольца, которые предлагается классифицировать как волны (колебания), присоединенные к источнику.

Таким образом, несобственные волны подразделяются на описываемые краевой задачей на обычном однородном уравнении Гельмгольца и на волны, представляемые краевой задачей на присоединенном уравнении Гельмгольца. Волны второго вида образуют замкнутый через источник

цикл, как в автогенераторе. В этом смысле они, являясь присоединенными к источнику, описываются самосогласованной краевой задачей. При этом присоединенная и самосогласованная краевые задачи становятся тождественными.

К самосогласованным задачам в форме одно-родных интегральных уравнений приводят дифракционные задачи, использующие принцип Гюйгенса–Кирхгофа. Краевые задачи относительно функции вторичного источника так или иначе приводят к самосогласованным задачам либо в дифференциальной, либо интегральной, либо в интегро-дифференциальной формулировках. Любые физические процессы с положительной обратной связью, эквивалентной отрицательному сопротивлению в схеме замкнутого цикла, описываются самосогласованными задачами. В самосогласованных задачах об излучении роль указанного отрицательного сопротивления играет обратное влияние на источник поля излучения. Поскольку присоединенные колебания (волны), с одной стороны, “привязаны” к источнику, а с другой стороны, влияют на него (корректируя функцию источника), их следует считать волнами (колебаниями) особого вида. Будучи “привязанными” к источнику, они не являются собственными, однако включенные в общий замкнутый цикл, они являются особыми решениями однородной краевой задачи, которая определяется как присоединенная.

## 1. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРИСОЕДИНЕННОМ УРАВНЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В соответствии с положениями теории присоединенных волн в двухслойных изотропных направляющих структурах [1–4] сформулируем два варианта краевой задачи о присоединенных к источнику бегущих волнах и колебаниях круглых двухслойных экранированного волноводов (КДЭВ) и открытых волноводов. Она состоит из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \epsilon \mu \omega^2 \Pi_z^{e,m} =$$

$$= A^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha r) \cos n\varphi \begin{cases} \exp(-i\beta z) \\ \cos \beta_1 z \exp(-\beta_2 z) \end{cases} \quad (1)$$

которое называем присоединенным уравнением Гельмгольца, и граничных условий

$$\Pi_z^e(r=b) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r}(r=b) = 0;$$

$$\vec{E}_{1\tau}(r=a) = \vec{E}_{2\tau}(r=a); \quad (2)$$

$$\vec{H}_{1\tau}(r=a) = \vec{H}_{2\tau}(r=a),$$

где  $\Pi_z^{e,m}$  – продольные компоненты электрического и магнитного векторов Герца;  $a$  и  $b$  – радиусы внутреннего слоя и экрана;  $\beta$  и  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  – продольные волновые числа присоединенной волны [1] и комплексных волн (КВ) [7] соответственно.

Функции в правой части уравнения (1) в случае КДЭВ имеют [3] вид

$$R_n^{e,m}(\alpha_1 r) = J_n(\alpha_1 r) \quad \text{при } r \in [0, a];$$

$$R_n^e(\alpha_2 r) = \frac{J_n(\alpha_2 r) Y_n(\alpha_2 b) - J_n(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a) Y_n(\alpha_2 b) - J_n(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 a)},$$

$$R_n^m(\alpha_2 r) = \frac{J_n(\alpha_2 r) Y_n'(\alpha_2 b) - J_n'(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 a) Y_n'(\alpha_2 b) - J_n'(\alpha_2 b) Y_n(\alpha_2 a)},$$

при  $r \in [a, b]$ ,

где  $J_n(\alpha_{1,2} r)$ ,  $Y_n(\alpha_2 r)$  – цилиндрические функции первого и второго рода;  $\alpha_{1,2}$  – поперечные волновые числа. В открытом диэлектрическом волноводе во внешней области  $R^{e,m}(\alpha_2 r)$  является функцией Ханкеля.

Краевые задачи, описывающие поля в неоднородных электродинамических структурах в общем случае являются несамосопряженными [7, 8]. Для экранированных структур эти задачи, будучи однородными, являются [5] задачами, определяющими спектры собственных волн (колебаний). Для открытых структур несамосопряженные краевые задачи, являясь полуоднородными, могут описывать наряду с собственными волнами несобственные волны дискретного спектра [6, 7]. В экранированных волноводах с неоднородным заполнением наряду с собственными волнами могут [1–3] существовать присоединенные к источнику волны, описываемые присоединенным уравнением Гельмгольца, под которым здесь понимаем уравнение (1) с правой частью, являющейся решением однородной краевой задачи, т.е. задачи на однородном уравнении Гельмгольца с однородными граничными условиями. При этом могут быть два варианта присоединенной задачи: первый, когда поле, присоединенное к источнику, образуется суперпозицией собственных волн [9]; второй, когда оно является полем собственной и присоединенной волн [2], имеющим [10] линейную зависимость амплитуды от продольной координаты. Линейное нарастание по продольной координате амплитуды поля присоединенной волны происходит за счет перекачки в нее энергии из распределенного источника типа бегущей волны, функция которого стоит в верхней правой части уравнения (1). И в том, и в другом случае поля оказываются присоединенными к источнику [3], т.е. несобственными – не существующими без него. Собственные значения несамосопряженных краевых задач в общем случае

являются [11] комплексными величинами и соответствуют различным видам КВ [5, 7, 8], которые в зависимости от признаков несамосопряженности краевой задачи [5] могут иметь различную природу и свойства. Как показано в [7] теоретически и экспериментально, собственные КВ слоистых экранированных волноводов при возбуждении источниками, описываемыми действительными функциями пространственных координат, возникают комплексно-сопряженными парами [12], приводя к возникновению явления комплексного резонанса (КР), описанного в [13]. Резонансным признаком явления служит факт увеличения запасенной энергии во всем диапазоне существования КВ, что позволяет ввести понятие добротности (в энергетической формулировке), вычислить ее и измерить косвенным методом. Понятие КР было введено в [12]. КР в неоднородных направляющих структурах (например, в КДЭВ), отличающийся от обычного резонанса своим существованием не в точке, а во всем диапазоне существования КВ, имеет место [9] только при наличии источника, через который замыкаются прямой и обратный потоки мощности [14]. Таким образом, две взаимодействующие между собой КВ оказываются “привязанными” к источнику, а поле КР – можно назвать “присоединенным” к источнику электромагнитным колебанием. Задача о возбуждении КР является самосогласованной – источник создает пару КВ, образующих замкнутые через этот источник потоки мощности. Она относится к первому указанному выше варианту присоединенной краевой задачи, которому соответствует (1) с нижней правой частью.

Собственные КВ КДЭВ индивидуально, как показано в [12], возбуждаются распределенным источником бегущей волны. В том случае, когда этому источнику соответствует верхняя функция в правой части уравнения (1), возбуждаются одновременно [2] и комплексная, и присоединенная волны. Последнюю называем волной, присоединенной к источнику.

Поля двух КВ с комплексно сопряженными волновыми числами и амплитудами образуют “присоединенное” к источнику колебание, которое в силу обязательного присутствия источника не является собственным. КР, соответствующий этому колебанию, образуется полем, локализованным вблизи источника, т.е. имеющим вид стоячей волны с амплитудой, экспоненциально убывающей при удалении от источника в соответствии с продольной зависимостью поля КВ. Этому колебанию соответствует краевая задача на присоединенном уравнении Гельмгольца (1) с нижней функцией источника в правой части.

Таким образом, первому варианту присоединенной краевой задачи (когда поле образуется суперпо-

зицией собственных КВ) соответствует нижняя функция в правой части уравнения (1), второму варианту (когда возбуждается поле присоединенной волны) соответствует верхняя функция в правой части уравнения (1). В первом случае имеем колебание, присоединенное к источнику, во втором – волну. Термин “волны (колебания), присоединенные к источнику”, предлагается с целью приблизить математическое понятие “присоединенное решение” к его физическому (в данной конкретной ситуации) смыслу. Присоединенное решение связывается с возбуждением волны (колебания) источником особого вида, соответствующего присоединенной краевой задаче, которая ввиду совпадения волновых чисел в функциях поля и источника является самосогласованной.

Функции в правой части уравнения (1) можно рассматривать либо как функцию распределенного источника типа бегущей волны, а присоединенную краевую задачу (1), (2) – как задачу о возбуждении волн, “присоединенных” к указанному источнику, либо как функцию источника (нижняя действительная функция координаты  $z$ ), создающего КР.

## 2. РЕШЕНИЯ СФОРМУЛИРОВАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Решения сформулированных краевых задач записываем в виде

$$P_{z,2}^{e,m} = \left[ C_{n_{1,2}}^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) + D_{n_{1,2}}^{e,m} \left( -\frac{iz}{2\beta} \right) \times \right. \\ \left. \times R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) + \rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] \times \\ \times \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \exp(-i\beta z), \cos \beta_1 z \exp(-\beta_2 z), \quad (3)$$

где функции  $\rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r)$  удовлетворяют уравнениям

$$\rho''(\alpha_{1,2}r) + \frac{1}{r} \rho'(\alpha_{1,2}r) + \left( \alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \rho(\alpha_{1,2}r) = \\ = \bar{D}_{n_{1,2}}^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r), \quad (4)$$

и граничным условиям Дирихле и Неймана соответственно на экранирующей поверхности  $r = b$ . Уравнения (4) можно рассматривать как присоединенные уравнения Бесселя. В открытом волноводе во внешней области  $R_n^{e,m}(\alpha_2 r)$  являются функциями Ханкеля. В этом случае не требуется наложение условий Дирихле и Неймана на функции  $\rho^{e,m}(\alpha_2 r)$  заданные на внешней границе.

Верхнее решение в (3) описывает присоединенные волны, нижнее – присоединенное колебание,

соответствующее комплексному резонансу. Подставляя решения (3) в уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned}
 & C_{n_{1,2}}^{e,m} \left[ R_n^{e,m''}(\alpha_{1,2}r) + \frac{1}{r} R_n^{e,m'}(\alpha_{1,2}r) + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] + \\
 & + D_{n_{1,2}}^{e,m} \left[ R_n^{e,m''}(\alpha_{1,2}r) + \frac{1}{r} R_n^{e,m'}(\alpha_{1,2}r) + \right. \\
 & \left. + \left( \alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] + \left[ \rho^{e,m''}(\alpha_{1,2}r) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{r} \rho^{e,m'}(\alpha_{1,2}r) + \left( \alpha_{1,2}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \rho^{e,m}(\alpha_{1,2}r) \right] - \\
 & - D_{n_{1,2}}^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r) = A^{e,m} R_n^{e,m}(\alpha_{1,2}r).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Характер возбуждаемой заданным источником волны определяется амплитудой  $A^{e,m}$  этого источника – условием, накладываемым на эту амплитуду. Из (5) видно, что решения (3) удовлетворяют с учетом уравнения (4) присоединенным уравнениям Гельмгольца (1) при условии

$$\bar{D}_{n_{1,2}}^{e,m} - D_{n_{1,2}}^{e,m} = A^{e,m}. \quad (6)$$

В том случае, когда

$$\bar{D}_{n_{1,2}}^{e,m} = D_{n_{1,2}}^{e,m}, \quad (7)$$

решения (3) удовлетворяют обычному (однородному) уравнению Гельмгольца и соответствуют точке жордановой кратности волновых чисел [15], обеспечивая полноту системы волн направляющей структуры [16, 17].

Условия (6), (7) являются естественными дополнительными условиями, накладываемыми на источник, поскольку от последнего зависит вид возбуждаемого им поля: поля присоединенных волн или колебаний.

Граничные условия при  $r = a$  дают систему функциональных уравнений, зависящих от продольной координаты. Приравнявая в них члены, имеющие линейную зависимость от координаты  $z$ , получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $D_{n_{1,2}}^{e,m}$ , условие нетривиальности решений которой дает уравнение, совпадающее с дисперсионным уравнением нормальных волн КДЭВ.

Не зависящие от продольной координаты части указанных выше функциональных уравнений при условии (4) дают систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_{n_{1,2}}^{e,m}$ . Главные определители двух указанных систем уравнений (однородной и неоднородной) совпадают. Равенство их нулю дает дисперсионное уравнение нормальных волн. Нетривиальные решения системы линейных одно-

родных алгебраических уравнений (коэффициенты  $D_{n_{1,2}}^{e,m}$ ) подставляются в систему неоднородных уравнений, решаемую относительно коэффициентов  $C_{n_{1,2}}^{e,m}$ .

Граничные условия рассматриваемой краевой задачи выполняются в том случае, когда системы однородных и неоднородных линейных алгебраических уравнений имеют совместные решения. Система однородных уравнений имеет нетривиальные решения только при равенстве нулю ее определителя. Поскольку главный определитель системы неоднородных уравнений совпадает с определителем системы однородных уравнений, система неоднородных уравнений может иметь решения только при равенстве нулю ее дополнительных определителей.

Следовательно, собственные значения краевой задачи, определяющие волновые числа волн, описываемых ею (задачей), находятся как совместные решения трех трансцендентных дисперсионных уравнений, решаемых совместно с уравнениями, связывающими волновые числа

$$\epsilon_{1,2} \mu_{1,2} \omega^2 = \alpha_{1,2}^2 + \beta^2$$

и обеспечивающими выполнение условий Дирихле и Неймана для функций  $\rho^{e,m}$ .

Численные исследования [1] показали существование таких решений, соответствующих волнам и колебаниям, которые можно назвать присоединенными к источнику, поскольку они описываются уравнениями (1), в правой части которых стоят функции, являющиеся решениями соответствующих краевых задач на однородном уравнении Гельмгольца.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, решая краевые задачи на присоединенных уравнениях Гельмгольца, получаем волны и колебания, существующие только при наличии источника, т.е. присоединенные (привязанные) к нему. Поскольку волновые числа, присутствующие в правых частях уравнения (1), находятся из указанных дисперсионных уравнений, рассматриваемую краевую задачу следует называть самосогласованной – поле источника и поле присоединенной волны (колебания) образуют единый (замкнутый) электромагнитный процесс. Присоединенные волны (колебания) не следует классифицировать как собственные, поскольку они описываются решениями неоднородных краевых задач на уравнениях (1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов В.А., Раевский А.С., Раевский С.Б. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. № 2. С. 71.

2. *Malakhov V.A., Raevskii A.S., Raevskii S.B.* // Int. J. Electromagnetics and Appl. 2012. V. 2. № 5. P. 114.
3. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. № 23. С. 13.
4. *Раевский А.С., Раевский С.Б., Сedaков А.Ю.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 3. С. 6.
5. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988.
6. *Шевченко В.В.* // РЭ. 1969. Т. 12. № 12. С. 1768.
7. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010.
8. *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004.
9. *Иванов А.Е., Раевский С.Б.* // РЭ. 1991. Т. 36. № 8. С. 1463.
10. *Ильинский А.С., Слeян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах. М.: Изд-во МГУ, 1983.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
12. *Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б.* // Радиотехника. 1980. Т. 35. № 9. С. 59.
13. *Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 900.
14. *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 9. С. 1041.
15. *Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н.* // РЭ. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129.
16. *Шевченко В.В.* // Радиофизика. 1971. Т. 14. № 8. С. 1242.
17. *Шевченко В.В.* // РЭ. 1986. Т. 31. № 3. С. 456.

---

**АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ  
СИСТЕМЫ**


---

УДК 621.396.677

**МЕТОД КОНСТРУКТИВНОГО СИНТЕЗА ПЛОСКИХ АНТЕННЫХ  
РЕШЕТОК С УЧЕТОМ ВЗАИМНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ**
© 2021 г. С. Е. Мищенко<sup>а, \*</sup>, В. В. Шацкий<sup>а</sup>, А. В. Литвинов<sup>а</sup>, Д. Ю. Елисеев<sup>а</sup><sup>а</sup>Ростовский научно-исследовательский институт радиосвязи,  
ул. Нансена, 130, Ростов-на-Дону, 344038 Российская Федерация

\*E-mail: mihome@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.10.2019 г.

После доработки 21.07.2020 г.

Принята к публикации 07.08.2020 г.

Предложен метод конструктивного синтеза плоских антенных решеток (АР) с учетом взаимной связи между элементами на основе нейросетевого подхода. В математической модели АР принято, что при обосновании конфигурации АР антенные элементы могут быть разделены на группы активных, неиспользуемых или пассивных элементов, токи в которых наводятся соседними элементами. Проведено обоснование структуры нейронной сети, включающей классифицирующую нейронную сеть и несколько аппроксимирующих сетей. Процесс обучения нейронной сети разделен на два этапа: этап предварительной отдельной настройки каждой части и этап совместного обучения всех частей нейронной сети. Получено решение задачи конструктивного синтеза АР по требованиям к форме диаграммы направленности, подтвердившее работоспособность метода и перспективность нейросетевого подхода.

DOI: 10.31857/S0033849421040082

**ВВЕДЕНИЕ**

Задачи конструктивного синтеза антенных решеток (АР) сводятся к решению системы нелинейных уравнений относительно координат фазовых центров антенных элементов (АЭ) и комплексных амплитуд АЭ.

Для решения таких систем уравнений в [1] были предложены различные методы, большая часть которых применима только для линейных решеток. Исключение составил метод моментов [1, 2], в соответствии с которым формировали разреженный плоский раскрыв с равномерным возбуждением АЭ. При этом плотность размещения излучателей соответствовала амплитудному распределению заполненного раскрыва при формировании заданной диаграммы направленности (ДН). Однако на практике чаще возникают задачи конструктивного синтеза плоских АР, в которых АЭ расположены в узлах регулярной сетки, а неизвестными являются форма границы раскрыва и комплексные амплитуды АЭ.

В монографии [3] сформулирован общий алгоритм решения подобных задач. Он состоит в том, что сначала находят множество допустимых конфигураций раскрывов. Затем для каждого раскрыва решают задачу амплитудно-фазового синтеза и на заключительном этапе принимают решение о выборе наилучшей конфигурации раскрыва в смысле за-

данного критерия. Реализация данного алгоритма указывает на то, что сформулированная задача синтеза относится к классу многокритериальных задач оптимизации, при этом между критериями выбора множества допустимых конфигураций раскрыва, определения комплексных амплитуд АЭ для каждой из конфигураций АР и отбора единственного решения установлен определенный лексикографический порядок. Этот порядок позволяет решить проблему скаляризации задачи многокритериального конструктивного синтеза АР. В работах [4, 5] предложен метод конструктивного синтеза плоской АР, при реализации которого авторы использовали нейронную сеть (НС) для формирования конфигурации раскрыва, а затем для этой конфигурации решали задачу амплитудно-фазового синтеза. При этом на вход НС поступали сигналы, соответствующие нормированным значениям координат АЭ в узлах регулярной сетки.

Перечисленные методы конструктивного синтеза плоских АР, в которых положения АЭ заданы в узлах регулярной сетки, объединяет то, что набор искомого параметров содержит вектор комплексных амплитуд элементов АР, координаты фазовых центров, а также вектор дискретных значений, определяющий дискретные состояния АЭ. В простейшем случае каждый АЭ может находиться в двух дискретных состояниях: актив-



ный АЭ (ААЭ) и неиспользуемый АЭ (НАЭ). В более общем случае таких дискретных состояний может быть значительно больше. В [6] предложен нейросетевой подход к решению задач конструктивного синтеза активных фазированных АР, в которых число дискретных состояний ААЭ соответствовало числу номиналов усилителей мощности СВЧ, используемых в составе АР. С практической и теоретической точек зрения представляет интерес задача конструктивного синтеза АР, в которой каждый АЭ может относиться к классу ААЭ, НАЭ и пассивных АЭ (ПАЭ). Будем считать, что токи в ПАЭ наводятся соседними ААЭ. Подобные задачи в известной литературе прежде не рассматривались.

Цель работы – обоснование конфигурации АР, которая содержит ААЭ и ПАЭ.

### 1. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОНСТРУКТИВНОГО СИНТЕЗА АР

Пусть имеется  $M$ -элементная АР. Все АЭ в составе АР влияют друг на друга, это взаимное влияние отражает нормированная матрица сопротивлений  $\mathbf{Z}$ . С учетом взаимного влияния ДН АР может быть рассчитана по формуле

$$F(u, v) = \mathbf{A}^T \mathbf{Z} \mathbf{f}(u, v), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{f}(u, v) = (f_0(u, v) \exp(ik(x_m u + y_m v)))_{m=1, 2, \dots, M} \quad (2)$$

– вектор-функция, описывающая комплексные ДН одиночных элементов в составе АР;  $f_0(u, v)$  – ДН одиночного АЭ;  $(x_m, y_m)$  – координаты фазового центра  $m$ -го АЭ ( $m = 1, 2, \dots, M$ );  $\mathbf{A} = (A_m)$  – вектор-столбец комплексных амплитуд АЭ, нормированных к максимальной амплитуде элемента;  $T$  – символ транспонирования;  $(u, v)$  – вектор направляющих косинусов.

Введем матрицу  $\mathbf{B}$  размером  $M \times M$ , все элементы которой равны 1, и оператор “ $\circ$ ”, обозначающий поэлементное перемножение матриц (произведение Адамара). С учетом данных обозначений выражение (1) не изменится, если его переписать в виде

$$F(u, v) = \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \circ \mathbf{Z}) \mathbf{f}(u, v). \quad (3)$$

Предположим, что из состава АР необходимо полностью исключить  $n$ -й АЭ. Этого можно добиться, если обнулить  $A_n = 0$ , а также все элементы  $n$ -й строки и  $n$ -го столбца матрицы  $\mathbf{B}$ . Чтобы  $n$ -й элемент АР стал пассивным, необходимо присвоить  $A_n = 0$ , а элементы матрицы  $\mathbf{B}$  в соответствующих строке и столбце оставить без изменений. При этом поэлементное произведение  $\mathbf{A} \circ \text{diag}(\mathbf{B})$  будет соответствовать вектору ком-

плексных амплитуд в активной части раскрыва (операция  $\text{diag}(\mathbf{B})$  обозначает формирование вектора из элементов, лежащих на главной диагонали матрицы  $\mathbf{B}$ ).

С учетом выражения (3) множество  $\mathbf{P} = (x_1, y_1; x_2, y_2; \dots, x_M, y_M)$  координат фазовых центров АЭ в составе АР может быть разделено на три подмножества:

– подмножество ААЭ  $\mathbf{P}^{(A)}$  мощностью  $|\mathbf{P}^{(A)}|$ , каждой  $n$ -й координатной паре которого соответствует ненулевое значение комплексной амплитуды и ненулевые строка и столбец матрицы  $\mathbf{B}$ ;

– подмножество ПАЭ  $\mathbf{P}^{(P)}$  мощностью  $|\mathbf{P}^{(P)}|$ , каждой  $n$ -й координатной паре которого соответствует нулевое значение комплексной амплитуды и ненулевые строка и столбец матрицы  $\mathbf{B}$ ;

– подмножество НАЭ  $\mathbf{P}^{(O)}$  мощностью  $|\mathbf{P}^{(O)}|$ , каждой  $n$ -й координатной паре которого соответствует нулевое значение комплексной амплитуды и нулевые строка и столбец матрицы  $\mathbf{B}$ ;

Очевидно, что  $|\mathbf{P}^{(A)}| + |\mathbf{P}^{(P)}| + |\mathbf{P}^{(O)}| = M$ .

Введенные обозначения позволяют сформулировать задачу конструктивного синтеза АР в следующей постановке.

Пусть известны:

– действительная нормированная функция  $F_0(u, v)$ , описывающая форму заданной ДН;

– матрица нормированных сопротивлений  $\mathbf{Z}$   $M$ -элементной АР.

Найти матрицу  $\mathbf{B}_0$  и нормированный вектор  $\mathbf{A}_0$  комплексных амплитуд АЭ  $M$ -элементной АР, которые удовлетворяют следующим требованиям:

$$g_1(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0) = \min_{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbf{D}} g_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}); \quad (4)$$

$$g_2(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0) = \max_{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathbf{D}} g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}); \quad (5)$$

$$|\mathbf{P}^{(A)}| \leq M^{(A)}. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  – множество допустимых решений;

$$g_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \rho(u, v) \times \left( F_0(u, v) - \frac{|\mathbf{A}^T (\mathbf{B} \circ \mathbf{Z}) \mathbf{f}(u, v)|}{|\mathbf{A}^T (\mathbf{B} \circ \mathbf{Z}) \mathbf{f}(u_0, v_0)|} \right)^2 dudv; \quad (7)$$

$$g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \circ \text{diag}(\mathbf{B}))^T (\mathbf{A} \circ \text{diag}(\mathbf{B})) * |\mathbf{P}^{(A)}|^{-1} \quad (8)$$

– частные целевые функции;  $M^{(A)}$  – допустимое число активных каналов;  $\rho(u, v)$  – весовая функция;  $(u_0, v_0)$  – направление максимума формируе-

мой ДН; \* обозначает операцию комплексного сопряжения элементов вектора.

Частная целевая функция (7) позволяет оценить качество приближения формы амплитудной ДН АР к заданной ДН.

Значение частной целевой функции (8) по отношению к передающей АР пропорционально излучаемой мощности АР. В случае приемной АР частная целевая функция (8) пропорциональна мощности принимаемого сигнала. В обоих случаях максимальное значение частной целевой функции (8) достигается в том случае, когда коэффициент использования поверхности (КИП) активной части раскрыва равен единице.

Формирование ДН АР, близкой к заданной, обычно связано со снижением КИП активной части раскрыва. В связи с этим требования (4) и (5) являются противоречивыми. Ограничение (6) позволяет при одном и том же значении показателя (8) и разных компоновках ААЭ и ПАЭ получать различные формы ДН и соответствующие им значения частной целевой функции (7). В связи с этим решение сформулированной задачи конструктивного синтеза сопряжено с достижением компромисса между требованиями к КИП и форме ДН АР.

Конструктивный синтез передающей АР с неуправляемым фидерным трактом при реализации предлагаемого метода позволяет получить форму границы активной части раскрыва и компоновку ПАЭ. Амплитуды вектора  $\mathbf{A} \circ \text{diag}(\mathbf{B})$  могут быть использованы при проектировании фидерного тракта, а его фазы реализованы при помощи фазовращателей.

Конструктивный синтез передающей АР с управляемыми амплитудами каналов может быть рассмотрен при проектировании передающих пассивных и активных АР с управляемыми аттенюаторами или усилителями СВЧ с изменяемыми коэффициентами передачи. Однако в этом случае на диапазон регулировки амплитуд следует накладывать дополнительные ограничения. Эти ограничения выходят за рамки данной статьи, но могут быть введены согласно работе [6].

Задачи конструктивного синтеза приемной АР с неуправляемым фидерным трактом и приемной цифровой АР эквивалентны задаче конструктивного синтеза АР с неуправляемым фидерным трактом. Однако в случае приемной цифровой АР реализация решения в части формирования вектора комплексных амплитуд активной части раскрыва значительно проще, поскольку не требует проектирования схемы деления и использования фазовращателей.

В связи с этим будем полагать, что сформулированная задача конструктивного синтеза относится к задачам проектирования передающих и

приемных пассивных АР с неуправляемым фидерным трактом и приемных цифровых АР.

Критерии (4)–(6) могут вступать между собой в противоречие, поэтому будем считать, что критерий (4) является наиболее, а критерии (5) и (6) – наименее предпочтительными.

Главная особенность сформулированной задачи синтеза состоит в том, что значения компонентов искомого комплексного вектора и двоичной матрицы могут быть связаны с принадлежностью антенного элемента одному из трех дискретных множеств. Для решения подобных задач в работе [6] был предложен нейросетевой подход. В соответствии с данной работой искомые параметры задачи конструктивного синтеза АР определяются по выходным сигналам НС. При этом НС должна содержать классифицирующую часть и несколько аппроксимирующих частей. Число выходов классифицирующей части зависит от дискретного числа состояний антенных элементов, а число аппроксимирующих частей, каждая из которых содержит один выход, определяется набором параметров, значения которых выбирают из множества действительных значений.

Применительно к сформулированной задаче рассмотрим НС, которая содержит классифицирующую часть с тремя выходами и две аппроксимирующие части. На вход НС поступает вектор сигналов  $\xi$ , элементы которого соответствуют нормированным значениям координат антенных элементов:

$$\xi_1 = x \left( \max_{m=1,2,\dots,M} (x_m) \right)^{-1}; \quad \xi_2 = y \left( \max_{m=1,2,\dots,M} (y_m) \right)^{-1}. \quad (9)$$

Эти сигналы поступают на входы слоев инициализации классифицирующей и аппроксимирующих частей. Все части НС будем считать изолированными друг от друга. Каждую часть НС представим в виде полносвязной сети с коэффициентами смещения. Выходной сигнал первой аппроксимирующей части соответствует амплитуде  $|A(x, y)|$ , а сигнал второй части  $\psi(x, y)$  свяжем с фазовым распределением в раскрыве АР  $\arg A(x, y)$  соотношением

$$\arg A(x, y) = 2\pi\psi(x, y) - \pi.$$

Принадлежность АЭ к одному из трех рассматриваемых подмножеств будем определять по номеру выходного сигнала с наибольшей амплитудой. При этом первый выходной сигнал будет соответствовать подмножеству ААЭ, второй – ПАЭ, а третий – НАЭ.

Предлагаемая структура НС для решения рассматриваемой задачи приведена на рис. 1. Все части НС состоят из трех скрытых слоев (Скрытый слой 1...Скрытый слой 3), в каждом из которых в качестве функции активации используется

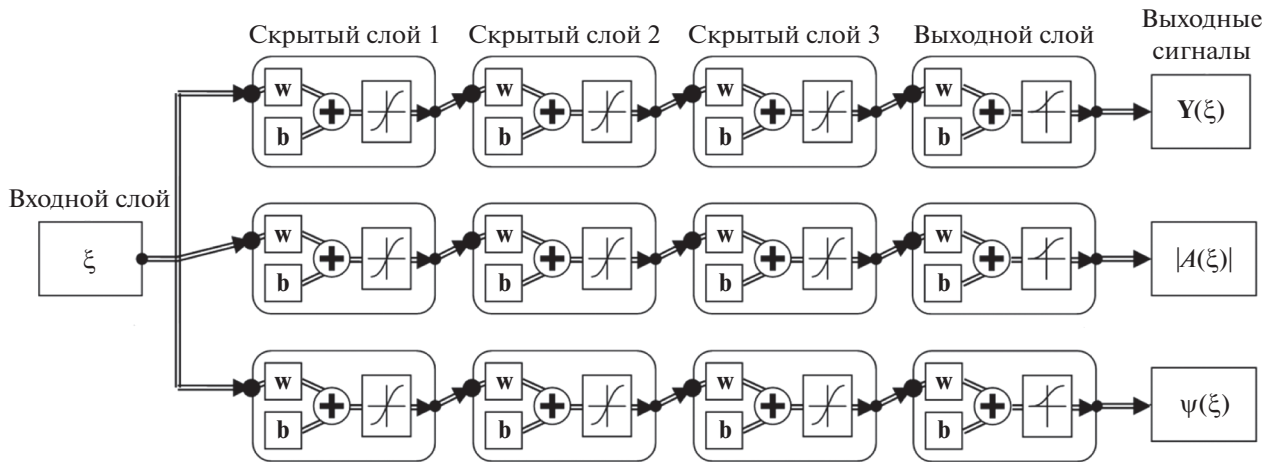


Рис. 1. Структура НС, предложенная в данной работе.

$a_1(x) = \text{th } x$ . Функции активации выходного слоя зависят от назначения части НС. Выходные сигналы НС формируются при помощи функции активации, описываемой сигмоидной функцией

$$a_2(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}.$$

С учетом предлагаемой структуры НС (см. рис. 1) выходные сигналы каждой из частей НС можно представить в виде

$$Y(\xi) = a_2(\mathbf{w}_4^{(1)} a_1(\mathbf{w}_3^{(1)} a_1 \times \times (\mathbf{w}_2^{(1)} a_1 (\mathbf{w}_1^{(1)} \xi + \mathbf{b}_1^{(1)}) + \mathbf{b}_2^{(1)}) + \mathbf{b}_3^{(1)}) + \mathbf{b}_4^{(1)}); \quad (10)$$

$$|A(\xi)| = a_2(\mathbf{w}_4^{(2)} a_1(\mathbf{w}_3^{(2)} a_1 \times \times (\mathbf{w}_2^{(2)} a_1 (\mathbf{w}_1^{(2)} \xi + \mathbf{b}_1^{(2)}) + \mathbf{b}_2^{(2)}) + \mathbf{b}_3^{(2)}) + \mathbf{b}_4^{(2)}); \quad (11)$$

$$\psi(\xi) = a_2(\mathbf{w}_4^{(3)} a_1(\mathbf{w}_3^{(3)} a_1 \times \times (\mathbf{w}_2^{(3)} a_1 (\mathbf{w}_1^{(3)} \xi + \mathbf{b}_1^{(3)}) + \mathbf{b}_2^{(3)}) + \mathbf{b}_3^{(3)}) + \mathbf{b}_4^{(3)}), \quad (12)$$

где  $\mathbf{w}_j^{(i)}$  и  $\mathbf{b}_j^{(i)}$  – матрицы коэффициентов связи и векторы коэффициентов смещения  $i$ -й части и  $j$ -го слоя НС соответственно.

Нейронная сеть, представленная на рис. 1, позволяет сопоставить каждой координатной паре значение комплексной амплитуды АЭ по правилу

$$A_m = \begin{cases} |A(\xi_m)| \exp(i\psi(\xi_m)), & Y_1(\xi_m) = \max Y(\xi_m); \\ 0, & Y_1(\xi_m) \neq \max Y(\xi_m). \end{cases} \quad (13)$$

Здесь элементы вектора  $\xi_m$  рассчитываются по формуле (9) для координатной пары  $(x_m, y_m)$ .

Элементы двоичной матрицы  $\mathbf{B}$  могут быть вычислены при помощи двух соотношений

$$B_{m,n} = B_{n,m} = \begin{cases} 1, & Y_3(\xi_m) \neq \max Y(\xi_m); \\ 0, & Y_3(\xi_m) = \max Y(\xi_m); \end{cases} \quad (14)$$

$n = 1, 2, \dots, M;$

$$B_{m,m} = \begin{cases} B_{m,m}, & Y_2(\xi_m) \neq \max Y(\xi_m); \\ 0, & Y_2(\xi_m) = \max Y(\xi_m). \end{cases} \quad (15)$$

Произвольные наборы коэффициентов  $\mathbf{w}_j^{(i)}$  и  $\mathbf{b}_j^{(i)}$  приводят к формированию параметров  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , относящихся к множеству допустимых решений задачи конструктивного синтеза. Для того чтобы НС приводила к формированию искомым параметров  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ , необходимо обучить НС.

Процесс обучения НС разделим на два этапа. Первый этап соответствует предварительной раздельной настройке каждой части НС, а второй – совместному обучению всех частей НС. Предварительную настройку частей НС можно выполнить на основании следующих соображений.

Все реально существующие АР, которые содержат активные и пассивные элементы, строят таким образом, что активные элементы располагаются в центре раскрыва, а пассивные распределяются за пределами активной области. Это позволяет выполнить предварительную настройку классифицирующей части НС по критерию минимума среднеквадратического отклонения:

$$g_3(\mathbf{w}_j^{(1)}, \mathbf{b}_j^{(1)}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \mathbf{Y}(\xi_1, \xi_2, \mathbf{w}_j^{(1)}, \mathbf{b}_j^{(1)}) - \hat{\mathbf{Y}}(\xi_1, \xi_2) \right)^T \times \times \left( \mathbf{Y}(\xi_1, \xi_2, \mathbf{w}_j^{(1)}, \mathbf{b}_j^{(1)}) - \hat{\mathbf{Y}}(\xi_1, \xi_2) \right) d\xi_1 d\xi_2, \quad (16)$$

где

$$\hat{\mathbf{Y}}(\xi) = \hat{\mathbf{Y}}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} (1, 0, 0)^T, & \xi^T \xi < U_1; \\ (0, 1, 0)^T, & U_1 \leq \xi^T \xi < U_2; \\ (0, 0, 1)^T, & U_2 \leq \xi^T \xi \leq 1; \end{cases} \quad (17)$$

$0 < U_1 < U_2 < 1$  – заданные параметры, определяющие размеры областей ААЭ и ПАЭ.

Для предварительной настройки аппроксимирующих частей НС может быть использовано амплитудно-фазовое распределение  $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_m | m = 1, 2, \dots, M)$  в раскрыте  $M$ -элементной АР, полученное методом наименьших квадратов [7]. В этом случае получим

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\eta}, \quad (18)$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} F_0(u, v) \mathbf{f}^H(u, v) dudv; \quad (19)$$

$$\mathbf{S} = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \mathbf{f}(u, v) \mathbf{f}^H(u, v) dudv;$$

$H$  обозначает эрмитово сопряжение.

После этого для настройки соответствующих частей НС следует использовать критерии минимума целевых функций:

$$g_4(\mathbf{w}_j^{(2)}, \mathbf{b}_j^{(2)}) = \sum_{m=1}^M \left( \left| A(\xi_m, \mathbf{w}_j^{(2)}, \mathbf{b}_j^{(2)}) \right| - |\hat{A}_m| \right)^2; \quad (20)$$

$$g_5(\mathbf{w}_j^{(3)}, \mathbf{b}_j^{(3)}) = \sum_{m=1}^M \left( \frac{\arg A(\xi_m, \mathbf{w}_j^{(2)}, \mathbf{b}_j^{(2)}) + \pi}{2\pi} - \frac{\arg \hat{A}_m + \pi}{2\pi} \right)^2. \quad (21)$$

Для предварительной настройки всех частей НС может быть использован широко известный метод обратного распространения ошибки.

Предварительная настройка НС позволяет существенно ускорить решение задачи конструктивного синтеза за счет обоснованного выбора начального состояния коэффициентов НС. Дальнейшее обучение НС связано с совместной настройкой коэффициентов НС в соответствии с критериями (4)–(6). Обучение НС будем осуществлять на основе генетического алгоритма [8, 9].

Сходимость любого алгоритма поисковой оптимизации, к которым относится и генетический алгоритм, зависит от порядка решаемой задачи. В связи с этим для обучения НС необходимо использовать прием, рассмотренный, например, в монографии [9]. Он состоит в том, что процесс обучения разделяют на несколько эпох, в каждой из которой происходит обучение относительно небольшого числа коэффициентов НС. Условием

выхода из генетического алгоритма в конце эпохи обучения обычно является достижение заданного числа поколений. Это связано с тем, что при обучении фрагмента НС отсутствует необходимость реализации длительного процесса. Число итераций генетического алгоритма выбирают таким образом, чтобы в течение каждой эпохи обучения при ограниченной длине популяции получать улучшение качества обучения. Число эпох обучения определяет соотношение между размерами НС и числом одновременно обучаемых коэффициентов.

После инициализации генетического алгоритма оценивают качество текущей популяции. Для оценки качества популяции в случае задания системы критериев (4)–(6) необходимо сначала выполнить скаляризацию векторной задачи. Эту процедуру сведем к следующему несложному алгоритму. На первом шаге оценим значения частных целевых функций (7) и (8), а также число активных элементов в раскрыте для текущего элемента популяции допустимых решений. На втором шаге выполним следующие преобразования:

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{cases} g_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}), & (g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq G_2) \wedge (|\mathbf{P}^{(A)}| \leq M^{(A)}); \\ 2g_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}), & (g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < G_2) \wedge (|\mathbf{P}^{(A)}| \leq M^{(A)}); \\ 2g_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}), & (g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \geq G_2) \wedge (|\mathbf{P}^{(A)}| > M^{(A)}); \\ 4g_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}), & (g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) < G_2) \wedge (|\mathbf{P}^{(A)}| > M^{(A)}), \end{cases} \quad (22)$$

где  $G_2$  – пороговое значение.

Оценки качества вида (22) для каждого элемента популяции позволяют выбрать наиболее жизнеспособные решения текущей популяции и сформировать родительское множество, используемое для формирования новой популяции решений. Предлагаемый алгоритм позволяет учесть предпочтения между критериями, избежать формирования пустого множества допустимых решений и варьировать значимость требований.

Действительно, на этапе инициализации генетического алгоритма порог  $G_2$  может быть задан несколько ниже значения частной целевой функции  $g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , получаемой после предварительной настройки НС. Это позволит гарантировать, что качество предварительной настройки НС будет оцениваться при помощи первой строки выражения (22). Изменение коэффициентов НС будет приемлемым, если достигнутое качество аппроксимации заданной ДН будет несколько улучшено при некотором компромиссе с критерием (5) или качественно улучшено при нарушении требования (6) или заметном ухудшении значения частной целевой функции (8).

Реализация остальных этапов генетического алгоритма не содержит каких-либо особенностей и не требует подробного рассмотрения.

После окончания ряда шагов генетического алгоритма осуществляют изменение списка обучаемых коэффициентов НС и регулируют значение порога  $G_2$ , увеличивая его вслед за значением частной целевой функции  $g_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , соответствующим наилучшему решению по результатам работы генетического алгоритма.

Процесс обучения НС можно считать законченным после достижения необходимого качества решения с точки зрения значений частных целевых функций или после выполнения заданного числа эпох обучения.

В связи с этим предлагаемый метод конструктивного синтеза АР с учетом взаимного влияния элементов сводится к использованию нейросетевого подхода и выполнению следующих операций:

- формированию структуры НС, соответствующей рис. 1;
- предварительной независимой настройке частей НС;
- обучению НС фрагментов общей НС на основе методов поисковой оптимизации по заданным критериям. При этом взаимное влияние элементов в составе АР учитывает математическая модель АР вида (3) с разделением АЭ на три класса: ААЭ, ПАЭ и НАЭ.

Новизна предлагаемого метода конструктивного синтеза АР состоит в использовании соответствующей структуры НС, математической модели АР вида (3) и совокупности критериев (4)–(6) выбора решения.

## 2. ОЦЕНКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА

В качестве примера рассмотрим решение задачи конструктивного синтеза АР тонких полуволновых вибраторов, расположенных в узлах прямоугольной сетки с горизонтальным шагом  $d_x = 0.52\lambda$  и вертикальным шагом  $d_y = 0.48\lambda$  и ориентированных вдоль оси  $Ox$ . Будем считать, что синтезируемая АР должна вписываться в прямоугольный раскрыв, состоящий из  $40 \times 40$  элементов.

Для расчета матрицы взаимных сопротивлений  $\mathbf{Z}$  использовались соотношения метода наводимых ЭДС и выражения для расчета электромагнитного поля в ближней зоне вибратора, приведенные в [10].

Представим заданную амплитудную ДН  $F_0(u, v)$  в виде произведения двух функций  $F_1(u)$  и  $F_2(v)$ , которые определим с помощью выражений

$$F_1(u) = \begin{cases} \cos\left(45^\circ \frac{u}{\sin(3^\circ)}\right), & |u| \leq \sin 6.1^\circ; \\ 0, & |u| > \sin 6.1^\circ; \end{cases} \quad (23)$$

$$F_2(v) = \begin{cases} 0.707 \frac{\sin^2 2^\circ}{v^2}, & v \geq \sin 2^\circ; \\ \cos\left(45^\circ \frac{v}{\sin 2^\circ}\right), & |v| < \sin 2^\circ; \\ 0, & v \leq -\sin 2^\circ, \end{cases} \quad (24)$$

где  $u$  и  $v$  – направляющие косинусы, связанные со сферической системой координат соотношениями  $u = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $v = \sin \theta \sin \varphi$ .

Весовая функция  $\rho(u, v) = 2$  при  $F_0(u, v) = F_1(u)F_2(v) > 0$ , в остальных направлениях  $\rho(u, v) = 1$ .

Требуется найти решение задачи конструктивного синтеза, являющееся наилучшим в смысле критериев (4)–(6) при условии, что  $M^{(A)} = 1300$ .

Для решения задачи использовалась НС, представленная на рис. 1. При этом число нейронов в скрытых слоях выбрано равным  $N1 = 100$ ,  $N2 = 300$ ,  $N3 = 100$ . Начальные значения коэффициентов связи и смещения сформированы при помощи датчика случайных чисел, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Величина дисперсии для первых двух частей НС выбрана близкой к единице, поскольку динамический диапазон выходных сигналов НС должен быть большим. Дисперсия случайной величины при формировании коэффициентов НС третьей части выбрана значительно меньше, поскольку при предварительной настройке на выходе данной части НС должно формироваться синфазное распределение в раскрыве АР.

Предварительная настройка классифицирующей части НС была выполнена при использовании параметров  $U_1 = 0.6$  и  $U_2 = 0.8$ , входящих в выражение (17).

Предварительная настройка всех частей НС осуществлялась в течение 500 итераций. При этом временные затраты на предварительное обучение составили около 5 мин.

На рис. 2 представлена конфигурация раскрыва, а на рис. 3а, 3б – распределения амплитуд и фаз в раскрыве АР после предварительной настройки. Значения частных целевых функций (7) и (8) после предварительной настройки НС составили 0.0093 и 0.1516 соответственно. Распреде-

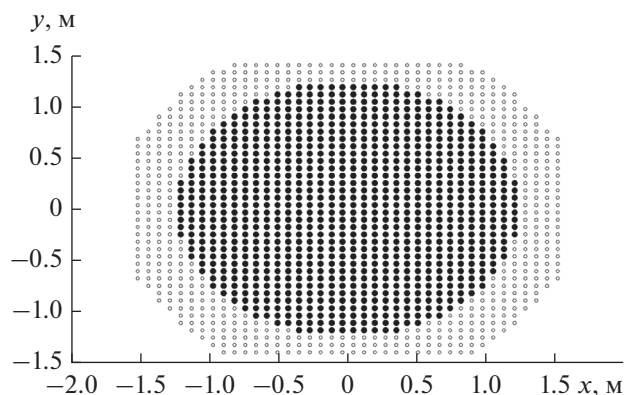


Рис. 2. Распределение групп ААЭ (в центре) и ПАЭ в раскрыве плоской АР после предварительной настройки НС.

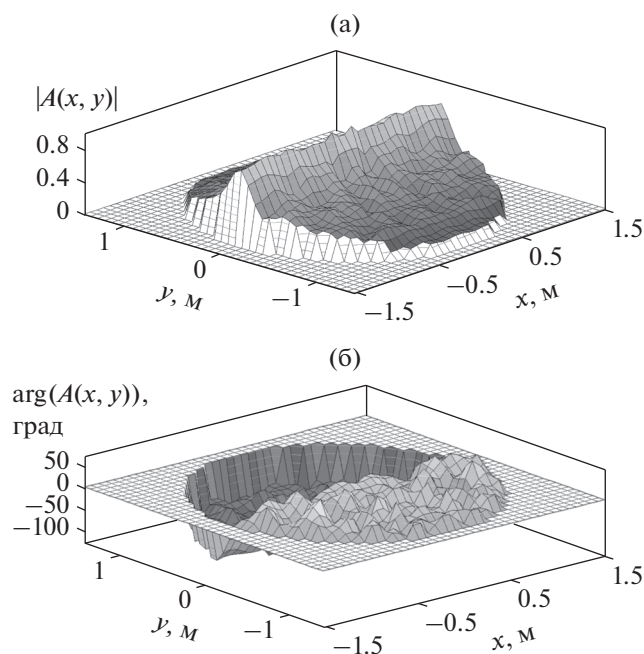


Рис. 3. Амплитудное (а) и фазовое (б) распределения в раскрыве АР после предварительной настройки НС.

ление числа элементов в группах ААЭ, ПАЭ и НАЭ составило 868, 279 и 453 соответственно.

Качество формируемой ДН после предварительной настройки отражает рис. 4, на котором приведены вертикальные сечения заданной и формируемой ДН и горизонтальное сечение формируемой ДН.

Общая настройка НС осуществлялась по 30 спискам коэффициентов НС. Каждый список состоял из 300 номеров коэффициентов в каждой части НС (т.е. общее число одновременно обучаемых коэффициентов НС составляло 900). Список содержал коэффициенты смещения выходного слоя и последнего скрытого слоя. Номера

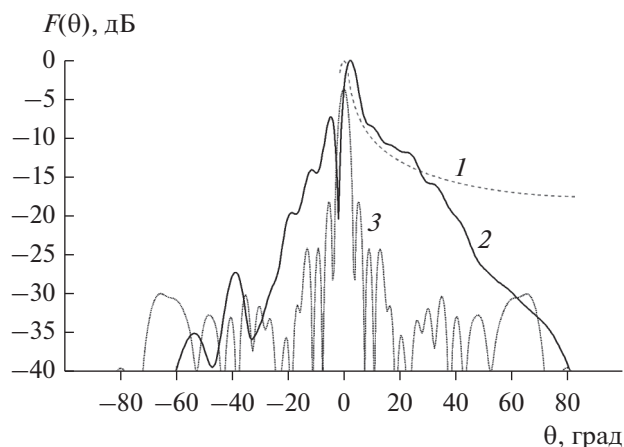


Рис. 4. Вертикальные сечения заданной (1) и формируемой ДН (2) и горизонтальное сечение формируемой ДН (3) после предварительной настройки НС.

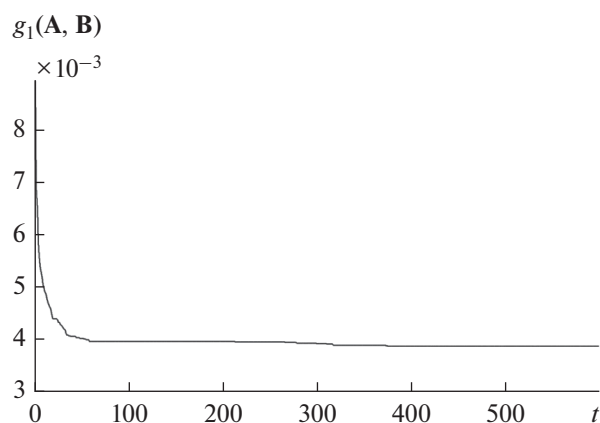


Рис. 5. Сходимость решения по критерию минимума СКО ДН АР от заданной ДН.

остальных обучаемых коэффициентов выбирали с помощью датчика случайных чисел.

Для определения коэффициентов НС из сформированного списка был использован генетический алгоритм. Длина популяции выбрана равной 200, длина родительского множества – равной 5. При формировании новой популяции использовали стандартные параметры генетического алгоритма:  $p_c = 0.2$  – вероятность скрещивания (вероятность того, что хромосома будет содержать ген не самого лучшего родителя) и  $p_m = 0.1$  – вероятность мутации текущего гена. Каждая популяция включала в свой состав элементы родительского множества, чтобы обеспечить преемственность качества решения от одного поколения к другому.

В течение одной эпохи обучения число шагов генетического алгоритма было равно 20. При этом общее число итераций процесса обучения с учетом 30 эпох обучения составило 600. На рис. 5 и 6 представлены зависимости значений частных



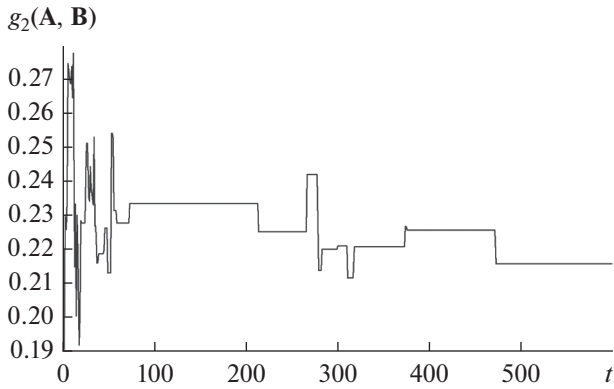


Рис. 6. Изменение частной целевой функции  $g_2(A, B)$  в зависимости от номера шага  $t$  итерационного процесса обучения.

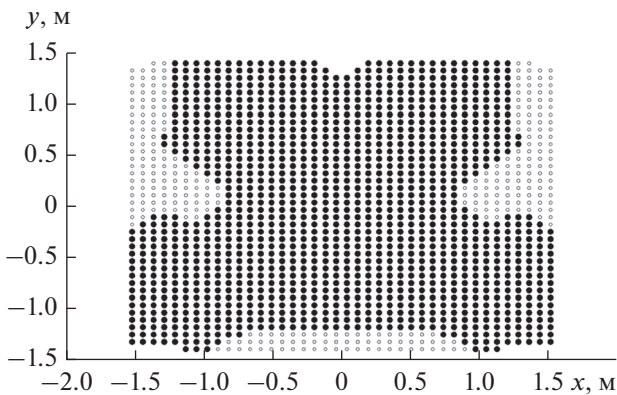


Рис. 7. Распределение групп ААЭ и ПАЭ в раскрыве АР.

целевых функций (7) и (8) от номера шага  $t$  процесса обучения.

На рис. 7, 8а и 8б приведены результаты решения задачи конструктивного синтеза АР предлагаемым методом: размещение ААЭ и ПАЭ в раскрыве, амплитудное и фазовое распределение в активной части раскрыва после обучения НС.

В результате обучения значение частной целевой функции (7) было снижено до 0.0039. Значение частной целевой функции (8) выросло до 0.2158. Число ААЭ, ПАЭ и НАЭ стало равно 1288, 292 и 20 соответственно.

На рис. 9 приведены главные сечения ДН АР после обучения НС.

Анализ полученных результатов показывает, что применение нейросетевого подхода позволяет получать решения задач многокритериального конструктивного синтеза АР с учетом взаимной связи между элементами. При этом получаемое решение позволяет оценивать не только координаты ААЭ, но и формировать конфигурацию раскрыва, включающего ПАЭ.

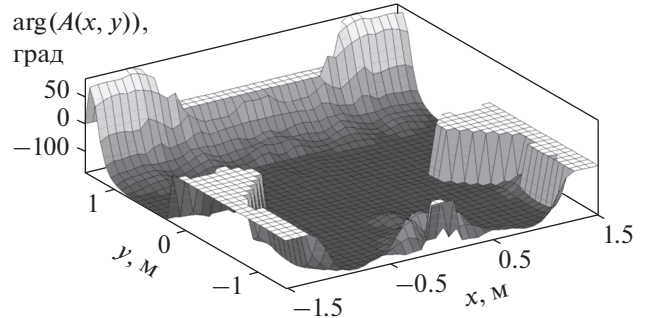
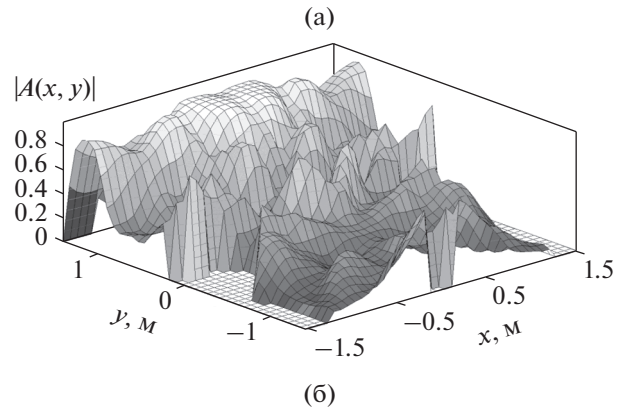


Рис. 8. Амплитудное (а) и фазовое (б) распределения в раскрыве АР после обучения НС.

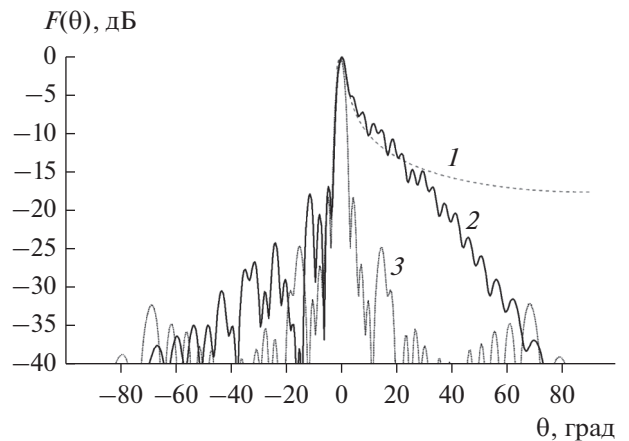


Рис. 9. Вертикальные сечения заданной (1) и формируемой ДН (2) и горизонтальное сечение формируемой ДН (3) после решения задачи конструктивного синтеза.

Результаты решения задачи синтеза значительно зависят от совокупности заданных критериев. Так, если исключить ограничение на число элементов АР (критерий (6)), то число ААЭ будет соизмеримо с заданным значением  $M$ . Если отказаться от критерия (5), то ААЭ могут быть распределены в раскрыве АР в виде нескольких изолированных областей. Сопоставление ДН, представленных на



рис. 4 и рис. 9, позволяет сделать вывод, что при решении задачи синтеза в число частных целевых функций следует добавить показатель, отражающий гладкость ДН на косекансном участке. В связи с этим при реализации предлагаемого метода необходимо особое внимание уделять формализации требований к решению задачи конструктивного синтеза АР и используемому подходу к скаляризации векторной задачи оптимизации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложенный метод конструктивного синтеза АР отличается от известных учетом взаимного влияния антенных элементов и применением нейросетевого подхода для выбора координат активных и пассивных АЭ.

2. Полученные результаты подтвердили работоспособность разработанного метода многокритериального конструктивного синтеза АР с учетом взаимной связи между элементами по требованиям к форме ДН, энергетическим характеристикам и числу активных элементов в раскрыве.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зелкин Е.Г., Соколов В.Г.* Методы синтеза антенн: фазированные антенные решетки и антенны с непрерывным раскрывом. М.: Сов. радио, 1980.
2. *Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Гусевский В.И.* Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. М.: Сайнс-Пресс, 2005.
3. *Войтович Н.Н., Кацеленбаум Б.З., Сивов А.Н. и др.* Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями: Методы конструктивного синтеза. М.: Наука, 1989.
4. *Безуглов А.А., Мищенко С.Е., Шацкий В.В.* // Труды 3-й Всерос. микроволн. конф. Москва, 25–27 ноября 2015. С. 100.
5. *Безуглов А.А., Мищенко С.Е., Шацкий В.В.* // Антенны. 2015. № 12. С. 3.
6. *Mishchenko S.E., Shatskij V.V., Eliseev D.Y. et al.* // Proc. Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW), Divnomorsk, Russia, 2019. P. 256. <https://doi.org/10.1109/RSEMW.2019.8792730>
7. *Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д.* Синтез излучающих систем. Теория и методы расчета. М.: Сов. радио, 1974.
8. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
9. *Назаров А.В., Лоскутов А.И.* Нейросетевые алгоритмы прогнозирования и оптимизации. СПб.: Наука и техника, 2003.
10. *Марков Г. Т., Сазонов Д.М.* Антенны. М.: Энергия, 1975.

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 537.876+621.39

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПЛОСКИХ ЩЕЛЕВЫХ АНТЕНН МИКРОВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2021 г. **Е. И. Нефёдов<sup>а</sup>**, **В. П. Заярный<sup>б</sup>**, **\* И. Н. Пономарев<sup>с</sup>**

<sup>а</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>б</sup>Волгоградский государственный технический университет, просп. им. В.И. Ленина, 28, Волгоград, 400005 Российская Федерация

<sup>с</sup>Волгоградский государственный университет, Университетский просп., 100, Волгоград, 400062 Российская Федерация

\*E-mail: zvp2000@mail.ru

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.

После доработки 11.10.2020 г.

Принята к публикации 16.10.2020 г.

Разработаны математические модели для плоских симметричных щелевых антенн (ЩА) с постоянной шириной щели на основе тензорной функции Грина, учитывающие как основную, так и кроссполаризационную составляющие поля излучения в дальней зоне. Обоснована возможность использования этих моделей в качестве базовых моделей для исследования электродинамических свойств ЩА, имеющих другую конфигурацию щели (линейно-, экспоненциально расширяющиеся и др.). С использованием полученных математических моделей изучено влияние геометрических размеров щелей исследовавшихся ЩА на их диаграммы направленности (ДН). Показано, что полученные расчетные ДН хорошо согласуются с результатами экспериментов, которые также позволили выявить ограничения применимости разработанных математических моделей. Исследование ЩА производилось в микроволновом диапазоне на средней частоте 10 ГГц.

DOI: 10.31857/S0033849421030165

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие современных технологий производства средств связи требует разработки и внедрения новейших технических устройств, в частности, для систем сверхбыстрой обработки информации (ССОИ) с применением объемных интегральных схем (ОИС), работающих в микроволновом и оптическом диапазонах [1]. Неотъемлемой частью ССОИ на основе ОИС является антенно-фидерная система, обеспечивающая передачу, прием и пространственную обработку высокочастотных сигналов [1, 2], в составе которых востребованы исследуемые щелевые антенны (ЩА).

Известны различные виды плоских ЩА, работающих в режиме продольного осевого излучения и поэтому принадлежащих к классу антенн бегущей волны. Конструкция таких антенн обеспечивает высокий коэффициент усиления, низкий уровень боковых лепестков и достаточно широкую полосу частот [3, 4]. К подобным ЩА, применимым в составе ОИС, относятся, в частности, антенны с постоянной шириной щели, с линейно расширяющейся щелью, с экспоненциально рас-

ширяющейся щелью (антенна Вивальди) и щели со специальным расширением, поэтому исследование электродинамических свойств этих антенн является важным и актуальным.

Данная работа в основном посвящена углубленному изучению электродинамических характеристик и разработке плоских симметричных щелевых антенн постоянной ширины (ПЩА), поскольку именно для них возможна разработка более строгих математических моделей, учитывающих как основную составляющую поля излучения, так и его кроссполаризационную составляющую. Важно то, что эти модели применимы и для разработки математических моделей ЩА, имеющих любую другую форму щели. Кроме того, физические ПЩА являются относительно простыми и технологичными в изготовлении, что особенно важно для обеспечения экспериментальных исследований и апробации ЩА в составе более сложных антенных систем, в частности таких, как дисковые антенные решетки кругового обзора [5–7].

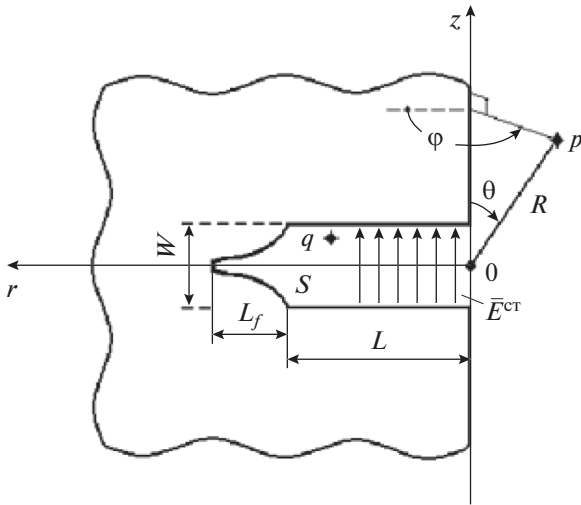


Рис. 1. Идеальная полуплоскость со щелью постоянной ширины и сторонним полем  $\vec{E}^{ct} = E_z^{ct}(r'; z')\vec{n}_z$ .

## 1. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЩЕЛЕВОЙ ЛИНИИ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Одна из первых электродинамических моделей для расчета поля излучения полубесконечной щелевой линии была предложена в работах [8, 9]. В ней отмечалось, что электрическое поле в дальней зоне от щели, врезанной перпендикулярно краю идеально проводящей полуплоскости (рис. 1), в направлении максимального излучения имеет только одну составляющую  $E_\theta$ , которая в сферической системе координат определяется выражением

$$E_\theta = \iint_{S'} E_A G_\theta dS'.$$

Здесь  $E_A$  – распределение поля в апертуре щели  $S'$ ,  $G_\theta$  – тензорная (диадная) функция Грина. Однако эта модель является неполной, поскольку учитывает только основную составляющую поля излучения и не учитывает его кроссполаризационную составляющую. Как следствие, в ней не учитывается вторая компонента тензорной функции Грина.

Для построения более полной математической модели поля излучения щелевой антенны постоянной ширины в дальней зоне, учитывающей обе составляющие этого поля, рассмотрим особенности решения задачи возбуждения идеальной полуплоскости со щелью постоянной ширины (рис. 1). Для этого используем классическое решение задачи возбуждения идеально проводящего бесконечного клина [10]. Клин имел внешний угол

раствора  $\alpha$  и возбуждался посредством стороннего объемного электрического или магнитного тока  $\vec{J}^{e,m}$ .

Методом разделения переменных Фурье было найдено общее строгое решение векторного неоднородного уравнения Гельмгольца в виде [10]

$$\nabla^2 \vec{A}^{e,m} + k^2 \vec{A}^{e,m} = -\vec{J}^{e,m}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{A}^{e,m}$  – векторный электрический или магнитный потенциал,  $k$  – волновое число. Решение этого уравнения производилось для случая возбуждения клина сторонним объемным магнитным током  $\vec{J}^m$ . При этом магнитный векторный потенциал  $\vec{A}^m$  имеет две составляющие:

$$A_r^m = A_r^m(r, \phi, z) \quad \text{и} \quad A_\phi^m = A_\phi^m(r, \phi, z),$$

где  $r, \phi, z$  – координаты точки в цилиндрической системе координат.

При внешнем угле раствора  $\alpha = 2\pi$  клин превращается в полуплоскость, а составляющие магнитного векторного потенциала, после соответствующего преобразования и перехода из цилиндрической  $(r, \phi, z)$  в сферическую  $(R, \phi, \theta)$  систему координат, представляются в виде [11]

$$A_r^m(R, \phi, \theta) = (i/8\pi) [\exp(-ikR)/R] \times \iint_{S'} E_z^{ct}(r', z') \exp(+ikz' \cos \theta) \text{Sum}_1 dS', \quad (2a)$$

$$A_\phi^m(R, \phi, \theta) = (i/4\pi) [\exp(-ikR)/R] \times \iint_{S'} E_z^{ct}(r', z') \exp(+ikz' \cos \theta) \text{Sum}_2 dS', \quad (2b)$$

где  $E_z^{ct}(r', z')$  – внешнее стороннее электрическое поле возбуждения в апертуре щели ( $z'$  и  $r'$  – соответственно поперечная и продольная координаты источников поля в пределах щели),  $S'$  – площадь щели (см. рис. 1),  $dS' = dr' dz'$  – элементарная площадка интегрирования.

Эти две составляющие векторного магнитного потенциала  $\vec{A}^m$  определяют соответственно основную (2a) и кроссполаризационную (2b) составляющие поля излучения щели на идеальной полуплоскости. Бесконечные суммы рядов  $\text{Sum}_1$  и  $\text{Sum}_2$  преобразуются к выражениям, содержащим комплексный интеграл Френеля [12]. Приводя эти суммы к виду контурного интеграла Зоммерфельда и выполняя определенные преобразования, окончательно получим составляющие электрического поля  $E_\theta(R, \phi, \theta)$  и  $E_\phi(R, \phi, \theta)$  в условиях дальней зоны излучения для щели по-

стоянной ширины в бесконечной полуплоскости (рис. 1):

$$E_0(R, \varphi, \theta) = (ik/\pi\sqrt{2})[\exp(-ikR)/R] \times \iint_S E_z^{ct}(r', z')G_0(r', z', \varphi, \theta)dS', \quad (3a)$$

$$E_\varphi(R, \varphi, \theta) = (ik/\pi\sqrt{2})[\exp(-ikR)/R] \times \iint_S E_z^{ct}(r', z')G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)dS', \quad (3b)$$

где  $E_0(R, \varphi, \theta)$  – первая (основная) составляющая поля излучения,  $E_\varphi(R, \varphi, \theta)$  – вторая (кроссполяризация) составляющая поля излучения,  $G_0(r', z', \varphi, \theta)$  и  $G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)$  – функции Грина.

Функции  $G_0(r', z', \varphi, \theta)$  и  $G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)$  связывают внешнее поле в точке источника  $q(r', z')$  с полем излучения в точке наблюдения  $p(R, \varphi, \theta)$  (см. рис. 1) и определяются соотношениями вида

$$G_0(r', z', \varphi, \theta) = [\sin \varphi \exp[j(\pi/4 + kr' \sin \theta \cos \varphi + kz' \cos \theta)]\text{Fr}(a) + \sin(\varphi/2) \times (\exp[-j(\pi/4 + kr' \sin \theta - kz' \cos \theta)]/\sqrt{\pi kr' \sin \theta})], \quad (4a)$$

$$G_\varphi(r', z', \varphi, \theta) = \cos \theta [\pm \cos \varphi \exp[j(\pi/4 + kr' \sin \theta \cos \varphi + kz' \cos \theta)]\text{Fr}(a) + \cos(\varphi/2) (\exp[-j(\pi/4 + kr' \sin \theta - kz' \cos \theta)]/\sqrt{\pi kr' \sin \theta})], \quad (4b)$$

где  $\text{Fr}(a) = \int_0^a [\exp(-jt)/\sqrt{2\pi t}] dt$  – комплексный интеграл Френеля,  $a = (1 + \cos \varphi)kr' \sin \theta$  – аргумент комплексного интеграла Френеля. В первом слагаемом компоненты  $G_0(r', z', \varphi, \theta)$  знак “+” выбирается для случая  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , а знак “-” – для случая  $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Интегрирование в (3a), (3b) производилось по поверхности регулярной щели  $S' = LW$  (см. рис. 1), при этом согласующий переход  $L_f$  и питающая щелевая линия не учитывались. В качестве внешнего стороннего поля возбуждения для постоянной щели  $E_z^{ct}(r', z')$  в (3a), (3b) использовалось квазистатическое приближение. Согласно [5, 6, 13] это внешнее поле определяется выражением

$$E_z^{ct}(r', z') = (W/\pi) \left( \exp[+jkr'] / \sqrt{(W/2)^2 - z'^2} \right). \quad (5)$$

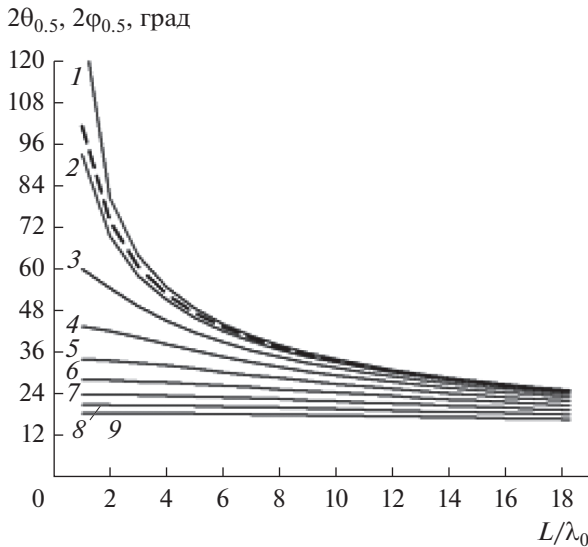
Выражение (5) представляет собой статическое решение по координате  $z'$  для электрического поля в поперечном сечении щели с учетом особенностей поведения поля на краях этой щели. При этом внешнее поле (5) в первом приближении имеет характер прямой бегущей волны вдоль координаты щели  $r'$ , которая учитывает только падающую волну и не учитывает отраженную от края полуплоскости волну. Учет отраженной волны в (5) возможен, если предварительно измерить или каким-либо образом рассчитать коэффициент отражения прямой волны, что является отдельной достаточно сложной задачей.

Из выражений (4a), (4b) следует, что элементы тензорной функции Грина  $G_0(r', z', \varphi, \theta)$  и  $G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)$  состоят из двух слагаемых, которые разным образом определяют действие внешних сторонних источников поля в точке  $q(r', z')$  и формируют поле излучения в (3a), (3б). Эти воз-

действия на значение возбуждающего поля в точке  $q(r', z')$  позволяют установить характерные свойства излучения идеальной полуплоскости, возбуждаемой регулярной щелью, врезанной перпендикулярно ее краю. Первое слагаемое в  $G_0(r', z', \varphi, \theta)$  и  $G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)$  при  $r' = 0$  обращается в нуль. Поэтому оно определяет поле излучения от внешних источников  $q(r', z')$ , расположенных практически во всех точках щели  $S'$ , исключая краевые (при  $r' = 0$ ) и некоторую область возле края щели шириной  $r_{\min}$ , в пределах которой значением интеграла Френеля можно пренебречь и считать  $\text{Fr}(a) \approx 0$  (для  $a = (1 + \cos \varphi)kr' \sin \theta \approx 0$  в интервале  $0 \leq r' \leq r_{\min}$ ).

Следовательно, для короткой щели длиной  $0 < L \leq r_{\min}$  и для всех точек наблюдения поля  $p(R, \varphi, \theta)$ , расположенных на краю идеальной полуплоскости при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , а также в  $E$ -плоскости при  $\varphi = \pi$  и  $0 < \theta < \pi$ , это слагаемое обращается в нуль и на поле излучения не влияет. Вторые слагаемые в  $G_0(r', z', \varphi, \theta)$  и  $G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)$ , наоборот, при  $r' = 0$  достигают бесконечного значения и вносят наибольший вклад в поле излучения для источников  $q(r', z')$ , расположенных на краю излучающей щели  $S'$ . По мере удаления источников  $q(r', z')$  от края щели вдоль оси  $r'$ , вклад этого слагаемого в поле дальней зоны монотонно уменьшается по закону  $(kr')^{-1/2}$ . Второе слагаемое обеспечивает выполнение закона сохранения энергии для точек наблюдения  $p(R, \varphi, \theta)$ , приближающихся к краю полуплоскости при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  (см. рис. 1).

Таким образом, из выражений (4a), (4б) следует, что в формировании основной компоненты поля излучения  $E_0(R, \varphi, \theta)$  в плоскости  $H$  при



**Рис. 2.** Расчетная зависимость ширины главного луча ДН исследовавшихся ПЩА от  $L/\lambda_0$  при следующих значениях  $W/\lambda_0$ : для плоскости  $E$  — 0.25 (1), 0.5 (2), 0.75 (3), 1.0 (4), 1.25 (5), 1.5 (6), 1.75 (7), 2.0 (8); 3.0 (9); для плоскости  $H$  — штриховая линия.

$\theta = \pi/2$  и  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в элементе  $G_\theta(r', z', \varphi, \theta)$  участвуют оба слагаемых, а в плоскости  $E$  при  $\varphi = \pi$  и  $0 < \theta < \pi$  — только второе слагаемое. При этом как в плоскости  $H$ , так и в плоскости  $E$  элемент  $G_\varphi(r', z', \varphi, \theta)$  обращается в нуль. Такое поведение основной и кроссполяризованной составляющих является характерным свойством излучения для идеальной полуплоскости, возбуждаемой щелью с любым законом расширения щели.

При разработке математических моделей поля ПЩА и в случае использовании их для разработки моделей поля ЩА другой формы, первоначально определяется поле в апертуре регулярной щели, а затем решается задача возбуждения идеальной полуплоскости этим полем. Данные модели для ПЩА частично апробированы и проверены в работах [5, 6, 12–14].

## 2. РАСЧЕТ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ ИССЛЕДОВАВШИХСЯ ЩЕЛЕВЫХ АНТЕНН С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗРАБОТАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ИХ ОПЫТНОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Диаграммы направленности исследовавшихся ПЩА для поля в дальней зоне рассчитывали с использованием формул (3)–(5) в  $E$ - и  $H$ -плоскостях соответственно для условий

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi \quad \text{и} \quad 0 < \theta < \pi, \\ \theta &= \pi/2 \quad \text{и} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

При этом считалось, что физическая конструкция ПЩА заменялась идеально проводящей бесконечной полуплоскостью, возбуждаемой внешним сторонним электрическим полем в щели (см. рис. 1), на частоте излучения  $f_0 = 10$  ГГц (соответствующая длина волны  $\lambda_0 = 3$  см).

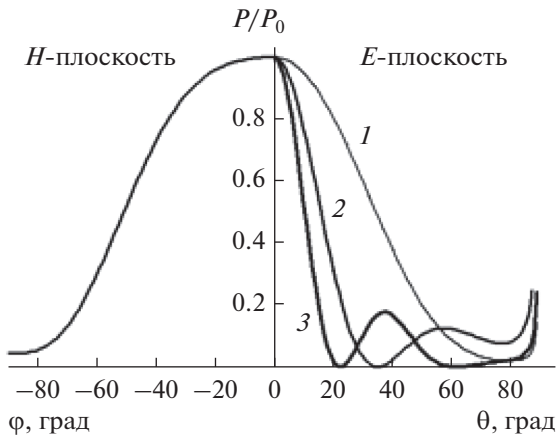
При построении рассчитанных ДН для исследуемых ПЩА их длина  $L$  изменялась в пределах  $(1...18)\lambda_0$ , а ширина  $W$  — в пределах  $(0.25...3.0)\lambda_0$ . На основе полученных расчетных данных установлено влияние указанных геометрических размеров ПЩА на ширину их ДН, что поясняется графиками на рис. 2 ( $2\theta_{0.5}$  и  $2\varphi_{0.5}$  — ширина диаграмм направленности ПЩА по половинной мощности в плоскостях  $E$  и  $H$  соответственно). Характер этих зависимостей является прогнозируемым и соответствует опубликованным данным.

Из анализа характеристик расчетных ДН (см. рис. 2) следует, что в  $E$ -плоскости для фиксированных значений  $L$  ( $\lambda_0$  не изменяется) при увеличении ширины щели  $W$  ширина главного луча для всех ДН уменьшается. Для фиксированных значений  $W$  при увеличении длины щели  $L$  существенная зависимость ширины главного луча ДН от  $L$  имеет место для коротких антенн ( $W/\lambda_0 \leq 1$ ). При увеличении значения  $W/\lambda_0$  эта зависимость ослабляется и при  $W/\lambda_0 \geq 1.5$  практически отсутствует. Из рис. 2 также видно, что в  $H$ -плоскости (штриховая линия) при изменении длины щели  $L$  и ее ширины  $W$  в тех же пределах ширина главного луча ДН зависит только от длины щели и не зависит от ее ширины.

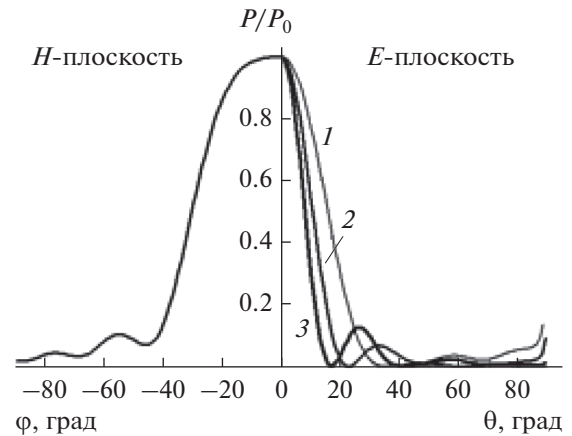
Для удобства сравнения с экспериментальными данными (см. далее) на рис. 3–5 приведены только те расчетные ДН, для которых значения  $L$  и  $W$  такие же, что и для экспериментально измеренных ДН: при длине щели  $L = 3$  см ширина  $W = 2, 4$  и  $6$  см; при  $L = 9$  см ширина  $W = 4, 6$  и  $8$  см; при  $L = 15$  см ширина  $W = 3, 6$  и  $9$  см. На всех рисунках диаграммы направленности нормированы по мощности и показаны только половины их изображений в плоскостях  $E$  (справа) и  $H$  (слева), считая ДН симметричными.

Из приведенных на рис. 3–5 графиков ДН видно, что с увеличением длины щели  $L$  и ее ширины  $W$  ширина ДН уменьшается, что свидетельствует об увеличении коэффициента направленного действия, а уровень боковых лепестков (УБЛ) ДН снижается, что повышает усилительные свойства антенны.

Для приведенных теоретических (расчетных) ДН бесконечная полуплоскость идеально ровная, а щель регулярная и абсолютно симметричная, поэтому влияние кроссполяризованной составляющей поля в главных электродинамических плоскостях  $E$  и  $H$  отсутствует (см. разд. 1). Расчет кроссполяризованной составляющей поля для



**Рис. 3.** Расчетные ДН исследовавшихся ПЩА при постоянной длине  $L = 3$  см для значений ширины  $W = 2$  (1), 4 (2) и 6 см (3).



**Рис. 4.** Расчетные ДН исследовавшихся ПЩА при постоянной длине  $L = 9$  см для значений ширины  $W = 4$  (1), 6 (2) и 8 см (3).

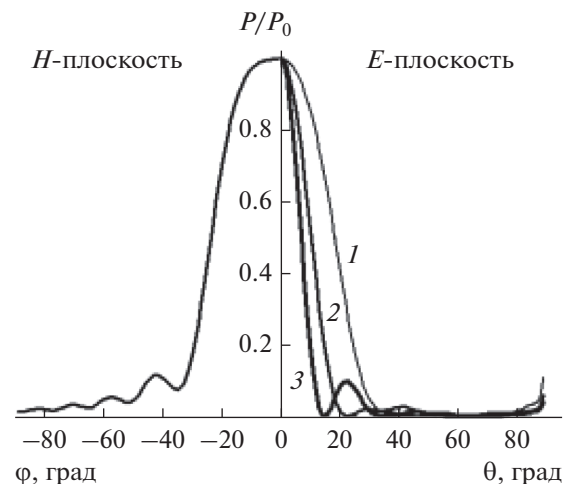
произвольных значений углов  $\theta$ ,  $\varphi$  в пределах  $0 < \theta$ ,  $\varphi < \pi/2$  показал, что она хаотически изменялась относительно среднего уровня порядка  $-15$  дБ, а ее максимальные значения не превышали  $-8$  дБ (в системе координат рис. 3–5 соответственно уровни 0.032 и 0.158), что ниже уровня половинной мощности. Установление более точных характеристик распределения кроссполяризованной составляющей является задачей достаточно трудоемкой и требует отдельного изучения.

Для проведения натурального эксперимента был изготовлен ряд опытных образцов плоских симметричных щелевых антенн в виде щелей постоянной ширины, аналогичных показанным на рис. 1. Для изготовления экспериментально исследуемых ПЩА была использована проводящая металлическая поверхность, с высокой проводимостью (медь, алюминий), нанесенная на тонкую диэлектрическую подложку из материала с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon \approx 1$ . Следовательно, влиянием подложки на фазовую скорость волны в ЩА можно пренебречь и считать разработанные математические модели их адекватным модельным аналогом.

Диаграммы направленности экспериментальных ПЩА измеряли также на частоте  $f_0 = 10$  ГГц ( $\lambda_0 = 3$  см) на физической установке, описанной в [15, 16] и модернизированной для проведения данных исследований. Описание экспериментального макета и обоснование конструкции узла возбуждения для исследовавшихся ПЩА аналогичны приведенным в [7].

На рис. 6–8 приведены экспериментально измеренные ДН для исследовавшихся ПЩА (ДН также совмещены для удобства сравнения), у которых длина и ширина изменялись в пределах, указанных для расчетных ДН (рис. 3–5).

Из графиков рис. 6–8 видно, что закономерности, определяющие зависимость ширины главного луча измеренных ДН от длины  $L$  и ширины  $W$  исследовавшихся ПЩА в плоскостях  $E$  и  $H$  такие же, как и у расчетных ДН и соответствуют закономерностям, показанным на графиках рис. 2. Также видно, что у экспериментально полученных ДН для антенн, имевших  $L \leq 9$  см, вершина главного лепестка более протяженная и пологая, чем в случае расчетных ДН, что многократно подтверждалось при проведении экспериментов. Усреднение ДН произведено в пределах указанной на графиках статистической погрешности. Расчетные и измеренные значения ширины главного луча ДН по половинной мощности в плоскостях  $E$  и  $H$  для исследовавшихся ПЩА приведены в табл. 1–3.



**Рис. 5.** Расчетные ДН исследовавшихся ПЩА при постоянной длине  $L = 15$  см для значений ширины  $W = 3$  (1), 6 (2) и 9 см (3).



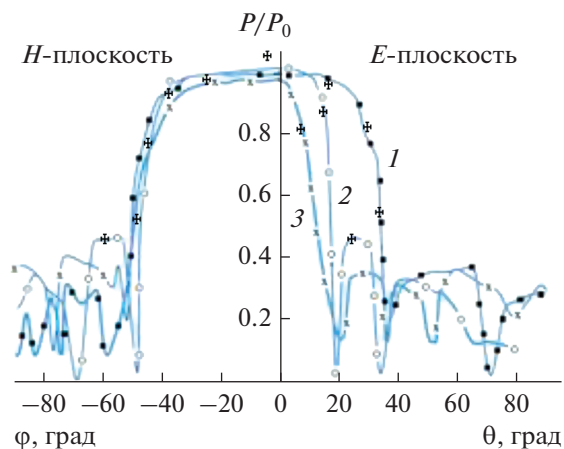


Рис. 6. Измеренные ДН опытных ПЩА при постоянной длине  $L = 3$  см для значений ширины  $W = 2$  (1), 4 (2) и 6 см (3).

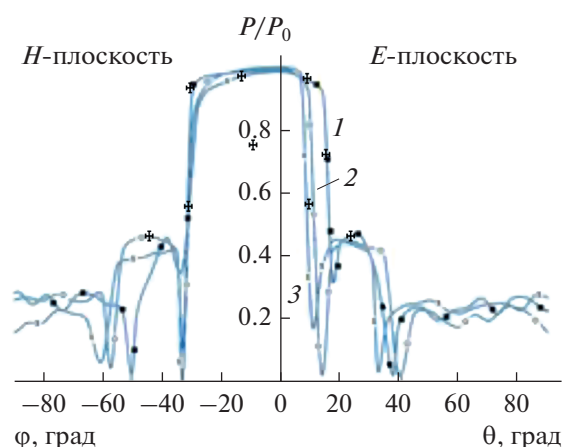


Рис. 7. Измеренные ДН опытных ПЩА при постоянной длине  $L = 9$  см для значений ширины  $W = 4$  (1), 6 (2) и 8 см (3).

Из анализа результатов, приведенных в табл. 1–3, видно, что для  $E$ - плоскости экспериментально измеренные ДН по уровню половин-

Таблица 1. Ширина главного луча ДН исследуемых ПЩА для  $L = 3$  см

$W$ , см	Расчет, град	Измерения (Эксперимент?), град
$E$ -плоскость, $2\theta_{0,5}$		
2	72	67
4	37	34
6	20	25
$H$ -плоскость, $2\varphi_{0,5}$		
2	100	105
4	100	104
6	100	97

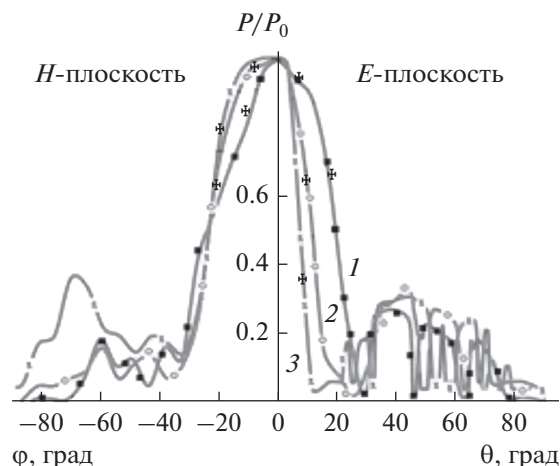


Рис. 8. Измеренные ДН опытных ПЩА при постоянной длине  $L = 15$  см для значений ширины  $W = 3$  (1), 6 (2) и 9 см (3).

ной мощности хорошо согласуются с теорией для значений  $L = 9$  и 15 см (когда  $L/\lambda_0 \gg 1$ ). Для более коротких антенн, при приближении значений  $L/\lambda_0$  к 1, рассогласование нарастает и принимает значения, превышающие значение статистической погрешности (по углу порядка  $4^\circ$ ). Экспериментально установлено, что при дальнейшем уменьшении длины ЩА форма их ДН искажалась, рассогласование с модельными представлениями существенно увеличивалось, что может свидетельствовать об ограничении возможностей использования разработанных математических моделей.

Из приведенных данных также видно, что для  $H$ -плоскости ширина измеренных ДН по уровню половинной мощности хорошо согласуется с расчетными данными. При этом ширина измеренных ДН также существенно зависит от длины щели и слабо зависит от ее ширины.

Из результатов, приведенных в табл. 1–3 также видно, что ширина главного луча эксперимен-

Таблица 2. Ширина главного луча ДН исследуемых ПЩА для  $L = 9$  см

$W$ , см	Расчет, град	Измерения, град
$E$ -плоскость, $2\theta_{0,5}$		
4	33	32
6	22	23
8	16	17
$H$ -плоскость, $2\varphi_{0,5}$		
4	63	64
6	63	64
8	63	64



**Таблица 3.** Ширина главного луча ДН исследуемых ПЩА для  $L = 15$  см

$W$ , см	Расчет, град	Измерения, град
<i>E</i> -плоскость, $2\theta_{0,5}$		
3	38	40
6	21	22
9	14	15
<i>H</i> -плоскость, $2\phi_{0,5}$		
3	48	51
6	48	50
9	48	50

тально измеренных ДН в *H*-плоскости везде больше, чем в *E*-плоскости, что также хорошо коррелирует с расчетными данными.

Эксперимент также показал, что форма ДН существенно не изменялась в диапазоне часто 8...12 ГГц. Уровень боковых лепестков экспериментально полученных ДН во всех случаях был выше, чем для расчетных ДН, но не превышал значения половинной мощности. Высокий УБЛ у измеренных ДН объясняется, вероятнее всего, конечной поверхностью исследовавшихся антенн, их неидеальной формой и наличием отражения от стенок измерительной камеры.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для плоских симметричных щелевых антенн микроволнового диапазона с постоянной шириной щели разработаны математические модели для поля излучения в дальней зоне с применением тензорной функции Грина, позволяющей учесть как основную, так и кроссполаризационную составляющую поля излучения. При этом считалось, что физическая конструкция ПЩА заменялась идеально проводящей бесконечной полуплоскостью с врезанной перпендикулярно ее краю щелью, возбуждаемой внешним сторонним электрическим полем частотой  $f_0 = 10$  ГГц ( $\lambda_0 = 3$  см).

С использованием этих моделей теоретически рассчитаны семейства ДН исследовавшихся ПЩА в *E*- и *H*-плоскостях при изменении длины щели в пределах (1...18)  $\lambda_0$  и ее ширины в пределах (0.25...3.0)  $\lambda_0$ . Анализ этих ДН показал, что в *E*-плоскости при увеличении длины щели и ее ширины ДН сужаются, что повышает их направленные свойства. При этом уровень боковых лепестков ДН уменьшается, что приводит к увеличению усиленных свойств антенн. В *H*-плоскости при изменении длины и ширины щели в тех же пределах ширина главного луча ее ДН по половинной мощности остается практически неизменной и была несколько большей, чем для ДН в *E*-плоскости. Расчет

также показал, что для идеализированного случая (бесконечная полуплоскость идеально ровная, щель регулярная и абсолютно симметричная) кроссполаризационная составляющая поля в главных плоскостях отсутствовала. В других плоскостях она имела хаотически изменяющиеся значения относительно среднего уровня –15 дБ, ее максимальные значения не превышали –8 дБ и не достигали уровня половинной мощности излучения.

Результаты эксперимента для аналогичных опытных образцов ПЩА, у которых длина и ширина щели имели те же значения, что и модельные, показали, что их ДН имеют те же закономерности, что и расчетные ДН. Сравнительный анализ показал, что для *E*-плоскости экспериментально измеренные ДН по уровню половинной мощности хорошо согласуются с расчетными ДН для значений длины щели  $L$ , когда отношение  $L/\lambda_0 \gg 1$ . Для более коротких антенн при приближении значений  $L/\lambda_0$  к 1 рассогласование между расчетными и измеренными значениями ширины ДН увеличивается и превышает значение статистической погрешности по углу (порядка 4°). Экспериментально установлено, что при дальнейшем уменьшении длины ЩА, форма их ДН искажалась, рассогласование с модельными представлениями существенно увеличивалось, что может свидетельствовать об ограничении возможностей использования разработанных математических моделей. Также установлено, что для *H*-плоскости ширина измеренных ДН по уровню половинной мощности хорошо согласуется с расчетными значениями, она тоже определяется длиной щели и слабо (в пределах статистической погрешности) зависит от ее ширины.

Эксперимент также показал, что форма ДН существенно не изменялась в диапазоне частот 8...12 ГГц. Уровень боковых лепестков экспериментально полученных ДН во всех случаях был выше, чем для расчетных ДН, но не превышал значения половинной мощности. Высокий УБЛ у измеренных ДН, вероятнее всего, объясняется конечной поверхностью исследовавшихся антенн, их неидеальной формой и наличием отражения от стенок измерительной камеры.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nefyodov E.I., Smolsky S.M.* Electromagnetic fields and waves. Microwaves and mmwave engineering with generalized macroscopic electrodynamics. N.Y.: Springer, 2019.
2. *Nefyodov E.I., Smolsky S.M.* Understanding of electrodynamics, radio wave propagation and antennas: Lecture course for students and engineers. Wuhan: Scientific Research Publishing, 2012.
3. *Gibson P.J.* // Proc. 9th Europ. Microwave Conf., U.K. 1979. Brighton: P. 101.

4. *Вайнер Ю.А., Гураль И.М., Коняшенко Е.А. и др.* // Антенны / Под ред. А.А. Пистолькорса. М.: Связь, 1980. Вып. 28. С. 95.
5. *Заярный В.П., Парпула С.А., Гирич В.С.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. № 11. С. 106.
6. *Заярный В.П., Парпула С.А., Гирич В.С., Пономарев И.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 6. С. 529.
7. *Фролов А.А., Гирич С.В., Заярный В.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55. № 10–11. С. 697.
8. *Janaswamy R., Schaubert D.* // IEEE Trans. 1987. V. AP-35. № 9. P. 1058.
9. *Janaswamy R., Schaubert D.H., Pozar D.M.* // Radio Sci. 1986. V. 21. № 5. P. 797.
10. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967.
11. *Уфимцев П.Я.* Основы физической теории дифракции. М.: Бинум. Лаборатория знаний, 2014.
12. *Нефёдов Е.И., Пономарев И.Н.* // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. 2014. Т. 18. № 1. С. 58.
13. *Заярный В.П., Нефедов Е.И., Пономарев И.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61. № 4. С. 315.
14. *Виленский А.Р.* // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 5. С. 139. <http://technomag.bmstu.ru/doc/710740.html>
15. *Заярный В.П.* Радиофизические свойства твердотельных слоистых структур с зарядовой связью: методы и информационные возможности для их определения. М.: Радио и связь, 2001.
16. *Фролов А.А., Гирич С.В., Заярный В.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52. № 4. С. 328.

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.396.67

### ДИСТАНЦИОННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

© 2021 г. В. И. Гусевский<sup>а</sup>, М. Д. Дупленкова<sup>а, б, \*</sup>, О. Н. Цветкова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Особое конструкторское бюро Московского энергетического института,  
ул. Красноказарменная, 14, Москва, 111250 Российская Федерация

<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр.7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: duplenkova@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.08.2020 г.

После доработки 18.09.2020 г.

Принята к публикации 25.09.2020 г.

Рассмотрены проблемы надежности многоэлементных антенных устройств, а также вопросы, относящиеся к анализу искажений в неремонтопригодных условиях, построению алгоритмов дистанционного управления и коррекции антенных характеристик многоэлементных антенн. Предложен новый подход к разработке алгоритма восстановления исходных (проектных) диаграмм направленности в пределах плоских раскрытов. Обеспечение восстановления диаграммы направленности осуществляется при отсутствии априорной информации о характере деформации излучающей поверхности, без знания искаженного фазового распределения вдоль раскрыва, без использования дополнительной измерительной аппаратуры в непосредственной близости от рассматриваемой фазированной антенной решетки (ФАР). Представлены примеры восстановления диаграмм направленности деформированных ФАР.

DOI: 10.31857/S0033849421030062

#### ВВЕДЕНИЕ

Качество функционирования многоэлементных антенных устройств с электронным управлением, в частности плоских фазированных антенных решеток (ФАР) и активных фазированных антенных решеток (АФАР), во многом зависит от необходимой степени плоскостности излучающей поверхности и точной периодичности расположения излучающих элементов. Обычно стабильность их положения обеспечивается благодаря механической жесткости плоской конструкции, поддерживающей сотни антенных элементов. Использование жестких конструкций, часто выполняемых из специальных сплавов, чтобы избежать тепловых деформаций, приводит к усложнению устройства, увеличению массы и повышению стоимости изделия. Вместе с тем любая потеря жесткости конструкции может повлечь за собой значительное ухудшение характеристик системы в результате механических искажений из-за условий эксплуатации, среди которых тепловые искажения, неустойчивые аэродинамические нагрузки, такие как ветер и турбулентность, осадки, дополнительные ледовые или снежные нагрузки, механические вибрации и т.д. Поэтому повышение надежности многоэлементных антенных устройств, работающих в том числе в экстремаль-

ных условиях космического пространства, и решение проблем постепенной деградации их параметров в течение длительного периода эксплуатации до сих пор остаются одной из наиболее насущных задач создания образцов новой техники.

В связи с многосторонним характером этой проблемы в данной статье рассматриваются вопросы, относящиеся к анализу искажений в неремонтопригодных условиях, построению алгоритмов дистанционного управления и коррекции антенных характеристик многоэлементных антенн, прежде всего ФАР и АФАР. Для этого проведен анализ диаграмм направленности (ДН) бортовых антенных устройств. Акцент сделан на задаче дистанционного восстановления параметров многоэлементных ФАР за счет возможностей электронного управления фазой отдельных каналов.

#### 1. ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ

В настоящее время проблема восстановления ДН ФАР и АФАР, деформированных в результате внешних воздействий на излучающую поверхность, вызывает большой интерес.

Известны следующие способы уменьшения влияния структурной деформации на электрические свойства антенной решетки (АР). Одним из

них является методика механической компенсации, которая позволяет увеличить жесткость и прочность антенны [1, 2]. Другой способ состоит в том, что антенна оснащается датчиками для измерения абсолютных деформаций поверхности в реальном времени [3, 4]. Данные, предоставляемые датчиками, позволяют моделировать механическую форму деформированной структуры в целом; после этого компенсируется влияние указанных деформаций с помощью коррекции АФР. Еще один способ относится к методам активной компенсации, которые обычно компенсируют эффекты искажений путем прямого воздействия на АФР антенного устройства, чтобы изменить его диаграмму направленности без непосредственного измерения механических искажений. Такой подход представляется наиболее перспективным, так как он не требует дополнительных средств измерения (датчиков). В [5] авторы исследуют ДН АФАР после деформации излучающей поверхности, с помощью обратного преобразования Фурье [6], определяют искаженное (реальное) амплитудно-фазовое распределение. Разница между реальным и проектным АФР корректируется. В результате уровень боковых лепестков (УБЛ) деформированной АР снижается до проектного уровня. Однако авторы указанной работы не рассматривают вопрос восстановления направления главного лепестка ДН.

В [7] описан метод компенсации искажений в деформированной ФАР, который основан на фазовой перенастройке всех излучающих элементов с тем, чтобы восстановить направление главного лепестка ДН, при этом УБЛ остается прежним. Этот подход сравнивается с методами, основанными на оптимизации АФР для восстановления ДН по методу наименьших квадратов и с помощью спектрального анализа. Алгоритм на основе метода наименьших квадратов минимизирует разность между идеальной ДН и искаженной ДН в каждом направлении. В [7] отмечают эффективную компенсацию как ближних, так и дальних боковых лепестков ДН. Однако в работе отмечено, что метод наименьших квадратов требует продолжительных вычислений, особенно для многоэлементных АФАР. Метод компенсации на основе спектрального анализа имеет меньшую продолжительность вычислений и результаты, аналогичные методу наименьших квадратов, но он менее эффективен при высокой амплитуде искажений формы поверхности.

В [8] предлагается относительно простой метод калибровки и компенсации механических искажений излучающей поверхности бортовых ФАР. В указанном методе используется одна зондовая антенна, интегрированная на спутниковой ФАР, на том же спутнике установлена вынесенная измерительная приемная антенна. Анализируются сигналы, принимаемые зондовой антенной до и

после деформации поверхности. На основании этого анализа сделаны выводы о механическом смещении каждого излучающего элемента и определены фазовые добавки для коррекции ДН. Авторы фокусируются лишь на случае линейного наклона апертуры, обсуждения иных видов деформации не представлено. Недостатком предложенного метода является то, что для его применения требуется дополнительная зондовая антенна и вынесенная приемная антенна на спутнике.

Наряду с проблемами восстановления ДН, искаженных в результате механической деформации излучающей поверхности, в литературе широко обсуждается проблема восстановления ДН после отказа некоторой части излучающих элементов. В [9] предлагается способ перенастройки амплитудного и фазового распределений оставшихся элементов путем минимизации среднего УБЛ с помощью метода сопряженных градиентов. Описанный в [10] подход основан на том, что сигнал от бортовой антенны с некоторым количеством отказавших элементов поступает на приемную АР с цифровым формированием луча. Предлагается алгоритм, который позволяет сформировать в принимаемой АР необходимое АФР, для того чтобы скомпенсировать влияние отказавших элементов в бортовой антенне. В статье [11] метод, основанный на генетическом алгоритме, применен к исправлению ДН решетки с вышедшими из строя элементами. Введено понятие вектора решетки, где учитывается вес каждого элемента при формировании ДН. В процессе коррекции веса отказавших элементов обнуляются и посредством генетического алгоритма синтезируется новый набор амплитуд и фаз на исправных элементах; при этом критерием остановки итерационного процесса является минимизация разницы между проектной и восстановленной ДН. Хотя данные методы применялись для восстановления ДН, искаженной в результате выхода нескольких излучающих элементов из строя, они также могут быть эффективно использованы для компенсации деформированной поверхности антенны.

Обратим внимание, что описанные выше подходы к восстановлению ДН принадлежат к методам активной компенсации, т.е. они применимы только к активным ФАР.

Метод фазовой коррекции предложен в [12]. При данном способе на первом этапе для каждого антенного элемента случайным образом генерируется некоторая фазовая добавка. С помощью дополнительной эталонной антенны определяется значение коэффициента усиления ФАР с фазовой коррекцией, после чего измеренное значение коэффициента усиления (КУ) сравнивается с проектным. Если условие сходимости не выполнено, новое значение фазового распределения определяется с помощью итерационного процесса, со-

ставляющего суть генетического алгоритма. Следует отметить такие существенные особенности данного метода, как необходимость использования дополнительной эталонной бортовой антенны для анализа реализованного коэффициента усиления в процессе каждой итерации; метод ориентируется только на величину КУ в максимуме излучения и не учитывает такие существенные параметры восстанавливаемой ДН, как ориентацию направления главного луча ДН, ширину главного луча ДН, уровень боковых лепестков и т.д.; на первом этапе значения фазовых сдвигов на каждом элементе генерируется случайным образом без анализа искажений ДН ФАР, что приводит к значительному увеличению количества итераций при поиске компенсирующих фазовых добавок.

Предлагаемый в данной статье способ решает задачу восстановления ДН методом фазовой коррекции, т.е. он подходит не только для активных, но и для пассивных ФАР, что существенно расширяет область его применимости по сравнению с работами, перечисленными выше. Обеспечение восстановления ДН осуществляется при отсутствии априорной информации о характере деформации излучающей поверхности, без знания искаженного фазового распределения вдоль раскрыва, без использования дополнительной измерительной аппаратуры в непосредственной близости от рассматриваемой ФАР. Задача восстановления ДН решается лишь на основе знания проектных параметров ФАР и измеренной деформированной ДН.

## 2. МЕТОД АПЕРТУРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

В основе предлагаемого подхода к разработке алгоритма восстановления исходных (проектных) ДН в пределах плоских раскрывов произвольной формы лежит метод апертурных ортогональных полиномов (АОП) [13–15]. Особенность этого метода состоит в том, что структура решения интегрального уравнения для амплитудно-фазового распределения (АФР) электромагнитного поля на плоском раскрыве в соответствии с теоремой эквивалентности [16] опирается на известное представление векторных потенциалов через интегральные выражения функции Грина свободного пространства, умноженного на векторную функцию АФР поля. При этом используются ортогональные представления АФР поля в пределах плоского раскрыва, отвечающие в задачах фазового синтеза весовой функции, совпадающей с известной функцией амплитудного распределения поля и удовлетворяющей условиям Дирихле на границе раскрыва произвольной формы.

В рамках данного метода фазовое распределение представляется отрезком обобщенного ряда

Фурье по ортогональным полиномам с неизвестными коэффициентами  $C_{nm}$ :

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm} P_{nm}(x, y). \quad (1)$$

В соответствии с известными методами ортогонализации [17] будем считать, что набор ортогональных полиномов  $P_{nm}(x, y)$ , порожденный функцией амплитудного распределения поля  $\rho(x, y)$ , задан.

Тогда для плоского раскрыва областью  $\Omega(x, y)$  выражение для диаграммы направленности имеет вид

$$f(\theta, \varphi) = \iint_{\Omega} \exp(-ik \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)) \times \exp\left(i \sum_n \sum_m C_{nm} P_{nm}(x, y)\right) \rho(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где  $C_{nm}$  – коэффициенты ортогональных полиномов,  $\rho(x, y)$  – амплитудное распределение (весовая функция процесса ортогонализации) поля в раскрыве.

Свойства ортогональности фазовых гармоник в антенном раскрыве обеспечивают взаимную независимость отдельных фазовых гармоник. В соответствии с [18] первые гармоники фазового распределения оказывают максимальное влияние на форму ДН, положение главного луча ДН, и уровень первых боковых лепестков, причем 1-я гармоника влияет на ориентацию главного лепестка, 2-я на ширину главного лепестка и т.д.

## 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ПЛОСКОГО РАСКРЫВА

Предлагаемый способ восстановления диаграммы направленности, искаженной по причине случайных деформаций излучающей поверхности ФАР, основан на известном в теории ФАР фазовом синтезе ДН путем управления и коррекции фазового распределения электромагнитного поля в раскрыве [19, 20]. С использованием упомянутых методов строится энергетический функционал ФАР, характеризующий степень искажения ДН в заданном диапазоне углов по сравнению с проектным при наличии фазовых искажений электромагнитного поля в антенном раскрыве. В рамках предлагаемого способа мы определяем фазовое распределение  $\Phi(x, y)$  в раскрыве, отвечающее деформированной ДН, а затем, сравнивая его с проектным  $\Phi_0(x, y)$ , определяем необходимые дополнительные фазовые сдвиги для каждого элемента и устанавливаем их с помощью управляемых фазовращателей. При реализации предлагаемого способа известными величинами являются проектные параметры ФАР  $\rho_0(x, y)$  и  $\Phi_0(x, y)$  – соответственно амплитудное и фазовое распределение

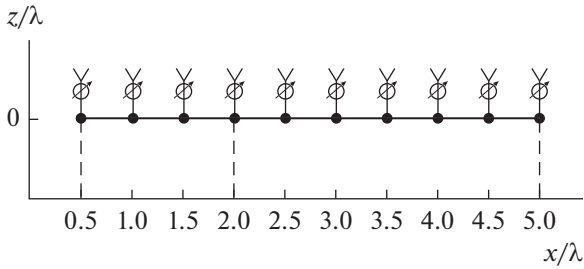


Рис. 1. Структурная схема недеформированной ФАР.

напряженности поля вдоль раскрыва, проектная ДН  $f_0(x, y)$ , а также  $f(\theta, \varphi)$  – ДН, искаженная в результате деформации излучающей поверхности и измененная в процессе контрольных процедур.

Для определения дополнительных фазовых сдвигов используется следующая последовательность действий.

1. Исходя из требований технического задания, определяют требования к восстановленной ДН. На практике, как правило, не требуется полного совпадения восстановленной ДН с исходной [7, 11, 21], обычно требования к восстановленной ДН ограничиваются величиной КУ, расширением главного лепестка, УБЛ.

2. Представляют неизвестное фазовое распределение  $\Phi(x, y)$  напряженности поля вдоль деформированного раскрыва в виде (1) разложения в ряд Фурье по ортогональным полиномам  $P_{nm}(x, y)$ , где  $C_{nm}$  – неизвестные коэффициенты Фурье фазового распределения напряженности поля вдоль деформированного раскрыва.

3. Переходят к конечному представлению фазового распределения напряженности поля вдоль деформированного раскрыва

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{nm} P_{nm}(x, y), \quad (3)$$

причем количество гармоник на первом этапе выбирается в соответствии с [18], на практике обычно достаточно пяти–десяти гармоник, тогда выражение для ДН, которую формирует распределение фазы напряженности поля  $\Phi(x, y)$ , можно представить в виде

$$f_p(\theta, \varphi) = \int_{\Omega} \exp(ik \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)) \times \exp\left(i \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{nm} P_{nm}(x, y)\right) \rho(x, y) dx dy, \quad (4)$$

4. Минимизируя функционал

$$I = \min_{C_{nm}} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (f(\theta, \varphi) - f_p(\theta, \varphi))^2 d\theta d\varphi, \quad (5)$$

находят значения  $C_{nm}$ . Необходимо отметить, что при определении неизвестных коэффициентов Фурье  $C_{nm}$  в качестве первого приближения целесообразно принимать коэффициенты обобщенного ряда Фурье  $C_{0nm}$  разложения функции  $\Phi_0(x, y)$ , полученные следующим образом:

$$C_{0nm} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi_0(x, y) \rho(x, y) P_{nm}(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Также следует отметить, что на этапе определения значений  $C_{nm}$ , анализируя форму диаграммы направленности  $f(\theta, \varphi)$ , возникшей в результате внешних воздействий на ФАР при эксплуатации, можно качественно отмечать наличие следующих искажений: смещение ориентации главного луча ДН, расширение главного луча ДН, размытие нулей ДН, несимметричные искажения боковых лепестков, и в соответствии с [18] делать выводы о том, какие гармоники имеют максимальное влияние, т.е. какие  $(C_{nm} - C_{0nm})$  имеют максимальную величину.

5. Вычисляют  $\Phi(x_r, y_r)$  – значения  $\Phi(x, y)$  в точках размещения антенных элементов под номерами  $r$ , где  $r = 1, \dots, K$ , вычисляют  $\Delta\Phi_r = \Phi_0(x_r, y_r) - \Phi(x_r, y_r)$  – значения фазовых искажений в апертуре, возникших в результате воздействий на ФАР при эксплуатации, и с помощью управляемых фазовращателей в антенных элементах под номерами  $r$  добавляют фазовый сдвиг  $\Delta\Phi_r$ , где  $r = 1, \dots, K$ , что обеспечивает восстановление  $f_0(\theta, \varphi)$  – проектной ДН.

После этого проводят контрольный расчет восстановленной ДН с учетом добавленных фазовых сдвигов

$$f_{p1}(\theta, \varphi) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho(x, y) \times \exp(i\Phi(x, y) + i\Delta\Phi(x, y)) \times \exp(ikL/2(x \cos \varphi \sin \theta + y \sin \varphi \sin \theta)) dx dy \quad (7)$$

и сравнивают с проектной ДН  $f_0(\theta, \varphi)$ .

Если расчетная восстановленная ДН не удовлетворяет заданным требованиям, то следует увеличить диапазоны суммирования  $M$  и  $N$  и повторить процедуру подбора  $C_{nm}$ .

#### 4. ПРИМЕРЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО РАСКРЫВА

Для иллюстрации данного способа восстановления ДН, искаженной по причине случайных деформаций излучающей поверхности, рассмотрим следующий пример: равномерная антенная решетка состоит из 10 элементов (рис. 1), длина волны  $\lambda = 30$  см, межэлементное расстояние  $\lambda/2$ ,

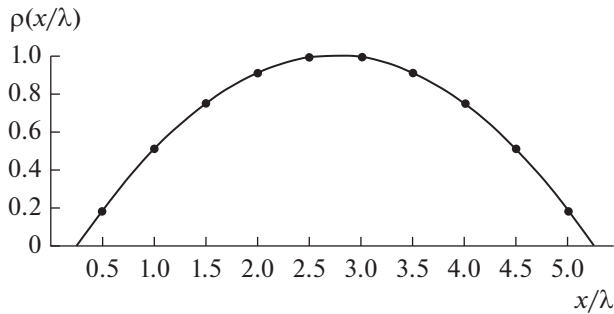


Рис. 2. Нормированное амплитудное распределение.

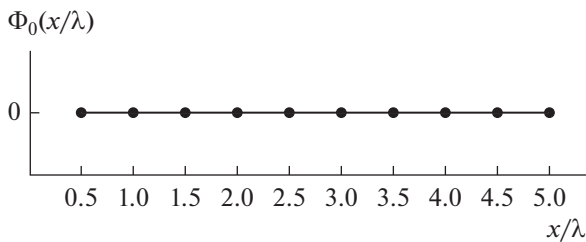


Рис. 3. Проектное фазовое распределение ФАР.

длина решетки  $L = 1.5$  м. Проектные амплитудное  $\rho_0(x)$  и фазовое  $\Phi_0(x)$  распределения такой решетки представлены на рис. 2 и 3 соответственно, ДН  $f_0(x)$  – на рис. 4 (кривая 1). В результате случайной деформации излучающей поверхности ФАР исказилась, как показано на рис. 5 (смещение элементов в долях длины волны отложено по оси  $z$ ). Диаграмма направленности деформированной ФАР  $f(\theta)$  представлена на рис. 4 (кривая 2).

Требования к восстановленной ДН: снижение коэффициента усиления не более чем на 0.001 дБ, расширение главного лепестка 0.1 град, превышение УБЛ не более чем на 0.1 дБ. Анализируя искаженную ДН  $f(\theta)$ , отмечаем наличие следующих искажений: смещение главного луча ДН, расширение главного луча ДН, несимметричные искажения боковых лепестков. Выбираем диапазон суммирования в (2)  $M = 5$ .

Минимизируя функционал (5), определяем  $C_1 \dots C_5$ , значения которых составляют  $C_1 = 0.502$ ,  $C_2 = 0.088$ ,  $C_3 = 0.059$ ,  $C_4 \rightarrow 0$ ,  $C_5 \rightarrow 0$ , и после этого формируем множество  $\Phi(x_r)$ :

$$\Phi(x) = 0.502x + 0.088x^2 + 0.059x^3,$$

учитывая, что  $\Phi_0(x) = \text{const}$ ,  $\Delta\Phi_r = \Phi(x_r)$ .

Проводим контрольный расчет  $f_{p1}(\theta)$  по (7) (см. рис. 4, кривая 3), сравниваем ее с проектной ДН  $f_0(\theta)$  и убеждаемся, что требования к восстановленной ДН выполнены. Поэтому дальнейшего расширения диапазона суммирования не требуется.

Таким образом, мы показали, что для восстановления ДН в данном примере в пределах заданных допусков достаточно использовать три гармоники:  $C_2$  (компенсация ширины главного лепестка ДН),  $C_3$  (коррекция первых боковых лепестков) и  $C_1$  (коррекция смещения главного лепестка ДН).

В качестве второго примера восстановления ДН, искаженной по причине случайных деформаций излучающей поверхности, рассмотрим искажение поверхности, показанное на рис. 6 (по оси  $z$  отложено смещение элементов решетки в

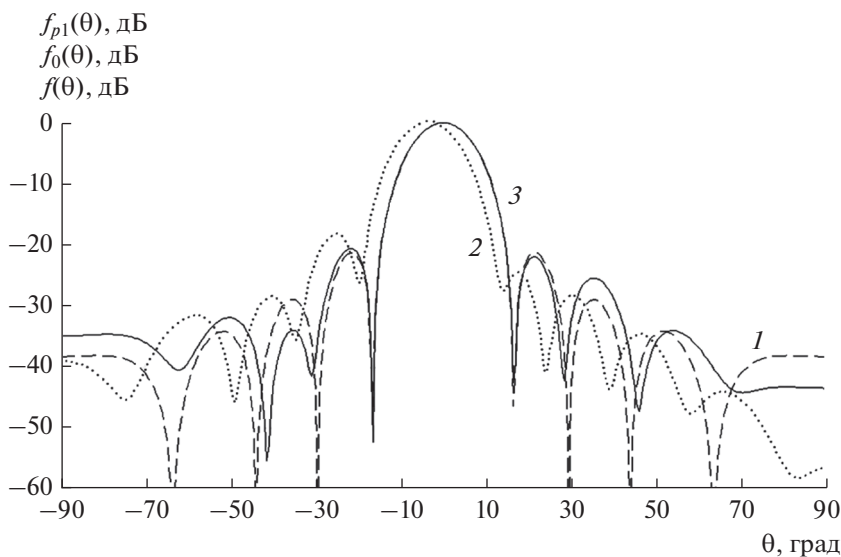


Рис. 4. Нормированная диаграмма направленности (пример 1): 1 – проектная, 2 – испорченная, 3 – восстановленная с использованием гармоник  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ .



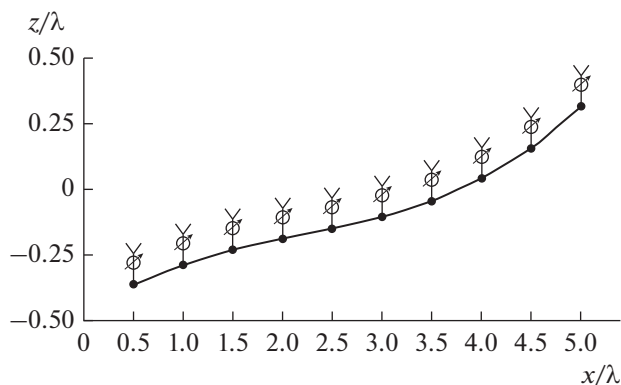


Рис. 5. Структурная схема деформированной ФАР (пример 1).

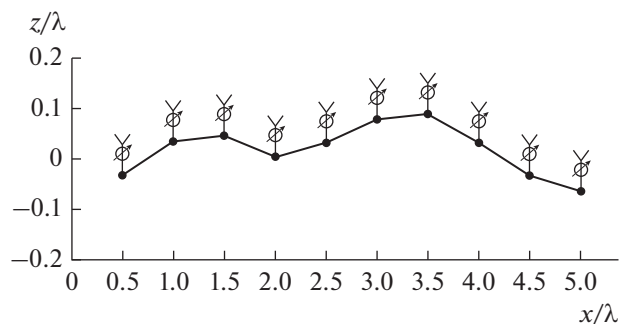


Рис. 6. Структурная схема деформированной ФАР (пример 2).

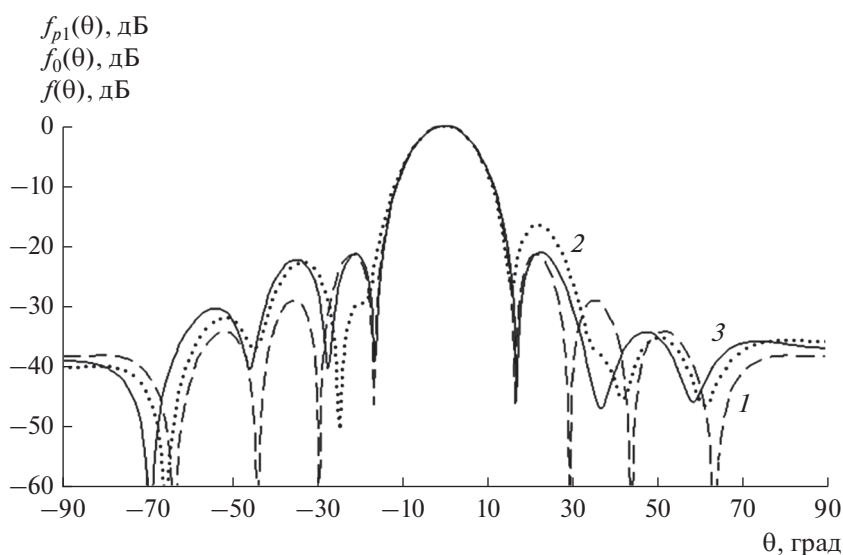


Рис. 7. Нормированная диаграмма направленности (пример 2): 1 – проектная ДН, 2 – испорченная ДН, 3 – восстановленная ДН с использованием гармоник  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_5$ .

долях волны). Требования к восстановленной ДН остались прежними.

Расчеты показали, что для восстановления ДН (рис. 7, кривая 2) в пределах заданных допусков достаточно использовать три гармоники:  $C_2$  (компенсация ширины главного лепестка ДН),  $C_3$  (коррекция первых боковых лепестков) и  $C_5$  (коррекция первых и вторых боковых лепестков).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достоинствами описанного метода является то, что задача восстановления ДН решается лишь на основе знания проектных параметров ФАР и деформированной ДН. Обеспечение восстановления ДН осуществляется при отсутствии априорной информации о характере деформации излучающей поверхности, без знания искаженного

фазового распределения вдоль раскрыва, без использования дополнительной измерительной аппаратуры в непосредственной близости от рассматриваемой ФАР. Также важным достоинством предложенного метода является быстрая сходимость. За счет того, что положение и ширина главного луча и уровень первых боковых лепестков определяются гармониками низших порядков, приемлемое восстановление достигается при использовании первых трех–пяти гармоник. Еще одна из причин хорошей сходимости метода – использование нулевого приближения при поиске неизвестных коэффициентов  $C_{nm}$ , которое рассчитывается исходя из проектных параметров решетки. Однако следует отметить, что задача построения метода дистанционного восстановления ДН решена в данной работе лишь частично, так как проблема сходимости алгоритма восстановления

ДН не исследована. По этой причине вопрос о границах применимости метода остается открытым и может быть предметом для дальнейших исследований. Предлагаемый метод может стать альтернативой широко распространенным в настоящее время методикам восстановления на основе генетического алгоритма и др.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mailloux R.J.* // Proc. IEEE. 1982. V. 70. № 3. P. 246.
2. *Jasik H.* Antenna Engineering Handbook. N.Y.: McGraw-Hill Book Corp., 1961. Ch. 32. P. 35.
3. *Schippers H., van Tongeren J.H., Knott P. et al.* // Proc. 2007 IEEE Aerospace Conf. 3–10 Mar. 2007. Big Sky. N.Y.: IEEE, 2007. P. 352866.
4. *Lesueur G., Gilles H., Girard S., Merlet T. et al.* // Photonics Technol. Lett. 2008. V. 20. № 21.
5. *Svensson B., Lanne M., Wingard J.* // Proc. 4 th Europ. Conf. on Antennas and Propagation. Barcelona. 12–16 Apr. 2010. N.Y.: IEEE, 2010. Article № 781.
6. *Svensson B., Eriksson H.* // Proc. 3 rd Europ. Conf. on Antennas and Propagation EUCAP 2009. Berlin. 23–27 Mar. 2009. N.Y.: IEEE, 2009. P. 1213.
7. *Lesueur G., Caer D., Merlet T., Grangier P.* // Proc. 3rd Europ. Conf. on Antennas and Propagation EUCAP 2009. Berlin. 23–27 Mar. 2009. N.Y.: IEEE, 2009. P. 1578.
8. *Takahashi T., Nakamoto N., Ohtsuka M. et al.* // IEEE Trans. 2012. V. AP-60. № 3. P. 1362.
9. *Peters T.J.* // IEEE Trans. 1991. V. AP-39. № 10. P. 1497.
10. *Mailloux R.J.* // IEEE Trans. 1996. V. AP-44. № 12. P. 1543.
11. *Yeo B.-K., Lu Y.* // IEEE Trans. 1999. V. AP-47. № 5. P. 823.
12. *Son S.H., Eom S.Y., Jeon S.I. et al.* // IEEE Trans. 2008. V. AP-56. № 8. P. 2751.
13. *Фельд Я.Н.* // РЭ. 1959. Т.4. № 2. С. 2004.
14. *Гусевский В.И.* // Зарубеж. радиоэлектроника. Успехи совр. радиоэлектроники. 2001. № 3. С. 50.
15. *Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Гусевский В.И.* Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. М.: Сайнс-Пресс, 2005.
16. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983.
17. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988.
18. *Гусевский В.И., Цветкова О.Н.* // Антенны. 2017. № 12. С. 8.
19. *Минкович Б.М., Яковлев В.П.* Теория синтеза антенн. М.: Сов. радио, 1969.
20. *Бондарев В.Е., Гусевский В.И., Дуленкова М.Д. и др.* Способ адаптивного подавления пространственных помех. Пат. РФ № 2488928. Оpubл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" № 21 от 27.07. 2013.
21. *Zainud-Deen S.H., Ibrahim M.S., Sharshar H.A., Ibrahim S.M.M.* // Proc. 21st Nat. Radio Sci. Conf. (NRSC2004) (NTI). Cairo. 16–18. Mar. 2004. N.Y.: IEEE, 2004. P. B-7.

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 519.725;512.62

**АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ СВЕРХДЛИННЫХ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГОРДОНА–МИЛЛСА–ВЕЛЧА**
© 2021 г. В. Г. Стародубцев<sup>1, 2, \*</sup>

<sup>1</sup>Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского,  
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198 Российская Федерация  
<sup>2</sup>Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики,  
Кронверкский просп., 49, Санкт-Петербург, 197101 Российская Федерация

\*E-mail: vgstarod@mail.ru

Поступила в редакцию 03.07.2020 г.

После доработки 30.08.2020 г.

Принята к публикации 04.09.2020 г.

На основе модификации алгоритма определения полиномов-сомножителей  $h_{cf}(x)$  проверочного полинома  $h_{ГМВП}(x)$ , являющегося главной составляющей метода синтеза последовательностей Гордона–Миллса–Велча (ГМВП), разработана программная реализация алгоритма формирования сверхдлинных последовательностей ГМВП, обладающих двухуровневой периодической автокорреляционной функцией, высокой структурной скрытностью и формируемых над конечным полем с двойным расширением  $GF(2^S) = GF(2^m)^n$ . В модифицированном алгоритме для различных значений параметра  $n$  определены выражения для числа операций при вычислении вектора альтернатив, из которого формируется вектор индексов децимации. Данные выражения также выступают в качестве верхних граничных оценок для числа суммируемых последовательностей. Для формирования сверхдлинных ГМВП с периодами от  $N = 2^{12} - 1 = 4095$  до  $N = 2^{20} - 1 = 1048575$  получены наборы векторов индексов децимации для допустимых значений параметров  $m$  и  $n$ .

DOI: 10.31857/S0033849421030189

В современных системах передачи цифровой информации (СПЦИ), включающих системы связи и управления, системы навигации и радиолокации, широкое применение получили сигналы с расширенным спектром (СРС), формируемые на основе псевдослучайных последовательностей (ПСП) [1–4]. В качестве ПСП используются последовательности, обладающие как хорошими корреляционными свойствами, так и высокой структурной скрытностью, одним из показателей которой является эквивалентная линейная сложность (ЭЛС).

Выбор ЭЛС в качестве показателя для оценки структурной скрытности последовательностей Гордона–Миллса–Велча (ГМВП) определяется тем, что сравнение осуществляется с М-последовательностями (МП), которые обладают аналогичными автокорреляционными свойствами, но характеризуются меньшей линейной сложностью. Использование других показателей, например эквивалентной квадратичной сложности, целесообразно при сравнении с нелинейными ПСП, такими как последовательности де Брейна, двоичные последовательности на основе бент-

функций, составные нелинейные ПСП [1, 5, 6]. Показатель сложности по Лемпелю–Зиву, впервые предложенный в [7], определяется на основе учета повторяющихся сегментов в последовательности и является основой для таких алгоритмов последовательного сжатия как LZ77, LZSS, LZW.

М-последовательности получили большое распространение в СПЦИ благодаря прежде всего их корреляционным свойствам, а также достаточно простому алгоритму формирования как самих последовательностей, так и синтезируемых на их основе производных последовательностей, таких как последовательности Голда, малого и большого множеств Касами и др. [8–11]. Например, в навигационной системе ГЛОНАСС в специальном режиме используются укороченные ПСП на основе МП с периодом  $N = 2^{14} - 1$ , а в системе GPS МП с периодами  $N = 2^{14} - 1$  в режиме общего доступа и с периодом  $N > 2^{42}$  в специальном режиме [12, 13].

Однако МП обладают недостаточной линейной сложностью. Среди последовательностей, обладающих наряду с МП двухуровневой ПАКФ, можно выделить ГМВП, которые имеют более

высокую структурную скрытность по сравнению с МП [14, 15]. Например, для периода  $N = 2^6 - 1$  выигрыш составляет два раза, а для периода  $N = 2^{20} - 1$  — уже 256 раз [14, 16].

Алгоритмы формирования сверхдлинных ГМВП, которые обладали бы достаточно низкой вычислительной сложностью, в известной нам литературе отсутствуют. Решение данной задачи может быть реализовано на основе метода формирования ГМВП, разработанного в [17].

Цель статьи — разработка алгоритма формирования сверхдлинных ГМВП на основе модификации алгоритма определения полиномов-сомножителей  $h_{ci}(x)$  проверочного полинома  $h_{ГМВП}(x)$ .

Алгоритм формирования сверхдлинных ГМВП в качестве одного из шагов включает алгоритм определения полиномов-сомножителей  $h_{ci}(x)$  проверочного полинома ГМВП  $h_{ГМВП}(x)$ .

Научная новизна состоит в модификации алгоритма определения полиномов-сомножителей  $h_{ci}(x)$ , рассмотренного в [17]. Модификация заключается в том, что при вычислении полиномов  $h_{ci}(x)$  используется только один элемент  $\beta^r$  из циклотомического класса, принадлежащий подполю  $GF(2^m)$ . При этом наряду с перечнем полиномов  $h_{ci}(x)$  для программной реализации алгоритма формирования сверхдлинных ГМВП применяется понятие вектора индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$ , который необходим для синтеза суммируемых последовательностей, получаемых путем децимации символов базисной МП.

Формирование двоичных ГМВП с периодом  $N = 2^{mn} - 1$  осуществляется над конечными полями с двойным расширением  $GF(2^m)^n = GF(2^S)$ ,  $S = mn$ . Символы  $d_i$  ГМВП определяются выражением [2, 15]

$$d_i = \text{tr}_{m|n}[(\text{tr}_{mn,m}(\alpha^i))^r], \quad 1 \leq r < 2^m - 1, \quad (1)$$

$$(r, 2^m - 1) = 1,$$

где  $\text{tr}_{a,b}(\cdot)$  — след элемента из поля  $GF(2^a)$  в поле  $GF(2^b)$ ;  $\alpha \in GF(2^m)^n$  — примитивный элемент;  $r$  — натуральное число, взаимно простое с порядком мультипликативной группы поля  $GF(2^m)$ , равным  $2^m - 1$ .

ЭЛС двоичных ГМВП определяется выражением [15, 17]

$$l_s = mn^{g(r)}, \quad (2)$$

где  $g(r)$  — количество единиц в двоичном представлении числа  $r$  в (1).

В алгоритме определения полиномов-сомножителей  $h_{ci}(x)$  проверочного полинома ГМВП, разработанного в [17], при вычислении полиномов, из которых производился выбор сомножителей  $h_{ci}(x)$ , использовались все элементы циклотомического

класса для элемента  $\beta^r = (\text{tr}_{mn,m}(\alpha^i))^r$ , принадлежащего подполю  $GF(2^m)$ , имеющие нечетные показатели степени. Кроме того, при каждой реализации алгоритма число операций заранее не было известно и определялось в зависимости от значения ЭЛС.

В модифицированном алгоритме при вычислениях в полях  $GF(2^m)^n$  и  $GF(2^m)$  используется только параметр  $r$  в выражении (1). Вместо термина “вектор сомножителей” используется термин “вектор индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$ ”. Данный вектор вычисляется на основе вектора альтернатив  $\mathbf{B}_{m,n,r}$ , который определяется на начальных шагах алгоритма. При этом число операций  $T$ , необходимых для определения вектора альтернатив, определяется соотношением параметров  $m$  и  $n$ . Анализ результатов вычислений, полученных в соответствии с исходным алгоритмом, показал, что все индексы децимации, являющиеся компонентами вектора индексов децимации, могут быть определены путем прибавления к параметру  $r$  значений вспомогательного параметра  $k_i$  [17]

$$k_i = 2i(2^m - 1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, T. \quad (3)$$

Число операций  $T$  для различных значений параметра  $n$  определяется путем деления порядка мультипликативной группы поля  $GF(2^m)^n$  на удвоенное значение параметра  $k_1$  с учетом того, что искомые индексы децимации расположены в первой половине мультипликативной группы. Выражение для числа операций  $T$  имеет вид

$$T = \begin{cases} 2^{m-2} & \text{при } n = 2; \\ \{2^{2m-2} + 2^{m-2}\} & \text{при } n = 3; \\ (2^{2m} + 1)(2^m + 1)/4 & \text{при } n = 4. \end{cases} \quad (4)$$

Например, в поле  $GF(2^m)^n = GF(2^{12})$  число операций определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } m = 6, n = 2: T &= 2^{m-2} = 16; \\ \text{при } m = 4, n = 3: T &= 2^{2m-2} + 2^{m-2} = 68; \\ \text{при } m = 3, n = 4: T &= (2^{2m} + 1)(2^m + 1)/4 = 146.25 \approx 146. \end{aligned}$$

В результате вычислений получаем  $(T + 1)$  чисел (с учетом значения  $r$  при  $i = 0$ ), которые являются компонентами вектора альтернатив  $\mathbf{B}_{m,n,r}$  и которые включают все компоненты вектора индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$ . Для выбора компонент вектора альтернатив  $\mathbf{B}_{m,n,r}$  являющихся одновременно компонентами вектора  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  требуется представить числа в двоичной системе счисления, выбрать те из них, которые удовлетворяют функции  $g(r)$ , и определить минимальные элементы в соответствующих циклотомических классах.

Таким образом, параметр  $T$  можно рассматривать как верхнюю границу числа суммируемых последовательностей при формировании ГМВП. Для значений параметра  $n > 2$  данная граница до-

статочно грубая. Для значения  $n = 2$  данная граница более точная и достигается в случае, когда параметр  $r = 2^m - 1 - 1$ .

Отличие модифицированного алгоритма заключается в замене шагов 2–5 в алгоритме, разработанном в [17], на шаги 2–4.

**Шаг 2.** Определение в соответствии с (3) вектора альтернатив  $\mathbf{V}_{m,n,r}$  содержащего  $(T + 1)$  чисел, соответствующих индексам децимации, из которых выбираются компоненты вектора  $\mathbf{A}_{m,n,r}$ .

**Шаг 3.** Представление компонент вектора альтернатив  $\mathbf{V}_{m,n,r}$  в двоичной системе счисления и выбор  $M$  чисел, которые соответствуют функции  $g(r)$ .

$$\mathbf{V}_{6,2,11} = (11, 137, 263, 389, 515, 641, 767, 893, 1019, 1145, 1271, 1397, 1523, 1649, 1775, 1901, 2027).$$

Из 17 компонент только четыре имеют  $g(r) = 3$ : 11, 137, 515, 641, тогда вектор индексов децимации равен  $\mathbf{A}_{6,2,11} = (11, 137, 25, 37)$ . При этом проверочный полином ГМВП имеет вид  $h_{\text{ГМВП}}(x) = h_{11}(x)h_{137}(x)h_{25}(x)h_{37}(x)$ . Здесь и в дальнейшем нижние цифровые индексы, используемые для обозначения полиномов, соответствуют минимальным показателям степени корней данных полиномов.

Для формирования сверхдлинных ГМВП целесообразно использовать программный способ реализации алгоритма. Это определяется тем, что для его выполнения необходим только один примитивный полином степени  $S = mn$  для формирования базисной МП и вектор индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  с помощью которого формируются суммируемые последовательности из базисной МП.

В табл. 1 приведены примитивные полиномы с корнями  $\alpha^1 = a$  в полях  $GF(2^S)$  [18]. Также показаны начальные символы  $C_0C_1 \dots C_{S-2}C_{S-1}$ , необходимые для формирования МП с периодами  $N = 2^S - 1$  в канонической форме, которые были получены в соответствии с методикой определения начальных состояний [19].

Формирование массива базисной МП осуществляется на основании примитивного полинома  $h_{\text{МП}}(x) = h_1(x) = x^S + h_{S-1}x^{S-1} + \dots + h_1x + 1$  в соответствии с выражением

$$C[S+i] = C[0+i] + h_1C[1+i] + \dots + h_{S-1}C[S-1+i], \quad i = 0 \dots N - S - 1, \quad (5)$$

где суммирование символов выполняется по mod 2.

Программная реализация алгоритма формирования сверхдлинных ГМВП.

**Шаг 1.** Ввод исходных данных (в соответствии с модифицированным алгоритмом).

**Шаг 2.** Формирование одномерного массива символов базисной МП в канонической форме

**Шаг 4.** Определение минимальных элементов в выбранных циклотомических классах и формирование вектора индексов децимации

$$\mathbf{A}_{m,n,r} = (I_{d1}, I_{d2}, \dots, I_{dM}).$$

Вектор индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  содержит  $M$  компонент, однозначно определяемых для фиксированных значений параметров  $m$ ,  $n$  и  $r$ .

Например, при формировании ГМВП с периодом  $N = 4095$  и ЭЛС  $l_s = 80$  в поле  $GF((2^6)^2)$  в соответствии с (4) параметр  $T = 16$ . Для значения  $r = 11_{10} = 1011_2$ ,  $g(r) = 3$  вектор альтернатив содержит 17 компонент и имеет вид

$C[i]$ ,  $i = 0 \dots N - 1$  в соответствии с (5) и с учетом начальных символов  $C_0C_1 \dots C_{S-2}C_{S-1}$  (табл. 1).

**Шаг 3.** Определение векторов индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  для заданных значений параметров  $m$ ,  $n$  и  $r$  в соответствии с модифицированным алгоритмом.

**Шаг 4.** Формирование  $M$  массивов  $CC_j[i] = C[I_{dj}i]$  ( $j = 1 \dots M$ ,  $i = 0 \dots N - 1$ ) для суммируемых последовательностей путем децимации символов базисной МП по индексам децимации  $I_{dj}$ , равным соответствующим компонентам вектора  $\mathbf{A}_{m,n,r}$ .

**Шаг 5.** Формирование массива ГМВП  $G[i]$  путем суммирования по mod 2 полученных последовательностей

$$G[i] = CC_1[i] + CC_2[i] + \dots + CC_{M-1}[i] + CC_M[i], \quad i = 0 \dots N - 1. \quad (6)$$

**Шаг 6.** Конец алгоритма.

В соответствии с модифицированным алгоритмом были получены векторы индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  для ГМВП с периодами от  $N = 2^6 - 1$  до  $N = 2^{20} - 1$  для допустимых значений параметров  $m$ ,  $n$  в полях  $GF(2^m)^n$ .

В табл. 2 приведены векторы индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r}$  при формировании ГМВП с периодами от  $N = 63$  до  $N = 65535$  для минимального и максимального значений ЭЛС. Полиномы для базисных МП соответствуют табл. 1.

В табл. 3 приведены векторы индексов децимации для минимального и максимального значений ЭЛС  $l_s$  при формировании ГМВП с периодом  $N = 262143$  на основе базисной МП с проверочным полиномом  $h_{\text{МП}}(x) = x^{18} + x^7 + 1$  и с периодом  $N = 1048575$  на основе базисной МП с проверочным полиномом  $h_{\text{МП}}(x) = x^{20} + x^3 + 1$ .

**Таблица 1.** Прimitives полиномы в полях  $GF(2^S)$

$N$	$h_{МП}(x) = h_1(x)$	$C_0C_1...C_{S-2}C_{S-1}$
$2^5-1$	$x^5 + x^2 + 1$	10010
$2^6-1$	$x^6 + x + 1$	000001
$2^7-1$	$x^7 + x^3 + 1$	1000000
$2^8-1$	$x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$	00000100
$2^9-1$	$x^9 + x^4 + 1$	100001000
$2^{10}-1$	$x^{10} + x^3 + 1$	0000000100
$2^{11}-1$	$x^{11} + x^2 + 1$	10000000010
$2^{12}-1$	$x^{12} + x^6 + x^4 + x + 1$	000000000001
$2^{13}-1$	$x^{13} + x^4 + x^3 + x + 1$	1000000001000
$2^{14}-1$	$x^{14} + x^{10} + x^6 + x + 1$	00000000000001
$2^{15}-1$	$x^{15} + x + 1$	100000000000000
$2^{16}-1$	$x^{16} + x^{12} + x^3 + x + 1$	0000000000000101
$2^{17}-1$	$x^{17} + x^3 + 1$	10000000000000000
$2^{18}-1$	$x^{18} + x^7 + 1$	000000000001000000
$2^{19}-1$	$x^{19} + x^5 + x^2 + x + 1$	1000000000000000010
$2^{20}-1$	$x^{20} + x^3 + 1$	00000000000000000100
$2^{21}-1$	$x^{21} + x^2 + 1$	100000000000000000010
$2^{22}-1$	$x^{22} + x + 1$	0000000000000000000001

**Таблица 2.** Векторы индексов децимации для периодов  $N = 63...65535$

$N$	$m, n$	$r$	$l_s$	$M$	Векторы индексов децимации $A_{m,n,r}$
63	3, 2	3	12	2	3, 5
255	4, 2	7	32	4	7, 11, 13, 37
511	3, 3	3	27	3	3, 5, 17
1023	5, 2	3	20	2	3, 17
1023	5, 2	15	80	8	15, 23, 27, 29, 77, 85, 89, 147
4095	6, 2	5	24	2	5, 17
4095	6, 2	31	192	16	31, 47, 55, 59, 61, 157, 173, 181, 185, 283, 299, 307, 313, 409, 425, 661
16383	7, 2	3	28	2	3, 65
16383	7, 2	63	448	32	63, 95, 111, 119, 123, 125, 317, 349, 365, 373, 377, 571, 603, 619, 627, 633, 825, 857, 873, 881, 1111, 1127, 1139, 1141, 1333, 1365, 1381, 1587, 1619, 2349, 2381, 2405
32767	5, 3	3	45	3	3, 17, 65
32767	5, 3	15	405	27	15, 23, 27, 29, 77, 85, 89, 139, 147, 153, 201, 209, 263, 275, 277, 325, 337, 387, 401, 449, 523, 525, 643, 649, 2185
65535	8, 2	7	64	4	7, 131, 193, 517
65535	8, 2	127	1024	64	127, 191, 223, 239, 247, 251, 253, 637, 701, 733, 749, 757, 761, 1147, 1211, 1243, 1259, 1267, 1273, 1657, 1721, 1753, 1769, 1777, 2167, 2231, 2263, 2279, 2291, 2293, 2677, 2741, 2773, 2789, 2801, 3187, 3251, 3283, 3299, 3313, 3697, 3761, 3793, 4717, 4781, 4813, 4837, 4841, 5227, 5291, 5323, 5347, 5353, 5737, 5801, 5833, 6343, 6373, 6757, 6821, 9371, 9419, 9427, 10837

**Таблица 3.** Векторы индексов децимации для периодов  $N = 262143, 1048575$ 

$N$	$m, n$	$r$	$M$	Векторы индексов децимации $\mathbf{A}_{m,n,r}$
262143	9, 2	3	2	3, 5
262143	9, 2	85	8	85, 149, 165, 169, 2129, 2193, 2209, 4257
262143	9, 2	255	128	255, 383, 447, 479, 495, 503, 507, 509, 1277, 1405, 1469, 1501, 1517, 1525, 1529, 2299, 2427, 2491, 2523, 2539, 2547, 2553, 3321, 3449, 3513, 3545, 3561, 3569, 4343, 4471, 4535, 4567, 4583, 4595, 4597, 5365, 5493, 5557, 5589, 5605, 5617, 6387, 6515, 6579, 6611, 6627, 6641, 7409, 7537, 7601, 7633, 7649, 8559, 8623, 8655, 8679, 8683, 8685, 9453, 9581, 9645, 9677, 9701, 9705, 10475, 10603, 10667, 10699, 10723, 10729, 11497, 11625, 11689, 11721, 12519, 12647, 12711, 12743, 12771, 12773, 13541, 13669, 13733, 13765, 14563, 14691, 14755, 17629, 17757, 17821, 17869, 17877, 17881, 18651, 18779, 18843, 18891, 18899, 18905, 19673, 19801, 19865, 19913, 20823, 20887, 20935, 20947, 20949, 21717, 21845, 21909, 22739, 22867, 22931, 25805, 25933, 25997, 26057, 26955, 27081, 27849, 27977, 38069, 38197, 38293, 38309, 39219, 42285
1048575	10, 2	5	2	5, 257
1048575	10, 2	511	256	511, 767, 895, 959, 991, 1007, 1015, 1019, 1021, 2557, 2813, 2941, 3005, 3037, 3053, 3061, 3065, 4603, 4859, 4987, 5051, 5083, 5099, 5107, 5113, 6649, 6905, 7033, 7097, 7129, 7145, 7153, 8695, 8951, 9079, 9143, 9175, 9191, 9203, 9205, 10741, 10997, 11125, 11189, 11221, 11237, 11249, 12787, 13043, 13171, 13235, 13267, 13283, 13297, 14833, 15089, 15217, 15281, 15313, 15329, 16879, 17135, 17263, 17327, 17359, 17383, 17387, 17389, 18925, 19181, 19309, 19373, 19405, 19429, 19433, 20971, 21227, 21355, 21419, 21451, 21475, 21481, 23017, 23273, 23401, 23465, 23497, 23521, 25063, 25319, 25447, 25511, 25543, 25571, 25573, 27109, 27365, 27493, 27557, 27589, 27617, 29155, 29411, 29539, 29603, 29635, 29665, 31201, 31457, 31585, 31649, 35293, 35549, 35677, 35741, 35789, 35797, 35801, 37339, 37595, 37723, 37787, 37835, 37843, 37849, 39385, 39641, 39769, 39833, 39881, 39889, 41431, 41687, 41815, 41879, 41927, 41939, 41941, 43477, 43733, 43861, 43925, 43973, 43985, 45523, 45779, 45907, 45971, 46019, 46033, 47569, 47825, 47953, 48017, 49999, 50063, 50119, 50123, 50125, 51661, 51917, 52045, 52109, 52165, 52169, 53707, 53963, 54091, 54155, 54217, 55753, 56009, 56137, 56201, 57799, 58055, 58183, 58309, 59845, 60101, 60229, 70075, 70331, 70459, 70555, 70571, 70579, 70585, 72121, 72377, 72505, 72601, 72617, 74423, 74551, 74647, 74663, 74675, 74677, 76213, 76469, 76597, 76693, 76709, 78259, 78515, 78643, 78739, 78755, 84397, 84653, 84781, 84877, 84901, 84905, 86443, 86699, 86827, 86923, 86947, 86953, 88489, 88745, 88873, 90919, 91043, 91045, 92581, 92837, 92965, 94627, 94883, 95011, 102811, 103067, 103195, 103315, 103321, 104857, 105113, 107411, 107413, 108949, 109205, 111251, 149869, 150125, 150317, 150349, 150373, 152171, 152363, 152395, 158053, 158309, 174421

В качестве примера определим массив  $G[i]$  ГМВП с периодом  $N = 262143$  и ЭЛС  $l_s = 144$ .

**Шаг 1.** Исходные данные: поле  $GF[(2^9)^2]$ ; базисная МП с полиномом  $h_{МП}(x) = x^{18} + x^7 + 1$ ; параметр  $r = 85$  с  $g(r) = 4$ ; число сомножителей  $M = 8$  (табл. 3).

**Шаг 2.** Формирование массива базисной МП  $C[i]$  ( $i = 0 \dots 262142$ )

$$C[18 + j] = C[0 + j] + C[7 + j], \quad j = 0 \dots 262124.$$

**Шаг 3.** Определение вектора индексов децимации (в соответствии с табл. 3)

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{m,n,r} = \\ & = \mathbf{A}_{9,2,85} = (85, 149, 165, 169, 2129, 2193, 2209, 4257). \end{aligned}$$

**Шаг 4.** Формирование  $M = 8$  массивов  $CC_j[i] = C[I_{dj} i]$  ( $j = 1 \dots 8, i = 0 \dots 262142$ ) в соответствии с вектором индексов децимации  $\mathbf{A}_{m,n,r} = \mathbf{A}_{9,2,85}$ .

**Шаг 5.** Формирование массива ГМВП  $G[i]$  путем суммирования  $CC_j[i]$

$$\begin{aligned} G[i] = & C[85i] + C[149i] + C[165i] + C[169i] + \\ & + C[2129i] + C[2193i] + C[2209i] + C[4257i], \quad (7) \\ & i = 0 \dots N - 1. \end{aligned}$$

Отметим, что последовательности  $CC_1, CC_2, CC_4, CC_5, CC_7$  являются МП и имеют максимальный период. Последовательности  $CC_3, CC_6$  соответствуют ПСП с периодом  $N_1 = N/3 = 87381$ , последовательность  $CC_8$  имеет период  $N_2 = N/9 = 29127$ .



Таким образом, в статье разработана программная реализация алгоритма формирования сверхдлинных ГМВП при произвольной базисной МП на основе модификации алгоритма определения полиномов-сомножителей  $h_{ci}(x)$  проверочного полинома  $h_{ГМВП}(x)$ . При программной реализации вектор полиномов-сомножителей  $h_{ci}(x)$ , получаемый в результате выполнения модифицированного алгоритма, рассматривается как вектор индексов децимации  $A_{m,n,r}$ . Получены выражения для числа вычислительных операций в зависимости от значения параметра  $n$ , которые можно рассматривать как верхние граничные оценки для числа суммируемых последовательностей.

Определены векторы индексов децимации для периодов  $N \leq 2^{12} - 1 = 4095$ , подтверждающие известные в литературе результаты [16]. Впервые получены перечни векторов индексов децимации для сверхдлинных ГМВП с высокой структурной скрытностью с периодами  $2^{14} - 1 = 16\,383 \leq N \leq 2^{20} - 1 = 1\,048\,575$ . Например, можно сформировать ГМВП с периодом  $N = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575$  и ЭЛС  $l_s = 5120$ , что в 256 раз превышает значение ЭЛС для базисной МП. При этом выражение для символов ГМВП, аналогичное (7), будет содержать 256 слагаемых, а ПАКФ полученной последовательности с проверочным полиномом 5120-й степени будет двухуровневой, как и для базисной МП.

При программной реализации алгоритма формирования сверхдлинных ГМВП с периодом  $N = 2^S - 1$  требуется знание только одного примитивного полинома степени  $S$  для базисной МП и перечня векторов индексов децимации. При этом вычислительная сложность алгоритма определяется только выполнением операций модульного сложения.

На практике полученные результаты могут быть использованы при синтезе ПСП для формирования сигналов с расширенным спектром в СПЦИ, функционирующих в условиях радиоэлектронного противодействия, к которым предъявляются повышенные требования по помехозащищенности и структурной скрытности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. 2-е изд. М.: Вильямс, 2003.
2. *Golomb S.W., Gong G.* Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
3. *Инамов В.П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007.
4. *CDMA: прошлое, настоящее, будущее.* М.: МАС, 2003.
5. *Coulter R.S., Mesnager S.* // IEEE Trans. 2018. V. IT-64. № 4. P. 2979.
6. *Boztaş S., Özbudak F., Tekin E.* // IEEE Trans. 2018. V. IT-64. № 4. P. 2858.
7. *Lempel A., Ziv J.* // IEEE Trans. 1976. V. IT-22. № 1. P. 75.
8. *Lie-Liang Yang, Hanzo L.* // Wireless Communications and Networking. 2003. V. 1. P. 683.
9. *Инамов В.П.* Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992.
10. *Popovic B.M.* // IEEE Trans. 2018. V. IT-64 № 4. P. 2876.
11. *Golomb S.W.* // IEEE Trans. 1992. V. AES-28. № 2. P. 383.
12. *Шатилов А.Ю.* Характеристики радиосигналов глобальных спутниковых радионавигационных систем ГЛОНАСС, GPS, Galileo, Beidou и функциональных дополнений SBAS. Учеб. пособие для вузов. М.: МЭИ, 2016.
13. *Ershen Wang, Shufang Zhang, Qing Hu* // J. System Simulation. 2008. V. 20. P. 3582.
14. *Chung H.B., No J.S.* // IEEE Trans. 1999. V. IT-45. № 6. P. 2060.
15. *No Jong-Seon* // IEEE Trans. 1996. V. IT-42. № 1. P. 260.
16. *Стародубцев В.Г., Бородюк Д.Н., Мышко В.В.* // Авиакосмическое приборостроение. 2018. № 5. С. 3.
17. *Стародубцев В.Г.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 2. С. 169.
18. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки / Пер. с англ., под ред. Р.Л. Добрушина, С.И. Самойленко. М.: Мир, 1976.
19. *Стародубцев В.Г., Чернявских А.Е.* // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 3. С. 201.

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.635;537.874.3

РЕЗОНАНСНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ИСКУССТВЕННОМ КРИСТАЛЛЕ  
С ФЕРРОМАГНИТНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

© 2021 г. А. Б. Ринкевич<sup>а</sup>, \*, Д. В. Перов<sup>а</sup>, \*\*

<sup>а</sup>Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН,  
ул. С. Ковалевской, 18, Екатеринбург, 620108 Российская Федерация

\*E-mail: rin@imp.uran.ru

\*\*E-mail: peroff@imp.uran.ru

Поступила в редакцию 22.03.2020 г.

После доработки 22.03.2020 г.

Принята к публикации 25.08.2020 г.

На основании экспериментальных данных о прохождении электромагнитной волны миллиметрового диапазона через искусственный кристалл и отражении от него сделаны оценки неоднородности электромагнитного поля внутри кристалла и зависимости неоднородности от магнитного поля. В качестве искусственных кристаллов использованы нанокompозитные материалы на основе опаловых матриц с периодически расположенными частицами ферромагнитного никель-цинкового феррита-шпинели или ферромагнитного металлического кобальта. Измерения выполнены на частотах от 26 до 38 ГГц в магнитных полях до 12 кЭ. Расчеты показали, что неоднородность электромагнитного поля на микромасштабе резко уменьшается при достижении условия ферромагнитного резонанса.

DOI: 10.31857/S0033849421040124

ВВЕДЕНИЕ

Наноструктурные среды, содержащие магнитные компоненты, такие как металло-диэлектрические материалы, магнитофотонные кристаллы, являются популярными объектами исследования. Интерес к ним вызван как фундаментальными проблемами, так и прикладными аспектами. Все эти материалы содержат компоненты, резко отличающиеся по своим электромагнитным свойствам. Изучение метаматериалов с необычной величиной эффективного показателя преломления стало актуальной темой исследования в последние годы. Ключевое значение для развития этого направления имело установление возможности реализации отрицательного знака показателя [1–3]. Необычные значения показателя, безусловно, связаны с неоднородностью электромагнитных полей в метаматериалах. Изменение распределения полей в них с изменением частоты приводит к сильной дисперсии показателя преломления. Значительные усилия были направлены на выработку способов описания свойств метаматериалов на основе введения эффективных материальных констант [4].

Метаматериалы, обладающие диэлектрической проницаемостью, близкой к нулю ( $\epsilon_{\text{near-zero}}$  – ENZ), образуют особую группу метаматериалов. Для них характерно туннелирование волны через узкие каналы, когда обычное распространение волны оказывается невозможным [5, 6]. Еще одним необычным явлением считается

увеличение амплитуды волны при прохождении малого отверстия, заполненного ENZ-материалом [7, 8].

Трудность описания электромагнитных свойств метаматериалов с ферромагнитными частицами заключается, с одной стороны, в крайне сильной неоднородности полей внутри метаматериала [9, 10], а с другой стороны – в необходимости привлечения к описанию уравнения Ландау–Лифшица дополнительно к уравнениям Максвелла. Кроме задачи разработки алгоритма расчета показателя преломления в магнитном поле, важным представляется выработка параметра, характеризующего неоднородность электромагнитного поля вблизи магнитной или металлической частицы. Этот параметр, предложенный в [10], характеризует эффективность взаимодействия электромагнитных полей с магнитными частицами.

Цель данной работы экспериментально изучить резонансные явления в магнитных метаматериалах, содержащих частицы ферритов-шпинелей и металлов, на частотах миллиметрового диапазона; рассмотреть зависимость показателя преломления от магнитного поля и оценить неоднородность пространственного распределения электромагнитных полей на микромасштабах, а также выяснить, как влияет ферромагнитный резонанс и антирезонанс на неоднородность электромагнитного поля.

# 1. ОЦЕНКА НЕОДНОРОДНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ МАГНИТНОГО НАНОМАТЕРИАЛА

Хорошо известно, что эффективный комплексный показатель преломления (или комплексный коэффициент рефракции)  $n_{эф} = n' - in''$  можно рассчитать, если известны динамические диэлектрическая  $\epsilon_{эф}$  и магнитная  $\mu_{эф}$  проницаемости:

$$n_{эф} = n' - in'' = \sqrt{\epsilon_{эф} \mu_{эф}}. \quad (1)$$

Расчет по формуле (1) можно выполнить не только для макроскопического объема, но и для выбранного объема микроскопического масштаба внутри неоднородного материала [11]. В той же работе было указано, что рассчитанный на микромасштабе показатель преломления не является материальным параметром, но может быть использован для оценки неоднородности электромагнитного поля.

В работе [10] предложен параметр  $NU$ , с помощью которого можно оценивать неоднородность микроволнового поля на разных пространственных масштабах от сотен нанометров и более, и разработан алгоритм его расчета по правилам расчета показателя преломления для среды, диэлектрическая проницаемость которой равна проницаемости исследуемой среды, а магнитная проницаемость взята с комплексным сопряжением:

$$NU = \frac{1}{\left(n_{эф,внут}^*\right)^2} = \frac{1}{\epsilon_{эф,внут} \mu_{эф,внут}^*} \sim \frac{1}{E_n^0 H_n^0} \int_S E_n H_n^* dS. \quad (2)$$

В формуле (2) интегрирование выполняется по сферической области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ , диаметр которой превышает размер ферромагнитной частицы,  $E_n$  и  $H_n^*$  – нормальные компоненты микроволнового электрического  $\vec{E}$  и комплексно-сопряженного магнитного поля  $\vec{H}$ , взятого на поверхности  $S$ ,  $E_n^0$  и  $H_n^0$  – амплитуды нормальных компонент микроволновых электрического и магнитного полей, использованные для нормировки. Индекс “внут” указывает на принадлежность к объему, ограниченному поверхностью  $S$ .

Действительная часть показателя неоднородности  $NU$  пропорциональна энергии электромагнитных колебаний, запасенной внутри сферы,

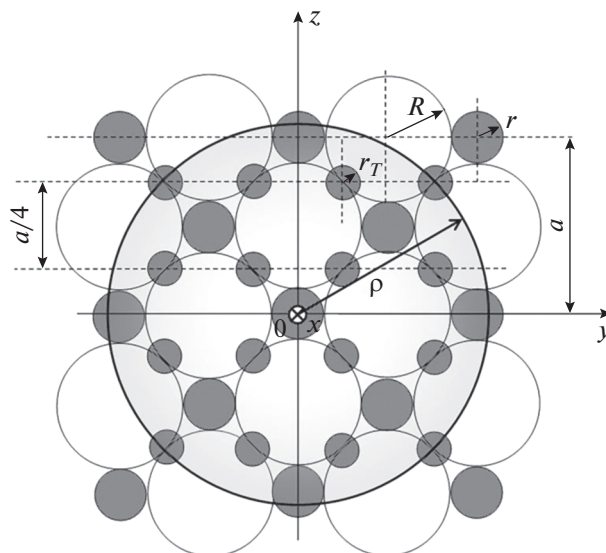


Рис. 1. Схематическое изображение модели искусственного кристалла, использованной в расчетах.

радиус которой  $r$ . Мнимая часть параметра  $NU$  пропорциональна энергии колебаний, диссипированной в этом объеме. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{эф}$  для данного материала определяется экспериментально по величине коэффициентов отражения и прохождения волн для пластины известной толщины [12]. В дальнейшем считаем, что  $\epsilon_{эф}$  не зависит от напряженности магнитного поля.

Возможный способ расчета  $\mu_{эф,внут}^*$  предложен в [10]. Область  $V$  выбрана сферической формы с радиусом  $\rho$  и с центром в центре выбранной ферромагнитной частицы. Схема расположения ферромагнитных частиц в опаловой матрице показана на рис. 1. Сферы из  $\text{SiO}_2$  имеют радиус  $R$ . Максимальные радиусы, которые могут иметь ферромагнитные частицы в межсферических полостях двух сортов, обозначены через  $r_0$  и  $r_1$ . Для произвольного радиуса  $\rho$  подсчитывается суммарный магнитный момент, образуемый частицами, попавшими в объем  $V$ .

Для расчета динамической магнитной проницаемости  $\mu_{эф,внут}^*$  сначала определяем магнитную восприимчивость  $\chi$  по формулам для линии ферромагнитного резонанса (ФМР) лоренцевой формы [13]:

$$\chi = \chi' - i\chi'' = \gamma M_0 \frac{\omega_H [\omega_H^2 - (1 - \alpha^2)\omega^2] - i\alpha\omega [\omega_H^2 + (1 + \alpha^2)\omega^2]}{D}. \quad (3)$$

$$\chi_a = \chi'_a - i\chi''_a = \gamma M_0 \omega \frac{[\omega_H^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2] - i2\alpha\omega\omega_H}{D}, \quad (4)$$

где  $\gamma = g|e|/2mc$  – гиромагнитное отношение,  $g$  – коэффициент спектроскопического расщепления,  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона,  $c$  – скорость электромагнитной волны в вакууме,

$$D = \left[ \omega_H^2 - (1 + \alpha^2) \omega^2 \right]^2 + 4\alpha^2 \omega^2 \omega_H^2,$$

$\omega_H = \gamma H$ ;  $\alpha$  – параметр затухания в уравнении Ландау–Лифшица–Гильберта,  $M_0$  – намагниченность насыщения объема  $V$ .

Затем находим диагональную  $\mu = 1 + 4\pi\chi$  и недиагональную  $\mu_a = 4\pi\chi_a$  компоненты тензора магнитной проницаемости.

Наконец, находим эффективную магнитную проницаемость [13]

$$\mu_{\text{эф}} = \mu - \mu_a^2/\mu, \quad (5)$$

соответствующую условию нашего эксперимента  $\vec{q} \perp \vec{H}$ , где  $\vec{q}$  – волновой вектор,  $\vec{H}$  – вектор напряженности постоянного магнитного поля.

Безразмерная постоянная магнитного затухания  $\alpha$  определяется экспериментально из ширины линии ФМР  $\Delta H$ :  $\alpha = \Delta H/H_{\text{ФМР}}$ , где  $H_{\text{ФМР}}$  – поле ферромагнитного резонанса. Поскольку рассматриваемый нами материал в магнитном отношении сильно неоднороден, постоянная  $\alpha$  не является материальным параметром и используется только для аппроксимации частотной и полевой зависимостей проницаемости.

Намагниченность насыщения  $M_0$  композитного материала определяется как отношение суммарного магнитного момента частиц, попадающих в объем  $V$ , к величине этого объема. Объемная доля ферромагнитных частиц  $m_s$  рассчитывается как отношение  $M_0$  при  $V \rightarrow \infty$  к намагниченности материала ферромагнитных частиц  $M_s$ . Для частиц размером 15...50 нм намагниченность  $M_s$  примерно равна намагниченности массивного материала.

Рассмотренная схема расчета магнитной проницаемости является приближенной, так как не учитывает два обстоятельства. Первое – это изменение среднего магнитного поля внутри образца по сравнению с внешним из-за присутствия ансамбля ферромагнитных частиц. Для наших малых концентраций  $m_s \ll 1$  вносимая этим приближением погрешность мала. Второе обстоятельство связано с изменением направления постоянного магнитного поля вблизи ферромагнитной частицы. Из-за этого формула (5) выполняется лишь приближенно. Погрешности, возникающие из-за этого обстоятельства, можно учесть в рамках микромагнитного расчета.

Подробности расчета показателя неоднородности для нанокompозитного материала на основе опаловых матриц с внедренными ферромагнитными частицами приведены в [10]. Там показано, что

по мере увеличения радиуса  $\rho$  параметр неоднородности  $NU$  испытывает изменения осцилляционного типа. Осцилляции  $NU$  вызваны тем, что по мере роста радиуса объем  $V$  увеличивается монотонно, а суммарный магнитный момент этого объема увеличивается скачком при попадании в него новой ферромагнитной частицы. Поскольку динамическая магнитная проницаемость является функцией приложенного внешнего магнитного поля, то следует ожидать, что и параметр неоднородности тоже будет зависеть от магнитного поля. Введение показателя неоднородности  $NU$  позволяет связать вариации неоднородностей электромагнитного поля с изменениями показателя преломления.

В данной статье изучается неоднородность микроволнового электромагнитного поля внутри материала вблизи условий ФМР и ФМАР, т.е. ферромагнитного антирезонанса. Результаты получены для волн сантиметрового и миллиметрового диапазонов и могут быть полезны при теоретическом и экспериментальном изучении процессов при распространении волн в магнитных метаматериалах и неоднородных средах, содержащих ферро- и ферримагнитные частицы.

## 2. АМПЛИТУДА И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАСТИНЕ

Искусственные кристаллы на основе опаловых матриц состоят из плотно упакованной системы диэлектрических сфер из  $\text{SiO}_2$  и частиц магнитоупорядоченного вещества. Сначала были синтезированы образцы опаловых матриц с диаметром сфер  $\text{SiO}_2$  от 240 до 270 нм. Затем методом пропитки матрицы прекурсорами – нитратами металлов – с последующей термообработкой были сформированы частицы необходимого химического состава [14]. Процедура пропитки повторялась многократно (до 10 раз) с постепенным заполнением межсферического пространства опаловой матрицы. При последующей термообработке при температурах 500...700°C полностью удаляется вода. До введения в межсферические пустоты наночастиц опаловая матрица имеет периодическую структуру плотно упакованных субмикронных сфер.

Частицы, внедренные в межсферические пустоты путем пропитки с последующей сушкой, состоят из оксидов металлов. Для получения нанокompозита с металлическими частицами образцы подвергают отжигу в атмосфере водорода при температуре 600...700°C. Структура нанокompозитов с частицами металлического кобальта и никель-цинкового феррита, полученная с помощью сканирующего электронного микроскопа Quanta-200, показана на рис. 2а и 2б. Видно, что между субмикронными сферами расположены ча-

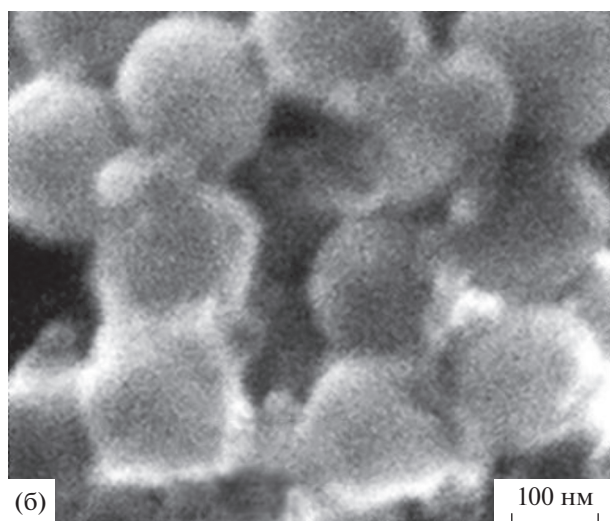
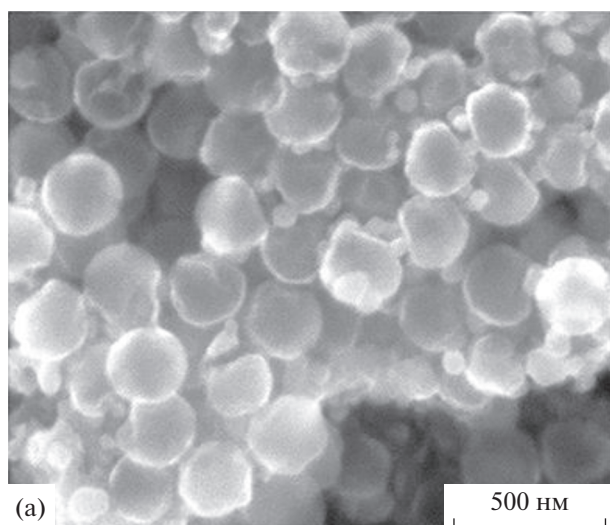


Рис. 2. Структура искусственных кристаллов на основе опаловых матриц с частицами кобальта (а) и никель-цинкового феррита  $\text{Ni}_{0.5}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$  (б).

стицы внесенного вещества. Частицы имеют неправильную форму и размеры от единиц нанометров до 50 нм. Некоторые частицы объединены в конгломераты. Полученные материалы, безусловно, являются нанокompозитными. Они имеют приблизительно периодическое строение материала, поэтому для них применимо название “искусственный кристалл”. Они являются метаматериалами из-за радикального различия электромагнитных свойств компонентов.

### 3. НЕОДНОРОДНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В УСЛОВИЯХ ФЕРРОМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА И АНТИРЕЗОНАНСА

Микроволновые эксперименты выполнены с образцами в форме пластины методом прохожде-

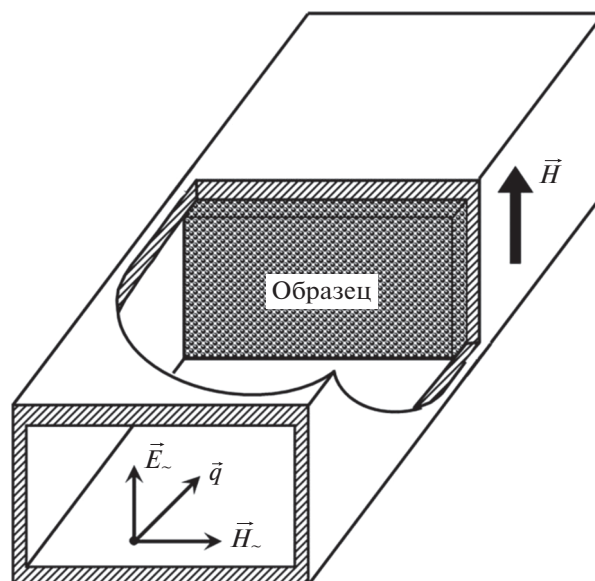


Рис. 3. Расположение образца в волноводе при микроволновых измерениях.

ния и отражения волн. Образец помещен в прямоугольный волновод с поперечными размерами  $7.2 \times 3.6$  мм таким образом, что он перекрывает все поперечное сечение волновода, рис. 3. В интервале частот от 26 до 38 ГГц в волноводе распространяется мода  $TE_{10}$ . На рисунке указаны также направление постоянного магнитного поля  $\vec{H}$ , волнового вектора  $\vec{q}$ , микроволновых электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей. Применяется следующая ориентация векторов:  $\vec{H} \perp \vec{H}$ ,  $\vec{q} \perp \vec{H}$ , способствующая наблюдению ФМР.

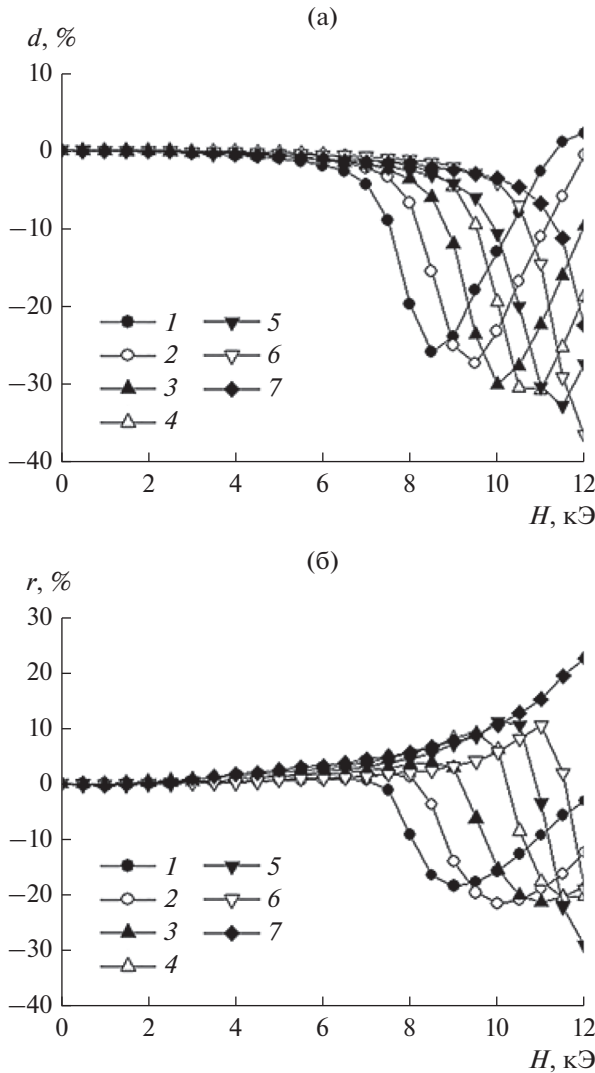
Влияние внешнего постоянного магнитного поля на коэффициенты прохождения  $D$  и отражения  $R$  оценивалось относительным изменением во внешнем магнитном поле модуля коэффициента прохождения  $d$  и относительным изменением модуля коэффициента отражения  $r$

$$d = \frac{|D(H)| - |D(0)|}{|D(0)|}, \quad r = \frac{|R(H)| - |R(0)|}{|R(0)|},$$

где  $D(H)$ ,  $R(H)$  – соответственно коэффициенты прохождения и отражения от образца, измеренные в поле  $H$ .

Рассмотрим сначала данные, полученные для искусственного кристалла с диэлектрическими частицами никель-цинкового феррита  $\text{Ni}_{0.5}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ . На рис. 4а, 4б представлены зависимости от напряженности магнитного поля коэффициента прохождения и отражения, измеренные на нескольких частотах миллиметрового диапазона. Как видно из рисунков, на зависимостях присутствуют минимумы, вызванные ФМР. Поле минимума увеличивается при возрастании частоты. На рис. 4б, кроме





**Рис. 4.** Зависимость от напряженности магнитного поля коэффициента прохождения (а) и отражения (б) для искусственного кристалла с частицами никель-цинкового феррита  $\text{Ni}_{0.5}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ , на следующих частотах миллиметрового диапазона: 26 (1), 28 (2), 30 (3), 32 (4), 34 (5), 36 (6), 38 ГГц (7).

минимума, на частотах свыше 32 ГГц, присутствует еще и максимум, обусловленный ФМАР [15].

Построим зависимость показателя преломления от напряженности магнитного поля. Согласно (1) для расчета показателя преломления  $n$  нужно знать динамические диэлектрическую  $\epsilon_{\text{эф}}$  и магнитную  $\mu_{\text{эф}}$  проницаемости. Комплексная диэлектрическая проницаемость определяется экспериментально из коэффициентов прохождения и отражения. Для искусственного кристалла с частицами никель-цинкового феррита  $\text{Ni}_{0.5}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$  нами получено  $\epsilon' = 3.1$ ,  $\epsilon'' = 0.13$ . Мы полагаем, что диэлектрическая проницаемость этого материала очень слабо зависит от магнитного поля. Эффективная магнитная проницаемость рассчитывает-

ся по формулам (3)–(5). В эти формулы подставляем постоянную затухания в магнитной системе  $\alpha = 0.13$ , которую определяем из ширины линии ФМР на рис. 4а. Объемная доля частиц феррита в образце  $m_s = 0.076$  и намагниченность насыщения  $M_s = 400$  Гс. Из компонент тензора динамической магнитной проницаемости с учетом симметрии формируется эффективная магнитная проницаемость  $\mu_{\text{эф}}$ . Результат расчета для частоты  $f = 26$  ГГц показан на рис. 5а.

Полевые зависимости показателя преломления, рассчитанные по формуле (1) для искусственного кристалла с частицами никель-цинкового феррита  $\text{Ni}_{0.5}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ , показаны на рис. 5б. Действительная часть показателя испытывает в области ФМР немонотонные изменения, а мнимая часть имеет максимум, вызванный поглощением электромагнитного поля при ФМР.

Теперь перейдем к расчету показателя неоднородности. Прежде всего запишем выражения для  $n$  и показателя преломления  $n^*$  для среды с комплексно-сопряженной магнитной проницаемостью:

$$n = n' - in'' = \sqrt{(\epsilon' - i\epsilon'')(\mu' - i\mu'')};$$

$$n^* = n'^* - in''^* = \sqrt{(\epsilon' - i\epsilon'')(\mu' + i\mu'')}.$$

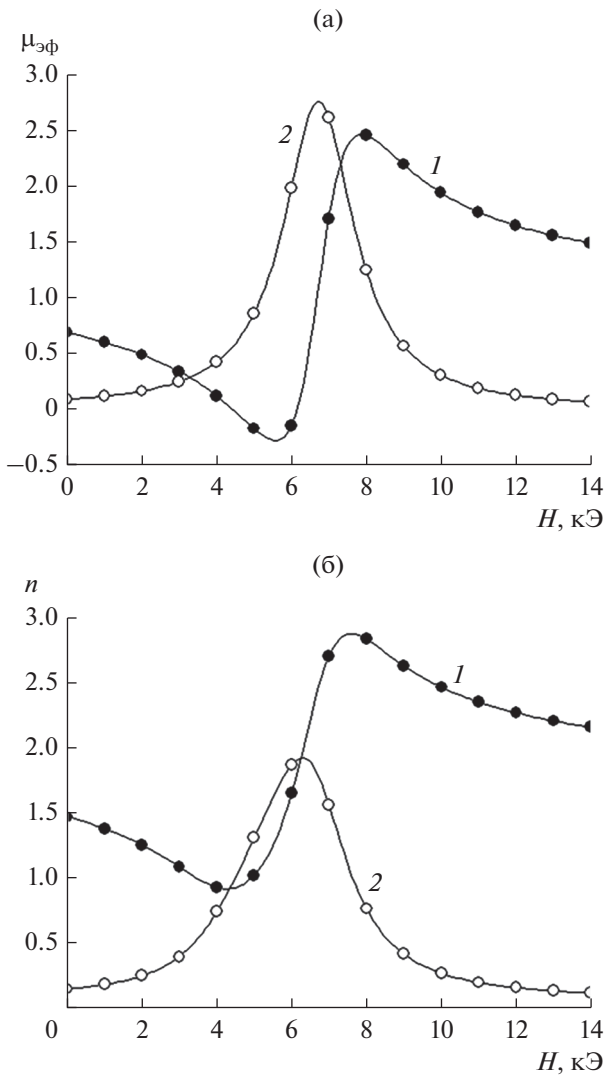
Квадраты показателей выражаются следующими формулами:

$$n^2 = (\epsilon'\mu' - \epsilon''\mu'') - i(\epsilon'\mu'' + \epsilon''\mu'), \quad (6)$$

$$(n^*)^2 = (\epsilon'\mu' + \epsilon''\mu'') - i(-\epsilon'\mu'' + \epsilon''\mu'). \quad (7)$$

Расчеты по формулам (6) и (7) можно выполнить для объема среды, ограниченного сферой радиусом  $\rho$  (см. разд. 1). Результат расчета, выполненного для частоты  $f = 26$  ГГц и магнитного поля  $H = 8.5$  кЭ, показан на рис. 6а. Показатель неоднородности  $NU$  как функция радиуса  $\rho$  испытывает осцилляции при  $\rho < 1500$  нм и выходит на постоянное значение при  $\rho > 1500$  нм. Эти результаты подобны полученным в [10]. Наша задача – исследовать влияние внешнего магнитного поля на показатель неоднородности. Результаты расчета комплексного коэффициента рефракции приведены на рис. 6б. Налицо качественное подобие зависимостей для  $\text{Re } n$  и  $\text{Im } n$  зависимостям для макроскопического показателя преломления, показанными на рис. 5б.

На рис. 6в приведены результаты расчета полевой зависимости показателя неоднородности  $NU$ . Отметим, что положение максимума мнимой части рассчитанного коэффициента рефракции очень близко к положению ФМР для выбранного микромасштаба  $\rho = 200$  нм. Вблизи поля ФМР и в полях, превышающих поле ФМР, показатель неоднородности резко уменьшается. Таким образом, значения показателя неоднородности велики ниже поля ФМР и уменьшаются при достижении поля ФМР.



**Рис. 5.** Зависимость действительной (1) и мнимой (2) компоненты динамической магнитной проницаемости (а) и комплексного коэффициента рефракции (б) от магнитного поля на частоте  $f = 26$  ГГц для искусственного кристалла с частицами никель-цинкового феррита.

Сравним значения параметра неоднородности при условиях ФМР и ФМАР, т.е. при  $\mu' = 0$ . Из (6), (7) видно, что квадраты показателей принимают следующие значения:

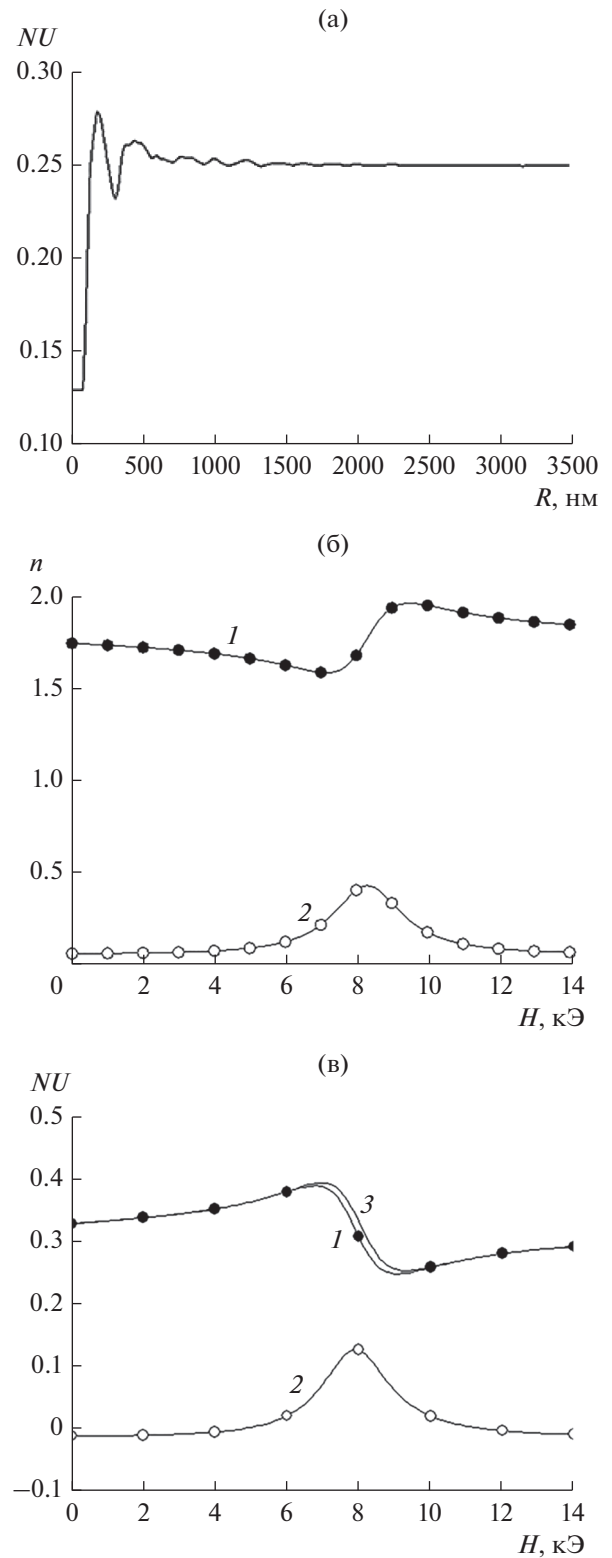
$$n^2 = -\epsilon''\mu'' - i\epsilon'\mu'' = -\mu''(\epsilon' + i\epsilon'');$$

$$n^{*2} = \epsilon''\mu'' + i\epsilon'\mu'' = \mu''(\epsilon' + i\epsilon'').$$

При  $\mu' = 0$  модуль параметра неоднородности выражается формулой

$$|NU| = \frac{1}{|(n^*)^2|} = \frac{1}{\mu'' \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}.$$

При условии ФМАР  $\mu''$  мало, отсюда следует, что параметр неоднородности  $NU$  принимает



**Рис. 6.** Зависимость параметра неоднородности электромагнитного поля от радиуса сферы, в пределах которой проводится расчет при  $H = 8.5$  кЭ (а), зависимость от напряженности магнитного поля показателя преломления, рассчитанного на микромасштабе  $\rho = 200$  нм (б), и показателя неоднородности (в); 1, 2 и 3 – вещественные, мнимые части параметров и их модули соответственно.



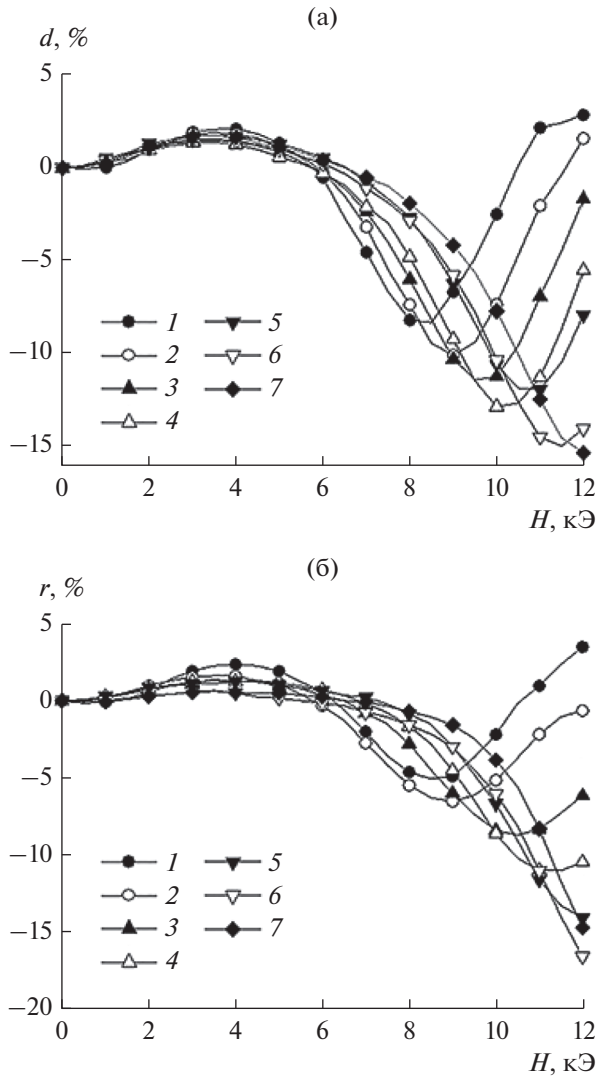


Рис. 7. Зависимости от напряженности магнитного поля коэффициентов прохождения (а) и отражения (б) для искусственного кристалла с частицами металлического кобальта на следующих частотах миллиметрового диапазона: 26 (1), 28 (2), 30 (3), 32 (4), 34 (5), 36 (6), 38 (7) ГГц.

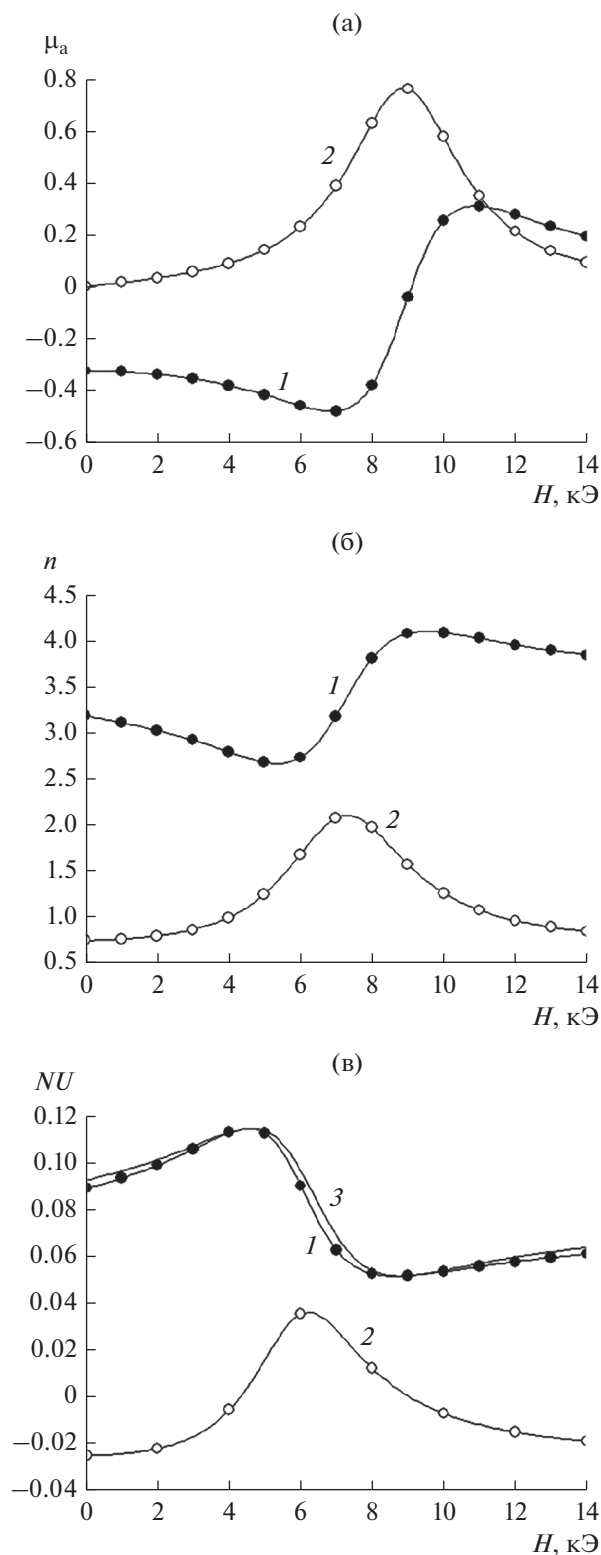
большое значение по сравнению с условием ФМР, когда мнимая часть магнитной проницаемости  $\mu''$  имеет максимум. В условиях ФМР осуществляется однородная прецессия магнитных моментов. Поэтому уменьшение неоднородности микроволнового поля имеет качественное обоснование, связанное с тем, что однородная прецессия способствует большей однородности микроволнового поля по сравнению с условиями, когда могут возбуждаться спиновые волны, вносящие неоднородность по своей природе. В магнитных полях, меньших поля ФМР, рассеяние прецессии магнитных моментов может служить источником неоднородности. Большее затухание волн при

условии ФМР также способствует большей однородности микроволнового поля.

Сопоставим поле максимума параметра неоднородности на частоте  $f = 32$  ГГц, равное  $H_{\max} = 8.0$  кЭ, и экспериментально измеренное по максимуму коэффициента отражения значение поля ФМАР  $H_{\text{ФМАР}} = 9.0$  кЭ. Поле минимума коэффициента неоднородности  $H_{\min} = 11.6$  кЭ, а поле ФМАР  $H_{\text{ФМАР}} = 11.5$  кЭ. На частоте  $f = 26$  ГГц  $H_{\min} = 8.7$  кЭ и  $H_{\text{ФМР}} = 9.0$  кЭ. Таким образом, оценки, основанные на формуле (9), соответствуют экспериментальным данным.

Вывод о резком уменьшении неоднородности микроволнового поля при ФМР был сделан на основании анализа результатов, полученных на искусственном кристалле с частицами диэлектрического никель-цинкового феррита. Проверим справедливость полученных результатов для искусственного кристалла с частицами ферромагнитного металлического кобальта. Из частотной зависимости коэффициентов прохождения и отражения в интервале частот 26...38 ГГц была определена комплексная диэлектрическая проницаемость:  $\epsilon' = 11.2$ ,  $\epsilon'' = 7.6$ . На рис. 7а и 7б показаны полевые зависимости коэффициентов прохождения и отражения. Толщина образца  $d = 1.9$  мм, намагниченность насыщения частиц  $M_s = 1194$  Гс, объемная доля частиц в образце  $m_s = 0.08$ . Качественно зависимости для нанокompозита с частицами кобальта на рис. 7 подобны зависимостям, показанным на рис. 4 для нанокompозита с частицами  $\text{Ni}_{0.5}\text{Zn}_{0.5}\text{Fe}_2\text{O}_4$ .

Измерения ширины линии ФМР дают значение параметра затухания в магнитной системе  $\alpha = 0.22$ . Результаты, полученные на частоте  $f = 26$  ГГц для радиуса  $\rho = 200$  нм, приведены на рис. 8. На рис. 8а показаны зависимости от напряженности магнитного поля действительной и мнимой частей недиагональной компоненты тензора динамической магнитной проницаемости  $\mu_a$ . Максимум мнимой части и нулевое значение действительной указывают на поле ФМР около 9 кЭ. Не следует удивляться отрицательному значению магнитной проницаемости  $\mu_a$  вблизи нулевого поля, ведь это расчетное значение для выделенного объема радиусом  $\rho = 200$  нм, а не материальная константа для макроскопического объема материала. Полевая зависимость показателя преломления, рассчитанная для масштаба  $\rho = 200$  нм, показана на рис. 8б, а полевая зависимость параметра неоднородности — на рис. 8в. Видно, что минимальное значение параметра неоднородности приходится примерно на то же значение поля  $H_{\min} = 8.2$  кЭ. Сравнить значения поля ФМАР и поля максимума неоднородности электромагнитного поля в данном случае нет возможности. Расчет показывает, что ФМАР в рассматриваемом



**Рис. 8.** Зависимости от напряженности магнитного поля недиагональной компоненты тензора динамической магнитной проницаемости (а), показателя преломления, рассчитанного на микромасштабе  $\rho = 200$  нм (б), и показателя неоднородности (в); 1, 2 и 3 – вещественные, мнимые части параметров и их модули соответственно.

материале осуществляется только на частотах, превышающих 44 ГГц. Таким образом, сделанный ранее вывод о существенном уменьшении неоднородности микроволнового поля при условии ФМР подтверждается и для искусственного кристалла с проводящими частицами.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы комплексный показатель преломления и показатель неоднородности электромагнитного поля в нанокompозитном материале с периодически расположенными наночастицами никель-цинкового феррита и металлического кобальта. Измерения зависимостей от напряженности магнитного поля коэффициентов прохождения и отражения выполнены на частотах от 26 до 38 ГГц в полях до 12 кЭ. Показано, что комплексный показатель преломления испытывает изменения, вызванные ферромагнитным резонансом. Выполнены расчеты показателя неоднородности электромагнитного поля внутри материала. Расчеты показали, что неоднородность микроволнового электромагнитного поля уменьшается при достижении поля резонанса ФМР. Однородная прецессия и большее затухание при условии ФМР способствуют большей однородности микроволнового поля. Этот вывод справедлив для материалов, содержащих как диэлектрические ферромагнитные, так и металлические ферромагнитные частицы.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны М. И. Самойловичу за приготовление образцов искусственных кристаллов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-12-01002), результаты раздела 3 получены в рамках государственного задания (тема “Функция” № АААА-А19-119012990095-0).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веселаго В.Г.* // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173. № 7. С. 790.
2. *Pendry J.B.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Т. 85. № 18. Р. 3966.
3. *Гуляев Ю.В., Лагарьков С.А., Никитов С.А.* // Вестн. РАН. 2008. Т. 78. № 5. С. 438.
4. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations / Eds N. Engheta, R.W. Ziolkowski.* Hoboken: Wiley-IEEE Press, 2006.
5. *Silveirinha M.G., Engheta N.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. № 15. 157403.

6. *Edwards B., Alù A., Young M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. № 3. 033903.
7. *Ebbesen T.W., Lezec H.J., Ghaemi H.F. et al.* // Nature. 1998. V. 391. № 6668. P. 667.
8. *Silveirinha M.G., Engheta N.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. № 10. P. 103902.
9. *Smith D.S., Vier D.C., Koschny T. et al.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 3. P. 036617.
10. *Rinkevich A.B., Perov D.V., Demokritov S.O. et al.* // Photon. Nanostruct. Fund. Appl. 2015. V. 15. P. 59.
11. *Rinkevich A.B., Perov D.V., Samoïlovich M.I. et al.* // Metamaterials. 2012. V. 6. № 1-2. P. 27.
12. *Rinkevich A.B., Samoïlovich M.I., Klescheva S.M. et al.* // IEEE Trans. 2014. V. TNANO-13. № 1. P. 3.
13. *Гуревич А.Г., Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.
14. *Ринкевич А.Б., Бурханов А.М., Самоïлович М.А. и др.* // Росс. хим. журн. 2012. Т. 61. № 1-2. С. 26.
15. *Устинов В.В., Ринкевич А.Б., Перов Д.В. и др.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 4. С. 104.

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 35-14537.67

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
ПРИ СПИНОВОЙ ИНЖЕКЦИИ ТОКОМ В ТУНЕЛЬНОМ  
МАГНИТНОМ ПЕРЕХОДЕ СО СПЕЙСЕРОМ ИЗ NiO

© 2021 г. Е. А. Вилков<sup>а</sup>, С. Г. Чигарев<sup>а,\*</sup>, И. В. Маликов<sup>б</sup>, А. В. Черных<sup>б</sup>, С. Н. Марышев<sup>с</sup>

<sup>а</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

<sup>б</sup>Институт проблем технологии микроэлектроники и особо чистых материалов РАН,  
ул. Академика Осипьяна, 6, Черноголовка Московской обл., 142432 Российская Федерация

<sup>с</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”,  
пл. Академика Курчатова, 1, Москва, 123182 Российская Федерация

\*E-mail: chig50@mail.ru

Поступила в редакцию 27.06.2019 г.

После доработки 15.10.2020 г.

Принята к публикации 22.10.2020 г.

Впервые рассмотрена работа спин-инжекционного излучателя электромагнитных колебаний с туннельным магнитным переходом Ni/NiO/Fe. С использованием NiO в качестве непроводящего спейсера в магнитном переходе определено влияние интерфейсной разности потенциалов на границе раздела магнитных слоев на эффективность работы спин-инжекционных излучателей. Приведено теоретическое описание модели исследуемого излучателя и результаты экспериментального сравнения эффективности работы излучателя с туннельным магнитным переходом и магнитным переходом без спейсера Ni/Fe. Показана возможность увеличения эффективности работы спин-инжекционного излучателя при использовании туннельного магнитного перехода.

DOI: 10.31857/S003384942104015X

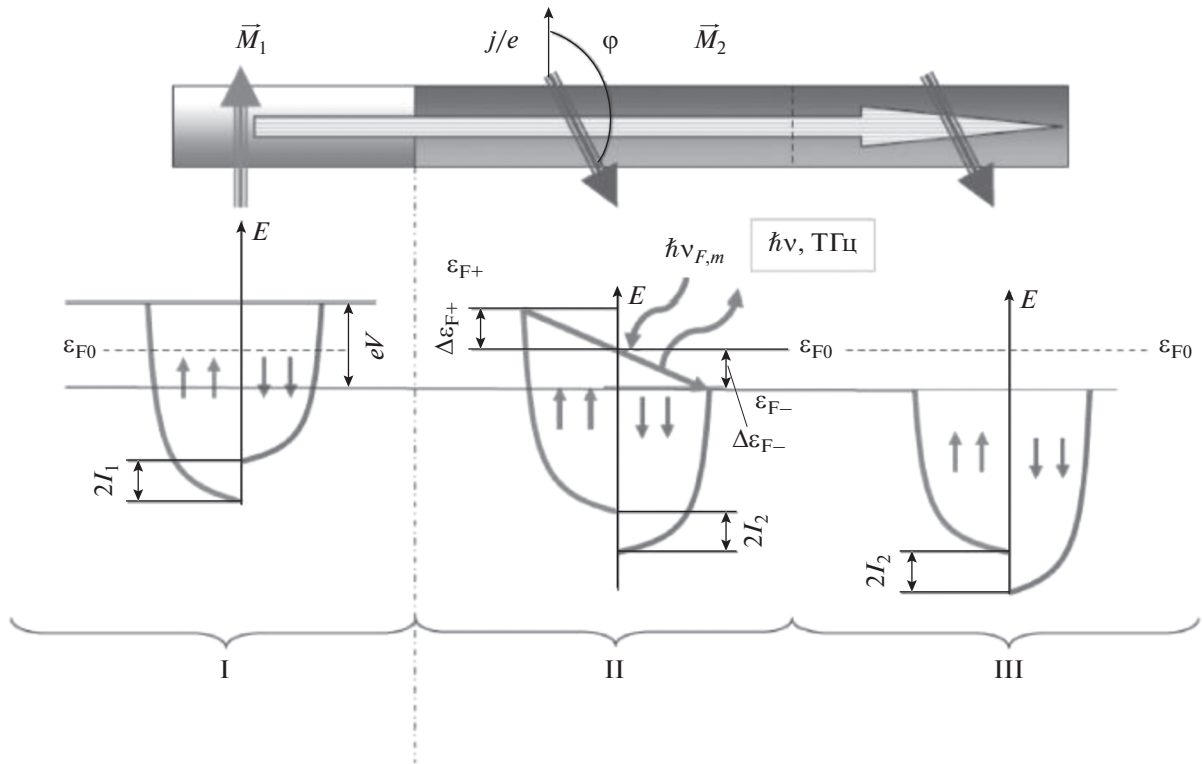
ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время спинтроника и магноника являются одними из наиболее интенсивно развивающихся направлений электроники [1–3]. При этом магнитные гетероструктуры, пронизываемые током, являются основными объектами исследования. Это связано с перспективами их использования в трехмерных наноманитных устройствах [4], в запоминающих устройствах и сенсорах [5]. На их основе возможно создание компактных твердотельных генераторов и приемников электромагнитных колебаний, в том числе в терагерцовом диапазоне частот [6, 7]. Примером могут служить спин-инжекционные источники электромагнитного колебания, которые относятся к квантовым генераторам с токовой накачкой. Их диапазон частот включает наименее освоенный в настоящее время дальний инфракрасный диапазон, в том числе и терагерцовый. Это делает актуальным работы по оптимизации механизмов работы таких источников. В предлагаемой статье рассматривается вопрос оптимизации гетероструктур этих источников.

Магнитные гетероструктуры, или магнитные переходы, как правило, состоят из магнитных слоев, либо контактирующих непосредственно,

либо разделенных немагнитными спейсерами (немагнитный металл или тонкий слой диэлектрика, либо полупроводника) [8–10]. Использование спейсеров устраняет обменную связь между намагниченностями соседних магнитных слоев [2], обеспечивая тем самым резкий магнитный переход между магнитными слоями, что способствует более эффективному взаимодействию электронов с многослойной магнитной средой. В случае диэлектрического спейсера за счет туннелирования возникает еще и резкое падение напряжения на непроводящем спейсере [8–10].

Исходя из сказанного выше для генераторов электромагнитных сигналов, можно предположить, что наличие непроводящего спейсера должно влиять на эффективность спин-инжекционного излучателя не только за счет резкого изменения намагниченностей на границе раздела магнитных слоев, но и за счет появления разности потенциалов на непроводящем спейсере. Представляет интерес отдельно исследовать влияние каждого из этих факторов. До последнего времени влияние спейсера на эффективность работы спин-инжекционных генераторов практически не рассматривалось. В экспериментальных, да и в теоретических работах, как правило, пред-



**Рис. 1.** Схема магнитного перехода при спиновой инжекции током с указанием энергетических подзон в каждом слое: I – область ферромагнетика, играющего роль инжектора; II – рабочая область второго ферромагнетика; III – часть второго ферромагнетика вне области инжекции;  $\nu_{F,m}$  – частота внешнего фотона ( $F$ ) или магнона ( $m$ );  $\varphi = \theta$  – угол между векторами  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$ .

полагается присутствие некоего спейсера, разделяющего ферромагнитные слои и обеспечивающего эффективную работу излучателя [11, 12].

Цель данной работы – исследовать спин-инжекционный излучатель с трехслойным магнитным переходом, спейсер которого не устраняет обменное взаимодействие между магнитными слоями [16], а на эффективность работы излучателя влияет главным образом разность потенциалов на непроводящем спейсере.

Приведены первые результаты такого исследования в сравнении с работой спин-инжекционного излучателя, использующего магнитный переход с непосредственно контактирующими магнитными слоями.

## 1. МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ПЕРЕХОДА ПРИ СПИНОВОЙ ИНЖЕКЦИИ ТОКОМ

Схема типичного магнитного перехода, используемого в спин-инжекционных терагерцовых излучателях, представлена на рис. 1 [13] (верхняя часть рисунка). В нижней части рисунка представлена схема изменения спинового состояния электронов проводимости при инжекции спинов током. Здесь в слоях однородных ферромагнетиков I и II векторы намагниченности  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  па-

раллельны их осям квантования. При прохождении тока из инжектора (область I) в рабочий слой (область II) происходит инжекция не скомпенсированных спинов в области II, затем после их релаксации электроны стекают через область III, выполняющую роль коллектора.

При инжекции нескомпенсированных спинов током мы пренебрегаем зависимостью неравновесной спиновой поляризации от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  [13] и рассматриваем только изменение во времени начального состояния спиновой поляризации рабочего слоя под действием кратковременного импульса тока. При этом делаем следующие допущения.

В терагерцовом (ТГц) диапазоне частот  $\sim 10^{12} \dots 10^{13}$  Гц в первом приближении можно считать магнитную решетку неподвижной, при этом частоты спиновой подсистемы электронов проводимости много больше, чем частоты для  $3d$ -электронов решетки, что позволяет пренебречь динамикой магнитной решетки на ТГц-частотах.

В используемой нами модели принимаем, что электроны проводимости имеют изотропный параболический спектр энергий с некоторой эффективной массой. При токовой инжекции спин-поляризованных электронов изменение их импульса можно считать быстрым по сравнению со спиновой

релаксацией. Преобразование энергии при сохранении спинового состояния для средних заселенностей спиновых подзон в областях I, II показано на рис. 1. На рисунке также обозначены энергетические релаксационные переходы нескомпенсированных электронов с переворотом спина в области II. Взаимодействие  $s$ - и  $d$ -электронов, “локализованных” на атомах кристаллической решетки, зависит от их спинового состояния и описывается по механизму  $sd$ -обмена [2]. Следовательно, обменная энергия  $s$ -электронов зависит от направления их спинов относительно намагниченности кристаллической решетки рабочей области. Из-за этого в области II инжектированные электроны с противоположными спинами образуют две квазиравновесные группы, расселенные по спиновым подзонам. Рассматривая их средние заселенности, можно ввести в каждой из подзон квазистационарные уровни Ферми как добавку к равновесному значению ферми-уровня. Для электронов с параллельными относительно намагниченности рабочего слоя спинами (мажорные электроны) квазиуровень ниже равновесного уровня Ферми, для электронов с антипараллельным направлением спинов (минорные электроны) квазиуровень выше. С учетом электронейтральности в рабочей области возникает разница энергий квазиуровней спиновых подзон, что приводит к возможности возникновения отрицательной спиновой температуры, предсказанной в [3].

При расчетах все это учитывается введением спиновой переменной в гамильтониан взаимодействия. Кроме обменного взаимодействия с  $d$ -электронами ( $sd$ -обмен) учитывается также действие внешнего электромагнитного поля и внешней равновесной системы “термостата”. С учетом сказанного, согласно нашей работе [14], уравнение движения магнитного момента с компонентами  $(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ , усредненного по ансамблю неравновесных электронов в ферромагнитном переходе имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_x}{dt} + \frac{\mu_x}{\tau_{\perp}} &= -\gamma\mu_z H_{sd}^{(y)} + (\omega_{12} - \gamma H_A^{(z)})\mu_y; \\ \frac{d\mu_y}{dt} + \frac{\mu_y}{\tau_{\perp}} &= \gamma H_{sd}^{(x)}\mu_z - (\omega_{12} - \gamma H_A^{(z)})\mu_x; \\ \frac{d\mu_z}{dt} + \frac{\mu_z - \mu_z^{(e)}}{\tau_{\parallel}} &= \gamma[-H_{sd}^{(x)}\mu_y + H_{sd}^{(y)}\mu_x], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu_z^{(e)}$  — продольный магнитный момент электрона в состоянии равновесия,  $\vec{H}_{sd}$  — обменное поле,  $H_A^{(z)}$  — внешнее поле,  $\omega_{12}$  — частота излучения,  $\tau_{\parallel}$  — время продольной (спиновой) релаксации инжектированных электронов,  $\tau_{\perp}$  — время релаксации поперечной составляющей спина,

которую мы приписываем действию механизма Слончевского–Берже [9, 10].

При достаточном отклонении от равновесного состояния электронной спиновой поляризации возникает прецессия спинов электронов проводимости в обменном поле, описываемая уравнениями (1).

Численное решение уравнений (1) представлено на рис. 2а, 2б, описывающих процессы релаксации соответственно поперечной и продольной спиновой компоненты, имеющих существенно различные масштабы по времени и амплитуде.

В процессе релаксации поперечной спиновой компоненты по шкале времени  $\tau_{\perp}$  время определяется тем, как быстро нарушается синхронность прецессии магнитных диполей. На рис. 2а хорошо видна прецессия намагниченности при изменении ориентации спина. Поперечные составляющие намагниченности  $\langle\mu_x\rangle, \langle\mu_y\rangle$  под действием спин-спиновой релаксации [2] экспоненциально затухают до нуля, совершая колебания с частотой

$$\omega_{12} \approx (2I_z)/\hbar = (2\alpha\mu_B M_z)/\hbar.$$

Степень модуляции задаем в следующем виде:

$$\beta = H_{sd}^{(\perp)} / H_{sd}^{(z)},$$

где  $H_{sd}^{(\perp)} = (H_{sd}^{2(x)} + H_{sd}^{2(y)})^{1/2}$  — элементы тензора  $sd$ -обмена,  $\alpha = 2 \times 10^4$  [15].

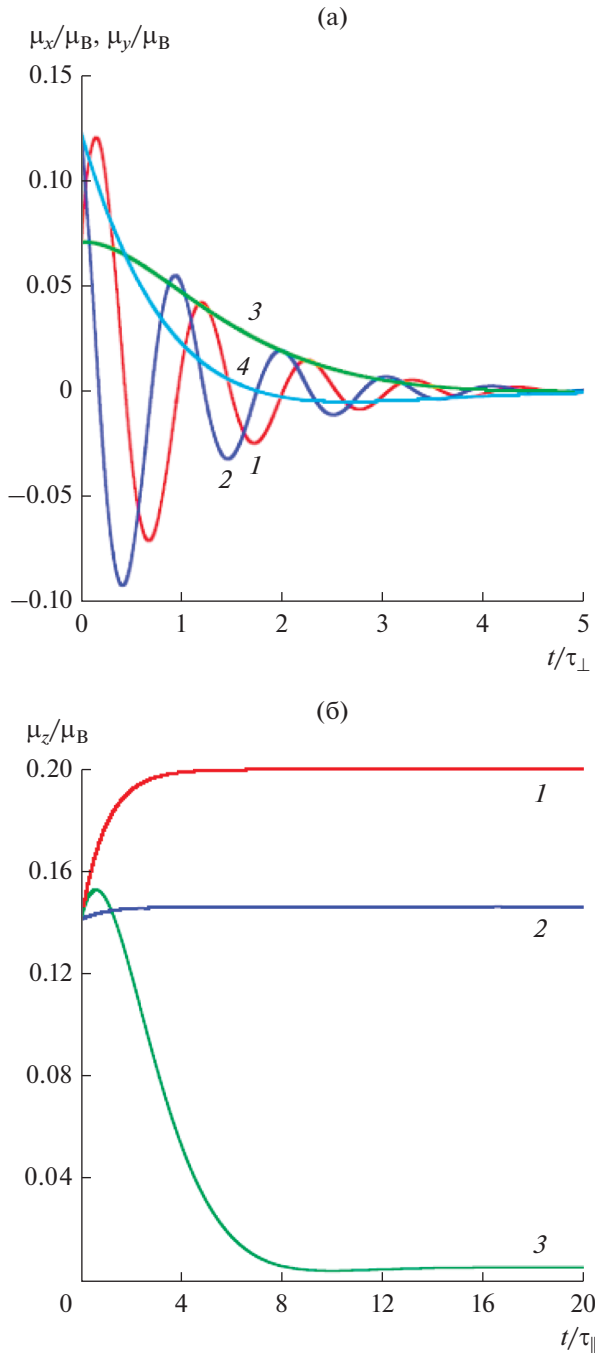
В процессе релаксации продольной спиновой компоненты не скомпенсированных спинов время определяется интенсивностью обмена энергии между инжектированными электронами и решеткой. Здесь прецессия не видна, так как ее амплитуда пренебрежимо мала относительно амплитуды  $sd$ -обмена. Как видно из рис. 2б (ср. с рис. 2а), релаксация поперечной компоненты спина происходит достаточно быстро в масштабе времени продольной релаксации. При этом происходит передача крутильного момента спина магнитной решетке ферромагнетика, что может приводить к осцилляции или переключению намагниченности ферромагнетика. Релаксация нескомпенсированных спинов, лежащих выше равновесного уровня Ферми, происходит при их переходе между спиновыми подзонами с переворотом спина. Эти переходы могут приводить к ТГц-излучению.

### 3. ИССЛЕДУЕМАЯ СТРУКТУРА

Рассмотрим экспериментально влияние спейсера на электромагнитное излучение в магнитном переходе, связав его эффективность с разделением по энергии спиновых подзон с образованием квазиуровней Ферми.

Выше отмечалось, что непроводящий спейсер двойко влияет на эффективность работы спин-ин-





**Рис. 2.** Зависимость поперечной компоненты (а) магнитного момента электрона  $\mu_x/\mu_B$  (кривые 1, 4),  $\mu_y/\mu_B$  (кривые 2, 3) от времени  $t/\tau_{\perp}$  при  $\alpha = 2 \times 10^5$  (1, 2),  $\alpha = 2 \times 10^4$  (3, 4)  $\beta = 0$ , а также продольной компоненты (б) магнитного момента электрона  $\mu_z/\mu_B$  от времени  $t/\tau_{\parallel}$  при  $\beta = 0$  (1), 0.01 (2), 0.1 (3),  $\alpha = 2 \times 10^5$ .

жекционного генератора: 1) определяет наличие или отсутствие обменного взаимодействия магнитных слоев и 2) обеспечивает перепад потенциалов на магнитном переходе при приложении к нему рабо-

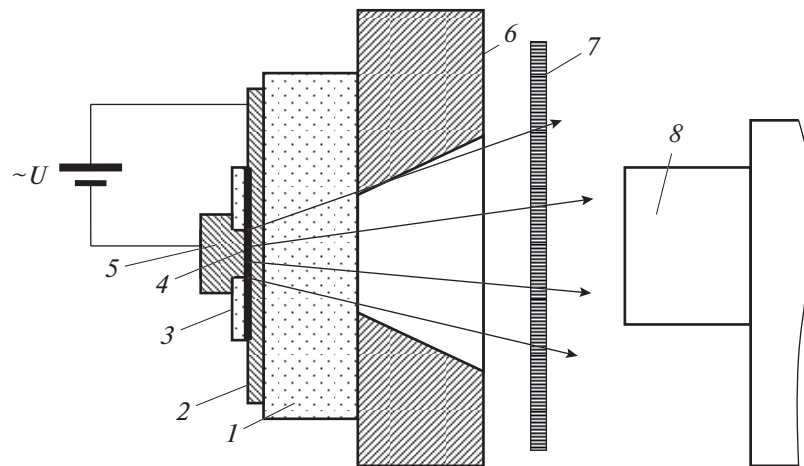
чего напряжения. Так как цель данной работы — исследование зависимости эффективности спин-инжекционного излучателя от разности потенциалов, возникающей на непроводящем спейсере, необходимо по возможности избежать устранения спейсером обменного взаимодействия между двумя магнитными слоями перехода. С этой целью была исследована структура с туннельным магнитным переходом, аналогичная рассмотренной в [11]. В нашем случае переход образован двумя ферромагнитными слоями Fe и Ni, разделенными антиферромагнитным полупроводником NiO. Использование антиферромагнитного спейсера, по нашему представлению, позволило в значительной степени сохранить обменное взаимодействие намагниченностей ферромагнитных слоев. Действительно, согласно [16], в антиферромагнетике при протекании сквозь него спин-поляризованного тока, возникает скашивание подрешеток с появлением в нем намагниченности, направленной параллельно намагниченности инжектора. То есть на границе раздела спейсера и рабочего слоя сохраняется и обменное взаимодействие между магнитными слоями, и магнитосопротивление, как при контакте магнитных слоев без спейсера [8].

Эффективность действия непроводящего спейсера на режим работы спин-инжекционного излучателя оценивали сравнением его работы с режимом работы ранее исследованного излучателя со структурой “стержень—пленка” [12], в которой стержень из Fe с острым концом (диаметр 10...50 мкм) непосредственно контактирует с пленкой Ni (толщина 30 нм), нанесенной на высокоомный кремний. Здесь, как и в [17], эффективность работы излучателя определялась коэффициентом полезного действия излучателя (отношение мощности излучения к потребляемой мощности) и значением плотности пускового тока.

На рис. 3 представлена схема спин-инжекционного излучателя с туннельным магнитным переходом Si/Ni(15)/NiO(5)/Fe(100). В качестве токоподводящих элементов использовались контактные площадки из Mo (на рисунке не показаны). Толщина подложки из высокоомного кремния (1) 500 мкм.

Большинство материалов не может быть непосредственно выращено путем эпитаксии на кремнии из-за химических взаимодействий, поэтому обычно на поверхность кремния наносятся буферные слои [18]. Для предотвращения взаимодействия подложки с пленкой металла при температуре 280°C методом электронно-лучевого испарения через маску в виде прямоугольной щели шириной 1 мм был нанесен слой MgO толщиной 10 нм. Выбор температуры обусловлен получением наилучших электрических и структурных свойств используемых пленочных материалов [19–22]. После этого при той же температуре без разрыва ва-





**Рис. 3.** Схема общего вида спин-инжекционного излучателя: 1 – диэлектрическая подложка, 2 – трехслойная пленка MgO/Ni/NiO, 3 – пленка MgO, 4 – окно-контакт, 5 – верхний слой Fe, 6 – массивная несущая платформа для крепления излучателя, 7 – низкочастотный фильтр, металлическая сетка с ячейкой  $125 \times 125$  мкм, 8 – опто-акустический преобразователь (ячейка Голея);  $\sim U$  – блок питания, источник стабилизированного переменного напряжения; стрелками указано регистрируемое излучение.

куума с помощью лазерного испарения мишени Ni (чистотой 99.99%) наносили сначала слой Ni толщиной 15 нм, а затем после напуска в камеру молекулярного кислорода до давления  $P = 10^{-3}$  мм рт. ст. синтезировалась пленка NiO. Максимальная толщина оксида никеля не должна была превышать 5 нм для сохранения туннельных свойств диэлектрика, создания перехода с не слишком большим электросопротивлением, а также для избежания паразитных эффектов [23]. В результате получалась трехслойная структура MgO(10)/Ni(15)/NiO(5нм) в виде дорожки шириной  $\sim 1$  мм (2). Затем на ее поверхности с использованием электронно-лучевого испарения через маски осаждалась пленка диэлектрика MgO толщиной более 100 нм (3) с окном  $50 \times 50$  мкм для верхнего контакта (4). После этого при температуре  $280^\circ\text{C}$  также электронно-лучевым испарением формировался верхний контакт (5) и подводящие дорожки из железа. Метод электронно-лучевого испарения применялся, чтобы избежать радиационных повреждений туннельного диэлектрика. Для уменьшения сопротивления всей структуры толщина слоя Fe была 100 нм. Ширина контакта Fe 100 мкм.

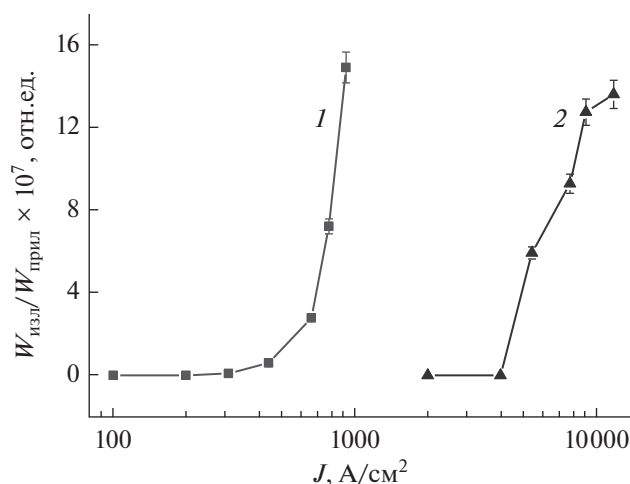
Согласно нашим оценкам потенциальный барьер на границе раздела Ni–Fe для минорных электронов, связанный с обменным *sd*-взаимодействием, составляет величину порядка 0.1 эВ. Также известно, что при толщине слоя NiO в несколько нанометров высота потенциального барьера составляет величину около 0.2 эВ [24], т.е. при протекании рабочего тока он обеспечивает необходимую разность потенциалов между ферромагнитными слоями для туннелирования неравновесных спинов в рабочую зону.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Экспериментальные исследования эффективности работы спин-инжекционных излучателей проводились на установке и по методике, описанными в [25]. Единственно отметим, что в качестве регистратора мощности использовалась ячейка Голея, опто-акустический приемник GC-1P “ТИДЕКС”, а в качестве источника питания – генератор сигналов низкочастотный ГЗ-123, обеспечивавший необходимую амплитуду напряжения до 10 В и оптимальную для работы приемника частоту модуляции сигнала 12 Гц. В процессе экспериментов измеряли напряжение, подаваемое на излучатель, ток, протекающий по излучателю при этом напряжении и мощность излучения. Ошибка измерения не превышала 5% от номинала измеряемой величины. Следует отметить, что диапазон рабочих напряжений для обоих исследуемых излучателей был одинаков и находился в пределе 2...10 В.

На рис. 4 представлена зависимость мощности излучения от плотности тока для излучателя с туннельным магнитным переходом и магнитным переходом типа стержень-пленка. Представленные результаты показывают существенное увеличение эффективности излучателя со спейсером из NiO. Видно, что диапазон плотностей тока, при которых наблюдается излучение с равной интенсивностью в исследуемых излучателях, а также пусковые плотности тока различаются почти на порядок.

На рис. 5 для обоих излучателей представлены зависимости от напряжения эффективности излучателя, как отношение  $W_{\text{изл}}/W_{\text{прил}}$  регистрируе-

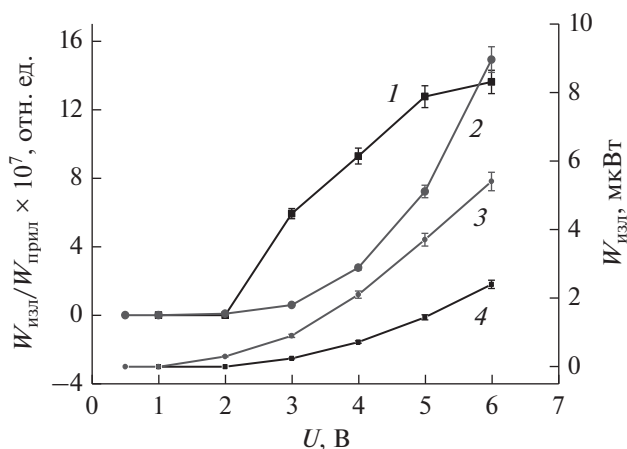


**Рис. 4.** Зависимость от плотности тока эффективности излучателей с туннельным магнитным переходом Fe/NiO/Ni (1) и с переходом стержень–пленка Fe–Ni (2).

мой мощности излучения  $W_{\text{изл}}$  к потребляемой им при этом мощности  $W_{\text{прил}}$ . Там же представлена зависимость мощности излучения от напряжения. В обоих случаях излучение регистрировалось, начиная с напряжения  $\sim 2$  В и его мощность монотонно возрастала при увеличении напряжения до максимального значения 6 В. Эффективность излучателей также возрастает с увеличением напряжения, но для перехода стержень–пленка она с ростом напряжения выходит на насыщение.

Для установления причины более высокой эффективности излучения туннельного перехода проведем некоторые количественные оценки. Оценим потребляемую мощность, обеспечивающую равные уровни сигналов 2 мкВт. Для туннельного магнитного перехода эта мощность достигалась при  $U = 5.6$  В,  $I = 45$  мА,  $W = 0.25$  Вт, для структуры типа стержень–пленка (непосредственный контакт магнитных слоев)  $U = 6$  В,  $I = 270$  мА,  $W = 1.6$  Вт. Получается, что КПД излучателя с туннельным переходом более чем в шесть раз больше КПД магнитного перехода с непосредственным контактом слоев. Значения пусковых токов исследуемых излучателей также отличаются примерно в шесть раз. В целом излучатель с туннельным магнитным переходом имеет эффективность примерно в шесть раз большую, чем излучатель с магнитным переходом типа стержень–пленка. Обратим внимание на то, что сопротивление исследуемых излучателей также отличается примерно в шесть раз. Допустив, что интерфейсное падение напряжения в магнитном переходе пропорционально его сопротивлению, получим его прямую связь с эффективностью работы излучателя.

Эта связь объясняется тем, что возникающая на границе раздела слоев магнитного перехода раз-



**Рис. 5.** Зависимость от приложенного напряжения относительной эффективности  $W_{\text{изл}}/W_{\text{прил}} \times 10^7$  (1, 2) и измеренной мощности излучения  $W_{\text{изл}}$  (3, 4) двух типов магнитных переходов: Fe–Ni (1, 4) и Fe/NiO/Ni (2, 3).

ность потенциалов обеспечивает условия для “забрасывания” инжектированных электронов на высокоэнергетические уровни выше равновесного уровня Ферми. В туннельном магнитном переходе она больше, чем при непосредственном контакте магнитных слоев, что и увеличивает в этом случае заселенность энергетических подзон нескомпенсированными спинами. Тем самым увеличивается число излучающих спин-флип-переходов в единицу времени, а также возрастает количество испускаемых высокоэнергетических квантов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получены результаты, которые показывают, как разность потенциалов, возникающая на границах туннельного перехода, образованного антиферромагнитным полупроводником NiO, влияет на эффективность работы спин-инжекционного излучателя. Предполагается, что заселенность неравновесных квазиуровней Ферми с инжектированными спинами определяется этой разностью потенциалов, причем чем больше разность потенциалов, тем выше эффективность работы излучателя. Этим объясняется более эффективная работа излучателя с исследуемым туннельным переходом по сравнению со структурой стержень–пленка без спейсера. Показана возможность увеличения мощности излучения и уменьшения рабочих токов за счет использования в магнитных переходах спин-инжекционных излучателей непроводящих спейсеров. В целом полученные результаты, по нашему мнению, подтверждают спин-инжекционный механизм наблюдаемого излучения.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-29-03015мк, проект № 20-07-00349 А) и Президиума Российской академии наук (программа № 5 “Фотонные технологии в зондировании неоднородных сред и биообъектов”). Часть работы выполнена в рамках государственного задания ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heinrich B.* // *Can. J. Phys.* 2000. V. 78. № 3. P. 161.
2. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971.
3. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Эпитейн Э.М., Эллиотт Р.Дж.* // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. № 3. С. 189.
4. *Звездин А.К., Звездин К.А., Хвальковский А.В.* // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 4. С. 436.
5. *Касаткин С.И., Васильева И.П., Муравьев А.М.* Многослойные тонкопленочные магниторезистивные элементы. Тула: Гриф и К<sup>о</sup>, 2001.
6. *Kadigrobov A., Shekhter R.I., Jonson M.* // *Low Temp. Phys.* 2005. V. 31. № 3. P. 352.
7. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Крикунов А.И. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 85. № 3. С. 192.
8. *Fert A., George J.-M., Jaffrès H. et al.* // *Europhys. News.* 2003. V. 34. № 6. P. 227.
9. *Slonczewski J. C., Magn J.* // *Magn. Mater.* 1996. V. 159. Т. 1–2. P. L1.
10. *Berger L.* // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 54. № 13. P. 9353.
11. *Kadigrobov A.M., Shekhter R.I., Aronov I. et al.* // *Low Temp. Phys.* 2011. V. 37. № 11. P. 925.
12. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Маликов И.В. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93. № 5. С. 289.
13. *Вилков Е.А., Михайлов Г.М., Чигарев С.Г. и др.* // РЭ. 2016. Т. 61. № 9. С. 844.
14. *Вилков Е.А., Михайлов Г.М., Никитов С.А. и др.* // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. № 6. С. 1108.
15. *Zutic I., Fabian J., Das Sarma S.* // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. № 2. P. 323.
16. *Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Касаткин С.И. и др.* // РЭ. 2013. Т. 58. № 7. С. 704.
17. *Гуляев Ю.В., Вилков Е.А., Чигарев С.Г. и др.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 8. С. 858.
18. *Beshenkov V.G., Fomin L.A., Irzhak D.V. et al.* // *Thin Solid Films.* 2012. V. 520. № 23. P. 6888.
19. *Malikov I.V., Fomin L.A., Vinnichenko V.Yu., Mikhailov G.M.* // *Thin Solid Films.* 2010. V. 519. № 1. P. 527.
20. *Fomin L.A., Malikov I.V., Pyatkin S.V., Mikhailov G.M.* // *J. Magn. Magn. Mater.* 2010. V. 322. P. 851.
21. *Mikhailov G.M., Fomin L.A., Vinnichenko V.Yu. et al.* // *Solid State Phenomena.* 2011. V. 168–169. P. 300.
22. *Fomin L.A., Vinnichenko V.Yu., Malikov I.V., Mikhailov G.M.* // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. V. 330. P. 6.
23. *Маликов И.М., Березин В.А., Фомин Л.А., Михайлов Г.М.* // Микроэлектроника. 2018. Т. 47. № 3. С. 205.
24. *Hobbs P.C.D., Laibowitz R.B., Libsch F.R.* // *Appl. Opt.* 2005. V. 44. № 32. P. 6813.
25. *Панас А.И., Чигарев С.Г., Вилков Е.А. и др.* // Электрон. техника. Сер. 1. СВЧ-техника. 2019. Вып. 2. С. 16.

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

### СТРУКТУРА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ КРОМКИ КАТОДА ПРИ ЭМИССИИ В $\rho$ -РЕЖИМЕ

© 2021 г. В. А. Сыровой\*

ВЭИ – филиал ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина»,  
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

\*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 17.01.2020 г.

После доработки 17.01.2020 г.

Принята к публикации 22.02.2020 г.

На основе теории антипараксиальных разложений для ленточного релятивистского пучка исследована структура электрического поля вблизи кромки катода при эмиссии в  $\rho$ -режиме и наличии внешнего неоднородного магнитного поля. Описаны формы боковой поверхности катода и отрицательных эквипотенциалей, позволяющие сформировать профилированный тепловой зазор, который не нарушает принятую гидродинамическую модель потока.

DOI: 10.31857/S0033849421040136

#### ВВЕДЕНИЕ

Концепция синтезированного теплового зазора сформулирована в работе [1] на примере формирования цилиндрического пучка, потенциал в котором соответствует закону  $4/3$  плоского диода. Противоречащее теории интенсивных пучков задание теплового зазора при использовании двумерных и трехмерных программ траекторного анализа является одним из основных фактов, вызывающих сомнение в адекватности расчетов как в случае осесимметричных потоков с высокой компрессией, так и при рассмотрении электронных пучков с прямоугольным сечением, часто аппроксимируемым эллипсом. Анализ подходов такого рода приведен в работе [2], вопрос о конфигурации теплового зазора и возможности управлять сходимостью потока за счет наклона нулевого формирующего электрода рассматривался в работах [3, 4].

В последней из них [4] на основе теории антипараксиальных разложений [5] рассчитана боковая форма катода и отрицательные эквипотенциалы при эмиссии в  $\rho$ -режиме для электростатических потоков. В работе [6] выполнен расчет теплового зазора для планарного гиротрона при эмиссии в  $T$ -режиме. Локальное решение уравнения Лапласа вблизи кромки катода для того же прибора в геометрии, близкой к той, что построена в работе [7]. Конфигурация теплового зазора для магнетронно-инжекторной пушки на основе точного решения для плоского магнетрона исследована в [8].

Цель работы – решение в общей постановке задачи формирования ленточного релятивистского пучка в окрестности кромки искривленного ка-

тода с неоднородным токоотбором при эмиссии в  $\rho$ -режиме при наличии внешнего неоднородного магнитного поля. Рассмотрение ведется в нормировках, исключающих из уравнений пучка все физические константы используемой системы единиц.

#### 1. ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА ПРИ ЭМИССИИ В $\rho$ -РЕЖИМЕ

*Компоненты скорости.* Решение вблизи катода  $s = 0$  при эмиссии в  $\rho$ -режиме имеет вид координатных разложений по параметру  $\sqrt[3]{s}$ , где  $s$  – расстояние по нормали к катоду в системе  $s, l, x$  ( $l$  – длина дуги кривой, определяющей форму стартовой поверхности,  $x$  – циклическая координата) [5, 9]:

$$\begin{aligned} U_s &= U_2 s^{2/3} (1 + \bar{U}_4 s^{2/3} + \bar{U}_5 s^{3/3} + \dots), \\ U_l &= U_2 s^{3/3} (\bar{V}_3 + \bar{V}_4 s^{1/3} + \bar{V}_5 s^{2/3} + \dots). \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты в (1), являющиеся функциями  $l$ , следующим образом выражаются через кривизну катода  $\kappa_1$ , плотность тока эмиссии  $J$  и компоненты напряженности магнитного поля  $\vec{H} = \{L, M, N\}$  при  $s = 0$ :

$$\begin{aligned} U_2 &= \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3}, \quad \bar{U}_4 = -\frac{9}{20} \bar{H}^2, \quad \bar{U}_5 = \frac{4}{15} \kappa_1, \\ \bar{U}_6 &= \frac{3}{14} \bar{N} \bar{J}' - \frac{243}{2800} \bar{H}^4 + \frac{9}{56} \bar{L} \bar{H}^2 - \frac{22}{63} \bar{U}_2^2, \\ \bar{U}_7 &= -\frac{12}{35} \kappa_1 \bar{H}^2 - \frac{3}{56} \bar{L} \bar{M} \bar{J}' - \frac{9}{560} \bar{L} \bar{M}' - \frac{279}{560} \bar{M} \bar{L}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_8 = & \frac{67}{450} \kappa_1^2 - \frac{2}{45} \bar{J}'' - \frac{1}{180} \bar{J}'^2 + \frac{5}{16} \kappa_1 \bar{L} \bar{M} \bar{N} + \\ & + \left( -\frac{9}{160} \bar{L}^2 + \frac{11}{70} \bar{H}^2 \right) \bar{N} \bar{J}' - \bar{N} \left( \frac{27}{160} \bar{L} \bar{L}' + \frac{29}{280} \bar{H} \bar{H}' \right) - \\ & - \frac{1863}{56000} \bar{H}^6 + \left( -\frac{9}{320} \bar{L}^2 + \frac{153}{1120} \bar{H}^2 \right) \bar{L}^2 \bar{H}^2 - \\ & - \frac{1}{720} \bar{L}'^2 + \frac{64}{315} \bar{H}'^2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_3 = & -\bar{N}, \quad \bar{V}_4 = \frac{3}{4} \bar{L} \bar{M}, \quad \bar{V}_5 = \frac{1}{5} \bar{J}' + \frac{9}{20} \bar{L}^2 \bar{N}, \\ \bar{V}_6 = & -\frac{1}{2} \kappa_1 \bar{N} + \frac{9}{40} \left( -\bar{L}^2 + \bar{H}^2 \right) \bar{L} \bar{M}, \\ \bar{V}_7 = & \frac{17}{20} \kappa_1 \bar{L} \bar{M} + \left( -\frac{3}{20} \bar{L}^2 + \frac{9}{140} \bar{H}^2 \right) \bar{J}' + \frac{3}{14} \bar{L} \bar{L}' - \\ & - \frac{27}{70} \bar{H} \bar{H}' + \left( -\frac{27}{280} \bar{L}^2 + \frac{27}{112} \bar{H}^2 \right) \bar{L}^2 \bar{N} + \frac{3}{7} \bar{N} \bar{U}_2^2, \\ \bar{V}_8 = & \frac{1}{10} \kappa_1' + \left( \frac{7}{30} \kappa_1 - \frac{39}{224} \bar{L} \bar{M} \bar{N} \right) \bar{J}' + \\ & + \frac{83}{280} \kappa_1 \bar{L}^2 \bar{N} + \frac{9}{32} \bar{M} \bar{N} \bar{L}' + \\ & + \left( \frac{81}{2240} \bar{L}^4 - \frac{1269}{5600} \bar{L}^2 \bar{H}^2 + \frac{243}{2240} \bar{H}^4 \right) \bar{L} \bar{M} - \\ & - \frac{32}{105} \bar{L} \bar{M} \bar{U}_2^2; \quad \bar{H}^2 = \bar{M}^2 + \bar{N}^2, \quad \bar{J}' \equiv J'/J, \\ \bar{J}'' \equiv & J''/J, \quad \bar{L} \equiv L/U_2, \quad \bar{L}' \equiv L'/U_2, \quad \bar{J}' \equiv dJ/dl. \end{aligned}$$

Выражение для потенциала. Потенциал электрического поля  $\Phi$  описывается разложением

$$\begin{aligned} 2\Phi = & \Phi_4 s^{4/3} \left( 1 + \bar{\Phi}_6 s^{2/3} + \bar{\Phi}_7 s^{3/3} + \dots + \bar{\Phi}_{10} s^{6/3} + \dots \right), \\ \Phi_4 = & \left( \frac{9J}{2} \right)^{2/3}, \quad \bar{\Phi}_6 = \frac{1}{10} \bar{H}^2, \quad \bar{\Phi}_7 = \frac{8}{15} \kappa_1, \\ \bar{\Phi}_8 = & \frac{1}{35} \bar{N} \bar{J}' - \frac{9}{560} \bar{L}^2 \bar{H}^2 + \frac{81}{2800} \bar{H}^4 + \frac{13}{252} \bar{U}_2^2, \\ \bar{\Phi}_9 = & \frac{13}{175} \kappa_1 \bar{H}^2 - \frac{1}{140} \bar{L} \bar{M} \bar{J}' + \frac{1}{280} \bar{M} \bar{L}' - \frac{9}{280} \bar{L} \bar{M}', \\ \bar{\Phi}_{10} = & \frac{83}{225} \kappa_1^2 - \frac{4}{15} \bar{J}'' + \frac{13}{450} \bar{J}'^2 - \frac{1}{56} \kappa_1 \bar{L} \bar{M} \bar{N} + \\ & + \frac{9}{2800} \bar{N} \bar{L}^2 \bar{J}' - \frac{1}{140} \bar{N} \bar{H}^2 \bar{J}' - \frac{9}{560} \bar{N} \bar{L} \bar{L}' + \\ & + \frac{13}{280} \bar{N} \bar{H} \bar{H}' + \frac{9}{5600} \bar{L}^4 \bar{H}^2 - \\ & - \frac{9}{560} \bar{L}^2 \bar{H}^4 + \frac{81}{7000} \bar{H}^6 - \frac{1}{360} \bar{L}'^2 + \frac{17}{1260} \bar{H}'^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Члены, исчезающие в нерелятивистском пределе, отмечены символом тильды.

Уравнение трубки тока. Дифференциальное уравнение трубки тока имеет вид

$$\frac{dl}{ds} = \frac{v_l}{h_2 v_s}, \quad (4)$$

где  $h_k$  – коэффициенты Ляме системы  $s, l, x$ :

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1 - \kappa_1 s, \quad h_3 = 1. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) определяется формулой

$$\bar{l} = l - l_0 = \alpha_4 s^{4/3} + \alpha_5 s^{5/3} + \dots + \alpha_9 s^{9/3} + \dots, \quad (6)$$

причем при сохранении члена с коэффициентом  $\alpha_9$  в (6) функции  $\bar{V}_3, \bar{V}_4$  должны быть разложены в окрестности точки старта  $l = l_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{V}_3(l) = & \bar{V}_3(l_0) + \bar{V}_3'(l_0) \bar{l} = \\ = & -\bar{N} + \left( \frac{1}{3} \bar{N} \bar{J}' - \frac{2}{9} \bar{U}_2^2 \right) \left( \alpha_4 s^{4/3} + \alpha_5 s^{5/3} \right), \\ \bar{V}_4(l) = & \bar{V}_4(l_0) + \bar{V}_4'(l_0) \bar{l} = \frac{3}{4} \bar{L} \bar{M} + \\ & + \frac{3}{4} \left( -\frac{2}{3} \bar{L} \bar{M} \bar{J}' + \bar{M} \bar{L}' + \bar{L} \bar{M}' \right) \alpha_4 s^{4/3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  в (6) и выражения в правых частях (7) являются константами, соответствующими точке старта  $l_0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & -\frac{3}{4} \bar{N}, \quad \alpha_5 = \frac{9}{20} \bar{L} \bar{M}, \\ \alpha_6 = & \frac{1}{10} \bar{J}' + \frac{9}{40} \left( \bar{L}^2 - \bar{H}^2 \right) \bar{N}, \\ \alpha_7 = & -\frac{37}{70} \kappa_1 \bar{N} + \left( \frac{27}{112} \bar{H}^2 - \frac{27}{280} \bar{L}^2 \right) \bar{L} \bar{M}, \\ \alpha_8 = & \frac{21}{40} \kappa_1 \bar{L} \bar{M} + \left( -\frac{9}{560} \bar{L}^2 + \frac{81}{1400} \bar{H}^2 - \frac{3}{224} \bar{N}^2 \right) \bar{J}' + \\ & + \frac{9}{112} \bar{L} \bar{L}' - \frac{81}{560} \bar{H} \bar{H}' + \\ & + \left( -\frac{81}{2240} \bar{L}^4 + \frac{1269}{5600} \bar{L}^2 \bar{H}^2 - \frac{243}{2240} \bar{H}^4 \right) \bar{N} + \frac{31}{336} \bar{N} \bar{U}_2^2, \\ \alpha_9 = & \frac{1}{30} \kappa_1' + \frac{19}{150} \kappa_1 \bar{J}' + \frac{353}{3360} \bar{L} \bar{M} \bar{N} \bar{J}' + \frac{877}{420} \kappa_1 \bar{L}^2 \bar{N} - \\ & - \frac{363}{1400} \kappa_1 \bar{N} \bar{H}^2 - \frac{361}{1120} \bar{M} \bar{N} \bar{L}' + \frac{143}{560} \bar{L} \bar{N} \bar{M}' + \\ & + \frac{27}{2240} \bar{L}^5 \bar{M} - \frac{837}{5600} \bar{L}^3 \bar{H}^2 \bar{M} + \\ & + \frac{1593}{11200} \bar{H}^4 \bar{L} \bar{M} - \frac{1}{21} \bar{L} \bar{M} \bar{U}_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем локальные декартовы координаты  $X, Y$ , направленные по нормали и касательной к катоду в точке старта. С криволинейными координатами  $s, \bar{l}$  с необходимой точностью они связаны соотношениями

$$\begin{aligned} s = & X - \frac{1}{2} \kappa_1 Y^2 - \frac{1}{2} \kappa_1^2 X Y^2, \\ \bar{l} = & \left( 1 + \kappa_1 X + \kappa_1^2 X^2 \right) Y. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение трубки тока в координатах  $X, Y$  описывается формулами

$$Y = a_4 X^{4/3} + a_5 X^{5/3} + \dots + a_9 X^{9/3};$$

$$a_4 = \alpha_4, \quad a_5 = \alpha_5, \quad a_6 = \alpha_6, \quad a_7 = \alpha_7 + \frac{3}{4} \kappa_1 \bar{N}, \quad (10)$$

$$a_8 = \alpha_8 - \frac{9}{20} \kappa_1 \bar{L} \bar{M}, \quad a_9 = \alpha_9 + \frac{9}{32} \kappa_1 \bar{N}^3.$$

## 2. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

*Распрямляющее отображение.* Перейдем от  $X, Y$  к криволинейной системе  $u, v$ , в которой граница пучка описывается уравнением  $v = 0$ :

$$Z \equiv X + iY = w + i(a_4 w^{4/3} + a_5 w^{5/3} + \dots), \quad (11)$$

$$w = u + iv.$$

Обратное отображение определено формулой

$$w = Z - ia_4 Z^{4/3} - \left( ia_5 + \frac{4}{3} a_4^2 \right) Z^{5/3} +$$

$$+ \left( -ia_6 - 3a_4 a_5 + 2ia_4^3 \right) Z^{6/3} +$$

$$+ \left( -ia_7 - \frac{10}{3} a_4 a_6 - \frac{5}{3} a_5^2 + i \frac{65}{9} a_4^2 a_5 + \frac{268}{81} a_4^4 \right) Z^{7/3}; \quad (12)$$

$$w = M \exp(iT), \quad Z = r \exp(i\theta),$$

$$M^2 = u^2 + v^2, \quad \operatorname{tg} T = v/u,$$

$$r^2 = X^2 + Y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = Y/X.$$

Связь координат  $u, v$  и  $X, Y$  описывается выражениями

$$u = r \cos \theta + r^{4/3} \alpha_{4s} \sin \frac{4}{3} \theta +$$

$$+ r^{5/3} \left( \alpha_{5c} \cos \frac{5}{3} \theta + \alpha_{5s} \sin \frac{5}{3} \theta \right) +$$

$$+ r^2 \left( \alpha_{6c} \cos 2\theta + \alpha_{6s} \sin 2\theta \right) +$$

$$+ r^{7/3} \left( \alpha_{7c} \cos \frac{7}{3} \theta + \alpha_{7s} \sin \frac{7}{3} \theta \right),$$

$$v = r \sin \theta - r^{4/3} \alpha_{4s} \cos \frac{4}{3} \theta +$$

$$+ r^{5/3} \left( -\alpha_{5s} \cos \frac{5}{3} \theta + \alpha_{5c} \sin \frac{5}{3} \theta \right) +$$

$$+ r^2 \left( -\alpha_{6s} \cos 2\theta + \alpha_{6c} \sin 2\theta \right) +$$

$$+ r^{7/3} \left( -\alpha_{7s} \cos \frac{7}{3} \theta + \alpha_{7c} \sin \frac{7}{3} \theta \right); \quad (13)$$

$$X = u - a_4 M^{4/3} \sin \frac{4}{3} T - a_5 M^{5/3} \sin \frac{5}{3} T -$$

$$- a_6 M^2 \sin 2T - a_7 M^{7/3} \sin \frac{7}{3} T,$$

$$Y = v + a_4 M^{4/3} \cos \frac{4}{3} T + a_5 M^{5/3} \cos \frac{5}{3} T +$$

$$+ a_6 M^2 \cos 2T + a_7 M^{7/3} \cos \frac{7}{3} T.$$

Коэффициенты в (13) вычисляются в точке старта  $l_0$  и определены формулами

$$\alpha_{4s} = -\frac{3}{4} \bar{N}, \quad \alpha_{5c} = -\frac{3}{4} \bar{N}^2, \quad \alpha_{5s} = \frac{9}{20} \bar{L} \bar{M},$$

$$\alpha_{6c} = \frac{81}{80} \bar{L} \bar{M} \bar{N}, \quad \alpha_{6s} = \frac{1}{10} \bar{J}' +$$

$$+ \frac{9}{40} (\bar{L}^2 - \bar{H}^2) \bar{N} + \frac{27}{32} \bar{N}^3, \quad (14)$$

$$\alpha_{7c} = \frac{1}{4} \bar{N} \bar{J}' - \frac{27}{80} \bar{L}^2 \bar{M}^2 + \frac{9}{16} (\bar{L}^2 - \bar{H}^2) \bar{N}^2 + \frac{67}{64} \bar{N}^4,$$

$$\alpha_{7s} = \frac{31}{140} \kappa_1 \bar{N} - \frac{27}{280} \bar{L}^3 \bar{M} + \frac{27}{112} \bar{L} \bar{M} \bar{H}^2 - \frac{117}{64} \bar{L} \bar{M} \bar{N}^2.$$

*Потенциал на трубке тока.* При сохранении члена порядка  $s^{10/3}$  в выражении (3) для потенциала необходимо провести разложение в окрестности точки  $l = l_0$  функций  $\Phi_4$  и  $\Phi_6$ :

$$2\Phi_e = \left( \frac{9J}{2} \right)^{2/3} s^{4/3} \left[ 1 + \frac{2}{3} \bar{J}' (\alpha_{4s} s^{4/3} + \alpha_{5s} s^{5/3} + \alpha_{6s} s^{6/3}) \right] \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1}{10} \left[ \bar{H}^2 + \left( -\frac{2}{3} \bar{H}^2 \bar{J}' + 2\bar{H} \bar{H}' \right) \alpha_{4s} s^{4/3} \right] s^{2/3} + \right.$$

$$\left. + \bar{\Phi}_7 s + \bar{\Phi}_8 s^{4/3} + \bar{\Phi}_9 s^{5/3} + \bar{\Phi}_{10} s^{6/3} \right\}, \quad (15)$$

где индексом  $e$  отмечено значение функции на границе.

На основании формулы для  $s$  из (9) координата  $s$  на трубке тока выражается через  $X$  следующим образом:

$$s = X \left( 1 - \frac{2}{3} \kappa_1 \alpha_4^2 X^{5/3} - \frac{4}{3} \kappa_1 \alpha_4 \alpha_5 X^2 \right). \quad (16)$$

В результате для функции  $\Phi_e$  получаем

$$2\Phi_e = \left( \frac{9J}{2} \right)^{2/3} X^{4/3} \left( 1 + \Phi_2 X^{2/3} + \Phi_3 X^{3/3} + \right.$$

$$\left. + \Phi_4 X^{4/3} + \Phi_5 X^{5/3} + \Phi_6 X^{6/3} \right);$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{10} \bar{H}^2, \quad \Phi_3 = \frac{8}{15} \kappa_1,$$

$$\Phi_4 = -\frac{33}{70} \bar{N} \bar{J}' - \frac{9}{560} \bar{L}^2 \bar{H}^2 + \frac{81}{2800} \bar{H}^4 + \frac{13}{252} \bar{U}_2^2,$$

$$\Phi_5 = \frac{13}{175} \kappa_1 \bar{H}^2 - \frac{9}{32} \kappa_1 \bar{N}^2 + \frac{41}{140} \bar{L} \bar{M} \bar{J}' +$$

$$+ \frac{1}{280} \bar{M} \bar{L}' - \frac{9}{280} \bar{L} \bar{M}', \quad (17)$$

$$\Phi_6 = \frac{83}{225} \kappa_1^2 - \frac{4}{15} \bar{J}'' + \frac{43}{450} \bar{J}'^2 +$$

$$+ \frac{639}{2800} \bar{N} \bar{L}^2 \bar{J}' - \frac{13}{56} \bar{N} \bar{H}^2 \bar{J}' + \frac{121}{280} \kappa_1 \bar{L} \bar{M} \bar{N} -$$

$$- \frac{9}{560} \bar{N} \bar{L} \bar{L}' - \frac{29}{280} \bar{N} \bar{H} \bar{H}' + \frac{9}{5600} \bar{L}^4 \bar{H}^2 -$$

$$- \frac{9}{560} \bar{L}^2 \bar{H}^4 + \frac{81}{7000} \bar{H}^6 - \frac{1}{360} \bar{L}^2 + \frac{17}{1260} \bar{H}^2.$$

Нормальная производная потенциала на трубке тока. Для вычисления производной  $(\partial\varphi/\partial v)$  служат соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial v}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial s}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial l}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial l}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Формулы (3), (9), (13) позволяют вычислить входящие в (18) производные. В результате получим

$$\begin{aligned} \varphi_{ve} \equiv (\partial\varphi/\partial v)_e &= \varphi_4 (\bar{F}_2 X^{2/3} + \bar{F}_3 X^{3/3} + \\ &+ \bar{F}_4 X^{4/3} + \bar{F}_5 X^{5/3} + \bar{F}_6 X^{6/3} + \bar{F}_7 X^{7/3}); \\ \bar{F}_2 &= -\frac{16}{9} a_4, \quad \bar{F}_3 = -\frac{20}{9} a_5, \\ \bar{F}_4 &= -\frac{8}{3} a_6 - \frac{8}{3} a_4 \bar{\varphi}_6 + \bar{\varphi}_4', \\ \bar{F}_5 &= -\frac{28}{9} a_7 - \frac{4}{3} \kappa_1 a_4 - \frac{10}{3} \bar{\varphi}_6 a_5 - \frac{28}{9} \bar{\varphi}_7 a_4, \\ \bar{F}_6 &= -\frac{32}{9} a_8 - \frac{4}{3} \kappa_1 a_5 - 4 \bar{\varphi}_6 a_6 - \frac{35}{9} \bar{\varphi}_7 a_5 - \frac{32}{9} \bar{\varphi}_8 a_4, \\ \bar{F}_7 &= -4 a_9 - \frac{4}{3} \kappa_1 a_6 - \frac{14}{3} \bar{\varphi}_6 a_7 - \\ &- \frac{14}{3} \bar{\varphi}_7 a_6 - \frac{40}{9} \bar{\varphi}_8 a_5 + \kappa_1 \bar{\varphi}_4'. \end{aligned} \quad (19)$$

При сохранении выписанных в (19) членов ряда после вычисления производных из (18) на границе потока имеем

$$s = u = X. \quad (20)$$

Выпишем несколько первых коэффициентов в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= \frac{4}{3} \bar{N}, \quad \bar{F}_3 = -\bar{L} \bar{M}, \quad \bar{F}_4 = \frac{2}{5} \bar{J}', \quad -\frac{3}{5} \bar{L}^2 \bar{N} + \\ &+ \frac{4}{5} (\bar{M}^2 + \bar{N}^2) \bar{N}; \quad \bar{\varphi}_4' \equiv \varphi_4'/\varphi_4 = \frac{2}{3} \bar{J}'. \end{aligned} \quad (21)$$

Решение уравнения Лапласа. Точное решение уравнения Лапласа описывается формулой

$$2\varphi(u, v) = \operatorname{Re} \varphi_e(w) + \operatorname{Im} \int \varphi_{ve}(w) dw. \quad (22)$$

В окрестности кромки катода выражение (22) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{2\varphi(u, v)}{\varphi_4} &= \left[ M^{4/3} \cos \frac{4}{3} T \right] + \left[ \frac{3}{5} M^{5/3} \bar{F}_2 \sin \frac{5}{3} T \right] + \\ &+ \left[ \Phi_2 (u^2 - v^2) + \bar{F}_3 uv \right] + \\ &+ \left[ M^{7/3} \left( \Phi_3 \cos \frac{7}{3} T + \frac{3}{7} \bar{F}_4 \sin \frac{7}{3} T \right) \right] + \\ &+ \left[ M^{8/3} \left( \Phi_4 \cos \frac{8}{3} T + \frac{3}{8} \bar{F}_5 \sin \frac{8}{3} T \right) \right] + \\ &+ \left[ \Phi_5 (u^3 - 3uv^2) + \frac{1}{3} \bar{F}_6 (3u^2v - v^3) \right] + \\ &+ \left[ M^{10/3} \left( \Phi_6 \cos \frac{10}{3} T + \frac{3}{10} \bar{F}_7 \sin \frac{10}{3} T \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

### 3. РАСЧЕТ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЕЙ

Эквипотенциаль  $\varphi = \varphi_* < 0$ . Выразим функции  $M, T$  через полярные координаты  $r, \theta$  в плоскости  $X, Y$ , пользуясь для этого формулами (13)

$$M^2 = r^2 \left( 1 + M_1 r^{1/3} + M_2 r^{2/3} + \dots \right),$$

$$M_1 = 2\alpha_{4s} \sin \frac{1}{3} \theta,$$

$$M_2 = 2 \left( \alpha_{5c} \cos \frac{2}{3} \theta + \alpha_{5s} \sin \frac{2}{3} \theta \right) + \alpha_{4s}^2,$$

$$M_3 = 2 \left( \alpha_{6c} \cos \theta + \alpha_{6s} \sin \theta \right) +$$

$$+ 2\alpha_{4s} \left( -\alpha_{5c} \sin \frac{1}{3} \theta + \alpha_{5s} \cos \frac{1}{3} \theta \right),$$

$$M_4 = 2 \left( \alpha_{7c} \cos \frac{4}{3} \theta + \alpha_{7s} \sin \frac{4}{3} \theta \right) +$$

$$+ 2\alpha_{4s} \left( -\alpha_{6c} \sin \frac{2}{3} \theta + \alpha_{6s} \cos \frac{2}{3} \theta \right) + \alpha_{5c}^2 + \alpha_{5s}^2;$$

$$\operatorname{tg} T = \frac{v}{u} = \operatorname{tg} \theta \left( 1 + T_1 r^{1/3} + T_2 r^{2/3} + \dots \right),$$

$$T_1 = -\alpha_{4s} \frac{\cos \frac{1}{3} \theta}{\sin \theta \cos \theta},$$

$$T_2 = \left( \alpha_{5c} \sin \frac{2}{3} \theta - \alpha_{5s} \cos \frac{2}{3} \theta + \alpha_{4s}^2 \frac{\sin \frac{4}{3} \theta \cos \frac{1}{3} \theta}{\cos \theta} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}, \quad T_3 = \frac{\alpha_{6c}}{\cos \theta} - \frac{\alpha_{6s}}{\sin \theta} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \alpha_{4s} \alpha_{5c} \left( -\sin \theta \sin \frac{1}{3} \theta + \cos 2\theta \right) + \right.$$

$$\left. + \alpha_{4s} \alpha_{5s} \left( 2 \sin \frac{2}{3} \theta + \sin 2\theta - \sin 4\theta \right) \right] \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta};$$

$$T = \theta + \Theta_1 r^{1/3} + \Theta_2 r^{2/3} + \dots,$$

$$\Theta_1 = \sin \theta \cos \theta T_1, \quad \Theta_2 = \sin \theta \cos \theta \left( T_2 - \sin^2 \theta T_1^2 \right),$$

$$\Theta_3 = \sin \theta \cos \theta \times$$

$$\times \left[ T_3 - 2 \sin^2 \theta T_1 T_2 + \frac{1}{3} \sin^2 \theta \left( 3 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \right) T_1^3 \right].$$

Явные выражения для нескольких первых коэффициентов описываются формулами

$$M_1 = -\frac{3}{4} \bar{N} \sin \frac{1}{3} \theta,$$

$$M_2 = \left( \frac{9}{16} - \frac{3}{2} \cos \frac{2}{3} \theta \right) \bar{N}^2 + \frac{9}{10} \bar{L} \bar{M} \sin \frac{2}{3} \theta, \quad (25)$$

$$\Theta_1 = \frac{3}{4} \bar{N} \cos \frac{1}{3} \theta,$$

$$\Theta_2 = -\frac{15}{32} \bar{N}^2 \sin \frac{2}{3} \theta - \frac{9}{20} \bar{L} \bar{M} \cos \frac{2}{3} \theta.$$



При сохранении членов порядка  $r^2$  уравнение (23) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2\Phi}{\Phi_4} = r^{4/3} & \left[ 1 + \frac{2}{3} M_1 r^{1/3} + \left( \frac{2}{3} M_2 - \frac{1}{9} M_1^2 \right) r^{2/3} \right] \times \\ & \times \left[ \cos \frac{4}{3} \theta - \frac{4}{3} \Theta_1 \sin \frac{4}{3} \theta r^{1/3} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{4}{3} \Theta_2 \sin \frac{4}{3} \theta + \frac{8}{9} \Theta_1^2 \cos \frac{4}{3} \theta \right) r^{2/3} \right] + \\ & + \frac{3}{5} \bar{F}_2 \left( 1 + \frac{5}{6} M_1 r^{1/3} \right) \left( \sin \frac{5}{3} \theta + \frac{5}{3} \Theta_1 \cos \frac{5}{3} \theta r^{1/3} \right) r^{5/3} + \\ & + \left( \Phi_2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \bar{F}_3 \sin 2\theta \right) r^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Для эквипотенциали  $\Phi = \Phi_*$  уравнению (26) может быть придана следующая форма:

$$\begin{aligned} r^{4/3} \cos \frac{4}{3} \theta = \bar{\Phi}_* + R_5 r^{5/3} + R_6 r^2, \quad \bar{\Phi}_* \equiv 2\Phi_*/\Phi_4; \\ R_5 = \frac{1}{5} \bar{N} \sin \frac{5}{3} \theta, \\ R_6 = \frac{1}{2} \bar{N}^2 \left( -\cos 4\theta + \frac{3}{4} \cos 2\theta - 2 \cos \theta \cos \frac{1}{3} \theta \right) + \\ + \frac{3}{10} \bar{L}\bar{M} \left( \sin 4\theta - \frac{2}{3} \sin 2\theta + 2 \sin \theta \cos \frac{1}{3} \theta \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Разрешая (27) относительно  $r(\theta)$  итеративно, получаем соотношения, описывающие отрицательную эквипотенциаль в нулевом, первом и втором приближениях:

$$\begin{aligned} r_0 = \left( \bar{\Phi}_* / \cos \frac{4}{3} \theta \right)^{3/4}, \quad r_1 = r_0 \left( 1 + G_1 r_0^{1/3} \right), \\ r_2 = r_0 \left( 1 + G_1 r_0^{1/3} + G_2 r_0^{2/3} \right); \end{aligned} \quad (28)$$

$$G_1 = \frac{3}{4} R_5 / \cos \frac{4}{3} \theta, \quad G_2 = \frac{3}{4} R_6 / \cos \frac{4}{3} \theta + \frac{3}{2} G_1^2.$$

В нулевом приближении поверхность  $\Phi = \Phi_* < 0$  соответствует плоскому диоду, в первом приближении решение возмущается за счет компоненты  $\bar{N}$  магнитного поля, во втором приближении свой вклад вносят  $\bar{N}^2$  и комбинация  $\bar{L}\bar{M}$ , отличная от нуля для вихревого течения.

Вычислим кривизну эквипотенциали  $\Phi = \Phi_* < 0$  в первом приближении

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{r_1^2 + 2r_1'^2 - r_1 r_1''}{(r_1^2 + r_1'^2)^{3/2}} = \\ = k_0 \left\{ 1 - \left[ \left( \frac{20}{9} + \frac{11}{27} \cos \frac{8}{3} \theta \right) G_1 - \frac{31}{18} \sin \frac{8}{3} \theta G_1' \right] r_0^{1/3} \right\}, \\ k_0 = -\frac{1}{3} \frac{\cos \frac{4}{3} \theta}{r}, \quad G_1 = \frac{3}{20} \bar{N} \frac{\sin \frac{5}{3} \theta}{\cos \frac{4}{3} \theta}, \\ G_1' = \frac{3}{20} \bar{N} \left( \frac{1}{3} \frac{\cos \frac{5}{3} \theta}{\cos \frac{4}{3} \theta} + \frac{4}{3} \frac{\cos \frac{1}{3} \theta}{\cos^2 \frac{4}{3} \theta} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $k_0$  – кривизна эквипотенциали для плоского диода.

На линии симметрии  $\theta = 3\pi/4$  одномерного решения имеем

$$\begin{aligned} k_1 \left( \frac{3\pi}{4} \right) = k_0 \left( 1 - \frac{71}{180\sqrt{2}} N r_0^{1/3} \right) \approx \\ \approx k_0 \left( 1 - 0.279 \bar{N} r_0^{1/3} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Отрицательные значения потенциала по модулю возрастают на ней по закону

$$\begin{aligned} 2\Phi \left( \frac{3\pi}{4} \right) = \Phi_4 \times \\ \times \left[ -r^{4/3} + \frac{1}{5\sqrt{2}} \bar{N} r^{5/3} + \left( \bar{N}^2 + \frac{1}{2} \bar{L}\bar{M} \right) r^2 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

При  $\bar{N}, \bar{L}\bar{M} > 0$  магнитное поле замедляет этот процесс.

*Нулевая эквипотенциаль.* Запишем уравнение эквипотенциали  $\Phi = 0$  в координатах  $u, v$  и  $X, Y$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} v = \beta_3 u + \beta_4 u^{4/3} + \beta_5 u^{5/3} + \dots, \\ Y = b_3 X + b_4 X^{4/3} + b_5 X^{5/3} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

В силу конформности отображений (11), (12) коэффициенты  $\beta_3$  и  $b_3$  равны и имеют смысл тангенса угла наклона кривой  $\Phi = 0$  к границе пучка в точке старта:

$$\beta_3 = b_3 = \text{tg} \vartheta. \quad (33)$$

Выпишем разложения для первых комплексов из (23), заключенных в квадратные скобки, на линии  $\Phi = 0$ :

$$\frac{v}{u} = \beta_3 + \beta_4 u^{1/3} + \beta_5 u^{2/3} + \dots \quad (34)$$

Главным членом в уравнении  $\Phi = 0$  является

$$u^{4/3} a^{2/3} \cos \frac{4}{3} \vartheta = 0, \quad a = 1 + \beta_3^2. \quad (35)$$

Уравнение (35) имеет два корня, соответствующие ветвям эквипотенциали  $\Phi = 0$  в первом и третьем квадрантах, причем второй корень определяет боковую поверхность катода

$$\cos \frac{4}{3} \vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{3\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}; \quad \sin \frac{4}{3} \vartheta = \sigma = \pm 1. \quad (36)$$

Для функции  $T$  имеем следующее разложение:

$$\begin{aligned} T = \vartheta + \bar{x}, \\ \bar{x} = \frac{1}{a} x - \frac{\beta_3}{a^2} x^2 + \frac{3\beta_3^2 - 1}{a^3} x^3 + \frac{\beta_3 - \beta_3^3}{a^4} x^4, \\ x = \beta_4 u^{1/3} + \beta_5 u^{2/3} + \beta_6 u^{3/3} + \beta_7 u^{4/3}. \end{aligned} \quad (37)$$

Первый комплекс в (23) с учетом соотношений (36), (37) приобретает вид

$$M^{4/3} \cos \frac{4}{3} \theta = \sigma u^{4/3} a^{2/3} \times \left\{ -\frac{4\beta_4}{3a} u^{1/3} + \left( -\frac{4\beta_5}{3a} - \frac{4\beta_3\beta_4^2}{9a^2} \right) u^{2/3} + \left[ -\frac{4\beta_6}{3a} - \frac{8\beta_3\beta_4\beta_5}{9a^2} + \frac{28\beta_3^2\beta_4^3}{27a^3} + \frac{1}{a^3} \left( \frac{68}{81} - \frac{8}{9} a \right) \beta_4^3 \right] u^{3/3} \right\}. \quad (38)$$

Для второго комплекса имеем

$$\frac{3}{5} \bar{F}_2 M^{5/3} \sin \frac{5}{3} T = \frac{3}{5} \bar{F}_2 u^{5/3} a^{5/6} \times \left\{ \sin \frac{5}{3} \vartheta + \left( \frac{5\beta_4}{3a} \cos \frac{5}{3} \vartheta + \frac{5\beta_3\beta_4}{3a} \sin \frac{5}{3} \vartheta \right) u^{1/3} + \left[ \left( \frac{5\beta_5}{3a} + \frac{10\beta_3\beta_4^2}{9a^2} \right) \cos \frac{5}{3} \vartheta + \left( \frac{5\beta_3\beta_5 + \beta_4^2}{6a} - \frac{5\beta_3\beta_4^2}{18a^2} - \frac{25\beta_4^2}{18a^2} \right) \sin \frac{5}{3} \vartheta \right] u^{2/3} \right\}. \quad (39)$$

Третий и четвертый комплексы определены формулами

$$\Phi_2 (u^2 - v^2) + \bar{F}_3 uv = u^{6/3} \left\{ \left[ \Phi_2 (1 - \beta_3^2) + \bar{F}_3 \beta_3 \right] + (-2\Phi_2 \beta_3 \beta_4 + \bar{F}_3 \beta_4) u^{1/3} \right\}, \quad (40)$$

$$M^{7/3} \left( \Phi_3 \cos \frac{7}{3} \theta + \frac{3}{7} \bar{F}_4 \sin \frac{7}{3} \theta \right) = u^{7/3} a^{7/6} \left( \Phi_3 \cos \frac{7}{3} \vartheta + \frac{3}{7} \bar{F}_4 \sin \frac{7}{3} \vartheta \right).$$

Записывая балансы членов порядка  $u^{4/3}$ ,  $u^{5/3}$ ,  $u^{6/3}$ ,  $u^{7/3}$  в (23), получаем уравнения для определения коэффициентов  $\beta_k$  из (32):

$$\beta_4 = \frac{3}{5} a^{7/6} \bar{N} \cos \frac{1}{3} \vartheta, \quad (41)$$

$$\beta_5 = \sigma a^{1/3} \left[ \frac{3}{40} (1 - \beta_3^2) \bar{H}^2 - \frac{3}{4} \beta_3 \bar{L} \bar{M} \right] - a^{4/3} \bar{N}^2 \cos \frac{1}{3} \vartheta \left( \frac{12}{25} \beta_3 \cos \frac{1}{3} \vartheta - \frac{3}{5} \sin \frac{1}{3} \vartheta \right),$$

$$\beta_6 = \sigma a^{3/2} \bar{N} \cos \frac{1}{3} \vartheta \left( -\frac{9}{100} \beta_3 \bar{H}^2 - \frac{9}{20} \bar{L} \bar{M} \right) + a^{3/2} \left[ -\frac{2}{5} \kappa_1 \sin \vartheta + \left( \frac{9}{70} \bar{J}' - \frac{27}{140} \bar{L}^2 \bar{N} + \frac{9}{35} \bar{N} \bar{H}^2 \right) \cos \vartheta \right] + \frac{3}{5} a^{1/6} \beta_5 \bar{N} \frac{\sin \frac{2}{3} \vartheta}{\cos \vartheta} + \frac{3}{5} a^{1/6} \beta_4^2 \bar{N} \times \left( -\frac{10\beta_3}{9a} \sin \frac{1}{3} \vartheta + \frac{5}{9} \sigma \sin \frac{2}{3} \vartheta \cos \frac{1}{3} \vartheta \right).$$

*Переход к локальным декартовым координатам.*

Для вычисления коэффициентов  $b_k$  в (32), определяющих конфигурацию эквипотенциали  $\varphi = 0$  в системе  $X, Y$ , необходимо записать функции  $u, v$  из (13) на этой линии:

$$\frac{Y}{X} = b_3 + b_4 X^{1/3} + b_5 X^{2/3} + b_6 X^{3/3}. \quad (42)$$

Для первой из них получаем

$$u = X + u_4 X^{4/3} + u_5 X^{5/3} + u_6 X^{6/3},$$

$$u_4 = \sigma a^{4/3} a_4, \quad u_5 = a^{5/6} a_5 \sin \frac{5}{3} \vartheta + \frac{4}{3} \sigma a^{-1/3} b_3 b_4 a_4 - \frac{4}{3} a^{5/6} a_4^2 \cos \frac{5}{3} \vartheta,$$

$$u_6 = 2b_3 (a^6 - 2a_4^3) - 3a_4 a_5 (1 - b_3^2) + \frac{5}{3} a^{-1/6} b_4 a_5 \frac{\cos \frac{2}{3} \vartheta}{\cos \vartheta} + \sigma a^{-1/3} \left[ \frac{2}{3} (2b_3 b_5 + b_4^2) - \frac{4}{9} \frac{b_4^2 b_4^2}{a} - \frac{8}{9} \frac{b_4^2}{a} \right] a_4 + \frac{20}{9} a^{-1/6} b_4 a_4^2 \frac{\sin \frac{2}{3} \vartheta}{\cos \vartheta}. \quad (43)$$

Переменная  $v$  из (13) на границе потока (42) имеет вид

$$v = Y + v_4 X^{4/3} + v_5 X^{5/3} + v_6 X^{6/3},$$

$$v_4 = 0, \quad v_5 = -a^{5/6} \times \left( a_5 \cos \frac{5}{3} \vartheta + a_4^2 \sin \frac{5}{3} \vartheta \right) + \frac{4}{3} \sigma a^{-1/3} b_4 a_4,$$

$$v_6 = (-a_6 + 2a_4^3) (1 - b_3^2) - 6a_4 a_5 b_3 + \frac{5}{3} a^{-1/6} b_4 a_5 \frac{\sin \frac{2}{3} \vartheta}{\cos \vartheta} + \sigma a^{-1/3} \left( \frac{4}{3} b_5 + \frac{4}{9} \frac{b_4 b_4^2}{a} \right) a_4 - \frac{20}{9} a^{-1/6} b_4 a_4^2 \frac{\cos \frac{2}{3} \vartheta}{\cos \vartheta}. \quad (44)$$

Приравнивая функции  $v$  в (32) и (44), получаем уравнения для определения коэффициентов  $b_k$ :

$$v = Y + v_5 X^{5/3} + v_6 X^{6/3} = (b_3 X + b_4 X^{4/3} + b_5 X^{5/3} + b_6 X^{6/3}) + (v_5 X^{5/3} + v_6 X^{6/3}) = \beta_3 (X + u_4 X^{4/3} + u_5 X^{5/3} + u_6 X^{6/3}) + \beta_4 X^{4/3} \left[ 1 + \frac{4}{3} u_4 X^{4/3} + \left( \frac{4}{3} u_5 + \frac{2}{9} u_4^2 \right) X^{2/3} \right] + \beta_5 X^{5/3} \left( 1 + \frac{5}{3} u_4 X^{1/3} \right) + \beta_6 X^{6/3}, \quad (45)$$

$$b_4 = \beta_3 u_4 + \beta_4, \quad b_5 = \beta_3 u_5 + \frac{4}{3} \beta_4 u_4 + \beta_5 - v_5,$$

$$b_6 = \beta_3 u_6 + \beta_4 \left( \frac{4}{3} u_5 + \frac{2}{9} u_4^2 \right) + \frac{5}{3} \beta_3 u_4 + \beta_6 - v_6.$$

В явном виде коэффициенты  $b_k$  имеют вид

$$b_4 = -\frac{3}{20} \sigma \beta_3 (1 + \beta_3^2)^{4/3} \bar{N}, \quad 1 + \beta_3^2 = \frac{1}{\cos^2 \vartheta},$$

$$b_5 = (1 + \beta_3^2)^{1/3} \left\{ \frac{3}{40} \sigma (1 - \beta_3^2) (\bar{L} + \bar{M}) \bar{M} + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{3}{40} \sigma - \frac{51}{100} \beta_3 - \frac{3}{40} \sigma \beta_3^2 - \frac{21}{100} \beta_3^3 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{9}{40} + \frac{9}{56} \sigma \beta_3 + \frac{9}{20} \beta_3^3 + \frac{6}{25} \sigma \beta_3^3 \right) \right] \bar{N}^2 \left. \right\},$$

$$b_6 = -\frac{2}{5} \beta_3 (1 + \beta_3^2) \kappa_1 + \frac{8}{35} (1 + \beta_3^2) \bar{J}' +$$

$$+ \frac{9}{280} (1 + \beta_3^2) \bar{L}^2 \bar{N} + \left[ \left( \frac{27}{160} + \frac{9}{100} \sigma \right) \beta_3^4 + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{9}{280} + \frac{9}{100} \sigma \right) \beta_3^2 - \frac{153}{1120} + \frac{27}{200} \sigma (1 - \beta_3^4) \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \bar{M}^2 \bar{N} +$$

$$+ \left[ \left( \frac{9}{160} \sigma \beta_3^4 + \frac{9}{40} \beta_3^3 - \frac{171}{40} \beta_3 + \frac{99}{800} \sigma \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{81}{160} \beta_3^4 + \frac{27}{80} \sigma \beta_3^3 + \frac{9}{10} \beta_3^2 + \frac{27}{80} \sigma \beta_3 + \frac{171}{80} \right) \right] \times$$

$$\times \bar{L} \bar{M} \bar{N} + \left[ \left( -\frac{267}{50} + \frac{411}{400} \sigma \right) \beta_3^5 - \frac{201}{4000} \beta_3^4 + \right.$$

$$+ \left( -\frac{57}{25} + \frac{81}{1000} \sigma \right) \beta_3^3 + \left( -\frac{727}{28000} + \frac{3}{100} \sigma \right) \beta_3^2 +$$

$$+ \left( \frac{153}{50} - \frac{393}{2000} \sigma \right) \beta_3 + \frac{4411}{7000} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{153}{500} \beta_3^5 + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{100} \sigma \beta_3^4 - \frac{213}{250} \beta_3^3 + \frac{9}{50} \sigma \beta_3^2 - \frac{273}{500} \beta_3 + \frac{9}{100} \sigma \right] \bar{N}^3. \quad (46)$$

#### 4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОРИЕНТАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Магнитное сопровождение.* В работе [10] показано, что в случае криволинейных траекторий идеальное магнитное сопровождение, при котором частицы движутся по силовым линиям магнитного поля, в принципе невозможно, так как выполнение этого условия переопределяет систему уравнений, описывающих пучок. Максимально близким к идеальному варианту является отсутствие поперечных компонент поля на одной траектории (оси пучка) и на стартовой поверхности. В рассматриваемой локальной задаче при  $M = N = 0$ ,  $L \neq 0$  справедливы результаты рассмотрения электростатических течений [4].

*Планарный гиротрон.* В случае плоского магнитного поля

$$L, M \neq 0, \quad \bar{N} = 0 \quad (47)$$

отрицательные эквипотенциали определены уравнением

$$r = \frac{\bar{\Phi}^*}{\cos \frac{4}{3} \vartheta} \left[ 1 + \frac{9}{40} \frac{\bar{L} \bar{M}}{\cos \frac{4}{3} \vartheta} \times \right.$$

$$\left. \times \left( \sin 4\theta - \frac{2}{3} \sin 2\theta + 2 \sin \theta \cos \frac{1}{3} \vartheta \right) \sqrt{\frac{\bar{\Phi}^*}{\cos \frac{4}{3} \vartheta}} \right]. \quad (48)$$

Кривые  $\varphi = 0$  описываются соотношением

$$Y = \beta_3 X + (1 + \beta_3^2)^{1/3} \left\{ \frac{3}{40} \sigma (1 - \beta_3^2) (\bar{L} + \bar{M}) \bar{M} X^{5/3} + \right.$$

$$\left. + \left[ -\frac{2}{5} \beta_3 (1 + \beta_3^2) \kappa_1 + \frac{8}{35} (1 + \beta_3^2) \bar{J}' \right] X^{6/3} \right\}. \quad (49)$$

Эквипотенциаль в первом квадранте описывается формулой

$$Y = 2.414X + 0.687 (\bar{L} + \bar{M}) \bar{M} X^{5/3} +$$

$$+ (-6.594 \kappa_1 + 1.561 \bar{J}') X^{6/3}, \quad X > 0. \quad (50)$$

Для боковой формы катода имеем

$$Y = 0.414X - 0.687 (\bar{L} + \bar{M}) \bar{M} X^{5/3} +$$

$$+ (-6.594 \kappa_1 + 1.561 \bar{J}') X^{6/3}, \quad X < 0. \quad (51)$$

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация профилированного теплового зазора в соответствии с требованиями теории улучшает качество пучка, приводит к уменьшению токоперехвата на элементы конструкции, что особенно важно для мощных приборов, используемых в технологических установках различного профиля.

Выполнение зазора в виде щели постоянной ширины, параллельной оси потока, ставит под сомнение результаты математического моделирования при использовании программ траекторного анализа, особенно при расчетах пучков с высокой компрессией. Установившаяся практика задания теплового зазора, как и предложение управлять сходимостью потока за счет уменьшения угла наклона нулевого формирующего электрода, является абсурдной и подобна замене закона  $\varphi \sim x^{4/3}$  вблизи эмитирующей поверхности произвольной функцией, не имеющей физического смысла, например,  $\varphi = 1 - \exp(-x^2)$  [2].

Полученные выше соотношения позволяют синтезировать профилированный тепловой зазор, образованный эквипотенциалью  $\varphi = \varphi_* < 0$  и второй ветвью эквипотенциали  $\varphi = 0$  в третьем квадранте, определяющей боковую поверхность катода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов В.Н., Сыровой В.А. // РЭ. 1976. Т. 21. № 2. С. 418.
2. Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А. // Электрон. техника. Сер. 1. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.
3. Сыровой В.А. // РЭ. 2006. Т. 51. № 7. С. 879.
4. Акимов П.И., Невский П.В., Сыровой В.А. // РЭ. 2009. Т. 54. № 1. С. 98.
5. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
6. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1106.
7. Сыровой В.А. // РЭ. 2016. Т. 61. № 3. С. 263.
8. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1116.
9. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
10. Сыровой В.А. // РЭ. 2001. Т. 46. № 5. С. 617.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 53.86

### СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ТЕРАГЕРЦОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2021 г. **П. Н. Дмитриев<sup>a</sup>, А. Б. Ермаков<sup>a</sup>, Н. В. Кинев<sup>a</sup>, О. С. Киселев<sup>a, b</sup>,  
Л. В. Филиппенко<sup>a</sup>, М. Ю. Фоминский<sup>a</sup>, В. П. Кошелец<sup>a, b, \*</sup>**

<sup>a</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

<sup>b</sup>Институт физики микроструктур РАН,  
Нижний Новгород, ГСП-105, 603950 Российская Федерация

\*E-mail: valery@hitech.cplire.ru

Поступила в редакцию 28.04.2020 г.

После доработки 28.04.2020 г.

Принята к публикации 12.11.2020 г.

Разработаны, оптимизированы и исследованы сверхпроводниковые интегральные схемы, включающие гармонический смеситель с высоким номером гармоники на основе высококачественных туннельных переходов Nb–AlO<sub>x</sub>–Nb и Nb–AlN–NbN. Приведены детали конструкции, методы изготовления и особенности работы сверхпроводниковых элементов и схем, предназначенных для детектирования и исследования терагерцового излучения криогенных интегральных генераторов. Зарегистрирован сигнал интегрального терагерцового генератора и оценена его мощность, а также измерен спектр излучения с разрешением порядка 1 Гц. Реализована синхронизация сверхпроводникового генератора на любой частоте в диапазоне 250...750 ГГц со спектральным качеством более 50%, а также измерены фазовые шумы генератора в режиме ФАПЧ.

DOI: 10.31857/S0033849421040033

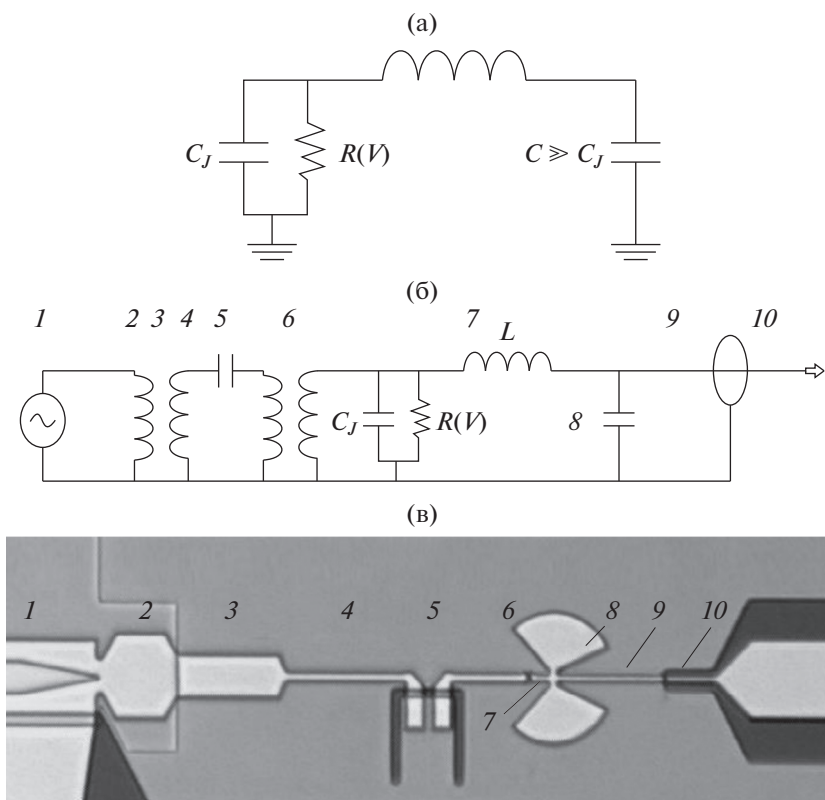
#### ВВЕДЕНИЕ

Идея использовать сверхпроводниковые переходы в качестве интегральных детекторов терагерцового (ТГц) излучения, создаваемого находящимся на той же подложке генератором, представляется очень естественной; она была реализована во многих экспериментальных работах [1–5]. В первых работах воздействие излучения ТГц-генератора регистрировалось по изменению вольт-амперной характеристики (ВАХ) сверхпроводникового детекторного перехода; при этом возможно не только зафиксировать факт наличия излучения, но и в рамках существующих моделей оценить мощность сигнала. Более того, использование сверхпроводникового туннельного перехода в качестве смесителя позволяет измерить спектр интегрального генератора гетеродина [3, 5]. Применение гармонических смесителей в составе сверхпроводникового интегрального приемника (СИП) [6] позволило создать практические устройства для мониторинга атмосферы [7] и измерения спектра излучения новых твердотельных генераторов ТГц-диапазона [8]. Однако детали конструкции и особенности работы этих принципиально важных элементов в составе интегрального приемника не были до настоящего времени достаточно подробно описаны. В данной

статье приводится детальное описание принципов работы интегральных гармонических детекторов и смесителей, обсуждаются различные конструкции и топологии таких элементов и устройств, а также результаты их применения в составе интегральных приемных систем и возможности их использования при создании вновь разрабатываемых сверхпроводниковых генераторов ТГц-диапазона.

#### 1. КОНСТРУКЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО СМЕСИТЕЛЯ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

В качестве интегрального приемного элемента традиционно используется туннельный переход сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник (СИС), который, как правило, изготавливается непосредственно с генератором ТГц-излучения. При разработке конструкции и выборе параметров интегрального сверхпроводникового смесителя следует учитывать несколько важных факторов. Во-первых, СИС-переход с толщиной барьера порядка 1 нм имеет высокую удельную емкость  $C_{уд}$  (примерно 0.08 пФ/мкм<sup>2</sup>), это приводит к существенному шунтированию нелинейного сопротивления перехода  $R_{Bq}(V)$  на высокой частоте. На частотах 300...700 ГГц актив-



**Рис. 1.** Эквивалентная схема СИС-перехода с элементами для отстройки паразитной емкости на рабочей частоте (а); упрощенная схема интегральной структуры (б) и фото (в) интегральной структуры для исследования излучения генератора на основе распределенного джозефсоновского перехода: 1 – генератор на основе распределенного джозефсоновского перехода (показан только небольшой фрагмент перехода с сужением); 2–4 – секции трехступенчатого трансформатора импеданса; 5 – развязка по постоянному току; 6 – односекционный трансформатор импеданса; 7 – СИС-переход с индуктивной секцией для отстройки емкости СИС-перехода в рабочем диапазоне частот; 8 – радиальные секторы, образующие емкость для замыкания индуктивной по высокой частоте секции на нижний электрод; 9 – четвертьволновой отрезок микрополосковой линии для подключения СИС-перехода; 10 – выходная копланарная линия.

ная часть импеданса перехода порядка его нормального сопротивления  $R_N$ . Параметр  $\gamma$ , характеризующий степень шунтирования, может быть записан следующим образом:

$$\gamma = 2\pi f R_{вч} C_{уд} A, \tag{1}$$

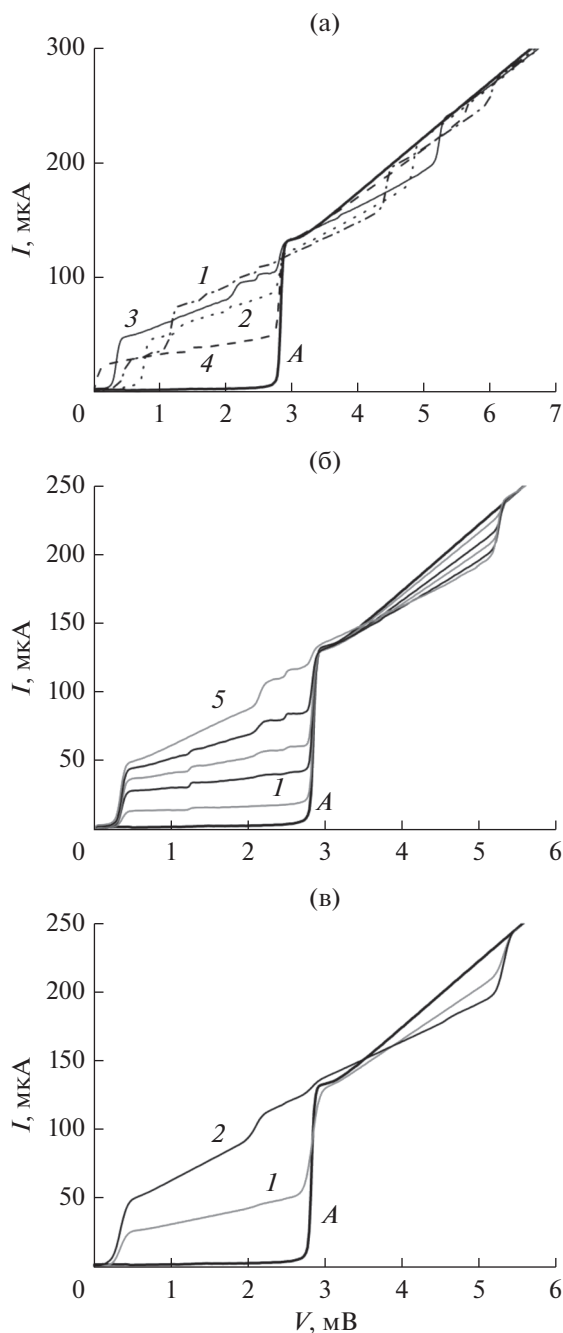
где  $f$  – частота излучения,  $A$  – площадь перехода. Для нормального сопротивления СИС-перехода 25 Ом и площади 1 мкм<sup>2</sup> параметр  $\gamma = 6.5$  на частоте 500 ГГц; это означает, что большая часть СВЧ-тока протекает через емкость перехода  $C_J = C_{уд} A$ . Паразитная емкость может быть “отстроена” на рабочей частоте путем подключения небольшой индуктивности, выполненной, как правило, в виде отрезка микрополосковой линии длиной в несколько микрометров. Индуктивность не должна шунтировать переход по постоянному току, для подсоединения индуктивности только по высокой частоте служит “блокировочная” емкость (рис. 1а), которая может быть реализована с помощью широкополосных радиальных замыкателей. Следует отметить, что диапазон отстройки  $\Delta f$

составляет лишь небольшую часть от центральной частоты ( $\Delta f \approx 2f/\gamma$ ), чем выше плотность тока перехода, тем ниже  $\gamma$  и тем шире рабочий диапазон смесителя.

Импеданс СИС структуры с отстроенной емкостью очень мал:

$$\text{Re}Z_{\text{СИС}} = R_{вч} / (1 + \gamma^2), \tag{2}$$

для согласования с другими элементами требуется использование трансформаторов импеданса. Кроме того, для обеспечения независимого питания генератора и смесителя требуется развязка этих элементов по постоянному току, которая не будет препятствовать прохождению сигнала высокой частоты от генератора к смесителю. Следует также учесть, что выходной импеданс генератора составляет доли ома, что делает необходимым использование многосекционного трансформатора импеданса для согласования со схемой развязки и подключения к смесителю.



**Рис. 2.** ВАХ туннельного перехода  $\text{Nb}-\text{AlO}_x-\text{Nb}$  (а) площадью  $1.4 \text{ мкм}^2$  при воздействии мощности СГГ на частотах 400 (1), 500 (2), 600 (3) и 700 ГГц (4); ВАХ СИС-перехода при различных значениях мощности СГГ на частоте 600 ГГц (б); модельные ВАХ при  $\alpha = 0$ , 1 (1) и 2 (2). Кривой А на всех рисунках показана автономная ВАХ.

На рис. 1б представлена упрощенная схема структуры для исследования излучения генератора ТГц-излучения, а на рис. 1в — фотография экспериментальной интегральной структуры с сверхпроводниковым генератором гетеродина (СГГ) на

основе распределенного джозефсоновского перехода. На рис. 1в представлен конкретный вариант СГГ, однако схема может быть использована для исследования любого другого криогенного тонкопленочного генератора. В работе приведены результаты исследования интегральных схем, изготовленных на основе туннельных структур  $\text{Nb}-\text{AlO}_x-\text{Nb}$  и  $\text{Nb}-\text{AlN}-\text{NbN}$ . Технология изготовления сверхпроводниковых интегральных структур на основе высококачественных туннельных переходов была разработана и оптимизирована в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН [9–11]; эта технология была апробирована при изготовлении малошумящих приемных устройств ТГц-диапазона для радиоастрономии и интегральных приемников для мониторинга атмосферы и лабораторных применений [7, 12–14]. Основные элементы согласующих схем выполнены в виде отрезков микрополосковых линий на основе пленок ниобия; в качестве изолятора был использован слой двуокиси кремния  $\text{SiO}_2$  толщиной 400 нм (в первой секция трансформатора толщина  $\text{SiO}_2$  составила 200 нм).

Вольтамперная характеристика (ВАХ) смешительного туннельного перехода  $\text{Nb}-\text{AlO}_x-\text{Nb}$  площадью  $1.4 \text{ мкм}^2$  показана на рис. 2а (кривая А). Нормальное сопротивление перехода составляет 20 Ом, отношение сопротивления под щелью к нормальному сопротивлению (параметр качества) около 30, величина суммарной энергетической щели  $V_{\text{щ}} = 2.8 \text{ мВ}$ . Емкость туннельного перехода отстроена в широкой полосе частот, это позволяет регистрировать излучение от 400 до 700 ГГц (см. рис. 2а). На рисунке хорошо видны квазичастичные ступени тока, обусловленные стимулированным туннелированием электронов под действием фотонов. Ступени “растут” от щелевой особенности, их положение определяется выражением

$$V = V_{\text{щ}} \pm hf/e, \quad (3)$$

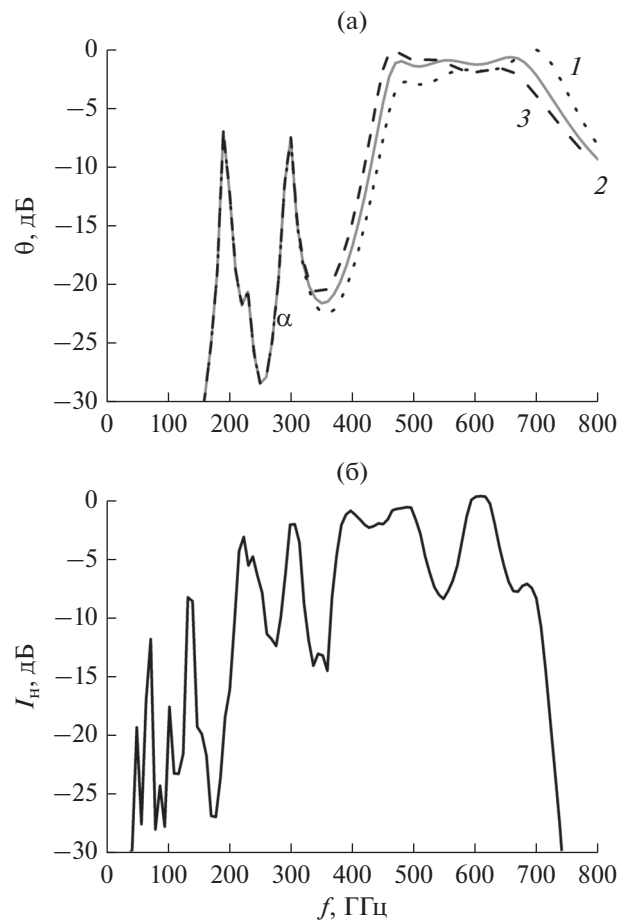
где  $h$  — постоянная планка,  $f$  — частота излучения,  $e$  — заряд электрона. Измеряя ток накачки при напряжении на ступени, можно оценить мощность излучения, дошедшую до детектора (рис. 2б). Оценить мощность, выделившуюся в переходе, можно путем сравнения эксперимента с расчетами в рамках теории Тукера и Фелдмана [15], для расчета была использована модельная ВАХ (см., например, [16]). Модельная ВАХ полностью совпадает с экспериментальной зависимостью (ср. кривые А на рис. 2в и 2а). На рис. 2в показаны также расчетные кривые для двух значений высокочастотного напряжения  $V_{\text{вч}}$  для частоты накачки 600 ГГц. Для описания квазичастичных ступеней тока основным параметром является нормированное значение высокочастотного напряжения

$$\alpha = eV_{\text{вч}}/hf. \quad (4)$$



На рисунке показаны расчетные ВАХ при двух значениях  $\alpha$  1 и 2; отметим, что первое значение соответствует оптимальному уровню накачки для работы малошумящих СИС-смесителей. Видно, что расчетные зависимости достаточно хорошо описывают экспериментальные кривые (рис. 2б), небольшие отклонения связаны с необходимостью учитывать влияние внешней электродинамической системы, которое зависит от частоты. На экспериментальных кривых при напряжениях примерно 1.2 и 2.4 мВ видны джозефсоновские ступени тока ( $V_{Дж} = nhf/2e$ ), эти ступени позволяют достаточно точно определить частоту излучения в случае неполного подавления критического тока.

Для точной оценки выделившейся в переходе мощности необходимо знать величину действительной части высокочастотного импеданса СИС-перехода  $Re Z_{ВЧ}$ . Эта величина может быть вычислена в рамках модели [15], однако в реальной ситуации необходимо учитывать импеданс внешней электродинамической системы. Для оценки мощности сверхпроводникового генератора гетеродина (СГГ) необходимо также учитывать его согласование с приемным элементом. Эти расчеты требуют учета особенностей поведения сверхпроводниковых пленок на высокой частоте и знание параметров всех структур. На рис. 3а представлены результаты расчета согласования СГГ с СИС-переходом  $\theta$  для трех значений площади перехода. На рис. 3б показана зависимость тока накачки СИС-перехода, измеренная при напряжении 2.5 мВ, в зависимости от частоты СГГ. Ток накачки СИС-перехода характеризует мощность принятого ВЧ-сигнала, что в свою очередь определяется согласованием элементов схемы. Видно, что экспериментальная зависимость достаточно хорошо соответствует расчету, провал на частоте 550 ГГц, по-видимому, вызван резонансами в структуре, которые не были учтены в модели, а также неполным соответствием экспериментальных параметров структуры значениям, используемых в модели. Следует отметить, что в расчете была использована модель идеального проводника и не учитывалось возрастание потерь в пленках ниобия на частотах выше энергетической щели (порядка 720 ГГц). Превышение экспериментальных значений тока накачки над результатами модели при частотах ниже 400 ГГц обусловлено тем фактом, что излучение СГГ содержит вторую и третью гармоники. При основной частоте СГГ 300 ГГц, на которой согласование невелико, вторая гармоника на частоте 600 ГГц хорошо согласована, что приводит к накачке смесителя, которая фиксируется как воздействие на основной частоте 300 ГГц. Таким образом, правильно спроектированная схема на основе сверхпроводникового перехода позволяет

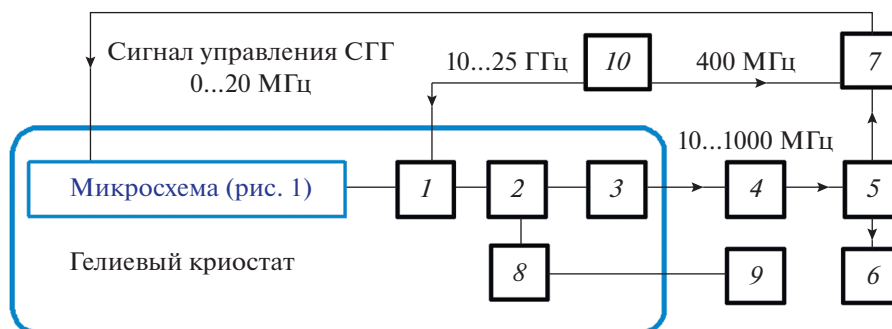


**Рис. 3.** Рассчитанные импедансы СГГ и СИС-перехода  $\theta$  в зависимости от частоты (а) для схемы, представленной на рис. 1, при  $A = 1.1$  (1), 1.4 (2), 1.7 (3); экспериментальная зависимость тока накачки СИС-перехода  $I_n$  (б) при напряжении 2.5 мВ от частоты СГГ (ток накачки нормирован на максимальное значение при частоте 600 ГГц).

измерять сигнал СГГ ТГц-диапазона, оценивать его частоту и мощность.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ СМЕСИТЕЛЬ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ СГГ И ЕГО ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Описанную выше интегральную структуру можно использовать не только для детектирования сигнала СГГ, но и для измерения спектра его излучения, а также для стабилизации частоты СГГ [5, 17–21]. Схема такого эксперимента представлена на рис. 4. Основным элементом является туннельный СИС-переход, который используется как гармонический смеситель с высоким номером гармоники [22–24]. Сигнал от опорного синтезатора (10)  $f_{снт}$  с частотой порядка 20 ГГц через направленный ответвитель 1 подается на СИС-пере-



**Рис. 4.** Блок-схема системы для измерения спектров излучения СГГ и его фазовой синхронизации: 1 – направленный ответвитель для ввода опорного сигнала диапазона 10...25 ГГц, 2 – объединитель сигналов ПЧ и постоянного тока, 3 – криогенный НЕМТ-усилитель диапазона 10...1000 МГц, 4 – дополнительный усилитель, 5 – разветвитель, 6 – спектроанализатор, 7 – система фазовой автоподстройки частоты с частотным детектором, 8 – криогенные фильтры для гармонического смесителя, 9 – блок задания смещения и измерения для гармонического смесителя, 10 – синтезатор.

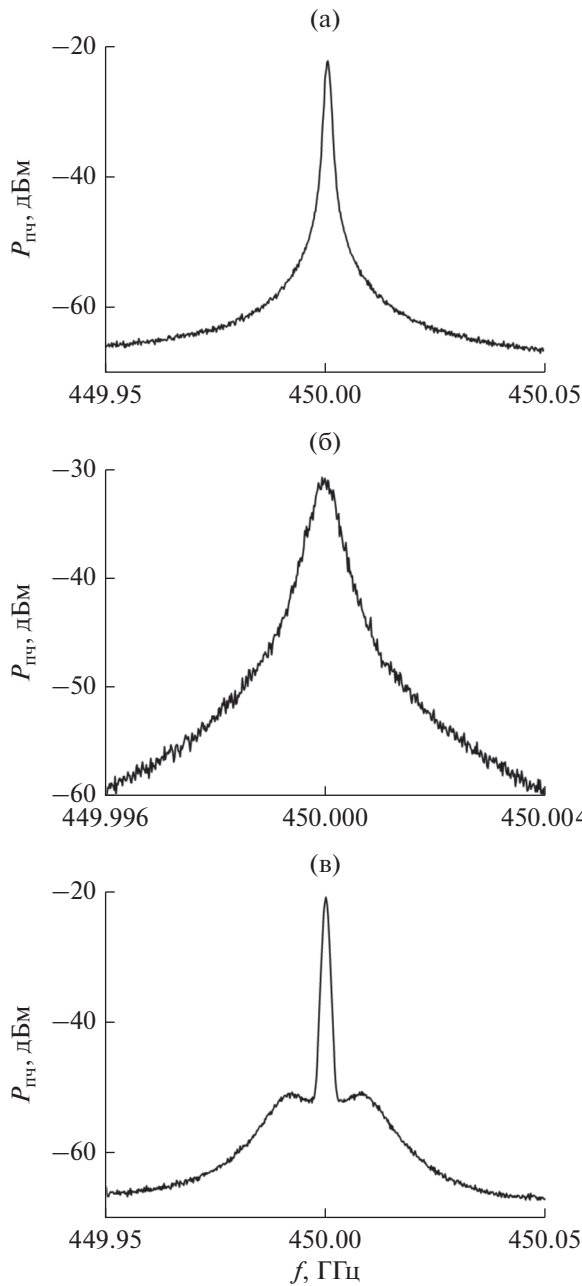
ход, в котором “ $n$ ” гармоника сигнала синтезатора смешивается с сигналом СГГ с частотой  $f_{\text{СГГ}}$ . Разностный сигнал на промежуточной частоте  $f_{\text{пч}}$  (порядка 1 ГГц)

$$f_{\text{пч}} = \pm(f_{\text{СГГ}} - nf_{\text{синт}}) \quad (5)$$

подается на криогенный усилитель 3 на основе НЕМТ (high electron mobility transistor) (шумовая температура приблизительно 5 К, усиление 30 дБ), выводится из криостата и попадает на дополнительный усилитель 4 (регулируемое усиление 40...60 дБ). Далее преобразованный сигнал разветвляется на спектроанализатор 6 для записи спектров и на систему фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с дополнительным частотным детектором 7. Частотный детектор с полосой регулирования порядка 10 кГц стабилизирует частоту, устраняя низкочастотные наводки и дрейфы температуры (см. рис. 5а). На рисунке показана зависимость выходного сигнала ПЧ  $P_{\text{пч}}$  от частоты; видна автономная линия излучения СГГ на основе распределенного туннельного перехода Nb–AlO<sub>x</sub>–Nb, ширина линии  $\delta f = 1$  МГц определяется разрешением спектроанализатора, отношение сигнал/шум равно 45 дБ. Реальная ширина линии 0.5 МГц (см. рис. 5б), где та же линия измерена с разрешением 100 кГц. При использовании системы ФАПЧ входящий сигнал сравнивается с опорным сигналом 400 МГц от синтезатора, сигнал фазовой ошибки подается на СГГ для стабилизации его частоты. Результат представлен на рис. 5в; отношение сигнала в центральном пике к полной мощности, так называемое спектральное качество (СК), составляет 97.5%. Полоса регулирования системы ФАПЧ около 17 МГц, она определяется длиной кабелей от гармонического смесителя до ФАПЧ и обратно к СГГ. Следует отметить, что соотношение этой величины и автономной ширины линии генерации СГГ определяет итоговое СК: чем больше ширина линии, тем меньшее значение СК может быть получено [25].

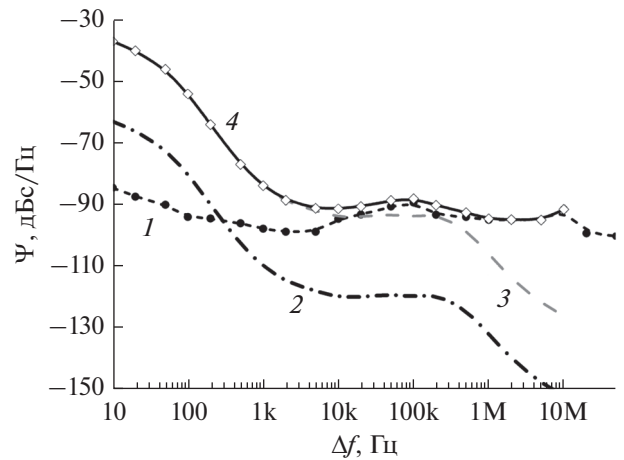
Величина относительных фазовых шумов СГГ в режиме ФАПЧ  $\Psi$  в зависимости от величины отстройки  $\Delta f$  от центральной частоты  $f$  представлена на рис. 6 (кривая 1). Эти шумы были измерены относительно опорного синтезатора; для того чтобы получить значения абсолютных фазовых шумов, необходимо добавить шумы опорного синтезатора (кривая 2), умноженные на квадрат номера гармоники ( $n = 20$ ); величина абсолютных фазовых шумов представлена кривой 4.

Следует отметить, что разработанная методика позволяет проводить измерения спектра излучения генератора и обеспечивать режим ФАПЧ даже при небольшом уровне мощности СГГ, достигающей до гармонического смесителя. На рис. 7 представлены ток гармонического смесителя, индуцированного СГГ на частоте 670 ГГц (без подачи сигнала синтезатора), и величины итогового СК в зависимости от тока смещения СГГ (эта величина определяет мощность, излучаемую СГГ). Из рисунка видно, что предельное значение СК (определяемого параметрами СГГ) может быть реализовано уже при небольшой мощности входящего сигнала (ток смещения СГГ 14 мА). Эта мощность вызывает лишь небольшой индуцированный ток на гармоническом смесителе (4% от максимального тока накачки). Кроме того, в СИС-переходе сосуществуют два режима преобразования. Первый режим, который в настоящее время повсеместно используется, – квазичастичный, основанный на эффекте стимулированного туннелирования электронов под действием фотонов [15, 22], при этом критический ток подавляется внешним магнитным полем, и поэтому удается получать шумовые температуры, близкие к квантовому пределу  $hf/k_B$  [7, 14, 15]. Второй режим – джозефсоновский, с использованием нелинейности сверхпроводящего тока, позволяет получать меньшие потери преобразования, но характеризуется большим уровнем шума. Исследованию и сравнению этих двух режимов посвящены работы

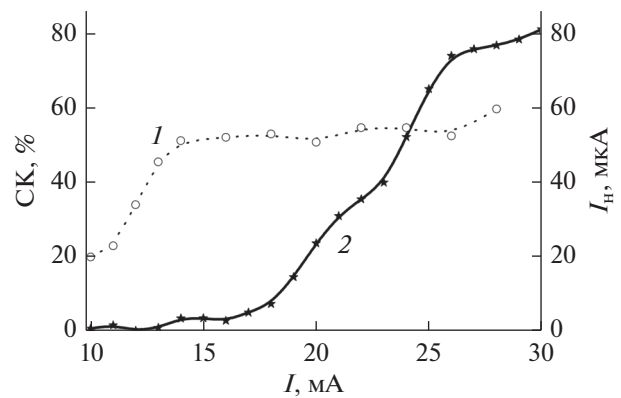


**Рис. 5.** Спектр излучения СГГ на частоте 450 ГГц, измеренный с помощью гармонического смесителя: в режиме частотной стабилизации при полосе разрешения спектроанализатора 1 (а) и 100 МГц (б) и в режиме фазовой стабилизации при разрешении 1 МГц (в).

[23, 24]. В них показано, что при работе в режиме джозефсоновского смесителя с высоким номером гармоники, присутствие мощного сигнала гетеродина позволяет реализовывать близкие значения отношения сигнал/шум для обоих случаев, при этом выходной сигнал джозефсоновского смесителя на 1...2 порядка превосходит сигнал квазичастичного, что важно для эффективной работы системы ФАПЧ.

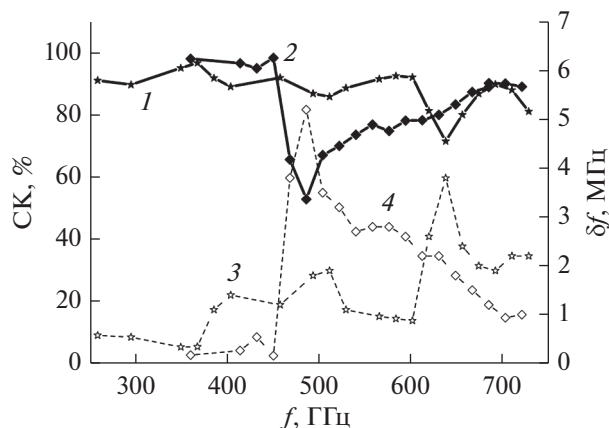


**Рис. 6.** Фазовый шум СГГ  $\Psi$  на частоте 450 ГГц в зависимости от величины отстройки  $\Delta f$  от несущей частоты  $f$  (кривая 1), фазовый шум опорного синтезатора на основной частоте 22.48 ГГц (кривая 2) и на 20 гармонике (кривая 3), а также полный (абсолютный) фазовый шум такого генератора в режиме ФАПЧ с учетом вклада шумов синтезатора (кривая 4).



**Рис. 7.** Спектральное качество СГГ в режиме ФАПЧ на частоте 670 ГГц (кривая 1) и соответствующий ток накачки гармонического смесителя в зависимости от тока питания генератора (кривая 2).

Разработанная методика и использование “смешанного” режима преобразования (без подавления джозефсоновского тока) позволяют проводить измерения линии излучения криогенных генераторов в очень широком диапазоне частоты с использованием только одного интегрального гармонического смесителя. Пример таких измерений на частотах от 250 до 750 ГГц для двух типов СГГ представлен на рис. 8, где сравниваются результаты для лучших реализаций генераторов на основе распределенных переходов Nb–AlO<sub>x</sub>–Nb и Nb–AlN–NbN [25]. Вследствие эффекта джозефсоновской самонакачки [26] на напряжениях  $V_{ш}/3$  в СГГ резко возрастает затухание, что приводит к уширению линии  $\delta f$  и снижению спектрального качества в переходной области напряжений чуть выше  $V_{ш}/3$ . Для переходов Nb–AlO<sub>x</sub>–Nb переход



**Рис. 8.** Ширина автономной линии излучения СГГ  $\delta f$  (3, 4) и результирующее спектральное качество (СК) СГГ в режиме ФАПЧ (1, 2) в зависимости от частоты генератора: для СГГ на основе структур Nb–AlN–NbN (1, 3) и Nb–AlO<sub>x</sub>–Nb (2, 4).

происходит на частоте 450 ГГц, а для Nb–AlN–NbN — на 600 ГГц. Проведенные измерения позволили разработать и успешно испытать интегральные приемные устройства для практических приложений с требуемыми частотными характеристиками [6–8, 25].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, приведено детальное описание принципов работы интегральных гармонических детекторов и смесителей, рассмотрены различные конструкции и топологии таких элементов, а также результаты их применения в составе интегральных приемных устройств. Показано, что на основе разработанного подхода возможно измерение спектра криогенных генераторов гетеродина в диапазоне 250...750 ГГц, а также обеспечивать режим их ФАПЧ со спектральным качеством от 50 до 98% во всем частотном диапазоне. Проведенные разработки позволили создать интегральные приемные устройства для мониторинга атмосферы Земли и лабораторных приложений [7, 8, 25]. Аналогичные подходы могут быть использованы для исследования вновь разрабатываемых сверхпроводниковых генераторов ТГц-диапазона [27], создаваемых для изучения новых стратегий взаимной синхронизации больших массивов джозефсоновских контактов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-42-04415). Туннельные переходы были изготовлены в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН в рамках государственного задания с использованием УНУ 352529.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nagatsuma T., Enpuku K., Irie F., Yoshida K. // J. Appl. Phys. 1983. V. 54. № 6. P. 3302.
2. Wan K.L., Jain A.K., Lukens J.E. // IEEE Trans. 1989. V. MAG-25. № 2. P. 1076.
3. Zhang Y.M., Winkler D., Claeson T. // Appl. Phys. Lett. 1993. V. 62. № 24. P. 3195.
4. Koshelets V.P., Shchukin A.V., Shitov S.V., Filippenko L.V. // IEEE Trans. 1993. V. AS-3. № 1. P. 2524.
5. Koshelets V.P., Shitov S.V., Shchukin A.V. et al. // Appl. Phys. Lett. 1996. V. 69. № 5. P. 699.
6. Koshelets V.P., Shitov S.V. // Superconductor Sci. Technol. 2000. V. 13. № 5. P. R53.
7. de Lange G., Boersma D., Dercksen J. et al. // Superconductor Sci. Technol. 2010. V. 23. № 4. P. 045016.
8. Li M., Yuan J., Kinev N. et al. // Phys. Rev. B. 2012. V. 86. № 6. P. 060505(R).
9. Koshelets V.P., Kovtonyuk S.A., Serpuchenko I.L. et al. // IEEE Trans. 1991. V. MAG-27. № 2. P. 3141.
10. Filippenko L.V., Shitov S.V., Dmitriev P.N. et al. // IEEE Trans. 2001. V. AS-11. № 1. P. 816.
11. Dmitriev P.N., Lapitskaya I.L., Filippenko L.V. et al. // IEEE Trans. 2003. V. AS-13. № 2. P. 107.
12. Koshelets V.P., Ermakov A.B., Filippenko L.V. et al. // IEEE Trans. 2007. V. AS-17. № 2. P. 336.
13. Koshelets V.P., Dmitriev P.N., Faley M.I. et al. // IEEE Trans. 2015. V. TST-5. № 4. P. 687.
14. Rudakov K.I., Dmitriev P.N., Baryshev A.M. et al. // Изв. вузов. Радиофизика. 2019. Т. 62. № 7–8. P. 613.
15. Tucker J.R., Feldman M.J. // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. № 4. P. 1055.
16. Шитов С.В. Интегральные устройства на сверхпроводниковых туннельных переходах для приемников миллиметровых и субмиллиметровых волн: Дис. докт. физ.-мат. наук. М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2003. 428 с.
17. Koshelets V.P., Shitov S.V., Dmitriev P.N. et al. // Physica C. 2002. V. 367. № 1–4. P. 249.
18. Koshelets V.P., Shitov S.V., Shchukin A.V. et al. // IEEE Trans. 1999. V. AS-9. № 2. P. 4133.
19. Koshelets V.P., Shitov S.V., Filippenko L.V. et al. // Rev. Sci. Instrum. 2000. V. 71. № 1. P. 289.
20. Kinev N.V., Rudakov K.I., Filippenko L.V. et al. // J. Appl. Phys. 2019. V. 125. № 15. P. 151603.
21. Kinev N.V., Rudakov K.I., Filippenko L.V. et al. // IEEE Trans. 2019. V. TST-9. № 6. P. 557.
22. Калашиников К.В., Худченко А.В., Барышев А.М., Кошелец В.П. // РЭ. 2011. Т. 56. № 6. С. 751.
23. Калашиников К.В., Артанов А.А., Филипченко Л.В., Кошелец В.П. // ФТТ. 2016. Т. 58. № 11. С. 2117.
24. Kalashnikov K.V., Artanov A.A., de Lange G., Koshelets V.P. // IEEE Trans. 2018. V. AS-28. № 4. P. 2400105.
25. Dmitriev P.N., Filippenko L.V., Koshelets V.P. Josephson Junctions. History, Devices, and Applications / Eds. by E. Wolf, G. Arnold, M. Gurvitch, J. Zasadzinski. Boca Raton: CRC Press, 2017. P. 185.
26. Koshelets V.P., Shitov S.V., Shchukin A.V. et al. // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. № 9. P. 5572.
27. Galin M.A., Borodianskyi E.A., Kurin V.V. et al. // Phys. Rev. Appl. 2018. V. 9. № 5. P. 054032.